Erläuterungen

über

einige Punkte

des

BOMBARDIER PRUSSIEN.

Von

A. L. v. Massenbach.

Lieutenant in Königlich Preußischen Diensten.

Halle,

bey Johann Jacob Gebauer.

1785.

Vorbericht.

Ich glaube, keine unnöthige Arbeit unternommen zu haben, wenn ich es wage, über einige Punkte des Bombardier prussien, Erläuterungen herauszugeben, welche diese vortrefliche und Genievolle Auflösung des ballistischen Problems, an dessen vollständiger Entwicklung die Bernoullis und Eulers vergebens gearbeitet haben, gemeinnüziger machen. Diese wenige Bogen können von keiner bessern Empfehlung begleitet werden, als wenn ich die Ehre habe, dem Leser zu sagen, daß ich so glücklich gewesen bin, den grösten und besten Theil derselben von dem Herrn Verfasser des Bombardier prussien selbsten zu erhalten, so wie die Anzeige der Druckfehler, welche sich in jenem Werke befinden und welche ich hier angehängt habe.

Der Verfasser.

§. 1.

Folgende Betrachtungen müssen angestellet werden, wenn man sich von dem in diesem Paragraphen angeführten Sazze überzeugen will.

Wir wollen annehmen, die Piramide $ABCDE$, deren Seitenfläche DEC mit dem Horizont parallel ist, habe sich in der Zeit t durch den Raum $FC = x$, in einer flüßigen Masse, deren Dichtigkeit $= D$ ist, beweget. (*fig.* 1.) Man stelle sich die Seitenfläche ACD allein vor, welche sich, so wie der ganze Körper, in der Zeit Δt durch den Raum $Cc = \Delta x$ beweget. (*fig.* 2.) Es muß also das Dreieck ABC (*fig.* 1.) einen flüßigen Körper vor sich hertreiben, dessen Grundfläche der Jnnhalt des Dreiecks ABC und dessen Höhe Cd ist (*fig.* 2.), wo nämlich Cd auf AC senkrecht ist. Wenn nun der Winkel $ACD = \varphi$; so ist auch der Winkel $acD = \varphi$ und es verhält sich $Cc : Cd = Sin.\ tot : Sin.\ \varphi$. oder $\Delta x : Cd = 1 : Sin.\ \varphi$, woraus folgt $Cd = \Delta x\ Sin.\ \varphi$. Es wird nämlich vorausgesezzet, daß ac mit AC parallel ist. Demnach ist der Jnnhalt jenes flüßigen Körpers, $=$ Dreieck $ABC . \Delta x\ Sin.\ \varphi$. Man sezze den Jnnhalt jenes Dreiecks, $= bb$; so ist $Dbb\Delta x\ Sin.\ \varphi$ das Gewicht des flüßigen Körpers, welchen das Dreieck ABC, in der Zeit Δt, vor sich hertreiben muß.

Die Geschwindigkeit der Piramide $ABCDE$, in dem Punkte C, sey $= u$. Da alle Punkte der Fläche ABC, mit einerlei Geschwindigkeit, auf den flüßigen Körper, stoßen; so gehet die Richtung, nach welcher der flüßige Körper Widerstand äussert, durch den Schwerpunkt der Fläche ABC. Es sey G dieser Schwerpunkt und GH die mit dem Horizont parallele Richtung, nach welcher sich der Körper $ABCDE$ beweget. Man kann $GH = u$ oder der Geschwindigkeit gleich sezzen, womit sich die Piramide beweget. Man verzeichne das Parallelogramm $GLHK$, wovon die Seite LG auf AC senkrecht, die Seite GK aber mit AC parallel läuft; so siehet man leicht, daß man die Geschwindigkeit GH in die beiden Geschwindigkeiten GL und GK zerlegen könne, wovon nur die erstere hier betrachtet wird, weil der feste Körper $ABCDE$ nur vermöge der Geschwindigkeit GL auf den flüßigen Körper stosset. Nun ist der Winkel $HGC = ACD = \varphi = GHL$; und es verhält sich $LG : GH = Sin.\varphi : Sin.tot$ oder $LG : u = Sin.\varphi : 1$, woraus folgt $LG = u\,Sin.\varphi$.

Wäre nun der in dem Raume $AaCc$ enthaltene flüßige Körper ein fester Körper; so würde man $\frac{Mu\,Sin.\varphi}{M + Dbb\Delta x\,Sin.\varphi}$ für die Geschwindigkeit erhalten, mit welcher sich der Körper $ABCDE$ nach dem Stosse beweget, wenn der flüßige Körper in Ruhe und das Gewicht des festen Körpers $= M$ angenommen wird. Es ist demnach $u\,Sin.\varphi - \frac{Mu\,Sin\,\varphi}{M + Dbb\Delta x\,Sin.\varphi}$ $= \frac{Mu\,Sin.\varphi + Dbbu\Delta x\,Sin.^2\varphi - Mu\,Sin.\varphi}{M + Dbb\Delta x\,Sin.\varphi} = \frac{Dbb\Delta xu\,Sin.^2\varphi}{M + Dbb\Delta x Sin.\varphi}$ die Geschwindigkeit, welche der Körper $ABCDE$ verlieren würde, wenn er auf einen ruhenden festen Körper, dessen Gewicht $= Dbb\Delta x\,Sin.\varphi$ ist, stöße. Da er aber auf einen flüßigen Körper stoßet; so ist $\frac{Dbb\Delta xu\,Sin.^2\varphi}{M + Dbb\Delta x\,Sin.\varphi}$ grösser, als die Geschwindigkeit, welche der feste Körper in der That verlieret. Da er nun die Geschwindigkeit $-\Delta u$ verlieret, während der Zeit Δt; so ist $-\Delta u < \frac{Dbb\Delta xu\,Sin.^2\varphi}{M + Dbb\Delta x\,Sin.\varphi}$, oder $-\frac{\Delta u}{\Delta x} < \frac{Dbbu\,Sin.^2\varphi}{M + Dbb\Delta x\,Sin.\varphi}$. Aber man siehet leicht, daß $-\frac{\Delta u}{\Delta x} > \frac{Dbbu\,Sin.^2\varphi}{M}$ seyn müsse. Dieß sind demnach die

Gren-

Grenzen, innerhalb welchen der Werth von $-\frac{\Delta u}{\Delta x}$ liegt. Beide Grenzen nähern sich, wenn Δx, Δt, Δu abnehmen und sind einander vollkommen gleich, wenn $\Delta x = o = dx$, $\Delta t = o = dt$, $\Delta u = o = du$. Dadurch findet man also $\frac{du}{dx} = -\frac{Dbbu\,Sin.^2\varphi}{M}$ oder $du = -\frac{Dbbu\,Sin.^2\varphi dx}{M}$. Weil $dx = udt$ und daher $udx = u^2dt$; so wird $du = -\frac{Dbb\,Sin.^2\varphi u^2 dt}{M}$.

Wäre an dem Schwerpunkt G eine Kraft P angebracht, welche nach einer Richtung würkt, die derjenigen grade entgegengesezzet, nach welcher sich der feste Körper beweget; so erhält man $du = -\frac{2gPdt}{M}$ und mithin $Dbb\,Sin.^2\varphi.u^2 = 2gP$, woraus folgt $P = \frac{Dbbu^2\,Sin.^2\varphi}{2g}$. Ist nun h die Höhe, von welcher ein schwerer Körper fallen müste, um die Geschwindigkeit u zu erlangen; so ist $\frac{u^2}{2g} = 2h$ und demnach $P = 2Dbbh\,Sin.^2\varphi$.

Die verschiedenen Schriftsteller, welche den Widerstand flüßiger Körper abgehandelt haben, kommen in der Bestimmung der absoluten Grösse dieses Widerstandes nicht überein. Bei einigen ist derselbe um die Hälfte kleiner, als wir ihn hier gefunden haben. So gar diejenigen, welche Versuche zu Hülfe genommen, sind auch dadurch nicht auf einerlei Resultat geführet worden. Wenn ein flüßiger Körper auf einen ruhenden, festen Körper stößet; so werden sich die Theile des flüßigen Körpers um die Oberfläche des festen Körpers herum zu bewegen suchen, um andern Theilen Platz zu machen. Dadurch muß aber nothwendig in der Nähe dieser Oberfläche mit den Geschwindigkeiten derselben eine Aenderung vorgehen; und dieser Umstand hat einen wichtigen Einfluß auf die Berechnung des Stosses. Um denselben zu bestimmen, müste man die Gesezze kennen, nach welchen diese Geschwindigkeiten verändert werden. Man müste die Entfernung wissen, in welcher, von der Oberfläche des ruhenden, festen Körpers, diese Aenderungen vorgehen. Wenn ein fester Körper auf einen flüßigen stößet; so kann man sich den flüßigen Körper in gewisse Schichten eingetheilt vorstellen. So bald der feste Körper auf die erste Schichte oder Lage

 stößet,

stößet; so bald wird den folgenden Lagen auch schon eine Bewegung mitgetheilet und der feste Körper trift sie nicht mehr in Ruhe an. Ueberdieß weichen die Theilchen des flüßigen Körpers seitwärts aus, um den Raum anzufüllen, welchen der feste Körper, bei seiner Vorrückung, hinter sich leer läßt. Es werden also nicht alle Theile, welche vor der vordern Fläche des Körpers liegen, unmittelbar von demselben fortgestossen.

Man siehet hieraus, daß es hier auf die Bestimmung des Werthes von h ankomme. Verhält sich nun $2h$ zu dem wahren Werthe von $2h$, $= \lambda : 1$; so ist derselbe $= 2\lambda h$ und wir erhalten, $P = 2Dbb\lambda h\,Sin.^2\varphi$ oder auch $P = \frac{\lambda Dbbu^2 Sin.^2\varphi}{2g}$.

Es sey $ABDEC$ eine viereckigte Piramide, deren Grundfläche $ABDE$ ein Quadrat ist, und deren Höhe CI im Mittelpunkt I der Grundfläche senkrecht stehet. (*fig. 3.*) Wenn sich diese Piramide, nach der Richtung IC, in einem flüßigen Körper, beweget; so kann bewiesen werden: daß **der Widerstand des flüßigen Körpers, nach der Richtung der Axe CI, würken werde.** Man halbire AB in F und ziehe CF; so liegt in dieser Linie der Schwerpunkt des Dreiecks ABC. Wenn man GH mit IC, durch den Punkt G, welcher der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist, parallel ziehet und die Linie aG, in diesem Punkte, auf die Ebene des Dreiecks ABC senkrecht sezzet; so haben wir schon bewiesen, daß aG die Richtung sey, nach welcher der flüßige Körper der Bewegung des festen Körpers sich widersezzet. Man denke sich durch CI, CF eine Ebene CFI, von welcher man leicht beweisen kann, daß sie auf der Ebene ABC senkrecht stehen wird. Verlängert man aG bis N; so liegt GN in der Ebene CFI und GN ist auf CF senkrecht und schneidet die Linie CI in N.

Stellt man eben diese Betrachtungen bei dem Dreieck CED an, welches dem Dreieck ABC grade über lieget und demselben vollkommen gleich ist; so wird man finden, daß eine Linie, welche auf dem Schwerpunkt g des Dreiecks CED senkrecht stehet, die Linie CI in eben dem Punkte N schneiden werde, in welchem die Linie NG dieselbe schneidet. Eben dieß ist auch von den Linien wahr, welche auf den Schwerpunkten der Dreiecke ACE, BCD senkrecht stehen. Alle nämlich schneiden sich in dem Punkt N der Höhe CI der Piramide.

Weil GH mit IC parallel ist; so hat man $CGH = GCI = \varphi =$ dem Anstoßwinkel. Bezeichnen wir durch A den Innhalt eines der, unter sich

glei-

gleichen Dreiecke, ABC, CED u. s. w. so ist $P = \frac{\lambda D A u^2 Sin.^2 \varphi}{2g}$ der Widerstand auf eine der Seitenflächen und die Richtung dieses Widerstandes schneidet die Linie CI im Punkt N. Diese Kraft $GN = P$ zerlege man in die Kräfte, GK auf CI senkrecht und GM, mit CI parallel. Weil CGN ein rechter Winkel ist; so hat man $GNM = NGK = GCK = \varphi$ und es verhält sich $GM : GN = Sin.\,\varphi : Sin.\,tot$ oder $GM : P = Sin.\,\varphi : 1$, woraus folgt $GM = P\,Sin.\,\varphi$. Eben so findet man $GK = P\,Cosin.\,\varphi$.

Man siehet leicht, daß eben diese Betrachtungen auch in Absicht des Dreiecks CED angestellet werden können, und daß $gm = P\,Sin.\varphi$, $gK = P\,Cosin.\varphi$ gefunden werden müsse.

Die Kräfte GK, gK sind unter sich gleich und grade entgegengesezzet. Die Kräfte Gm, gm sind ebenfalls unter sich gleich und ihre Richtungen sind, in gleichen Entfernungen, von dem Punkt N. Die Richtung der mittlern Kraft, welche man aus diesen Seiten-Kräften finden kann, gehet demnach durch den Punkt N. Eben diese Säzze lassen sich auch von den Dreiecken ACE, CBD behaupten. Weil nun $P = \frac{\lambda D A u^2 Sin.^2 \varphi}{2g}$; so ist $P\,Sin.\varphi = \frac{\lambda D A u^2 Sin.^3 \varphi}{2g}$ der Widerstand auf eine Seitenfläche der Piramide und der Widerstand auf alle vier Seitenflächen $= \frac{2 \lambda D A u^2 Sin.^2 \varphi}{g}$.

Es erhellet ohne Schwierigkeit, daß diese Betrachtungen auf vierseitige Piramiden nicht eingeschränket sind, sondern auf jede Piramide ausgedehnet werden können, deren Grundfläche ein regulaires Vieleck und deren Höhe auf dem Mittelpunkte der Grundfläche senkrecht stehet.

Ist also überhaupt die Anzahl der Seitenflächen einer solchen Piramide, $= 2m$; so ist der Widerstand auf alle Seitenflächen, $= 2m P\,Sin.\varphi = \frac{2m \lambda D A u^2 Sin.^3 \varphi}{2g}$.

Man ziehe RS mit AB parallel und schneide solchergestalt eine Piramide ab, deren Höhe $= CU$ ist. Wenn wir $CT = s$, $RS = x$ sezzen; so ist der Innhalt des Dreiecks $CRS = \int x ds$ und der Widerstand, den die

Seitenflächen dieser Piramide leiden, $= \frac{2m\lambda Du^2 Sin.^3\phi}{2g} \int xds$. Man sezze denselben $= T$; so wird $T = \frac{m\lambda Du^2 Sin.^3\phi}{g} \int xds = \frac{\lambda Du^2 Sin.^3\phi}{g} \int mxds$.

Man ziehe RU; so ist dieß der Halbmesser des Kreißes, den man um die Grundfläche der Piramide, deren Höhe $= CU$ ist, beschreiben kann. Es sey $RU = y$; und $1:\pi$ das Verhältniß des Durchmessers zur halben Peripherie; so ist $2\pi y$ die halbe Peripherie des erwähnten Keißes und $\frac{2\pi y}{m}$ der zur Sehne RS gehörige Bogen. Man erhält also $RS = x$ $= chord. \frac{2}{m}\pi y$ und $T = \frac{\lambda Du^2 Sin.^3\phi}{g} \int m.\, chord. \frac{2}{m}\pi yds = \frac{\lambda Du^2 Sin.^3\phi}{g}$ $m.chord. \frac{2\pi}{m} \int yds$. so groß auch immer m genommen wird. Denkt man sich aber einen Kegel, dessen Gruudfläche derjenige Kreiß ist, dessen Halbmesser wir $= RU = y$ gesezzet haben; so siehet man leicht, daß sich die Piramide diesem Kegel desto mehr nähern müsse, je grösser m genommen wird und daß Kegel und Piramide in einander fallen, wenn $m = \infty$. Will man also den Widerstand finden, den ein grader Kegel leidet, wenn er sich mit der Geschwindigkeit u nach der Richtung UC, in einem flüßigen Körper, beweget; so sezze man $m = \infty$ und es wird $m.chord. \frac{2\pi}{m} = \infty\, chord. \frac{2\pi}{\infty} = 2\pi$ und CT $= s = CS = CR =$ der Seite eines Kegels.

Man erhält demnach $T = \frac{\lambda Du^2 Sin.^3\phi 2\pi}{g} \int yds$, wo s die Seite des Kegels, y den Halbmesser der Grundfläche und ϕ den Winkel bedeutet, welchen eine Seite mit der Axe des Kegels einschließet.

Es bewege sich eine Kugel, deren Durchmesser $= 2r$, in einer flüßigen Masse, deren Dichtigkeit $= D$, nach der Richtung CA, mit der Geschwindigkeit $= u$; so kann man folgendergestalt den Widerstand finden, welchen die vordere Halbkugel leidet. Es sey LAM ein Durchschnitt, welcher durch den Mittelpunkt der Kugel gehet. *fig. 4.*

Man

Man sezze $AD = AH$ und mithin CA auf der Sehne DH in B senkrecht. Man ziehe die Tangenten FG, IG, welche sich in Einem Punkt G der Axe schneiden müssen. Es sey $AB = x$ und diese Abscisse wachse um $Bb = \Delta x$. Die Ordinate $BD = y$ sey um $dE = \Delta y$ gewachsen.

Auf einen jeden Punkt des Bogens AD würkt der Widerstand des flüßigen Körpers nach Richtungen, welche mit DN parallel gehen; aber DN stehet auf der Tangente senkrecht.

Man kann eine solche Kraft in zwei andere zerlegen, davon die Richtung der einen mit AB parallel und die Richtung der andern auf AB senkrecht ist. Dem Punkt D correspondirt der Punkt H in der Ebene DAH, worauf ein eben so grosser Widerstand nach der auf die Tangente senkrecht stehenden Richtung OH würket. Diese Kraft des Widerstandes kann wieder in zwo andere Kräfte zerleget werden, davon die eine auf AB senkrecht, die andere aber damit parallel ist. Die auf AB senkrechte Kräfte heben sich auf und es bleiben daher nur diejenigen Kräfte übrig, welche nach Richtungen würken, die mit AB parallel sind. Eben das, was von den Punkten D, H behauptet worden, kann von jedem andern Punkte der Bogen AD, AH gesagt werden. Die mittlere Richtung des gesammten Widerstandes, den die vordere Halbkugel leidet, geht also durch AC. Das Dreieck DGH stellt einen Durchschnitt durch die Axe eines senkrechten Kegels vor und die Oberfläche dieses Kegels berühret die Kugel in dem Kreise, dessen Halbmesser BD ist. Den Widerstand, den die Oberfläche des Kegels leidet, sezzen wir, wie vorhin, $= T$. Daher können wir den Widerstand, welchen die Zone $DFHI$ des Kegels leidet, durch ΔT bezeichnen. Ferner sezze man den Widerstand, den das Kugel-Segment, dessen Höhe AB ist, leidet, $= Q$, und den Widerstand den die Kugel-Zone $DEHP$ leidet, $= \Delta Q$. Wenn wir endlich den Bogen $AD = S$ und die Seite des Kegels $GD = s$ sezzen; so erhalten wir $DE = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} < \Delta S$; und $FD = \Delta s$. Wenn $Bb = \Delta x$ abnimmt; so nähern sich die Zonen der Kugel und des Kegels einander und werden unter sich gleich, wenn $\Delta x = o = dx$ wird. Alsdenn ist auch $\frac{dQ}{dT} = 1$, oder $dQ = dT$ und der Anstoßwinkel φ ist für beide einerlei. Wenn $\Delta x = o = dx$; so wird auch $\Delta S = \Delta s = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Nun

Nun haben wir vorhin $T = \frac{2\lambda D u^2 Sin.^3 \varphi . \pi}{g} \int y ds$ gefunden. Daher ist $dT = dQ = \frac{2\lambda D u^2 Sin.^3 \varphi . \pi . y ds}{g}$. Die Sehne des Bogens DE verlängere man bis sie die Axe in K schneidet; so ist $Tang. EDd = Tang. DKB = \frac{Ed}{Dd} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Je kleiner $Bb = \Delta x$ wird; desto mehr nähert sich der Winkel DKB dem Winkel DGB und wenn $\Delta x = o = dx$; so ist $DKB = DGB$ und $Tang. DGB = \frac{dy}{dx} = Tang. \varphi$. Daraus findet man aber $Sin.^3 \varphi = \frac{dy^3}{ds^3}$ und $dQ = \frac{2\lambda D u^2 \pi}{g} . \frac{y dy^3}{ds^2}$. Demnach $Q = \frac{2\lambda D u^2 \pi}{g} \int \frac{y dy^3}{ds^2}$.

Da nun $y^2 = 2rx - xx$; so findet man $dy = \frac{(r - x) dx}{\sqrt{(2rx - xx)}}$ und $dy^3 = \frac{(r - x)^3 dx^3}{2rx - xx)^{\frac{3}{2}}}$ und $y dy^3 = \frac{(r - x)^3 dx^3}{(2rx - xx)}$. Aber $dy^2 + dx^2 = ds^2 = \frac{r^2 dx^2}{2rx - xx}$. Demnach

$$\frac{y dy^3}{ds^2} = \frac{(r - x)^3 dx}{r^2} = \frac{r^3 dx - 3r^2 x dx + 3rx^2 dx - x^3 dx}{r^2}$$

und $\int \frac{y dy^3}{ds^2} = rx - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{r} - \frac{x^4}{4r^2} + C$. Man findet also

$$Q = \frac{2\lambda D u^2 \pi}{g} \left[rx - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{r} - \frac{x^4}{4r^2} \right].$$

Und so groß ist der Widerstand, welchen das Segment DAH leidet. Da aber nur die vordere Halbkugel dem Widerstand des flüßigen Körpers ausgesezzet ist; so findet man die Grösse desselben, wenn man $x = r$ sezzet. Es wird nämlich $Q = \frac{2\lambda D u^2 \pi rr}{4g}$. Es kann geschehen, daß eine Kanonkugel, ausser der fortschreitenden Bewegung, noch eine drehende Bewegung

gung, um ihren Schwerpunkt, erhält. Dadurch wird aber der Widerstand weder vermehret, noch vermindert, weil nämlich das, was den Widerstand leidet, allemal die Fläche einer Halbkugel ist. Ist nun $r = \vartheta$; so findet man $Q = \frac{\lambda D u^2}{4g} \cdot \frac{\pi\vartheta^2}{2}$, so wie es der Verfasser hier annimmt.

§. 2.

Um diese Formel zu finden, muß man sich erinnern, daß, bei gleichem Innhalte, die Massen sich wie die Gewichte der Körper verhalten. Wenn nun $1 : \pi$ das Verhältniß des Durchmessers zur halben Peripherie eines Kreises bezeichnet; so ist die Masse der Kugel, $= \frac{2}{6}\pi\vartheta^3 d$ und $\frac{\pi\vartheta^2}{2} \cdot D \cdot \frac{\lambda u^2}{4g}$ die Masse einer Wassersäule, deren Grundfläche der Grundfläche eines größten Kreises der Kugel und deren Höhe $= \frac{\lambda u^2}{4g}$ ist. Um aber das Gewicht dieser Säule zu finden, muß man folgende Proportion sezzen:

$\frac{2}{6}\pi\vartheta^3 d : \frac{\pi\vartheta^2}{2} \cdot \frac{\lambda uu}{4g} \cdot D = A : R$ und man findet $R = \frac{3}{4}\lambda \cdot \frac{D}{d} \cdot \frac{u^2}{4g\vartheta} \cdot A$.

§. 7.

Die erste Schwierigkeit, welche dem Anfänger hier aufstösset, ist, zu beweisen, daß $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$. In dieser Absicht erinnere man sich, daß $AQ = x$ und $PQ = y$ gesezzet worden ist. Nach dem gewöhnlichen Vortrage der Differenzialrechnung ist $Qq = Pp = dx$, $pt = dy$ und $dx^2 + dy^2 = (Pt)^2$, welches ich gleich dr^2 sezzen will. Man erhält also $dx^2 + dy^2 = dr^2$. Nun denke man sich auf dem Punkt P eine Senkrechte $PM = z$ errichtet und auf dem Punkt t eine Senkrechte $tm = z + dz$. Daraus findet man leicht $dz^2 + dr^2 = ds^2$; und mithin auch $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$. Fig. 5. Fig. 5.

Die Mechanik lehret, daß $u = \frac{ds}{dt}$; daher wird $u^2 = \frac{ds^2}{dt^2}$; woraus folgt $2udu = \frac{2dt^2 ds dds}{dt^4}$ oder $udu = \frac{ds dds}{dt^2}$, wenn man dt als eine beständige Grösse betrachtet.

Wenn man die Gleichung $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ differenziirt; so findet man $dxddx + dyddy + dzddz = dsdds$. Man dividire alle Glieder mit dt^2; so wird $\frac{dxddx}{dt^2} + \frac{dyddy}{dt^2} + \frac{dzddz}{dt^2} = \frac{dsdds}{dt^2} = udw$.

Nun findet man aber $\frac{dxddx}{dt^2} = \frac{2gLdx}{A} - \frac{2gRdx^2}{Ads}$

Ferner $\frac{dyddy}{dt^2} = \frac{2gMdy}{A} - \frac{2gRdy^2}{Ads}$

Endlich $\frac{dzddz}{dt^2} = \frac{2gNdz}{A} - \frac{2gRdz^2}{Ads}$

Man findet demnach

$$\frac{2gLdx}{A} + \frac{2gMdy}{A} + \frac{2gNdz}{A} - \frac{2gR}{Ads}(dx^2 + dy^2 + dz^2) = \frac{dsdds}{dt^2}.$$

oder $\frac{2gLdx}{A} + \frac{2gMdy}{A} + \frac{2gNdz}{A} - \frac{2gRds}{A} = udw.$

§. 8.

Man kann sich leicht überzeugen, daß $\frac{dy}{dx} = Tang.\,\psi$. Aber, da wir oben gefunden haben, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dr^2$; so ist auch $dx\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = dr$ oder $\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \frac{dr}{dx}$ das heißt, $\sqrt{(1 + Tang.^2\psi)} = \frac{dr}{dx}$. Nun ist $Tang.\psi = \frac{Sin.\psi}{Cos.\psi}$, wenn man den Radius $= 1$ sezzet. Daher wird $\sqrt{\left(1 + \frac{Sin.^2\psi}{Cos.^2\psi}\right)} = \frac{dr}{dx}$ und $\sqrt{\left(\frac{Cosin.^2\psi + Sin.^2\psi}{Cosin.^2\psi}\right)} = \frac{dr}{dx}$ oder $\frac{1}{Cosin.\psi} = \frac{dr}{dx}$. Es ist $Tang.\varphi = \frac{dz}{dr}$, wie man leicht siehet. Daher $\frac{dz}{dr} \cdot \frac{dr}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{Tang.\varphi}{Cosin.\psi}$. Ferner ist $\frac{ds}{dz} = \frac{1}{Sin.\varphi}$ und $\frac{ds}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$ =

$$= \frac{r}{Sin.\phi} \cdot \frac{Tang.\phi}{Cosin.\psi} = \frac{Sin.\phi}{Sin.\phi\ Cosin.\phi\ Cosin.\psi} = \frac{r}{Cosin.\phi\ Cosin.\psi} = \frac{ds}{dx},$$

woraus folgt $dx = ds Cosin.\phi\ Cosin.\psi$. Endlich, weil $\frac{dy}{dx} = Tang.\psi$; so ist auch $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds} = Tang.\psi\ Cosin.\psi\ Cosin.\phi = \frac{Sin.\ \psi}{Cos.\ \psi} \cdot Cosin.\psi\ Cosin.\phi = Sin.\psi\ Cosin.\phi$.

§. 9.

Multiplicirt man die Gleichung $\frac{ddx}{dt^2} = \frac{2gL}{A} - \frac{2gRdx}{Ads}$ mit dy; so findet man $\frac{dyddx}{dt^2} = \frac{2gLdy}{A} - \frac{2gRdxdy}{Ads}$ und multiplizirt man die Gleichung $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{2gM}{A} - \frac{2gRdy}{Ads}$ mit dx; so wird $\frac{dxddy}{dt^2} = \frac{2gMdx}{A} - \frac{2gRdydx}{Ads}$. Wenn man nun die erste Gleichung von der zweeten abziehet; so erhält man

$$\frac{dxddy}{dt^2} - \frac{dyddx}{dt^2} = \frac{2gMdx}{A} - \frac{2gLdy}{A}$$

oder $M - \frac{Ldy}{dx} = \frac{A}{2g}\left(\frac{dxddy - dyddx}{dxdt^2}\right) = \frac{A}{2g}\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{dt^2}$.

Aber, vermöge der Voraussezzung, $p = \frac{dy}{dx}$. Daher finden wir $M - Lp = \frac{A}{2g} \cdot dp \cdot \frac{dx}{dt^2}$. Weil nun endlich $dt^2 = \frac{ds^2}{u^2}$, so wird $M - Lp = \frac{A}{2g} \cdot uu \cdot dp \cdot \frac{dx}{ds^2}$, wie im Autor.

Auf eben die Art findet man alle folgende Gleichungen. Nur die §. 12. verdient eine Erläuterung. Aus derselben folgt unmittelbar

$$udu = \frac{2g}{A}\left[Ldx\left(1 + Tang.^2\psi + \frac{Tang.^2\varphi}{Cosin.^2\psi}\right)\right.$$

$$+ \frac{Auu}{2g}\cdot Cosin.^2\varphi\, Cosin.^2\psi\left(\frac{\frac{Tang.\psi d\psi}{Cosin.^2\psi} + \frac{Tang.\varphi d\varphi}{Cosin.\psi}\, Cosin.\psi}{Cosin.^2\varphi\, Cosin.^2\psi}\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\frac{Tang.\varphi d\psi}{Cosin.\psi}\, Sin.\varphi\, Cos.\varphi\, Sin.\psi}{Cosin.^2\varphi\, Cosin.^2\psi}\right) - Rds\right]$$

oder

$$udu = \frac{2g}{A}\left[Ldx\left(\frac{Cosin.^2\psi + Cosin.^2\psi\, Tang.^2\psi\, Tang.^2\varphi}{Cosin.^2\psi}\right)\right.$$

$$+ \frac{Auu}{2g}\cdot Cos.^2\varphi\left(Tang.\psi d\psi + \frac{Tang.\varphi d\varphi + Tang.\varphi d\psi\, Sin.\varphi\, Cos.\varphi\, Tang.\psi}{Cosin.^2\varphi}\right)$$

$$\left. - Rds\right]$$

oder

$$udu = \frac{2g}{A}\left[Ldx\left(\frac{Cosin.^2\psi + Sin.^2\psi + Tang.^2\varphi}{Cosin.^2\psi}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{Auu}{2g}\cdot Cosin.^2\varphi\left(Tang.\psi d\psi + \frac{Tang.\varphi d\varphi + Sin.^2\varphi\, Tang.\psi d\psi}{Cosin.^2\varphi}\right) - Rds\right]$$

oder

$$udu = \frac{2g}{A}\left[Ldx\left(\frac{1 + Tang.^2\varphi}{Cosin.^2\psi}\right) + \frac{Auu}{2g}\left(Cosin.^2\varphi\, Tang.\psi d\psi + Tang.\varphi d\varphi\right.\right.$$

$$\left.\left. + Sin.^2\varphi\, Tang.\psi d\psi\right) - Rds\right]$$

oder

$$udu = \frac{2g}{A}\left[Ldx\frac{\left(1 + \frac{Sin.^2\varphi}{Cos.^2\varphi}\right)}{Cosin.^2\psi} + \frac{Auu}{2g}\left(d\varphi\, Tang.\varphi + d\psi\, Tang.\psi\right) - Rds\right]$$

oder

oder

$$udu = \frac{2g}{A}\left[Ldx\left(\frac{Cos.^2\varphi + Sin.^2\varphi}{Cos.^2\varphi\; Cos.^2\psi}\right) + \frac{Auu}{2g}\left(d\varphi\, Tang.\varphi + d\psi\, Tang.\psi\right) - Rds\right]$$

Endlich

$$udu = \frac{2g}{A}\left[\frac{Ldx}{Cosin.^2\varphi\; Cosin.^2\psi} + \frac{Auu}{2g}\left(d\varphi\, Tang.\varphi + d\psi\, Tang.\psi\right) - Rds\right]$$

Nun ist aber $R = \frac{D}{\Delta}\cdot\frac{uu}{2ag}\cdot A$. Daher wird

$$udu = \frac{2gLdx}{ACosin.^2\varphi\; Cosin.^2\psi} + uud\varphi\, Tang.\varphi + uud\psi\, Tang.\psi - uu\cdot\frac{D}{\Delta}\cdot\frac{ds}{a}$$

oder $\frac{du}{u} = \frac{2gLdx}{AuuCosin.^2\varphi\; Cosin.^2\psi} + d\varphi\, Tang.\varphi + d\psi\, Tang.\psi - \frac{D}{\Delta}\cdot\frac{ds}{a}$.

§. 13.

Um diese Formel zu integriren, bedenke man, daß $d\varphi Sin.\varphi = - dCosin.\varphi$ und $d\varphi\frac{Sin.\varphi}{Cosin.\varphi} = d\varphi\, Tang.\varphi = -\frac{dCosin.\varphi}{Cosin.\varphi}$; mithin $\int d\varphi\, Tang.\varphi = -log.Cos.\varphi$.

Man findet demnach $log.u = - log.Cosin.\varphi - \frac{s}{a} + C$. Wenn aber $u = c$; so ist $\varphi = w$ und $s = o$. Daher $log.c. + log.Cosin.w = C$. Also $log.u = - log.Cosin.\varphi = log.cCosin.w - \frac{s}{a}$; oder $log.u = log.\left(\frac{cCosin.w}{Cosin.\varphi}\right) - \frac{s}{a}$ $= log.\left(\frac{cCosin.w}{Cosin.\varphi}\right) - log.e^{\frac{s}{a}} = log.\left(\frac{cCosin.w}{Cosin.\varphi e^{\frac{s}{a}}}\right)$. Also $u = \frac{cCosin.w}{e^{\frac{s}{a}}Cosin.\varphi}$.

§. 14.

Es sey der Durchmesser der Kugel $= 2r$; so ist der Innhalt derselben $= \frac{4}{3}\pi r^3$. Wenn nun D die specifische Schwere der Luft und D^I die specifische Schwere der Kugel oder des Eisens ist; so ist $\frac{4}{3}D^I\pi r^3$ das Gewicht der Kugel, also $A = \frac{4}{3}D^I\pi r^3$ und $\frac{4}{3}D\pi r^3$ das Gewicht des Luftkörpers, welchen die Kugel aus seinem Raume vertrieben hat oder $\Pi = \frac{4}{3}D\pi r^3$. Demnach ist

ist $\frac{4}{3}\pi r^3(D^I - D)$ das Gewicht der Kugel in der Luft, oder es ist $A - \Pi = \frac{4}{3}\pi r^3(D^I - D)$ und $\frac{A-\Pi}{A} = 1 - \frac{\Pi}{A} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3(D^I - D)}{\frac{4}{3}\pi r^3 D^I}$ $= 1 - \frac{D}{D^I}$. Es sey die specifische Schwere des Wassers $= E$; so verhält sich

$$D^I : E = 7{,}114 : 1$$
$$E : D = 850 : 1$$

Demnach $D^I : D = 6046{,}9 : 1$

oder beinahe $D^I : D = 6047 : 1$; also $\frac{D}{D^I} = \frac{1}{6047}$

Mithin $1 - \frac{D}{D^I} = 1 - \frac{1}{6047} = \frac{6046}{6047}$, beinahe $= 1$.

Dieß ist die Ursache, warum es erlaubt ist, $\frac{A-\Pi}{A} = 1$ anzunehmen.

§. 15.

Um die am Ende dieses Paragraphen angeführte Formel integriren zu können, muß zuerst erwiesen werden, daß $\frac{d\varphi}{Cosin.\varphi} = dlog.Tang.(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$.

In dieser Absicht bedenke man, daß

$$log.Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi) = log.\left[\frac{Sin.(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)}{Cosin.(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)}\right]$$
$$= log.\left[\frac{Sin.45^\circ Cosin.\frac{1}{2}\varphi + Sin.\frac{1}{2}\varphi Cosin.45^\circ}{Cosin.45^\circ Cosin.\frac{1}{2}\varphi - Sin.45^\circ Sin.\frac{1}{2}\varphi}\right]$$
$$= log.\left[\frac{Cosin.\frac{1}{2}\varphi + Sin.\frac{1}{2}\varphi}{Cosin.\frac{1}{2}\varphi - Sin.\frac{1}{2}\varphi}\right]$$
$$= log.[Cosin.\tfrac{1}{2}\varphi + Sin.\tfrac{1}{2}\varphi] - log.[Cosin.\tfrac{1}{2}\varphi - Sin.\tfrac{1}{2}\varphi]$$

Mithin erhalten wir

$$d[log.Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)] = \frac{d(Cosin.\frac{1}{2}\varphi + Sin.\frac{1}{2}\varphi)}{Cosin.\frac{1}{2}\varphi + Sin.\frac{1}{2}\varphi} - \frac{d(Cosin.\frac{1}{2}\varphi - Sin.\frac{1}{2}\varphi)}{Cosin.\frac{1}{2}\varphi - Sin.\frac{1}{2}\varphi}$$
$$= \frac{dCosin.\frac{1}{2}\varphi + dSin.\frac{1}{2}\varphi}{Cosin.\frac{1}{2}\varphi + Sin.\frac{1}{2}\varphi} - \frac{dCosin.\frac{1}{2}\varphi + dSin.\frac{1}{2}\varphi}{Cosin.\frac{1}{2}\varphi - Sin.\frac{1}{2}\varphi}.$$

Nun ist aber $d Cosin.\frac{1}{2}\varphi = -\frac{1}{2}d\varphi Sin.\frac{1}{2}\varphi$ und $d Sin.\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}d\varphi Cosin.\frac{1}{2}\varphi$. Daher erhalten wir

$$d[log.Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)] = -\frac{\frac{1}{2}d\varphi Sin.\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}d\varphi Cos.\frac{1}{2}\varphi}{Cosin.\frac{1}{2}\varphi + Sin.\frac{1}{2}\varphi} + \frac{\frac{1}{2}d\varphi Sin.\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}d\varphi Cos.\frac{1}{2}\varphi}{Cosin.\frac{1}{2}\varphi - Sin.\frac{1}{2}\varphi}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}d\varphi(-Sin.\frac{1}{2}\varphi + Cosin.\frac{1}{2}\varphi)}{Cosin.\frac{1}{2}\varphi + Sin.\frac{1}{2}\varphi} + \frac{\frac{1}{2}d\varphi(Sin.\frac{1}{2}\varphi + Cosin.\frac{1}{2}\varphi)}{Cosin.\frac{1}{2}\varphi - Sin.\frac{1}{2}\varphi}$$

$$= \tfrac{1}{2}d\varphi\left[\frac{2 Cosin.^2\frac{1}{2}\varphi + 2 Sin.^2\frac{1}{2}\varphi}{Cosin.^2\frac{1}{2}\varphi - Sin.^2\frac{1}{2}\varphi}\right] = \frac{d\varphi}{Cosin.\varphi}.$$

Es ist bekannt, daß überhaupt

$$\int P dQ = PQ - \int Q dP.$$

Es sey also $dQ = \frac{d\varphi}{Cosin.^2\varphi}$; und $P = \frac{1}{Cosin.\varphi}$; so ist

$$\int\frac{d\varphi}{Cosin.^3\varphi} = \frac{Tang.\varphi}{Cosin.\varphi} - \int Tang.\varphi\, d\frac{1}{Cosin.\varphi},$$

weil $\int\frac{d\varphi}{Cosin.^2\varphi} = Tang.\varphi$;

oder es ist $\int\frac{d\varphi}{Cosin.^3\varphi} = \frac{Tang.\varphi}{Cosin.\varphi} - \int Tang.\varphi.\frac{d\varphi Sin.\varphi}{Cosin.^2\varphi}$

$$= \frac{Tang.\varphi}{Cosin.\varphi} - \int d\varphi\frac{Sin.^2\varphi}{Cosin.^3\varphi} = \frac{Tang.\varphi}{Cosin.\varphi} - \int\left(\frac{d\varphi}{Cosin.^3\varphi}(1 - Cosin.^2\varphi)\right)$$

$$= \frac{Tang.\varphi}{Cosin.\varphi} - \int\frac{d\varphi}{Cosin.^3\varphi} + \int\frac{d\varphi}{Cosin.\varphi}$$

Mithin $2\int\frac{d\varphi}{Cosin.^3\varphi} = \frac{Tang.\varphi}{Cosin.\varphi} + \int\frac{d\varphi}{Cosin.\varphi}$.

Aber, eben haben wir gefunden, $\int\frac{d\varphi}{Cosin.\varphi} = log.Tang.(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$

Daher

$$\int\frac{d\varphi}{Cosin.^3\varphi} = \frac{Tang.\varphi}{2 Cosin.\varphi} + \tfrac{1}{2}log.Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)$$

Nun ist $\int e^{\frac{2s}{a}} ds = -\frac{ccCosin.^2 w}{2g}\int\frac{d\phi}{Cosin.^3\phi}$.

Daher

$$\int e^{\frac{2s}{a}} ds = -\frac{ccCosin.^2 w}{2g}\left[\frac{Sin.\phi}{2Cosin.^2\phi} + \tfrac{1}{2}log.Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\phi)\right] + Constans$$

oder

$$e^{\frac{2s}{a}} = -\frac{ccCosin.^2 w}{2ag}\left[\frac{Sin.\phi}{Cosin.^2\phi} + log.Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\phi)\right] + Constans.$$

woraus man leicht die im Autor angegebene Formel findet.

§. 22.

Der Verfasser nimmt an, es sey

$$Sin.\phi = A + B(e^{ms} - 1) + C(e^{ms} - 1)^2 + D(e^{ms} - 1)^3 + E(e^{ms} - 1)^4 + F(e^{ms} - 1)^5 + G(e^{ms} - 1)^6 + H(e^{ms} - 1)^7 + \&c.$$

Daraus folgt

$$dSin.\phi = Bd(e^{ms} - 1) + Cd(e^{ms} - 1)^2 + Dd(e^{ms} - 1)^3 + Ed(e^{ms} - 1)^4 + Fd(e^{ms} - 1)^5 + Gd(e^{ms} - 1)^6 + Hd(e^{ms} - 1)^7 + \&c.$$

oder, da $dSin.\phi = d\phi Cosin.\phi$,

$$d\phi Cosin.\phi = Bme^{ms}ds + 2Cme^{ms}ds(e^{ms} - 1) + 3Dme^{ms}ds(e^{ms} - 1)^2 + 4Eme^{ms}ds(e^{ms} - 1)^3 + 5Fme^{ms}ds(e^{ms} - 1)^4 + 6Gme^{ms}ds(e^{ms} - 1)^5 + 7Hme^{ms}ds(e^{ms} - 1)^6 + \&c.$$

oder

$$\frac{d\phi}{ds}Cosin.\phi = Bme^{ms} + 2Cme^{ms}(e^{ms} - 1) + 3Dme^{ms}(e^{ms} - 1)^2 + 4Eme^{ms}(e^{ms} - 1)^3 + 5Fme^{ms}(e^{ms} - 1)^4 + 6Gme^{ms}(e^{ms} - 1)^5 + 7Hme^{ms}(e^{ms} - 1)^6 + \&c.$$

Aber es ist $\frac{d\phi}{ds} = \beta e^{ms}Cosin.^3\phi$.

Daher

$$\beta e^{ms}Cosin.^4\phi = Bme^{ms} + 2Cme^{ms}(e^{ms} - 1) + 3Dme^{ms}(e^{ms} - 1)^2 + 4Eme^{ms}(e^{ms} - 1)^3 + 5Fme^{ms}(e^{ms} - 1)^4 + 6Gme^{ms}(e^{ms} - 1)^5 + 7Hme^{ms}(e^{ms} - 1)^6 + \&c.$$

oder

oder

$$\beta Cosin.^4\varphi = Bm + 2Cm(e^{ms} - 1) + 3Dm(e^{ms} - 1)^2 + 4Em(e^{ms} - 1)^3 + 5Fm(e^{ms} - 1)^4 + 6Gm(e^{ms} - 1)^5 + 7Hm(e^{ms} - 1)^6 + \&c.$$

Ist aber $s = 0$; so wird $\varphi = w$, und man erhält $e^{ms} = e^0 = 1$. Folglich verschwinden, ausser dem ersten, alle Glieder, und man erhält $\beta Cosin.^4 w = Bm$ oder $B = \frac{\beta}{m} Cosin.^2 w\, Cosin.^2 w$. Aber es ist $Cosin.2w = Cosin.^2 w - Sin.^2 w$; daher $Cosin.^2 w = Sin.^2 w + Cosin.2w$. Man hat aber überhaupt $- Cosin.(a + b) = - Cosin.a\, Cosin.b + Sin.b\, Sin.a$ und $Cosin.(a - b) = Cosin.a Cosin.b + Sin.b Sin.a$. Mithin $Cosin.(a - b) - Cosin.(a + b) = 2 Sin.b Sin.a$ oder $Sin.b Sin.a = \frac{Cosin.(a - b) - Cosin.(a + b)}{2}$. Ist nun $a = b = w$; so erhalten wir $Sin.^2 w = \frac{Cosin.(w - w) - Cosin.2w}{2} = \frac{1 - Cosin.2w}{2}$. Daher $Cosin.^2 w = \frac{1 - Cosin.2w}{2} + Cosin.2w = \frac{1 - Cosin.2w + 2Cosin.2w}{2} = \frac{1 + Cosin.2w}{2}$. Sezzen wir diesen Ausdruck in den oben gefundenen Werth von B; so erhalten wir $B = \frac{\beta}{1.2.m} Cosin.^2 w(1 + Cosin.2w)$.

Man findet

$$\beta d(Cosin.\varphi)^4 = 2Cmd(e^{ms} - 1) + 3Dmd(e^{ms} - 1)^2 + 4Emd(e^{ms} - 1)^3 + 5Fmd(e^{ms} - 1)^4 + \&c.$$

oder

$$4\beta Cosin.^3\varphi d Cosin.\varphi = 2Cm^2 e^{ms} ds + 6Dm^2 e^{ms} ds(e^{ms} - 1) + 12Em^2 e^{ms} ds(e^{ms} - 1)^2 + 20Fm^2 e^{ms} ds(e^{ms} - 1)^3 + \&c.$$

oder

$$-4\beta^2 e^{ms} Cosin.^3\varphi \frac{d\varphi}{ds} Sin.\varphi = 2Cm^2 e^{ms} + 6Dm^2 e^{ms}(e^{ms} - 1) + 12Em^2 e^{ms}(e^{ms} - 1)^2 + 20Fm^2 e^{ms}(e^{ms} - 1)^3 + \&c.$$

oder

$$-4\beta^2 Cosin.^6\varphi Sin.\varphi = 2Cm^2 + 6Dm^2(e^{ms} - 1) + 12Em^2(e^{ms} - 1)^2 + 20Fm^2(e^{ms} - 1)^3 + \&c.$$

Wenn

Wenn nun $s = o$; so erhalten wir

$$C = -\frac{2\beta^2}{m^2} Cosin.^6 w\, Sin.w = -\frac{2\beta^2}{m^2} Cosin.^4 w\, Cosin.^2 w\, Sin.w.$$

Aber $Cosin.^2 w = \frac{1 + Cosin.2w}{2}$, daher $Cosin.^2 w\, Sin.w = \frac{Sin.w + Sin.w\, Cos.2w}{2}$. Da $Cosin.2w = Cosin.^2 w - Sin.^2 w = 1 - 2Sin.^2 w$; so finden wir $Sin.w\, Cosin.2w + Sin.w - 2Sin.^3 w$. Mithin $Cosin.^2 w\, Sin.w = \frac{2Sin.w - 2Sin.^3 w}{2} = Sin.w - Sin.^3 w$.

Es ist überhaupt $Sin.(a + b) = Sin.a\, Cosin.b + Sin.b\, Cosin.a$ und $Cosin.(a + b) = Cosin.a\, Cosin.b - Sin.b\, Sin.a$. Man findet hieraus $Sin.2a = 2Sin.a\, Cosin.a$ und $Cosin.2a = Cosin.^2 a - Sin.^2 a$. Ist aber $b = 2a$; so erhält man $Sin.3a = Sin.a\, Cosin.2a + Sin.2a\, Cosin.a = Sin.a\, Cosin.^2 a - Sin.^3 a + Sin.2a\, Cosin.a = Sin.a\, Cosin.^2 a - Sin.^3 a + 2Sin.a\, Cosin.^2 a = (Cosin.^2 a - Sin.^2 a + 2Cos.^2 a)Sin.a = (2Cos.^2 a - 1 + 2Cos.^2 a)Sin.a = (4Cos.^2 a - 1)Sin.a = (4 - 4Sin.^2 a - 1)Sin.a = (3 - 4Sin.^2 a)Sin.a = 3Sin.a - 4Sin.^3 a$. Daraus findet man also $Sin.^3 a = \frac{3}{4}Sin.a - \frac{1}{4}Sin 3a$. Demnach finden wir $Sin.w\, Cosin.^2 w = Sin.w - \frac{3}{4}Sin.w + \frac{1}{4}Sin.3w = \frac{Sin.w + Sin.3w}{4}$, und endlich $C = -\frac{2\beta^2}{m^2} Cosin.^4 w \left(\frac{Sin.w + Sin.3w}{4}\right) = -\frac{\beta^2}{1.2.m^2} Cosin.^4 w (Sin.w + Sin.3w)$.

Man findet

$$-4\beta^2 d[Cosin.^6\varphi\, Sin.\varphi] = 6Dm^3 e^{ms} ds + 24Em^3 e^{ms} ds (e^{ms} - 1) + 60Fm^3 e^{ms} ds (e^{ms} - 1)^2 + 120Gm^3 e^{ms} ds (e^{ms} - 1)^3 + \&c.$$

oder

$$-4\beta^2 [Sin.\varphi d(Cosin.\varphi)^6 + (Cosin.\varphi)^6 dSin.\varphi] = 6Dm^3 e^{ms} ds + 24Em^3 e^{ms} ds (e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$-4\beta^2 [6Sin.\varphi\, Cosin.^5\varphi\, dCosin.\varphi + Cosin.^6\varphi\, dSin.\varphi] = 6Dm^3 e^{ms} ds + 24Em^3 e^{ms} ds (e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$-4\beta^2 [-6Sin.^2\varphi\, Cosin.^5\varphi + Cosin.^7\varphi] d\varphi = 6Dm^3 e^{ms} ds + 24Em^3 e^{ms} ds (e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$-4\beta^2[-6\,Sin.^2\varphi\,Cosin.^5\varphi + Cosin.^7\varphi]\frac{d\varphi}{ds} = 6Dm^3e^{ms}$$
$$+ 24En.^3e^{ms}(e^{ms}-1) + \&c.$$

oder

$$-4\beta^3[-6\,Sin.^2\varphi\,Cosin.^8\varphi + Cosin.^{10}\varphi] = 6Dm^3 + 24Em^3(e^{ms}-1) + \&c.$$

oder

$$4\beta^3[6\,Sin.^2\varphi\,Cosin.^8\varphi - Cosin.^{10}\varphi] = 6Dm^3 + 24En.^3(e^{ms}-1) + \&c.$$

oder

$$4\beta^3\,Cosin.^6\varphi[6\,Sin.^2\varphi\,Cosin.^2\varphi - Cosin.^4\varphi] = 6Dm^3 + 24Em^3(e^{ms}-1) + \&c.$$

oder

$$4\beta^3\,Cosin.^6\varphi[6\,Sin.^2\varphi - Cosin.^2\varphi]\,Cosin.^2\varphi = 6Dm^3 + 24Em^3(e^{ms}-1) + \&c.$$

oder, da $Sin.^2\varphi = 1 - Cosin.^2\varphi$,

$$4\beta^3\,Cosin.^6\varphi[6 - 7\,Cosin.^2\varphi]\,Cosin.^2\varphi = 6Dm^3 + 24Em^3(e^{ms}-1) + \&c.$$

oder

$$4\beta^3\,Cosin.^6\varphi[6\,Cosin.^2\varphi - 7\,Cosin.^4\varphi] = 6Dm^3 + 24Em^3(e^{ms}-1) + \&c.$$

Wenn nun $s = 0$; so erhalten wir

$$4\beta^3\,Cosin.^6w[6\,Cosin.^2w - 7\,Cosin.^4w] = 6Dm^3.$$

Nun haben wir aber vorhin gefunden

$$Cosin.^2w = \frac{1 + Cosin.^2w}{2},$$ daher $6\,Cosin.^2w = 3 + 3\,Cosin.2w.$

Mithin wird

$$D = \frac{2\beta^3\,Cosin.^6w}{3m^3}[3 + 3\,Cosin.2w - 7\,Cosin.^4w].$$

Da aber $Cosin.^4w = \frac{1 + 2\,Cosin.2w + (Cosin.2w)^2}{4}$ und $(Cosin.2w)^2 = \frac{1 + Cosin.4w}{2}$; so erhalten wir $Cos.^4w = \frac{1 + 2\,Cos.2w}{2} + \frac{1 + Cos.4w}{8} = \frac{3 + 4\,Cosin.2w + Cos.4w}{8}$ und $7\,Cos.^4w = \frac{21 + 28\,Cos.2w + 7\,Cos.4w}{8}$.

Demnach

$$3 + 3\,Cos.2w - \frac{21 - 28\,Cos.2w - 7\,Cos.4w}{8} = \frac{3 - 4\,Cos.2w - 7\,Cos.4w}{8}.$$

Endlich

$$D = \frac{2\beta^3 Cosin.^6 w}{3m^3}\left[\frac{3 - 4 Cosin.2w - 7 Cosin.4w}{8}\right]$$
$$= \frac{\beta^3 Cosin.^6 w}{2.1.2.3.m^3}[3 - 4 Cosin.2w - 7 Cosin.4w].$$

Es ist vorhin gefunden worden

$$4\beta^3[6 Cos.^8\phi - 7 Cos.^{10}\phi] = 6Dm^3 + 24Em^3(e^{ms} - 1) + 60Fm^3(e^{ms} - 1)^2$$
$$+ 120Gm^3(e^{ms} - 1)^3 + \&c.$$

woraus folgt

$$4\beta^3[48 Cosin.^7\phi d Cosin.\phi - 70 Cosin.^9\phi d Cosin.\phi] = 24Em^4 e^{ms} ds$$
$$+ 120Fm^4 e^{ms} ds(e^{ms} - 1) + 360Gm^4 e^{ms} ds(e^{ms} - 1)^2 + \&c.$$

oder

$$4\beta^3[-48 Cosin.^7\phi\, Sin.\phi + 70 Cosin.^9\phi\, Sin.\phi]\frac{d\phi}{ds} = 24Em^4 e^{ms}$$
$$+ 120Fm^4 e^{ms}(e^{ms} - 1) + 360Gm^4 e^{ms}(e^{ms} - 1)^2 + \&c.$$

oder

$$4\beta^4[-48 Cosin.^{10}\phi\, Sin.\phi + 70 Cosin.^{12}\phi\, Sin.\phi] = 24Em^4 e^{ms}$$
$$+ 120Fm^4 e^{ms}(e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$-4\beta^4 Cosin.^8\phi[48 Cosin.^2\phi\, Sin.\phi - 70 Cosin.^4\phi\, Sin.\phi] = 24Em^4 e^{ms}$$
$$+ 120Fm^4 e^{ms}(e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$-4\beta^4 Cosin.^8\phi[48 Sin.\phi - 48 Sin.^3\phi - 70 Sin.\phi + 140 Sin.^4\phi - 70 Sin.^5\phi]$$
$$= 24Em^4 + 120Fm^4(e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$-4\beta^4 Cosin.^8\phi[-22 Sin.\phi + 92 Sin.^3\phi - 70 Sin.^5\phi] = 24Em^4$$
$$+ 120Fm^4(e^{ms} - 1) + \&c.$$

Aber $Sin.^3\phi = \frac{3 Sin.\phi - Sin.3\phi}{4}$

und $Sin.^2\phi = \frac{1 - Cosin.^2\phi}{2}$.

Also $8 Sin.^5\phi = 3 Sin.\phi - Sin.3\phi - 3 Sin.\phi\, Cosin.2\phi + Sin.3\phi\, Cosin.2\phi$.

Nun ist überhaupt

$$Sin.a\, Cosin.b = \frac{Sin.(a + b) + Sin.(a - b)}{2}.$$

Ist

Ist also $a = \phi$ und $b = 2\phi$; so erhält man

$$Sin.\phi\, Cosin.2\phi = \frac{Sin.3\phi - Sin.\phi}{2}.$$

Sezzet man aber $a = 3\phi$, $b = 2\phi$; so wird

$$Sin.3\phi\, Cosin.2\phi = \frac{Sin.5\phi + Sin.\phi}{2},$$

und man findet

$$8Sin.^5\phi = 3Sin.\phi - Sin.3\phi - \frac{3Sin.3\phi + 3Sin.\phi}{2} + \frac{Sin.5\phi + Sin.\phi}{2}$$

$$= \frac{10Sin.\phi - 5Sin.3\phi + Sin.5\phi}{2}.$$

Demnach

$$-70Sin.^5\phi = -\frac{700Sin.\phi + 350Sin.3\phi - 70Sin.5\phi}{16}.$$

Ist $s = 0$; so erhalten wir

$$-4\beta^4 Cosin.^8 w\left[-22Sin.w + \frac{276Sin.w - 92Sin.3w}{4} - \frac{700Sin.w}{16} + \frac{350Sin.3w - 70Sin.5w}{16}\right] = 24Em^4;$$

woraus endlich folgt

$$-\frac{\beta^4 Cosin.^8 w}{2.1.2.3.4.m^3}[26Sin.w - 9Sin.3w - 35Sin.^5 w] = E.$$

Man findet

$$-4\beta^4 Cosin.^{10}\phi[48Sin.\phi - 70Cos.^2\phi\, Sin.\phi] = 24Em^4 + 120Fm^4(e^{ms} - 1) + 360Gm^4(e^{ms} - 1)^2 + \&c.$$

woraus folgt

$$-4\beta^4[(48Sin.\phi - 70Cosin.^2\phi\, Sin.\phi)dCosin.^{10}\phi + Cosin.^{10}\phi d(48Sin.\phi - 70Cosin.^2\phi\, Sin.\phi)] = 120Fm^5 e^{ms}ds + 720Gm^5 e^{ms}ds(e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$-4\beta^4[-10Cosin.^9\phi(48Sin.^2\phi - 70Cosin.^2\phi\, Sin.^2\phi) + Cosin.^{10}\phi(48Cos.\phi + 140Cosin.\phi\, Sin.^2\phi - 70Cosin.^3\phi)]\frac{d\phi}{ds} = 120Fm^5 e^{ms}ds + 720Gm^5 e^{ms}ds(e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

oder

$$-4\beta^5 Cos.^3\varphi[-10 Cos.^9\varphi(48 Sin.^2\varphi - 70 Cos.^2\varphi\, Sin.^2\varphi) + Cos.^{10}\varphi(48 Cos.\varphi + 140 Cos.\varphi\, Sin.^2\varphi - 70 Cos.^3\varphi)] = 120 Fm^5 + 720 Gm^5(e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$-4\beta^5 Cosin.^{10}\varphi[-480 Cosin.^2\varphi\, Sin.^2\varphi + 700 Cosin.^4\varphi\, Sin.^2\varphi + 48 Cosin.^4\varphi + 140 Cosin.^4\varphi\, Sin.^2\varphi - 70 Cos.^6\varphi] = 120 Fm^5 + 720 Gm^5(e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$-4\beta^5 Cosin.^{10}\varphi[-480 Cosin.^2\varphi + 480 Cos.^4\varphi + 700 Cos.^4\varphi - 700 Cos.^6\varphi + 48 Cos.^4\varphi + 140 Cos.^4\varphi - 140 Cos.^6\varphi - 70 Cos.^6\varphi] = 120 Fm^5 + 720 Gm^5(e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$-4\beta^5 Cos.^{10}\varphi[-480 Cos.^2\varphi + 1368 Cos.^4\varphi - 910 Cos.^6\varphi] = 120 Fm^5 + 720 Gm^5(e^{ms} - 1) + \&c.$$

Es ist aber $Cos.^2\varphi = \frac{1 + Cos.^2\varphi}{2}$

$$Cos.^4\varphi = \frac{3 + 4 Cos.2\varphi + Cos.4\varphi}{8}$$

$$Cos.^6\varphi = \frac{10 + 15 Cos.2\varphi + 6 Cos.4\varphi + Cos.6\varphi}{32}.$$

Sezzet man diese Werthe in den obigen Ausdruck, und bedenket man, daß, für $s = 0$, $\varphi = w$ wird; so erhält man

$$-4\beta^5 Cos.^{10}w\left[-240 - 240 Cos.2w + 513 + 684 Cos.2w + 171 Cos.4w - \frac{4550 - 6825 Cos.2w - 2730 Cos.4w - 455 Cos.6w}{16}\right] = 120 Fm^5$$

oder

$$-4\beta^5 Cosin.^{10}w\left[\frac{-3840 - 3840 Cosin.2w + 8208 + 10944 Cosin.2w}{16} + \frac{2736 Cos.4w - 4550 - 6825 Cos.2w - 2730 Cos.4w - 455 Cos.6w}{16}\right]$$

$$= 120 Fm^5;$$

wor-

woraus man endlich erhält

$$F = \frac{\beta^5 Cosin.^{10}w}{4.1.2.3,4.5.m^5}[182 - 279 Cosin.2w - 6 Cosin.4w + 455 Cosin.6w].$$

Auf eben diese Art findet man die übrigen Coeffizienten, und es wird dazu bloß eine Fertigkeit im trigonometrischen Calcul erfodert.

§. 23.

Man findet hier

$$dy = Sin.wds + B(e^{ms} - 1)ds + C(e^{ms} - 1)^2 ds + D(e^{ms} - 1)^3 ds$$
$$+ E(e^{ms} - 1)^4 ds + F(e^{ms} - 1)^5 ds + \&c.$$

oder

$$\begin{aligned} dy = Sin.wds + Be^{ms}ds - Bds &+ Ce^{2ms}ds - 2Ce^{ms}ds + Cds \\ &+ De^{3ms}ds - 3De^{2ms}ds + 3De^{ms}ds - Dds \\ &+ Ee^{4ms}ds - 4Ee^{3ms}ds + 6Ee^{2ms}ds \\ &\quad - 4Ee^{ms}ds + Eds \\ &+ Fe^{5ms}ds - 5Fe^{4ms}ds + 10Fe^{3ms}ds \\ &- 10Fe^{2ms}ds + 5Fe^{ms}ds - Fds + \&c. \end{aligned}$$

Und durch die Integrazion findet man

$$\begin{aligned} y = Constans + 5Sin.w + \frac{Be^{ms}}{m} - Bs &+ \frac{Ce^{2ms}}{2m} - \frac{2Ce^{ms}}{m} + Cs \\ &+ \frac{De^{3ms}}{3m} - \frac{3De^{2ms}}{2m} + \frac{3De^{ms}}{m} - Ds \\ &+ \frac{Ee^{4ms}}{4m} - \frac{4Ee^{3ms}}{3m} + \frac{6Ee^{2ms}}{2m} \\ &\quad - \frac{4Ee^{ms}}{m} + Es \\ &+ \frac{Fe^{5ms}}{5m} - \frac{5Fe^{4ms}}{4m} + \frac{10Fe^{3ms}}{3m} \\ &- \frac{10Fe^{2ms}}{2m} + \frac{5Fe^{ms}}{m} - Fs + \&c. \end{aligned}$$

Ist $y = o$; so ist auch $s = o$, und man hat $e^{ms} = e^o = 1$.

Dadurch

Dadurch erhält man

$$\mathit{Constans} = -\frac{B}{m} - \frac{C}{2m} + \frac{2C}{m} - \frac{D}{3m} + \frac{3D}{2m} + \frac{3D}{m}$$
$$-\frac{E}{4m} + \frac{4E}{3m} - \frac{6E}{2m} + \frac{4E}{m}$$
$$-\frac{F}{5m} + \frac{5F}{4m} - \frac{10F}{3m} + \frac{10F}{2m} - \frac{5F}{m}.$$

Und man findet mithin

$$y = s\,\mathrm{Sin}.\,w + \frac{Be^{ms}}{m} - \frac{B}{m} - Bs + \frac{Ce^{2ms}}{2m} - \frac{2Ce^{ms}}{m} + Cs - \frac{C}{2m} - \frac{2C}{m}$$
$$+ \frac{De^{3ms}}{3m} - \frac{3De^{2ms}}{2m} + \frac{3De^{ms}}{m} - Ds$$
$$- \frac{D}{3m} + \frac{3D}{2m} + \frac{3D}{m}$$
$$+ \frac{Ee^{4ms}}{4m} - \frac{4Ee^{3ms}}{3m} + \frac{6Ee^{2ms}}{2m} - \frac{4Ee^{ms}}{m}$$
$$+ Es$$
$$- \frac{E}{4m} + \frac{4E}{3m} - \frac{6E}{2m} + \frac{4E}{m}$$
$$+ \frac{Fe^{5ms}}{5m} - \frac{5Fe^{4ms}}{4m} + \frac{10Fe^{3ms}}{3m} - \frac{10Fe^{2ms}}{2m}$$
$$+ \frac{5Fe^{ms}}{m} - Fs$$
$$- \frac{F}{5m} + \frac{5F}{4m} - \frac{10F}{3m} + \frac{10F}{2m} - \frac{5F}{m}$$
$$+ \&c.$$

oder

oder

$$y = s\,Sin.w + \frac{B}{m}\left(e^{ms} - 1 - ms\right)$$
$$+ \frac{C}{m}\left(\frac{e^{2ms}}{2} - 2e^{ms} + ms - \tfrac{1}{2} + 2\right)$$
$$+ \frac{D}{m}\left(\frac{e^{3ms}}{3} - \frac{3e^{2ms}}{2} + 3e^{ms} - ms - \tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{2} - 3\right)$$
$$+ \frac{E}{m}\left(\frac{e^{4ms}}{4} - \frac{4e^{3ms}}{3} + \frac{6e^{2ms}}{2} - 4e^{ms} + ms - \tfrac{1}{4} + \tfrac{4}{3} - 3 + 4\right)$$
$$+ \frac{F}{m}\left(\frac{e^{5ms}}{5} - \frac{5e^{3ms}}{4} + \frac{10e^{3ms}}{3} - \frac{10e^{2ms}}{2} + 5e^{ms} - ms - \tfrac{1}{5} + \tfrac{5}{4} - \tfrac{10}{3} + \tfrac{10}{2} - 5\right)$$

Nun ist aber $\frac{e^{2ms}}{2} - 2e^{ms} + ms + 2 - \frac{1}{2} = \frac{e^{2ms}}{2} - 2e^{ms} + ms + \frac{3}{2}$
$= \frac{(e^{ms} - 1)^2}{2} - \frac{(e^{ms} - 1)}{1} + ms.$

Ferner ist $\frac{e^{3ms}}{3} - \frac{3e^{2ms}}{2} + 3e^{ms} - ms - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 3 = \frac{e^{3ms}}{3} - \frac{3e^{2ms}}{2}$
$+ 3e^{ms} - ms - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = \frac{(e^{ms} - 1)^3}{3} - \frac{(e^{ms} - 1)^2}{2} + \frac{(e^{ms} - 1)}{1} - ms.$

Und so mit den übrigen. Daher findet man den von dem Verfasser angegebenen Ausdruck, wenn man diese Werthe in den obigen Ausdruck sezzet.

Es wird hier, §. 24, angenommen,

$$Cosin.\varphi = A + B(e^{ms} - 1) + C(e^{ms} - 1)^2 + D(e^{ms} - 1)^3 + E(e^{ms} - 1)^4 + F(e^{ms} - 1)^5 + \&c.$$

und man findet

$$-\beta Cosin.^3\varphi\, Sin.\varphi = Bm + 2Cm(e^{ms} - 1) + 3Dm(e^{ms} - 1)^2 + 4Em(e^{ms} - 1)^3 + \&c.$$

woraus folgt

$$-\beta d[\mathrm{Cosin.}^3\varphi\,\mathrm{Sin.}\varphi] = 2Cm^2e^{ms}ds + 6Dm^2e^{ms}ds(e^{ms}-1) + 12Em^2e^{ms}ds(e^{ms}-1)^2 + \&c.$$

oder

$$-\beta[\mathrm{Cosin.}^4\varphi - 3\,\mathrm{Cosin.}^2\varphi\,\mathrm{Sin.}^2\varphi]\frac{d\varphi}{ds} = 2Cm^2e^{ms} + 6Dm^2e^{ms}(e^{ms}-1) + 12Em^2e^{ms}(e^{ms}-1)^2 + \&c.$$

oder

$$-\beta^2[\mathrm{Cosin.}^7\varphi - 3\,\mathrm{Cosin.}^5\varphi\,\mathrm{Sin.}^2\varphi] = 2Cm^2 + 6Dm^2(e^{ms}-1) + 12Em^2(e^{ms}-1)^2 + \&c.$$

oder

$$-\beta^2\mathrm{Cosin.}^4\varphi[\mathrm{Cos.}^3\varphi - 3\,\mathrm{Cos.}\varphi + 3\,\mathrm{Cosin.}^3\varphi] = 2Cm^2 + 6Dm^2(e^{ms}-1) + 12Em^2(e^{ms}-1)^2 + \&c.$$

oder

$$-\beta^2\mathrm{Cosin.}^4\varphi[-3\,\mathrm{Cosin.}\varphi + 4\,\mathrm{Cosin.}^3\varphi] = 2Cm^2 + 6Dm^2(e^{ms}-1) + 12Em^2(e^{ms}-1)^2 + \&c.$$

Nun haben wir gefunden

$2\,\mathrm{Cosin.}^2\varphi = 1 + \mathrm{Cosin.}\,2\varphi$, daher ist $2\,\mathrm{Cosin.}^3\varphi = \mathrm{Cosin.}\varphi + \mathrm{Cosin.}\varphi\,\mathrm{Cosin.}\,2\varphi$.

Aber $\mathrm{Cosin.}\,2\varphi\,\mathrm{Cosin.}\varphi = \frac{\mathrm{Cosin.}\varphi + \mathrm{Cosin.}\,3\varphi}{2}$. Mithin $4\,\mathrm{Cosin.}^3\varphi = 3\,\mathrm{Cosin.}\varphi + \mathrm{Cosin.}\,3\varphi$.

Wir erhalten also

$$-\beta^2\mathrm{Cosin.}^4\varphi[-3\,\mathrm{Cosin.}\varphi + 3\,\mathrm{Cosin.}\varphi + \mathrm{Cosin.}\,3\varphi] = 2Cm^2 \quad 6Dm^2(e^{ms}-1) + \&c.$$

oder

$$-\beta^2\mathrm{Cosin.}^4\varphi[\mathrm{Cosin.}\,3\varphi] = 2Cm^2 + 6Dm^2(e^{ms}-1) + \&c.$$

Wenn aber $s = 0$; so wird $\varphi = w$, und wir erhalten

$$C = -\frac{\beta^2\mathrm{Cosin.}^4 w}{1.2.m^2}\mathrm{Cosin.}\,3w.$$

Es ist oben gefunden worden

$$-\beta^2[-3\,\mathrm{Cosin.}^5\varphi + 4\,\mathrm{Cosin.}^7\varphi] = 2Cm^2 + 6Dm^2(e^{ms}-1) + 12Em^2(e^{ms}-1)^2 + 20Fm^2(e^{ms}-1)^3 + \&c.$$

oder

$$\beta^2[3\,\mathrm{Cosin}^5\varphi - 4\,\mathrm{Cosin.}^7\varphi] = 2Cm^2 + 6Dm^2(e^{ms}-1) + 12Em^2(e^{ms}-1)^2 + 20Fm^2(e^{ms}-1)^3 + \&c.$$

oder

oder

$$\beta^2[15\,Cosin.^4\varphi\, d\,Cosin.\varphi - 28\,Cosin.^6\varphi\, d\,Cosin.\varphi] = 6Dm^3e^{ms}ds$$
$$+ 24Em^3e^{ms}ds(e^{ms} - 1) + 60Fm^3e^{ms}ds(e^{ms} - 1)^2 + \&c.$$

oder

$$\beta^2[-15\,Cosin.^4\varphi\, Sin.\varphi + 28\,Cosin.^6\varphi\, Sin.\varphi]\frac{d\varphi}{ds} = 6Dm^3e^{ms}$$
$$+ 24Em^3e^{ms}(e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$\beta^3 Cosin.^6\varphi[-15\,Cosin.\varphi\, Sin.\varphi + 28\,Cosin.^3\varphi\, Sin.\varphi] = 6Dm^3$$
$$+ 24Em^3(e^{ms} - 1) + \&c.$$

Es ist aber $Cosin.\varphi\, Sin.\varphi = \frac{Sin.2\varphi}{2}$ und $Cosin.^3\varphi\, Sin.\varphi = \frac{2\,Sin.2\varphi + Sin.4\varphi}{8}$;

daher

$$\beta^3 Cosin.^6\varphi\left[-\frac{15\,Sin.2\varphi}{2} + \frac{56\,Sin.2\varphi + 28\,Sin.4\varphi}{8}\right] = 6Dm^3$$
$$+ 24Em^3(e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$\beta^3 Cosin.^6\varphi\left[-\frac{60\,Sin.2\varphi - 56\,Sin.2\varphi - 28\,Sin.4\varphi}{8}\right] = 6Dm^3$$
$$+ 24Em^3(e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$\beta^3 Cosin.^6\varphi\left[-\frac{Sin.2\varphi - 7\,Sin.4\varphi}{2}\right] = 6Dm^3 + 24Em^3(e^{ms} - 1) + \&c.$$

Endlich

$$-\frac{\beta^3 Cosin.^6 w}{2.1.2.3.m^3}\left[Sin.2w - 7\,Sin\,4w\right] = D.$$

Wir haben gefunden

$$-\beta^3[15\,Cosin.^7\varphi\, Sin.\varphi - 28\,Cosin.^9\varphi\, Sin.\varphi] = 6Dm^3 + 24Em^3(e^{ms} - 1)$$
$$+ 60Fm^3(e^{ms} - 1)^2 + \&c.$$

woraus folgt

$$-\beta^3[15\,Cosin.^7 d\,Sin.\varphi + 15.7\,Sin.\varphi\, Cosin.^6\varphi\, d\,Cosin.\varphi - 28\,Cosin.^9\varphi\, d\,Sin.\varphi$$
$$- 28.9\,Cosin.^8\varphi\, Sin.\varphi\, d\,Cosin.\varphi] = 24Em^4e^{ms}ds + 120Fm^4e^{ms}ds(e^{ms} - 1)$$
$$+ \&c.$$

oder

oder

$$-\beta^3[15 Cosin.^8\phi - 105 Sin.^2\phi\, Cos.^6\phi - 28 Cos.^{10}\phi + 252 Cos.^8\phi\, Sin.^2\phi]\frac{d\phi}{ds}$$
$$= 24 Em^4 e^{ms} + 120 Fm^4 e^{ms}(e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$-\beta^4 Cos.^8\phi[15 Cos.^3\phi - 105 Sin.^2\phi\, Cos.\phi - 28 Cos.^5\phi + 252 Cos.^3\phi\, Sin.^2\phi]$$
$$= 24 Em^4 + 120 Fm^4(e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$-\beta^4 Cosin.^8\phi[15 Cosin.^3\phi - 105 Cosin.\phi + 105 Cosin.^3\phi - 28 Cosin.^5\phi$$
$$+ 252 Cos.^3\phi - 252 Cos.^5\phi] = 24 Em^4 + 120 Fm^4(e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$-\beta^4 Cosin.^8\phi[- 105 Cosin.\phi + 372 Cosin.^3\phi - 280 Cosin.^5\phi] = 24 Em^4$$
$$+ 120 Fm^4(e^{ms} - 1) + \&c.$$

Es ist aber $Cosin.^3\phi = \frac{3 Cosin.\phi + Cosin.3\phi}{4}$

und $Cosin.^5\phi = \frac{10 Cosin.\phi + 5 Cosin.3\phi + Cosin.5\phi}{16}$.

Daraus findet man

$$-\beta^4 Cosin.^8\phi\left[-105 Cosin.\phi + 279 Cosin.\phi + 93 Cosin.3\phi - 175 Cosin.\phi - \frac{175 Cosin.3\phi + 35 Cosin.5\phi}{2}\right] = 24 Em^4 + 120 Fm^4(e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$-\beta^4 Cosin.^8\phi\left[- Cosin.\phi + \frac{11 Cosin.3\phi}{2} - \frac{35}{2} Cosin.5\phi\right] = 24 Em^4$$
$$+ 120 Fm^4(e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$+\frac{\beta^4 Cosin.^8\phi}{2}[2 Cosin.\phi - 11 Cosin.3\phi + 35 Cosin.5\phi] = 24 Em^4$$
$$+ 120 Fm^4(e^{ms} - 1) + \&c.$$

Wenn aber $\phi = w$ und $s = 0$; so findet man

$$\frac{\beta^4 Cosin.^8\phi}{2.1.2.3.4.m^4}[2 Cosin.\phi - 11 Cosin.3\phi + 35 Cosin.5\phi] = E.$$

Vor-

Vorhin fanden wir

$$-\beta^4[-105 Cosin.^9\phi + 372 Cosin.^{11}\phi - 280 Cosin.^{13}\phi] = 24 Em^4 + 120 Fm^4(e^{ms}-1) + 360 Gm^4(e^{ms}-1)^2 + 840 Hm^4(e^{ms}-1)^3 + 1680 Im^4(e^{ms}-1)^4 + \&c.$$

woraus folgt

$$-\beta^4[-105.9 Cos.^8 d Cos.\phi + 372.11 Cos.^{10}\phi d Cos.\phi - 280.13 Cos.^{12}\phi d Cos.\phi] = 120 Fm^5 e^{ms} ds + 720 Gm^5 e^{ms} ds (e^{ms}-1) + 2520 Hm^5 e^{ms} ds (e^{ms}-1)^2 + 6720 Im^5 e^{ms} ds (e^{ms}-1)^3 + \&c.$$

oder

$$-\beta^4[945 Cosin.^8 Sin.\phi - 4092 Cosin.^{10}\phi Sin.\phi + 3640 Cosin.^{12}\phi Sin.\phi]\frac{d\phi}{ds} = 120 Fm^5 e^{ms} + 720 Gm^5 e^{ms}(e^{ms}-1) + \&c.$$

oder

$$-\beta^4[945 Cosin.^{11}\phi Sin.\phi - 4092 Cosin.^{13}\phi Sin.\phi + 3640 Cosin.^{15}\phi Sin.\phi] = 120 Fm^5 + 720 Gm^5(e^{ms}-1) + \&c.$$

oder

$$-\beta^4 Cosin.^{10}\phi[945 Cosin.\phi Sin.\phi - 4092 Cosin.^3\phi Sin.\phi + 3640 Cosin.^5\phi Sin.\phi] = 120 Fm^5 + 720 Gm^5(e^{ms}-1) + \&c.$$

Aber $Cosin.^3\phi = \frac{3 Cosin.\phi + Cosin.3\phi}{4}$.

Daher $-4092 Cosin.^3\phi Sin.\phi = -3069 Cosin.\phi Sin.\phi - 1023 Cosin.3\phi Sin.\phi$.

Es ist $Sin\,\phi\, Cosin.3\phi = \frac{Sin.4\phi - Sin.2\phi}{2}$ und $Cosin.\phi Sin.\phi = \frac{Sin.2\phi}{2}$.

Man findet also

$$-4092 Cosin.^3\phi\, Sin.\phi = -\frac{3069 Sin.2\phi}{2} - \frac{1023 Sin.4\phi - 1023 Sin.2\phi}{2}$$

$$= -\frac{2046}{2} Sin.2\phi - \frac{1023}{2} Sin.4\phi = -1023 Sin.2\phi - \frac{1023}{2} Sin.4\phi.$$

Ferner ist

$$Cosin.^5\phi = \frac{10 Cosin.\phi + 5 Cosin.3\phi + Cosin.5\phi}{16}.$$

Mit-

Mithin

$$3640\,Cosin.^5\phi = \frac{9100\,Cosin.\phi + 4550\,Cosin.3\phi + 910\,Cosin.5\phi}{4}.$$

Folglich

$$3640\,Cosin.^5\phi\,Sin.\phi = \frac{9100\,Cosin.\phi\,Sin.\phi + 4550\,Cosin.3\phi\,Sin.\phi}{4}$$
$$+ \frac{910\,Cosin.5\phi\,Sin.\phi}{4}.$$

Aber

$$910\,Cosin.5\phi\,Sin.\phi = 455\,Sin.6\phi - 455\,Sin.4\phi.$$

Man erhält also

$$3640\,Cosin.^5\phi\,Sin.\phi = \frac{4550\,Sin.2\phi + 2275\,Sin.4\phi - 2275\,Sin.2\phi}{4}$$
$$+ \frac{455\,Sin.6\phi - 455\,Sin.4\phi}{4}.$$

Diese Werthe in den obigen Ausdruck gesezzet, findet man

$$-\beta^5 Cosin.^{10}\phi\left[\frac{1890\,Sin.2\phi - 4092\,Sin.2\phi - 2046\,Sin.4\phi + 4550\,Sin.2\phi}{4}\right.$$
$$\left.+\frac{2275\,Sin.4\phi - 2275\,Sin.2\phi + 455\,Sin.6\phi - 455\,Sin.4\phi}{4}\right] = 120\,Fm^5$$
$$+ 720\,Gm^5(e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$-\beta^5 Cosin.^{10}\phi\left[\frac{73\,Sin.2\phi - 226\,Sin.4\phi + 455\,Sin.6\phi}{4}\right] = 120\,Fm^5$$
$$+ 720\,Gm^5(e^{ms} - 1) + \&c.$$

Endlich

$$-\frac{\beta^5 Cosin.^{10}w}{4.1.2.3.4.5.m^5}[73\,Sin.2w - 226\,Sin.4w + 455\,Sin.6w] = F.$$

Eben

Eben haben wir gefunden

$$-\frac{\beta^5 Cosin.^{10}\phi}{4}[73 Sin.2\phi - 226 Sin.4\phi + 455 Sin\, 6\phi] = 120 Fm^5$$
$$+ 720 Gm^5(e^{ms} - 1) + 2520 Hm^5(e^{ms} - 1)^2$$
$$+ 6720 Im^5(e^{ms} - 1)^3 + \&c.$$

oder

$$-\frac{\beta^5}{4}[73 Cosin.^{10}\phi\, Sin.2\phi - 226 Cosin.^{10}\phi\, Sin.4\phi + 455 Cosin.^{10}\phi\, Sin.6\phi]$$
$$= 120 Fm^5 + 720 Gm^5(e^{ms} - 1) + 2520 Hm^5(e^{ms} - 1)^2$$
$$+ 6720 Im^5(e^{ms} - 1)^3 + \&c.$$

woraus folgt

$$-\frac{\beta^5}{4}[730 Sin.2\phi Cosin.^9\phi dCosin.\phi + 73 Cosin.^{10}\phi dSin.2\phi$$
$$- 2260 Sin.4\phi Cosin.^9\phi dCosin.\phi - 226 Cosin.^{10}\phi dSin.4\phi$$
$$+ 4550 Sin.6\phi Cosin.^9\phi dCosin.\phi + 455 Cosin.^{10}\phi dSin\, 6\phi]$$
$$= 720 Gm^6 e^{ms} ds + 5040 Hm^6 e^{ms} ds (e^{ms} - 1)$$
$$+ 20160 Im^6 e^{ms} ds (e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$-\frac{\beta^5}{4}[- 730 Sin.2\phi Cosin.^9\phi Sin.\phi + 146 Cosin.^{10}\phi Cosin.2\phi$$
$$+ 2260 Sin.4\phi Cosin.^9\phi Sin.\phi - 904 Cosin.^{10}\phi Cosin.4\phi$$
$$- 4550 Sin.6\phi Cosin.^9\phi Sin.\phi + 2730 Cosin.^{10}\phi Cosin.6\phi]\frac{d\phi}{ds}$$
$$= 720 Gm^6 e^{ms} + 5040 Hm^6 e^{ms}(e^{ms} - 1) + 20160 Im^6 e^{ms}(e^{ms} - 1)^2$$
$$+ \&c.$$

oder, da $\frac{d\phi}{ds} = \beta e^{ms} Cosin.^3\phi$,

$$-\frac{\beta^6}{4}[- 730 Sin.2\phi Cosin.^{12}\phi Sin.\phi + 146 Cosin.^{13}\phi Cosin.2\phi$$
$$+ 2260 Sin.4\phi Cosin.^{12}\phi Sin.\phi - 904 Cosin.^{13}\phi Cosin\, 4\phi$$
$$- 4550 Sin\, 6\phi Cosin.^{12}\phi Sin.\phi + 2730 Cosin.^{13}\phi Cosin.6\phi] = 720 Gm^6$$
$$+ 5040 Hm^6(e^{ms} - 1) + 20160 Im^6(e^{ms} - 1)^2 + \&c.$$

oder

oder

$$-\frac{\beta^6 Cosin.^{12}\varphi}{4}[-730 Sin.2\varphi Sin.\varphi + 146 Cos.\varphi Cos.2\varphi + 2260 Sin.\varphi Sin.4\varphi - 904 Cos.\varphi Cos.4\varphi - 4550 Sin.\varphi Sin.6\varphi + 2730 Cos.6\varphi Cos.\varphi] = 720 Gm^6 + 5040 Hm^6(e^{ms}-1) + 20160 Im^6(e^{ms}-1)^2 + \&c.$$

Es ist aber überhaupt $Sin.a Sin.b = \frac{Cos.(a-b) - Cos.(a+b)}{2}$.

Ist also 1) $a = 2\varphi$, $b = \varphi$; so erhält man $Sin.2\varphi Sin.\varphi = \frac{Cos.\varphi - Cos.3\varphi}{2}$.

Demnach

$$-730 Sin.2\varphi Sin.\varphi = -\frac{730 Cos.\varphi - 730 Cos.3\varphi}{2} = -365 Cos.\varphi + 365 Cos.3\varphi.$$

Ist 2) $a = 4\varphi$, $b = \varphi$; so erhält man $Sin.4\varphi\, Sin.\varphi = \frac{Cos.3\varphi - Cos.5\varphi}{2}$

und $2260 Sin.4\varphi Sin.\varphi = 1130 Cos.3\varphi - 1130 Cos.5\varphi$.

Ist 3) $a = 6\varphi$, $b = \varphi$; so erhält man $Sin.6\varphi\, Sin.\varphi = \frac{Cos.5\varphi - Cos.7\varphi}{2}$

und $-4550 Sin.6\varphi Sin.\varphi = -2275 Cos.5\varphi + 2275 Cos.7\varphi$.

Ferner ist überhaupt $Cos.a Cos.b = \frac{Cos.(a-b) + Cos.(a+b)}{2}$.

Ist 1) $a = 2\varphi$, $b = \varphi$; so wird $Cosin.2\varphi Cosin.\varphi = \frac{Cosin.\varphi + Cosin.3\varphi}{2}$

und $146 Cosin.2\varphi Cosin.\varphi = 73 Cosin.\varphi + 73 Cosin.3\varphi$.

Ist 2) $a = 4\varphi$, $b = \varphi$; so wird $Cosin.4\varphi Cosin.\varphi = \frac{Cosin.3\varphi + Cosin.5\varphi}{2}$

und $-904 Cosin.4\varphi Cosin.\varphi = -452 Cosin.3\varphi - Cosin.5\varphi$.

Ist endlich $a = 6\varphi$, $b = \varphi$; so wird $Cosin.6\varphi Cosin.\varphi = \frac{Cosin.5\varphi + Cosin.7\varphi}{2}$

und $2730 Cosin.6\varphi Cosin.\varphi = 1365 Cosin.5\varphi + 1365 Cosin.7\varphi$.

Diese Werthe in den obigen Ausdruck gesezzet, findet man

$$-\frac{\beta^6 Cosin.^{12}\phi}{4}[-365 Cosin.\phi + 365 Cosin.3\phi + 73 Cosin.\phi + 73 Cosin.3\phi + 1130 Cos.3\phi - 1130 Cos.5\phi - 452 Cos.3\phi - 452 Cos.5\phi - 2275 Cos.5\phi + 2275 Cosin.7\phi + 1365 Cosin\, 5\phi + 1365 Cosin.7\phi] = 720 Gm^6 + 5040 Hm^6 (e^{ms} - 1) + \&c.$$

woraus folgt

$$+\frac{\beta^6 Cosin.^{12}\phi}{4}[292 Cosin.\phi - 1116 Cosin.3\phi + 2492 Cos.5\phi - 3640 Cos.7\phi] = 720 Gm^6 + 5040 Hm^6 (e^{ms} - 1) + 20160 Im^6 (e^{ms} - 1)^2 + \&c.$$

Und endlich

$$\frac{\beta^6 Cosin.^{12}w}{4}[292 Cosin.w - 1116 Cosin.3w + 2492 Cos.5w - 3640 Cos.7w] = 720 Gm^6.$$

Daher

$$G = \frac{\beta^6 Cosin.^{12}w}{4.1.2.3.4.5.6m^6}[292 Cosin.w - 1116 Cosin.3w + 2492 Cosin.5w - 3640 Cosin.7w]$$

Aus dem Vorhergehenden folgt

$$\frac{\beta^6}{4}[292 Cosin.^{13}\phi - 1116 Cosin.^{12}\phi Cosin.3\phi + 2492 Cosin.^{12}\phi Cosin.5\phi - 3640 Cosin.^{12}\phi Cosin.7\phi] = 720 Gm^6 + 5040 Hm^6 (e^{ms} - 1) + 20160 Im^6 (e^{ms} - 1)^2 + \&c.$$

und mithin

$$\frac{\beta^6}{4}[292.13 Cosin.^{12}\phi d Cosin.\phi - 12.1116 Cosin.^{11} Cosin.3\phi d Cosin.\phi - 1116 Cosin.^{12}\phi d Cosin.3\phi + 2492.12 Cosin.^{11}\phi Cosin.5\phi d Cosin.\phi + 2492 Cosin.^{12}\phi d Cosin.5\phi - 12.3640 Cosin.^{11}\phi Cosin.7\phi d Cosin.\phi - 3640 Cosin.^{12}\phi d Cosin.7\phi] = 5040 Hm^7 e^{ms} ds + 40320 Im^7 (e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$\frac{\beta^6}{4}[-292.13.Cosin.^{12}\phi Sin.\phi + 12.1116 Cosin.^{11}\phi Cosin.3\phi Sin.\phi$$
$$+ 3.1116 Cosin.^{12}\phi Sin.3\phi - 2492.12.Cosin.^{11}\phi Cosin.5\phi Sin.\phi$$
$$- 2492.5 Cosin.^{12}\phi Sin.5\phi + 12.3640 Cosin.^{11}\phi Cosin.7\phi Sin.\phi$$
$$+ 3640.7 Cosin.^{12}\phi Sin.7\phi]\frac{d\phi}{ds} = 5040 Hm^7 e^{ms}$$
$$+ 40320 Im^7 e^{ms}(e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$\frac{\beta^7}{4}[-292.13 Cosin.^{15} Sin.\phi + 12.1116 Cosin.^{14}\phi Cosin.3\phi Sin.\phi$$
$$+ 3.1116 Cosin.^{15}\phi Sin.3\phi - 2492.12 Cosin.^{14}\phi Cosin.5\phi Sin.\phi$$
$$- 2492.5 Cosin.^{15}\phi Sin.5\phi + 12.3640 Cosin.^{14}\phi Cosin.7\phi Sin.\phi$$
$$+ 3640.7 Cosin.^{15}\phi Sin.7\phi] = 5040 Hm^7$$
$$+ 40320 Im^7(e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$\frac{\beta^7 Cosin.^{14}\phi}{4}[-292.13 Cosin.\phi Sin.\phi + 12.1116 Cosin.3\phi Sin.\phi$$
$$+ 3.1116 Cosin.\phi Sin.3\phi - 2492.12 Cosin.5\phi Sin.\phi - 2492.5 Cosin.\phi Sin.5\phi$$
$$+ 12.3640 Cosin.7\phi Sin.\phi + 3640.7 Cosin.\phi Sin.7\phi] = 5040 Hm^7$$
$$+ 40320 Im^7(e^{ms} - 1) + \&c.$$

oder

$$\frac{\beta^7 Cosin.^{14}\phi}{4}[-3796 Cosin.\phi Sin.\phi + 13392 Cosin.3\phi Sin.\phi$$
$$+ 3348 Cosin.\phi Sin.3\phi - 29904 Cosin.5\phi Sin.\phi - 12460 Cosin.\phi Sin.5\phi$$
$$+ 43680 Cosin.7\phi Sin.\phi + 25480 Cosin.\phi Sin.7\phi] = 5040 Hm^7$$
$$+ 40320 Im^7(e^{ms} - 1) + \&c.$$

Es ist aber überhaupt $Sin.a Cosin.b = \frac{Sin(a+b) + Sin.(a-b)}{2}$.

Ist also 1) $a = b = \phi$; so erhält man $Sin\,\phi Cosin.\phi = \frac{Sin.2\phi}{2}$.

Also $-3796 Cosin.\phi Sin.\phi = -1898 Sin.2\phi$.

Ist 2) $a = \varphi$, $b = 3\varphi$; so erhält man $Sin.\varphi Cosin.3\varphi = \frac{Sin.4\varphi - Sin.2\varphi}{2}$.

Also $13392 Sin.\varphi Cosin.3\varphi = 6696 Sin.4\varphi - 6696 Sin.2\varphi$.

Ist 3) $a = 3\varphi$, $b = \varphi$; so erhält man $Sin.3\varphi Cosin.\varphi = \frac{Sin.4\varphi + Sin.2\varphi}{2}$.

Also $3348 Sin.3\varphi Cosin.\varphi = 1674 Sin.4\varphi + 1674 Sin.2\varphi$.

Ist 4) $a = \varphi$, $b = 5\varphi$; so erhält man $Sin.\varphi Cosin.5\varphi = \frac{Sin.6\varphi - Sin.4\varphi}{2}$.

Also $-29904 Sin.\varphi Cosin.5\varphi = -14952 Sin.6\varphi + 14952 Sin.4\varphi$.

Ist 5) $a = 5\varphi$, $b = \varphi$; so erhält man $Sin.5\varphi Cosin.\varphi = \frac{Sin.6\varphi + Sin.4\varphi}{2}$.

Also $-12460 Sin.5\varphi Cosin.\varphi = -6230 Sin.6\varphi - 6230 Sin.4\varphi$.

Ist 6) $a = \varphi$, $b = 7\varphi$; so erhält man $Sin.\varphi Cosin.7\varphi = \frac{Sin.8\varphi - Sin.6\varphi}{2}$.

Also $43680 Sin.\varphi Cosin.7\varphi = 21840 Sin.8\varphi - 21840 Sin.6\varphi$.

Ist endlich $a = 7\varphi$, $b = \varphi$; so erhält man $Sin.7\varphi Cos.\varphi = \frac{Sin.8\varphi + Sin.6\varphi}{2}$.

Also $25480 Sin.7\varphi Cosin.\varphi = 12740 Sin.8\varphi + 12740 Sin.6\varphi$.

Sezzet man diese Werthe in die oben gefundene Gleichung; so erhält man, nach geschehener Reduktion,

$$\frac{\beta^7 Cos.^{14}\varphi}{4}[-6920 Sin.2\varphi + 17092 Sin.4\varphi - 30282 Sin.6\varphi + 34580 Sin.8\varphi]$$
$$= 5040 Hm^7 + 40320 Im^7(e^{ms} - 1) + \&c.$$

Und sezzet man $\varphi = w$, in welchem Fall $s = 0$; so erhält man

$$-\frac{\beta^7 Cosin.^{14}w}{4.1.2.3.4.5.6.7.m^7}[6920 Sin.2w - 17092 Sin.4w + 30282 Sin.6w$$
$$- 34580 Sin.8w] = H.$$

Eben so würde man verfahren müssen, wenn man noch mehrere Coeffizienten aufsuchen wollte.

§. 51.

Man kann die Coeffizienten der Reihe, welche zu Ende dieses Paragraphen stehet, auch auf folgende Art finden.

Man bezeichne in dieser Absicht den Coeffizienten z, in der Reihe §. 50, der dort Eins ist, mit a, den Coeffizienten von z^2 mit b, den Coeffizienten von z^3 mit c, den Coeffizienten von z^4 mit d u. s. w.; so hat man

$$\vartheta = az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \&c.$$

Nun drücke man z durch ϑ aus und nehme an, es sey

$$z = A'\vartheta + B'\vartheta^2 + C'\vartheta^3 + D'\vartheta^4 + \&c.$$

Man soll die Coeffizienten A', B', C', D' u. s. w. bestimmen.

Es ist also

$$az = A'a\vartheta + B'a\vartheta^2 + C'a\vartheta^3 + D'a\vartheta^4 + \&c.$$

Ferner

$$bz^2 = A'^2b\vartheta^2 + 2A'B'b\vartheta^3 + 2A'C'b\vartheta^4 + B'^2b\vartheta^4 + \&c.$$

Demnach erhalten wir

$$\begin{aligned}\vartheta = A'a\vartheta &+ aB'\vartheta^2 + aC'\vartheta^3 + \&c.\\ &+ A'^2b\vartheta^2 + 2A'B'b\vartheta^3\\ &\qquad\qquad + A'^3c\vartheta^3.\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nicht statt finden, wenn nicht

1) $A'a = 1$, also $A' = 1$, $a = 1$.

2) $A'^2b + aB' = 0$, mithin $B' = -b = -\frac{1}{2}\cdot\frac{C}{B}$.

3) $aC' + 2A'B'b + A'^3c = 0$, oder $C' + 2B'b + c = 0$.

Demnach

$$C = -2B'b - c = \frac{1}{2}\cdot\frac{C^2}{B^2} - \frac{1}{2}\frac{D}{B} + \frac{1}{8}\cdot\frac{C^2}{B^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{D}{B} + \frac{5}{8}\cdot\frac{C^2}{B^2}$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\frac{D}{B} - \frac{5}{8}\cdot\frac{C^2}{B^2}\right).$$

Auf eben diese Art findet man alle folgende Coeffizienten.

§. 98.

Man findet diese Formel auf folgende Art.

Wenn ein flüssiger, elastischer Körper in dem Raum $AEFB$ Fig. 6. enthalten ist; so siehet man leicht, daß diejenige Schichten desselben, welche dem Boden EF am nächsten liegen, dichter seyn müssen, als die oben liegende Schichten. Es sey $Fq = y$ und der Druck, welchen die Fläche EF von einem flüssigen Körper leidet, dessen Höhe $= Fq$ ist, wollen wir $= u$ sezzen. Wenn Fq oder y um $qQ = \Delta y$ wächset; so wird u um die Grösse Δu wachsen. Ferner sey D die Dichtigkeit, welche die Schicht QR nächst an der Linie qr hat, D' aber ihre Dichtigkeit, welche sie zunächst an der Linie QR hat. Wenn wir nun annehmen, D' sey die Dichtigkeit der Schicht in allen ihren Punkten; so ist $\Delta u > rq \cdot D' \cdot \Delta y$ oder $\frac{\Delta u}{\Delta y} > rq \cdot D'$.

Nehmen wir aber an, D sey die Dichtigkeit der Schicht in allen ihren Punkten; so erhalten wir $\Delta u < rq \cdot D \cdot \Delta y$ oder $\frac{\Delta u}{\Delta y} < rq \cdot D$.

Wenn $\Delta y = o = dy$; so ist auch $\Delta u = o = du$ und $D' = D$.

Daher erhalten wir

$$\frac{du}{dy} = rq \cdot D \text{ und } \int du = rq \int Ddy \text{ oder } u = rq \int Ddy.$$

Den Innhalt der Fläche rq sezze man $= 1$.

Wenn h die Höhe des Barometers in der Entfernung y von der Oberfläche des Meeres bedeutet und 1 die Dichtigkeit des Quecksilbers ausdrückt; so finden wir die Gleichung $\int - Ddy = h$, weil h abnimmt, wenn y wächst.

Weil die Dichtigkeit der Luft desto grösser wird, je mehr die Luft beschweret ist; so wächst die Dichtigkeit in dem Verhältniß der Gewichte, womit man die Luft zusammenpresset, und wenn also H die Höhe des Barometers auf der Oberfläche des Meeres und Δ die Dichtigkeit der Luft an eben diesem Orte bezeichnet; so ist

$$H : h = \Delta : D$$

und $h = \frac{HD}{\Delta}$. Mithin $\int - Ddy = \frac{HD}{\Delta}$.

Man differenziire diese Gleichung, bedenke aber, daß H und Δ beständige Grössen sind; so erhält man $- Ddy = \frac{H}{\Delta} \cdot dD$, woraus folgt $- \frac{\Delta}{H} \cdot dy = \frac{dD}{D}$. und $log.D = - \frac{\Delta}{H} \cdot y + log.C.$ Wenn $y = o$; so ist $D = \Delta$. Mithin $log.\Delta = log.C$, und demnach $log.D = - \frac{\Delta}{H} \cdot y + log.\Delta$, oder $log.\frac{D}{\Delta} = - \frac{\Delta}{H} \cdot y$. Endlich $\frac{D}{\Delta} = e^{-\frac{\Delta}{H} \cdot y}$, oder $D = \Delta e^{-\frac{\Delta}{H} \cdot y}$. Oben haben wir gefunden $\int - Ddy = h$. Demnach auch $\int - \Delta e^{-\frac{\Delta}{H} \cdot y} dy = h$ oder $h = He^{-\frac{\Delta}{H} \cdot y}$, woraus folgt $\frac{h}{H} = \frac{1}{e^{\frac{\Delta}{H} \cdot y}}$ oder $e^{\frac{\Delta}{H} \cdot y} = \frac{H}{h}$.

Fig. 7. Es sey nun AB die Höhe der Atmosphäre und $y = AL$; so erhalten wir

$$e^{\frac{\Delta}{H} \cdot AL} = \frac{H}{h} \text{ oder } \frac{\Delta}{H} \cdot AL = log.hyp.\frac{H}{h}.$$

Wenn

Wenn also auf der Höhe AK das Quecksilber im Barometer auf der Höhe m und auf der Höhe AG die Höhe des Barometers $= n$ ist; so findet man auf eben die Art

$$e^{\frac{\Delta}{H} \cdot AK} = \frac{H}{m} \text{ oder } \frac{\Delta}{H} \cdot AK = log.hyp. \frac{H}{m}.$$

und

$$e^{\frac{\Delta}{H} \cdot AG} = \frac{H}{n} \text{ oder } \frac{\Delta}{H} \cdot AG = log.hyp. \frac{H}{n}.$$

Nun verwandelt man aber den hyperbolischen Logarithmen in den briggschen, wenn man jenen mit $0,43429448$ multiplizirt. Wir erhalten mithin folgende Gleichungen:

1) $\frac{\Delta}{H} \cdot AL \cdot 0,43429448 = 0,43429448 \; log.hyp. \frac{H}{h} = log.brigg. \frac{H}{h}.$

2) $\frac{\Delta}{H} \cdot AK \cdot 0,43429448 = 0,43429448 \; log.hyp. \frac{H}{m} = log.brigg. \frac{H}{m}.$

3) $\frac{\Delta}{H} \cdot AG \cdot 0,43429448 = 0,43429448 \; log.hyp. \frac{H}{n} = log.brigg. \frac{H}{n}.$

Und demnach

$$AG : AK = log. \frac{H}{n} : log. \frac{H}{m}$$

$$AG : AL = log. \frac{H}{n} : log. \frac{H}{h};$$

woraus folgt

$$AL : AK = log. \frac{H}{h} : log. \frac{H}{m}$$

und

$$AL - AK : AK = log. \frac{H}{h} - log. \frac{H}{m} : log. \frac{H}{m}$$

oder

$$AL - AK : AK = log. \frac{m}{h} : log. \frac{H}{m}.$$

Aber

Aber aus der ersten Proportion finden wir

$$AK = \frac{AG \cdot \log. \frac{H}{m}}{\log. \frac{H}{n}}$$

Demnach

$$AL - AK : \frac{AG \cdot \log. \frac{H}{m}}{\log. \frac{H}{n}} = \log. \frac{m}{h} : \log. \frac{H}{m}$$

oder

$$AL - AK : \frac{AG}{\log. \frac{H}{n}} = \log. \frac{m}{h} : 1;$$

woraus folgt

$$AL - AK = \frac{AG \cdot \log. \frac{m}{h}}{\log. \frac{H}{n}}.$$

Hier kann man AK annehmen, wie man will. Sezzet man also $AK = 0$; so wird

$$m = H \text{ und } AL = \frac{AG \cdot \log. \frac{H}{h}}{\log. \frac{H}{n}}.$$

Nun weiß man durch sichere Beobachtungen, daß, wenn das Barometer bei dem Punkt A 28 Pariser Zoll hoch stehet, wenn die Wärme des Reaumürschen Thermometers $16\frac{3}{4}$ Grade ist, solches um 1 Linie falle, wenn man über den Punkt A 77,67 Pariser Fusse oder 12,945 Toisen erhaben ist. Sezzet man also $AG = 6 \cdot 12{,}945$ Pariser Fuß; so wird $H = 336$ Pariser Linien, und $n = 335$ Pariser Linien.

Dem-

Demnach erhalten wir

$$AL = \frac{6 \cdot 12,945 \text{ Pariser Fuß}}{\log. \frac{336}{335}} \cdot \log. \frac{H}{h}.$$

Es ist aber $\log.\mathit{brigg}. \frac{336}{335} = 0,0012945$.

$$\text{Demnach } AL = \frac{6 \cdot 12,945 \text{ Par. Fuß}}{0,0012945} \log. \frac{H}{h}$$

$$\text{oder } AL = \frac{6 \cdot 12,945 \text{ Par. Fuß}}{0,0012945 \cdot 2,30258} \cdot \log.\mathit{hyp}. \frac{H}{h}.$$

$$= \frac{6 \cdot 10000 \text{ Par. Fuß}}{2 \cdot 30258} \cdot \log.\mathit{hyp}. \frac{H}{h}.$$

Nun verhält sich aber der Par. Fuß zum Rheinländischen wie 1440 : 1391,3. Daher wird

$$AL = \frac{6 \cdot 10000 \cdot 1440 \text{ Rhl. Fuß}}{2 \cdot 30258 \cdot 1391,3} . \log.\mathit{hyp}. \frac{H}{h}.$$

Hieraus findet man leicht,

$$\frac{h}{H} = \frac{D}{\Delta} = e^{-\frac{2,30258 \cdot 0,1610}{10000} \cdot y}.$$

§. 108.

Der Herr Verfasser findet hier die Formel: $\mathit{Cosin}.BAE = \mathit{Cosin}.\vartheta\, \mathit{Cosin}.\pi$. Um die Wahrheit davon einzusehen, muß man bemerken, daß, wenn man die Senkrechte BC auf die Horizontallinie $ACDE$ und die Senkrechte BK auf die Linie AE ziehet, auch die Linie CK auf AE senkrecht stehen wird. Davon überzeugt man sich leicht, wenn man bedenkt, daß AB in der Verticalfläche ABC liegt, welche auf der Fläche $ACDE$ senkrecht stehet, und daß mithin $(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2$. Ferner findet man $(AB)^2 = (AK)^2 + (BK)^2$. Endlich $(BK)^2 = (BC)^2 + (CK)^2$. Fig. 8.

Daraus folgt $(AK)^2 + (BK)^2 = (BC)^2 + (AC)^2$ und $(AK)^2 + (BC)^2 + (CK)^2 = (BC)^2 + (AC)^2$ oder $(AK)^2 + (CK)^2 = (AC)^2$, woraus sogleich erhellet, daß AKC ein rechter Winkel seyn müsse. Ist aber dieß; so findet man

$$Cosin.BAE = Cosin.BAK = \frac{AK}{AB}$$

$$Cosin.BAC = Cosin.\pi = \frac{AC}{AB}$$

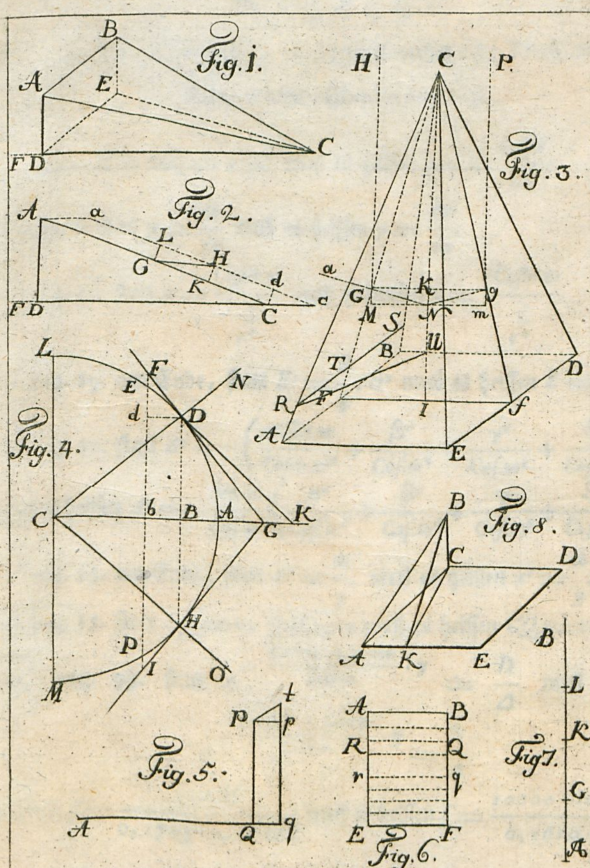
und $AB = \frac{AC}{Cosin.\pi}$. Ferner $Cosin.CAE = \frac{AK}{AC} = Cosin.\vartheta$. Mithin

$$AK = AC \,.\, Cosin.\vartheta.$$

Demnach

$$Cosin.BAE = \frac{AC\,Cosin.\vartheta}{\frac{AC}{Cosin.\pi}} = Cosin.\vartheta\, Cosin.\pi.$$

Anzeige



Bombardier prussien.

Anzeige

einiger Druckfehler in dem Bombardier Prussien.

§. 7. pag. 5. statt $dudt = dsdds$ muß es heissen $udu = \frac{dsdds}{dt^2}$.

§. 8. pag. 5. statt $p = \frac{dy}{dy}$ muß es heissen $p = \frac{dy}{dx}$.

§. 18. pag. 10. statt $u = \frac{Cosin.w}{e^{\frac{s}{a}}}$ muß es heissen $u = \frac{c\,Cosin.w}{e^{\frac{s}{a}}}$.

§. 34. pag. 29. am Ende, statt $E^v = \frac{S}{4} . \vartheta^v$ muß es heissen $E = \frac{S}{4} \vartheta^v$.

§. 34. pag. 30. statt $A^v = -\left(\frac{\alpha^v Sin.w}{Cosin.w^8} + \frac{\beta^v}{Cos.w^6} + \frac{\gamma^v}{Cos.w^4} + \frac{\vartheta^v}{Cos.w^2} + E^v\right)$

muß es heissen $A^v = -\frac{Sin.w}{Cos.w^4}\left(\frac{\alpha^v}{Cos.w^8} + \frac{\beta^v}{Cos.w^6} + \frac{\gamma}{Cos.w^4} + \frac{\vartheta^v}{Cos.w^2} + E^v\right)$.

§. 37. pag. 35. am Ende, statt $A' = \frac{\alpha}{3}$, muß es heissen $\alpha' = \frac{\alpha}{3}$.

§. 48. pag. 55. statt $CQ = u$, $QM = z$ muß es heissen $CQ = z$, $QM = u$.

§. 98. pag. 99. statt $e^{-\frac{0,1725 . 2,30258}{10000} . y} = \frac{D}{\Delta}$ muß es heissen

$$e^{-\frac{0,1610 . 2,30258}{10000} . y} = \frac{D}{\Delta}.$$

Eod. statt $f = \frac{10000}{0,1725 \cdot 2,30258}$ muß es heissen $f = \frac{10000 \text{ pieds de Rhin.}}{0,1610 \cdot 2,30258}$

Erläuterungen

über

einige Punkte

des

BOMBARDIER PRUSSIEN.

Von

A. L. v. Massenbach.

Lieutenant in Königlich Preußischen Diensten.

Halle,
bey Johann Jacob Gebauer.
1785.