Versuch
von der Theorie der Alligationsregel und der Münzwissenschaft

dem

Hochedelgebohrnen und Wohlweisen Herrn

Herrn

Hermann Henrich Roeck

vornehmem Kaufmann und Handelsherrn

und verdienstvollem Aeltesten der löbl. Novogrodsfahrer Compagnie

welcher

den 3ten Februar im Jahr 1779

zum ansehnlichen Mitgliede

Eines Hochedlen und Hochweisen Raths

der Kayserl. freyen und des heil. Röm. Reichs Stadt Lübeck

erwählet wurde

---

am Tage Seiner feyerlichen Einführung

zum Merkmal

der aufrichtigsten Beyfreude und Ergebenheit

überreicht

von

M. Friederich Daniel Behn

des Lübeckischen Gymnasii Subrector

der Philosophischen Facultät zu Jena Adjunct, der deutschen Gesellschaft zu Jena und Leipzig Mitglied.

Lübeck den 5ten Februar 1779.

Gedruckt bey Johann Daniel August Fuchs.

9

8

Hochedelgebohrner,
Wohlweiser, Hochzuverehrender Herr!

Mit der aufrichtigsten Beyfreude geselle ich mich zu allen redlichen Bürgern, welchen dieser Tag einer der feyerlichsten ist, an welchem Ew. Hochedelgebohrnen zu der höchsten Ehrenstuffe in Ihrem Vaterlande erhoben sind.

Schon lange haben Sie, Wohlweiser Herr Senator! durch Ihre großen Eigenschaften, durch Ihre ungeheuchelte Frömmigkeit, durch Ihre erhabene Tugenden, durch Ihren Eifer, auf der glänzenden Bahn Ihres verewigten Vaters, dessen Andenken bey uns immer in Segen bleiben wird, mit den edlen Gesinnungen eines Patrioten fortzudringen, nicht blos die Aufmerksamkeit aller wohldenkenden Bürger auf sich gezogen, sondern auch oft ihre Bewunderung rege gemacht.

Nun sehen sie ihre Wünsche erfüllt. Nun verehren sie Dieselben unter den weisen Regenten unsers Staates, als einen Patrioten, welcher sie zu den größten Hoffnungen berechtiget.

Und wie viel kann Lübeck nicht von einem Manne erwarten, welchen angestammte Tugend, erhöht durch das glänzendste Beyspiel eines Vaters, der noch vor wenig Jahren seine erhabene Zierde war, und auf dessen Grab es noch Thränen einer wehmuthsvollen Dankbarkeit vergießt, warme Vaterlandsliebe, Erfahrung und Kenntniße von den innern Verfassungen des Staats, große Absicht, die Unschuld zu schützen, wenn sie verfolgt wird, wohlthätig gegen diejenigen zu seyn, welche um Hülfe flehen, die Tugend und Weisheit zu schätzen und zu belohnen, wo sie sich in ihrem wahren Glanze zeigt, überall guten Menschen Gutes zu thun, und auch mächtigen Bösewichtern mit dem Muthe und der Entschlossenheit eines edlen Menschenfreundes ihre Absicht zu vereiteln, — welchen alle diese große Eigenschaften schmücken?

Wie herzlich wünsche ich, verehrungswürdiger Herr Roeck! meiner Vaterstadt zu Ihnen als ihrem neuen Mitregenten Glück? Alle jene Vollkommenheiten Ihres Geistes werden der Würde, womit die Preiswürdigen Väter unsers Vaterlandes Ihre großen Verdienste belohnen, erst ihren ganzen Werth geben, und ihr einen Glanz beylegen, wodurch Sie auch noch die Bewunderung der Nachwelt werden.

Der Herr des Schicksals verherrlichet auch durch Sie seine Gnade, nach welcher er die Wohlfahrt unsrer Republick im schönsten Flore blühen läßt. Er hat Sie dazu erwählt, daß Sie, gleich Ihrem ruhmwürdigen Herrn Vater, eine Zierde und Stütze unsers Staates seyn sollen. Itzt werden Sie aufgefordert, eine Bahn zu betreten, wo Ihre Tugend und Weisheit sich in einem neuen Glanze zeigen wird. O dieser Gott der Liebe und des Wohlthuns sey Ihnen in allen ihren rühmlichen Bemühungen stets zur Seite! Er bekröne eine jede Entschliessung, welche Sie zum allgemeinen Besten fassen, mit dem herrlichsten Erfolge. Bis zu dem spätesten Ziele des menschlichen Lebens hin setze er Sie zum Segen Lübecks, und zur Freude aller Redlichen! Alle Ihre Wünsche erfülle er in dem reichsten Maaße! Ihre vornehme Familie blühe in allen ihren Zweigen, und eine jede Glückseligkeit, welche nur die besten unter den Menschen genießen können, müsse Ihren Geist fröhlich vor dem Herrn, dem Allgütigen machen!

So wünsche ich mit dem redlichsten Herzen und mit dem vollkommensten Zutrauen zu dem Allmächtigen, daß er sie alle erfüllen werde. Ich bitte aber auch für mich, um Dero mir unschätzbare Gewogenheit und um eine gütige Aufnahme dieses meines Versuches, mich einigen meiner Mitbürger nützlich zu machen, welchen ich die Ehre habe Ihnen zu widmen. Mit der vollkommensten Hochachtung und Ehrfurcht werde ich stets seyn,

Hochedelgebohrner, Wohlweiser Herr,

Dero

Lübeck,
den 5ten Februar 1779.

gehorsamster Diener

M. F. D. Behn.

Ich mache hiemit den Anfang, die Wünsche einiger von meinen Mitbürgern zu erfüllen, und dem Publicum eine Theorie von der Münzwissenschaft vorzulegen, worinn ich vorzüglich auf unsere Republik Rücksicht genommen habe. Nach unserer Verfassung werden aus dem Senat und der Bürgerschaft allemal einige Personen erwählt, welchen die Aufsicht über diese Sache von unserm Staat anvertrauet wird. Einem Patrioten muß es immer sehr angenehm seyn, wenn er die Verfassung des Gewerbes genau kennet, welches unter seiner Aufsicht zum allgemeinen Besten getrieben werden soll. Auch selbst derjenige, welcher dieses unter der Aufsicht andrer betreibet, wird, wenn er ein rechtschaffener Mann ist, es weit lieber sehen, daß sein Vorgesetzter seine Vorschläge, seine Bearbeitung des ihm anvertraueten Werkes nach richtigen Grundsätzen beurtheilen, und folglich auch mit Einsicht seine Arbeit schätzen könne, als wenn er nichts von diesem Geschäfte versteht, und doch sich das Ansehen geben möchte, als ob ihm alles hinreichend bekannt wäre.

Die Mathematik muß durchaus als eine Wissenschaft getrieben werden, welche nach ihren Theilen gemeinnützig ist, und es seyn soll. Nach dieser Absicht bemühe ich mich ihre Grundsätze unsern Gymnasiasten und andern jungen Leuten vorzutragen. Es würde mir eine große Freude seyn, wenn ich auch selbst einigen meiner jungen Mitbürger durch diese mathematischen Aufsätze nützlich werden könnte, und zwar um desto mehr, weil mich einsichtsvolle und angesehene Männer unsers Staates dazu aufgefordert haben, diese Sache zu entwickeln. Die Geschäfte des Münzmeisters und des Münzwardeyen setzen gewiße Kenntnisse von der Natur geometrischer Proportionen, von der Regel Detri überhaupt, von der Regel der Mixtion, von der Alligationsregel voraus. Ich hoffe hiemit alles gesagt zu haben, um die Ordnung zu rechtfertigen, in welcher ich die hieher gehörigen Wahrheiten vortragen werde.

§. 1.

Wenn wir eine Größe mit einer andern vergleichen wollen, um ihr Verhältniß fest zu setzen: so müßen sie Größen von einerley Art seyn, wenigstens müßen wir sie in dem Vergleich als solche ansehen können. Wir können auf diese Frage: wie sich ein Mensch gegen ei-

nen

nen Baum verhält? gar nichts antworten, es sey denn, daß wir sie beyde als Körper ansehen, deren Länge, oder Schwere wir gegen einander durch ein Verhältniß ausdrücken wollen. Nur in einem solchen Falle können wir es bestimmen, wie sich ihre Längen, oder Schweren gegen einander verhalten. Denn nun läßt sich ein gemeinschaftlicher Maasstab denken, wir können es durch Zahlen ausdrücken, wie vielmal dieser in beyden enthalten ist, und dann lassen sich diese Zahlen leicht in ein Verhältniß bringen. Vergleichen wir zwo Größen von einerley Art mit einander: so lassen sich nur zwo Fragen aufwerfen. Die erste ist diese: **um wie viel ist die eine Größe größer oder kleiner als die andre?** Daher entsteht das arithmetische Verhältniß. Die andre diese: **wie vielmal ist die eine in der andern enthalten?** Daher das geometrische. In beyden Untersuchungen werden wir finden, daß sie sich entweder gleich oder ungleich sind. Folglich ist so wohl das arithmetische als auch das geometrische Verhältniß entweder ein **Verhältniß der Gleichheit oder Ungleichheit.**

§. 2.

Dasjenige, was wir der einen Größe in Ansehung der andern beylegen, heißt überhaupt der **Name** des Verhältnisses. Wir können diesen auf eine doppelte Art finden, und zwar in dem arithmetischen Verhältnisse durch die Subtraction, in dem geometrischen durch die Division. Frägt man z. E. um wie viel Einheiten 12 größer als 7 ist, so ziehen wir 7 von 12 ab; folglich ist der Name oder die Differenz 5. Will man aber wissen, wie vielmal 7 in 12 enthalten ist: so muß man diese durch jene dividiren, und der Name oder Exponent wird $1\frac{5}{7}$mal seyn.

Einigen meiner Leser zu gefallen will ich einige Zeichen erklären, deren wir uns bedienen müssen, um uns kurz und deutlich auszudrücken. Unbestimmte Zahlen sind solche, die wir so groß und klein annehmen können, als wir wollen. Sollen sie als bekannt gedacht werden: so brauchen wir die ersten Buchstaben des Alphabets, als a, b, c, u. s. w. Die unbekannten oder erst zubestimmenden Größen werden bezeichnet durch x. oder y. oder z. Größen, die addiret werden sollen, verbindet man durch dieß Zeichen +, als $a+b$. Das Zeichen der Subtraction ist —, als $a-b$, man soll b von a wegnehmen. Die Multiplication zu bezeichnen, schreiben wir entweder a, b oder $a \times b$, oder ab.

Doch dieser letzte Fall kann bey bestimmten Zahlen nicht gebraucht werden, weil sonst eine Zweydeutigkeit entstehen würde, und es zweifelhaft bliebe, ob dieß Zeichen 3 6 drey multiplicirt durch 6 oder sechs und dreyßig anzeigen sollte. In der Division wird entweder dieß Zeichen a : b oder $\frac{a}{b}$ gesetzt, und in beyden Fällen heißt es a dividirt durch b. Das Zeichen der Gleichheit ist dieses $=$, als $a = b$ oder $6 + 9 = \frac{30}{2} = 15$.

§. 3.

Wir können zwey Verhältnisse mit einander vergleichen, wenn sie entweder beyde arithmetisch oder geometrisch sind. Wir werden bey dieser Untersuchung finden, daß sie entweder einerley Namen haben oder nicht. Im ersten Fall erwächst eine **Proportion**. Verhältnisse, die gleiche Namen haben, sind sich gleich. Es besteht also **die Proportion in der Gleichheit zweyer Verhältnisse.** Wird der gemeinschaftliche Name durch die Division gefunden: so entsteht eine geometrische Proportion. Wir haben eine Formel, welche die Erklärung der geometrischen Proportion sehr deutlich ausdrücket, und diese ist folgende: $a : am = b : bm$. Aus dieser erhellet, 1) daß die Verhältnisse sich gleich sind, 2) daß der Name durch die Division gefunden wird, und 3) daß der Name m ist. Man nehme an $m = 1$: so besteht diese Proportion aus Verhältnissen der Gleichheit. Ist m einer ganzen Zahl gleich: so sind die ersten Glieder in der Ration die kleineren, und die Verhältnisse werden Verhältnisse der kleinern Ungleichheit genannt. Ist aber m einem Bruche gleich: so sind die ersten Glieder die größten, und die Verhältnisse sind Verhältnisse der größern Ungleichheit. Wir wollen alle drey Fälle durch Beyspiele in bestimmten Zahlen erläutern. 1) $2 : 2$, $1 = 8 : 8$, $1 = 2 : 2 = 8 : 8$. 2) $2 : 2 \times 6 = 7 : 7 \times 6 = 2 : 12 = 7 : 42$. 3) $8 : 8, \frac{1}{4} = 24 : 24, \frac{1}{4} = 8 : 2 = 24 : 6$. Gewöhnlich pflegen die Mathematiker m als eine ganze Zahl anzunehmen, und nach dieser Voraussetzung bedeutet $a : am = b : bm$ eine Proportion, welche aus Verhältnissen der kleinern Ungleichheit bestehet, und $am : a = bm : b$ wäre die Formel einer Proportion von Verhältnissen der kleinern Ungleichheit.

§. 4.

In einer jeden geometrischen Proportion ist das Facit der beyden mittlern Glieder dem Facit der beyden äusseren gleich.

1) Es

1) Es sey die Proportion aus Verhältnissen der Gleichheit zusammen gesetzt, als $a:a = b:b$: so ist das Facit der äussern Gliedern so wohl als der beyden mittlern $= ab$.

2) Sind Verhältnisse der kleinern Ungleichheit da, als $a:am = b:bm$; so ist das Product der mittlern Glieder $= amb$ und der äussern $= abm =$ dem Facit, was entsteht, wenn das kleinre Glied der ersten Ration $= a$ und das kleine Glied der andern Ration $= b$ und der gemeinschaftliche Name $= m$ durch einander multipliciret werden. Da nun Producte sich gleich werden, wenn wir gleiche Größen durch gleiche multipliciren, und dieß so wohl bey dem Product der mittlern als der äussern Glieder geschieht: so müßen diese sich nothwendig gleich seyn.

3) Eben dieses hat statt, wenn die Proportion aus Verhältnissen der kleinern Ungleichheit besteht, wie der Augenschein zeiget, als $am:a = bm:b$. Folglich ist $amb = abm$.

Wir können uns aber keine geometrische Proportion denken, woferne sie nicht zu einer von diesen Gattungen gehöret. Es ist also hinreichend bewiesen, daß in jeder geometrischen Proportion das Product der mittlern Glieder dem Product der äussern gleich sey. Dieser Beweis kann noch kürzer geführet werden, wenn wir in der Formel der Proportion den Namen m so ansehen, daß es unbestimmt bleibt, ob er $= 1$ oder $=$ einer ganzen Zahl oder $=$ einem Bruche sey. Alsdenn fasset diese Formel $a:am = b:bm$ alle drey Gattungen der geometrischen Proportion in sich. Was also aus ihr nothwendig folgt, das ist eine nothwendige Bestimmung einer jeden Proportion. Da nun das Product der mittlern Glieder $= amb$, das Product der äussern $= abm$ ist, und beyde durch die Multiplication gleicher Größe entstanden sind: so müssen sie sich auch nothwendig gleich seyn.

§. 5.

Werden folglich drey Glieder der Proportion gegeben: so können wir leicht das vierte finden. Es sey a das erste Glied: so ist es $=$ dem zweyten, multiplicirt durch das dritte, dividirt durch das vierte oder $= amb:bm = a$. Das zweyte ist $=$ dem ersten, multiplicirt durch das letzte, dividirt durch das dritte $= abm:b = am$. Das dritte ist $= abm:am = b$ und das vierte $amb:a = bm$. Aus diesen Erklärungen der Glieder können wir leicht die Regeln ziehn, wie wir das vierte Glied finden, wenn uns die drey andern gegeben sind.

§. 6.

§. 6.

In einer jeden geometrischen Proportion ist das Product der beyden mittlern Glieder dem Product der beyden äußersten gleich. Nun entsteht die Frage: ob wir hier von dem Praedicat auf das Subject richtig schließen können? Die Vernunftlehre erlaubt uns diese Folgerung nur denn, wenn wir das Prädicat als eine Erklärung (definitio) von dem Subject ansehen können. Dieß muß aber bewiesen werden. Wir wollen also vier Größen als solche annehmen, von welchen es bekannt ist, daß das Facit der äußersten Glieder dem Facit der mittlern gleich sey, und nun untersuchen, ob wir aus dieser Hypothese schließen können, daß diese vier Größen in der bestimmten Ordnung eine Proportion ausmachen. Man nehme a. b, c. d. so an, daß ad = cb. Folglich ist a : b = ad : bd, weil sich die Facta verhalten, wie die Multiplicanda, wenn die Multiplicatores gleich sind. Es ist aber nach unsrer Hypothese oder Voraussetzung ad = cb. Folglich kann cb für ad gleichgeltend gesetzt werden. Folglich ist a : b = ad : bd = cb : bd. Da sich nun die Quota verhalten wie die Dividenda, wenn die Divisores sich gleichen: so ist auch a : b = cb : bd = c : d und a : b = c : d. Es machen also **die vier Größen in der festgesetzten Ordnung eine geometrische Proportion, wenn das Facit der mittlern Glieder dem Facit der äussern gleich ist.** Wir wollen dieß auch durch ein Beyspiel in bestimmten Zahlen beweisen. Von 4. 6. 8. 12. sey 4, 12 = 6, 8, = 48. Folglich 4 : 6 = 4, 12 : 6, 12 = 6, 8 : 6, 12 = 48 : 72 = 8 : 12.

§. 7.

Hier eröfnet sich uns die Quelle aller Proportionalregeln. Und was verstehen denn die Mathematiker durch eine solche Regel anders, als eine Proposition, worinn angezeigt wird, was wir für eine Veränderung mit den Gliedern einer Proportion vornehmen können, ohne daß dadurch eine Proportion verlohren geht. Wir sind berechtiget, diesen Grundsatz zu bilden: es kann eine jede Veränderung mit den Gliedern in einer Proportion, wobey das Facit der mittlern Glieder dem Facit der äußern gleich bleibt, vorgenommen werden, ohne daß überhaupt die geometrische Proportion verlohren geht (§. 6.). Würden aber diese Producte sich nach der Veränderung der Glieder nicht mehr gleich seyn: so würde auch keine geometrische Propor-

Proportion übrig bleiben (§. 4.). Gesetzt wir wollten untersuchen, ob dieser Satz: Erhöhe die Glieder der Proportion zu ihren Quadraten, eine Proportionalregel sey: so dürfte man nur ansetzen: $a^2 : a^2m^2 = b^2 : b^2m^2$, und nun die äussern und mittlern Glieder multipliciren, als $a^2b^2m^2 = a^2m^2b^2$: so würde man gleiche Facta haben, und folglich muß dieser Satz eine wahre Proportionalregel in sich fassen. Wäre die Frage diese: Ob es eine Proportionalregel gebe, wenn man sagte: das Facit der beyden ersten Glieder verhält sich zum zweyten, wie das Facit der beyden letzten zum vierten: so darf man nur diese Veränderung mit der Formul $a : am = b : bm$ vornehmen, als $aam : am = bbm : bm$, und nun die bestimmten Facta suchen. In diesem Falle wäre $aambm$ nicht $ambbm$ gleich. Folglich würde dieser Satz eine falsche, oder eigentlich gar keine Proportionalregel seyn.

§. 8.

In einer jeden geometrischen Proportion verhält sich das erste Glied zum zweyten, wie das dritte zum vierten. So lange also das dritte Glied unverändert seine Größe behält, wird auch das vierte immer dasselbige bleiben, man verändre das erste und zweyte Glied nach Gefallen, wenn man nur dahin sieht, daß der Name des Verhältnisses beybehalten wird. Um das letzte Glied zu finden, muß man das Facit der mittlern Glieder durch das erste dividiren. Je kleiner also das erste und zweyte Glied werden, desto weniger Mühe hat man, um das vierte zu finden. Dividiret man beyde Glieder durch denselben Divisor: so wird ihr Verhältniß nicht verändert. Hier zeiget sich uns also ein Weg zur Abkürzung der Arbeit um das letzte Glied zu finden: $abc : abcm = d : dm$ oder $ab : abm = d : dm$ oder $a : am = d : dm$. Es ist eine Proportionalregel, daß das erste Glied sich zum dritten verhält, wie das zweyte zum vierten, als $a : b = am : bm$. Denn die Facta der äußern und mittlern Glieder bleiben sich gleich (§. 7.) Es ist $abm = bam$. Wir können also auch das erste und dritte Glied gegen einander aufgehen lassen, oder sie durch denselben Divisor kleiner machen, und uns dadurch die Mühe erleichtern, das vierte Glied zu finden. Es sey $ad : am = rd : rm$. Folglich ist auch $(ad:d) : am = (rd:d) : rm = a : am = r : rm$. Freylich wird diese Abkürzung nur alsdann statt haben können, wenn entweder

das

das erste und zweyte, oder das erste und dritte Glied einen gemeinschaftlichen Divisor haben, und unter sich zusammengesetzte Zahlen sind. Unterdessen sind sie dieses doch oft, und hierauf gründet sich die ganze Lehre der sogenannten Welschen Praktik, deren Anwendung uns die Klugheit empfiehlt, wenn sie anders möglich ist.

§. 9.

Und wie oft ist sie nicht in der so genannten Regel Detri möglich? Diese gründet sich ganz auf die Theorie von der geometrischen Proportion, oder sie ist vielmehr diese Theorie selbst auf bestimmte Fälle angewandt. Was ist diese Regel anders, als eine Methode, in einer geometrischen Proportion, wenn drey Glieder gegeben sind, das vierte zu finden. Bey der Anwendung dieser Lehre muß vorausgesetzet werden, daß sie angewandt werden kann, und daß dieses auf eine regelmäßige Art geschieht. Es giebt Größen, welche in einer solchen Verbindung stehen, daß die eine verhältnißmäßig größer oder kleiner wird, so wie die andre entweder zu- oder abnimmt. Alsdenn können wir behaupten, a verhält sich zu b, so wie sich die Größe, die sich auf a bezieht, zu derjenigen, welche sich auf b bezieht. In solchen Fällen läßt sich die so genannte Regula directa anwenden. Unterdessen finden wir doch in der Natur viele Fälle, daß a größer wird, wenn b zunimmt; ohne daß dieses nach demselben Verhältniß geschieht. Man lasse eine Kugel aus einer Höhe in der freyen Luft senkrecht herab fallen, oder auf eine schiefe Fläche herabrollen: so wird zwar die Bahn, welche sie zurück gelegt hat, desto größer, je länger ihre freye Bewegung gedauret hat. Wir wissen aber aus der Physik, daß diese Bewegung in jedem folgenden Augenblick geschwinder, und also der Raum größer seyn wird, welchen sie in den folgenden Zeiträumen beschreibet. Hier würde man also sehr falsch rechnen, wenn man nach der Regel Detri bestimmen wollte, wie groß der ganze Raum sey, welchen die Kugel während ihres Fallens beschrieben hat.

§. 10.

Wir finden auch Größen, welche eine solche Beziehung auf einander haben, daß nach dem Abnehmen der einen das Größerwerden der andern sich verhältnißmäßig richtet. In diesem Fall müssen wir so schließen: a verhält sich zu b, wie dasjenige, was sich auf b bezieht, zu demjenigen, was sich auf a bezieht. Die Regel Detri, welche hier angewandt werden muß, nennet man die umgekehrte (inversa). Ueberhaupt muß diese alsdenn gebraucht werden, wenn wir eine und dieselbe Größe auf verschiedene Arten in gleiche Theile zerlegen wollen. Denn die gleichen Theile von einer Größe werden in eben dem Verhältniß kleiner, in welchem die ganze Anzahl aller Theile zunimmt. Wann zwanzig von einer Größe einzeln a bekommen hätten: so würde eine jede von 40 Personen nur $\frac{a}{2}$ erhalten können. Folglich würde man ansehen müssen: wie 20 zu 40, so verhält sich die Zahl, die sich auf 40 zu der, die sich auf 20 bezieht, oder $20 : 40 = \frac{a}{2} : a$. Auch hier giebt es in der Natur viele Fälle, daß a abnimmt, wenn b zunimmt, ohne daß man die Regel Detri auf sie anwenden kann. Es ist zwar ausgemacht, daß in einem Gefäße desto weniger Wasser zurück bleibt, je längere Zeit es heraus geflossen ist. Es fließet aber nach hydrostatischen Gesetzen nicht in jedem gleichen Zeitraum bey gleicher Lage des Gefäßes gleich viel Wasser heraus; sondern je höher die drückende Wassermasse in dem Gefäße ist, desto mehr entströmet ihm in gleichem Zeitraum. Wir sehen also, daß zwar desto weniger Wasser zurück bleibt, je länger es herausgeflossen ist, aber daß dieses nicht nach einem umgekehrten Verhältnisse mit den Zeiträumen statt hat, und daß sich folglich auf diesen Fall die Regel Detri gar nicht anwenden läßt. Wer also diese Regel gebrauchen will, kann auf eine zwiefache Art sich irren. Wendet er sie auf Größen an, die sich zwar in ihrem Zunehmen oder Abnehmen nach einander richten, aber so, daß dieses nicht verhältnißmäßig geschieht: so wird er auf Resultate geführet werden, welche ganz falsch sind. Eben so würde er auch sich betrügen können, wenn er nicht vorher sorgfältig untersuchte, ob in vorkommendem Falle die Regula Detri directa oder inversa angewandt werden müsse. Selbst große Männer haben sich nicht selten hier übereilet, und wenn es meine Absicht wäre, die Fehler andrer zu rügen: so würde ich dieses leicht durch Beyspiele beweisen können.

§. 11.

Die Aufgaben, welche durch Anwendung der Regel Detri aufgelöset werden, sind entweder von der Art, daß wir durch drey gegebene Größen das vierte Proportionalglied finden sollen, oder es werden mehrere Größen gegeben, welche wir erst in die gehörige Verbindung bringen müssen. Im ersten Fall wir die ganze Absicht erreicht,

reicht, wenn die mittlern Glieder durch einander multipliciret, und dieß Product durch das erste Glied dividirt wird. Daher kommt eine einfache Regel Detri. Werden mehrere Glieder gegeben: so wird diese Regel mehr als einmal angewandt werden, um die zufindende Größe zu bestimmen. Daher erwächst die zusammengesetzte Regel Detri. Es giebt Fälle, wo Aufgaben, die eigentlich für diese Regel gehören, doch zu der einfachen gebracht werden können. Wir wollen dieß durch ein Beyspiel erläutern. Es ist ausgemacht, daß 100 ₰ funfzehn mal genommen in einem Jahre so viel Interesse tragen, als 100 ₰ in funfzehn Jahren, wenn sie anders nach gleichen Interessen belegt sind. Wäre also die Frage, wenn a = 100 ₰ in einem Jahre b = 4 ₰ an Interesse tragen würden, wie groß würde die Interesse von ad = 100, 400 ₰ in c = 12 Jahren seyn: so mußte man nach der zusammen gesetzten Regel Detri ansetzen: 1) a : ad = b : (adb : a) = der jährlichen Interesse von ad. 2) 1 : c = (adb : a.) : (adbc : a) = $\frac{100,\ 400,\ 4,\ 12}{100}$ = 400, 48 = 19200 ₰ gleich der zwölfjährigen Interesse von 40000 ₰. Da nun aber ad, c mal genommen, eben so viel Interesse tragen muß, als ad in c Jahren: so können wir auch nach der einfachen Regel Detri eben die zwölfjährige Interesse dieses Capitals auf die Art finden: a : adc = b : (adcb : a) = 19200 ₰.

§. 12.

Es giebt aber auch Gattungen von der zusammengesetzten Regel Detri, welche ihrer Natur nach nicht auf die einfache Regel gebracht werden können. Liegen in der Aufgabe verschiedene Fragen, welche einzeln beantwortet werden müssen: so muß nothwendig die Regel Detri mehrmal angewandt werden. Hieher gehöret 1) die Societäts-Regel, (regula societatis), 2) die Regel der Mischung (regula mixtionis), 3) die Regel der Verbindung (regula alligationis). Nach dem Gesetz der Billigkeit haben sich die Personen verglichen, welche gesellschaftlich handeln, daß sie nach dem Verhältnisse des hergeschossenen Geldes, und der Zeit, wie lange sie es hergegeben haben, an dem Gewinnste oder Schaden ihres gemeinschaftlichen Unternehmens Antheil haben. Es muß also für jeden Interessenten besonders berechnet werden, wie groß sein Gewinnst oder sein Verlust sey. Eben dieses hat statt, wenn eine Masse aus Theilen von verschiedener Art zusammen gesetzet ist,

ist, und man berechnen will, wie viel von jeder Gattung zu einer vergrößerten oder verkleinerten Masse gethan werden müsse. In Aufgaben von der Art ist uns schon das Verhältniß der Ingredienzen zu einer solchen Masse bekannt gemacht. Man nehme an, daß zur Masse $= a$ gekommen sey, 1) b, 2) c, 3) d. Wollte man nun eine Masse $= am$ haben, worinn die Theile in eben dem Verhältniß, wie in a angetroffen werden: so würde man alle diese Ingredienzen zu a in eine Summe bringen, und nun ansetzen müssen 1) $b + c + d : am = b : amb : (a + c + d) =$ dem, wie viel von b genommen werden muß, 2) $b + c + d : am = c : amc : (b + c + d)$ 3) $(b + c + d) : am = d : amd : b + c + d$. Folglich wäre $am = amb : (b + c + d) + amc : (b + c + d) + amd : (b + c + d)$.

§. 13.

Mit dieser Regel der Mixtion steht die Alligationsregel in einer sehr genauen Verbindung. Sie muß sich freylich in jene zuletzt auflösen. Wir müssen aber in der Alligationsregel dasjenige erst suchen, was uns in jener bey der Aufgabe bekannt gemacht wird. In der Regel der Mixtion kennen wir schon das Verhältniß, in welchem die Theile stehen, die die ganze Masse ausmachen. Nach der Regel der Alligation wollen wir erst dieß Verhältniß finden, und wann es gefunden ist, alsdann die Größe eines jeden Theils bestimmen, welche zu dem Ganzen genommen werden muß. Man denke sich einen Weinhändler, der 100 Kannen, eine jede zu 14 Schilling füllen sollte, und doch nur zwo Sorten von Wein hätte; von der ersten kostete die Kanne 9 Schilling, von der andern 20 Schilling. Nun entsteht die Frage, wie viele Kannen muß er von jeder Sorte zu den 100 Kannen zusammen gießen, um weder sich noch seinem Käufer zu nahe zu thun? In dieser Aufgabe liegen diese beyde Fragen: 1) wie viel muß er von jeder Sorte zu einer Kanne nehmen, um sie für 14 Schill. verkaufen zu können, 2) wie viel von jeder zu der ganzen Masse? Nach der ersten Aufgabe muß das Verhältniß der Theile zu einer Kanne bestimmt, und nach der zwoten, wenn dieß nun festgesetzet ist, muß es durch die Regel der Mixtion ausgemacht werden, wie viel von jeder Sorte die ganze Masse erfodert. Alle Aufgaben von der Art, worinn beyde Fragen beantwortet werden sollen, müssen durch die Alligationsregel aufgelöset werden.

§. 14.

§. 14.

Allein auf welche Art? Diese Frage muß ich meiner Hauptabsicht wegen hinreichend zu beantworten suchen. Die ganze Masse, welche man herausbringen will, kann aus zwo Arten von ungleichem Gehalte oder Werthe, sie kann auch aus mehrern zusammen zu setzen seyn. Wir wollen den ersten Fall zuerst vornehmen. Der Werth von A sey $= a$, von B $= b$. Man soll von beyden eine Masse $= d$ von dem Werth $= m$ zusammensetzen. Es versteht sich von selbst, daß der Werth m zwischen a und b fallen, und daß also der eine von diesen beyden höher, der andre geringer als m seyn muß. Da es nun willkührlich ist, welchen wir als den größern annehmen wollen: so mag a höher als m und b geringer seyn. Wir müssen also m mit beyden so verbinden, daß dadurch das Verhältniß zwischen a und b so bestimmt wird, damit für 1 der Werth von m heraus kömmt. Man setze also gegen a die Differenz von m und b, und gegen b die Differenz von a und m. Beyde Differenzen, welche die Alligation ausmachen, multiplicire man durch den Werth der daneben stehenden Ingredienzen. Man nehme die Summe der Differenzen als das erste Glied in einer Proportion, die Summe der Producte als das zweyte Glied an: so bestimmt die Summe der Differenzen das Ganze, was von beyden Gattungen genommen wird, die Summe der Producte den Werth, welchen sie in der Alligation haben. Nun suche man, was nach gleichem Verhältnisse der Werth von 1 seyn muß: so wird m nothwendig gefunden werden. Um dieß zu beweisen setzen wir so an: $m - b + a - m : am - ba + ba - bm = a - b : am - bm = 1 : m$. Hieraus erhellet, daß $a - b$ die ganze Summe von beyden Ingredienzen, und $am - bm$ die ganze zu suchende Masse, $m - b$ dasjenige, was von a und $a - m$ dasjenige anzeige, was von b zu der ganzen Masse $= d$ genommen werden muß, wenn der Werth davon für jede Einheit m seyn soll. Wir kennen also nunmehro das Verhältniß zwischen A und B, aus welchem d zusammen gesetzet wird. Um ferner zu bestimmen, wie viel von jeder Gattung genommen werden muß, setzen wir an: 1) $a - b : d = m - b : (md - bd) : (a - b) =$ demjenigen, was von A zu b genommen werden, 2) $a - b : d = a - m : (ad - dm) : (a - b) =$ derjenigen Größe, die von b zur ganzen Masse $= d$ hinzukommen muß. Diese Proportionen können wir auf folgende Art ausdrücken: wie sich verhält die ganze Summe des Zusatzes von A und

B = a

$B = a - b$ zu dem, was nach der Alligation von A oder B zu ihr kommen muß $= m - b$ oder $a - m$: so verhält sich die ganze Masse $= d$ zu dem, was zu ihr von A oder B hinzuzusetzen ist.

§. 15.

Aus diesen Entwickelungen können wir also folgende Regeln herleiten.

1) Ziehe von dem Werth oder Gehalt der mittlern Größe den Werth oder Gehalt der kleinern ab $= m - b$.
2) Multiplicire diese Differenz durch die ganze Masse $= (m - b)d$.
3) Dividire dieß Product durch die Differenz des höhern und geringern Werths: so findest du $(md - bd) : (a - b)$ oder dasjenige, was du von A zu d nehmen mußt.

Auf eine ähnliche Art kann man es auch finden, wie viel von B in der Alligation erfodert wird. Man darf nur die Differenz des höhern und mittlern Werths durch die ganze Masse multipliciren, und dieß Product durch die Differenz des höhern und niedern Werthes dividiren $= (ad - dm) : (a - b)$. Es sey 1) $a =$ dem Preis für eine Kanne Wein zu 20 ßl., 2) b der Preis einer Kanne $= 9$ ßl., 3) $m = 14$ ßl., 4) $d = 100$ Kannen. So muß von A $(m - b)\,d : (a - b)$ $= (14 - 9)\,100 : (20 - 9) = \frac{500}{11} = 45\frac{5}{11}$ Kannen eine jede zu 20 ßl, und von B $(a - m)\,d : (a - b) = (20 - 14),\ 100 : (20 - 9) = \frac{600}{11}$ $= 54\frac{6}{11}$ Kannen eine jede zu 9 ßl. genommen werden. Die Summe von beyden ist $= 45\frac{5}{11} + 54\frac{6}{11} = 99\frac{11}{11} = 100$ Kannen. Da nun die $45\frac{5}{11}$ K. von höherm Preise zusammen $45\frac{5}{11}$, 20 ßl. $= 909\frac{1}{11}$ ßl. und die $54\frac{6}{11}$ K. zu 9 ßl. $= 54\frac{6}{11},\ 9 = 490\frac{10}{11}$ ßl. kosten: so ist der Preis für die 100 K. $= 909\frac{1}{11} + 490\frac{10}{11}$ ßl. $= 1400$ ßl.; folglich für jede einzelne Kanne $= \frac{1400}{100}$ ßl. $= 14$ ßl. Die Richtigkeit jener Alligationsregel kann man auch durch die Aequation beweisen. Es sey 1) der Körper des größern Werths $= a$ 2) des kleinern $= b$ 3 des mittlern $= m$, 4) die Große des gemischten Körpers vom Werthe m gleich d, 5) der gesuchte Theil von a gleich x, folglich wird der Werth von dem Körper a zu 1 gleich ax und von b gleich $(1 - x)$ $b = b - bx$ seyn. Der Werth von 1 ist $= m$. Folglich ist $ax + b - bx = m$. Folglich $ax - bx = m - b$. Folglich $x = (m - b) : (a - b)$. Folglich $1 : d = (m - b) : (a - b) : (md - bd) : (a - b)$ $=$ demjenigen, was von a zu d gesetzt werden muß. Bliebe alles übrige, und wäre der zusuchende Theil von b zu $1 = bx$: so würde auf eine ähnliche Art $(a - m)\,d : a - b$ als dasjenige herauskommen, welches von b zu d genommen werden müßte. Beyde Resultate kommen mit demjenigen vollkommen überein, was (§. 14.) durch die Alligationsregel gefunden ward.

§. 16.

Wir können auch durch sie, drey, vier, und mehrere Gattungen von verschiedenem Werthe oder Gehalte verhältnißmäßig so verbinden, daß dadurch eine zusammengesetzte Masse von bestimmtem Werthe oder Gehalte gefunden wird. Um desto leichter das gehörige Verhältniß der Ingredienzen zum Ganzen finden, und die ganze Berechnung übersehen zu können, hat man eine gewisse Absonderung 1) für den besondern Werth der verschiedenen Gattungen, die verbunden werden sollen, 2) für den Werth der zufindenden Masse, 3) für die Alligationen derselben durch Hülfe des zusuchenden Werthes der ganzen Masse, und 4) für die Producte gemacht, deren Summe sich zu der Summe der Alligationen, so wie der zusuchende Werth zu 1 verhält, und zwar auf folgende Art. Es soll 1) von A, wovon ein Pfund $= a = 12$ gr; 2) von B, wovon ein ℔ $= b = 10$ gr; 3) von D, wovon ein ℔ $= d = 7$ gr kostet, so viel zusammen gesetzt werden, daß eine Masse von 250 ℔ $= m$ herauskömmt, wovon jedes Pfund 8 gr $= f$ kostet. Hier fällt der zusuchende Werth f zwischen b und d, und folglich kann nur d dadurch mit a und b alligiret werden. Nun kann man bequem die Größen so neben einander stellen:

f	a	$f - d$	$af - ad$
	b	$f - d$	$bf - bd$
	d	$a - f + b - f$	$da - df + bd - df$

$$a + b - 2d : af + bf - 2df = 1 : f$$

Hieraus erhellet, daß sich die Summe aller alligirten Größen zu der Summe ihres ganzen Werthes, wie 1 zu dem gesuchten Werthe von der ganzen Masse verhält. Wird also die ganze Masse m aus Theilen von A, B und D grade in dem Verhältnisse zusammen gesetzt, wie die alligirten Größen sich in der gefundnen Summa $a + b - 2d$ zu einander verhalten: so wird die Masse von dem verlangten Werthe $= f$ seyn müssen. Dieses kann nun, da einmal ihr Verhältniß unter ein-

 ander

ander bestimmt ist, leicht durch die Regel der Mixtion geschehen. Zur Masse $m = 250$ ℔, wovon das Pf. 8 ₰ kosten soll, muß gesetzt werden

1) $a + b - 2d : f - d = m : (fm - dm) : (a + b - 2d) = (8 - 7)\, 250 : (12 + 10 - 14) = \frac{250}{8} = 31\frac{2}{8}$ ℔ von A

2) $a + b - 2d : f - d = m : (fm - dm) : (a + b - 2d) = \left(\frac{8 - 7\;\; 250}{8}\right) = 31\frac{2}{8}$ ℔ B

3) $a + b - 2d : a + b - 2f = m : (am + bm - 2fm) : (a + b - 2f) = \frac{1}{8}(12 + 10 - 16)\, 250 = 187\frac{4}{8}$ ℔ von D.

Die Summe dieser zusammen gesetzten Theile von A, B und D geben also 250 ℔ = der verlangten Masse. Der Werth 1) von den ersten $31\frac{2}{8}$ ℔ ist $= 31\frac{2}{8}$, 12 ₰ $= 375$ ₰, 2) von den zweyten $31\frac{2}{8}$ ℔ $= 31\frac{2}{8}$, 10 ₰ $= 312\frac{4}{8}$ ₰, 3) von den $187\frac{4}{8}$ ℔ $= 187\frac{4}{8}$, 7 ₰ $= 1312\frac{4}{8}$ ₰. Folglich ist der Werth der ganzen Masse m gleich 375 ₰ $+ 312\frac{4}{8}$ ₰ $+ 1312\frac{4}{8}$ ₰ $= 2000$ ₰. Der Preis für jedes Pfund von dieser Masse ist also $\frac{2000}{250}$ ₰ $= 8$ ₰ $= f$.

§. 17.

Würden vier Körper von verschiedenem Werthe gegeben, um aus diesen eine Masse von bestimmtem Gehalte oder Preise zusammenzusetzen: so würde der zusuchende Preis entweder nur geringer, wie einer von den vieren, oder nur größer wie einer, oder geringer wie zweene, und also auch größer wie die zweene andre seyn. In den beyden ersten Fällen kann diese Aufgabe nur auf eine Art, und in dem letzten auf zwo verschiedne Arten aufgelöset werden. Denn in dem ersten Fall läßt sich nur der Körper von höherm Werthe mit den drey übrigen, und im zweyten der Körper von geringerm Werthe mit den drey übrigen durch die Alligationsregel verbinden. Wir wollen nur noch den Fall erläutern, wenn der verlangte Werth grade in die Mitte fällt. Es sey 1) der größere Werth für 1 ℔ von $A = a = 10$ ₰ 2) für 1 ℔ von $B = b = 9$ ₰ 3) für 1 ℔ von $C = c = 6$ ₰ 4) für 1 ℔ von $D = d = 4$ ₰. Man sucht eine Masse von 200 ℔ $= m$, wovon der Preis für jedes Pfund $= 7$ ₰ $= f$. Man suche nun zuerst das nöthige Verhältniß der Theile von A, B, C, D in der Masse m.

Erste Auflösung:

$$f \left|\begin{array}{c|c|c} a & f-c & af-ac \\ b & f-d & bf-db \\ c & a-f & ca-fc \\ d & b-f & db-df \end{array}\right|$$

$$\overline{a + b - c - d : af + bf - fc - df = 1 : f.}$$

Nun

Nun suche man nach der Regel der Mixtion, wie viel von jeder Sorte zu m genommen werden muß. Man kann also auf folgende Art ansetzen: die ganze Summe der alligirten Größen $= a + b - c - d$ giebt m, wie viel wird dazu von jeder Gattung verhältnißmäßig erfodert? Die Berechnung davon ist folgende:

1) $a + b - c - d : f - c = m : (fm - cm) : (a + b - c - d) = (7 - 6) 200 : (10 + 9 - 6 - 4) = \frac{200}{9}$ ℔ $= 22\frac{2}{9}$ ℔ von A, kosten $22\frac{2}{9}, 10$ Gr. $= 222\frac{2}{9}$ Gr.

2) $a + b - c - d : f - d = m : (fm - dm) : (a + b - c - d) = (7 - 4), 200 : (10 + 9 - 6 - 4) = \frac{600}{9} = 66\frac{6}{9}$ ℔ von B, kosten $66\frac{6}{9}, 9$ Gr. $= 600$ Gr.

3) $a + b - c - d : a - f = m : (a - f) m : (a + b - c - d) = (10 - 7) 200 : 9 = \frac{600}{9} = 66\frac{6}{9}$ ℔ von C, kosten $66\frac{6}{9}, 6$ Gr. $= 400$ Gr.

4) $a + b - c - d : b - f = m : (bm - fm) : (a + b - c - d) = (9 - 7) 200 : 9 = \frac{400}{9} = 44\frac{4}{9}$ ℔ von D, kosten $44\frac{4}{9}, 4$ Gr. $= 177\frac{7}{9}$ Gr.

Folglich entsteht ein zusammengesetzter Körper $= 200$ ℔ $= m$, dessen Preis $= 1400$ Gr. und also ist der Werth jedes Pfundes $\frac{1400}{200}$ Gr. $= 7$ Gr. $= f$.

Zwote Auflösung:

$$f \left| \begin{array}{c|c|c} a & f - d & af - ad \\ b & f - c & bf - bc \\ c & b - f & bc - cf \\ d & a - f & ad - df \end{array} \right|$$

$$a + b - c - d : af + bf - fc - df = 1 : f.$$

Nun können wir für jede Gattung berechnen, wie viel davon zu m genommen werden müsse.

1) $a + b - c - d : f - d = m : (fm - dm) : (a + b - c - d) = (7 - 4) 200 : 9 = \frac{600}{9} = 66\frac{6}{9}$ ℔ von A, kosten $66\frac{6}{9}, 10$ Gr. $= 666\frac{6}{9}$ Gr.

2) $a + b - c - d : f - c = m : (fm - cm) : (a + b - c - d) = (7 - 6) 200 : 9 = \frac{200}{9} = 22\frac{2}{9}$ ℔, kosten $22\frac{2}{9}, 9$ Gr. $= 200$ Gr.

3) $a + b - c - d : b - f = m : (bm - fm) : a(+ b - c - d) = (9 - 7) 200 : 9 = \frac{400}{9} = 44\frac{4}{9}$ ℔, kosten $44\frac{4}{9}, 6$ Gr. $= 266\frac{6}{9}$ Gr.

4) $a + b - c - d : a - f = m : (am - fm) : a + b - c - d = (10 - 7), 200 : 9 = \frac{600}{9} = 66\frac{6}{9}$ ℔, kosten $66\frac{6}{9}, 4$ Gr. $= 266\frac{6}{9}$ Gr.

Es ist also der zusammengesetzte Körper $= 200$ ℔ $= m$ und der Preis für die ganze Masse $= 1400$ Gr.; folglich der Preis für 1 ℔ $= \frac{1400}{200}$ Gr. $= 7$ Gr. $= f$.

Soll

Sollen noch mehrere Gattungen von Körpern, die von verschiedenem Gehalte sind, verbunden werden, um eine Masse von einem bestimmten Gehalte zu geben: so kann diese Aufgabe auf noch mehrere Arten durch die Alligationsregel aufgelöset werden. Diese Bemerkung ist darum von Wichtigkeit, weil uns dadurch der Weg gebahnet wird, von einer Gattung entweder einen größern oder kleinern Theil zu der ganzen Masse zu nehmen, und doch diese von dem gehörigen Gehalte aus den gegebenen Körpern zusammen zu setzen. Wir können also von den mehrern möglichen Auflösungen grade diejenige wählen, welche sich für die Größe der einzeln Körper, die wir haben, und welche wir alligiren wollen, nach unsrer besondern Absicht am besten schicket.

§. 18.

Diese Theorie von der Regel der Alligation ist vorzüglich bey dem Münzwesen von dem größten Nutzen. Alles was hier zu untersuchen ist, können wir durch folgende Fragen anzeigen:

1) Wie kann es bestimmt werden: wie viel Loth fein Silber in einer Mark von einem Barren Silber, oder wie viel Karat fein Gold in einer Masse Gold enthalten ist;
2) Wie kann man aus Barren von verschiedenem Gehalte eine Masse zusammen setzen, welche von erforderlichem Gehalte ist;
3) Wie kann man die Berechnung machen, ob mit Vortheil zu münzen sey, oder nicht;
4) Wie muß es untersucht werden, ob eine geschlagene Münze so wohl in Schrot als Korn richtig sey?

Die Gränze, welche ich dieser Schrift setzen muß, erlaubet es mir nicht, diese Fragen itzt zu beantworten. Ich werde diese Untersuchung bey einer andern Gelegenheit anstellen, und alles in das gehörige Licht zu setzen mich bemühen.

Versuch
von der Theorie der Alligationsregel und der Münzwissenschaft

dem
Hochedelgebohrnen und Wohlweisen Herrn
Herrn

Hermann Henrich Roeck

vornehmen Kaufmann und Handelsherrn
und verdienstvollem Aeltesten der löbl. Novogrodsfahrer Compagnie
welcher
den 3ten Februar im Jahr 1779

zum ansehnlichen Mitgliede

Eines Hochedlen und Hochweisen Raths
der Kayserl. freyen und des heil. Röm. Reichs Stadt Lübeck
erwählet wurde

am Tage Seiner feyerlichen Einführung

zum Merkmal
der aufrichtigsten Beyfreude und Ergebenheit
überreicht
von

M. Friederich Daniel Behn
des Lübeckischen Gymnasii Subrector
der Philosophischen Facultät zu Jena Adjunct, der deutschen Gesellschaft zu Jena und Leipzig Mitglied.

Lübeck den 5ten Februar 1779.

Gedruckt bey Johann Daniel August Fuchs.