DE GENERALIBVS
CALCVLI RADICALIVM
REGVLIS

COMMENTATIO

QVAM

PRAESIDE

MATTHIA AVGVSTO HASIO

LL. AA. M. ET ORD. PHIL. ASS.

IN AVDITORIO MAIORE

D. MAII A. CIↃIↃCCLXIX

DEFENDET

M. CAROLVS TRAVGOTT KRETZSCHMAR

BIBL. ACAD. CVSTOS.

VITEMBERGAE

LITERIS CAROLI CHRISTIANI DÜRRII

ACAD. A TYPIS.

§. I.

Omnes, qui mathematicis doctrinis perinde atque phyſicis ſolide addiſcendis induſtriam impendunt, ſumma ope niti decet, ne Analyſeos, ad tantum noſtra aetate faſtigium euectae praecepta leuiter attingant, ſuisque conatibus, praeſtantiſſima mathematicorum phyſicorumque perſpiciendi inuenta moram iniiciant. Omnem potius operam dent neceſſe eſt, vt cultura huius ſublimioris artis animum praeparent, ad intimos naturae receſſus inueſtigandos. Quamuis vero haec ſublimior Matheſeos pars, Analyſis, primo intuitu adoleſcentum ingenia defatigare videatur, ob tantam praeceptorum copiam, ac regularum ediſcendarum multitudinem, difficultas tamen minuitur, ſi concinnior methodus tradendi regulas, quam vulgo fieri ſolet, eligitur, faciliorque tironibus via monſtratur, ſibi in hac arte amoeniſſima habitum comparandi. Quaedam potissimum Analyseos doctrinae ita sunt comparatae, vt artis analyticae cultores eas oporteat tam promte nosse, vt regulas quauis data occasione ad praesentem casum accommodare queant, nisi cum magno temporis detrimento in expressionibus analyticis ponderandis haesitare velint. Quibus doctrinis calculus radicalium quoque est annumerandus, cuius praecepta, qui non habet in promtu, tarda faciet spatia in meditandis formulis analyticis, quae continent radicalia. Non inanem igitur me suscepturum operam arbitror, in enodandis huius calculi regulis, iisque, quantum fieri potest, salua perspicuitate, contrahendis, quia nostra aetate, qua mathematicae scientiae a tam paucis addiscuntur accurate, sedulo euitandum, ne facilioribus doctrinis caliginem obducamus praeter necessitatem', sed omnem ingenii aciem intendere debemus, vt facilitatis et amoenitatis disciplinarum mathematicarum demonstratione alliciamus iuuenes, ad excolendam artem subtilem, non mediocri studio, iudice quodam celeberrimo nostrae aetatis Mathematico, comparandam. Equidem experientia didici, cum mihi regulas huius calculi notas redderem, non omnes a quibusdam mathematicis euitari ambages, in tradendis calculi radicalium praeceptis. Varias euoluebam introductiones in Analysin, iisque magna perlectis delectatione inueniebam, auctores nimia breuitate cumulasse difficultates calculi radicalium, eiusque praecepta ita disposuisse, vt a iuuenibus sine magna temporis iactura non possent addisci. Magna enim ingenia raro ad captum tironum se accommodant. Iuuabo igitur, quantum potero, adolescentum industriam

in

in hoc Analyſeos argumento, paucis praeceptis generalibus calculi radicalium ita ſuppeditandis, vt cognitis his regulis, memoriaeque rite mandatis, mediocri induſtria vlterius in arte analytica progredi poſſint.

§. II.

Quoniam haec commentatio illorum potiſſimum vſui eſt deſtinata, qui primam addiſcendis praeceptis analyticis nauant operam, ab inſtituto non alienum puto, primordia capere a principiis. Denotat expreſſio $\sqrt[m]{b}^{n}$ apud Analyſeos cultores quantitatem irrationalem, ſiue incommenſurabilem, a qua nunquam ſeparari poteſt radicis ſignum, niſi diuiſio exponentis n per m locum habeat. Formula enim $\sqrt{(a^2 + 2ab + b^2)}$, quamuis ſigno radicali ſit coniuncta, nil tamen, niſi quantitatem rationalem deſignat, quia ſeiungi poteſt, extracta radice, ſignum radicis. Quamquam enim $\sqrt[m]{b}^{n}$ et ita exprimi poteſt; $b^{\frac{n}{m}}$, ſicut in ſequentibus monſtrabimus, vbi quidem ſignum radicale abeſt, nihilo tamen ſecius quantitas manet irrationalis, niſi m diuidat n, quia potentiae, quae exponentes fractos habent, non differunt a radicalibus. Occurrunt praeterea quantitates, quae neque rationalibus, neque irrationalibus proprie annumerari poſſint, quamuis ſignum radicale quoque prae ſe ferant. Sic $\sqrt[m]{-b}$ neque rationalis eſt quantitas, neque irrationalis, ſi m numerum parem notauerit, quia, hac conditione admiſſa, ſiue b poſitiue, ſiue negatiue ſumatur, dignitates exponentis m poſitiuae inneniuntur propter identitatem ſignorum. Eſt enim $-a.-a=+a^2$ et $-a^3.-a=a^4$, dummodo exponens numerus par ſit. Nominantur eiusmodi quantitates, neque poſitiuae, neque negatiuae, impoſſibiles, ſiue imaginariae, probe a quantitatibus irrationalibus, quae nullam inuoluunt repugnantiam, diſcernendae. Quamquam e contrario $\sqrt[m]{-b}$ imaginariam quantitatem non repraeſentat amplius, ſed poſſibilem, ſi m numerus impar fuerit, formulae tamen ſenſus facile reſtituitur, dummodo adhibeamus $\sqrt{(\sqrt[m]{-b})}$ loco formulae antecedentis.

§. III.

Attenta expreſſionis aequalitatis $u^n.u^p=u^{n+p}$ conſideratio nos docet, multiplicationem dignitatis per aliam eiusdem radicis exponentium additione peragi. Sit enim $n=2, p=3$, erit $u^n=u.u$, et $u^p=u.u.u$, ideoque $u^n.u^p=u.u.u.u.u=u^5=$ ſummae exponentium dignitatum multiplicatarum. Si fuerit $n=p$, erit $u^n.u^p=u^{n+n}=u^{2n}=u^6$. Ex quo perſpicitur, euectionem dignitatis ad aliam dignitatem perfici multiplicando euehendae dignitatis exponentem per indicem alterius dignitatis, ad quam euehi debet. Sit $x=\frac{a^n b^t}{d^r}$, erit per antecedentia $x^2=\frac{a^{2n}b^{2t}}{d^{2r}}$, $x^3=\frac{a^{3n}b^{3t}}{d^{3r}}$, $x^4=\frac{a^{4n}b^{4t}}{d^{4r}}$, ſiue generatim $x^m=\frac{a^{mn}b^{mt}}{d^{mr}}$. Diuiſionem e contrario dignitatis per aliam eiusdem radicis exponentium ſubtractione abſolui indicat formulae $\frac{u^n}{u^p} = u^{n-p}$ contemplatio. Tribuamus perſpicuitatis cauſſa literis n et p valores 4 et 2, erit $u^n = u.\,u.\,u.\,u$, $u^p = u.\,u$, ideoque $\frac{u^n}{u^p} = \frac{u.u.u.u.}{u.u.} = u^2$. Quotum igitur inuenimus, ſi exponentem diuiſoris ab exponente diuidendi ſubtrahimus.

§. IV.

Quibus praemiſſis praecepta generalia in hoc §pho a nobis tradenda, tanto faciliora erunt intellectu, quorum demonſtrationem accuratam nos ſuppeditare oportet, ne in operationibus ipſis, quae potiſſimum his nituntur praeceptis, dubii haereamus atque incerti. Paucitas vero tradendarum propoſitionum, quae facile memoriae mandari poſſunt, minuit ſimul difficultatem, quam initio tirones in tractandis formulis analyticis, quibus inſunt radicalia, inueniunt. Expreſſio aequalitatis iſta: $\sqrt[m]{u^n} = u^{\frac{n}{m}}$, quae rem algebraice repraeſentat, manifeſto indicat, in deſiderata radicis extractione exponentem dignitatis diuidendum eſſe per exponentem eius dignitatis, cuius extractio poſtulatur. Quodſi igitur fuerit $u^n = \frac{c^p d^r}{b^s}$, quemlibet exponentium p, r, s, per m diuidere nos oportet, ſi ordinis m radix

ſit

ſit extrahenda. Vnde erit $\sqrt[m]{u^{n}} = \frac{c^{\frac{p}{m}} d^{\frac{r}{m}}}{b^{\frac{s}{m}}} = \sqrt[m]{\frac{c^{p} d^{r}}{b^{s}}} = \frac{\sqrt[m]{c^{p}} . \sqrt[m]{d^{r}}}{\sqrt[m]{b^{s}}} = u^{\frac{n}{m}}$. Vera eſſe, quae hactenus propoſuimus, facili negotio demonſtrabimus, dummodo comprobemus $u^{\frac{n}{m}}$ fieri $= u^{n}$, tentata euectione ad dignitatem exponentis m. Per antecedentem vero paragraphum, nihil aliud ſuſcipiendum eſt, quam vt quantitatis u exponens $\frac{n}{m}$ multiplicetur per m. Eſt autem $u^{\frac{n.m}{m}} = u^{n}$. Poſſumus quoque hanc regulam algebraica methodo inuenire. Sit $\sqrt[m]{u^{n}} = u^{x}$, erit $u^{n} = u^{mx}$, $n = mx$, $\frac{n}{m} = x$, $u^{x} = u^{\frac{n}{m}}$, $u^{x} = \sqrt[m]{u^{n}}$, ideo $\sqrt[m]{u^{n}} = u^{\frac{n}{m}} =$ deſideratae expreſſioni. Maioris perſpicuitatis cauſſa ponamus $m = 3$, $n = 12$, erit $\sqrt[m]{u^{n}} = \sqrt[3]{u^{12}} = u^{x}$. Patet vero, eſſe $u^{12} = u^{x} . u^{x} . u^{x} = u^{3x}$. Eſt igitur $12 = 3x$, $4 = x$, $u^{x} = u^{4}$, $u^{x} = \sqrt[3]{u^{12}}$. Ergo tandem $\sqrt[3]{u^{12}} = u^{4}$. Negatiuus porro exponens notat fractionem, cuius numerator eſt vnitas, denominator vero eiusdem exponentis, poſitiue ſumti quantitas. Vnde perſpicuum eſt, eſſe $u^{-m} = \frac{1}{u^{m}}$. Ex antecedentibus enim cognitum atque perſpectum habemus, eſſe $u^{-4} = \frac{u^{3}}{u^{7}} = \frac{1 . u^{3}}{u^{3} . u^{4}} = \frac{1}{u^{4}}$. Neque difficilius veritas huius regulae perſpi-

perſpicitur, ſi expreſſio aequalitatis $u^{-m} = \frac{1}{u^m}$ poſt tentatam multiplicationem per eandem dignitatem quantitatis u idem factum ſuppeditauerit. Multiplicemus igitur vtrumque aequationis membrum per u^{3m}, erit $u^{-m} \times u^{3m} = u^{3m-m} = u^{2m}$, quod factum quoque producitur, ſuſcepta multiplicatione quantitatis $\frac{1}{u^m}$ per $u^{3m} = \frac{1 \,.\, u^{3m}}{u^m} = u^{3m-m} = u^{2m}$. Nulla igitur dubitatio relinquitur, quin u^{-m} et $\frac{1}{u^m}$ eundem habeant ſignificatum. Vnitas tandem eſt intelligenda, ſi fuerit exponens $= 0$. Eſt enim generatim $u^0 = 1$, quia vtroque membro per u multiplicato, idem producitur factum.

§. V.

Progrediamur iam ad operationes ipſas, facili negotio ſeruatis antecedentibus regulis peragendas. Si enim ſummam perinde atque differentiam radicalium quaerimus, peculiaribus regulis opus non habemus, dummodo radicalia ad ſimpliciorem queamus expreſſionem reducere. Nouimus vero ex ſupra allatis praeceptis, eſſe $\sqrt[m]{\frac{b^n y^m}{d^m}} = \frac{b^{\frac{n}{m}} y^{\frac{m}{m}}}{d^{\frac{m}{m}}} = \frac{b^{\frac{n}{m}} y}{d} = \frac{y \sqrt[m]{b^n}}{d} = \frac{1}{d} \cdot y \sqrt[m]{b^n}$. Quodſi igitur concinnior expreſſio fuerit ſuppeditanda, quantitas ſub radicis ſigno conſtituta, in factores integros vel fractos reſoluatur. Tentetur deinceps, num quidam ex his factoribus ſit dignitas, quae eundem habeat exponentem atque radix ipſa. Tunc enim ſalua veritate radix eiusmodi factoris ſigno radicali praefigi poterit. Liceat exemplis rem clariorem reddere.

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2.27} = \sqrt[3]{2.3^3} = 3\sqrt[3]{2}.$$

$$\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{3.64} = \sqrt[3]{3.4^3} = 4\sqrt[3]{3}.$$

$$\sqrt[3]{\frac{5}{64}} = \sqrt[3]{\frac{5.1}{64}} = \sqrt[3]{\frac{5.1}{4^3}} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{5}.$$

Suppeditemus difficiliora adhuc exempla in tironum gratiam.

$\sqrt{ac^2x} = c\sqrt{ax}$, $\sqrt[6]{64c^3b^6} = b\sqrt[6]{64c^3} = 2b\sqrt[6]{c^3}$.
$\sqrt{(3a^3 + 6a^2b + 3ab^2)} = \sqrt{3a(a^2 + 2ab + b^2)} = \sqrt{3a(a+b)^2} = (a+b)\sqrt{3a}$. Porro erit $6\sqrt{\frac{75}{98}bcc} = 6c\sqrt{\frac{75}{98}b} = 6c\sqrt{\frac{5^2.3b}{7^2.2}} = \frac{30c}{7}\sqrt{\frac{3b}{2}}$, et $\sqrt[4]{\frac{b^3}{d}} = \sqrt[4]{\frac{b^4}{bd}} = b\sqrt[4]{\frac{1}{bd}}$. Simili ratione poſt operationem ex $\sqrt[4]{b^3x} = \sqrt[4]{\frac{b^4x}{b}}$, fit $b\sqrt[4]{\frac{x}{b}}$, ex $\sqrt{-b^3d^2c}$ fit $bd\sqrt{-bc}$. E contrario, ſi expreſſionum ad mere irrationales formulas deſideretur reductio, quantitates ante radicis ſignum euehantur ad dignitatem, quam denotat exponens, ſigno radicali praefixus, ac dein per hanc dignitatem multiplicetur quantitas ſub ſigno radicali. Nihil enim opus eſt, quam vt antecedentem operationem inuertamus, et loco $c\sqrt[5]{np}$ ſcribamus $\sqrt[5]{c^5np}$. Si quis igitur exempla iſta rite fuerit meditatus, paruo labore in aliis formulis ſimilibus, concinnius exprimendis verſabitur. Neque vllam habet difficultatem eiusmodi expreſſionum in ſummam collectio, dummodo formulas antea red-

damus

damus ſimpliciores. Eſt enim $\sqrt{48cdd} + d\sqrt{75c} = 4d\sqrt{3c} + 5d\sqrt{3c}$ $9d\sqrt{3c}$, et $\sqrt{\frac{ad^3}{bb}} + \frac{1}{2b}\sqrt{(a^3d - 4aadd + ad^3)} = \frac{d}{b}\sqrt{ad} + \frac{a-2d}{2b}$ $\sqrt{ad} = \frac{a}{2b}\sqrt{ad}$, quia $a^3d - 4aadd + 4ad^3 = (a-2d)^2.ad$. Porro $3c\sqrt[4]{(16d^8 + 32d^4c^4)} + 4d\sqrt[4]{c^4d^4 + 2c^8} = 3c\sqrt[4]{16d^4(d^4 + 2c^4)}$ $+ 4d\sqrt[4]{(d^4 + 2c^4)c^4} = 6cd\sqrt[4]{(d^4 + 2c^4)} + 4cd\sqrt[4]{(d^4 + 2c^4)}$ erit $= 10cd\sqrt[4]{(d^4 + 2c^4)}$. Differentiam vero inuenimus ſecundum methodum conſuetam, ſuſcepta quantitatum reductione ad ſimpliciores expreſſiones. Sic $\sqrt[3]{(8d^3c + 16d^4)} - \sqrt[3]{(c^4 + 2dc^3)} =$ $\sqrt[3]{(c + 2d)\,8d^3} - \sqrt[3]{(c + 2d)\,c^3} = 2d\sqrt[3]{(c + 2d)} - c\sqrt[3]{(c + 2d)}$ erit $= (2d - c).\sqrt[3]{(c + 2d)}$, et quantitatum $\sqrt{48a^3}$, $\sqrt{\frac{16}{27}a^3}$ differentia $= 4a\sqrt{3a} - \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}a} = 4a\sqrt{3a} - \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{3a}{9}} = 4a\sqrt{3a} -$ $\frac{4}{9}a\sqrt{3a}$ inuenitur $= \frac{36a - 4a}{9}\sqrt{3a} = \frac{32}{9}a\sqrt{3a}$. Exemplorum hactenus propoſitorum ponderatio monſtrat, ſaepius accidere, vt finita reductione ad concinniorem formam eaedem quantitates ſub ſigno radicali ſuperſint, quamuis ante hanc operationem magna inter eas intercedere differentia videatur. Eiusmodi quantitates appellantur communicantes, quarum ratio non diſcrepat a ratione coefficientium ante radicis ſignum. Summa igitur horum coefficientium perinde atque differentia dat deſideratam expreſſionum ſummam atqne differentiam, quia irrationalis pars ſub radicali ſigno vnitatis loco haberi poteſt. Quodſi vero quantitates non fuerint communicantes, tentata reductione ad ſimpliciorem formam, ſymbolice operationes repraeſententur neceſſe eſt.

§. VI.

Radicalium ordinum diuerſorum ad eandem denominationem reductio paruo labore peragitur, dummodo propoſitionem, §pho IV. primo loco traditam, e qua haec operatio fluit, rite ſequamur. Generatim identitas expreſſionum, quae radicalia continent non tollitur, vtroque exponente communi quantitate multiplicato, ſiue, vt rem algebraica methodo exprimamus, $\sqrt[n]{c^r d^q}$ erit $= \sqrt[mn]{c^{mr} d^{mq}}$. Nouimus enim, valorem fractionis non mutari, multiplicatione numeratoris et denominatoris per eandem quantitatem, quod hic quoque locum habet, propter identitatem formularum $\sqrt[n]{c^r d^q}$ et $c^{\frac{r}{n}} d^{\frac{q}{n}}$ ſicut in antecedentibus, §pho quarto demonſtrauimus. Sint igitur, quo res exemplis clarior reddatur, radicalia $\sqrt[n]{c^r d^q}$, $\sqrt[m]{c^h d^s}$ ad eundem ordinem reducenda, erit $\sqrt[mn]{c^{rm} d^{qm}} = \sqrt[n]{c^r d^q}$ et $\sqrt[nm]{c^{hn} d^{sn}} = \sqrt[m]{c^h d^s}$. Quantitates ita productae eosdem habent exponentes ſalua expreſſionum identitate. Illuſtremus formulas generales maioris perſpicuitatis cauſſa exemplis quibusdam facilioribus. Sit $n=3$ $r=1$, $q=1$, erit $\sqrt[n]{c^r d^q} = \sqrt[3]{c d}$. Sit porro $m=5$, $h=1$ $s=2$, erit $\sqrt[m]{c^h d^s} = \sqrt[5]{c d d}$. Nullum igitur eſt dubium, quin $\sqrt[mn]{c^{rm} d^{qm}}$ ſit $= \sqrt[15]{c^5 d^5}$, et $\sqrt[nm]{c^{hn} d^{sn}} = \sqrt[15]{c^3 d^6}$. Patet vero

ex

ex identitate indicum, reducta esse haec radicalia ad eandem denominationem. Quam operationem sequentem quoque in modum exprimere potuissemus: $\sqrt[3]{cd} = c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}}$ et $\sqrt[5]{cdd} = c^{\frac{1}{5}}d^{\frac{2}{5}}$, quare $c^{\frac{5}{15}}d^{\frac{5}{15}} = c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}} = \sqrt[15]{c^5d^5}$, et $c^{\frac{3}{15}}d^{\frac{6}{15}} = c^{\frac{1}{5}}d^{\frac{2}{5}} = \sqrt[15]{c^3d^6}$.

§. VII.

Quosi radicalia diuersorum ordinum ad eandem denominationem fuerint reducta, eorum multiplicatio ex antecedentibus doctrinis sine negotio suscipietur. Varios contemplemur casus, simpliciores et magis compositos in tironum gratiam, vt rite discant generalia praecepta ad quosuis casus accommodare. Sit expressionum in antecedenti §pho suppeditatarum inueniendum factum, erit $\sqrt[n]{c^rd^q} \times \sqrt[m]{c^hd^s}$ post reductionem $= \sqrt[mn]{c^{rm}d^{qm}} \times \sqrt[mn]{c^{hn}d^{sn}} = \sqrt[mn]{c^{rm+hn}d^{qm+sn}}$. Idem factum inuenimus, sequenti methodo in subsidium vocata: $\sqrt[n]{c^rd^q} \times \sqrt[m]{c^hd^s} = c^{\frac{r}{n}}d^{\frac{q}{n}} \times c^{\frac{h}{m}}d^{\frac{s}{m}} = c^{\frac{r}{n}+\frac{h}{m}}d^{\frac{q}{n}+\frac{s}{m}}$. Quibus fractionibus $\frac{r}{n}+\frac{h}{m}$ et $\frac{q}{n}+\frac{s}{m}$ ad communem denominatorem reductis $c^{\frac{r}{n}+\frac{h}{m}}d^{\frac{q}{n}+\frac{s}{m}}$ erit $= c^{\frac{rm+hn}{nm}}d^{\frac{qm+sn}{nm}} = \sqrt[nm]{c^{rm+hn}d^{qm+sn}}$ sicut antea. Vtamur maioris perspicuitatis caussa algebraica methodo, ad inueniendam hactenus adhibitam regulam. Ponamus $\sqrt[mn]{c^{rm}d^{qm}} \times \sqrt[mn]{c^{hn}d^{sn}} = x$, vtroque aequationis membro per $\sqrt[mn]{c^{hn}d^{sn}}$ diuiso, producitur $\sqrt[mn]{c^{rm}d^{qm}} = \frac{x}{\sqrt[mn]{c^{hn}d^{sn}}}$. Euehamus

mus vtrumque membrum ad dignitatem mn, oritur aequatio $c^{rm}d^{qm} = \frac{x^{mn}}{c^{hn}d^{sn}}$, et post multiplicationem per $c^{hn}d^{sn}$ inuenimus $c^{rm+hn} d^{qm+sn} = x^{mn}$, extractio radicis mn dat $\sqrt[mn]{c^{rm+hn} d^{qm+sn}} = x$. Ergo $\sqrt[mn]{c^{rm}d^{qm}} \times \sqrt[mn]{c^{hn}d^{sn}} = \sqrt[mn]{c^{rm+hn} d^{qm+sn}}$. Tribuamus iam literis m, n, r, h, q, s, valores antecedentes, et quaeramus factum formularum $\sqrt[3]{cd}$ et $\sqrt[5]{cdd}$. Factum illud erit $= \sqrt[15]{c^5d^5} \times \sqrt[15]{c^3d^6} = \sqrt[15]{c^{5+3}d^{5+6}} = \sqrt[5]{c^8d^{11}}$. Porro $\sqrt[5]{\frac{9c^2d^3}{4}} \times \sqrt[5]{27c^3d^6}$ dat factum $\sqrt[5]{\frac{243c^5d^9}{4}} = 3cd\sqrt[5]{\frac{d^4}{4}}$, quia $\sqrt[5]{243c^5d^5} = 3cd$. Illum quoque casum silentio praeterire non possumus, quo multiplicatio instituenda est cum quantitatibus, quarum altera rationalis, altera irrationalis. Quodsi igitur factum fuerit suppeditandum ex $(m+n)$ et $\sqrt{\frac{c^2d}{m^2-n^2}}$, nihil opus est, quam vt $(m+n)$ ante radicis signum collocetur, methodo vsitata hunc in modum: $(m+n)\sqrt{\frac{c^2d}{m^2-n^2}}$. Patet vero ex supra traditis praeceptis, euehi posse $(m+n)$ ad dignitatem, in nostro exemplo secundam, ac deinceps multiplicari posse per quantitatem sub radicali signo positam. Producitur itaque $\sqrt{\frac{c^2d \times (m^2+2nm+n^2)}{mm-nn}} = \sqrt{\frac{c^2d.\ (m+n).\ (m+n)}{(m+n).\ (m-n)}} = \sqrt{\frac{c^2d \times (m+n)}{m-n}} = \frac{c\sqrt{(dm+dn)}}{\sqrt{(m-n)}}$. Adiiciamus antecedentibus exemplis quaedam, in quibus formulae occurrunt, quarum termini partim radicalia continent, partim iis carent.

carent. Hic vero meminiſſe nos oportet eorum, quae ſupra, quantum praeſens inſtitutum poſtulabat, de imaginariis quantitatibus praecepimus. Quodſi enim exponens dignitatis numerus par fuerit, duae radices oppoſitae inter ſe aequales occurrunt, e quarum multiplicatione quantitas ſemper poſitiua producitur, vt, ſi fuerit quantitas ſub radicis ſigno negatiua, impoſſibilitas ſtatim appareat. Sic duae radices expreſſionis $\sqrt{16}$ ſunt $+4$ et -4. Mirum igitur tironibus videri non poteſt, quadratum ex $\sqrt{-b}$ eſſe $-b$, quamuis per multiplicationis regulas ex $\sqrt{-b} . \sqrt{-b}$ producatur $\sqrt{+b^2}$. Sumitur enim hoc in caſu $-b$ loco radicis. Illud vero per ſe clarum eſt, $\sqrt[3]{-b} \times \sqrt[3]{-b} \times \sqrt[3]{-b}$ eſſe $= -b$, dummodo ſigna attenta mente contemplemur. Generatim enim, ſi exponens fuerit impar, in ſigno quantitatis nulla mutatio locum habet, quia omnes dignitates exponentium imparium quantitatis $-b$ negatiuam quantitatem ſemper producunt. Quibus accurate examinatis ſine difficultate cognoſcitur, factum ex $(c + d\sqrt{-c}) \times (d - \sqrt{-c})$ eſſe $= 2dc + (dd - c)\sqrt{-c}$. Multiplicemus porro $(c + b\sqrt{c})$ per $(b - \sqrt{c})$, erit factum $= (bb - c)\sqrt{c}$. In tironum gratiam ſequentia adhuc exempla in medium proferre liceat:

$$(f + g\sqrt{f}) \times (f - g\sqrt{-f}) = ff + fg\sqrt{f} - fg\sqrt{-f} - gg\sqrt{-ff}$$
$$= ff + fg\sqrt{f} - fg\sqrt{-f} - fgg\sqrt{-1}.$$

$(f + \sqrt{-gg}) \times (f - \sqrt{-gg}) = f^2 + gg$. Eſt enim $\sqrt{-gg} \times -\sqrt{-gg} = +1 \times \sqrt{-gg} \times -1 \times \sqrt{-gg} = -1 \times -gg = gg$. Quaeramus exercitationis gratia cubum expreſſionis $\frac{1}{2} b \times (-1 - \sqrt{-3})$ hunc in modum: $(-1 - \sqrt{-3}) \times (-1 - \sqrt{-3})$

=

$= 1 + \sqrt{-3} + \sqrt{-3} - 3 = -2 + 2\sqrt{-3}$. Et $(-2 + 2\sqrt{-3}) \times (-1 - \sqrt{-3}) = 2 - 2\sqrt{-3} + 2\sqrt{-3} + 6 = 8$. Ducamus $\frac{1}{8} b^3$ cubum prioris factoris in cubum alterius, producitur $\frac{b^3}{8} \times 8 = b^3$.

§. VIII.

Quo diuisionis praecepta reddantur clariora, a generalibus exemplis simplicioribus ponderandis capiamus initium. Sit quotus expressionis $\frac{\sqrt[n]{c^r d^q}}{\sqrt[m]{c^h d^s}}$ inueniendus, reducamus antea radicalia ad eundem ordinem secundum §phum sextum, sequamur deinceps regulam supra traditam et exponentes diuisoris a diuidendi exponentibus subtrahamus. Calculus igitur hanc induit formam: $\sqrt[mn]{c^{rm} d^{qm}} : \sqrt[mn]{c^{hn} d^{sn}} = c^{\frac{rm-hn}{mn}} d^{\frac{qm-sn}{mn}} = \sqrt[mn]{c^{rm-hn} d^{qm-sn}}$. Quotus a priore non diuersus inuenitur, sequenti methodo vsurpata, maioris perspicuitatis caussa non praetermittenda silentio: $\frac{\sqrt[n]{c^r d^q}}{\sqrt[m]{c^h d^s}} = \frac{c^{\frac{r}{n}} d^{\frac{q}{n}}}{c^{\frac{h}{m}} d^{\frac{s}{m}}} = c^{\frac{r}{n} - \frac{h}{m}} d^{\frac{q}{n} - \frac{s}{m}} = c^{\frac{mr-hn}{mn}} d^{\frac{qm-sn}{mn}} = \sqrt[mn]{c^{mr-hn} d^{qm-sn}}$. Praestantiam algebraicarum expressionum laederem, si earum sensum in linguam latinam transferre vellem. Sit potius $\sqrt[mn]{c^{rm} d^{qm}} : \sqrt[mn]{c^{hn} d^{sn}} = x$, erit $\sqrt[mn]{c^{rm} d^{qm}} = x\sqrt[mn]{c^{hn} d^{sn}}$, et $c^{rm} d^{qm} = x^{mn} c^{hn} d^{sn}$. Porro $c^{rm-hn} d^{qm-sn} = x^{mn}$, ideoque $\sqrt[mn]{c^{rm-hn} d^{qm-sn}} = x$. Ergo $\sqrt[mn]{c^{rm} d^{qm}} : \sqrt[mn]{c^{hn} d^{sn}} = \sqrt[mn]{c^{rm-hn} d^{qm-sn}}$.

Seruatis

Seruatis literarum m, n, r, h, q, s, valoribus 5, 3, 1, 1, 1, 2, supra assumtis, expressio $\frac{\sqrt[n]{c^r d^q}}{\sqrt[m]{c^h d^s}}$ erit $= \sqrt[3]{cd} : \sqrt[5]{cdd} = \sqrt[15]{c^5 d^5} : \sqrt[15]{c^3 d^6}$ $= \sqrt[15]{c^{5-3} d^{5-6}} = \sqrt[15]{c^2 d^{-1}} = \sqrt[15]{\frac{c^2}{d}} =$ desiderato quoto. Consideremus casum, quo finita diuisione partim exponens 0, partim negatiuus relinquitur, quia eiusmodi exempla plerumque a tironibus non sine difficultate soluuntur. Quodsi igitur desideretur diuisio expressionis: $\sqrt[2q]{f^n d^{3m} p^2} : \sqrt[q]{f^{2n} d^m p}$, more vsitato expressio ita est mutanda: $f^{\frac{n}{2q}} d^{\frac{3m}{2q}} p^{\frac{1}{q}} : f^{\frac{2n}{q}} d^{\frac{m}{q}} p^{\frac{1}{q}}$, ac deinceps exponentes diuisoris a diuidendi exponentibus subtrahantur. Est igitur $\frac{f^{\frac{n}{2q}}}{f^{\frac{2n}{q}}} = f^{\frac{n}{2q}-\frac{2n}{q}} =$

$f^{\frac{qn-4qn}{2qq}} = f^{-\frac{3n}{2q}}$, et $\frac{d^{\frac{3m}{2q}}}{d^{\frac{m}{q}}} = d^{\frac{3m}{2q}-\frac{m}{q}} = d^{\frac{3mq-2mq}{2qq}} = d^{\frac{m}{2q}}$,

$\frac{p^{\frac{1}{q}}}{p^{\frac{1}{q}}} = p^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q}} = p^0 = 1$, quare $f^{\frac{n}{2q}} d^{\frac{3m}{2q}} p^{\frac{1}{q}} : f^{\frac{2n}{q}} d^{\frac{m}{q}} p^{\frac{1}{q}} = f^{-\frac{3n}{2q}}.$ $d^{\frac{m}{2q}}.p^0$. Patet vero e praeceptis generalibus supra expositis, esse $f^{-\frac{3n}{2q}} = \frac{1}{f^{\frac{3n}{2q}}}$. Quae fractio si multiplicetur per $d^{\frac{m}{2q}} \times 1$, producitur $\frac{1}{f^{\frac{3n}{2q}}} \times d^{\frac{m}{2q}} = \frac{d^{\frac{m}{2q}}}{f^{\frac{3n}{2q}}} = \frac{\sqrt[2q]{d^m}}{\sqrt[2q]{f^{3n}}} = \sqrt[2q]{\frac{d^m}{f^{3n}}} = \sqrt[2q]{f^{-3n} d^m}$.

Quo exemplo, rite examinato, etiam ſequens magis quam antecedens compoſitum, paruo labore ad examen reuocabitur.

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{p^2}{d}s^5}\times\sqrt[4]{ps^3}}{\sqrt{\frac{pdd}{s}}} = p^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}\,d^{-\frac{1}{3}-1}\,s^{\frac{5}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}.$$

Exponentibus fractis, ad communes denominatores reductis, producitur $p^{\frac{16+6-12}{24}}\,d^{\frac{-1-3}{3}}\,s^{\frac{40+18+12}{24}} = p^{\frac{5}{12}}\,d^{-\frac{4}{3}}\,s^{\frac{35}{12}} = \frac{p^{\frac{5}{12}}\,s^{\frac{35}{12}}}{d^{\frac{4}{3}}} =$

$\frac{\sqrt[12]{p^5 s^{35}}}{\sqrt[3]{d^4}} = \frac{s^2\sqrt[12]{p^5 s^{11}}}{d\sqrt{d}}$, quia $s^{35} = s^{24+11}$. Sit porro diuidendus $= ss + sg\sqrt{s} - sg\sqrt{} - s - gg\sqrt{} - ss$, diuiſor $= s + g\sqrt{s}$, erit vſitata calculi forma talis:

$$\begin{array}{r|l|l}
s+g\sqrt{s} & ss+sg\sqrt{s}-sg\sqrt{}-s-gg\sqrt{}-ss & s-g\sqrt{}-s \\
 & -ss-sg\sqrt{s} & \\
\hline
 & \quad -sg\sqrt{}-s-gg\sqrt{}-ss & \\
 & \quad +sg\sqrt{}-s+gg\sqrt{}-ss & \\
\hline
 & \qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Illud vnice notandum nobis videtur, ſigna productorum, quorum ſubtractio eſt neceſſaria in contraria breuitatis cauſſa ſtatim eſſe mutata. Nos vero exemplorum tam prodigos fuiſſe nemini mirum videbitur, qui meminerit palmarii huius commentationis ſcopi. Nobis enim propoſuimus, calculi radicalium praecepta tironi ita proponere, vt iis, quae tradidimus rite perceptis, aptus inueniatur, ad difficillimos caſus ſine temporis detrimento perſpiciendos.

Quan-

Quantam vero vim habeant exempla, ad regulas generales, facilius intelligendas, mediocriter in arte analytica exercitatos non fugit.

§. IX.

Conuertamus paucis adhuc attentionem ad methodum, auferendi ſigna radicis ex aequationibus, quia principiis antecedentibus rite inſtructo cognitu erit facillima. Omne enim negotium, omnisque opera eo redit, vt terminus aequationis, ſigno radicis praeditus, vnam aequationis partem occupet, ac deinde aequationis membra ad dignitatem euehantur ſecundam, tertiam, *m*tam, ſi extractio radicis quadraticae, cubicae, aut cuiusuis ſuperioris deſignetur. Hanc operationem repetendam eſſe, ſi plura ſigna excidere debeant, per ſe eſt clarum. Tollamus exercitationis cauſſa ſigna radicum ex aequatione $\frac{\sqrt{(y^4-1)}+\sqrt{(y^2-1)}}{y}=yy$. Faciamus igitur $\sqrt{(y^2-1)}=y^3-\sqrt{(y^4-1)}$. Quaeramus iam vtriusque aequationis membri quadratum, erit $y^2-1=y^6-2y^3\sqrt{(y^4-1)}+y^4-1$, aut $y^2=y^6-2y^3\sqrt{(y^4-1)}+y^4$. Quoniam diuiſio per yy locum habet in vtroque membro, inuenimus $1=y^4-2y\sqrt{(y^4-1)}+y^2$. Ad ſignum reſiduum tollendum, aequationem ita exprimamus: $y^4+y^2-1=2y\sqrt{(y^4-1)}$, et denuo vtrumque aequationis membrum ad ſecundam dignitatem euehamus. Quo facto producitur $y^8+2y^6-2y^4+y^4-2y^2+1=4y^6-4y^2$, vel $y^8-2y^6-y^4+2y^2+1=0$, aequatio, quae ab omni radicis ſigno libera eſt. Neque laborat difficultate ſequens magis compoſitum exemplum. Sit aequatio $\sqrt{u}+\sqrt{w}+\sqrt{y}+f=0$ radicum ſignis liberanda. Incipiamus a primo termino ſequentem in modum $-\sqrt{u}=\sqrt{w}+\sqrt{y}+f$. Hinc $u=w+2\sqrt{wy}+2f\sqrt{w}+y+2f\sqrt{y}+f^2$. Repetamus iam operationem, et exprimamus aequationem ita: $u-w-y-2f\sqrt{w}-f^2=2\sqrt{wy}+2f\sqrt{y}$. Ponamus, quo breuior reddatur calculus, $u-w-y-f^2=h$, et vtriusque membri quadratum quaeramus, inueniemus $4wy+8fy\sqrt{w}+4f^2y=h^2-4hf\sqrt{w}+4f^2w$. Vltimum ſignum radicis eliminabitur, ſi aequationi hanc tribuamus formam: $8fy\sqrt{w}+4hf\sqrt{w}=h^2+4f^2w-4f^2y-4wy$. Quoniam vero $(8fy+4hf).\sqrt{w}=h^2+4f^2w-4f^2y-4wy$, erit tandem $(h^2+4f^2w-4f^2y-4wy)^2=w(8fy+4hf)^2$.

Theses ad disputandum propositae.

I.

Theoria Electricitatis, a Franklino inuenta, digna est tot eruditorum assensu.

II.

Aberratio in lentibus, quae a diuersa refrangibilitate radiorum oritur, secundum Newtonum a lentibus non separanda, nostra aetate, inuentis binis vitrorum generibus, diuersa colores dispergendi vi praeditis, penitus tollitur.

III.

Sicut sententias Astronomorum de Veneris atmosphaera magnus probabilitatis gradus comitatur, sic de Veneris satellite opinio, opticae illusionis speciem prae se ferre videtur.

IV.

Aestus marini phaenomena optime explicant, qui actionem solis et lunae in subsidium vocant.

V.

Fulmen est effectus naturalis Electricitatis.

VI.

Demonstratio existentiae diuinae a posteriori maiorem habet euidentiam, quam demonstratio a priori, quae nititur notione entis perfectissimi.

VII.

Principium repugnantiae est omnium absolute primum.

VIII.

Philosophi in demonstranda animi immortalitate, summum demonstrationis mathematicae rigorem obseruant.

Errata.

p. 5. lin. 9. leg. Analyseos. p. 11. lin. 1. leg. $4d\sqrt{3c}+5d\sqrt{3c}=9d\sqrt{3c}$,

DE GENERALIBVS
CALCVLI RADICALIVM
REGVLIS

COMMENTATIO

QVAM

PRAESIDE

MATTHIA AVGVSTO HASIO

LL. AA. M. ET ORD. PHIL. ASS.

IN AVDITORIO MAIORE

D. MAII A. CIↃIↃCCLXIX

DEFENDET

M. CAROLVS TRAVGOTT KRETZSCHMAR

BIBL. ACAD. CVSTOS.

VITEMBERGAE

LITERIS CAROLI CHRISTIANI DÜRRII

ACAD. A TYPIS.