



# Beschreibung des Kriechverhaltens kurzfaserverstärkter Komposite aus den Eigenschaften der Konstituenten

## Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

**Doktoringenieur (Dr.–Ing.)**

vorgelegt dem

Zentrum für Ingenieurwissenschaften

der Martin–Luther–Universität Halle–Wittenberg

als organisatorische Grundeinheit für Forschung und Lehre im Range einer Fakultät

(§75 Abs. 1 Satz 1 HSG LSA, §19 Abs. 1 Grundordnung)

von

**Dipl.–Ing. Carsten Kröner**

geboren am 06.01.1983 in Halle (Saale)

Gutachter: Prof. Dr.–Ing. habil. Dr.h.c. Holm Altenbach  
Dr.–Ing. Ralf Schäuble

Datum der Einreichung: 23. Mai 2011

Datum der Verteidigung: 16. August 2011



# Danksagung

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. habil. Dr.h.c. Holm Altenbach. Er eröffnete mir die Möglichkeit, mich an seinem Lehrstuhl in einem sehr angenehmen Arbeitsklima meiner Dissertation zu widmen. Ich bedanke mich für die sehr konstruktiven Anregungen während jeder Phase der Arbeit.

Dr.-Ing. Ralf Schäuble danke ich für die sehr kurzfristige Übernahme des zweiten Gutachtens. Mein Dank gilt Ihnen auch für die freundliche Bereitstellung von Ressourcen des Fraunhofer Instituts in Halle bereits zu Beginn meiner Arbeit und für die sachdienliche und ausführliche Diskussion während des Vorstellungsvortrages.

Ohne die exzellente, fachliche Unterstützung durch Dr.-Ing. habil. Konstantin Nauhenko wäre die Arbeit vermutlich nicht in dieser Zeit zustande gekommen. Er hatte immer ein offenes Ohr für alle großen und kleinen Probleme des wissenschaftlichen Alltages. Durch sein großes Talent Lösungen auch bei komplizierten Fragestellungen in kurzer Zeit anzugeben, verstrich selten ungenutzte Zeit.

Neben fachlicher Unterstützung fand ich auch persönlichen Rückhalt in der Arbeitsgruppe des Lehrstuhls. Besonders hervorheben möchte ich meinen Kommilitonen Andreas Kutschke, der mir auch in schwierigen Phasen immer wieder Mut machte. Nicht zu vergessen sind die schokoladigen Kaffeepausen in Barbara Renners Büro. Dort war es jederzeit möglich, fachliche aber auch persönliche Themen in lockerer Runde zu erörtern.

Großer Dank gebührt auch meinen Eltern. Sie ermöglichten mir das Studium und ermutigten mich stets zu promovieren. Sie sorgten mit ihrer Unterstützung dafür, dass die Studienzeit eine sehr schöne und erfolgreiche Zeit meines Lebens war.

Zu guter Letzt möchte ich meiner eigenen kleinen Familie dafür danken, dass sie da ist. Meine Frau Kristin zeigte viel Verständnis und schuf mir Freiräume, wenn ich sie benötigte. Sie gab mir immer Sicherheit und Zuversicht.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Motivation</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Grundlegende Theorien</b>	<b>9</b>
2.1	Faserorientierung . . . . .	9
2.2	Bestimmung effektiver Eigenschaften . . . . .	11
2.2.1	Spannungs- und Verzerrungs-Konzentrationstensoren . . . . .	12
2.2.2	Konzept des äquivalenten Komposites . . . . .	13
2.2.3	Shear-Lag-Modelle . . . . .	17
2.2.4	Mori-Tanaka-Ansatz . . . . .	20
2.2.5	Selbst-konsistente Methode . . . . .	22
2.3	Orientierungsmittelung . . . . .	23
2.3.1	Lineare und quadratische Closure . . . . .	25
2.3.2	Orthotrope Closure . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Kriechen der Polymermatrix</b>	<b>29</b>
3.1	Phänomenologische Beschreibung . . . . .	30
3.2	Rheologische Ersatzschaltungen . . . . .	31
3.2.1	Maxwell-Modell und Kelvin-Voigt-Modell . . . . .	32
3.2.2	Standard-Modell und Burgers-Modell . . . . .	33
3.2.3	n-Parameter Modelle . . . . .	34
3.2.4	Fraktionale Ableitungen . . . . .	35
3.2.4.1	Definition fraktionaler Ableitungen . . . . .	36
3.2.4.2	Eigenschaften fraktionaler Ableitungen . . . . .	37
3.2.4.3	Lösung des Anfangswertproblems . . . . .	38
3.2.4.4	Fraktionales Standard-Modell . . . . .	39
3.3	Ergebnisse . . . . .	40
3.3.1	Generalisiertes Kelvin-Voigt-Modell . . . . .	40

---

3.3.2	Fraktionales Modell . . . . .	43
3.3.3	Nichtlineares, generalisiertes Kelvin-Voigt-Modell . . . . .	45
3.3.4	Nichtlineares, fraktionales Modell . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Anisotropes Kriechen des Komposites</b>	<b>52</b>
4.1	Beschreibung des anisotropen Kriechens . . . . .	52
4.1.1	Bestimmung der Matrixspannung . . . . .	53
4.1.2	Reduzierung des Raumes der Matrixspannung . . . . .	53
4.1.3	Effektive Matrixspannung . . . . .	54
4.1.4	Auswertung des Kriechmodells der Matrix . . . . .	56
4.1.5	Skalenübergang auf die Makroebene . . . . .	56
4.2	Ergebnisse . . . . .	58
4.2.1	Orientierungszustand im Schulterstab . . . . .	58
4.2.2	Bestimmung des Aspektverhältnisses der Fasern . . . . .	59
4.2.3	Ultramid A3W G . . . . .	59
4.2.4	Ultradur B4300 G . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Gekoppelte Analyse kurzfaserverstärkter Kunststoffe</b>	<b>64</b>
5.1	Spritzgießsimulation . . . . .	64
5.2	Übertragung der Ergebnisse . . . . .	65
5.2.1	Mesh-mapping . . . . .	66
5.2.2	Beispiel . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Bauteilversuch</b>	<b>75</b>
6.1	Verifikation der Materialsubroutine . . . . .	76
6.2	Versuchsaufbau . . . . .	77
6.3	Simulation mit Moldflow . . . . .	78
6.4	Simulation mit Abaqus . . . . .	79
6.4.1	Absenkung der Befestigungslasche . . . . .	82
6.4.2	Einfluss des Anspritzpunktes . . . . .	88
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>90</b>
	<b>Eidesstattliche Erklärung</b>	<b>99</b>
	<b>Lebenslauf</b>	<b>100</b>

# 1 Einleitung und Motivation

Mit verbesserten Verfahren, einem höheren Erfahrungsschatz der verarbeitenden Betriebe und einem tieferen Verständnis der Mikrostruktur lassen sich mit Kunststoffen immer größere Einsatzgebiete erschließen. Gründe hierfür sind die sehr vielfältigen Verarbeitungs- und Formgebungsverfahren mit deren Hilfe sehr unterschiedliche Produkte hergestellt werden können und die im Vergleich zu Metallen deutlich geringere Dichte.

Für höher beanspruchte Bauteile sind konventionelle Polymerwerkstoffe häufig nicht ausreichend steif oder belastbar. Eine Möglichkeit das Einsatzgebiet zu erweitern, speziell für Bauteile im strukturellen Einsatz, stellt die Verstärkung mit Fasern dar. Mit Hilfe der Kombination zweier Werkstoffe wird versucht auch eine Kombination ihrer Eigenschaften zu erreichen. Typischerweise steigern Fasern sowohl die Steifigkeit als auch die Festigkeit des Kompositwerkstoffes. Werden diese Kennwerte auf die Dichte bezogen, rücken die Begriffe der spezifischen Steifigkeit und der spezifischen Festigkeit in den Fokus, die im Leichtbau eine zentrale Rolle spielen.

Moderne Autos bestehen im Durchschnitt zu 11,7 Gew.-% aus Kunststoffen - Tendenz steigend [1]. Kunststoffe ergänzen und verdrängen zum Teil klassische Metallbauteile. Beispiele, welche diese Entwicklung illustrieren, werden in [2] am Nissan Pathfinder aufgezeigt. Bei diesem Fahrzeug wurden die Aluminiumlegierungen der vorderen Motorabdeckung und des Ventildeckels durch ein glasfaserverstärktes PA6.6 ersetzt. Das Resultat dieser Maßnahme ist eine Gewichtsersparnis von 40% und eine Kostenreduktion um ca. 30%. Damit solche Trends aufrechterhalten werden können, muss das Potenzial kunststoffbasierter Werkstoffe möglichst gut ausgeschöpft und erweitert werden.

Die Verstärkungswirkung beruht darauf, dass die Fasern eine höhere Steifigkeit und Festigkeit als das Matrixmaterial, in das sie eingebracht sind, besitzen [3]. Eine gute Anbindung der Fasern an die Matrix ermöglicht, dass die Polymermatrix und die eingebetteten Fasern im Gleichmaß verformt werden. Dabei nehmen die Fasern aufgrund

ihrer höheren Steifigkeit einen großen Anteil der auf den Verbund wirkenden Spannungen auf und entlasten damit die Polymermatrix. Einen entscheidenden Einfluss auf die Effektivität der Lastübernahme hat hierbei die Länge der Fasern [4]. Grundsätzlich sind lange Fasern besser in der Lage die Matrix zu verstärken.

In Abb. 1.1 wird der Einfluss der Faserlänge (bei konstantem Faserdurchmesser) veranschaulicht. Bei konstantem Querschnitt haben lange Fasern ein höheres Verstärkungspotenzial als kurze. Je größer das Verhältnis der Länge zur Dicke (Aspektverhältnis) einer Faser ist, umso höher sind die auftretenden Schubspannungen an der Grenzfläche zwischen Faser und Matrix [4]. Da diese auftretende Schubspannung fast ausschließlich für den Lasttransfer von der Matrix auf die Faser verantwortlich ist, wird deutlich, dass längere Fasern die Polymermatrix stärker entlasten. Daraus lässt sich schlussfolgern, dass ein höheres Aspektverhältnis eine effektivere Versteifung und Verstärkung erzielt. Die Steigerung des Aspektverhältnisses ist allerdings nur solange sinnvoll bis entweder die Schubspannung an der Grenzfläche die Fließgrenze  $\tau_y$  der Matrix oder die Zugfestigkeit  $\sigma_{f,u}$  der Faser erreicht wird. Sind die Fasern so lang, dass sie bei einer Belastung zum gleichen Zeitpunkt wie die Matrix versagen, besitzen sie die kritische Länge  $l_c$ . Der Einsatz von Fasern, deren Länge größer als die kritische Länge ist, führt nicht zu einer weiteren Verstärkung.

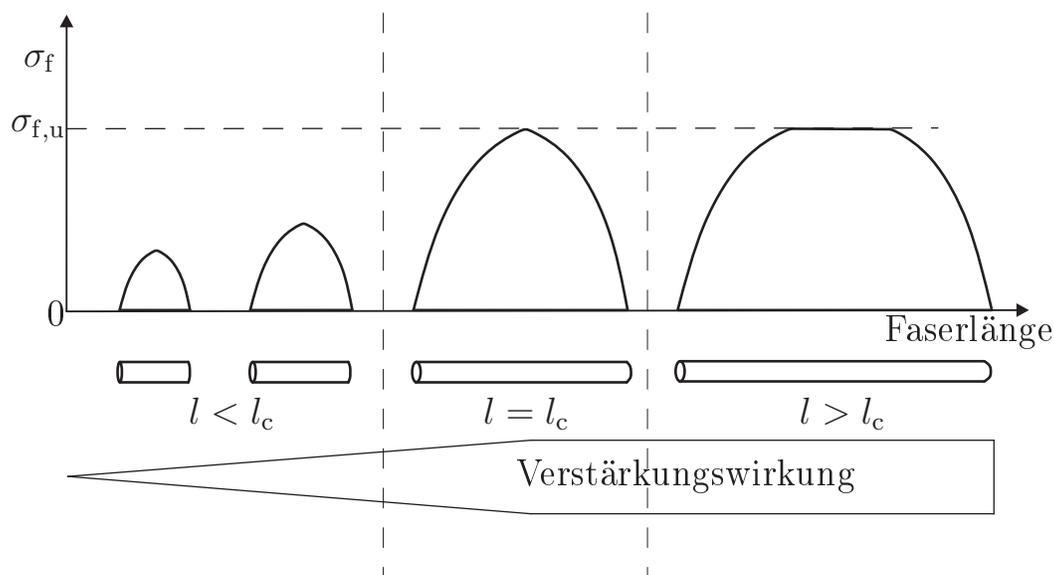


Abbildung 1.1: Abhängigkeit der Faserspannung von der Faserlänge [4]

Die eingesetzten Verstärkungsfasern lassen sich nach verschiedenen Gesichtspunkten klassifizieren [5]. Je nach Fasertyp ergeben sich unterschiedliche Verstärkungspotenziale. Ein Überblick über die Möglichkeiten der Klassifikation wird in Abb. 1.2 gegeben. Für eine mechanische Betrachtung von Faserverbundwerkstoffen ist die Einteilung in langfaser- und kurzfaserverstärkte Werkstoffe sinnvoll, da sie, wie Abb. 1.1 zu entnehmen ist, dem großen Einfluss der Faserlänge auf das Eigenschaftsprofil gerecht wird.

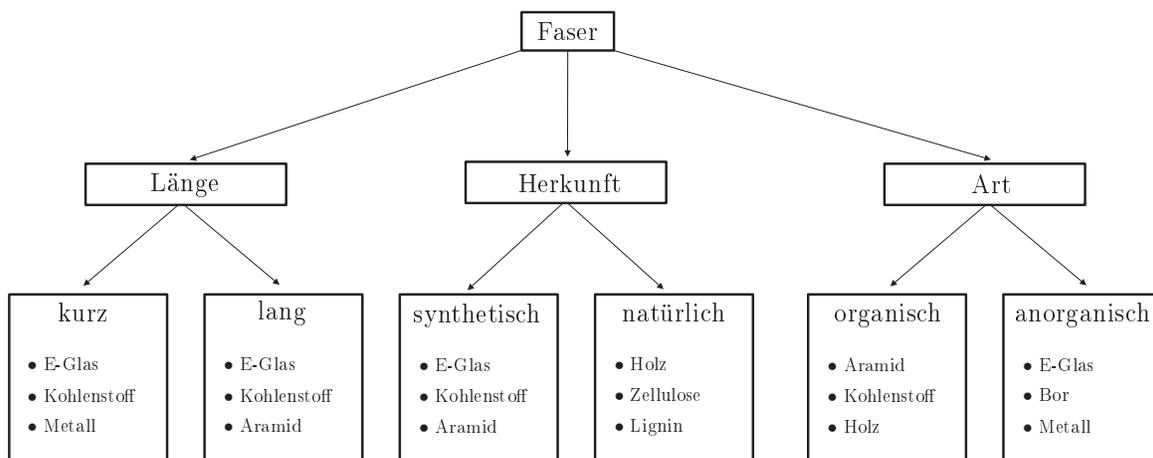


Abbildung 1.2: Möglichkeiten der Klassifizierung von Verstärkungsfasern

Für die Geometrie eines Bauteils und für seine Kosten spielt neben der Mechanik auch der Formgebungsprozess und dessen Zykluszeit eine entscheidende Rolle. Die Verarbeitungsverfahren für langfaserverstärkte Kunststoffe können in Bezug auf erreichbare Stückzahlen, geometrische Formen und Zykluszeiten derzeit nicht mit kurzfaserverstärkten Kunststoffen konkurrieren. Die Möglichkeit der Formgebung mithilfe großserientauglicher Verfahren wie des Spritzgießens ist der wichtigste Grund für den Einsatz von aus mechanischer Sicht weniger effektiven Kurzfasern zur Verstärkung.

Das wichtigste Problem, das mit dem Einsatz von Verstärkungsfasern einhergeht, ist die faserinduzierte Anisotropie des Kompositwerkstoffes. Eine werkstoffliche Anisotropie bedeutet, dass entlang unterschiedlicher Raumrichtungen, unterschiedliche Eigenschaften vorliegen. Bei vielen Werkstoffen lässt sich dieser allgemeine Zustand durch Symmetriebetrachtungen vereinfachen. Für kurzfaserverstärkte Kunststoffe lassen sich drei orthogonale Symmetrieebenen finden. Erfolgt die Belastung des Werkstoffes entsprechend der Symmetrieebenen, entfällt die Kopplung zwischen Normaldehnungen und Gleitungen im Elastizitätstensor [6].

---

Die Anisotropie betrifft fast alle Eigenschaften des Werkstoffes. Aus mechanischer Sicht sind hier die Steifigkeit, die Festigkeit und ferner auch der thermische Ausdehnungskoeffizient hervorzuheben.

Die Berücksichtigung der Anisotropie erfolgt bei kurzfaserverstärkten Kompositen hauptsächlich numerisch oder durch Erfahrungswerte, bei langfaserverstärkten auch analytisch. Wichtig für die Bauteilauslegung ist die möglichst gute Kenntnis der Faserorientierung. Gerade bei Kurzfasern stellt dies ein Problem dar, da der Orientierungszustand nicht mehr direkt durch den Herstellungsprozess bekannt ist und entweder experimentell ermittelt oder anderweitig approximiert werden muss. Die Beschreibung des Orientierungszustandes kann durch den Orientierungstensor erfolgen. Dieser lässt sich in seine Eigenvektoren und die korrespondierenden Eigenwerte zerlegen. Die Eigenvektoren repräsentieren die Hauptrichtungen der Faserorientierung und die Eigenwerte den Grad der Faserorientierung. Sie sind ein Maß dafür, wie eng die Verteilung um die entsprechende Hauptrichtung ist.

Charakteristisch für Polymere ist ihr ausgeprägtes, zeitabhängiges (viskoelastisches), mechanisches Verhalten. Dies manifestiert sich makroskopisch durch Kriech- und Erholungsvorgänge im Werkstoff. Diese Vorgänge spielen eine große Rolle während der Auslegung des Bauteils und für die Abschätzung der vorrausichtlichen Lebensdauer. Kriechvorgänge im Werkstoff wirken sich unter verschiedenen Randbedingungen unterschiedlich aus. Es sind zwei Grenzfälle der Randbedingungen zu betrachten:

1. *Spannung konstant*

Die Folge einer permanent anliegenden Spannung kann eine zeitliche Veränderung der Form oder der Größe des Bauteils sein. Diese Bauteildeformationen können so groß werden, dass die ursprüngliche Funktion nur noch eingeschränkt oder gar nicht mehr erfüllt wird. Damit ergibt sich, neben dem ultimativen Versagen durch eine zu hohe Spannung, eine weitere Möglichkeit des Versagens. Diese Art des Versagens ist typisch für Kunststoffe und wird mit dem Begriff der Retardation verknüpft.

2. *Dehnung konstant*

Die Folge einer konstanten, aufgebrachten Dehnung kann die Umlagerung von elastischen zu plastischen Dehnungsanteilen sein. Daraus resultiert eine Verringerung der ursprünglichen Spannung im Laufe der Zeit. Dieser Vorgang wird als Spannungsrelaxation bezeichnet.

---

Die aufgeführten idealen Spezialfälle treten häufig nur in entsprechend belasteten Prüfkörpern auf. Im realen Bauteil hingegen werden hohe Spannungen meist unter örtlicher Umlagerung relaxiert.

Die genannten Prozesse müssen durch Funktionen der Zeit, Spannung, Temperatur und des Faserorientierungszustandes beschrieben werden. Bei der Auslegung von faserverstärkten Kompositen müssen nun die Probleme der Viskoelastizität, die durch die Polymermatrix und die Probleme der Anisotropie, die durch die Anwesenheit der Fasern hervorgerufen werden, in Kombination betrachtet werden. Wird der Komposit als homogener, anisotroper Werkstoff betrachtet, wird zur vollständigen Charakterisierung des zeitabhängigen Verhaltens ein dreidimensionales Werkstoffgesetz benötigt. Ein solches Gesetz verlangt bereits für einen isotropen Werkstoff eine beträchtliche Anzahl an Parametern zur Anpassung. Durch die orthotrope Natur des kurzfaserverstärkten Werkstoffes steigt die Anzahl weiter [6]. Die experimentelle Bestimmung einer solchen Menge von Parametern ist zum einen unökonomisch und zum anderen eine sehr herausfordernde und zugleich wenig erfolgversprechende Aufgabe. Vor diesem Hintergrund erscheint eine Modellierung auf die konventionelle Art und Weise ungünstig. Daher sollen zunächst exemplarisch alternative Beschreibungen des Kriechens aufgezeigt werden:

- Aufbauend auf den Halpin-Tsai-Gleichungen [7] wurde in [8] versucht aus den mechanischen Eigenschaften der Kompositkonstituenten das Kriechverhalten des Komposites zu beschreiben.
- In [9] wurden Kriechprozesse mithilfe einer auf Findley [10] aufbauenden Formulierung der Kriechrate als Potenzfunktion beschrieben. Die Parameteranpassung wurde an speziellen Prüfkörpern mit nahezu unidirektionaler Faserorientierung parallel und transversal zur Faserorientierung durchgeführt. Die Berücksichtigung des Grades der Faserorientierung bleibt allerdings unberücksichtigt, da die Elemente schichtweise transversal-isotrop modelliert wurden.
- Alternativ zu den bisherigen Modellierungsversuchen kommen auch 2-Skalenansätze zum Einsatz [11, 12, 13]. Bei einer solchen Herangehensweise wird der heterogene Werkstoff auf der Mikroebene auch während der Rechnung als solcher modelliert. Erst auf der Makroebene wird die mechanische Antwort des Komposites auf eine Anregung aus dem Verhalten von Faser und Matrix auf der Mikroebene abgeleitet [13, 11]. Fasern und Matrix interagieren dabei mit separaten Konstitutivmodellen auf der Mikroebene. Die Interaktion kann numerisch

---

[14, 11, 15] oder analytisch [16, 17, 18] modelliert werden. Numerische Ansätze sind sehr vielfältig bezüglich der Interaktionen, die einbezogen werden. Mögliche Stellschrauben, die die Simulationsgüte und deren Dauer beeinflussen, sind z.B.:

- die Art der Modellierung der Haftung der Faser an der Matrix
  - die Größe des betrachteten Ausschnittes auf der Mikroebene (Interaktion von Fasern untereinander)
  - die Elementdefinition
- Analytische Ansätze der 2-Skalenmodellierung bieten den Vorteil, dass sie deutlich weniger Rechenleistung zur Auswertung benötigen. Eine Möglichkeit, um analytisch mithilfe mikromechanischer Theorien [16, 17, 18] aus den Konstituenten auf das makroskopische, viskoelastische Verhalten zu schließen, wird in [19] für einen transversal-isotropen PEEK-Komposit aufgezeigt. Es wird aus dem Gesamtspannungszustand der Spannungszustand der Polymermatrix berechnet. Auf Grundlage dieser Spannung wird mithilfe eines viskoelastischen Materialmodells die Kriechrate der Matrix bestimmt. Mit dieser Matrixkriechrate wird versucht die Kriechrate des Komposites zu modellieren.

Der letztgenannte Ansatz erscheint sehr überzeugend, da er das tatsächliche Verhalten der Konstituenten als Grundlage verwendet und daraus das mechanische Verhalten des Gesamtwerkstoffes ableitet. Aus diesem Grund soll hier in dieser Arbeit ein ähnlicher Zugang zu den Effekten der Viskoelastizität gefunden werden. Ein wesentlicher Unterschied wird darin bestehen, dass der Kriechmodul der Matrix eine zentrale Rolle einnehmen soll. Die Änderung des Kriechmoduls der Matrix infolge des Einflusses von Spannung und Zeit wird innerhalb eines inkrementellen Berechnungsschemas die Grundlage für die Veränderung der effektiven Kompositsteifigkeit bilden. Ein weiterer Unterschied im Vergleich zu [19] betrifft den Anwendungsbereich der zu erarbeitenden Methodik. In [19] wird nur das Kriechen für unidirektional orientierte Langfasern beschrieben. Bedingt durch den Formgebungsprozess können Bauteile aus kurzfaserverstärkten Kompositwerkstoffen höchstens näherungsweise als transversal-isotrop angenommen werden. Tatsächlich liegt bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems ein orthotroper Werkstoff vor. In der Konsequenz sollte dieser Unterschied auch in die Methodik zur Modellierung des Werkstoffes eingearbeitet werden, um die Anwendbarkeit für realistische Bauteile zu ermöglichen.

Die beschriebene Modellierung des Komposites erfolgt mithilfe eines 2-Skalenansatzes. Die Aufspaltung der makroskopischen Spannung in die Anteile, die Fasern und Matrix tragen und der Schritt zurück auf die Kompositebene erfordern den Einsatz verschiedener mikromechanischer Ansätze und Prinzipien, die im Kap. 2 zusammengefasst sind. Der Anteil der Spannung, der auf die isotrope Matrix wirkt, ist ursächlich für die auftretenden Kriechprozesse. Die einachsige Beschreibung des Kriechens der Matrix ist auf verschiedene Arten möglich. In Kap. 3 werden verschiedene Modelle diesbezüglich diskutiert. Es wird für ausgewählte Modelle eine Anpassung an experimentelle Daten für die Werkstoffe Ultramid A3K und Ultradur B4500 durchgeführt. Diese beiden Werkstoffe sind den Matrixwerkstoffen der Komposite Ultramid A3W Gx und Ultradur B4300 Gx, für die experimentelle Datensätze vorliegen, sehr ähnlich. Die Aufstellung und Beschreibung eines Algorithmus, um aus den einzelnen Komponenten des Komposites dessen Eigenschaften zu bestimmen, erfolgt in Kap. 4. Zusätzlich ist an dieser Stelle ein Vergleich der Modellierung und experimenteller Daten dargelegt. Da für kurzfaserverstärkte Komposite die Berücksichtigung der Faserorientierung eine wichtige Rolle spielt, ist diesem Thema das Kap. 5 gewidmet. Es werden Verfahren vorgestellt, um die numerisch bestimmte Faserorientierung aus Moldflow nach Abaqus auf ein anderes FE-Netz zu übertragen. In diesem Zusammenhang wird im Kap. 6 anhand eines faserverstärkten Bauteils das Zusammenspiel der Kopplung der Simulationsprogramme und des erarbeiteten Algorithmus zur werkstoffseitigen Beschreibung demonstriert. Die simulierten Ergebnisse werden im Anschluss mit experimentellen Daten verglichen.

## 2 Grundlegende Theorien

Im folgenden Kapitel sollen zunächst alle benötigten oder historisch wichtigen, theoretischen Grundlagen zur Beschreibung der Mikromechanik von kurzfaserverstärkten Kompositen erläutert werden. Es wird auf die Beschreibung des Orientierungszustandes der Fasern sowie auf die Ableitung effektiver Eigenschaften daraus eingegangen. Ein wichtiges Instrument dafür ist sowohl mit den Spannungs- und Verzerrungskonzentrationstensoren als auch mit den auf Eshelbys [16] Arbeit aufbauenden Theorien gegeben, die im Folgenden behandelt werden.

### 2.1 Faserorientierung

Die Orientierung einer durch eine Strecke dargestellten Faser lässt sich mithilfe zweier Winkel bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems darstellen. Die Bestimmung der Koordinaten des Vektors  $\mathbf{p}$ , der dann die Faser symbolisiert, ist Abb. 2.1 entnehmbar.

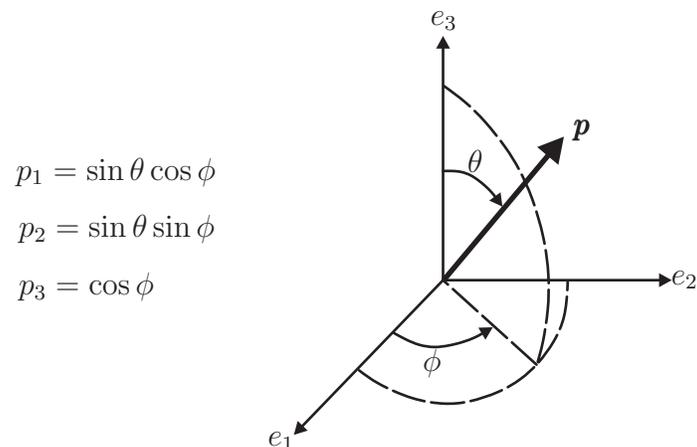


Abbildung 2.1: Faserdarstellung bezüglich eines kartesischen aus den orthogonalen Einheitsvektoren  $e_1$ ,  $e_2$  und  $e_3$  aufgespannten Koordinatensystems [21]

Da in einem Faserverbund sehr viele Fasern vorliegen, ist es ineffizient alle Fasern einzeln zu beschreiben. Aus diesem Grund wird in verschiedenen Veröffentlichungen [21, 22] eine Orientierungsverteilungsfunktion definiert, die die Wahrscheinlichkeit der Faserorientierung in bestimmte Richtungen beschreibt. Die Wahrscheinlichkeit  $P$  eine Faser in einer bestimmten Richtung, die durch die Winkel

$$\phi_1 \leq \phi \leq \phi_1 + d\phi, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_1 + d\theta$$

gekennzeichnet ist, zu finden, ist wie folgt definiert:

$$P(\phi_1 \leq \phi \leq \phi_1 + d\phi, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_1 + d\theta) = \psi(\theta_1, \phi_1) \sin \theta_1 d\theta d\phi \quad (2.1)$$

Die Bestimmung und Auswertung dieser Verteilungsfunktion  $\psi(\theta, \phi)$  im Rahmen numerischer Simulationsverfahren ist sehr ineffizient. Advani und Tucker [21] schlugen deshalb vor, diese Funktion durch Orientierungstensoren zweiter Stufe zu ersetzen. Diese enthalten alle Informationen über die Orientierung der Faser, sind aber numerisch deutlich effizienter zu handhaben. Die Bildung des Orientierungstensors zweiter Stufe erfolgt durch die Integration des dyadischen Produkts des Vektors  $\mathbf{p}$ , der die Faserorientierung einer Faser darstellt, über alle möglichen Richtungen [22, 21]:

$$a_{ij} = \oint p_i p_j \psi(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \quad (2.2)$$

Die Eigenvektoren und die Eigenwerte des Orientierungstensors nehmen eine wichtige Rolle für die weiteren Betrachtungen ein. Die Eigenvektoren stellen die Vorzugsrichtungen der Faserorientierung dar und die korrespondierenden Eigenwerte sind ein Maß für den Grad der Faserorientierung.

In Abb. 2.2 sind alle möglichen Kombinationen der zwei unabhängigen Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  dargestellt. Der dunkel eingefärbte Bereich schränkt die möglichen Kombinationen ein, da die Eigenwerte nach der Größe sortiert sind. Die Ecken und Kanten dieses Bereichs sind von besonderen Orientierungszuständen besetzt. Beispielsweise kennzeichnet der Punkt T sowohl eine triaxiale als auch eine statistisch verteilte Faserorientierung. Jeder beliebige Punkt, außer dem Punkt U, wo alle Fasern unidirektional orientiert sind, kann durch verschiedene Orientierungszustände erreicht werden. Auf die Orientierungstensoren bezogen, bedeutet dies, dass derselbe Orientierungstensor zweiter Stufe  ${}^{(2)}\mathbf{a}$  aus mehreren verschiedenen Orientierungstensoren vierter Stufe  ${}^{(4)}\mathbf{a}$  gebildet werden kann. Die umgekehrte Zuordnung hingegen ist immer eindeutig möglich.

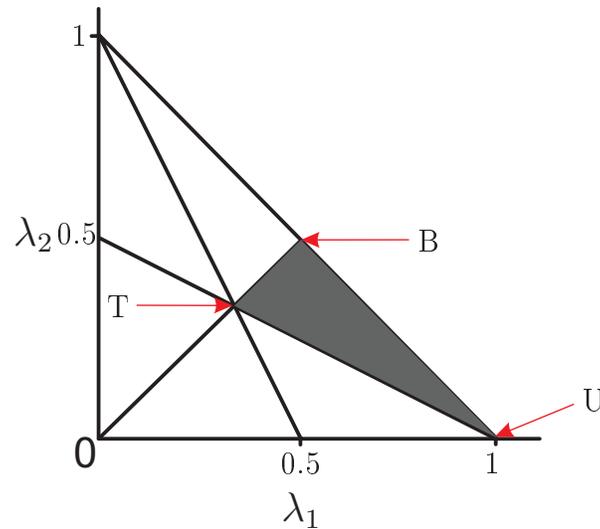


Abbildung 2.2: Mögliche Kombinationen der Eigenwerte und entsprechende Faserorientierung nach [22]

## 2.2 Bestimmung effektiver Eigenschaften

In der Literatur werden verschiedene Lösungsansätze beschrieben, wie sich effektive Materialeigenschaften, z.B. der E-Modul, für Faserverbundwerkstoffe bestimmen lassen. Klassische, analytische Ansätze basieren zum Teil auf den einfachen Mischungsregeln. Hier wird der E-Modul der Fasern und der Matrix durch Federn repräsentiert. Die Kombination zweier Federn ist möglich in paralleler oder in sequenzieller Anordnung. Bei paralleler Schaltung der Federn addieren sich die Steifigkeit von Faser und Matrix entsprechend Gl. (2.3)

$$E_{\text{effektiv}} = \sum_i E_i \quad (2.3)$$

und bei sequenzieller Anordnung addieren sich die reziproken E-Moduln:

$$\frac{1}{E_{\text{effektiv}}} = \sum_i \frac{1}{E_i} \quad (2.4)$$

Vor allem für Langfaserverbundwerkstoffe lässt sich die Modellvorstellung parallelschalteter Werkstoffe sehr gut nachvollziehen. Für Kurzfaserverbunde jedoch lässt sich keine eindeutige Zuordnung, ob eine Reihen- oder Parallelschaltung in die jeweilige Richtung vorliegt, erkennen. Diese beiden Schaltungen bilden letztendlich immer

die Grenzen für die effektiven Eigenschaften, da der tatsächliche Schaltungszustand irgendwo zwischen einer reinen Parallel- und einer reinen Reihenschaltung liegt.

Zur Bestimmung der elastischen Materialeigenschaften von Kurzfaserverbunden gibt es eine Reihe anderer Approximationen, die in den folgenden Abschnitten in Grundzügen erläutert werden sollen. Ausgangspunkt ist meist die Bestimmung der Eigenschaften des Werkstoffes für den Fall, dass alle Fasern unidirektional (UD) orientiert sind. Die UD-Eigenschaften lassen sich mithilfe verschiedener analytischer und phänomenologischer Ansätze bestimmen. Aus den UD-Eigenschaften erfolgt häufig die Bestimmung der effektiven Eigenschaften, die die verschiedenen Orientierungszustände der Fasern berücksichtigen. Zu diesem Zweck werden die UD-Eigenschaften zum Ende immer einer Mittelungsprozedur unterworfen (siehe Abschn. 2.3).

### 2.2.1 Spannungs- und Verzerrungs-Konzentrationstensoren

Die Bestimmung effektiver Eigenschaften bedeutet gleichzeitig auch immer, dass die eigentlich punktweise im Werkstoff veränderlichen Eigenschaften über ein infinitesimales Volumenelement gemittelt werden [23]. Daraus folgt, dass auch mikromechanische Modelle immer der Zielstellung unterliegen, „verschmierte“, d.h. gemittelte Ergebnisse zu liefern. In diesem Zusammenhang lieferte Hill [17] einen wesentlichen Beitrag mit seinem Konzept der Spannungs- und Verzerrungs-Konzentrationstensoren. Anhand dieses Konzeptes lässt sich der mittlere Steifigkeitstensor eines Volumenelementes über eine einfache Prozedur bestimmen, sobald der Spannungs- oder Verzerrungs-Konzentrator bekannt ist. Ausgangspunkt ist die Einführung der Verzerrungs-Konzentrationstensoren für beide Phasen des Komposites  $\mathbf{A}_f$  und  $\mathbf{A}_m$  als Verhältnis der mittleren Konstituentenverzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}_f$  bzw.  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$  und der Gesamtverzerrung  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = \mathbf{A}_f \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{A}_m \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.5)$$

sowie des Spannungs-Konzentrationstensors  $\mathbf{B}_f$  als Verhältnis der mittleren Faserspannung  $\boldsymbol{\sigma}_f$  und der Gesamtspannung  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ :

$$\boldsymbol{\sigma}_f = \mathbf{B}_f \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.6)$$

Die mittlere Gesamtspannung im Komposit lässt sich, nur auf das Faservolumen  $\nu_f$  bezogen, ausdrücken als:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \nu_f \mathbf{C}_f \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_f + (1 - \nu_f) \mathbf{C}_m \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_m \quad (2.7)$$

Dabei symbolisieren  $\mathbf{C}_f$  und  $\mathbf{C}_m$  die Steifigkeiten von Faser und Matrix. Durch Einsetzen von Gl. (2.5) lassen sich aus Gl. (2.7) die Verzerrungen der Konstituenten  $\boldsymbol{\varepsilon}_f$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ , durch die mittlere Verzerrung  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  ersetzen:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = (\nu_f \mathbf{C}_f \cdot \mathbf{A}_f + (1 - \nu_f) \mathbf{C}_m \cdot \mathbf{A}_m) \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.8)$$

Die Verzerrungs-Konzentratoren sind über die Beziehung

$$(1 - \nu_f) \mathbf{A}_m + \nu_f \mathbf{A}_f = \mathbf{I} \quad (2.9)$$

gekoppelt.

Mithilfe der Gln. (2.7) und (2.9) lässt sich die effektive Gesamtsteifigkeit  $\mathbf{C}$  des Komposites ausdrücken als:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_m + \nu_f (\mathbf{C}_f - \mathbf{C}_m) \cdot \mathbf{A}_f \quad (2.10)$$

Für die spätere Verwendung soll analog zu [23] noch ein weiterer Verzerrungs-Konzentrator eingeführt werden, der die mittlere Faserverzerrung und die mittlere Matrixverzerrung in Relation bringt:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = \hat{\mathbf{A}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_m \quad (2.11)$$

Die Verbindung dieser beiden Verzerrungs-Konzentratoren ist mit

$$\mathbf{A}_f = \hat{\mathbf{A}} \cdot \left[ (1 - \nu_f) \mathbf{I} + \nu_f \hat{\mathbf{A}} \right]^{-1} \quad (2.12)$$

gegeben.

### 2.2.2 Konzept des äquivalenten Komposites

Eshelby untersuchte [16] die elastischen Felder um einen Einschluss oder eine Inhomogenität, die spontan eine homogene Verzerrung erfährt und in ein unendliches Kontinuum eingebettet ist. Ein Einschluss im Sinne Eshelbys ist ein bestimmter Bereich des Kontinuums aus demselben Material, eine Inhomogenität hingegen stellt einen Bereich anderen Materials als das Kontinuum dar. Für die Betrachtung von Faserverbunden, ist mit Inhomogenität die Faser und mit Kontinuum die umgebende Matrix gemeint. Für sehr geringe Faseranteile lässt sich mit Eshelbys Theorie des Konzeptes

des äquivalenten, homogenen Komposites die Verbundsteifigkeit bestimmen (Abb. 2.3). Bei diesem Konzept wird letztendlich die Transformationsverzerrung  $\varepsilon_T$  gesucht, die im Einschlussproblem und im Inhomogenitätsproblem nach der Entlastung, dieselbe behinderte Verzerrung  $\varepsilon_c$  hervorruft und damit die Probleme bezüglich des verursachten elastischen Feldes äquivalent macht. Aufgrund vernachlässigter Wechselwirkungen zwischen den Inhomogenitäten und durch die Annahme eines unendlichen Kontinuums ist diese Methodik jedoch nicht geeignet, um die Eigenschaften von Faserverbundwerkstoffen mit höherem Fasergehalt zu berechnen. Trotz dieser Einschränkung bilden die Ergebnisse Eshelbys die Grundlage für zahlreiche Theorien, um die effektiven Kennwerte von Kompositen zu bestimmen.

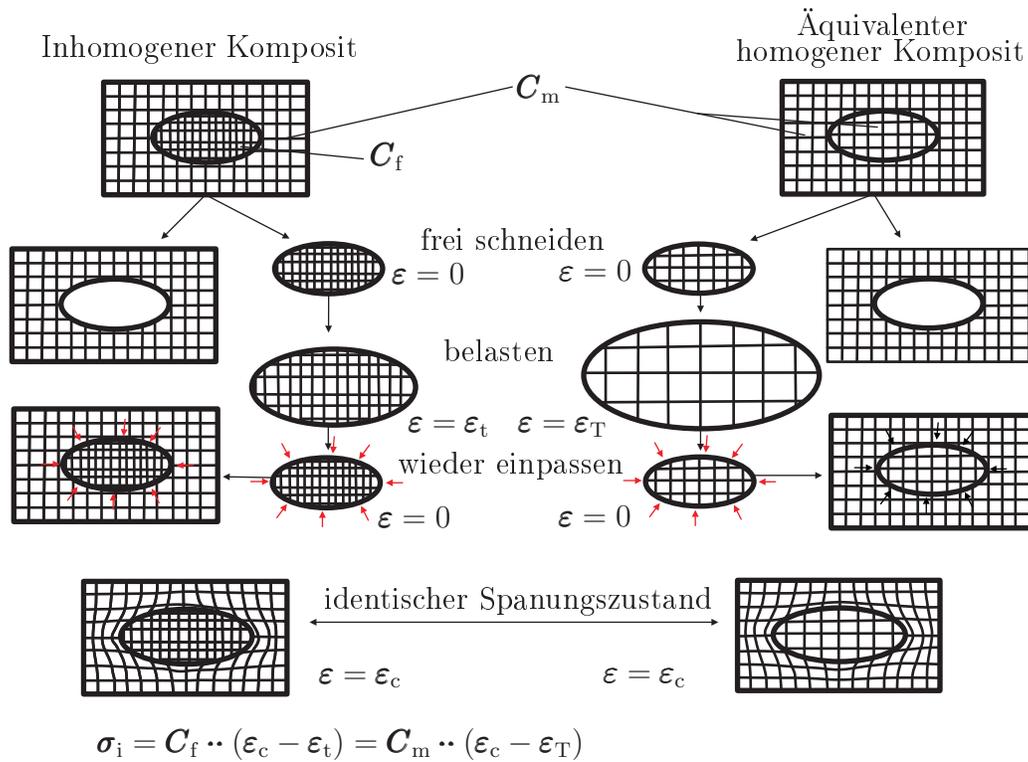


Abbildung 2.3: Methode des äquivalenten Komposites [24]

Das Konzept des äquivalenten Einschlusses lässt sich für den Fall erweitern, dass die Inhomogenität keine spontane Verzerrung ( $\varepsilon_t = 0$ ), sondern eine durch die Matrix induzierte Verzerrung erfährt [24, 23]. Angenommen sei wieder das Kontinuum, auf das diesmal jedoch eine äußere Verzerrung  $\varepsilon_a$  aufgebracht wird. Die Spannung  $\sigma_i$  im

Einschluss ist gegeben durch

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{C}_m \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_f - \boldsymbol{\varepsilon}_T) = \mathbf{C}_f \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_f, \quad (2.13)$$

wobei die Verzerrung in der Inhomogenität durch die Überlagerung der aufgetragenen Verzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon}_a$  und der behinderten Verzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon}_c$  gegeben ist:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = \boldsymbol{\varepsilon}_a + \boldsymbol{\varepsilon}_c \quad (2.14)$$

Aus Gl. (2.13) folgt durch Einsetzen von Gl. (2.14):

$$\mathbf{C}_m \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_a + \boldsymbol{\varepsilon}_c - \boldsymbol{\varepsilon}_T) = \mathbf{C}_f \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_a + \boldsymbol{\varepsilon}_c) \quad (2.15)$$

Das Verhältnis der transformierten, also unbehinderten, und der behinderten Verzerrung wird durch den Eshelby-Tensor  $\mathbf{E}$  charakterisiert:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_T \quad (2.16)$$

Ist der Anteil der Inhomogenitäten gering, entspricht die im Unendlichen aufgetragene Verzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon}_a$  der mittleren Gesamtverzerrung  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}_a. \quad (2.17)$$

Nun lässt sich aus Gl. (2.15) durch Einsetzen von Gl. (2.16)  $\boldsymbol{\varepsilon}_T$  eliminieren:

$$\mathbf{C}_f \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_a + \boldsymbol{\varepsilon}_c) = \mathbf{C}_m \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_a + \boldsymbol{\varepsilon}_c - \mathbf{E}^{-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_c) \quad (2.18)$$

Im nächsten Schritt werden nacheinander mithilfe der Gln. (2.14) und 2.17) die Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}_c$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}_a$  ersetzt:

$$\mathbf{C}_f \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_f = \mathbf{C}_m \cdot [\boldsymbol{\varepsilon}_f + \mathbf{E}^{-1} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_f - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})] \quad (2.19)$$

Durch Umstellen lässt sich Gl. (2.19) in einer für die weiteren Betrachtungen günstigen Form schreiben:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{[\mathbf{I} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}_m \cdot (\mathbf{C}_f - \mathbf{C}_m)]}_{\mathbf{A}_{\text{Eshelby}}^{-1}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_f \quad (2.20)$$

Aus dieser Darstellung ist durch den Vergleich der Gl. (2.5) mit Gl. (2.20) ein Teil der Konstanten zum Verzerrungs-Konzentrationstensor nach Eshelby zusammenfassbar. Mithilfe dieses Tensors lässt sich aus der Gesamtverzerrung die Verzerrung und damit auch die Spannung in den Fasern ermitteln.

Die Gültigkeit dieses Ansatzes ist zusammenfassend an folgende Annahmen gekoppelt:

- geringer Faseranteil im Werkstoff
- die Fasern sind unidirektional ausgerichtet
- Fasern und Matrix zeigen elastisches Materialverhalten
- die Fasern haften perfekt an der Matrix

Die Herleitung der Berechnungsvorschrift der Komponenten des Eshelby-Tensors  $\mathbf{E}$  soll an dieser Stelle nicht erfolgen. Stattdessen werden lediglich die Bildungsvorschriften für eine isotrope Matrix aufgeführt. Die Herleitung kann bei Bedarf in der Spezialliteratur nachgeschlagen werden [25, 16]. Die Komponenten für eine ellipsoidale Inhomogenität, die die Faser approximieren soll, werden wie folgt berechnet [26]:

$$E_{1111} = E_{2222} = -\frac{3\alpha^2}{8(1-\nu_m)(1-\alpha^2)} + \frac{g}{4(1-\nu_m)} \left[ 1 - 2\nu_m + \frac{9}{4(1-\alpha^2)} \right],$$

$$E_{3333} = \frac{1}{1-\nu_m} \left[ 2 - \nu_m - \frac{1}{1-\alpha^2} \right] + \frac{g}{2(1-\nu_m)} \left[ -4 + 2\nu_m + \frac{3}{1-\alpha^2} \right],$$

$$E_{1122} = E_{2211} = \frac{1}{8(1-\nu_m)} \left[ 1 - \frac{1}{1-\alpha^2} \right] + \frac{g}{16(1-\nu_m)} \left[ -4(1-2\nu_m) + \frac{3}{1-\alpha^2} \right],$$

$$E_{1133} = E_{2233} = \frac{\alpha^2}{2(1-\nu_m)(1-\alpha^2)} - \frac{g}{4(1-2\nu_m)} \left[ 1 - 2\nu_m + \frac{3\alpha^2}{1-\alpha^2} \right],$$

$$E_{3311} = E_{3322} = \frac{1}{2(1-\nu_m)} \left[ -(1-2\nu_m) + \frac{1}{1-\alpha^2} \right] + \frac{g}{4(1-\nu_m)} \left[ 2(1-2\nu_m) - \frac{3}{1-\alpha^2} \right],$$

$$E_{1313} = E_{2323} = \frac{1}{4(1-2\nu_m)} \left[ 1 - 2\nu_m + \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2} \right] - \frac{g}{8(1-2\nu_m)} \left[ 1 - 2\nu_m + 3\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2} \right],$$

$$E_{1212} = -\frac{\alpha^2}{8(1-\nu_m)(1-\alpha^2)} + \frac{g}{16(1-\nu_m)} \left[ 4(1-2\nu_m) + \frac{3}{1-\alpha^2} \right]$$

mit

$$g = \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^{3/2}} \left[ \arccos \alpha - \alpha(1-\alpha^2)^{1/2} \right]$$

Die Komponenten des Eshelby-Tensors hängen lediglich von der Querkontraktionszahl  $\nu_m$  der umgebenden Matrix und dem Faktor  $g$  ab, welcher wiederum nur vom Aspektverhältnis  $\alpha$  der Faser, welches den Quotient der Faserlänge und des Faserdurchmessers bezeichnet, abhängt.

### 2.2.3 Shear-Lag-Modelle

Bei Shear-Lag-Modellen wird zunächst immer ein Zylinder der Matrix, in den eine zylindrische Faser coaxial eingebettet ist, betrachtet. In Abb. 2.4 ist ein solches Einfaserelement mit den zugehörigen Maßen skizziert.

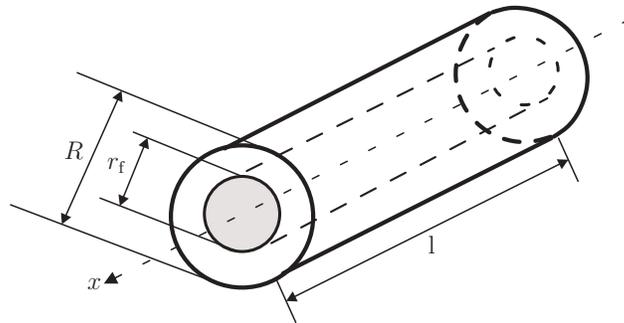


Abbildung 2.4: Modellvorstellung einer in einem Matrixzylinder eingebetteten Faser

Im Falle einer auf die Enden des Matrixzylinders wirkenden äußeren Belastung entsteht aufgrund unterschiedlicher Steifigkeiten von Faser und Matrix eine relative Verschiebung der Lage zwischen dem äußeren Zylinderrand und der Längsachse, wo sich die

steifere Faser befindet. Diese Gleitung ist in Abb. 2.5 durch die Verzerrung der vormals geraden Linien dargestellt. Die entstehende Schubspannung ist im Wesentlichen für den Lasttransfer zwischen Matrix und Faser verantwortlich. Die Spannung, die an den Fasenden als Normalspannung auftritt, wird meist vernachlässigt. Shear-Lag-Modelle basieren auf der Annahme, dass die Schubspannung zwischen Faser und Matrix proportional zu dem auftretenden Gleitungsunterschied zwischen dem von der Faser unbeeinflussten, äußeren Zylinderrand und dem äußeren Rand der Faser ist [27, 23].

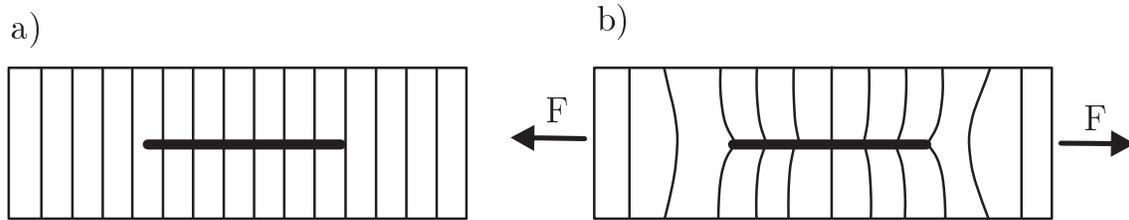


Abbildung 2.5: Darstellung einer in einem Zylinder aus Matrixmaterial eingebetteten Faser in entlasteter (a) und belasteter (b) Konfiguration [4]

Gleichung (2.21) beschreibt den Gleichgewichtszustand zwischen der Schubspannung  $\tau_{rx}$  und der Faserspannung in  $x$ -Richtung  $\sigma_{f,x}$ .

$$\frac{d\sigma_{f,x}}{dx} = -\frac{2\tau_{rx}(x)}{r_f} \quad (2.21)$$

Cox löst Gl. (2.21) in [27] auf zu

$$\sigma_{f,x} = E_f \bar{\epsilon}_x \left[ 1 - \frac{\tanh(\beta l/2)}{(\beta l/2)} \right] \quad (2.22)$$

mit

$$\beta^2 = -\frac{H}{\pi r_f^2 E_f} \quad (2.23)$$

und

$$H = -\frac{2\pi G_m}{\ln(R/r_f)}. \quad (2.24)$$

Gleichung (2.22) stellt einen Zusammenhang zwischen der Matrixspannung und der daraus resultierenden Faserspannung her. Der Term in eckigen Klammern lässt sich zu

$$A = \left[ 1 - \frac{\tanh(\beta l/2)}{(\beta l/2)} \right] \quad (2.25)$$

zusammenfassen. Der E-Modul der Faser wird um diesen Term, der in der Literatur als „Effektivitätsfaktor“ bezeichnet wird, reduziert [27]. Für große Werte von  $\beta l/2$  strebt  $A$  gegen Eins und für kleine gegen Null. Bei Anwendung der Mischungsregel wird  $A$  nun an den elastischen Modul der Faser geschrieben:

$$\bar{E}_x = A\nu_f E_f + (1 - \nu_f)E_m \quad (2.26)$$

Je nach relativer Anordnung der Einfaserelemente zueinander ergeben sich zum Teil große Unterschiede in der Steifigkeit des so modellierten Verbundes [23]. Entscheidend hierbei ist immer die Wahl des in Abb. 2.6 angedeuteten Radius des Abstandes der Einfaserelemente aus Abb. 2.5, da dieser indirekt über  $H$  den  $\beta$ -Parameter und damit die Effektivität  $A$  des Lasttransfers beeinflusst.

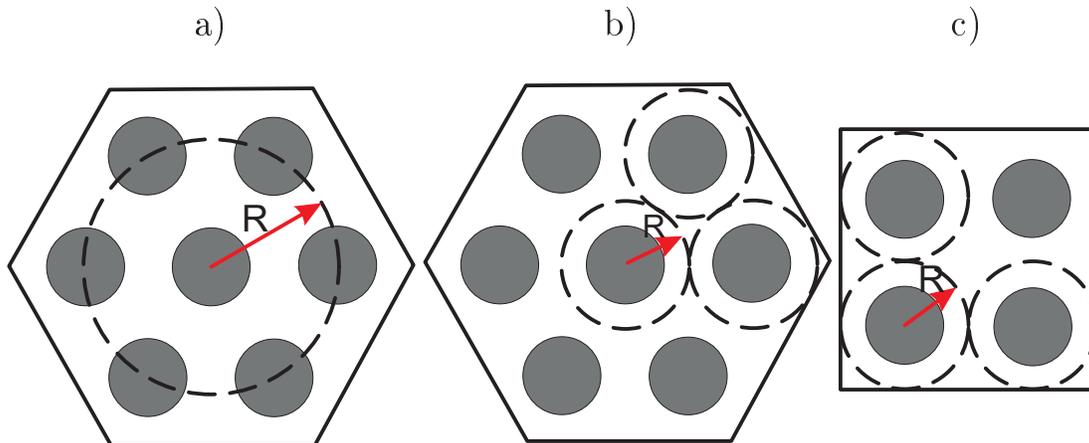


Abbildung 2.6: Zusammenfassung verschiedener Anordnungen der Fasern und Definitionen des Radius  $R$  nach [23].

- a)  $R$  =Distanz zweier benachbarter Faserlängsachsen,
- b)  $R$  =halbe Distanz zweier benachbarter Faserlängsachsen (hexagonale Anordnung),
- c)  $R$  =halbe Distanz zweier benachbarter Faserlängsachsen (kubische Anordnung)

Mit konventionellen Shear-Lag-Modellen lässt sich nur der E-Modul des Komposites in Faserrichtung bestimmen. Die Querkontraktion bleibt bei diesen Betrachtungen unberücksichtigt.

### 2.2.4 Mori-Tanaka-Ansatz

Eine Schwachstelle der Theorie nach Eshelby ist die Gültigkeit bei nur sehr geringen Volumenanteilen von Fasern oder anderen Füllstoffen. Die Ursache wurde im Abschn. 2.2.2 angedeutet. Die Annahme einer unendlichen Matrix, in der ein einzelnes Teilchen eines Füllstoffes eingebettet ist, unterschlägt bei Anwendung auf größere Volumenanteile die Interaktion der Partikel. Die Einschränkung der Steifigkeitsbestimmung für nur sehr kleine Volumenanteile wird durch Mori und Tanaka [18] abgeschwächt. Der Wechselwirkung der Einschlüsse wird durch ein elastisches Feld im Hintergrund Rechnung getragen. Angenommen sei ein homogener Körper aus reinem Matrixmaterial. Wirkt auf diesen eine Spannung, wird er dieser nach dem Hookeschen Gesetz nachgeben:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_m \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (2.27)$$

Die dabei auftretende Verzerrung wird als Referenzverzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  bezeichnet [25, 23]. Im Gegensatz zu einem Komposit mit sehr geringem Fasergehalt ist diese Referenzverzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  nicht gleichzeitig auch die Matrixverzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ . Die Matrixverzerrung im Komposit ist die Summe aus der Referenzverzerrung und einer zusätzlichen Verzerrung  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_m$ , die durch das Spannungsfeld im Hintergrund entsteht.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_m \quad (2.28)$$

Analog zu Gl. (2.28) wird nun die Faserverzerrung definiert:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_m + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_f = \boldsymbol{\varepsilon}_m + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_f \quad (2.29)$$

Die Anwendung des Konzeptes des äquivalenten Komposites führt mit den Gln. (2.28) und (2.29) zu:

$$\mathbf{C}_f \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_m + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_f) = \mathbf{C}_m \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_m - \boldsymbol{\varepsilon}_T) \quad (2.30)$$

In diesem Fall verknüpft der Eshelby-Tensor ebenfalls wie in Gl. (2.16) die zusätzliche Faserverzerrungsstörung und die Transformationsverzerrung [23]:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_f = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_T \quad (2.31)$$

Mit Gl. (2.31) folgt, nach Umstellen aus Gl. (2.30):

$$(\mathbf{C}_f - \mathbf{C}_m) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_f = -\mathbf{C}_m \cdot \mathbf{E}^{-1} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_f \quad (2.32)$$

Mit Gl. (2.29) lässt sich  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_f$  aus Gl. (2.32) eliminieren:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{S}_m \cdot (\mathbf{C}_f - \mathbf{C}_m) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_f = \boldsymbol{\varepsilon}_m - \boldsymbol{\varepsilon}_f \quad (2.33)$$

Nach einigen Umformungen erhält man folgende Formulierung, die die Verzerrung der Matrix und der Faser zueinander in Relation bringt:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \underbrace{[\mathbf{I} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}_m \cdot (\mathbf{C}_f - \mathbf{C}_m)]}_{\mathbf{A}_{\text{Eshelby}}^{-1}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_f \quad (2.34)$$

Im Gegensatz zu Gl. (2.20) ist in Gl. (2.34) nicht die mittlere Gesamtverzerrung  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , sondern die Matrixverzerrung mit der Faserverzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon}_f$  über den Verzerrungs-Konzentrator verknüpft. Damit kann die Mori-Tanaka-Annahme mithilfe von Gl. (2.11) wie folgt formuliert werden:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = \mathbf{A}_{\text{Eshelby}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_m \quad (2.35)$$

Aus dem Vergleich der Gln. (2.11) und (2.35) wird sofort deutlich, wie die Verzerrungs-Konzentratoren für geringe und höhere Faservolumenanteile miteinander verbunden sind:

$$\hat{\mathbf{A}}_{MT} = \mathbf{A}_{\text{Eshelby}} \quad (2.36)$$

Mit Gl. (2.12) lässt sich letztendlich eine Formulierung für den Verzerrungs-Konzentrator nach Eshelby aufstellen:

$$\mathbf{A}_{MT} = \mathbf{A}_{\text{Eshelby}} \cdot [(1 - \nu_f) \mathbf{I} - \nu_f \mathbf{A}_{\text{Eshelby}}]^{-1} \quad (2.37)$$

Mit diesem Verzerrungs-Konzentrator nach Mori-Tanaka ist es möglich, auch für höhere Faservolumenanteile, den Elastizitätstensor zu berechnen. Die praktische Umsetzung und Bildung eines Algorithmus zur Bestimmung der Ingenieurkonstanten, aufbauend auf den vorgestellten Konzepten nach Eshelby und Mori-Tanaka, erfolgte durch Tandon und Weng [28].

### 2.2.5 Selbst-konsistente Methode

Ausgehend von Eshelbys Lösung lässt sich in einem iterativen Schema zuerst der Verzerrungs-Konzentrator und mit dessen Hilfe der Steifigkeitstensor ermitteln. Die Modellvorstellung hinter solchen selbst-konsistenten Methoden ist erneut auf der Logik Eshelbys aufgebaut und in Abb. 2.7 dargestellt. Ein Partikel ist in eine unendliche Matrix eingebettet. Diese Matrix besitzt im Gegensatz zu herkömmlichen Ansätzen die Eigenschaften des Komposites [29, 23]. Das bedeutet, dass das umgebende Medium nun ebenfalls transversal isotrope Eigenschaften besitzt und der Eshelby-Tensor entsprechend gebildet werden muss.

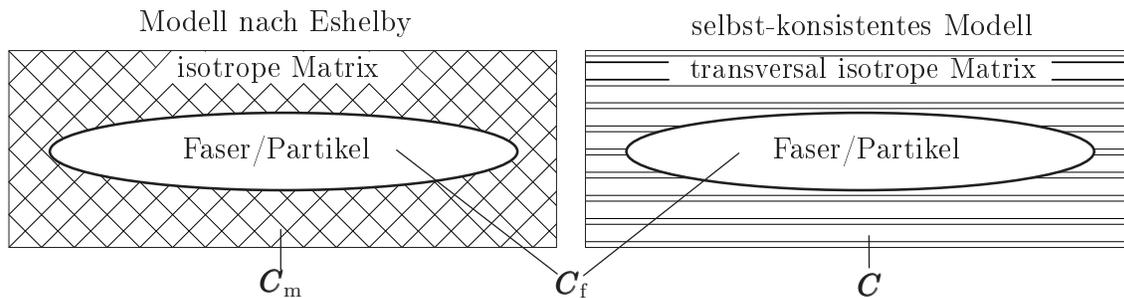


Abbildung 2.7: Berechnungsschema der selbst-konsistenten Steifigkeitsbestimmung

Durch Ersetzen der Matrixsteifigkeit  $\mathbf{C}_m$  und der Matrixnachgiebigkeit  $\mathbf{S}_m$  durch die jeweiligen effektiven Tensoren des Komposites lässt sich aus Gl. (2.20) der Verzerrungs-Konzentrator in der selbst-konsistenten Form darstellen [23]:

$$\mathbf{A}_{SC} = [\mathbf{I} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \cdot (\mathbf{C}_f - \mathbf{C})]^{-1} \quad (2.38)$$

Der schematische Ablauf einer selbst-konsistenten Bestimmung des Steifigkeitstensors ist in Abb. 2.8 angedeutet. Der Verzerrungs-Konzentrator wird dabei in Gl. (2.10) eingesetzt, um den Gesamtsteifigkeitstensor zu bestimmen. Diese Prozedur wird wiederholt, bis die Änderung des Steifigkeitstensors des Verbundes kleiner als ein Grenzwert ist. Die Konvergenz wird selbst bei schlechten Startparametern nach wenigen Iterationen erreicht [17].

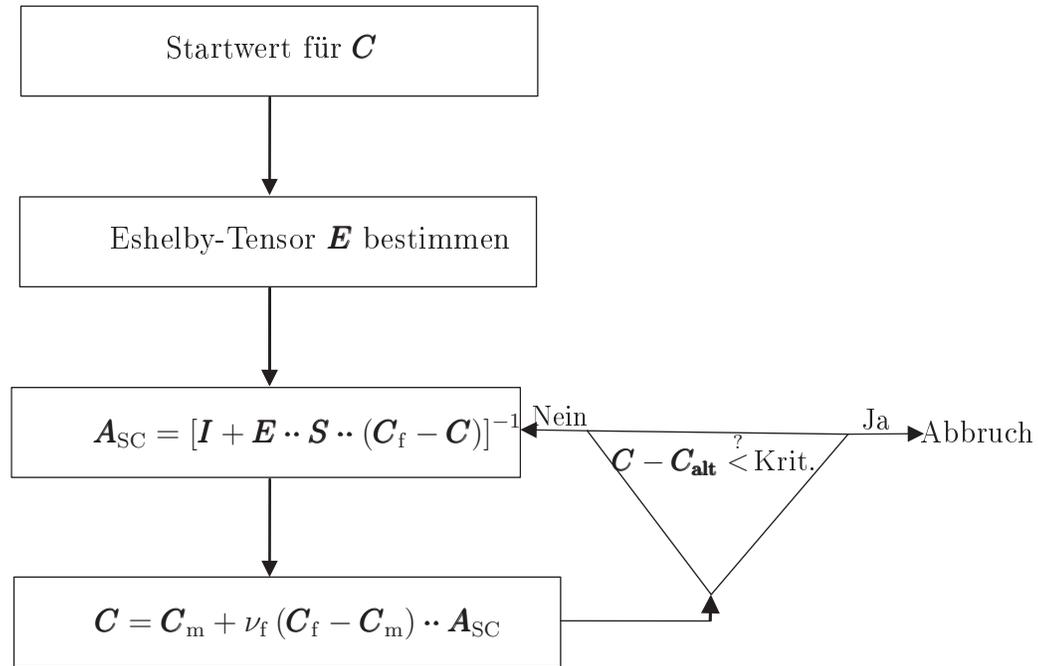


Abbildung 2.8: Berechnungsschema der selbst-konsistenten Steifigkeitsbestimmung

Dieses Berechnungsschema ist in der Lage, die Faserinteraktion, die in einem durch weitere Einschlüsse gestörten Verzerrungsfeld im Sinne von [18] auftreten, zu berücksichtigen oder bei einem ungestörten Verzerrungsfeld zu vernachlässigen [30]. Weiterhin ist es mit einem solchen Schema möglich, mehrphasige Komposite zu analysieren. Gerade wenn keine exakte analytische Formulierung des Problems gefunden werden kann, eignet sich die selbst-konsistente Berechnung des Steifigkeitstensors [31].

## 2.3 Orientierungsmittelung

Im Abschn. 2.1 wurde bereits auf die Orientierungsdarstellung durch einen Tensor zweiter Stufe hingewiesen. Da der Elastizitätstensor bezüglich der tatsächlichen Orientierung, über die gemittelt werden soll, ein Tensor vierter Stufe ist, muss der Orientierungstensor vierter Stufe  ${}^{(4)}\mathbf{a}$  mithilfe einer Closure Approximation aus dem Orientierungstensor zweiter Stufe  ${}^{(2)}\mathbf{a}$  abgeleitet werden. Die Closure Approximation stellt demzufolge immer eine Funktion zu Ableitung von  ${}^{(4)}\mathbf{a}$  aus  ${}^{(2)}\mathbf{a}$  dar [22]:

$${}^{(4)}\mathbf{a} = \mathbf{f}({}^{(2)}\mathbf{a}) \quad (2.39)$$

Je nach Methode dieser Abschätzung lässt sich  ${}^{(4)}\mathbf{a}$  unterschiedlich gut aus  ${}^{(2)}\mathbf{a}$  abschätzen. Die Güte solcher Ableitungen wurde in zahlreichen Veröffentlichungen dargestellt und diskutiert [32, 22, 21, 33, 34, 35, 36].

Ist  ${}^{(4)}\mathbf{a}$  mithilfe einer Closure ermittelt, kann unter Zuhilfenahme dieses Tensors die Orientierungsmittelung des Elastizitätstensors durchgeführt werden. Ausgangspunkt hierfür ist die Annahme der transversalen Isotropie des Elastizitätstensors [21]. Sind die Fasern entlang der Symmetrieachse, die durch den Vektor  $\mathbf{p}$  dargestellt wird, ausgerichtet, lässt sich, der auf diese Achse ausgerichtete Elastizitätstensor, wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
C_{ijkl}(\mathbf{p}) &= B_1 (p_i p_j p_k p_l) \\
&+ B_2 (p_i p_j \delta_{kl} + p_k p_l \delta_{ij}) \\
&+ B_3 (p_i p_k \delta_{jl} + p_i p_l \delta_{jk} + p_j p_l \delta_{ik} + p_j p_k \delta_{il}) \\
&+ B_4 (\delta_{ij} \delta_{kl}) + B_5 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Analog zur Bildung des Orientierungstensors zweiter Stufe nach Gl. (2.2) wird auch der mittlere Elastizitätstensor eines Volumenelements gebildet. Es wird für alle möglichen Raumrichtungen die Steifigkeit bei unidirektionaler Orientierung mit der Wahrscheinlichkeit Fasern in dieser Richtung zu finden multipliziert und auf die Richtung, für die gemittelt werden soll, bezogen:

$$\mathbf{C} \equiv \oint \mathbf{C}(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \tag{2.41}$$

Mit den Gln. (2.40) und (2.41) lässt sich nun der gemittelte Elastizitätstensor nach folgender Vorschrift bilden:

$$\begin{aligned}
C_{ijkl} &= B_1 (a_{ijkl}) + B_2 (a_{ij} \delta_{kl} + a_{kl} \delta_{ij}) \\
&+ B_3 (a_{ik} \delta_{jl} + a_{il} \delta_{jk} + a_{jl} \delta_{ik} + a_{jk} \delta_{il}) \\
&+ B_4 (\delta_{ij} \delta_{kl}) + B_5 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})
\end{aligned} \tag{2.42}$$

### 2.3.1 Lineare und quadratische Closure

Um die Stufe von  ${}^{(2)}\mathbf{a}$  zu erhöhen, wird in den einfachsten Fällen  ${}^{(2)}\mathbf{a}$  durch Multiplikationen mit dem Einheitstensor zweiter Stufe  ${}^{(2)}\boldsymbol{\delta}$  (lineare Closure, Gl. (2.43))

$$\begin{aligned} a_{ijkl} = & -\frac{1}{35} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \\ & + \frac{1}{7} (a_{ij}\delta_{kl} + a_{ik}\delta_{jl} + a_{il}\delta_{jk} + a_{kl}\delta_{ij} + a_{jl}\delta_{ik} + a_{jk}\delta_{il}) \end{aligned} \quad (2.43)$$

oder durch Multiplikation mit sich selbst (quadratische Closure, Gl. (2.44)) in einen Tensor vierter Stufe überführt [35]:

$$a_{ijkl} = a_{ij}a_{kl} \quad (2.44)$$

Weder mithilfe der linearen noch der quadratischen Closure ist eine gute Bestimmung eines kompletten Sets von Werkstoffkennwerten möglich. Sie liefern zwar unter Umständen genaue Lösungen [34, 22], sind aber nicht in der Lage für den Großteil unterschiedlicher Strömungsfelder den Orientierungstensor  ${}^{(4)}\mathbf{a}$  abzuschätzen. Dementsprechend gibt es eine Vielzahl anderer Varianten von Closures. Im Folgenden soll, stellvertretend für alle orthotropen Closures, die orthotrope, angepasste Closure abgehandelt werden, da diese Gattung von Closures einen deutlichen Zuwachs der Approximierungsgenauigkeit bringt [22, 34, 35].

### 2.3.2 Orthotrope Closure

In diesem Abschnitt soll zunächst die Definition der orthotropen Closure nach [22] und danach ein Vertreter dieser Kategorie erläutert werden. Ein symmetrischer Tensor, wie  ${}^{(2)}\mathbf{a}$ , der als  $3 \times 3$  Matrix abgebildet werden kann, besitzt immer drei senkrecht aufeinander stehende Eigenvektoren [37]. Diese drei unabhängigen Eigenvektoren sind die Basisvektoren des Eigenvektorraums. Wird ein symmetrischer Tensor in den Eigenvektorraum gedreht, werden alle Nichtdiagonalkomponenten des Tensors Null [37]. Die Diagonalelemente, des in den Eigenvektorraum gedrehten Tensors, sind die Eigenwerte des ursprünglichen Tensors. Durch die Drehung in den Eigenvektorraum ist der Orientierungstensor,  ${}^{(2)}\mathbf{a}$  aufgrund der Normierung, durch zwei unabhängige Eigenwerte und drei Hauptachsen anstelle von neun Komponenten, vollständig beschrieben. Da  ${}^{(4)}\mathbf{a}$  nur aus  ${}^{(2)}\mathbf{a}$  abgeschätzt werden soll, muss  ${}^{(4)}\mathbf{a}$  zwar nicht diagonal, aber zumindest

ebenfalls orthotrop sein. Wenn dem nicht so wäre, würde eine Richtungsinformation in  ${}^{(4)}\mathbf{a}$  enthalten sein, die vorher nicht in  ${}^{(2)}\mathbf{a}$  enthalten war [22]. Die Komponenten von  ${}^{(4)}\mathbf{a}$  können aufgrund der Gleichheit der Richtungen der Tensoren nur noch eine Funktion der Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  von  ${}^{(2)}\mathbf{a}$  sein.

### *Orthotrope, angepasste Closure*

Die Grundidee dieser Closure ist, eine bestimmte, parametrisierte Berechnungsvorschrift von  ${}^{(4)}\mathbf{a}$  aus  ${}^{(2)}\mathbf{a}$  möglichst gut an die Verteilungsfunktion der Faserorientierung  $\psi(\mathbf{p})$  anzupassen. In [22] werden zunächst verschiedene Strömungsfelder generiert, die eine möglichst hohe Anzahl verschiedener Faserorientierungen mit sich bringen. Die Auswahl der Strömungsfelder erfolgt dabei so, dass die graue Fläche in Abb. 2.2 möglichst gleichmäßig mit Orientierungszuständen belegt wird. In [22] werden fünf Strömungsfelder verwendet:

- einfache Scherströmung
- zwei Überlagerungen von Scher- und Dehnströmung
- einachsige Dehnströmung
- zweiachsige Dehnströmung

Die Verteilungsfunktion der Faserorientierung  $\psi(\mathbf{p})$  wird für die genannten Strömungsfelder punktuell ausgewertet. Mithilfe einer Parameteranpassung der Bildungsvorschrift von  ${}^{(4)}\mathbf{a}$  aus  ${}^{(2)}\mathbf{a}$  wird anschließend die Abweichung zwischen der Abschätzung von  ${}^{(4)}\mathbf{a}$  aus  ${}^{(2)}\mathbf{a}$  und den Werten, die von  $\psi(\mathbf{p})$  geliefert werden, minimiert.

Cintra und Tucker geben in [22] die Koordinaten des Orientierungstensors vierter Stufe in verkürzter Darstellung wie folgt an:

$$a_{mn}^v = \begin{pmatrix} a_{11}^v & a_{12}^v & a_{13}^v & 0 & 0 & 0 \\ a_{12}^v & a_{22}^v & a_{23}^v & 0 & 0 & 0 \\ a_{13}^v & a_{23}^v & a_{33}^v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55}^v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66}^v \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Die Symmetrien des Orientierungstensors vierter Stufe entsprechen denen des orthotropen Elastizitätstensors:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (2.46)$$

Aus Gl. (2.46) ergeben sich damit folgende Vereinfachungen:

$$a_{12}^v = a_{44}^v \quad a_{23}^v = a_{66}^v \quad a_{13}^v = a_{55}^v \quad (2.47)$$

Weiterhin werden in [22] die Abhängigkeiten der Komponenten des Tensors  ${}^{(4)}\mathbf{a}^v$  von den Komponenten des Orientierungstensors zweiter Stufe  ${}^{(2)}\mathbf{a}$  folgendermaßen angegeben:

$$a_{11}^v + a_{66}^v + a_{55}^v = a_{11} \quad (2.48)$$

$$a_{66}^v + a_{22}^v + a_{44}^v = a_{22} \quad (2.49)$$

$$a_{55}^v + a_{44}^v + a_{33}^v = a_{33} \quad (2.50)$$

Damit sind drei Gleichungen mit sechs Unbekannten gegeben. Die fehlenden drei Komponenten können, wie eingangs bereits beschrieben, durch eine punktuelle Berechnung aus der Orientierungsverteilungsfunktion für verschiedene Orientierungszustände, die durch die Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  charakterisiert sind, berechnet werden. Mit dem Ergebnis aus der Parameteranpassung und den beiden unabhängigen Eigenwerten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  lassen sich nun die restlichen drei Komponenten von  ${}^{(4)}\mathbf{a}^v$  bestimmen [22]:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^v \\ a_{22}^v \\ a_{33}^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.06096 & 0.37124 & 0.55530 & -0.36916 & 0.31827 & 0.37122 \\ 0.12471 & -0.38940 & 0.25884 & 0.08617 & 0.79608 & 0.54499 \\ 1.22898 & -2.05412 & 0.82155 & -2.26057 & 1.05391 & 1.81976 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2^2 \\ \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Die in Gl. (2.51) als  $6 \times 3$  Matrix abgebildete Zahlenkolonne stellt die finalen Werte der beschriebenen Minimierung der Differenz zwischen der Abschätzung von  ${}^{(4)}\mathbf{a}$  aus  ${}^{(2)}\mathbf{a}$  und dem Wert, der aus der Orientierungsverteilungsfunktion  $\psi(\mathbf{p})$  folgt, dar [22].

---

Die Güte dieser Closure hängt von den Strömungsfeldern ab, die für die Auswertung von  $\psi(\mathbf{p})$  verwendet werden. Eine andere Auswahl von Strömungen oder eine andere Überlagerungen der Scher- und der Dehnströmung führt zu einer anderen Anpassung. Die orthotrope angepasste Closure stellt somit kein Naturgesetz dar.

# 3 Kriechen der Polymermatrix

Der Begriff des viskoelastischen Verhaltens deutet auf die Kombination von elastischem und viskosem Verhalten hin. Elastisches Verhalten ist gekennzeichnet durch eine spontane, spannungsproportionale Reaktion der Dehnung zur Spannung. Die sich einstellende Deformation ist vollständig rückstellbar. Viskoses Verhalten hingegen ist gekennzeichnet durch bleibende Deformationen, die sich vergrößern, solange eine Spannung anliegt [38]. Die Kombination aus beiden Typen resultiert in einem Verhalten, das sowohl spontane, rückstellbare Anteile der Deformation aufweist, als auch solche, die von der Zeit abhängen und zum Teil bleibender Natur sind. Schematisch ist dieser Zusammenhang in Abb. 3.1 dargestellt. Die Gesamtdehnung ist dort aufgespalten in einen spontanen, elastischen Anteil  $\epsilon_{sp}$ , einen verzögerten aber rückstellbaren Anteil  $\epsilon_{v,el}$  und einen plastischen Anteil  $\epsilon_p$ .

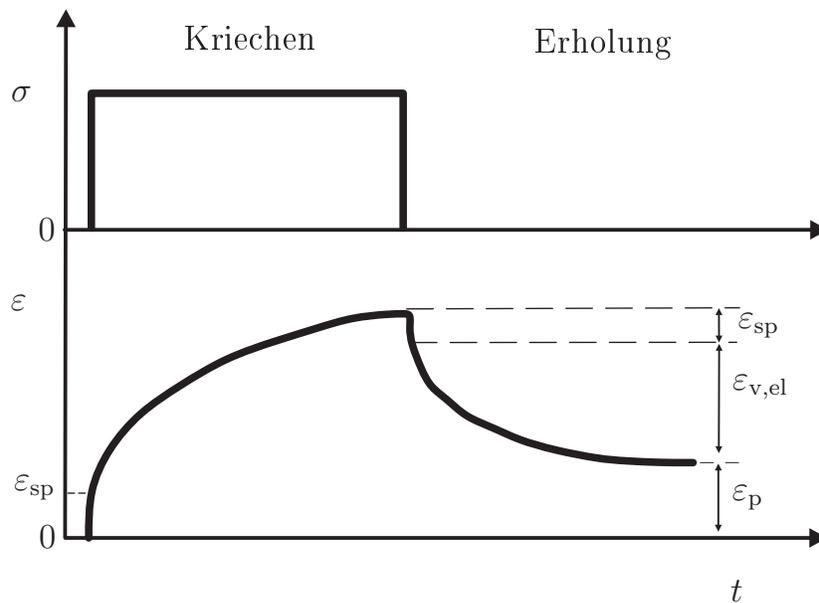


Abbildung 3.1: Kriech- und Erholungsexperiment - schematisch

## 3.1 Phänomenologische Beschreibung

Neben rheologischen Ersatzschaltungen werden häufig phänomenologische Ansätze der Kurven- und Flächenanpassung gewählt, um sich Effekten der Viskoelastizität, wie des Kriechens und der Relaxation, zu nähern. Solche Modelle können bestimmte Aspekte des Werkstoffverhaltens der Realität nachempfinden. Schwachstellen einfacher rheologischer Modelle sind ihr mangelndes Darstellungsvermögen eines Spektrums an Relaxationszeiten oder bei umfangreicheren Modellen die Unmöglichkeit der Bestimmung aller Kennwerte ohne weitere Annahmen. Das Dilemma aus Approximierungsgüte und experimentellem Aufwand zur Bestimmung aller Parameter für aufwendigere Modelle ist nicht zu umgehen. Mathematischen Modellen hingegen fehlt der kausale Zusammenhang zum Werkstoffverhalten. Sie greifen den Werkstoff als Black-Box auf und emulieren das Verhalten. Der fehlende kausale Zusammenhang zwischen den Modellparametern und dem Werkstoff ermöglicht die Aufstellung von Funktionen, die mit wenigen Parametern wichtige Teile des Werkstoffverhaltens darstellen können [39]. Auf der anderen Seite bereitet es jedoch große Schwierigkeiten mit solchen Modellen ein geschlossenes, in sich konsistentes Modell zu finden, dass alle Aspekte der Viskoelastizität abdeckt [39].

Einen Ansatz zur phänomenologischen Beschreibung des Kriechens und der Relaxation stellen Exponentialfunktionen dar. Aufgrund der schlechten Adaptivität einer einzelnen Exponentialfunktion werden häufig Reihen solcher Funktionen verwendet. Auf diese Weise lässt sich das Werkstoffverhalten auch über größere Zeitskalen modellieren [40, 41], als das mit einer einzelnen Funktion möglich wäre. Diese Reihen von Exponentialfunktionen werden als Prony-Reihen bezeichnet [42] und sind in einschlägigen FEM Codes implementiert [40]. Die Anzahl der Parameter, die benötigt wird, richtet sich hierbei nach dem Werkstoff und der Zeitdauer, die modelliert werden soll. Jede dieser abklingenden Exponentialfunktionen stellt einen Teil des Relaxationsspektrums des Werkstoffes dar. Je länger die Reihe dieser Exponentialfunktionen ist, umso besser ist die Adaptivität der gesamten Reihe. Aus diesem Grund kann die Anzahl an Parametern, die für die Prony-Darstellung benötigt werden, stark gegenüber einer einzelnen Funktion ansteigen.

Ein weiterer, bekannter, phänomenologischer Ansatz zur Beschreibung des Werkstoffkriechens geht auf Findley [10] zurück. Die Gesamtdehnung  $\varepsilon$  wird in einen elastischen und einen plastischen Dehnungsanteil aufgespalten und mit den Ansatzparametern  $k_1$ ,

$k_2$  und  $k_3$  ersetzt.

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{\text{elastisch}} + \varepsilon_{\text{inelastisch}} = k_1 + k_2 t^{k_3} \quad (3.1)$$

Diese Formulierung zeichnet sich, je nach Wahl der Ansatzfunktionen für die  $k_i$ , durch den Bedarf nur weniger Parameter aus. Exemplarisch sind in Tabelle 3.1 Varianten der Findley-Modellierung aufgeführt. Durch die Wahl spannungsabhängiger Ansatzfunktionen eignet sich die Findley-Formulierung auch für die Modellierung nichtlinearer, viskoelastischer Effekte.

Tabelle 3.1: Verschiedene Ansatzfunktionen des Findley-Ansatzes nach [9]

Gleichung	$k_1$	$k_2$	$k_3$	Quelle
$\varepsilon(t) = \varepsilon_{\text{elastisch}} + \varepsilon_{\text{inelastisch}} = k_1 + k_2 t^{k_3}$	$\frac{\sigma}{E}$	$a\sigma^b$	$c$	[9]
	$\frac{\sigma}{E}$	$\sinh(\sigma)$	$c$	[43]
	$\frac{\sigma}{E}$	$a\sigma^b$	$c\sigma + d$	[44]

## 3.2 Rheologische Ersatzschaltungen

Die Modellierung viskoelastischer Werkstoffe kann nach verschiedenen Prinzipien erfolgen. Da Federn und Dämpfer jeweils ideal elastisch und viskos auf eine äußere Spannung reagieren, werden sie häufig zur Modellierung eingesetzt [42, 45]. Diese Art der Modellierung ist analytischer Natur und besitzt im Gegensatz zu phänomenologischen Modellierungsversuchen, einen klaren kausalen Hintergrund. Vor diesem Hintergrund sind demzufolge auch alle Parameter eindeutig physikalisch interpretierbar, wenn auch nicht messbar. Nachteile rheologischer Schaltungen sind die hohe Anzahl an Elementen und Parametern, die für ein breites Relaxationsspektrum benötigt werden. Die aufwendige und zum Teil unmögliche experimentelle Bestimmung aller Parameter definiert Grenzen der Einsetzbarkeit solcher Modelle. Hinzu kommt, dass diese Modelle das Werkstoffverhalten nur für kleine Dehnungen ausreichend genau wiedergeben [9, 46].

### 3.2.1 Maxwell-Modell und Kelvin-Voigt-Modell

Traditionell werden rheologische Ersatzschaltungen mit linearen Federn und Dämpfern verwendet. Das Verhalten dieser Elemente ist jeweils beschreibbar durch das Hookesche Gesetz

$$\sigma_F = E\varepsilon_F \quad (3.2)$$

und das Newtonsche Gesetz

$$\sigma_D = \eta\dot{\varepsilon}_D. \quad (3.3)$$

Die Reihenschaltung dieser Elemente wird als Maxwell-Modell und die Parallelschaltung als Kelvin-Voigt-Modell bezeichnet [47].



Abbildung 3.2: Maxwell-Modell

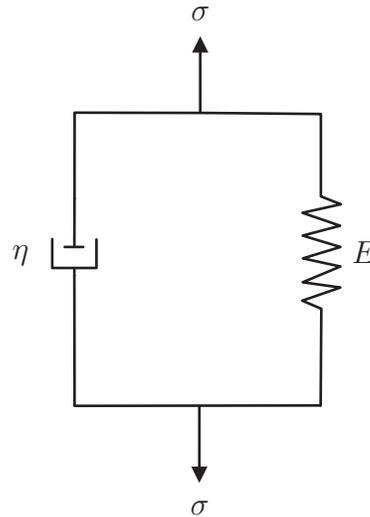


Abbildung 3.3: Kelvin-Voigt-Modell

$$\sigma = \sigma_D = \sigma_F \quad (3.4)$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_F + \dot{\varepsilon}_D \quad (3.5)$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (3.6)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_D = \varepsilon_F \quad (3.7)$$

$$\sigma = \sigma_F + \sigma_D \quad (3.8)$$

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (3.9)$$

Diese Grundmodelle sind jeweils nicht in der Lage sowohl Kriech- als auch Erholungsprozesse qualitativ korrekt wiederzugeben (vergl. Abb. 3.4). Dennoch haben sie eine

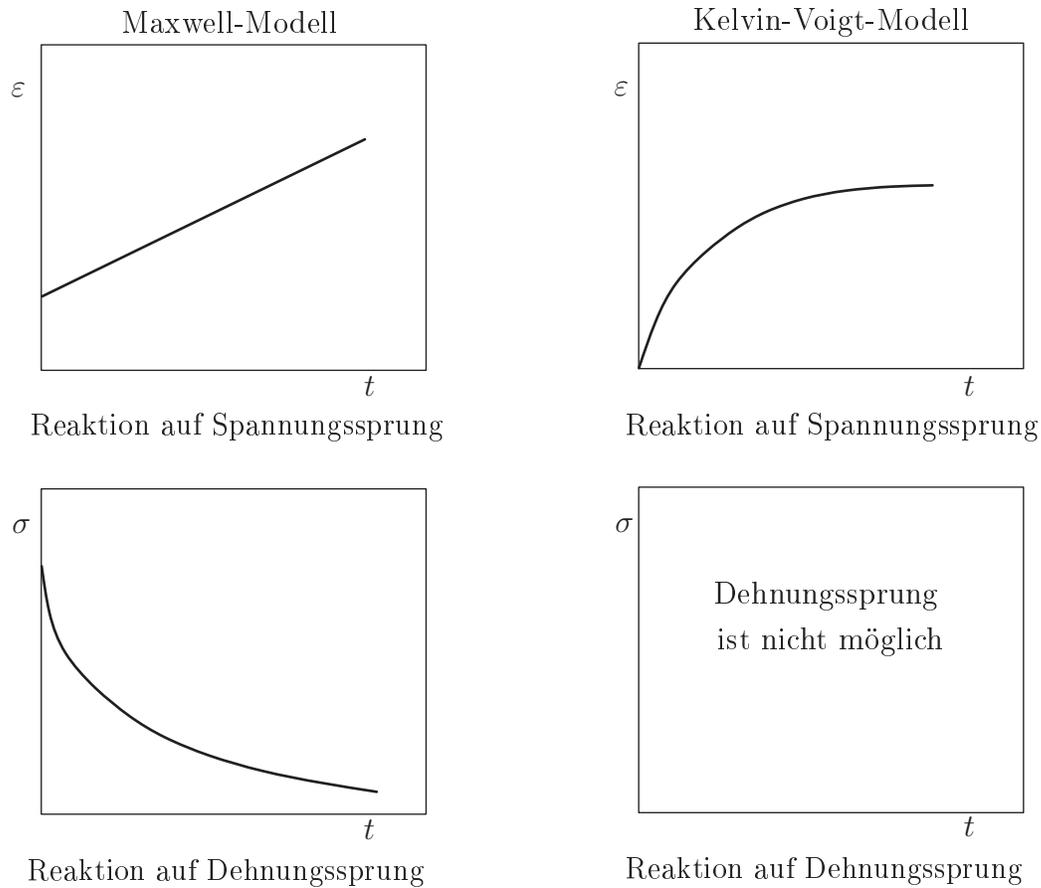


Abbildung 3.4: Vergleich Maxwell- und Kelvin-Voigt-Modell (qualitativ)

große Bedeutung, da sie die Grundelemente, aus denen komplexere Schaltungen aufgebaut werden können, enthalten.

### 3.2.2 Standard-Modell und Burgers-Modell

Zwei einfache Schaltungen, die qualitativ sowohl das Kriechen als auch die Erholung beschreiben können, sind zum einen das Standard-Modell (Abb. 3.5) und zum anderen das Burgers-Modell (Abb. 3.6) [38].

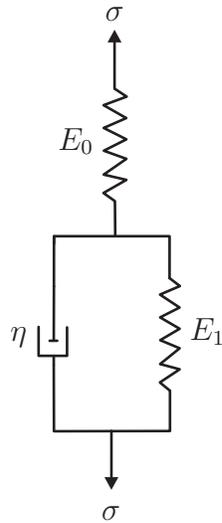


Abbildung 3.5: Standard Modell

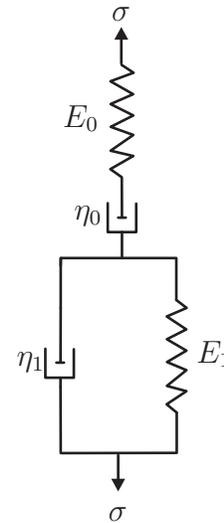


Abbildung 3.6: Burgers-Modell

Beide Modelle haben aufgrund ihrer schlechten Adaptivität eher didaktischen Charakter, als dass sie für eine reale Modellierung eingesetzt werden können.

### 3.2.3 n-Parameter Modelle

Reale Kunststoffe zeigen im Gegensatz zu den bisher erwähnten Modellen mehr als nur eine relevante Relaxationszeit. Vielmehr zeigen sie ein Spektrum von Relaxationszeiten. Um dies zu berücksichtigen, können die Grundelemente in immer umfangreicheren Schaltungen zusammengeschaltet werden. Auf diese Weise lässt sich ein Relaxationspektrum, auch über größere Zeitskalen modellieren. Beispiele hierfür sind die verallgemeinerten Maxwell- und Kelvin-Voigt-Modelle, die beide, je nach Anzahl der Elemente, ein breites Spektrum an Relaxationszeiten abbilden können [47]. In Abb. 3.7 ist zur Veranschaulichung das verallgemeinerte Maxwell-Modell mit einer zusätzlich parallel geschalteten Feder abgebildet, um auch eine Rückstellung der Dehnung zu modellieren. Abbildung 3.8 zeigt das generalisierte Kelvin-Voigt-Modell.

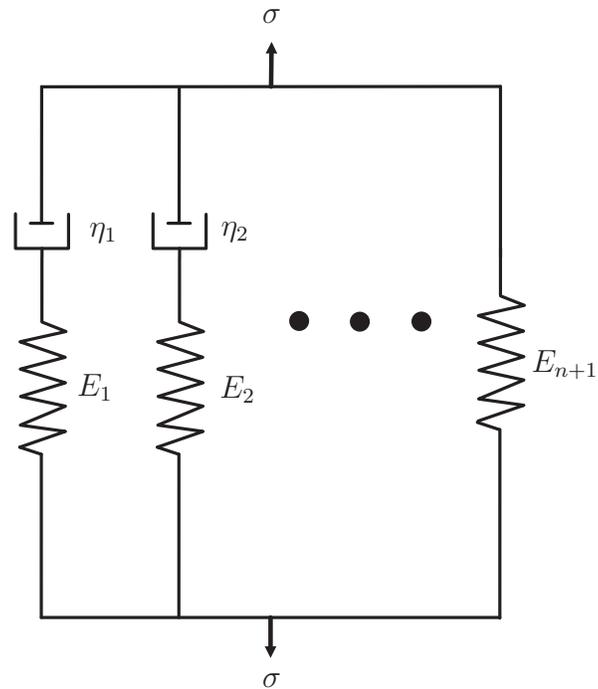


Abbildung 3.7: Generalisiertes Maxwell-Modell

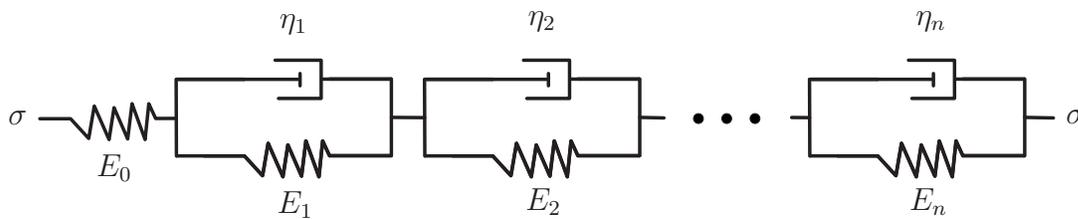


Abbildung 3.8: Generalisiertes Kelvin-Voigt-Modell

### 3.2.4 Fraktionale Ableitungen

Die in Abschn. 3.2 aufgeführten Schaltungen bestanden alle aus zwei Grundelementen: Federn und Dämpfern. Tatsächlich lässt sich noch ein weiteres, verallgemeinertes (fraktionales) Element definieren, welches zwischen den Stoffgesetzen der Feder und des Dämpfers interpoliert. Es gibt einige Arbeiten [48, 41], in denen für Schwingungsprobleme gezeigt wird, dass die Substitution von Newtonschen Dämpfern durch fraktionale Grundelemente die Gesamtschaltung deutlich vereinfachen können.

Der Vergleich von Gl. (3.2) und Gl. (3.3) verdeutlicht, dass der Unterschied zwischen dem Newtonschen und dem Hookeschen Gesetz in der Ordnung der Dehnungsableitung und der Konstanten liegt:

$$\sigma = E \frac{d^0}{dt^0} \varepsilon \quad \text{und} \quad \sigma = \eta \frac{d^1}{dt^1} \varepsilon \quad (3.10)$$

Das Stoffgesetz des fraktionalen Elements ist wie folgt definiert [48]:

$$\sigma = p \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \varepsilon \quad (3.11)$$

In Gl. (3.11) gibt der Parameter  $\alpha$  die Differentiationsordnung an. Ist  $\alpha = 0$  oder  $\alpha = 1$  ergeben sich jeweils die Stoffgesetze der Feder und des Dämpfers, wie in den Gln. (3.10) veranschaulicht wird.

### 3.2.4.1 Definition fraktionaler Ableitungen

Eine mögliche Definition der fraktionalen Ableitung lässt sich aus der Definition der fraktionalen Integration gewinnen [49]. Den Startpunkt bildet die Formel nach Cauchy für wiederholte Integration:

$$I^n \varepsilon(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} \varepsilon(\tau) d\tau \quad (3.12)$$

In Gl. (3.12) steht die Fakultät von  $n$  für die Häufigkeit der Wiederholung und kann zunächst nur ganzzahlig sein. Diese Fakultätsfunktion lässt sich jedoch mithilfe der Gammafunktion  $\Gamma$  verallgemeinern. Außerdem wird  $n$  durch die fraktionale Integrationsordnung ersetzt:

$$I^\alpha \varepsilon(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \varepsilon(\tau) d\tau \quad (3.13)$$

Diese Definition erlaubt somit die gebrochenzahlige Integration und dient als Basis für die Definition der fraktionalen Ableitung. Durch die Kombination des fraktionalen Integrationsoperators  $I^\alpha$  und eines gewöhnlichen Differentialoperators  $\frac{d^m}{dt^m}$  ist der fraktionale Operator der Differentiation definierbar. Die Reihenfolge der Ausführung der Integration und der Differentiation spielt dabei eine wesentliche Rolle.

Die Gl. (3.14) und (3.15) stellen beide möglichen Varianten dar:

$$D^\alpha = \frac{D^m}{Dt^m} D^{m-\alpha}, \quad \text{mit } m = \lceil \alpha \rceil \quad (3.14)$$

$$D^\alpha = D^{m-\alpha} \frac{D^m}{Dt^m} \quad (3.15)$$

Die Anwendung von Gl. (3.14) auf Gl. (3.13) liefert letztendlich die Riemannsche Definition einer fraktionalen Ableitung [49]. Die Verwendung der invertierten Reihenfolge der Ausführung aus Gl. (3.15) führt zur Definition nach Caputo [49].

### 3.2.4.2 Eigenschaften fraktionaler Ableitungen

Zwischen beiden Definitionen bestehen zwei wesentliche Unterschiede.

1. Für den Fall, dass  $f(x) = const$  ist, divergiert die Ableitung nach Riemann, während die Ableitung nach Caputo, wie von gewöhnlichen Ableitungen bekannt, Null liefert [49].
2. Der nächste wichtige Unterschied ist relevant für die praktische Anwendbarkeit. Die Randbedingungen von Differentialgleichungen im Sinne von Riemann sind ebenfalls fraktionaler Natur, während die nach Caputo gewöhnlich sind [50]. Randbedingungen stellen immer physikalische Größen, die eventuell im Experiment gemessen werden können, dar. Deshalb sollten diese interpretierbar und vergleichbar mit der Realität sein.

Im Vergleich zur gewöhnlichen Ableitung muss die fehlende Lokalität des Operators hervorgehoben werden. Im Gegensatz zu dieser ist es nicht möglich, aus der direkten Nachbarschaft eines Punktes die Ableitung zu bestimmen. Es muss immer die gesamte Vorgeschichte der Belastung mit in die Berechnung einbezogen werden. Fraktionale Differentialgleichungen gewichten Ereignisse in der weiteren Vergangenheit allerdings geringer als Ereignisse in der näheren Vergangenheit. Dieser Umstand wird in der Literatur mit dem verblassenden Gedächtnis (fading memory) assoziiert [41, 51]. Genau in diesem Verhalten liegt die Stärke und die Schwäche solcher Differentialgleichungen. Gewünscht ist dieses Verhalten, weil es in der Realität -gerade bei Kunststoffen- auch beobachtet wird. Negativ ist dieses Verhalten bezüglich des rechnerischen Aufwandes zu sehen, da mit fortlaufender Anzahl berechneter Funktionswerte der Rechenaufwand

in den folgenden Schritten immer weiter steigt. Es gibt Ansätze, um den Rechenaufwand zu reduzieren. Zu diesem Zweck wird ein Gedächtnislängenvektor eingeführt, der festlegt, ab welchem Zeitpunkt vergangene Funktionswerte vernachlässigbar sind [52].

### 3.2.4.3 Lösung des Anfangswertproblems

In [52] sind einige Lösungsmethoden für solche Differentialgleichungen, wie z.B. die Laplace-Transformation, die Mellin-Transformation oder Potenzreihenentwicklung aufgezeigt. Probleme, die sich möglicherweise daraus ergeben, sind, dass sie nicht universal einsetzbar sind, Linearität und/oder konstante Koeffizienten voraussetzen oder dass sie nicht zu formulieren sind.

Eine weitere Möglichkeit zur Lösung kann aus [53] entnommen werden. Hier wird ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren [54] zur numerischen Integration entwickelt, das dem gewöhnlicher Differentialgleichungen ähnlich ist. Das nachlassende Gedächtnis wird durch eine Gewichtsfunktion dargestellt.

In dieser Arbeit wird ein geringfügig anderes Verfahren aus [50] verwendet. Angenommen sei eine Differentialgleichung nach Caputo

$$D^\alpha \varepsilon(t) = f(t, \varepsilon(t)), \quad (3.16)$$

wobei

$$D^j \varepsilon(t=0) = \varepsilon_0^j \text{ mit } (j = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

die Anfangswerte sind. Von einem bekannten Funktionswert  $\varepsilon_k$  wird der Funktionswert des nächsten Schrittes  $\varepsilon_{k+1}^P$  mithilfe der Eulermethode abgeschätzt:

$$\varepsilon_{k+1}^P(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} \varepsilon_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(t_j, \varepsilon_j). \quad (3.17)$$

Der obere Index  $P$  steht für Prädiktor und zeigt an, dass dieser Wert nur als erste Näherung für den korrigierten Wert fungiert. Unter Verwendung der Trapezformel wird in einer oder mehreren Iterationen der finale Funktionswert für den Zeitschritt bestimmt

$$\varepsilon_{k+1}^C(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} \varepsilon_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(t_j, \varepsilon_j) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, \varepsilon_{k+1}^P) \right). \quad (3.18)$$

Die Variable  $h$  ist die Schrittweite und die Größen  $a$  und  $b$  sind jeweils die Gewichte des Korrektors und des Prädiktors. Nach [50] werden die Gewichte wie folgt definiert:

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha)$$

und

$$a_{j,k+1} = \begin{cases} \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} (k\alpha + 1 - (k-\alpha)(k+1)^\alpha) & , j = 0 \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} ((k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1}) & , 1 \leq j \leq k \\ \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} & , j = k+1 \end{cases}$$

#### 3.2.4.4 Fraktionales Standard-Modell

Im Folgenden soll das Standardmodell aus Abb. 3.5 mithilfe eines fraktionales Elements modifiziert und dann für das Kriechproblem angewendet werden. Dabei wird der Dämpfer durch das fraktionale Element ausgetauscht (Abb. 3.9).

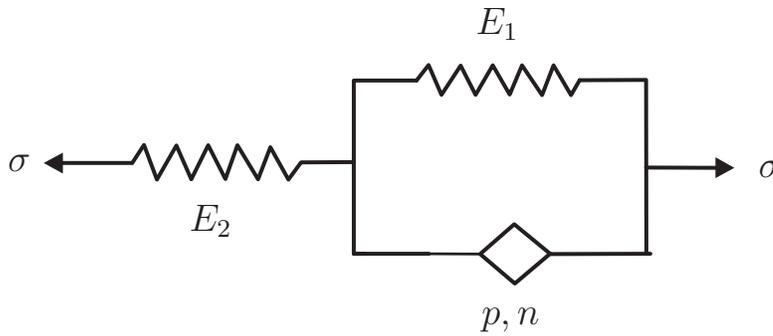


Abbildung 3.9: Standardmodell mit fraktionalem Element

Dieses Modell lässt sich durch die fraktionale Differentialgleichung

$$D^n \varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{B} + \frac{A}{B} D^n \sigma(t) - \frac{C}{B} \varepsilon(t) \quad (3.19)$$

mit den Koeffizienten

$$A = \frac{p}{E_1 + E_2}, \quad B = \frac{pE_2}{E_1 + E_2}, \quad C = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$$

und der Anfangsbedingung

$$\frac{d^0}{dt^0} \varepsilon(t=0) = \frac{\sigma + \sigma A}{B + C}$$

beschreiben.

## 3.3 Ergebnisse

Es wurden die Werkstoffe Ultramid A3K und Ultradur B4500 untersucht. Sie stellen näherungsweise den Werkstoff dar, der die Matrix in den untersuchten Kompositklassen Ultramid A3W Gx und Ultradur B4300 Gx (mit  $x = 2 \dots 6$ ) ist. Die Matrixwerkstoffe sind dennoch nicht identisch mit den als Matrixwerkstoff angenommenen Polymeren. Sie unterscheiden sich durch Schichten und eventuell zusätzliche Stabilisatoren sowie Verarbeitungshilfen. Beide Werkstoffklassen sind relativ steif und geeignet für den technischen Einsatz, z.B. als Werkstoff für Gehäuse, Konsolen und diverse Teile in Kraftfahrzeugen [55, 56].

Die Modellierung des Werkstoffkriechens erfolgte mit rheologischen Ersatzschaltungen, deren Elemente sich zunächst ideal linear verhalten. Es wurde versucht das generalisierte Kelvin-Voigt-Modell und das fraktionale Standard-Modell an experimentelle Daten aus [57] anzupassen.

### 3.3.1 Generalisiertes Kelvin-Voigt-Modell

Für jedes der parallel geschalteten Elemente und der einzelnen Feder aus Abb. 3.8 lässt sich eine Differentialgleichung aufstellen.

$$\dot{\epsilon}_0 = \frac{\dot{\sigma}}{E_0}, \quad \dot{\epsilon}_1 = \frac{\sigma}{\eta_1} - \frac{E_1}{\eta_1} \epsilon_1, \quad \dots, \quad \dot{\epsilon}_n = \frac{\sigma}{\eta_n} - \frac{E_n}{\eta_n} \epsilon_n, \quad \dot{\epsilon} = \sum_{i=0}^n \dot{\epsilon}_i \quad (3.20)$$

Die Differentialgleichungen werden numerisch integriert, da in der Literatur häufig daraufhingewiesen wird, dass sich thermoplastische Polymere nichtlinear elastisch verhalten [38, 45, 9]. Aus diesem Grund wird bewusst auf die Laplace-Transformation verzichtet.

Die Entscheidung über die Anzahl der verwendeten Teilschaltungen wurde während der Modellanpassung an experimentelle Daten getroffen. Dabei gilt es einen Kompromiss zwischen Anpassungsgüte und Performance zu finden. Je umfangreicher die Schaltung, umso besser ist die Anpassungsgüte. Die Kehrseite ist die längere Rechenzeit während der Anpassung und der späteren Anwendung des Modells. Für die Betrachtung des Kriechens im Bereich von  $t = 0 \dots 10^5$  h wurde die Anzahl von zehn Teilschaltungen als Kompromiss gewählt.

Die Anpassung an einen breiter gefassten Spannungsbereich ist mithilfe des linearen Modells weder für Ultramid A3K (vergl. Abb. 3.10) noch für Ultradur B4500 (vergl. Abb. 3.11) möglich.

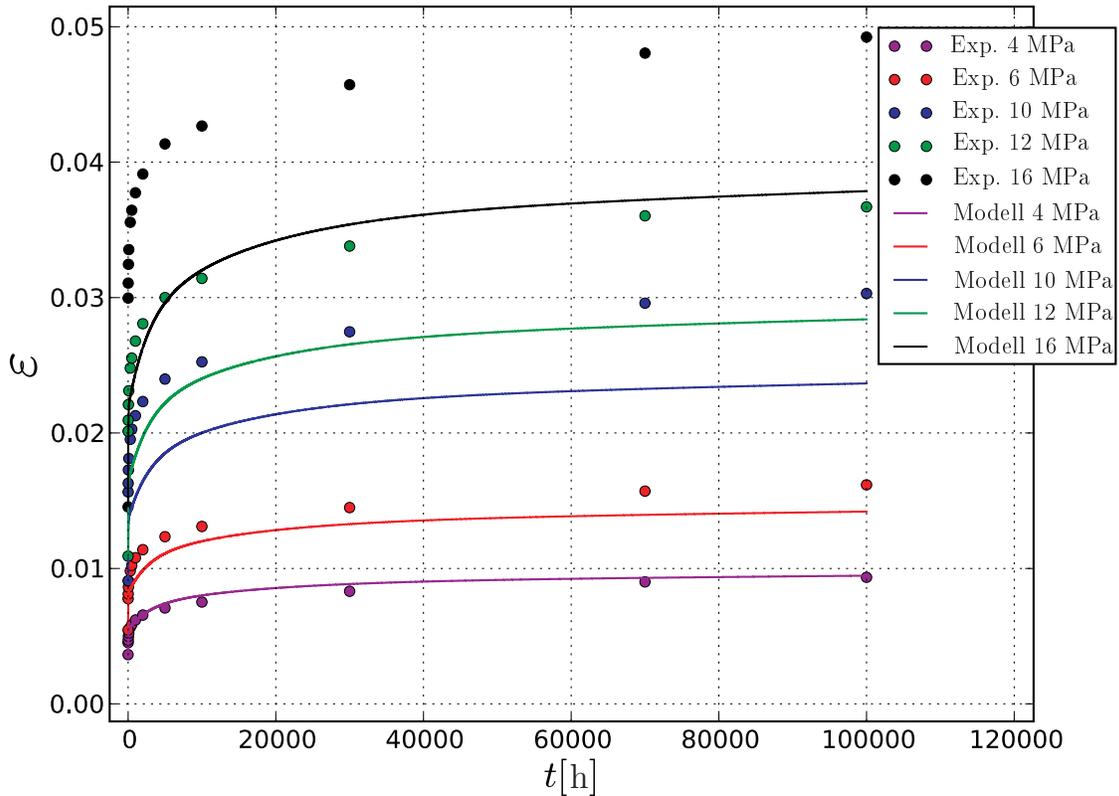


Abbildung 3.10: Generalisiertes Kelvin-Voigt-Modell mit 10 Schaltungen und linearen Dämpfern für Ultramid A3K, Daten aus [57]

Die direkte Anpassung des linearen Modells an einen einzelnen Kriechversuch mit konstanter Spannung ist mithilfe der Fehlerquadratmethode und einschlägiger Optimierungsalgorithmen [58, 59] prinzipiell möglich. Die experimentellen Daten liegen dabei zunächst aber nur sehr inhomogen bezüglich der Zeitachse verteilt vor. Das bedeutet, dass im Anfangsbereich relativ viele Punkte, die in die Minimierung einbezogen werden, vorliegen und im Endbereich relativ wenig. Dies führt immer zu einer überproportionalen Gewichtung der Daten bei geringeren Zeiten während der Optimierung. Das Resultat daraus ist, dass die Kurvenanpassung auf dem direkten Weg nicht zufrie-

denstellend funktioniert. Daher wurden Punkte für die Anpassung künstlich erzeugt. Zuerst wurde eine Splinedarstellung der Kurven bestimmt. Innerhalb des Splineintervalls ist es nun möglich beliebig viele Punkte mit beliebiger Verteilung bezüglich der Zeit zu erzeugen. Mit diesem Werkzeug der zwischenzeitlichen Splineinterpolation gelingt die Anpassung deutlich besser, als nur mit den wenigen ursprünglichen Punkten.

In beiden Fällen wurde die Anpassung für die Kurve mit der geringsten Spannung durchgeführt und es wurde dieselbe Verteilung von künstlichen Datenpunkten auf der Zeitachse gewählt. Die Güte der Anpassung ist im Fall des Ultramid A3K jedoch besser als für das Ultradur B4500. In Abb. 3.11 wird die tatsächliche Kriechdehnung für die geringste Spannung leicht überschätzt. Möglicherweise könnte durch eine höhere Dichte von Punkten im Endbereich die Überschätzung verringert werden, was aber nicht weiter untersucht wurde.

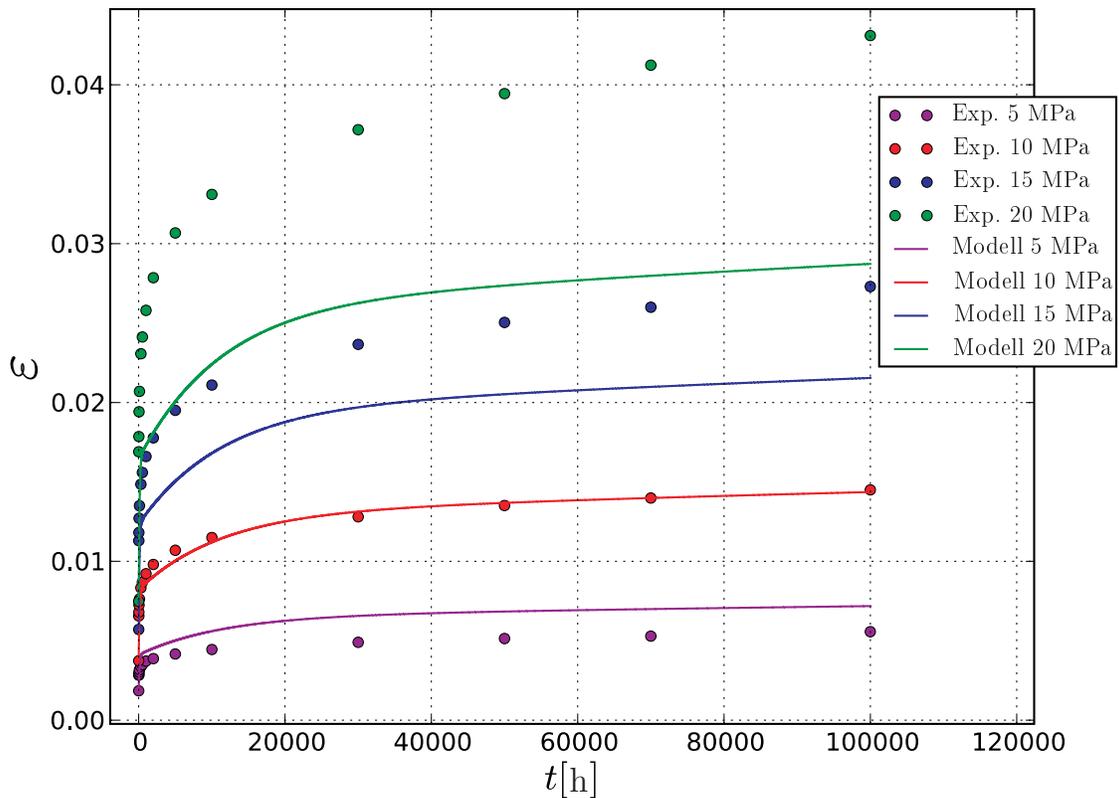


Abbildung 3.11: Generalisiertes Kelvin-Voigt-Modell mit 10 Schaltungen und linearen Dämpfern für Ultradur B4500, Daten aus [57]

Für beide Werkstoffe wird mit steigender Spannung eine erhebliche Unterschätzung der auftretenden Kriechdehnung beobachtet. Die Ursache ist in deren nichtlinearem, viskoelastischen Werkstoffverhalten zu sehen. Die Konsequenz daraus ist, dass für eine bessere Beschreibung nichtlineare Modelle verwendet werden müssen.

### 3.3.2 Fraktionales Modell

Die Differentialgleichung 3.19, welche das fraktionale Standard-Modell beschreibt, wurde mithilfe des Verfahrens aus Abschn. 3.2.4.3 gelöst [50, 53].

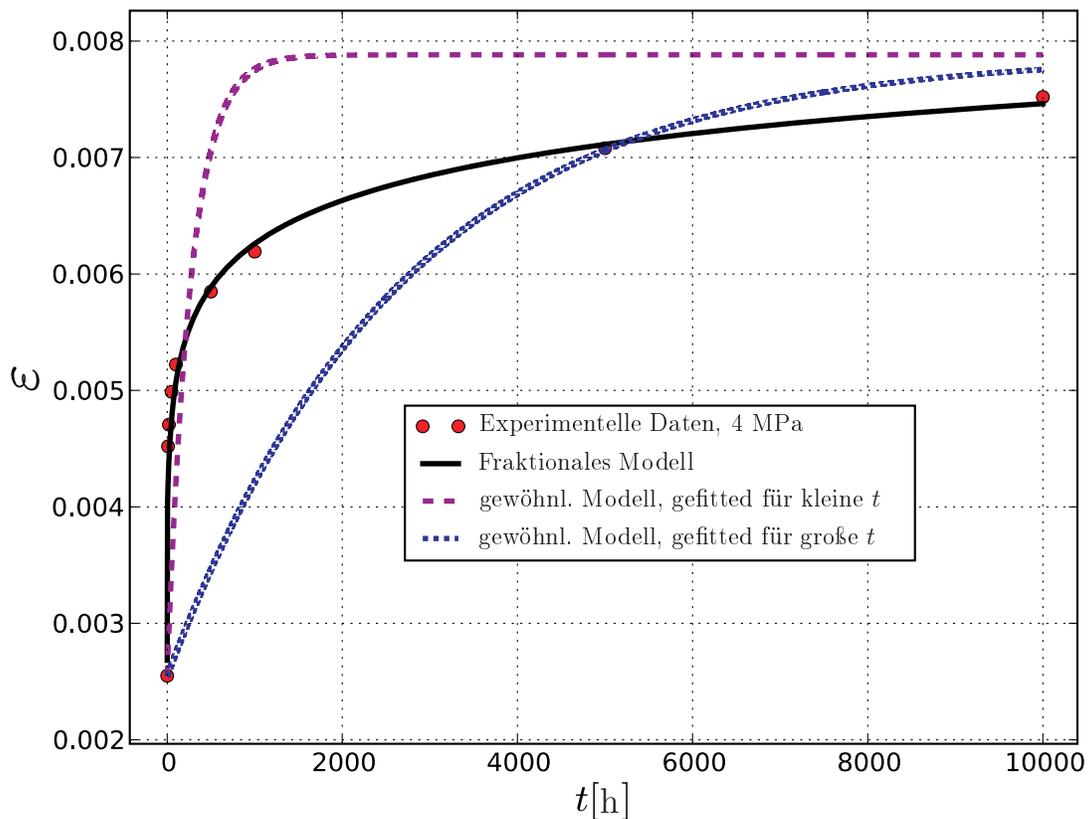


Abbildung 3.12: Fraktionales und gewöhnliches Standard-Modell am Beispiel Ultramid A3K, Daten aus [57]

In Abb. 3.12 ist ein Vergleich der Ergebnisse zwischen dem konventionellen und dem fraktionalem Standard-Modell dargestellt. Das gewöhnliche Modell kann für den dargestellten Zeitbereich nicht an alle Daten angepasst werden. Es ist lediglich möglich dieses Modell zum Beispiel im Anfangs- oder Endbereich an die Daten anzupassen.

Für den restlichen Zeitbereich liefert es in jedem Fall unbrauchbare Ergebnisse. Das fraktionale Modell hingegen besitzt eine wesentlich bessere Adaptivität. Es ist in der Lage, die experimentellen Daten einer einzelnen Spannungskurve über einen deutlich breiteren Zeitbereich ausreichend genau zu modellieren. Wie auch schon beim generalisierten Kelvin-Voigt-Modell, kann auch das fraktionale Modell in dieser Form die werkstoffseitige Nichtlinearität nicht abbilden (siehe Abb. 3.13). Da das Modell an die mittlere Kurve angepasst ist, überschätzt es die Kriechdehnung bei geringerer und unterschätzt sie bei höherer Spannung. Wäre das Modell ebenfalls an die untere Spannung angepasst, würde es alle anderen Kurven analog zum linearen generalisierten Kelvin-Voigt-Modell unterschätzen.

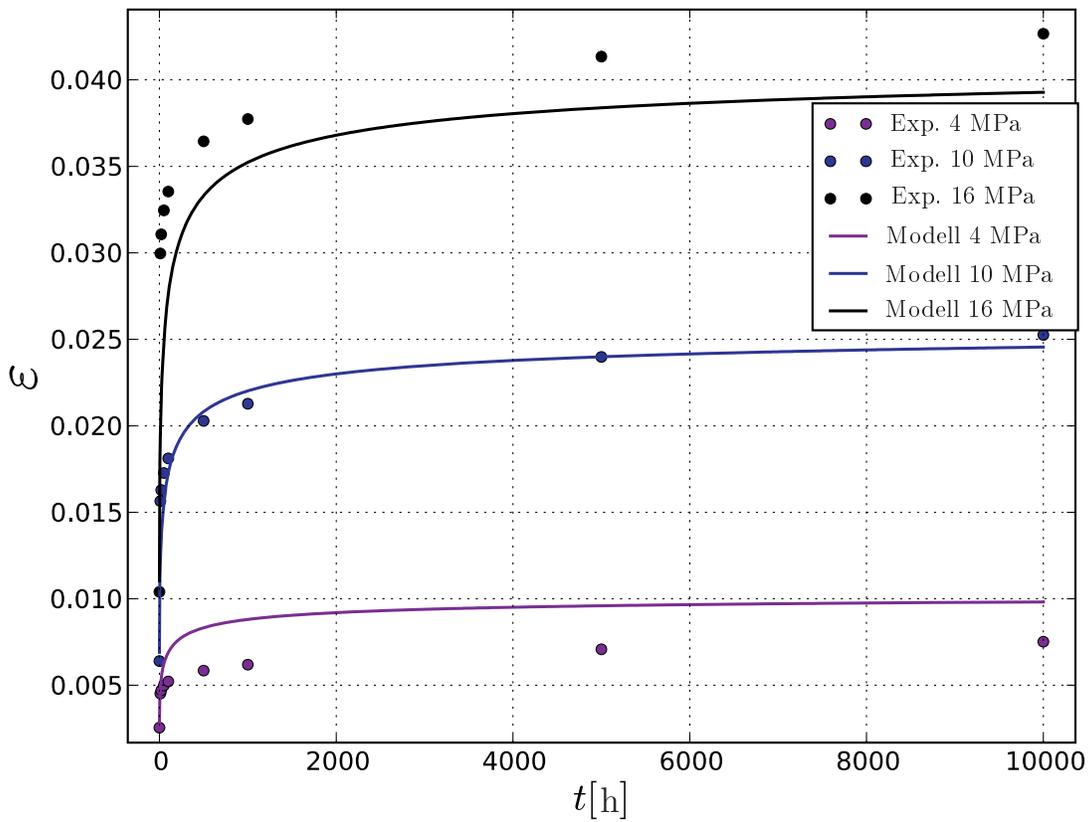


Abbildung 3.13: Lösung des fraktionalen Modells mit konstanten Koeffizienten für Ultradamid A3K, Daten aus [57]

### 3.3.3 Nichtlineares, generalisiertes Kelvin-Voigt-Modell

Da das lineare Modell nur unzureichende Ergebnisse liefert, erscheint es sinnvoll das Modell zu modifizieren. Deshalb wird für die Viskosität aller Dämpfer eine nichtlineare Ansatzfunktion gemäß Gl. (3.21) eingeführt, die die Dämpfungviskosität der linearen Dämpfer aus Abschn. 3.3.1 in Abhängigkeit der anliegenden Dämpferspannung modifiziert. Folglich verhält sich jeder Dämpfer immer in ähnlicher Weise nichtlinear wie die anderen Dämpfer. Durch diese Annahme wird die Prozedur der Anpassung deutlich erleichtert, da die Anzahl der Parameter, die zusätzlich benötigt werden, nur geringfügig steigt.

$$\eta = \eta_{\text{linear}} f_1 e^{-(|\sigma| + f_5) f_2} (f_3 (|\sigma| + f_5))^{f_4} \quad (3.21)$$

Die lineare Anpassung ist trotzdem der Ausgangspunkt für die nichtlineare Anpassung. Das bedeutet, es wurde eine aufeinanderfolgende und keine simultane Anpassung durchgeführt. Die absoluten Beträge in Gl. (3.21) in Kombination mit der Addition von  $f_5$  sind dafür verantwortlich, dass die Funktion überall definiert ist. Der Verlauf des Faktors, mit dem die Viskosität des linearen Dämpfers multipliziert wird, ist in Abb. 3.14 aufgetragen. Da sich dieser Faktor mit steigendem Absolutwert der Dämpferspannung verkleinert, wird strukturviskoses oder scherverdünnendes Verhalten modelliert [47]. Mit zunehmender Belastung des Polymers sinkt dessen Viskosität. Die Ursache für dieses Verhalten sind belastungsinduzierte Veränderungen der Struktur auf der Ebene der Polymerketten. Die Verschlaufungen der einzelnen Ketten werden bei steigender Belastung zunehmend gelöst. Damit sinkt die Widerstandskraft der Ketten, die sie einer Relativbewegung entgegensetzen können und sie können besser aneinander vorbeigleiten.

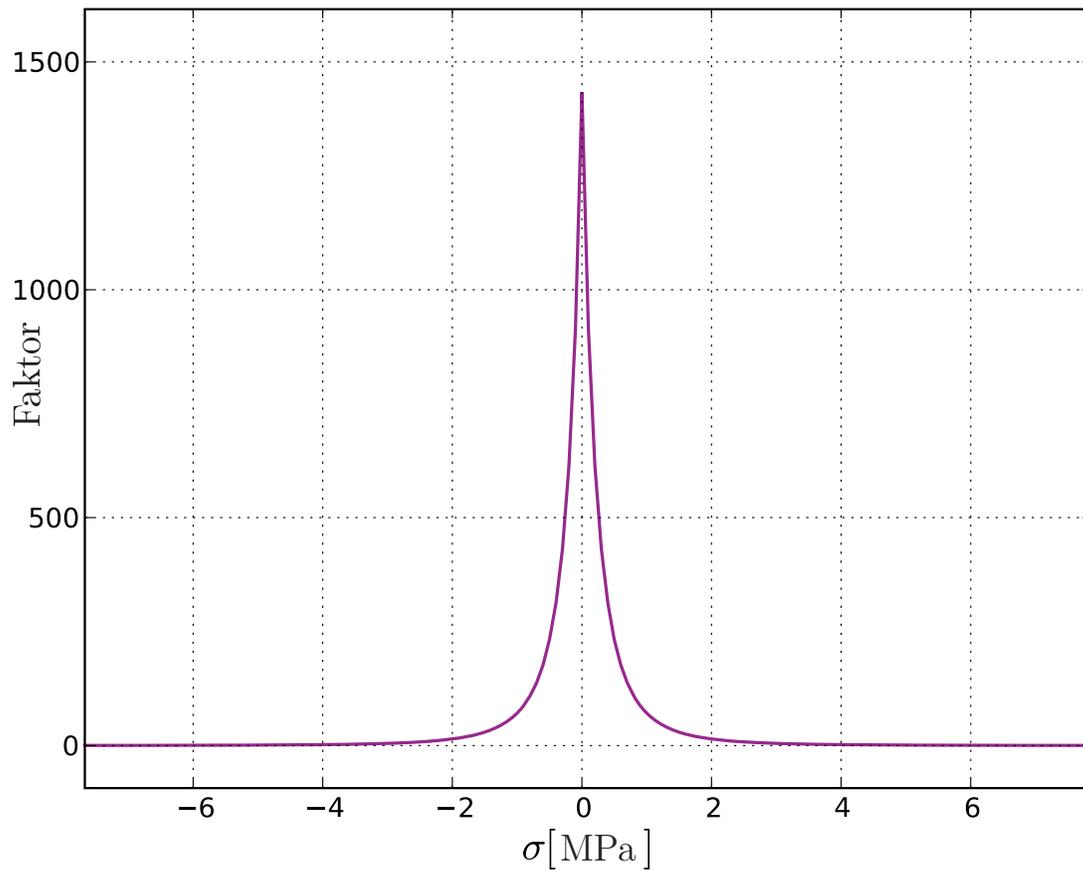


Abbildung 3.14: Darstellung des Faktors, der die Dämpferviskosität in Abhängigkeit der Dämpferspannung verändert (am Beispiel von Ultradur B4500)

In Abb. 3.15 sind die Kriechkurven von Ultramid A3K für den Spannungsbereich von 4 MPa bis 16 MPa aufgetragen. Alle Kurven liegen sehr dicht an den experimentellen Punkten. Die größte Abweichung wird bei der Kurve mit der höchsten Spannung beobachtet. Sie wird leicht überschätzt, wobei der größte Fehler kleiner als 10% ist. Im Vergleich zu Abb. 3.10 lässt sich kein Trend, dass zu höheren Spannungen eine Unterschätzung oder Überschätzung auftritt, erkennen.

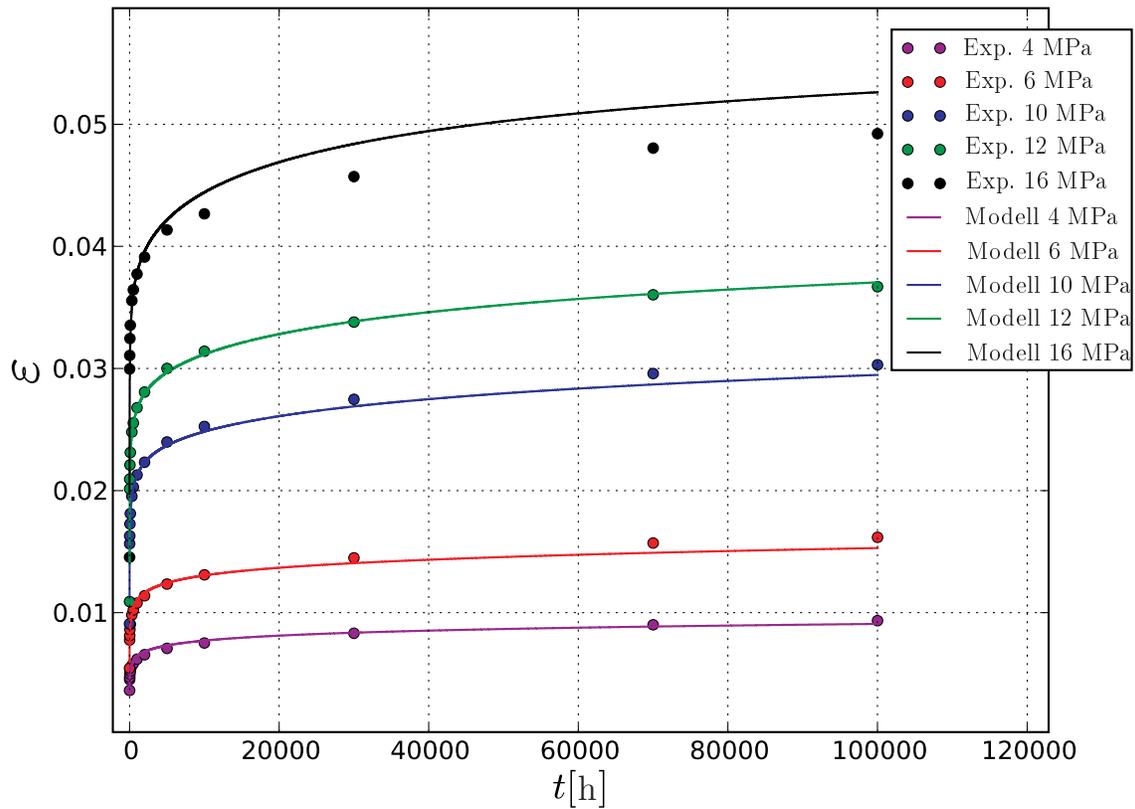


Abbildung 3.15: Nichtlineares, generalisiertes Kelvin-Voigt-Modell für Ultramid A3K, Daten aus [57]

In Abb. 3.16 sind die Kriechkurven von Ultradur B4500 für den Spannungsbereich von 5 MPa bis 20 MPa aufgetragen. Auch für Ultradur B4500 bringt die nichtlineare Modellierung einen deutlichen Zuwachs in der Genauigkeit. Ähnlich wie bereits beim linearen Modell überschätzt das nichtlineare Modell die Kriechdehnung bei der niedrigsten Spannung leicht. Diese leichte Überschätzung bleibt für alle weiteren Kriechkurven erhalten. Ein Trend, dass sie prozentual größer oder kleiner wird, ist ebenfalls wie beim Ultramid A3K nicht zu entdecken. Der maximale Fehler aller Kurven liegt für Ultradur B4500 bei ca. 10%.

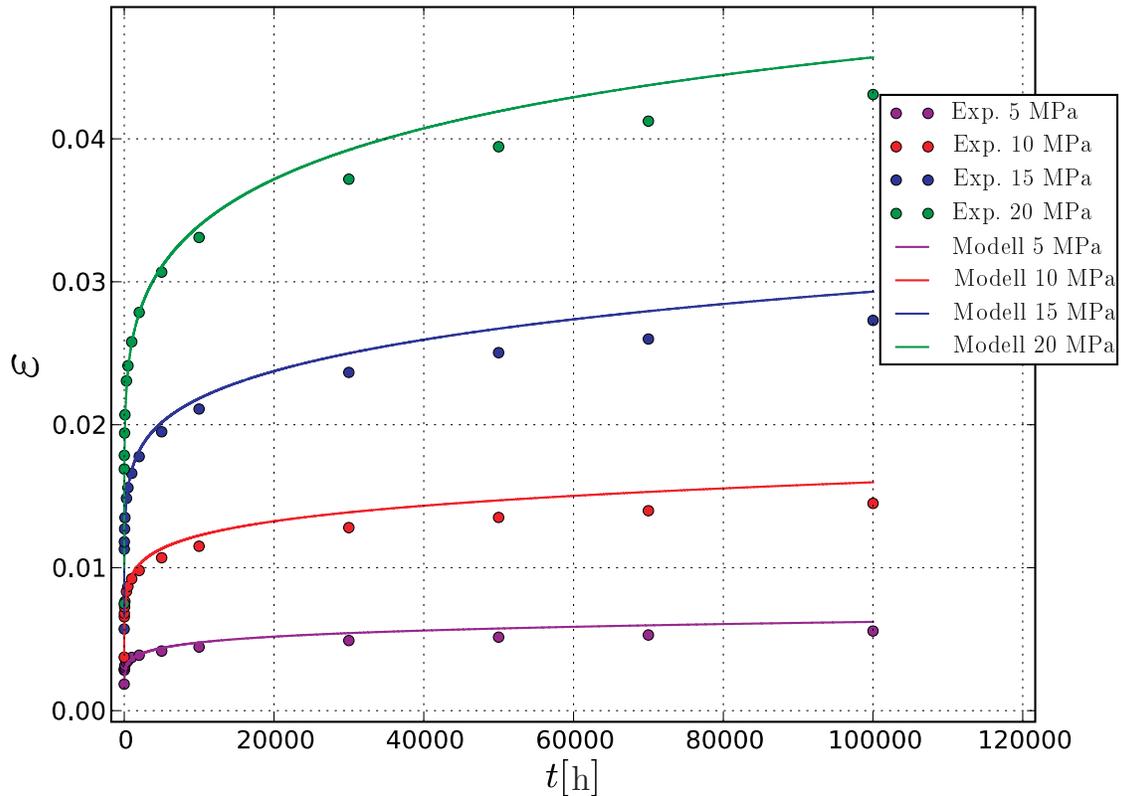


Abbildung 3.16: Nichtlineares, generalisiertes Kelvin-Voigt-Modell für Ultradur B4500, Daten aus [57]

Die nichtlineare Modifizierung bringt für beide untersuchten Werkstoffe eine deutliche Verbesserung in der Güte der Abbildung der experimentellen Werte. Die Abweichung zwischen Experiment und Modell liegt für beide Werkstoffe und alle Kurven bei ca. 10%. Gerade bei Kriechexperimenten ist die Messunsicherheit häufig größer als diese Abweichung. Alle verwendeten Kennwerte und Modellparameter sind in Tab. 3.2 dargestellt.

Tabelle 3.2: Zusammenfassung aller Kennwerte und Daten des generalisierten Kelvin-Voigt-Modells

Kennwerte	Ultramid A3K	Ultradur B4500	Einheit
$E_0$	1100	2600	MPa
$E_1$	2400	2280	MPa
$E_2, E_3$	2200	2090	MPa
$E_4$	2100	1995	MPa
$E_5, E_7, E_8, E_9, E_{10}$	2000	1900	MPa
$E_6$	3800	3610	MPa
$\eta_1$	$6.3 \cdot 10^6$	$2.52 \cdot 10^5$	MPa · h
$\eta_2$	$3.43 \cdot 10^7$	$7.1 \cdot 10^8$	MPa · h
$\eta_3$	$7.12 \cdot 10^4$	$2.34 \cdot 10^7$	MPa · h
$\eta_4$	$6.89 \cdot 10^8$	$1.41 \cdot 10^{10}$	MPa · h
$\eta_5$	$1.843 \cdot 10^{10}$	$5.84 \cdot 10^{10}$	MPa · h
$\eta_6$	$2.02 \cdot 10^{11}$	$3.09 \cdot 10^{10}$	MPa · h
$\eta_7$	$1.0 \cdot 10^{11}$	$1.11 \cdot 10^{11}$	MPa · h
$\eta_8$	$9.23 \cdot 10^{12}$	$3.78 \cdot 10^{12}$	MPa · h
$\eta_9$	$1.94 \cdot 10^{13}$	$6.82 \cdot 10^{12}$	MPa · h
$\eta_{10}$	$2.48 \cdot 10^{14}$	$3.11 \cdot 10^{14}$	MPa · h

### 3.3.4 Nichtlineares, fraktionales Modell

Wie auch beim verallgemeinerten Kelvin-Voigt-Modell ist das lineare, fraktionale Zeuner-Modell nicht in der Lage die werkstofflichen Nichtlinearitäten wiederzugeben. Aus diesem Grund wurde auch hier, analog zu Abschn. 3.3.3, versucht, eine Nichtlinearität einzuführen.

In der Literatur wurde für fraktionale Modelle kein Hinweis auf eine nichtlineare Modifizierung für die Kriechbeschreibung gefunden, weshalb nach einer neuen Formulierung gesucht wurde.

Der fraktionale Parameter  $p$  und die Federsteifigkeit der einzelnen Feder wurden als Funktion der am jeweiligen Element anliegenden Spannung formuliert:

$$p = p_0 \frac{a}{(|\sigma_{\text{fraktional}}| + c)^b} \quad (3.22)$$

$$E_2 = E_{2,0} \frac{f}{(|\sigma| + g)^d} \quad (3.23)$$

Mit dieser Veränderung konnte der eindimensionale Kriechversuch nachgebildet werden. Die erhaltenen Ergebnisse liegen deutlich näher an den experimentellen Daten als mit dem linearen, fraktionalen Modell, siehe Abb. 3.17.

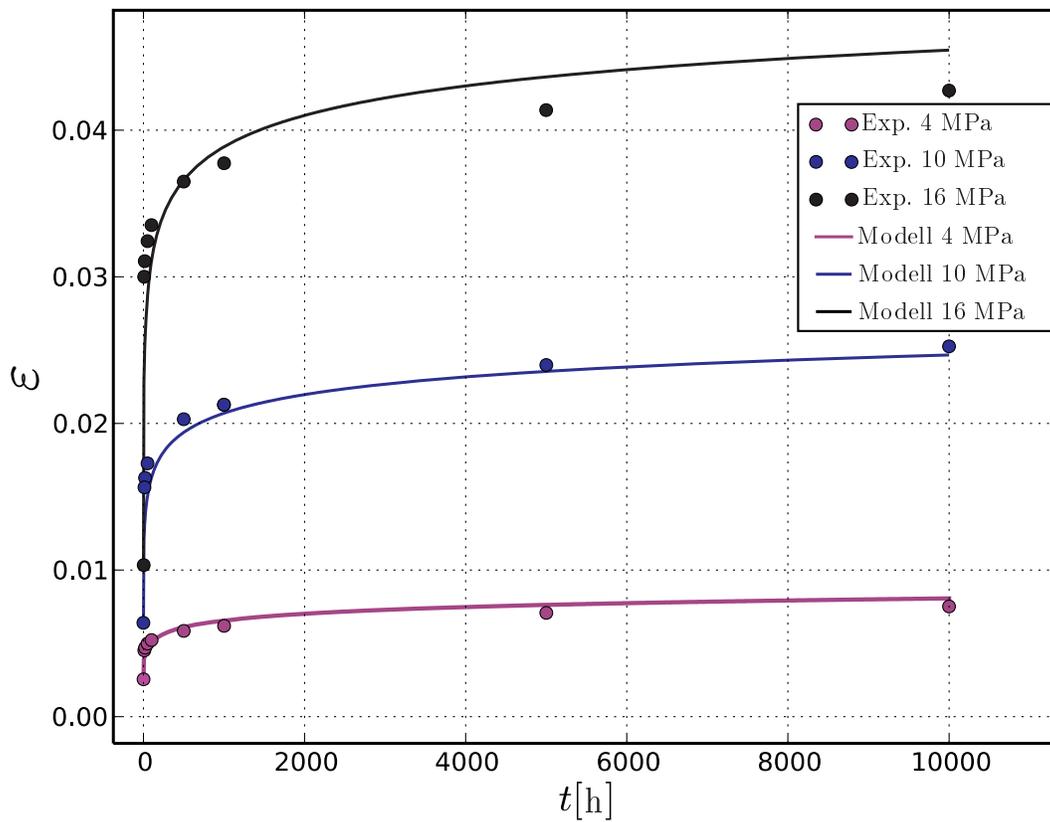


Abbildung 3.17: Nichtlineares, fraktionales Standard-Modell für Ultramid A3K, Daten aus [57]

Die Werte aller verwendeten Parameter sowie die zugehörigen Einheiten sind in Tab. 3.3 für Ultramid A3K zusammengefasst.

Tabelle 3.3: Zusammenfassung der Kennwerte und Einheiten aller Parameter des nicht-linearen, fraktionalen Modells

Parameter	$E_1$	$E_{2,0}$	$\alpha$	$p_0$	$a$	$b$	$c$	$d$	$f$	$g$
Wert	360.2	2971	0.3	3077	2.37	0.52	0.59	0.9	4	0.1
Einheit	MPa	MPa	-	$\frac{\text{Ns}^\alpha}{\text{mm}^2}$	MPa <sup>b</sup>	-	MPa	-	MPa <sup>d</sup>	MPa

Die Verwendung des fraktionalen Grundelementes und die nichtlineare Modifizierung erlauben es, das rheologisch sehr einfache Standard-Modell als Ersatzschaltung zu verwenden. Selbst mit diesem einfachen Modell kann das Kriechverhalten des Kunststoffes gut dargestellt werden. Das Verfahren aus Abschn. 3.2.4.3 ist in dieser Form nur für äquidistante Zeitschritte anwendbar. Durch die Beachtung der vollständigen Vergangenheit aufgrund der fehlenden Nichtlokalität des Differentialoperators steigt der Rechenaufwand dieses Verfahrens sehr schnell. Das bedeutet, es muss mit einer relativ großen, einheitlichen Schrittweite gerechnet werden oder die numerische Integration wird sehr rechenintensiv für höhere Zeiten. Für den ersten Fall mit der relativ großen Schrittweite muss beachtet werden, dass im Anfangsbereich der Rechnung damit ein relativ großer Fehler gemacht wird, da zu Beginn die größten Kriechverzerrungen auftreten.

# 4 Anisotropes Kriechen des Komposites

Die Verwendung der Modelle aus Kap. 3 ist auch für anisotrope Werkstoffe denkbar. Problematisch ist die benötigte Anzahl von Parametern, die selbst im isotropen Fall schon recht groß sein kann. Für den orthotropen Fall steigt sie selbst für einfache Modelle dramatisch an [6]. Der Versuch faserverstärkte Kunststoffe analog zu isotropen Werkstoffen zu modellieren, erscheint vor dem Hintergrund der Abhängigkeit der Eigenschaften sowohl von Zeit, Spannung und Temperatur als auch von der Richtung und dem Grad der Faserorientierung zweifelhaft bis aussichtslos.

## 4.1 Beschreibung des anisotropen Kriechens

Ein alternativer Zugang zum anisotropen Kriechen ergibt sich durch die Betrachtung aus einem anderen Blickwinkel. Auf makroskopischer Ebene ist der Werkstoff homogen mit verschmierten Eigenschaften. Auf mikroskopischer Ebene besteht der Werkstoff aus zwei verschiedenen Konstituenten - Fasern und Polymermatrix. Die Eigenschaften dieser Werkstoffe sind, aus mechanischer Sicht, sehr verschieden. Die Fasern können als rein elastischer, isotroper Werkstoff angenommen werden, die Polymermatrix hingegen zeigt viskoelastisches, isotropes Werkstoffverhalten. An diesem Punkt wird die Frage aufgeworfen, ob sich aus dieser Betrachtung nicht auch für die Beschreibung Vereinfachungen ergeben, die ausgenutzt werden können, um die Modelle überschaubar zu halten. Ausgehend von einem iterativen Berechnungsschema ist es möglich die veränderliche Verbundsteifigkeit  $\mathbf{C}$  in Abhängigkeit der Zeit und Temperatur zu berücksichtigen, indem sie in jedem Iterationsschritt neu, als Funktion der veränderlichen Eigenschaften der Polymermatrix, berechnet wird. Diese Herangehensweise setzt voraus, dass der Spannungstensor, der auf die Matrix wirkt und ein Algorithmus zur

Bestimmung der Verbundsteifigkeit aus den Konstituenten bekannt sind. Unter diesen Umständen kann ein beliebiges viskoelastisches Modell, das für die Matrix Gültigkeit besitzt, zur Modellierung des Komposites verwendet werden - ohne dass zusätzliche Werkstoffkennwerte benötigt werden.

### 4.1.1 Bestimmung der Matrixspannung

Für die Beschreibung des kurzfaserverstärkten Komposites werden einige Grundlagen aus Abschn. 2 sowie das in Abschn. 3.3.3 vorgestellte nichtlineare, generalisierte Kelvin-Voigt-Modell für die Polymermatrix benötigt. Da ausschließlich die Polymermatrix zeitabhängiges Verhalten zeigt, wird angenommen, dass sie für das Werkstoffkriechen im Komposit entscheidend ist.

Ausgangspunkt der Betrachtung ist ein vorliegender Spannungszustand in einem Volumenelement. Innerhalb dieses Elements ist der makroskopische Spannungstensor homogen und der Orientierungszustand der Fasern durch den Orientierungstensor statistisch beschrieben. Im betrachteten Volumenelement lässt sich im ersten Schritt der Spannungstensor  $\bar{\sigma}$  durch die Spannungs-Konzentratoren  $\hat{B}$ ,  $B_f$  und  $B_m$  in die Anteile aufspalten, die die jeweiligen Konstituenten aufnehmen. Für die weitere Betrachtung ist nur der Anteil wichtig, der von der Matrix aufgenommen wird.

$$\sigma_m = \hat{B} \cdot \cdot B_f \cdot \cdot \bar{\sigma} \quad (4.1)$$

$B_f$  und  $\hat{B}$  sind analog zu  $A_f$  und  $\hat{A}$  aus Abschn. 2.2.1 zu bestimmen.

### 4.1.2 Reduzierung des Raumes der Matrixspannung

Da das viskoelastische Modell der Matrix skalarer Natur ist, muss die tensorielle Matrixspannung  $\sigma_m$  ebenfalls auf einen skalaren Wert reduziert werden. Zu diesem Zweck ist es in der Mechanik üblich eine Vergleichsspannung  $\sigma_{eq}$  zu bilden. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten, die sich nach dem mechanischen Verhalten des betrachteten Werkstoffes richten [51]. Da die untersuchten Kunststoffe eher duktilen als spröden Charakter haben, wird die Vergleichsspannung nach von Mises verwendet:

$$\sigma_{eq, \text{vonMises}} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} \cdot \cdot \mathbf{s}} \quad (4.2)$$

Konsequenzen, die sich aus der Verwendung der Vergleichsspannung nach von Mises ergeben, sind:

- Zug-Druck-Insensitivität
- hydrostatische Spannungszustände tragen nicht zum Kriechen bei
- isotropes Werkstoffverhalten

### 4.1.3 Effektive Matrixspannung

Es ist von großer Bedeutung hervorzuheben, dass die so bestimmte Spannung der Matrix homogen in dem betrachteten Volumenelement angenommen wird. Im realen Komposit treten aufgrund der Heterogenität des Werkstoffes auf der Mikroebene Spannungskonzentrationen auf. Nah an den Fasern, besonders an deren Enden (bei unidirektionaler Orientierung und gleichzeitigem Zug), wird die Matrix besonders stark beansprucht. Für das Werkstoffkriechen spielen diese Spannungskonzentrationen eine große Rolle. Da sich die Polymermatrix nichtlinear viskoelastisch verhält, leisten höher beanspruchte Regionen eines Volumenelementes einen überproportional größeren Beitrag zum Kriechen als geringer beanspruchte. Da der Spannungszustand der Matrix nur gemittelt berechnet werden kann, wird dieser Spannungsanteil der Matrix das Kriechen des Komposites immer unterschätzen. Aus diesem Grund muss eine effektive Matrixspannung bestimmt werden. Zu diesem Zweck wird die mittlere Matrixspannung mit einem Faktor multipliziert. Dieser Faktor beschreibt das Maß der Spannungsüberhöhung und hängt theoretisch ab von:

- der Form der Fasern
- dem Orientierungszustand der Fasern
- dem Verhältnis der E-Moduln [60]

In [61] wurde numerisch mithilfe der BEM die Größe und Häufigkeit von überhöhten Spannungen an der Grenzfläche zwischen Fasern und Matrix untersucht. Die Ergebnisse für gewöhnliche Kurzfasern sind in Abb. 4.1 dargestellt. Diese Ergebnisse erlauben zwar keine Aussage über die Größe und Häufigkeit von Elementen mit überhöhter Spannung im Volumen der Matrix, dennoch geben sie einen wichtigen Anhaltspunkt über die mögliche Höhe des Faktors.

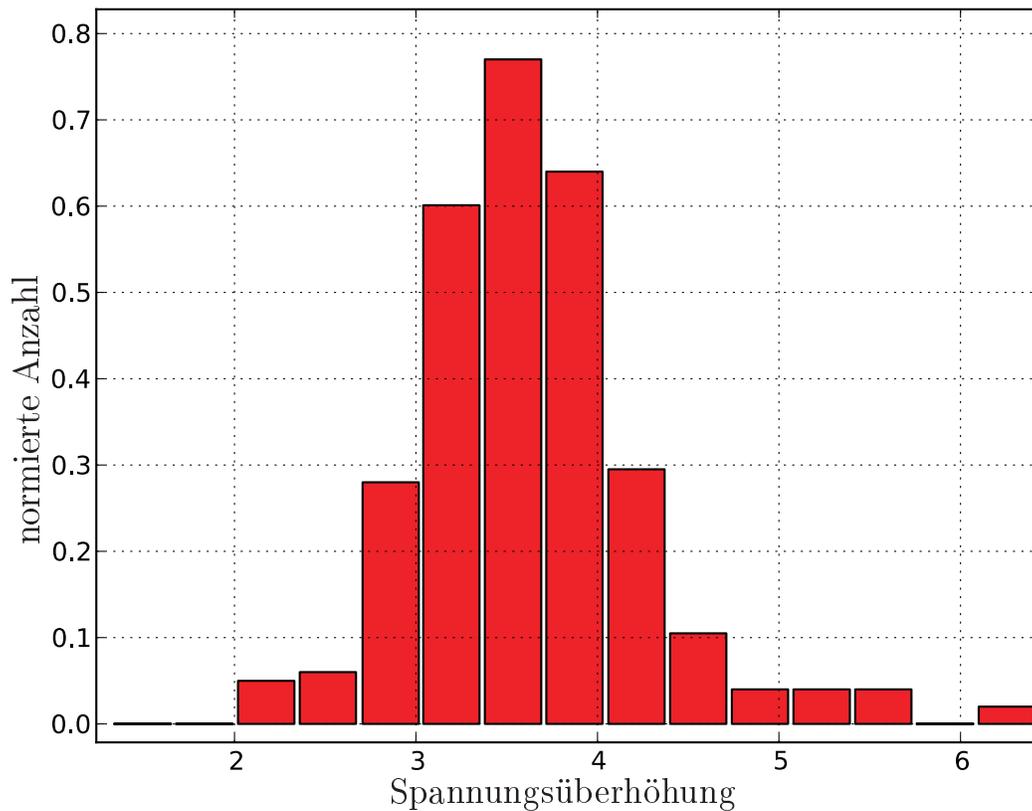


Abbildung 4.1: Häufigkeit der Spannungsüberhöhung bei unidirektional orientierten Fasern nach [61]

Unabhängig von der Untersuchung in [61] wurde in dieser Arbeit der Überhöhungsfaktor durch ein iteratives Vorgehen bestimmt. Dazu wurde der komplette Algorithmus zur Simulation des Zug-Kriechversuches angewandt, wobei die Matrixspannung jeweils mit diesem Faktor multipliziert wurde. Die Differenz zwischen der Modellierung und den experimentellen Daten wurde dabei minimiert.

Für den Fall, dass die Fasern nahezu unidirektional orientiert und die Fasern als Rotationsellipsoide modelliert sind, wird der Faktor damit zu 3,25 bestimmt. Im Vergleich mit den Ergebnissen aus [61] ist der so ermittelte Wert als realistisch einzustufen.

#### 4.1.4 Auswertung des Kriechmodells der Matrix

Die so ermittelte Vergleichsspannung ist die Eingangsgröße für das Kriechmodell der Polymermatrix. Die Integration der Differentialgleichungen (3.20) führt auf eine eindimensionale Dehnung  $\varepsilon_m$ . Mit

$$E_c(t) = \frac{\sigma_{\text{eq,vonMises}}}{\varepsilon_m(t)} \quad (4.3)$$

lässt sich der Kriechmodul  $E_c(t)$  zu dem betrachteten Zeitschritt ermitteln. Die Definition ist analog zu der des elastischen Moduls. Der Unterschied liegt darin, dass die Dehnung  $\varepsilon_m$  zeitlich nicht konstant ist. Damit wird der Kriechprozess der Matrix lediglich als ein Erweichen interpretiert.  $E_c(t)$  ist im Folgenden die Grundlage zur Bestimmung der effektiven Eigenschaften.

#### 4.1.5 Skalenübergang auf die Makroebene

Durch die vereinfachende Interpretation des Kriechens als Erweichen ohne mikroskopische Spannungsumlagerungen eröffnet sich die Möglichkeit bestimmte Prozeduren, die zur Bestimmung effektiver Kennwerte für elastische Werkstoffe geeignet sind, zu verwenden. In einem realen faserverstärkten Werkstoff kommt es jedoch während eines nichtlinearen Kriechprozesses immer zur Umlagerung von Spannungen. Regionen höherer Spannung relaxieren unter Belastung weniger beanspruchter Bereiche. Das führt dazu, dass sich nicht nur die Höhe, sondern auch die Koordinaten der Spannungskonzentrationen verändern.

Die in Abschn. 2.2.4 vorgestellte Mean-Field-Theorie nach Mori-Tanaka [18] ist in verschiedenen Veröffentlichungen schon für die Modellierung relativ kleiner, inelastischer Vorgänge in Kompositen verwendet worden [15, 62, 63]. Diese Verfahrensweise baut wesentlich auf der Arbeit von Eshelby [16] auf, da für die Bestimmung der Spannungs- und Verzerrungskonzentratoren nach Mori-Tanaka, die Konzentratoren nach Eshelby benötigt werden. Ein zentrales Ergebnis von Eshelby war es zu zeigen, dass im elastischen Fall im Inneren eines Einschlusses die elastischen Felder homogen sind. Treten inelastische Prozesse wie z.B. Kriechen auf, führt das dazu, dass die Felder im Inneren der Einschlüsse inhomogen werden. Damit wären eingangs getroffene Annahmen Eshelbys verletzt und das Ergebnis wäre fehlerhaft.

Dennoch soll dieses Konzept die Grundlage für die in dieser Arbeit vorgestellte Modellierung sein. Zur Bestimmung eines vollständigen Satzes von unidirektionalen Kennwerten wird der auf Mori-Tanaka aufbauende Tandon-Weng-Algorithmus [28] verwendet. Der Fehler, der durch diese Modellierung entsteht, soll in Abschn. 4.2 anhand von Kriechsimulationen analysiert werden.

Die Fasern in kurzfaserverstärkten Kunststoffen liegen im Gegensatz zu langfaserverstärkten nicht unidirektional orientiert vor. Daher muss die vorliegende Orientierung der Fasern mithilfe einer Mittelung über alle Orientierungen berücksichtigt werden. Zu diesem Zweck wird die in Abschn. 2.3.2 vorgestellte Orientierungsmittelung unter Verwendung der orthotropen, angepassten Closure verwendet. Das Resultat dieser Prozedur ist der effektive „Steifigkeitstensor“ für das betrachtete Zeitinkrement.

Die wesentlichen Punkte des Algorithmus zur Beschreibung des nichtlinearen anisotropen Kriechens und dessen Einbettung in Abaqus sind in Abb. 4.2 zusammengefasst.

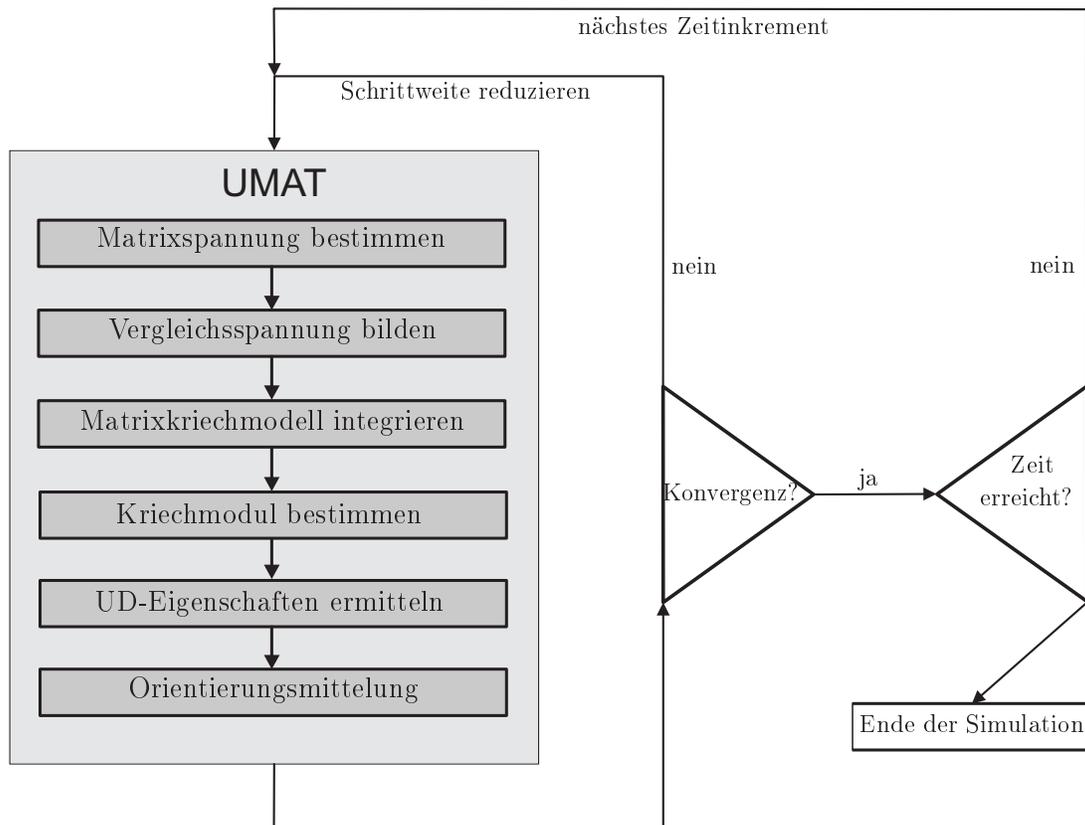


Abbildung 4.2: Ablauf einer Kriechsimulation unter Verwendung des entwickelten Algorithmus

## 4.2 Ergebnisse

Im folgenden Abschnitt sollen die Ergebnisse, die sich mit dieser Prozedur erzielen lassen, für zwei verschiedene Matrixwerkstoffe mit jeweils zwei unterschiedlichen Füllgraden von Glasfasern vorgestellt werden. In diesem Zusammenhang sind zwei Dinge besonders hervorzuheben: Der Orientierungszustand und das Aspektverhältnis der Fasern sind für die Daten [57] nicht bestimmt worden. Aus diesem Grund mussten hierfür, mithilfe numerischer Experimente, Werte approximiert werden.

### 4.2.1 Orientierungszustand im Schulterstab

Für die Bestimmung des Orientierungszustandes wurden dreidimensionale Füllsimulationen eines Schulterstabes mit Moldflow durchgeführt. Über die Dicke wurden an jeder Stelle mindestens sechs Elemente aufgegeben. Die Schmelzeinjektion wurde als Band- und als Punktanguß simuliert. Die Wahl des Angusses hat keinen Einfluss auf die Faserorientierung, zumindest im Bereich der Messlänge (siehe Abb. 4.3). In diesem Bereich wurde der Faserorientierungstensor als weitestgehend konstant mit den Eigenwerten  $\lambda_1 \approx 0.9$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 \approx 0.05$  bestimmt.

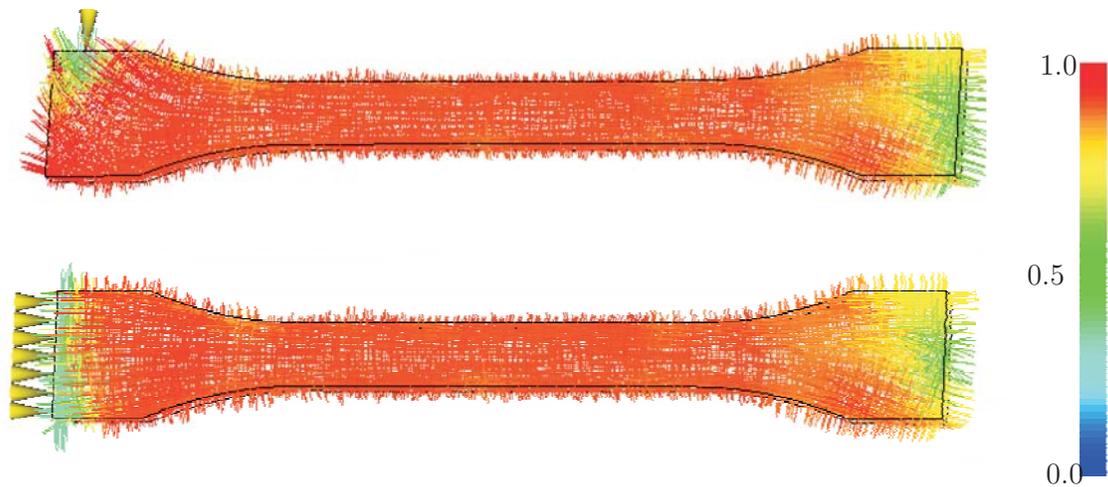


Abbildung 4.3: Füllstudie eines Schulterstabes aus Ultramid A3W G6 zur Ermittlung der Eigenwerte des Tensors der Orientierung der Fasern

### 4.2.2 Bestimmung des Aspektverhältnisses der Fasern

Das Aspektverhältnis der Fasern wurde für den elastischen Fall bei niedriger Spannung aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm bestimmt. Es wurde eine Variantenrechnung mithilfe der bekannten elastischen Kennwerte und dem Orientierungszustand aus Moldflow durchgeführt. Dabei ist das Aspektverhältnis solange verändert worden, bis dieselbe Dehnung im Modell wie im Spannungs-Dehnungs-Diagramm bei der anliegenden Spannung erzielt wurde. Das ermittelte Aspektverhältnis berücksichtigt jedoch keine Verteilung der Faserlängen. Es stellt vielmehr einen effektiven Wert dar, der das Verhalten, das durch die Faserlängenverteilung charakterisiert ist, widerspiegelt. Die so ermittelten Werte entsprechen denen aus [9].

Obwohl die Ergebnisse der beschriebenen Prozedur nah an den durch Schlifffbilder in [9] ermittelten Werten liegen, existieren Differenzen. Mögliche Ursachen dafür können sein:

1. Die visuelle Bestimmung der Dehnung zur zugehörigen Spannung aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm ist fehlerbehaftet. Es wurde dafür zwar der Wert mit der geringsten Spannung ausgewählt, um den Einfluss von Kurzzeitkriechprozessen während der langsamen Messung zu minimieren, dennoch sind diese nicht auszuschließen.
2. Im Modell zur Bestimmung der effektiven Eigenschaften werden Rotationsellipsoide anstelle von zylinderförmigen Fasern verwendet.
3. Die experimentelle Bestimmung des Aspektverhältnisses ist ebenfalls mit Fehlern behaftet. Dabei wird immer eine Verteilung von Fasern verschiedener Länge gefunden, woraus letztendlich ein einziger skalarer Wert gebildet wird.

### 4.2.3 Ultramid A3W G

In Abb. 4.4 ist die Dehnung in Belastungsrichtung für den Zug-Kriechversuch an dem mit 15 Gew.-% gefüllten Ultramid A3W G3 dargestellt und in Abb. 4.5 die für das mit 30 Gew.-% gefüllte Ultramid A3W G6.

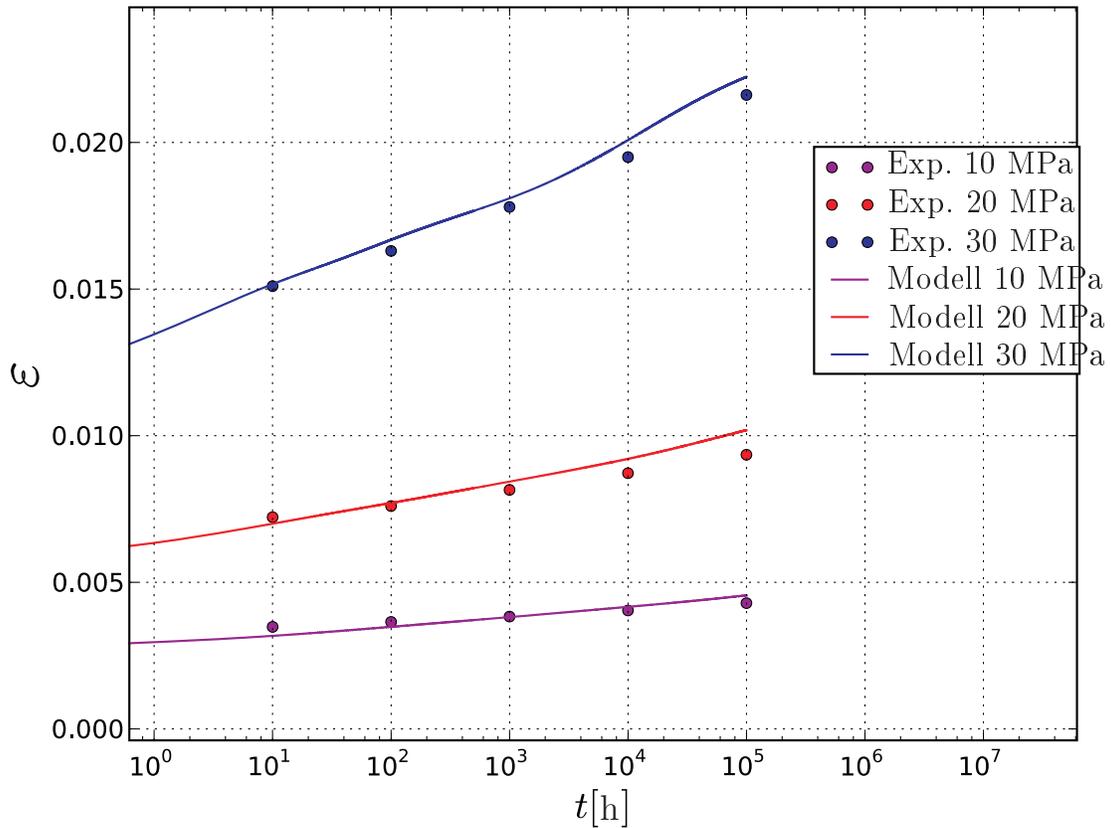


Abbildung 4.4: Zug-Kriechversuch an Ultramid A3W G3 mit  $\frac{l}{d} = 32$ , Daten aus [57]

Das Aspektverhältnis wurde entsprechend der eingangs beschriebenen Verfahrensweise zu  $\frac{l}{d} = 32$  bestimmt. Dieser Wert liegt sehr nah an dem durch Analyse von Schliffbildern in [9] gefundenen Wert von  $\frac{l}{d} \approx 30$ .

Die Abweichung zwischen der Modellierung und den Ergebnissen des Zug-Kriechversuches sind für Ultramid A3W G3 äußerst gering. Sie liegt immer unter 6%. Außerdem ist für diesen Werkstoff kein Trend zu erkennen, ob das Verhalten unterschätzt oder überschätzt wird.

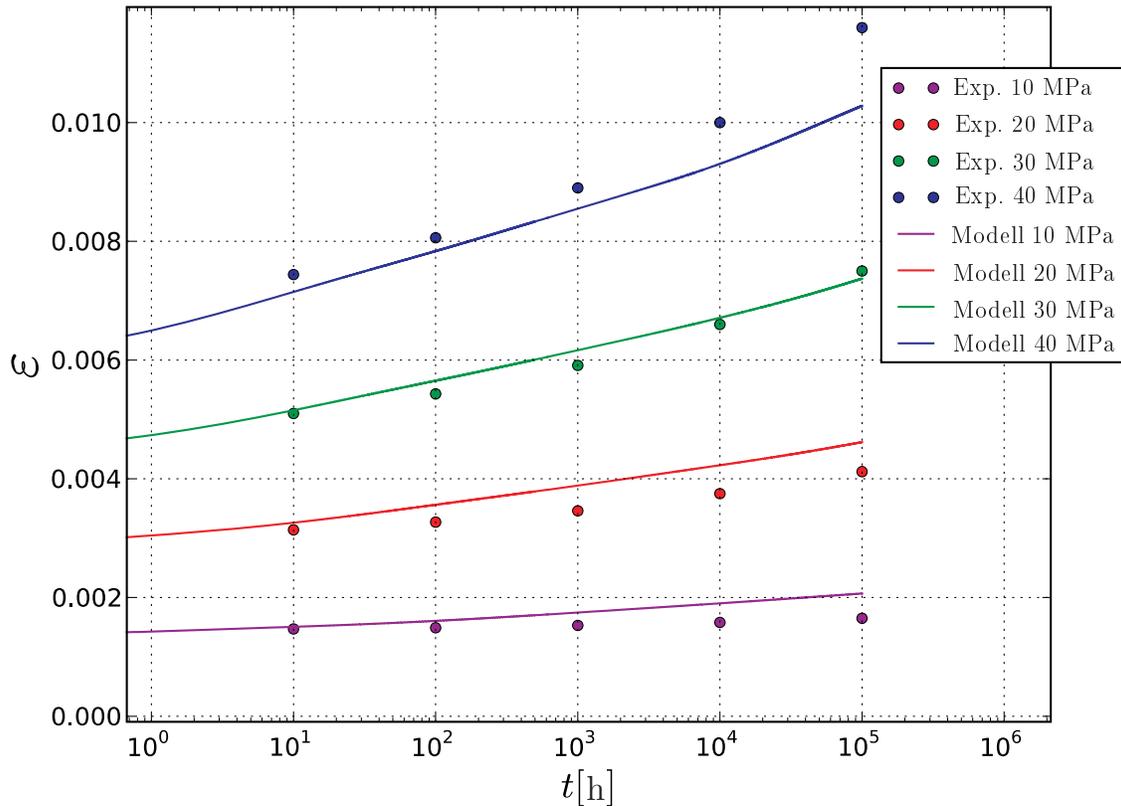


Abbildung 4.5: Zug-Kriechversuch an Ultramid A3W G6 mit  $\frac{l}{d} = 32$ , Daten aus [57]

Bei dem stärker gefüllten Ultramid A3W G6 wird ebenfalls eine gute Übereinstimmung zwischen Modell und Kriechdaten gefunden. Der Unterschied zwischen Modell und Experiment ist allerdings größer als bei Ultramid A3W G3.

Im Vergleich zwischen beiden Werkstoffen zeigt Ultramid A3W G3 erwartungsgemäß ein weniger steifes und weniger kriechresistentes Verhalten, da der Füllgrad maßgeblich die Steifigkeit erhöht und die Kriechneigung reduziert. Die Ursache dafür ist in der Verringerung des Abstandes der Fasern mit steigendem Füllgrad zu sehen. Da jede Faser immer einen bestimmten Einflussbereich hat, in dem sie die Matrix entlastet, wird der Anteil der Matrix an der aufgetragenen Last geringer, je mehr sich die Einflussbereiche überlappen. Die Folge daraus ist, dass die Eigenschaften des Komposites stärker in Richtung Faser verschoben werden.

### 4.2.4 Ultradur B4300 G

In Abb. 4.6 ist die Dehnung in Belastungsrichtung für den Zug-Kriechversuch an dem mit 20 Gew.-% gefüllten Ultradur B4300 G4 dargestellt und in Abb. 4.7 die für das mit 30 Gew.-% gefüllte Ultradur B4300 G6. Auch bei dieser Werkstoffklasse wird wieder beobachtet, dass mit steigendem Fasergehalt die Steifigkeit zunimmt und die Kriechneigung abnimmt. In beiden Fällen wird eine gute Übereinstimmung zwischen Modell und Kriechdaten gefunden.

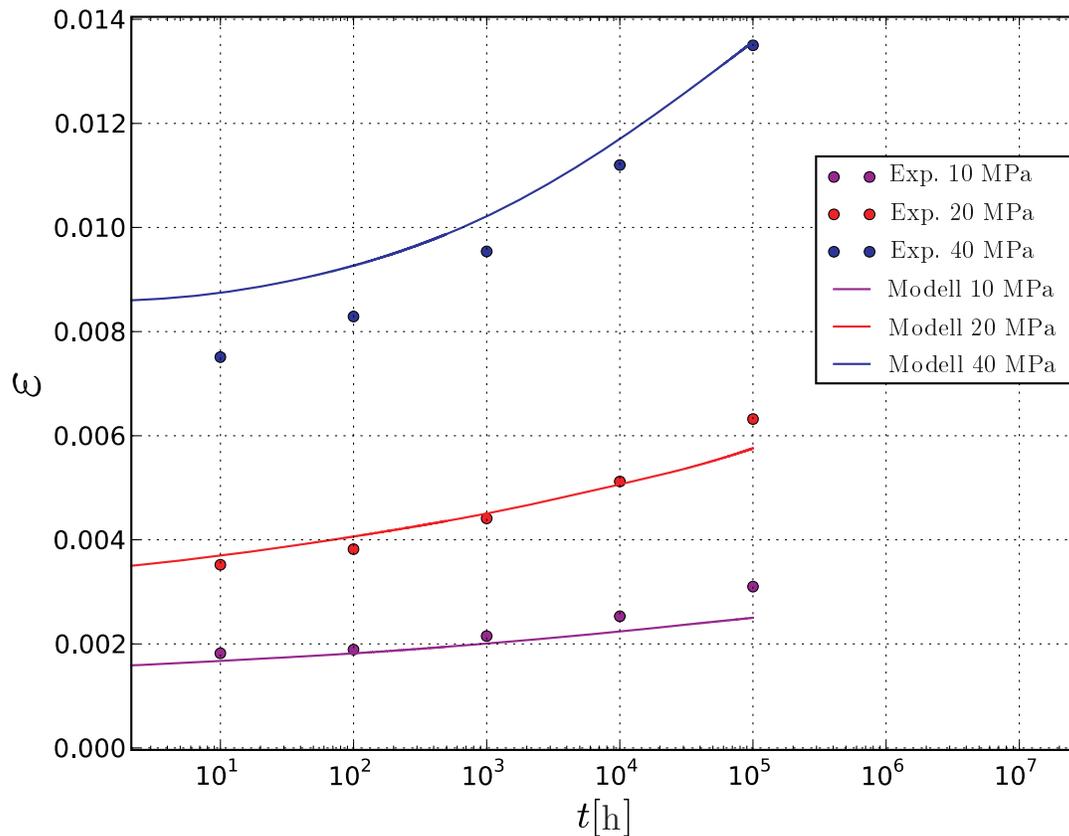


Abbildung 4.6: Zug-Kriechversuch an Ultradur B4300 G4 mit  $\frac{l}{d} = 24$ , Daten aus [57]

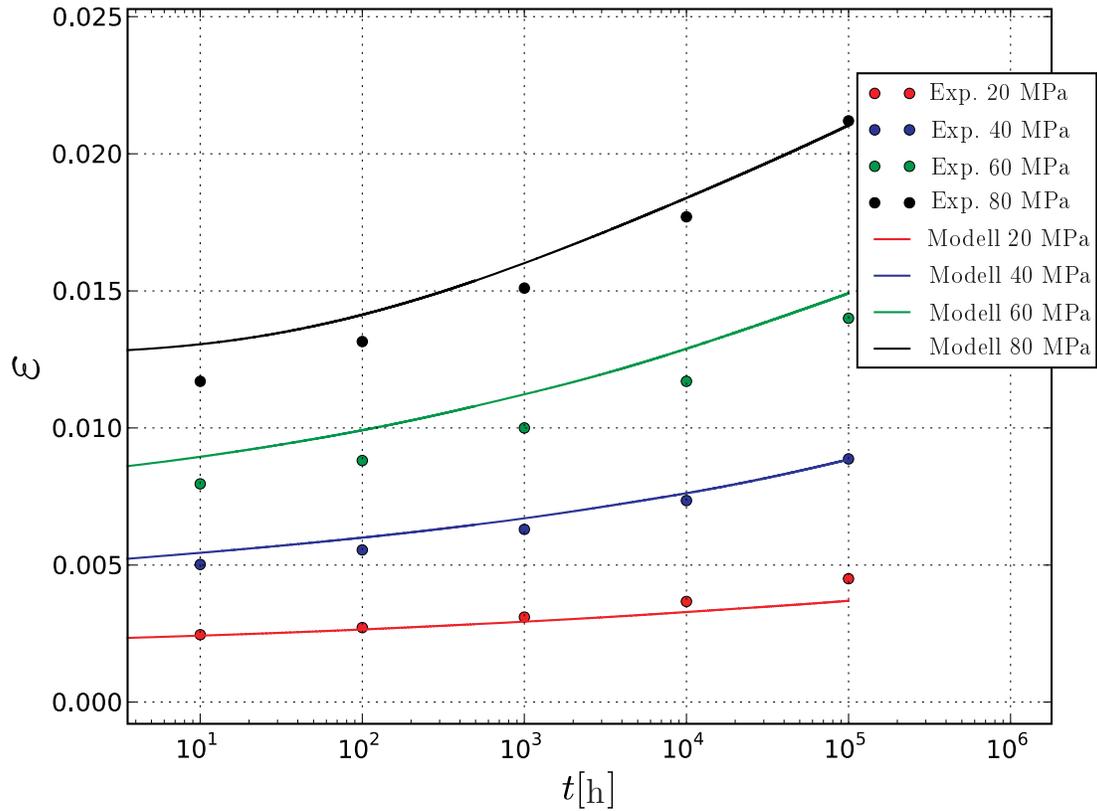


Abbildung 4.7: Zug-Kriechversuch an Ultradur B4300 G6 mit  $\frac{l}{d} = 24$ , Daten aus [57]

Der experimentell in [9] bestimmte Wert des Aspektverhältnisses der Fasern ist mit  $\frac{l}{d} \approx 28$  ca. 15% größer als der hier verwendete Wert, dessen Bestimmung in Abschn. 4.2.2 erläutert worden ist. Mögliche Ursachen dafür sind bereits dort aufgezeigt worden. Zusätzlich zu den bereits diskutierten Ursachen hängt die Faserorientierung stark von der Beanspruchung der Polymerschmelze während der Verarbeitung ab. Da weder die Verarbeitungsbedingungen aus [57] noch von [9] bekannt sind, kann der Einfluss jedoch nicht beurteilt werden.

# 5 Gekoppelte Analyse kurzfaserverstärkter Kunststoffe

Die Berechnung kurzfaserverstärkter Kunststoffbauteile mit einem FEM-Programm setzt verschiedene Dinge voraus:

- Die Faserorientierung aus dem Urformprozess muss ermittelbar sein.
- Die Faserorientierung muss dem Programm zur Strukturanalyse zugänglich sein.
- Es muss ein geeigneter Algorithmus zur Strukturanalyse existieren.

Ohne diese drei Grundvoraussetzungen ist eine verlässliche Aussage über das Verhalten des Bauteils nicht möglich. Es wird deutlich, dass zur gekoppelten Analyse des Spritzgießprozesses und des späteren strukturellen Einsatzes zwei verschiedene, spezialisierte Simulationsprogramme benötigt werden. In diesem Kapitel sollen Aspekte beleuchtet und zum Teil vertiefend behandelt werden, deren Betrachtung für eine Kopplung dieser beiden Simulationen nötig erscheinen.

## 5.1 Spritzgießsimulation

Die Spritzgießsimulation wird durchgeführt, um unter anderem den Faserorientierungszustand im Bauteil abzuschätzen. Die Orientierung der Fasern ist stark abhängig von den Strömungsverhältnissen während des Spritzgießens. Typischerweise lässt sich ein Strömungsprofil, wie in Abb. 5.1 dargestellt, nachweisen. Wird die Formmasse in die Kavität gespritzt, kühlt sie sich an den Rändern am schnellsten ab. Das bedeutet, dass die fließfähige Masse am Rand zuerst einfriert, wohingegen im Inneren noch eine bewegliche, plastische Seele vorliegt. Durch die Bewegung der noch fließfähigen Schmelze relativ zum bereits eingefrorenen Material, kommt es zur Ausbildung eines Scherströmungsfeldes am Rand. An diesen Stellen orientieren sich die Fasern hauptsächlich in

Fließrichtung. Im Bereich der Dehnströmung hingegen orientieren sie sich senkrecht zur Fließrichtung [64]. Eine Besonderheit stellt noch der Anspritzpunkt dar. In diesem Bereich dominiert die Quellströmung, in der sich die Fasern nur wenig orientieren. Dennoch lässt sich eine Hauptorientierungsrichtung feststellen, welche dort senkrecht zur Fließrichtung ausgerichtet ist.

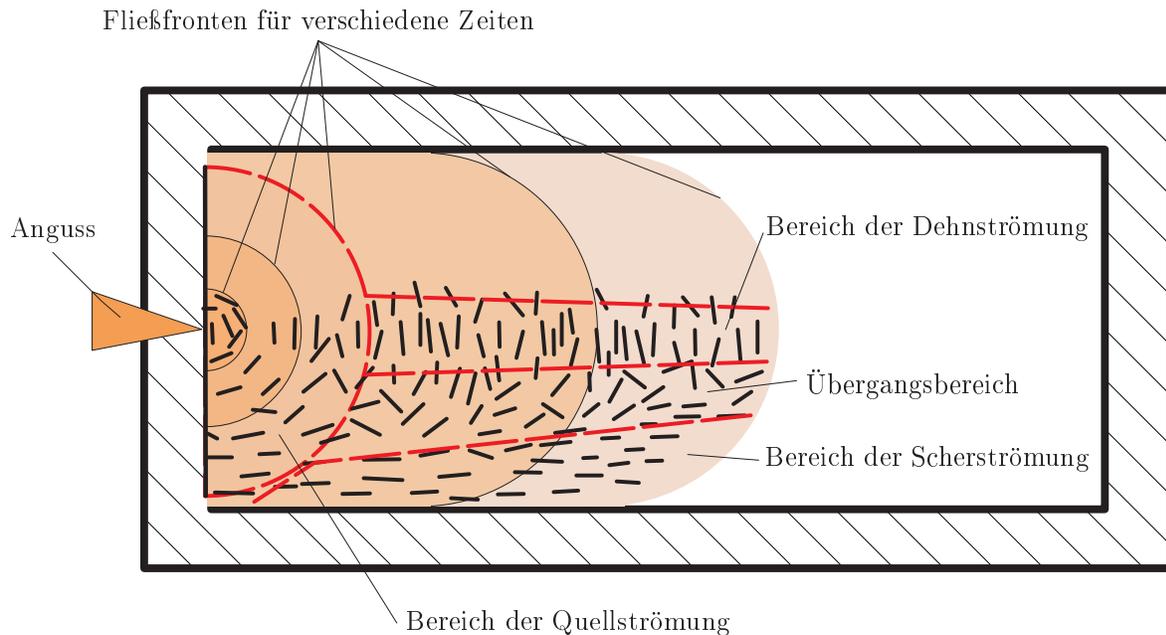


Abbildung 5.1: Strömungsverhältnisse in der Kavität des Werkzeuges mit zugehöriger Faserorientierung

Aufgrund der beschriebenen Abhängigkeit der Faserorientierung vom Strömungsprofil, werden im realen Bauteil über die Dicke verschieden orientierte Schichten gefunden [64]. Aus diesem Grund werden während der Simulation des Spritzgießprozesses mithilfe von zweidimensionalen Mittelflächelementen ebenfalls mehrere Schichten pro Element vorgegeben. Für dreidimensionale Volumenelemente hingegen erfolgt die Berücksichtigung über eine ausreichende Anzahl von Elementen über die Dicke.

## 5.2 Übertragung der Ergebnisse

Im Rahmen des Spritzgießprozesses approximiert Moldflow auch die Orientierung der Fasern. Diese Ergebnisse liegen zunächst nur moldflow-intern vor. Um sie nun der

Strukturanalyse durch Abaqus zugänglich zu machen, müssen sie in geeigneter Form exportiert werden. Nach dem Transfer der Faserorientierung liegt diese über das Bauteil verteilt und lokal aufgelöst vor. Die Hoffnung, die mit einer solchen Kopplung zweier spezialisierter Programme einhergeht, ist es Überdimensionierungen zu vermeiden.

### 5.2.1 Mesh-mapping

Die reine Übertragung der Faserorientierungen der Spritzgießsimulation auf ein exakt gleich vernetztes Modell zur Strukturanalyse ist möglich, hat aber den Nachteil, dass die verwendeten Elemente der Spritzgießsimulation in der Regel ungeeignet für eine Strukturanalyse sind. Deshalb ist es vorteilhaft, wenn die erhaltenen Ergebnisse der Spritzgießsimulation auf ein Netz, das für die Strukturanalyse optimiert ist, übertragen werden. Es sollte deshalb ein Algorithmus verwendet werden, der die verschiedenen Netze übereinander legt und den Elementen zur Strukturanalyse, entsprechend ihrer relativen Lage, Eigenschaften überträgt. Zu diesem Zweck wird die Mesh-mapping-Prozedur durchgeführt. Diese besteht immer aus zwei Schritten:

1. Zuordnung der Abaqus-Knoten zu Moldflow-Elementen
2. Mittelung der Eigenschaften über alle Abaqus-Knoten eines Elementes

#### *Mittelung der Eigenschaften*

Die Eigenschaften eines Abaqus-Elementes, dessen relative Lage zum Moldflow-Netz bekannt ist, lassen sich durch eine Mittelungsprozedur, wie sie in Abb. 5.2 an zwei Beispielementen durchgeführt wird, berechnen. Diese einfache Mittelung ist prinzipiell einem Vergleich der Schnittmengen der Elemente zueinander und deren Mittelung unterlegen. Dennoch ist der Fehler dieser Prozedur sehr gering, solange keine großen Unterschiede der Eigenschaften in benachbarten Elementen vorliegen. Dies sollte ohnehin vermieden werden, da sonst das FE-Netz zu grob gewählt wäre.

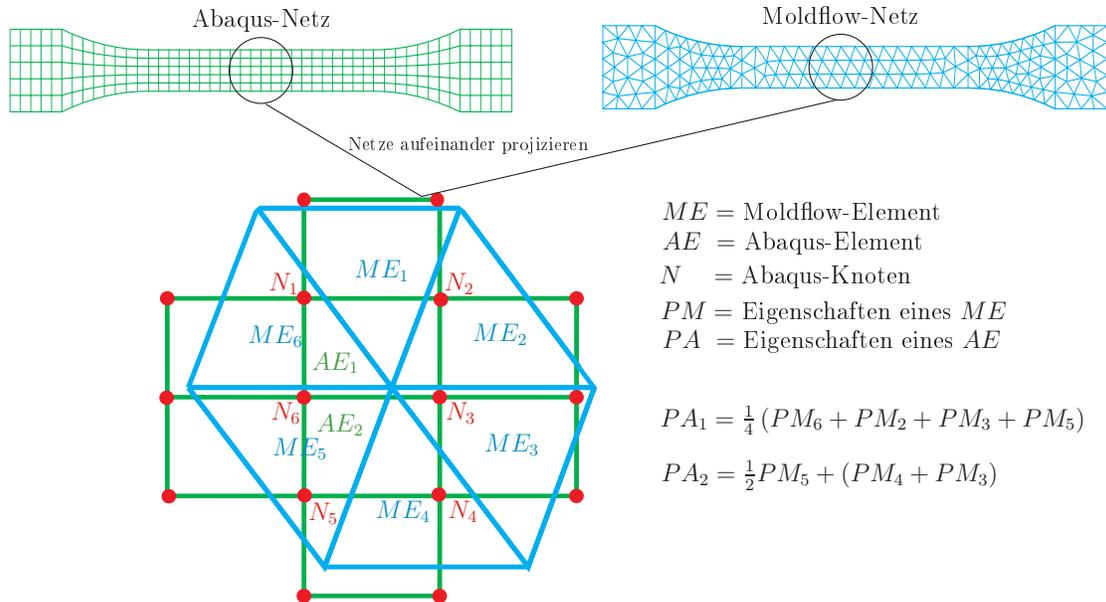


Abbildung 5.2: Bestimmung der gemittelten Elementeigenschaften

### Volumenelemente

Die Bestimmung der relativen Lage der Abaqus-Knoten zu den Moldflow-Elementen entspricht für Volumenelemente der Aufgabe, zu ermitteln ob ein (Abaqus-) Punkt in einem (Moldflow-) Tetraeder liegt. Diese Aufgabe kann mithilfe verschiedener Verfahren gelöst werden. In dieser Arbeit wurden zwei Verfahren anhand geometrischer Überlegungen erarbeitet:

#### 1. Referenzrichtungsverfahren

Die Idee dieses Verfahren basiert auf der Überlegung, dass ein Punkt immer dann innerhalb eines Tetraeders liegt, wenn er, von jeder Seitenfläche aus betrachtet, auf der Innenseite liegt. Um dies zu überprüfen, muss zuerst ein Punkt bestimmt werden, der exakt auf einer Seitenfläche des Tetraeders liegt. Hier wurde eine einfache Formulierung gewählt, die bei einem guten Aspektverhältnis des Dreiecks einen Punkt im Dreieck  $P_{\Delta}$  liefert (siehe Abb. 5.3):

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 \quad (5.1)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2 \quad (5.2)$$

$$\mathbf{P}_{\Delta} = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{v}_2 \quad (5.3)$$

Der Verbindungsvektor  $\mathbf{v}_g$  zwischen  $\mathbf{P}_\Delta$  und  $\mathbf{P}_g$  zeigt immer von der Seitenfläche des Tetraeders nach innen. Damit besitzt er die Referenzrichtung, mit der die Richtung des Verbindungsvektors  $\mathbf{v}_A$  zwischen den Punkten  $\mathbf{P}_\Delta$  und  $\mathbf{P}_{\text{Abaq}}$  verglichen werden muss. Der Vergleich erfolgt über die Projektion der Vektoren aufeinander:

$$x = \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{v}_A \quad (5.4)$$

Haben die Vektoren eine Komponente, die in dieselbe Richtung zeigt, ist  $x > 0$  ansonsten ist  $x < 0$ . Stehen die Vektoren senkrecht aufeinander folgt  $x = 0$ . Damit liegt der Punkt im Tetraeder, wenn für alle vier Seiten des Tetraeders  $x \geq 0$  gilt.

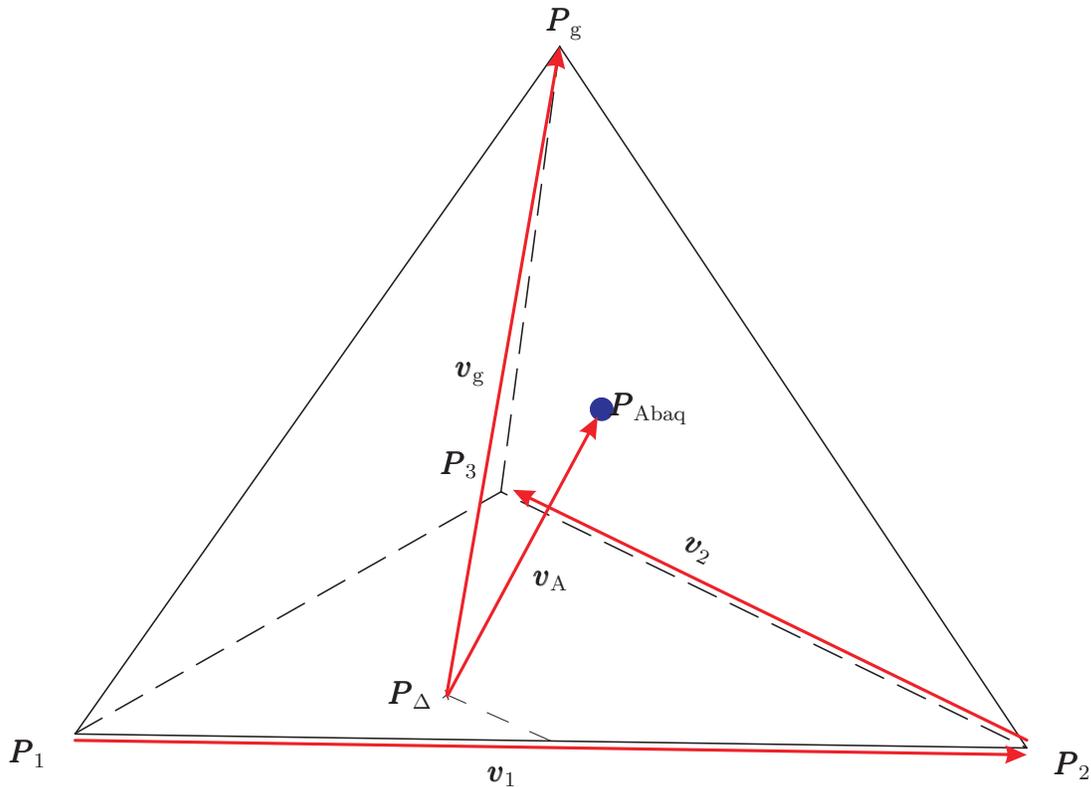


Abbildung 5.3: Referenzrichtungsverfahren

## 2. Durchstoßpunkt-Parameterverfahren

Zu Beginn dieses Verfahrens wird eine Seitenfläche des Tetraeders (siehe Abb. 5.4) als Grundfläche definiert und deren Normalenvektor berechnet:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 \quad (5.5)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2 \quad (5.6)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \quad (5.7)$$

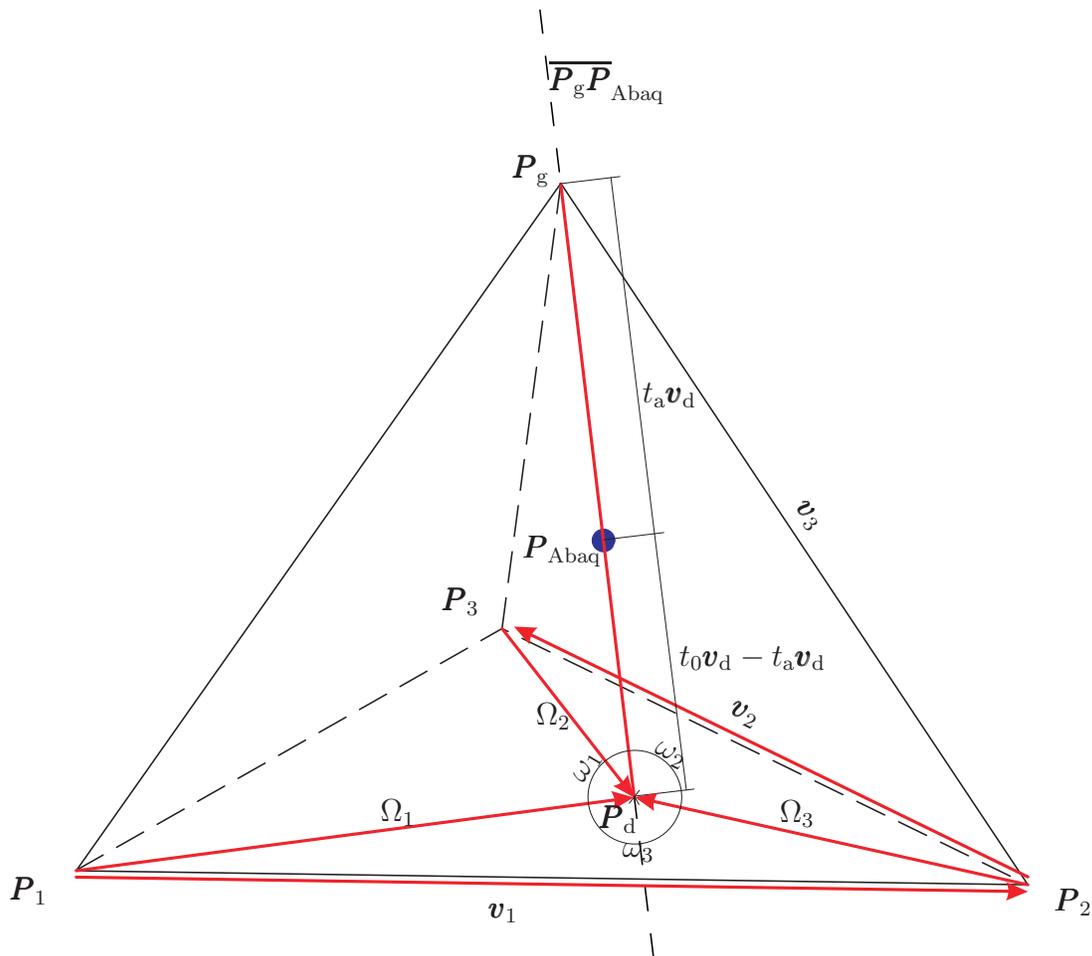


Abbildung 5.4: Durchstoßpunkt-Parameterverfahren

Im nächsten Schritt wird der Durchstoßpunkt der Geraden  $\overline{\mathbf{P}_g \mathbf{P}_{\text{Abaq}}}$  durch die Grundfläche gesucht. Es wird als erstes der Einheitsvektor, der die Gerade definiert, be-

stimmt:

$$\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{P}_{\text{Abaq}} - \mathbf{P}_g}{|\mathbf{P}_{\text{Abaq}} - \mathbf{P}_g|} \quad (5.8)$$

Da der Durchstoßpunkt auf der Geraden  $\overline{\mathbf{P}_g \mathbf{P}_{\text{Abaq}}}$  liegen muss, lässt sich dieser mit dem in Gl. (5.8) eingeführten Vektor  $\mathbf{v}_d$  und einem Parameter  $t_0$  wie folgt ausdrücken:

$$\mathbf{P}_d = \mathbf{v}_3 + t_0 \mathbf{v}_2 \quad (5.9)$$

Der Parameter  $t_0$  ist über folgende Beziehung ableitbar:

$$t_0 = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_d} \quad (5.10)$$

Auf die gleiche Art und Weise lässt sich ein zweiter Parameter  $t_a$  bestimmen, der die Lage von  $\mathbf{P}_{\text{Abaq}}$  auf der Geraden  $\overline{\mathbf{P}_g \mathbf{P}_{\text{Abaq}}}$  eindeutig festlegt:

$$t_a = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_1 - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_{\text{Abaq}} - \mathbf{P}_1)}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_d} \quad (5.11)$$

Um zu bewerten, ob der Punkt  $\mathbf{P}_{\text{Abaq}}$  zwischen den Punkten  $\mathbf{P}_g$  und  $\mathbf{P}_d$  liegt, müssen nun lediglich die Parameter  $t_0$  und  $t_a$  verglichen werden. Die potenzielle Innenlage des Punktes wird damit durch die Bedingung

$$0 \leq t_a \leq t_0 \quad (5.12)$$

bestätigt. Liegt  $t_a$  außerhalb dieses Intervalls, kann der Punkt  $\mathbf{P}_{\text{Abaq}}$  nicht in dem betrachteten Tetraeder liegen.

Die zweite Bedingung, die erfüllt sein muss, damit der Punkt tatsächlich im Tetraeder liegt, betrifft die Lage des Durchstoßpunktes  $\mathbf{P}_d$  bezüglich der Grundfläche des Tetraeders. Es muss überprüft werden, ob der Punkt innerhalb des Dreieckes bestehend aus den Punkten  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$  und  $\mathbf{P}_3$  liegt. Es werden zunächst die Verbindungsvektoren zwischen dem Durchstoßpunkt  $\mathbf{P}_d$  und den Ecken der Grundfläche berechnet:

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \mathbf{0} - \mathbf{P}_d \quad (5.13)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{P}_d \quad (5.14)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{P}_d \quad (5.15)$$

Nun wird über das Skalarprodukt die Summe der Winkel

$$\omega_{\text{ges}} = \sum \omega_i \quad (5.16)$$

zwischen allen Vektoren  $\mathbf{\Omega}$  bestimmt. Über diese Gesamtwinkelsumme  $\omega_{\text{ges}}$  ist nun wieder ein Kriterium aufstellbar, das ermittelt, ob der Punkt in dem Dreieck liegt. Wenn der Punkt innerhalb des Dreieckes der Grundfläche liegen soll, muss folgende Bedingung gelten:

$$\omega_{\text{ges}} + \omega_{\text{toleranz}} - 2\pi \geq 0 \quad (5.17)$$

Durch die Anwendung der beiden Kriterien aus den Gln. (5.12) und (5.17) kann die Frage, ob ein Punkt innerhalb eines Tetraeders liegt, sofort entschieden werden.

### *Vergleich der Verfahren*

Es sind beide vorgestellten Verfahren uneingeschränkt funktionsfähig. Im Einsatz hat sich das Referenzrichtungsverfahren als schneller herauskristallisiert, obwohl es von der Programmierung weniger auf geschwindigkeitsoptimierte Module („Math“, „numpy/scipy“) zurückgreift als das Durchstoßpunkt-Parameterverfahren. Die Ursachen dafür sind zum einen statistischer Natur und zum anderen numerischer Art. Das Referenzrichtungsverfahren kann nach jeder Überprüfung der Lage des Punktes bezüglich einer Tetraederfläche zum Abbruch kommen. Da ein Tetraeder vier Flächen besitzt, gibt es drei Möglichkeiten frühzeitig vor Abschluss des gesamten Verfahrens einen Punkt auszuschließen. Im Gegensatz dazu besitzt das Durchstoßpunkt-Parameterverfahren nur einen frühzeitigen Ausstiegspunkt (Anwendung des Kriteriums aus Gl. (5.12)). Deshalb muss dieses Verfahren häufiger komplett durchlaufen werden, um eine Entscheidung treffen zu können. Unter numerischen Gesichtspunkten ist es wichtig hervorzuheben, dass bei diesem Verfahren trigonometrische Funktionen ausgewertet werden müssen, was numerisch recht aufwendig ist. Bei dem Referenzrichtungsverfahren hingegen werden ausschließlich mathematische Grundoperationen benötigt. Dieser Umstand führt zusätzlich zu einem Geschwindigkeitsvorteil.

*Flächenelemente*

Die Bestimmung der Innenlage eines Punktes in einem Dreieck ist lediglich eine Modifizierung des Durchstoßpunkt-Parameterverfahrens. Im Gegensatz zum ursprünglichen Verfahren müssen bei der flächigen Variante keine Parameter  $t_a$  und  $t_0$  berechnet werden. Es genügt mit dem zweiten Teil des Verfahren anzufangen und nur das Winkelsummenkriterium aus Gl. (5.17) anzuwenden.

*Vorabauswahl*

Würden die Algorithmen zur Zuordnung der Abaqus-Punkte zu den entsprechenden Moldflow-Elementen so implementiert, ergäbe sich eine sehr ungünstige Abhängigkeit der Laufzeit von der Anzahl der Abaqus-Knoten und der Moldflow-Elemente. Es würden für jeden Abaqus-Knoten sehr viele Moldflow-Elemente mit einem relativ aufwendigen Algorithmus geprüft werden müssen, bis ein passendes Element gefunden werden würde. Um die Laufzeit zu verkürzen, kann ein Algorithmus zur Vorabauswahl von Konstellationen aus Abaqus-Punkten und Moldflow-Elementen, die gegeneinander überprüft werden sollen, eingesetzt werden.

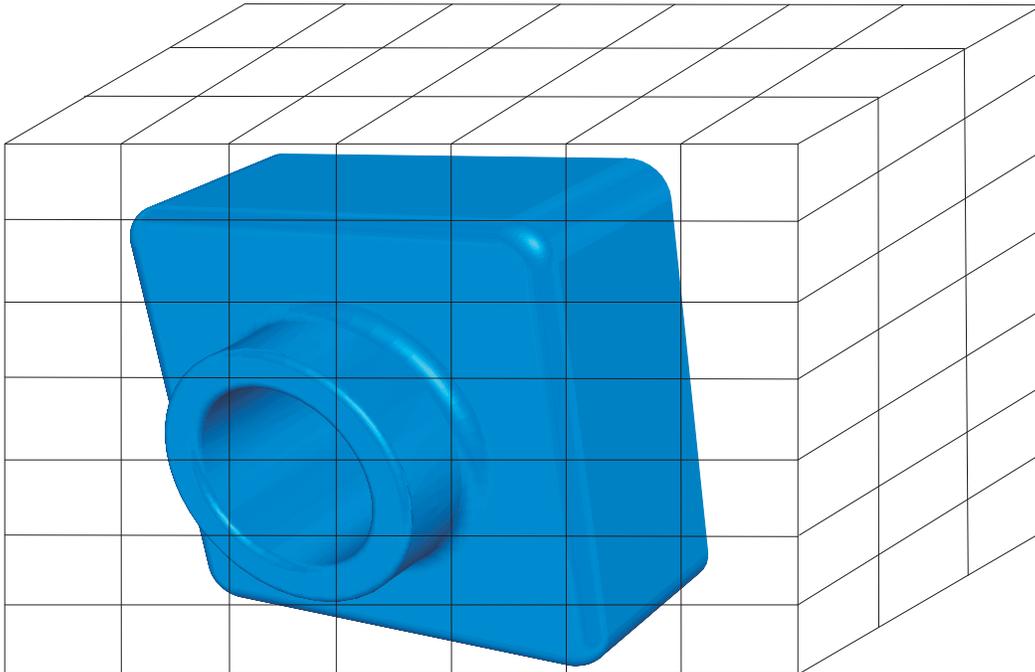


Abbildung 5.5: Vorabauswahl

Zu Beginn wird das Modell geometrisch, wie in Abb. 5.5 an einer Kunststoffbuchse skizziert, aufgeteilt. Es wird ein Quader mit einer bestimmten Anzahl von Teilungen der Kanten in den Raumrichtungen über die exakt gleich ausgerichteten Modelle gelegt. Durch die Teilungen wird der Quader in viele, kleinere Unterräume separiert. Danach wird für alle Schwerpunkte der Moldflow-Elemente und alle Abaqus-Knoten entsprechend ihrer Koordinaten eine Zuordnung zu einem dieser Unterräume vorgenommen. Im eigentlichen Suchmodus wird später nur die Innenlage der Abaqus-Knoten gegen die Moldflowelemente abgeglichen, die demselben Unterraum zugeordnet sind. Durch diese Vorabauswahl wird die Anzahl der benötigten tatsächlichen Überprüfungen deutlich reduziert.

### 5.2.2 Beispiel

Die in diesem Kapitel beschriebene Vorgehensweise zur Übertragung der Faserorientierung von einem Moldflow-Netz auf ein beliebiges Abaqus-Netz wurde mithilfe eines Python-Skripts gelöst. Dieses kann, nachdem alle Parameter eingestellt wurden, direkt in der Kommandozeile des Pythoninterpreters von Abaqus ausgeführt werden. Dabei wird für jedes Element, das in die Mesh-mapping-Prozedur einbezogen wurde, ein User-Material sowie eine Section in Abaqus angelegt. Jedes der einbezogenen Elemente bekommt die Eigenwerte als User-Material und die Eigenrichtungen des über alle Knoten gemittelten Orientierungstensors als Materialrichtung zugewiesen. Für alle anderen Elemente wird nur ein gemeinsames Material und eine gemeinsame Section angelegt, in der ein isotropes Material hinterlegt wird. Eine Vorzugsrichtung der Faserorientierung kann in diesem Fall nicht bestimmt werden.

Die beschriebene Vorgehensweise zur Übertragung der Ergebnisse aus Moldflow nach Abaqus wurde zu Illustrationszwecken an dem in Abb. 5.6 gezeigten Beispiel einer Lochplatte mit Schlitz durchgeführt. Das Loch und der Schlitz haben die Aufgabe die Strömung umzulenken und eine entsprechende Umorientierung der Fasern zu bewirken. Die Hauptrichtung der Faserorientierung ist in beiden Bildern durch die Ausrichtung der Striche gekennzeichnet. Die Farben im oberen Bild charakterisieren den ersten Eigenwert des Orientierungstensors und symbolisieren damit die Stärke der Faserorientierung in die entsprechende Richtung. Im Bereich um das Loch findet eine ausgeprägte Umströmung statt. Dies wird im unteren Bild sehr gut wiedergegeben. Am Anspritzpunkt wird die Orientierung zunächst sehr chaotisch dargestellt, was daran

liegt, dass  $\lambda_1$  nahe 0,33 liegt. Das bedeutet in diesem Bereich lässt sich zwar eine Vorzugsorientierung bestimmen, dennoch sind die Eigenschaften nahezu isotrop. In den ungestörten Bereichen bildet sich durch die Strömung ein sehr gleichmäßiges Bild der Hauptrichtungen bei gleichzeitig starker Orientierung entsprechend der Hauptrichtung aus.

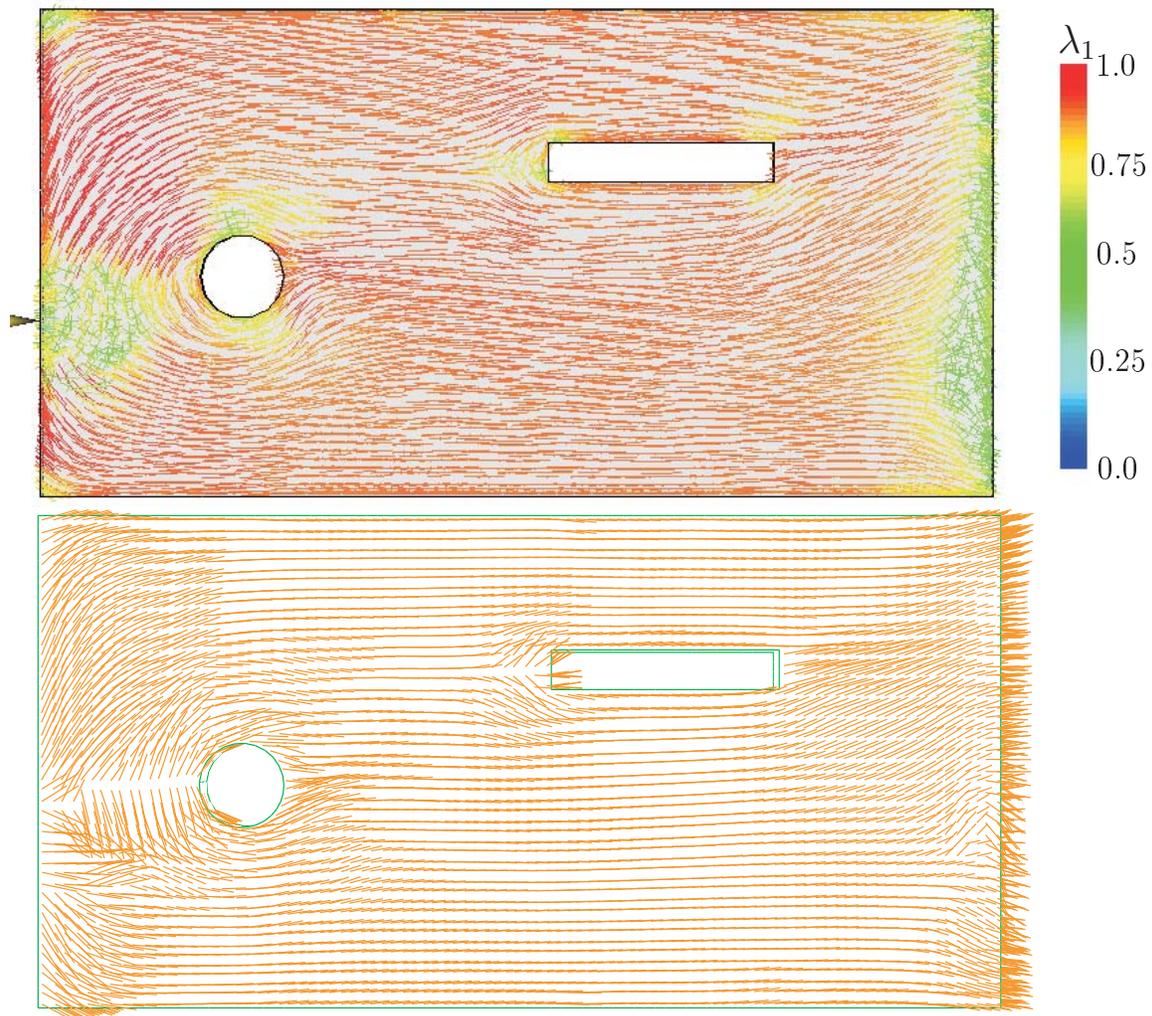


Abbildung 5.6: Ergebnis der Mesh-mapping-Prozedur am Beispiel einer Platte mit Loch und Schlitz (Moldflow oben, Abaqus unten)

## 6 Bauteilversuch

Der Algorithmus aus Abschn. 4 zur Beschreibung des Werkstoffkriechens wurde mithilfe einer anwenderspezifischen Materialsubroutine (UMAT) in Abaqus implementiert. Der schematische Ablauf einer solchen Analyse inklusive der Übertragung der Faserorientierung entsprechend Abschn. 5 ist in Abb. 6.1 skizziert. Zu Beginn dieses Abschnittes werden einige Fragen, die die Verifikation der verwendeten Subroutine betreffen, diskutiert. Danach sollen die Ergebnisse, die durch die beschriebene Prozedur nach der Implementierung in das FE-Programm Abaqus erhalten wurden, am Beispiel eines realen Bauteils erläutert werden.

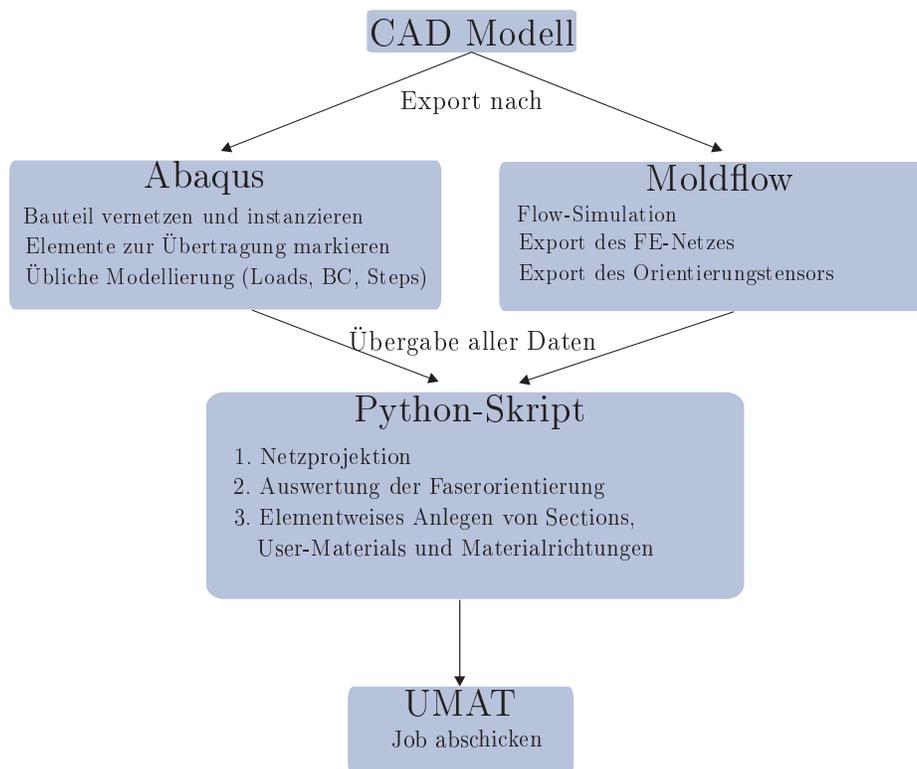


Abbildung 6.1: Zusammenspiel der Programme

## 6.1 Verifikation der Materials subroutine

Es ist üblich, die entwickelte UMAT zunächst immer nur an einem einzelnen Element zu testen [40]. Auf diese Weise sind Fehler deutlich schneller einzugrenzen, da ein Einfluss des FE-Modells ausgeschlossen werden kann. Auf dieses Einzelement-Modell wurde im ersten Test ein negativer Druck auf eine Stirnfläche und eine feste Einspannung auf der gegenüberliegenden Seite aufgegeben. Das Ergebnis dieses Tests war, dass der aufgegebene Druck, der im Element anliegenden Zugspannung, entsprach.

Daraufhin wurde in einem weiteren Versuch ein auf 1000 h verkürztes Kriechexperiment an einem Schulterstab aus Ultradur B4300 G6 simuliert. Dabei wurde der gleiche Werkstoff gewählt, aus dem auch das reale Bauteil besteht. Das Ergebnis der Simulation ist in Abb. 6.2 dargestellt.

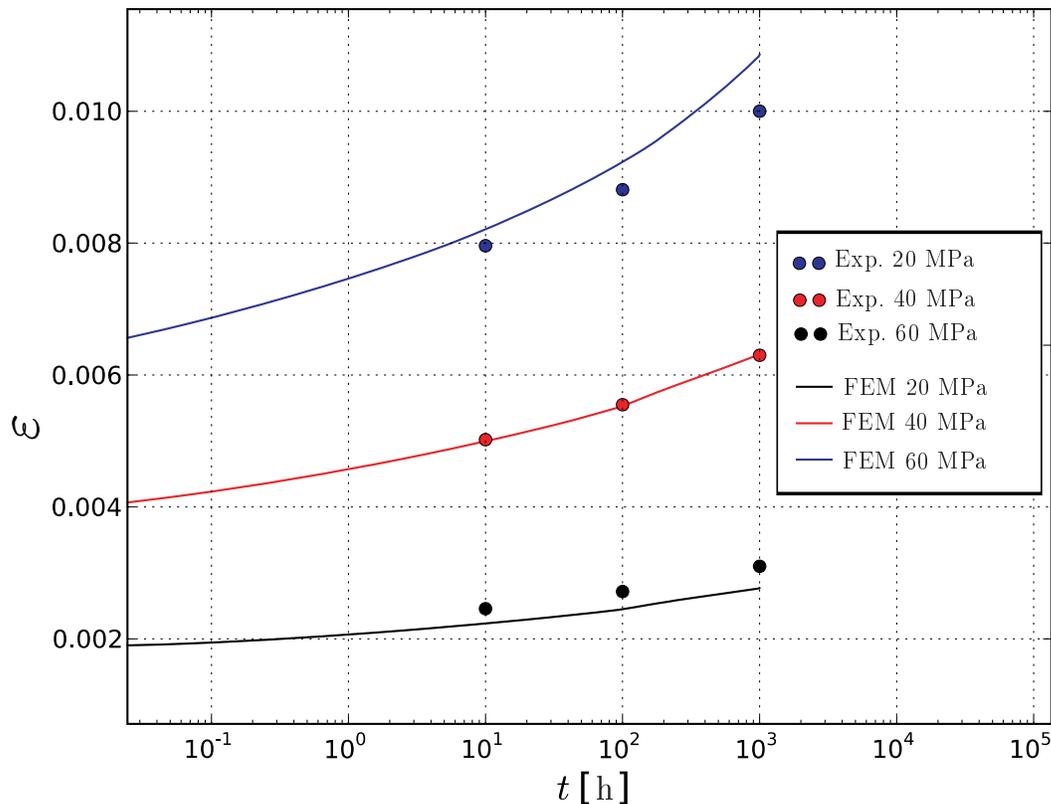


Abbildung 6.2: Kriechsimulationen an Ultradur B4300 G6 als Benchmark der FE-Implementierung

Der Vergleich mit Abb. 4.7 zeigt, dass auch in der FE-Simulation bei geringer Spannung ein leichtes Unterschätzen und bei größerer Spannung ein leichtes Überschätzen der experimentellen Werte zu beobachten ist. Wenn die Ergebnisse aus Abb. 4.7, welche ebenfalls dreidimensional in Python gerechnet wurden und der FEM-Simulation fast identisch sind, ist das ein Indiz dafür, dass die Implementierung in Abaqus korrekt ist.

## 6.2 Versuchsaufbau

Im Bauteilversuch wurde von [9] eine aus dem untersuchten Ultradur B4300 G6 gefertigte, Elektronikabdeckung einer Belastung, in Form zweier auf die Befestigungslaschen wirkenden Kräfte entsprechend Abb. 6.3, ausgesetzt. Diese Abdeckung soll den Innenteil gegen Staub und Feuchtigkeit schützen. Deshalb muss sie formschlüssig mithilfe der Befestigungslaschen an die Struktur angepresst werden. An diesen beiden Laschen sind im Versuch Kräfte aufgebracht worden, die die Befestigung des Bauteils mit der Struktur simulieren sollen. Eine Absenkung dieser Befestigungslaschen infolge von Kriechprozessen reduziert die Anpresskraft und beeinträchtigt die exakte Verbindung von Abdeckung und Struktur. Damit ist die korrekte Funktion der Abdeckung gefährdet.

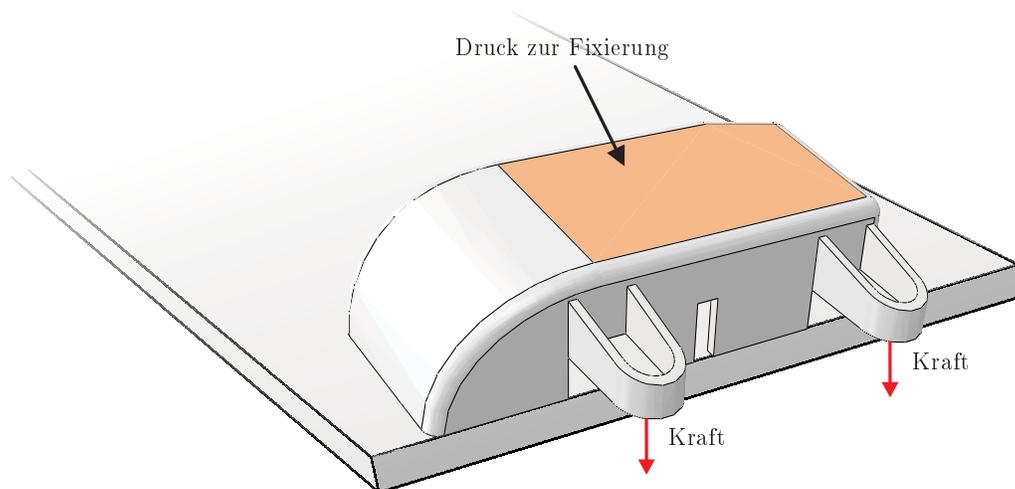


Abbildung 6.3: Versuchsaufbau zur Aufgabe der Last auf die Befestigungslaschen nach [9]

## 6.3 Simulation mit Moldflow

Die Orientierung der Fasern wurde mit Moldflow an einem dreidimensionalen Volumenmodell numerisch ermittelt. Die Lage der Anspritzpunkte kann aus Abb. 6.4 entnommen werden. Die farbigen Striche stellen für jedes Element die Richtung der Faserorientierung dar. Die farbliche Kodierung beschreibt den ersten Eigenwert  $\lambda_1$  des Orientierungstensors und damit die Stärke der Faserorientierung. Zusätzlich ist eine Messstelle eingetragen, an der in [9] die Faserorientierung experimentell untersucht wurde. Um den Einfluss des Strömungsprofils auf die Faserorientierung gut darstellen zu können, wurden für die Fließsimulation sechs Elemente über die Dicke aufgegeben. Die ermittelten Faserorientierungen wurden mithilfe der in Kap. 5 vorgestellten Prozedur auf ein Hexaeder-Netz übertragen.

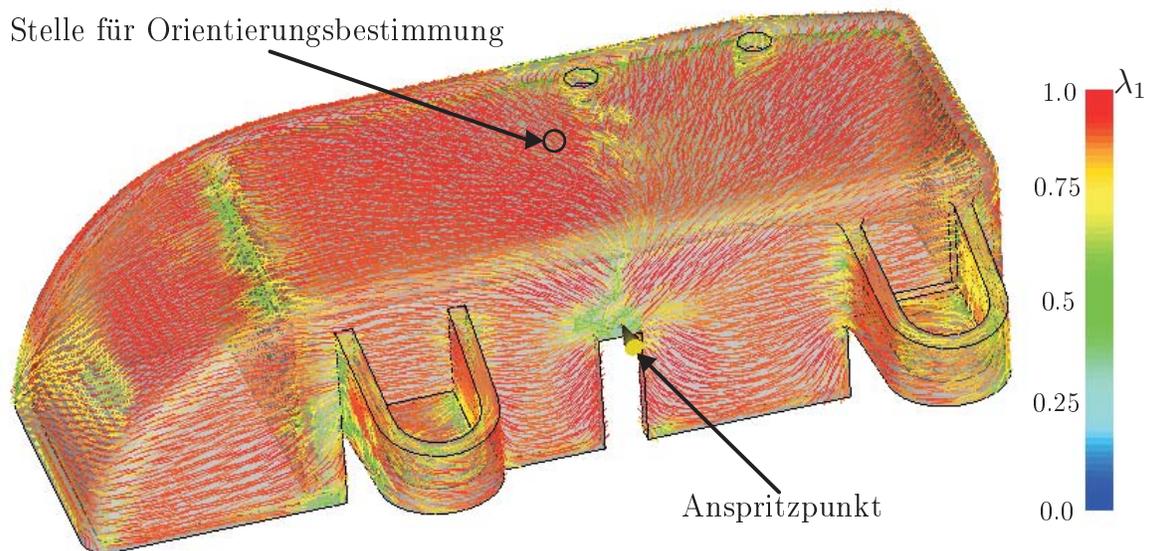


Abbildung 6.4: Moldflow-Modell: Darstellung der Faserorientierung, des Anspritzpunktes und der Orientierungsmessstelle

## 6.4 Simulation mit Abaqus

Die Strukturanalyse wurde zunächst nur elastisch für den isotropen Fall durchgeführt, um mögliche geometrische Vereinfachungen zu untersuchen. Die Varianten, die untersucht wurden, sind in Abb. 6.5 dargestellt.

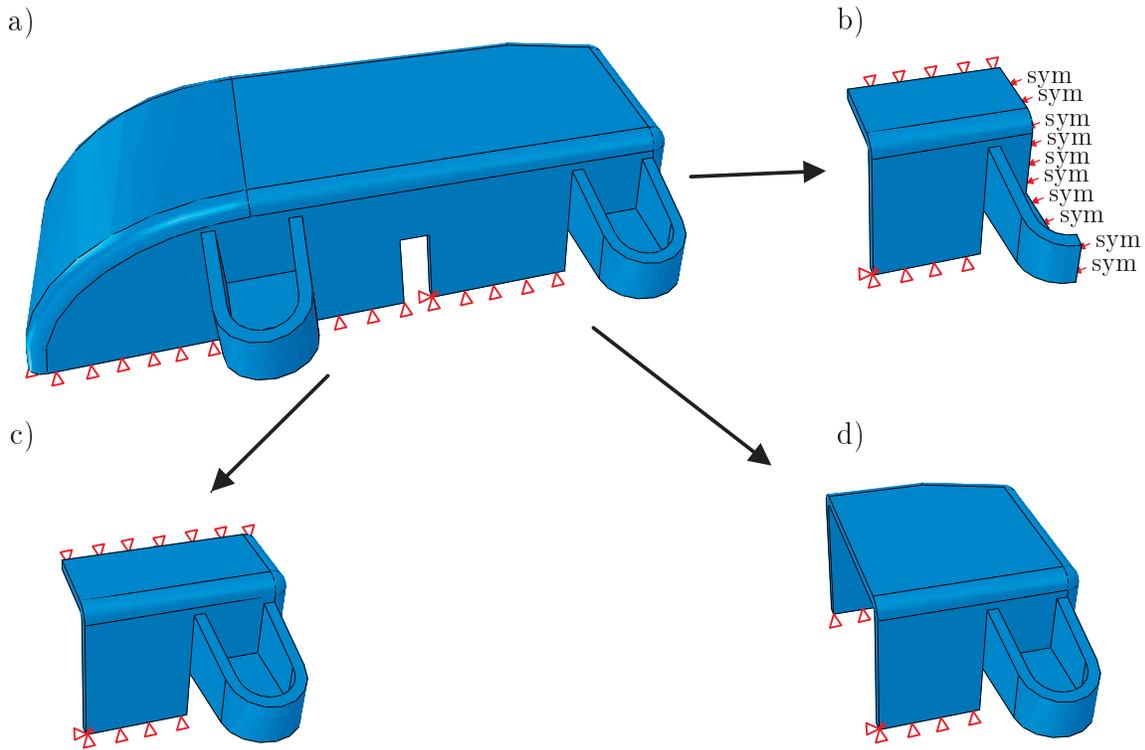


Abbildung 6.5: Mögliche FE-Modelle für die Strukturanalyse

Die Variante b) wäre vom Rechenaufwand die optimale Lösung gewesen, da nur ein kleiner Ausschnitt der Struktur simuliert werden müsste. Sie vernachlässigt allerdings den versteifenden Einfluss der Seitenwand sowie alle Löcher. Außerdem ist die Fixierung in  $y$ -Richtung auf der Rückseite der Abdeckung nur unzureichend durch die Beschränkung der Bewegung in  $z$ -Richtung darzustellen. Das Verhalten der Struktur wird auf diese Weise zu steif dargestellt. Lässt man diese Bewegung zu, wird die Struktur zu nachgiebig. Dasselbe Problem besteht bei der Variante c). Variante d) zeigt in Bezug auf die originale Struktur lediglich eine sehr kleine, vernachlässigbare Differenz der Absenkung der Lasche. Aus diesem Grund soll für alle weiteren Betrachtungen die

halbe Elektronikabdeckung mit den Randbedingungen entsprechend Abb. 6.5 Variante d) als Modell dienen. Mit der genannten Vereinfachung muss im Vergleich zu Variante a) nur noch ein reichliches Drittel des Volumens vernetzt werden. Dies schlägt sich in einer entsprechenden Reduzierung der Elementanzahl und der benötigten Rechenzeit nieder. In Tab. 6.1 ist die benötigte Zeit für zwei gekoppelte Analysen aufgeschlüsselt. Die Anzahl an Moldflow-Elementen wurden dabei konstant bei ca. 350000 belassen.

Die Vorbereitung der Übertragung stellt die mathematische Ausführung des Meshmappings dar, wohingegen die Ausführung der Übertragung nur das Schreiben der Ergebnisse in Abaqus bezeichnet. Die Veränderung der Simulationszeit in Abaqus entspricht in etwa der Faustformel, wonach die Rechenzeit mit dem Quadrat der Elemente ansteigt.

Es wird deutlich, dass die Ausführung der Übertragung und das Schreiben des Inputfile in Abaqus den Flaschenhals der gesamten Prozedur darstellen. Die Ursache für den starken Anstieg der benötigten Zeit ist nicht klar. Möglicherweise wird nach jeder Anlage eines Materialdatensatzes das Modell regeneriert, was mit steigendem Fortschritt der Übertragung in immer stärkeren Verzögerungen der Ausführung resultiert.

Eine Beschleunigung beider Punkte ist möglich, indem die Materialdaten direkt in ein von Abaqus zuvor für den Solver erstelltes Inputfile geschrieben werden. Diese Änderung sollte die Verkürzung der zur Ausführung dieser beiden Punkte benötigten Zeit in den Minutenbereich ermöglichen, da nur eine flache Textdatei bearbeitet werden müsste.

Tabelle 6.1: Abhängigkeit der benötigten Zeit für eine gekoppelte Analyse von der Elementzahl in Abaqus

Prozess	Zeit[h]	Zeit[h]	Zeit[h]
Elemente in Abaqus	2500	7800	18000
Simulation-Modflow	1.5	1.5	1.5
Vorbereitung der Übertragung	0.3	1.2	5
Ausführung der Übertragung	0.01	7	150
Schreiben des Inputfile	0.05	18	>72
Simulation-Abaqus	0.5	5	-
Gesamt	2.36	32.7	>228.5

Es ist bekannt, dass das mechanische Verhalten einer FE-Struktur auch von der Form der Elemente abhängen kann. Aus diesem Grund wurde am isotropen Modell eine Vergleichsrechnung für verschiedene Vernetzungen durchgeführt. Zu Beginn wurde das Modell vollständig durch quadratische Elemente in Tetraederform vernetzt. Im Anschluss wurde das geometrische Modell partitioniert, um es zum größten Teil mit quadratischen Hexaedern vernetzen zu können. Beide FE-Netze sind in Abb. 6.6 zur Illustration gegenübergestellt.

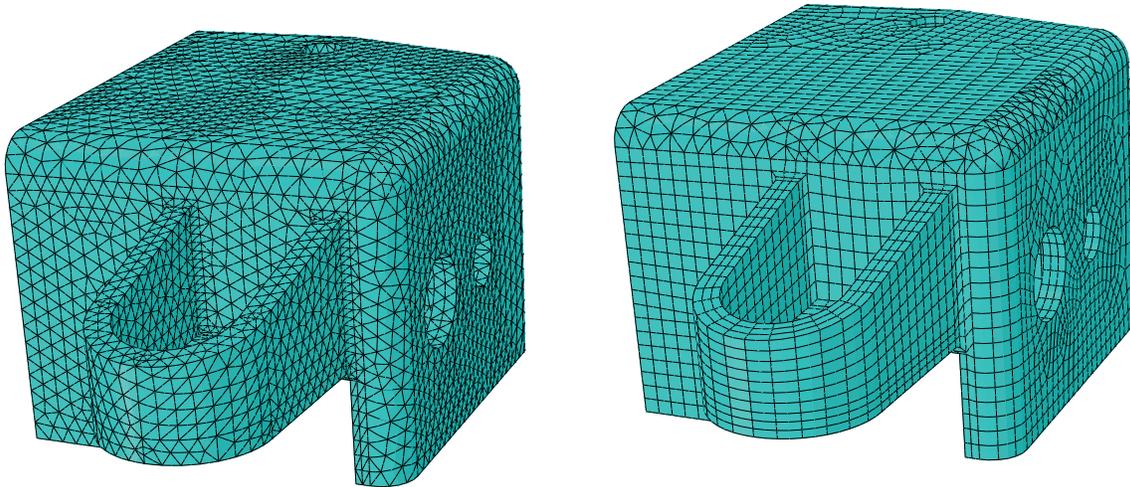


Abbildung 6.6: Vergleich der verwendeten FE-Netze für die Untersuchung der Abhängigkeit der Lösung von der Elementform

Die erhaltenen Unterschiede der Absenkung der Lasche sind allerdings vernachlässigbar klein. Zur Illustration dieser Aussage kann Abb. 6.7 herangezogen werden. Aus mechanischer Sicht macht es demnach, zumindest in diesem Fall, keinen Unterschied welche Elementform verwendet wird. Vor dem Hintergrund der Mesh-Mapping-Prozedur spielt die Anzahl der Elemente in Abaqus eine wichtige Rolle, da sie die Dauer der Übertragung bestimmt. Daher ist es sinnvoll die Hexaeder zu verwenden, da die Anzahl an benötigten Elementen deutlich geringer ist. Bei der Verwendung von Hexaedern wurden knapp 8000 Elemente und bei Tetraedern mehr als 27000 Elemente benötigt.

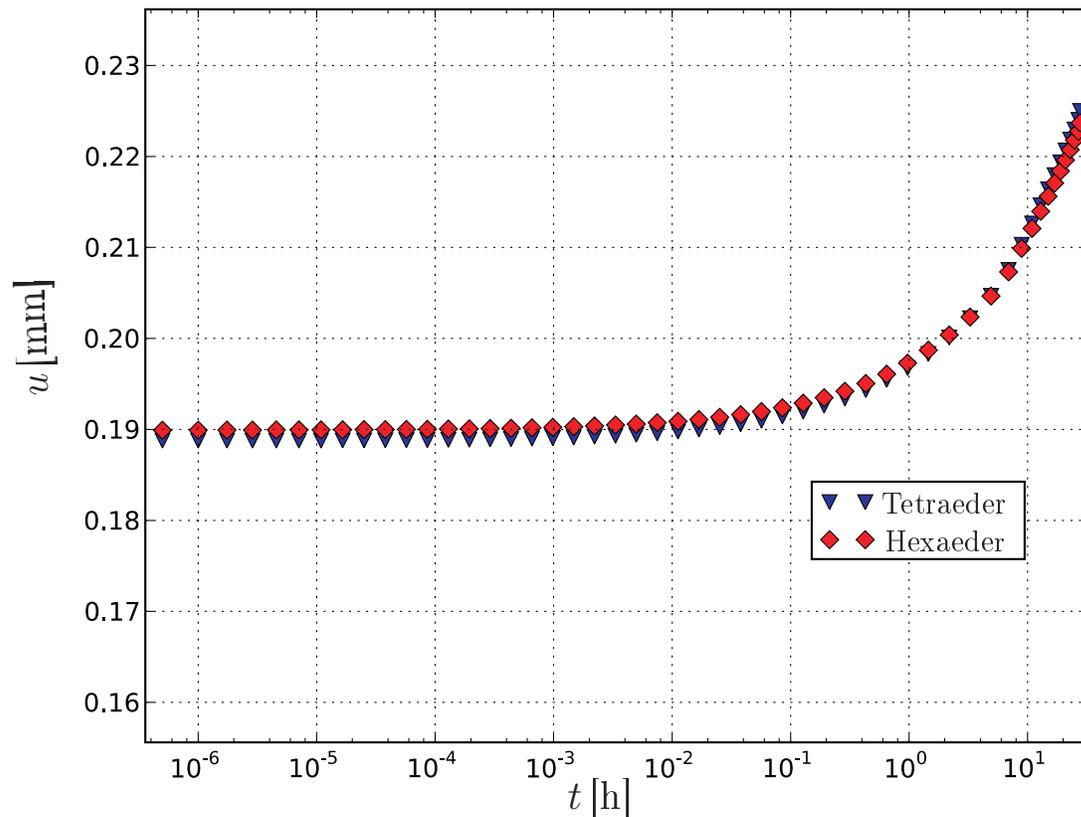


Abbildung 6.7: Darstellung der Abhängigkeit der Absenkung der Lasche von der Elementform für isotropes Material

Im Anschluss wurde die Abdeckung zunächst als isotrop verstärkter Werkstoff und danach als anisotroper Werkstoff unter Berücksichtigung der durch Moldflow approximierten Faserorientierung simuliert. Zusätzlich wurde eine Variantenrechnung bezüglich des Einflusses der Lage des Anspritzpunktes durchgeführt.

### 6.4.1 Absenkung der Befestigungslasche

In Abb. 6.8 ist die gesamte Absenkung der Befestigungslasche im Laufe der Zeit aufgetragen. Es sind die experimentell bestimmte Absenkung der Lasche, die Ergebnisse der numerischen Simulationen mit Abaqus und die Standardabweichung (nur für die Elastizität bekannt) der Messwerte dargestellt.

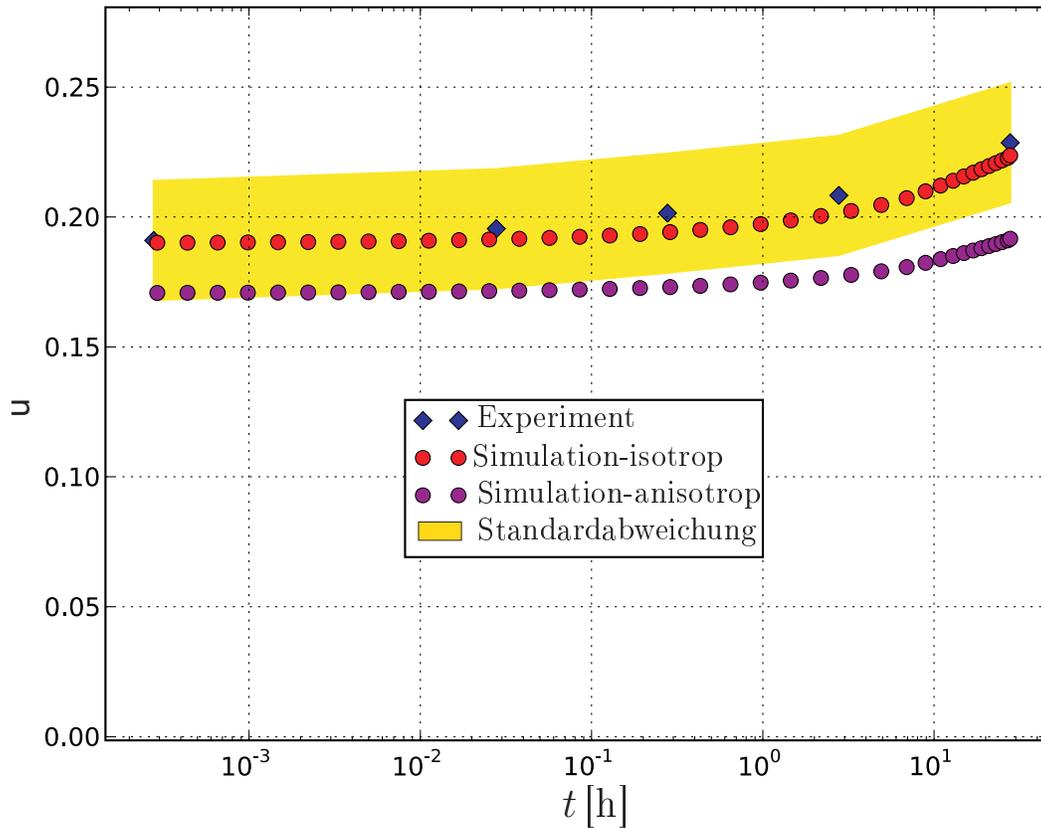


Abbildung 6.8: Absenkung der Lasche für isotropes und anisotropes Werkstoffverhalten

Der erste Punkt bei  $t \approx 0$  stellt die elastische Antwort auf die aufbrachte Kraft dar. Die isotrope Simulation liegt sehr nah an den experimentellen Daten, die anisotrope Simulation hingegen unterschätzt die tatsächliche Absenkung stärker. Zu Beginn liegen beide Simulationen im Bereich der elastischen Standardabweichung der Daten. Einige mögliche Ursachen für die Diskrepanz der Daten und der anisotropen Simulation sind:

- Mögliche Messfehler bei der Bestimmung der experimentellen Daten
- Anpassung geometrischer Details bzw. Ungenauigkeiten des Konstruktionsplans
- Effektive Faserlänge muss nicht identisch mit vorherigen Versuchen sein
- Fehlerbehaftete Bestimmung der Orientierungstensoren durch Moldflow

Die Sicherheit der Daten kann in dieser Arbeit nicht beurteilt werden, deshalb sollen nur die letzten drei Punkte betrachtet werden.

Um Spannungssingularitäten im Bereich des Stoßes der Lasche auf den Grundkörper zu vermeiden, wurden die Kanten abgerundet. Laut Konstruktionsplan der Abdeckung sind zwar alle Kanten abgerundet, der Radius ist aber nicht vermerkt. Aus diesem Grund wurde der Radius mit 0.5 mm frei gewählt. Außerdem wurde unter der Lasche noch ein kleiner Steg von ungefähr 1 mm Breite hinzugefügt, um die unteren Ecken im Bereich des Stoßes zu „entschärfen“. Diese Modifikationen wirken beide versteifend für die gesamte Struktur.

Beim nächsten Punkt der Aufzählung erscheint ebenfalls eine weitere Diskussion notwendig. Der Haupteinflussparameter neben der Faserorientierung selbst, der die effektiven Eigenschaften bestimmt, ist die Faserlänge. Das Aspektverhältnis von  $l/d = 24$  für die Simulationen wurde aus den Kriechversuchen der Schulterstäbe übernommen. Auch in [9] wurde für das Aspektverhältnis der Fasern in der Elektronikabdeckung nur der Wert des Schulterstabes übernommen, da die Einäscherung des Bauteils keine verwertbaren Ergebnisse für die Faserlänge lieferte.

In Abb. 6.9 und Abb. 6.10 ist die maximale (pro Element über die Zeit) Scherrate der Formmasse während des Spritzgießvorgangs für den Schulterstab und die Elektronikabdeckung auf den jeweiligen Strukturen aufgetragen. Die maximale Scherrate ist ein Maß für die Belastung, der die Fasern in der Strömung ausgesetzt sind. Je höher sie ist, umso höher ist die Wahrscheinlichkeit, dass Fasern unter der Belastung brechen. Das Maximum der Scherrate in der Elektronikabdeckung ist im Vergleich zum Schulterstab deutlich größer. Deshalb liegt die Vermutung nahe, dass die Fasern in der Elektronikabdeckung kürzer als beim Schulterstab sind. Da die Fasern wahrscheinlich kürzer als angenommen sind, wird das Verhalten der gesamten Struktur als zu steif simuliert.

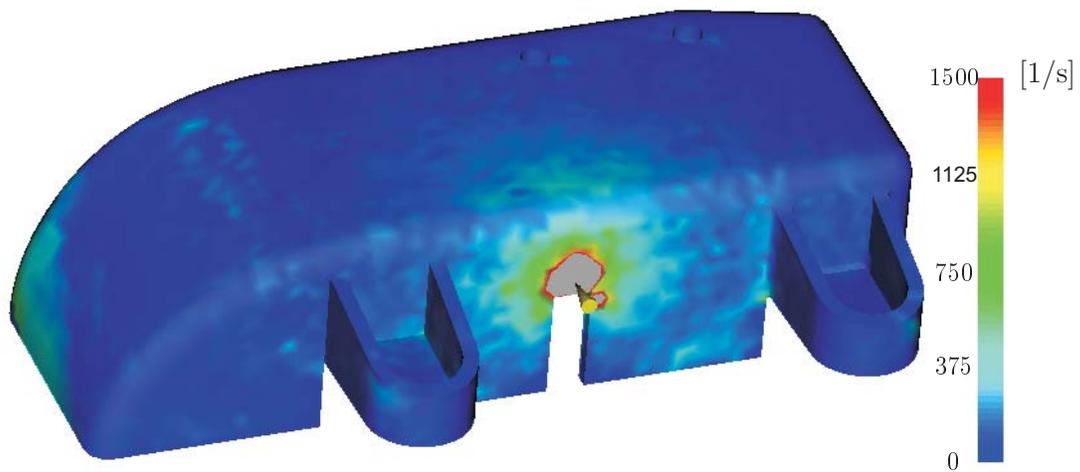


Abbildung 6.9: Maximale Scherrate der Elektronikabdeckung während des Spritzgießens

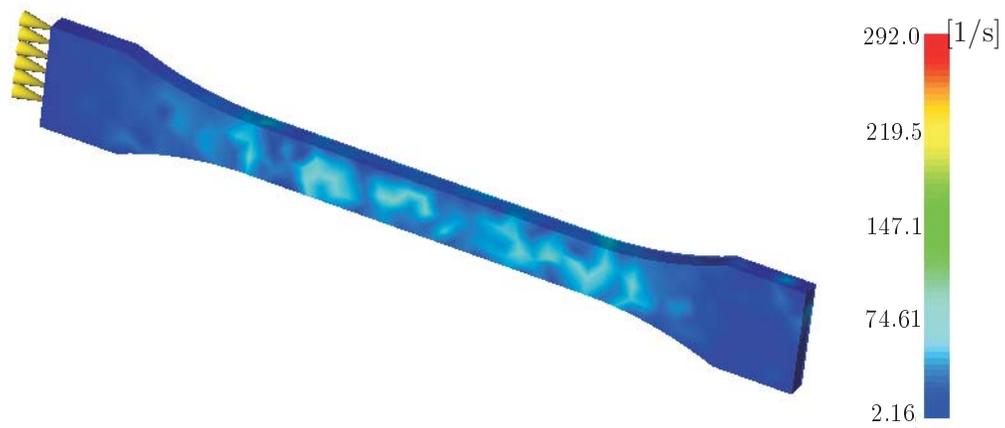


Abbildung 6.10: Maximale Scherrate des Schulterstabes während des Spritzgießens

Der letzte Punkt der Aufzählung betrifft die Richtigkeit der bestimmten Orientierungstensoren der Fasern während des Spritzgießprozesses. Moldflow liefert bei einfachen Strömungsfeldern durchaus verlässliche Werte. In komplizierteren Strömungsfeldern, wie in der Elektronikabdeckung, hingegen werden größere Abweichungen zur Realität beobachtet. Der Vergleich von simulierter und experimentell bestimmter Faserorientierung ist in Abb. 6.11 dargestellt. Die experimentellen Daten wurden von [9], an der in Abb. 6.4 skizzierten Messstelle mithilfe von Schlibbildern erzeugt. Die Moldflow-Daten wurden an entsprechender Stelle aus der dreidimensionalen Füllsimulation extrahiert. Der Vergleich beider Datensätze zeigt, dass die Fasern tendenziell zu hoch orientiert werden. Die Konsequenz daraus ist, dass der Werkstoff unter Verwendung der Moldflow-Daten zu steif modelliert wird.

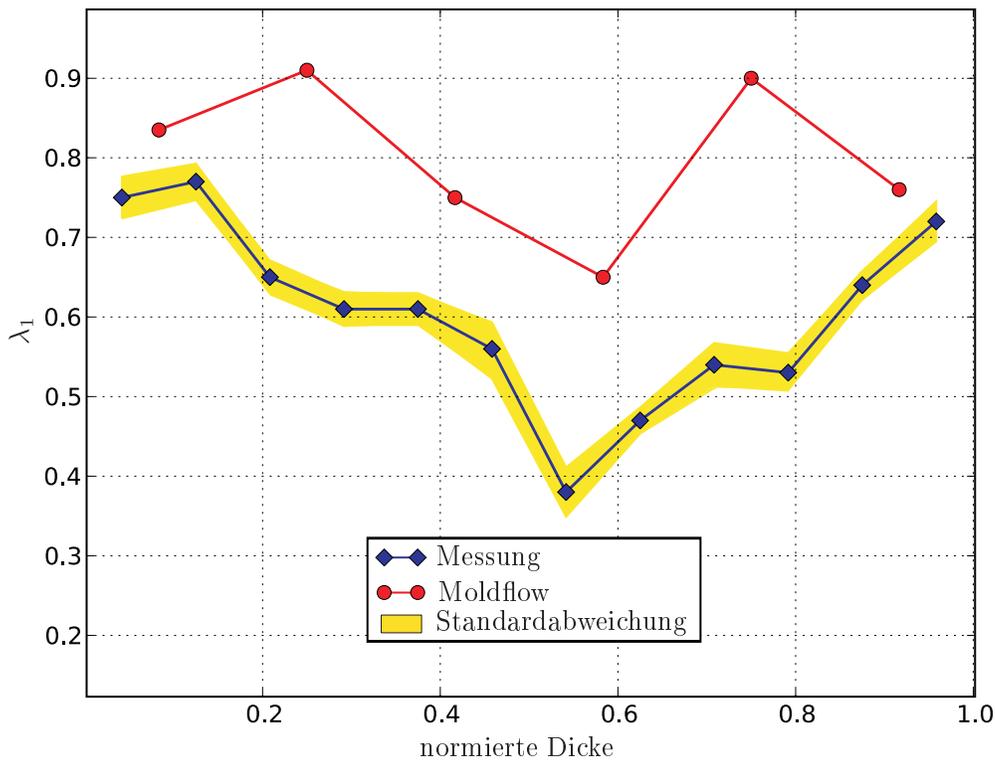


Abbildung 6.11: Darstellung des 1. Eigenwertes des Orientierungstensors über die Dicke: Moldflow-Simulation vs. Experiment

Die Ergebnisse der Simulation könnten durch eine Reduzierung des Aspektverhältnisses der Fasern verbessert werden. Diese Reduzierung ließe sich mit dem genannten Vergleich der maximalen Scherrate qualitativ rechtfertigen. Damit würde sich die anisotrope Simulation näher an die experimentellen Werte verschieben, wohingegen sich der Abstand zwischen den Ergebnisse der isotropen Simulation und den experimentellen Daten vergrößern würde. Durch die Koexistenz von drei unabhängigen Faktoren, die die Simulation in nicht unerheblichem Maße beeinflussen, ließe sich die Reduzierung des Aspektverhältnisses nur willkürlich durchführen, da die Quantifizierung der anderen Einflüsse ebenfalls nicht möglich ist. Aus diesem Grund wird das Aspektverhältnis aus den vorherigen Versuchen verwendet.

Grundsätzlich verbessert die Berücksichtigung aller Faserinformationen die Qualität der Simulationsergebnisse. Voraussetzung dafür sind die genaue Kenntnis der Faserorientierung und der Länge der Fasern. Es wurde bereits gezeigt, dass beide Faktoren bei der Elektronikabdeckung mit Unsicherheiten behaftet sind. Aus diesem Grund wird der potenzielle Vorteil, der sich aus der Berücksichtigung der Faserorientierung ergibt, in diesem Beispiel verwirkt. Deshalb ist der Schluss, dass die isotrope Simulation bessere Ergebnisse liefert, nicht zulässig.

Durch die Berücksichtigung der Faserorientierung im Bauteil entsteht während der Strukturanalyse ein zusätzlicher Informationsgewinn:

- Beispielsweise äußern sich Änderungen der Richtung einer ansonsten konstanten anliegenden Spannung in einer Änderung der Größe der Deformation.
- Informationen über Effekte höherer Ordnung, wie z.B. Versagenkriterien, lassen sich unter Zuhilfenahme der Faserorientierung wirksamer einsetzen, da eine Unterscheidung zwischen matrix- und faserdeterminiertem Versagen bzw. eine sinnvolle Kombination aus beiden möglich ist.
- Die Anwendung von Modellen zur Berücksichtigung der Umorientierung der Fasern infolge von Kriechprozessen ist denkbar.

All diese Informationen gehen bei einem isotropen Modell verloren. Daher ist die möglichst genaue Kenntnis der Faserorientierung für eine exakte Auslegung eines Bauteiles wichtig. Auch wenn die numerische Bestimmung der Faserorientierung aus der Spritzgießsimulation fehlerbehaftet ist, ist sie alternativlos, um die Orientierung in einem kompletten Bauteil abzuschätzen.

## 6.4.2 Einfluss des Anspritzpunktes

Neben dem ursprünglichen Anguss, wie er in Abb. 6.4 positioniert ist, wurden zwei weitere Anspritzpunkte eingefügt. Die Wahl der Lage der weiteren Anspritzpunkte wurde nicht davon abhängig gemacht, ob sie sinnvoll in Bezug auf Verarbeitungsparameter (Zykluszeit, Bindenähte, etc.) ist. Das Ziel war lediglich verschiedene Orientierungen zu erhalten und zu untersuchen welchen Einfluss sie auf die Struktursimulation haben. In Abb. 6.12 sind die Anspritzpunkte mit den daraus resultierenden Faserorientierungen entsprechend der Moldflow-Simulationen dargestellt.

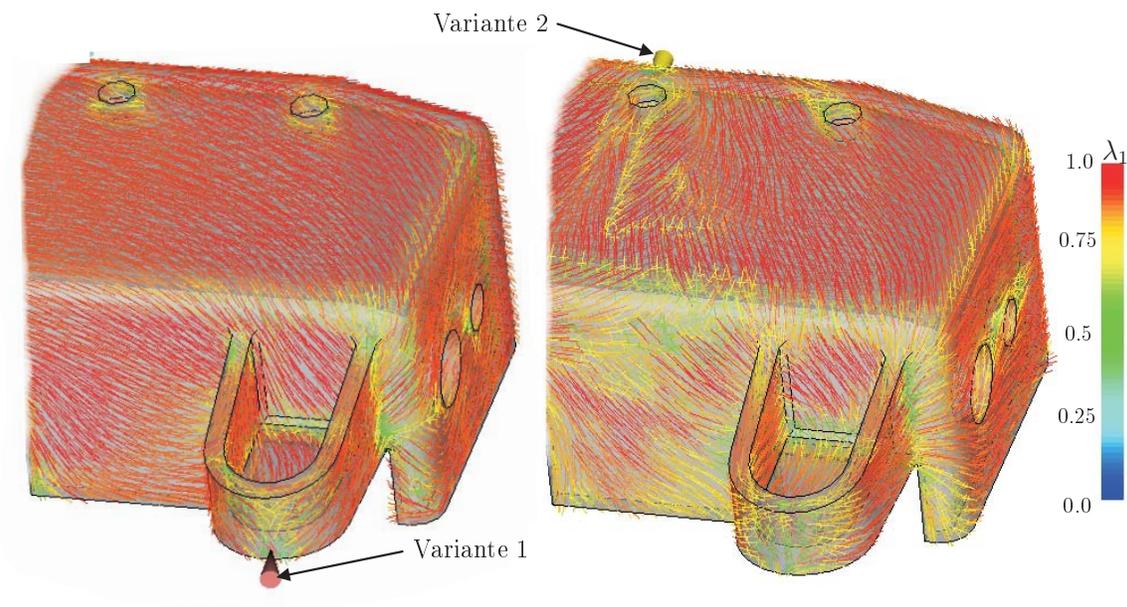


Abbildung 6.12: Darstellung der Variation des Anspritzpunktes und der daraus resultierenden Faserorientierungen

Die erste Variation des Anspritzpunktes führt zu einer sehr starken Faserorientierung fast im gesamten Bauteil. Im Bereich des Angusses und des Stoßes der Lasche auf den Grundkörper sind die Fasern in kleineren Bereichen weniger stark orientiert. Bei der zweiten Variante ist ein großer Teil der Frontseite und das äußere Ende der Befestigungslasche gering orientiert. Die anderen Bereiche sind zum großen Teil ebenfalls stark orientiert. Die Ausrichtung der Fasern ist zwischen beiden Varianten jedoch unterschiedlich. Gerade im oberen Bereich der Abdeckung und im oberen Bereich der Verbindung zwischen Lasche und Abdeckung existieren Unterschiede. Bei Variante 2

sind die Fasern stärker in Belastungsrichtung orientiert. Die stärkere Orientierung in Belastungsrichtung steigert die Steifigkeit und die Kriechresistenz in begrenztem Maße, was zu einer geringeren Absenkung der Befestigungslasche führt (vgl. Abb. 6.13).

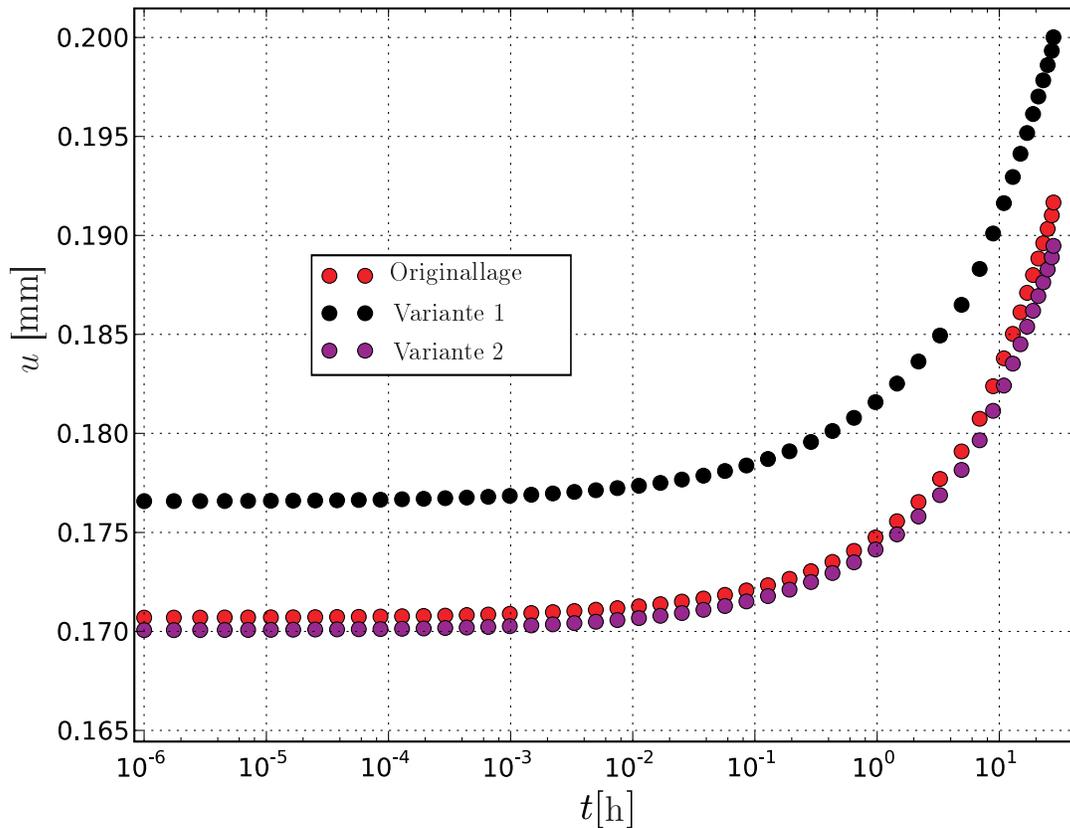


Abbildung 6.13: Studie zur Absenkung der Befestigungslasche in Abhängigkeit der Lage des Anspritzpunktes

In Bezug auf die Kriechresistenz hat die Lage des Anspritzpunktes nur einen begrenzten Einfluss. Die zwei untersuchten Varianten und die des originalen Einspritzpunktes liegen recht nah beisammen. Die größte Differenz der Absenkung von ca. 8% ist zwischen Variante 1 und Variante 2 festzustellen. Der originale Anspritzpunkt führt zu einer Absenkung, die zwischen beiden Varianten liegt.

# 7 Zusammenfassung

Die Beschreibung des Kriechverhaltens von kurzfaserverstärkten Kompositen ist von mehreren Faktoren abhängig. Besonders wichtig für das Verhalten des Komposites ist dabei das Langzeitverhalten der thermoplastischen Matrix, in die die Fasern eingebettet sind. Ein weiterer Faktor, der einen wesentlichen Einfluss hat, ist die faserinduzierte Anisotropie. Entscheidend ist in diesem Zusammenhang nicht nur die Hauptorientierungsrichtung bezogen auf die Hauptbelastungsrichtung, sondern auch der Grad der Faserorientierung. Im Gegensatz zu Langfaserverbunden sind in kurzfaserverstärkten Kompositen nicht alle Fasern in die Hauptorientierungsrichtung ausgerichtet. Deshalb muss das Werkstoffmodell die vielfältigen Orientierungszustände berücksichtigen können.

Um die genannten Aspekte des Werkstoffverhaltens entsprechend zu berücksichtigen, wurde ein 2-Skalenansatz gewählt. Es wird angenommen, dass ausschließlich die Zeitabhängigkeit der Eigenschaften der Matrix für das makroskopisch beobachtete zeitabhängige Verhalten des Komposites ursächlich ist. Mithilfe mikromechanischer Ansätze wird die makroskopisch aufgebrachte Spannung in die Anteile zerlegt, die die einzelnen Konstituenten aufnehmen. Die von der Matrix aufgenommene Spannung ist der Eingangswert für die Auswertung eines nichtlinearen, generalisierten Kelvin-Voigt-Modells. Aus der Deformation dieses mechanischen Ersatzmodells wird analog zur Bestimmung des elastischen Moduls der Kriechmodul bestimmt. Mit diesem wird zunächst ein vollständiger Satz von transversal-isotropen Kennwerten bestimmt. Aufgrund der Verwendung des Kriechmoduls sind diese im Laufe der Zeit und in Abhängigkeit der Belastung veränderlich. Im Anschluss wird der angenommenen Faserorientierung durch eine Orientierungsmittelung Rechnung getragen.

Maßgeblich für die Kriechvorgänge im Werkstoff ist neben der polymeren Matrix, die Präsenz der Fasern und deren Orientierungszustand. Da dieser experimentell nur schwer zugänglich ist, wird er numerisch mithilfe von Moldflow abgeschätzt. Es werden in diesem Zusammenhang die Ergebnisse dreidimensionaler Füllsimulationen ei-

---

nes Schulterstabes und eines Bauteils präsentiert. Im Bauteil wird an einer Stelle die experimentell bestimmte Faserorientierung mit der Vorhersage der Orientierung aus Moldflow verglichen.

Die erarbeitete Vorgehensweise ist mithilfe einer anwenderspezifischen Subroutine in Abaqus implementiert. Sie wird auf zwei verschiedene Polymer-Fasersysteme mit jeweils zwei unterschiedlichen Füllgraden angewendet. Zunächst werden Zug-Kriechversuche für jeden Werkstoff anhand dieses Algorithmus nachvollzogen. Die Ergebnisse werden den Daten aus der Campus-Datenbank<sup>©</sup> gegenübergestellt. Das erste Polymer-Fasersystem ist ein Polyamid mit dem Namen Ultramid A3W Gx und das Zweite ein Polybutylenterephthalat mit dem Namen Ultradur B4300 Gx. Bei Ultramid lässt sich feststellen, dass das geringer gefüllte Polymer (15 Gew.-%) mit einer Abweichung von maximal 6% und das stärker gefüllte (30 Gew.-%) mit ungefähr 12% nah an den Campus-Daten liegen. Die Tendenz einer Vergrößerung des Fehlers bei höherem Füllgrad lässt sich im Gegensatz zum Ultramid beim Ultradur nicht beobachten. In der Zusammenschau der Ergebnisse ist der Fehler beim Ultradur für beide Füllgrade punktuell bei höheren Spannungen etwas größer. Im Durchschnitt liegt der Fehler bei dem mit 30 Gew.-% gefüllten Ultradur bei weniger als 10%, bei dem mit 20 Gew.-% gefüllten sind es ca. 15%.

Am Beispiel einer Elektronikabdeckung wird die Faserorientierung aus der Spritzgießsimulation zur Strukturanalyse nach Abaqus auf ein inkompatibles, zur Strukturanalyse optimiertes Netz transferiert. Die Belastung der Abdeckung wird entsprechend eines experimentellen Setups simuliert und die gewonnenen Ergebnisse des Kriechversuches werden mit experimentellen Werten verglichen. Zusätzlich sind die Ergebnisse einer isotropen Simulation gegenübergestellt. Im Vergleich zu den experimentellen Ergebnissen, unterschätzt die anisotrope Simulation diese im Durchschnitt um ca. 15%, während die Ergebnisse der isotropen Simulation sehr nah an den experimentellen Daten liegen. Bereits im ersten Zeitschritt, wo von elastischem Verhalten ausgegangen werden kann, liegt die anisotrope Rechnung ca. 10% unter dem experimentellen Wert. Diese Differenz der anisotropen Rechnung ist das Resultat von diversen Unsicherheiten in den verwendeten Parametern. Wichtige aber nicht quantifizierbare Ursachen für die beobachtete Abweichung sind die verwendete Faserlänge und der numerisch durch Moldflow ermittelte Orientierungszustand der Fasern. Diese Ursachen sind jedoch nicht abhängig vom verwendeten Algorithmus und würden auch bei anderen Modellierungen das Ergebnis beeinflussen.

Der Einfluss des Orientierungszustandes der Fasern wird durch Variation des Anspritzpunktes untersucht, wobei das Augenmerk nur auf das Erzielen unterschiedlicher Orientierungszustände gelegt wird. Andere Aspekte, wie die Füllzeit oder die vollständige Füllung der Kavität sind nicht berücksichtigt. Die größte Differenz der simulierten Varianten liegt bei ca. 8%. Diese Differenz, die sich nur aus der Variation eines Parameters, nämlich der Stelle des Anspritzpunktes, ergibt, illustriert exemplarisch mit welchen Problemen und Unsicherheiten eine Auslegung von spritzgegossenen Bauteilen behaftet ist.

# Literaturverzeichnis

- [1] VDI. Kunststoffe im Automobilbau. <http://www.vdi.de/vdi/organisation/schnell-auswahl/fgkf/k/02627/>, 2008.
- [2] J. M. Kraus. Hochleistungskunststoffe ersetzen Aluminium unter der Motorhaube. <http://www.maschinenmarkt.vogel.de/themenkanaele/konstruktion/werkstoffe/articles/120691/>, 2008.
- [3] G. Ehrenstein. *Faserverbund-Kunststoffe*. Hanser, München, 2006.
- [4] K. K. Chawla. *Composite Materials*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1987.
- [5] H. Schürmann. *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2010.
- [6] H. Altenbach and J. Altenbach. *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner, Wiesbaden, 1994.
- [7] J. C. Halpin. The Halpin-Tsai equations: A review. *Polymer Engineering and Science*, vol. 16:344–352, 1976.
- [8] M.W. Darlington, P.L. McGinley, and G.R. Smith. Creep anisotropy and structure in short-fiber-reinforced thermoplastics. Part I: Prediction of 100s creep modulus at small strains. *Plast. Rubber Compos. Process. Appl.*, vol. 2:51–58, 1977.
- [9] T. Pflamm-Jonas. *Auslegung und Dimensionierung von kurzfaserverstärkten Spritzgussbauteilen*. Dissertation, Fachbereich Material- und Geowissenschaften der Technischen Universität Darmstadt, 2001.
- [10] W. N. Findley, J. S. Lai, and K. Onaran. *Creep and Relaxation of nonlinear viscoelastic materials*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1976.

- 
- [11] Q. H. Qin and Q. S. Yang. *Macro-Micro Theory on Multifield Coupling Behaviour of Heterogeneous Materials*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2008.
- [12] Y. Efendiev and T. Y. Hou. *Multiscale Finite Element Methods: Theory and Applications*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2010.
- [13] J. Fish and A. Wagiman. Multiscale finite element method for a locally nonperiodic heterogeneous medium. *Computational Mechanics*, vol. 12:164–180, 1993.
- [14] S. Sridharan. Nonlinear viscoelastic analysis of composites using competing micromechanical models. *Journal of Composite Materials*, vol. 40:257–282, 2006.
- [15] C. T. Sun and J. K. Wu. Viscoelastic interphases in polymer matrix composites: theoretical models and finite-element analysis. *Composites Science and Technology*, vol. 61:731–748, 2001.
- [16] J. D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 241:376–396, 1957.
- [17] R. Hill. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11:357–372, 1963.
- [18] K. Tanaka and T. Mori. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, vol. 21:376–396, 1973.
- [19] C.-H. Chen, Y.-H. Chang, and C.-H. Cheng. Micromechanics and creep behaviour of fiber-reinforced polyether-ether-ketone composites. *Journal of Composite Materials*, vol. 29:359–371, 1995.
- [20] R. Schapery. *Nonlinear Viscoelastic and Viscoplastic Constitutive Equations Based on Thermodynamics*, volume vol. 1. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [21] S. G. Advani and C. L. Tucker III. The use of tensors to describe and predict fiber orientation in short fiber composites. *Journal of Rheology*, vol. 31:751–784, 1987.
- [22] J. S. Cintra and C. L. Tucker III. Orthotropic closure approximations for flow-induced fiber orientation. *Journal of Rheology*, vol. 39:1095–1122, 1995.

- 
- [23] C. L. Tucker III and E. Liang. Stiffness predictions for unidirectional short-fiber composites: Review and evaluation. *Composites Science and Technology*, vol. 59:655–671, 1999.
- [24] H. J. Böhm. A short introduction to basic aspects of continuum micromechanics. Technischer Report, Department of Computer Science, Oldenburg University, März 1998.
- [25] T. Mura. *Micromechanics of Defects in Solids*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Boston, Lancaster, 1987.
- [26] M. Kachanov, B. Shafiro, and I. Tsukrov. *Handbook of Elasticity Solutions*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2003.
- [27] H. L. Cox. The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. *British Journal of Applied Physics*, vol. 3:72–79, 1952.
- [28] G. P. Tandon and G. J. Weng. The effect of aspect ratio of inclusions on the elastic properties of unidirectionally aligned composites. *Polymer Composites*, vol. 5:327–333, 1984.
- [29] S. C. Lin and T. Mura. Elastic fields of inclusions in anisotropic media (ii). *physica status solidi (a)*, vol. 15:192–203, 2006.
- [30] S. K. Kanaun. Self-consistent schemes of averaging in mechanics of matrix composite materials. *Mechanics of Composite Materials*, vol. 26:984–994, 1991.
- [31] T. W. Chou, S. Nomura, and M. Taya. A self-consistent approach to the elastic stiffness of short-fiber composites. *Journal of Composite Materials*, vol. 14:178–188, 1980.
- [32] D. A. Jack and D. E. Smith. The effect of fibre orientation closure approximations on mechanical property predictions. *Composites Part A*, vol. 38:975–982, 2007.
- [33] C. Kröner, H. Altenbach, and K. Naumenko. Coupling of a structural analysis and flow simulation for short-fiber-reinforced polymers: property prediction and transfer of results. *Mechanics of Composite Materials*, 45, 2009.

- 
- [34] D. H. Chung and T. H. Kwon. Invariant-based optimal fitting closure approximation for the numerical prediction of flow-induced fiber orientation. *Journal of Rheology*, vol. 46:784–790, 2002.
- [35] D. H. Chung and T. H. Kwon. Improved model of orthotropic closure approximation for flow induced fiber orientation. *Polymer Composites*, vol. 22:636–649, 2001.
- [36] A. Al-Yafawi. Mechanical properties of short fiber reinforced thermoplastic injection molded parts. Diplomarbeit, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, 2005.
- [37] K. Burg, H. Haf, and F. Wille. *Höhere Mathematik für Ingenieure, Band II Lineare Algebra*. Teubner, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 2002.
- [38] F. R. Schwarzl. *Polymermechanik: Struktur und mechanisches Verhalten von Polymeren*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1990.
- [39] W. Tschoegl. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1989.
- [40] Abaqus. *Handbuch - Version 6.7*. D’Assault Systems.
- [41] A. Schmidt and L. Gaul. Bestimmung des komplexen Elastizitätsmoduls eines Polymers zur Identifikation eines viskoelastischen Stoffgesetzes mit fraktionalen Zeitableitungen. Technischer Report, Institut A für Mechanik Universität Stuttgart, 2001.
- [42] H. F. Brinson and L. C. Brinson. *Polymer Engineering Science and Viscoelasticity: An Introduction*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2008.
- [43] B. Sarabi. *Das Anstrengungsverhalten von Polymerwerkstoffen infolge ein- und zweiachsigen Kriechens*. Dissertation, Universität Kassel, 1984.
- [44] J. Wieser. *Zum Deformationsverhalten thermoplastischer Kunststoffe unter ein- und mehrachsigen Beanspruchungen*. Dissertation, Fachbereich Material- und Geowissenschaften der Technischen Universität Darmstadt, 1998.
- [45] M. Reiner. *Deformation, strain and flow: an elementary introduction to rheology*. Interscience Publishers, New York, 1960.

- 
- [46] M. Schlimmer. *Zeitabhängiges mechanisches Werkstoffverhalten*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.
- [47] H. Giesekus. *Phänomenologische Rheologie: Eine Einführung*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1994.
- [48] A. Schmidt and L. Gaul. Implementation von Stoffgesetzen mit fraktionalem Ableitungen in die Finite Elemente Methode. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 83:26–37, 2003.
- [49] R. Herrmann. *Fraktionale Infinitesimalrechnung*. Books on Demand GmbH, Nordstedt, 2008.
- [50] D. Blume. Fraktionale Differentialgleichungen mit Maple. Diplomarbeit, Universität Frankfurt, 2002.
- [51] P. Haupt. *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2002.
- [52] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego, 1999.
- [53] K. Diethelm, N. J. Ford, and A. D. Freed. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics*, vol. 29:3–22, 2002.
- [54] H. Schwarz. *Numerische Mathematik*. Teubner, Stuttgart, 1993.
- [55] BASF. Produktinformation Ultradur B4300 G6. BASF-Produktdatenblatt, 2010.
- [56] BASF. Produktinformation Ultramid A3W G6. BASF-Produktdatenblatt, 2010.
- [57] BASF. Python homepage. Datenbank: Campus-Datenbank, 2008.
- [58] J. Nelder and R. Mead. A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, vol. 7:308–313, 1965.
- [59] P. Lu, J. Nocedal, C. Zhu, and R. H. Byrd. A limited-memory algorithm for bound constrained optimization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 16:1190–1208, 1994.

- 
- [60] C. Sun and J. Wu. Stress distribution of aligned short-fiber composites under axial load. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 3:130–144, 1984.
- [61] T. Lei, Z. Yao, H. Wang, and P. Wang. A parallel fast multipole BEM and its applications to large-scale analysis of 3-d fiber-reinforced composites. *Acta Mech Sinica*, vol. 22:225–232, 2006.
- [62] D. C. Lagoudas, A. C. Gavazzi, and H. Nigam. Elastoplastic behavior of metal matrix composites based on incremental plasticity and the mori-tanaka averaging scheme. *Computational Mechanics*, vol. 8:193–203, 1991.
- [63] J. Schjodt-Thomson and R. Pyrz. Overall creep modelling of short fibre reinforced composites with weakened interfaces and complex fibre orientation distributions. *Mechanics of Materials*, vol. 32:349–359, 2000.
- [64] W. Lutz, G. Lasko, S. Schmauder, S. Predak, O. Bullinger, H. Gerhard, and G. Busse. Spritzgieß-Simulation eines glasfaserverstärkten Formteils mit Bindenaht zur Berechnung von Faserorientierung und resultierenden mechanischen Eigenschaften. 19. Stuttgarter Kunststoff Colloquium, 2005.

## Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungskommission vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

*Ort, Datum*

*Carsten Kröner*

# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Geburtsdaten	Carsten Kröner, geboren am 6. Januar 1983 in Halle/Saale, Deutschland
Wohnsitz	Kefersteinstraße 6, 06110 Halle/Saale
Familienstand	Verheiratet
Kinder	Anton Kröner, geboren am 10. April 2010

## Schulbildung

1989 – 1993	Grundschule, Heideschule in Halle/Saale
1993 – 2002	Gymnasium, Thomas-Müntzer-Gymnasium in Halle/Saale
2002 – 2007	Universität, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Halle/Saale, Diplomstudium der Ingenieurwissenschaften in der Fachrichtung „Allgemeine Werkstoffwissenschaft“ mit der Vertiefung „Kunststofftechnik“

## Berufliche Tätigkeit

2005	Praktikum, Klöckner-Pentaplast, Montabaur
2007 – dato	Wissenschaftlicher Mitarbeiter, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Halle/Saale

21. August 2011