Diss.
10T

52

49

POTIORA
SERIERVM FIGVRATARVM
SYMPTOMATA,

QVIBVS

COMBINATIONVM MYSTERIVM

CONTINETVR

DECLARAT

IO. IACOBVS HENTSCHIVS

MATHEM. IN ACADEMIA IVLIA-CAROLINA PROFESSOR
P. O. ET SOC. CÆS. REG. ITAL. SODALIS.

Accedunt Lectiones in Academia Iulia-Carolina, per ſemeſtre hybernum anno 1763. habendæ.

HELMSTADII

LITTERIS DRIMBORNIANIS.

PRÆFAMEN.

Notiſſimum iis, qui *Quanti* ſcientiam, quod ad omnia rerum genera, quæ fingi modo poſſunt, pertingit, nacti ſunt: Contemplationem *Serierum* communi aliqua lege formatarum & ad terminum quemvis productarum, non ſolum eſſe jucundam, mentisque humanæ aciem in perveſtigando vero eximium in modum intendere; ſed etiam, ut alios uſus prætermittam, maximo cum fructu nonnunquam adhiberi tam in Quadraturis ſpatiorum, quam Curvarum Rectificationibus. Ad has Series primario referas ſic dictas *Figuratas*, quæ exhibent terminos ex continua Arithmetice proportionalium, ortorumque numerorum additione genitos. Peculiares, quas habent ejusmodi *Series Figuratæ* affectiones, inſignes ſane ſunt & ulteriorem merentur diſcuſſionem, cum earum uſus latiſſime pateat, adeo, ut ipſum *Combinationum Myſterium* his circumſcribatur limitibus; id quod palam erit, ubi Modos combinandi res quascunque contulerimus cum ipſis Seriebus figuratis. Equidem Varii, inter quos *Io. Walliſium* & *Nic. Mercatorem* nominare licet, Serierum Figuratarum naturam ſpeculari adgreſſi ſunt, ab *Inductione* ſeu Singularium enumeratione rem exorſi. Sed cum ſingularia numero prorſus ſint infinita, ita, ut omnes caſus ſingulares recenſere idem ſit ac arenam maris numerare velle; proprietates dictarum Serierum deinceps ab aliis ex ideis primis & ſimpliciſſimis univerſaliter ſunt erutæ; id quod Scientiarum humanarum ordo omnino poſtulat. Recte enim *Ariſtoteles* Analyt. Poſt. Libr. I. c. 15. Ἡ μὲν ἀπόδειξις ἐκ τῶν καθόλȣ· ἡ δ' ἐπαγωγὴ ἐκ τῶν κατὰ μέρος. ἀδύνατον δὲ τὰ καθόλȣ θεωρῆσαι, εἰ μὴ δι᾽ ἐπαγωγῆς. Idem *ſapientiæ antiſtes* rem lucidius exponit, *Phyſic.* Libr. I. c. 1. Τότε γὰρ οἰόμεθα γινώσκειν ἕκαστον, ὅταν τὰ αἴτια γνωρίσωμεν τὰ πρῶτα, καὶ τὰς ἀρχὰς τὰς πρώτας, καὶ μέχρι τῶν στοιχείων. Propoſitum eſt hoc Conamine explicare ea *Serierum Figuratarum* Symptomata, quæ *Artis* ſic dictæ *Combinatoriæ* conſtituunt fundamentum; reliquis vel plane miſſis vel leviter tactis. Qua quidem in re eam, quam rei natura patitur, adhibebo perſpicuitatem, ea expoſiturus, quæ fini præfixo reſpondent. Sed ne præfamen excedat ipſum negotium expediendum; orationis vulgaris vinculo ſolutus; rem ipſam adgrediar.

DE POTIORIBVS SERIERVM FIGVRATARVM SYMPTOMATIBVS, QVIBVS COMBINATIONVM MYSTERIVM CONTINETVR.

I. *Numeri* qui dicuntur *Figurati* ſupponunt *Seriem Primitivam* ex terminis æqualibus conflatam; nec non *Generatores*, qui Seriem quamvis propoſitam inchoant. *Series primitiva*, quæ ſub formationis conditione ſpectatur, ex qua reliqua omnia quaſi reſultant, poteſt eſſe quælibet, terminos modo æquales comprehendat; nec non *Generatores* in Seriebus quibusvis ex arbitrio definiuntur. Simplicitati tamen rei propoſitæ congruum: Componere Seriem primitivam & Seriei cujusvis Generatores ex Vnitatibus.

II. His ita conſtitutis; geneſis ſeu formatio numerorum figuratorum quæ involvit ſummas terminorum ex continua additione genitas, eſt in poteſtate; his ſolummodo obſervatis. α. *Terminum primum* Seriei ſequentis reſpondere termino primo Seriei antecedentis. β. Loca vacua impleri Cyphris. γ. *Terminum quemlibet* in Serie qualibet provenire, ſi, per partes operando, Termini uno loco ſuperiores Seriei præcedentis addantur; unde Terminus genitus in Serie ſequenti æquabitur ſummæ terminorum in Serie præcedente uno loco elevatorum. En! Schema ipſum.

Indices

Indices Serierum.

Indices Terminorum.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	IIX.	&c.
I.	1	0	0	0	0	0	0	0	
II.	1	1	0	0	0	0	0	0	
III.	1	2	1	0	0	0	0	0	
IV.	1	3	3	1	0	0	0	0	
V.	1	4	6	4	1	0	0	0	
VI.	1	5	10	10	5	1	0	0	
VII.	1	6	15	20	15	6	1	0	
IIX.	1	7	21	35	35	21	7	1	
&c.									

III. Ex Schematis huius contemplatione, ſequentia absque ulla difficultate colliguntur.

1. Columnas ſeu Series eſſe vel horizontales vel verticales.

2. Columnam primam verticalem Monadibus conſtare; ſecundam numeris lateralibus, tertiam trigonalibus, quartam pyramidalibus &c. in infinitum. *Serierum* enim *ſummatricium*, quales ſunt Series figuratæ, ea eſt proprietas, ut ſine fine pergant.

3. Numerum Cyphrarum expreſſum per Indicem Seriei verticalis eſſe unitate minorem. Vnde, ſi Series dicatur m; erit numerus cyphrarum $m - 1$.

4. Columnarum horizontalium terminos ab unitate per intermedios tranſeuntes, adſcendere ad altiſſimum gradum; quem, ſi attigerint, deſcendunt per eosdem intermedios usque ad unitatem.

5. Terminum ordinis indefiniti n in Serie verticali m æquari termino m in Serie horizontali n.

6. Serierum horizontalium ſummas efficere Progreſſionem Geometricam eamque duplam. Sic Summa Seriei horizontalis primæ $1 = 1$; ſumma Seriei horizontalis ſecundæ $1 + 1 = 2$; ſumma Seriei horizontalis tertiæ $1 + 2 + 1 = 4$; ſumma Seriei horizontalis quartæ $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ &c.

Propof. I. Theor.

Si Series primitiva conſtat Vnitatibus; ſumma terminorum quotlibet eſt ad ſummam terminorum totidem ultimo æqualium, ut Vnitas ad Seriei primitivæ Indicem.

Demonſtr.

Cum Series primitiva componatur ex Vnitatibus; erit Summa terminorum quotvis ab initio eadem cum ſumma terminorum totidem ultimo æqualium, ſeu quod idem: cum multiplo termini ultimi; juxta numerum terminorum. Vnde, ſi ſumma terminorum quotvis ab initio vocetur S; multiplum termini ultimi, quod reſpondet numero terminorum ab initio additorum $n \times 1$; Vnitas 1 & Seriei primitivæ Index I. erit utique $S : n \times 1 = 1 : I$.

Corol. I. Hinc patet: Rationem dictarum Summarum inter ſe comparatarum, eſſe æqualitatis.

Corol. II. Si Series primitiva loco Vnitatum comprehendat terminos quoscunque inter ſe æquales, uti, $a = b = c = d = e = f$ &c. erit $S : n \times f = 1 : I$.

Propof. II. Theor.

Si ſint Series duæ figuratæ proxime ſe conſequentes, in quarum antecedente Summa terminorum ad Summam terminorum totidem maximo æqualium ut Vnitas ad Seriei Indicem; erit & Summa terminorum Seriei proxime conſequentis ad Summam terminorum totidem maximo æqualium, ut Vnitas ad hujus Seriei Indicem.

Vocentur Series duæ figuratæ proxime ſe conſequentes P & S, in quarum antecedente ſint termini, a, b, c, d, e, f, &c. & in conſequente o, g, h, k, l, p, q, &c. Numerus terminorum in Serie antecedente ſit n; erit in Serie conſequente $n + 1$. Index Seriei antecedentis ſit m; erit Index Seriei ſequentis $m + 1$. Dico jam: Si in Serie antecedente ſit $a + b + c + d + e + f : n \times f = 1 : m$; fore in Serie conſequente $q + p + l + k + h + g : n + 1 . q = 1 : m + 1$.

Demon-

a	o
b	g
c	h
d	k
e	l
f	p
	q

Demonstr.

In Serie antecedente per hyp. est $m : 1 = n \times f : a + b + c + d + e + f$, item $m : 1 = \overline{n - 1}.e : a + b + c + d + e$; porro $m : 1 = \overline{n - 2}.d : a + b + c + d$ &c. Iam, cum $q = a + b + c + d + e + f$, $p = a + b + c + d + e$ &c. ex defin. art. I. & II. erit, expressis terminis Seriei sequentis per terminos Seriei antecedentis $q = \frac{n.f}{m}$, $p = \frac{\overline{n - 1}.e}{m}$, $l = \frac{\overline{n - 2}.d}{m}$, $k = \frac{\overline{n - 3}.c}{m}$, $h = \frac{\overline{n - 4}.b}{m}$, $g = \frac{\overline{n - 5}.a}{m}$; unde $q + p + l + k + h + g = \frac{nf + \overline{n - 1}.e + \overline{n - 2}.d + \overline{n - 3}.c + \overline{n - 4}.b + \overline{n - 5}.a}{m}$ & facta reductione $= \frac{n.\overline{f + e + d + c + b + a} - 1e - 2d - 3c - 4b - 5a}{m}$. Substitutis terminis ex Serie consequente, provenit $q + p + l + k + h + g = \frac{n.q - p - l - k - h - g}{m}$. Sublata fractione per multiplicationem fit $mq + m.\overline{p + l + k + h + g} = nq - p - l - k - h - g$, factaque translatione $mq + \overline{m + 1}.\overline{p + l + k + h + g} = nq$. Sublato mq erit $\overline{m + 1}.\overline{p + l + k + h + g} = nq - mq$ & diviso per $m + 1$ utrinque $p + l + k + h + g = \frac{\overline{n - m}.q}{m + 1}$. Addito q utrinque fit $q + p + l + k + h + g = \frac{\overline{n - m}.q + q}{m + 1.} = \frac{\overline{n + 1}.q}{m + 1}$. Diviso denique per $m + 1$; erit $\frac{q + p + l + k + h + g}{m + 1} = \overline{n + 1}.q$;

unde

unde resolvendo fit $q + p + l + k + h + g : \overline{n+1}.q = 1 : m+1$.

Q. e. d.

Corol. I. Hinc liquet: Rationem, quam habet Summa terminorum quotvis ad Summam terminorum totidem maximo æqualium in Serie prima esse ut $1 : I$; in secunda ut $1 : II$; in tertia ut $1 : III$; in quarta ut $1 : IV$ &c.

Corol. II. Rationem Summarum dictarum inter se comparatarum esse constantem seu invariabilem in quavis Serie.

Propos. III. Probl.

Ex dato Indice Seriei m & numero terminorum n; invenire terminorum quotlibet Summam.

Solutio.

Cum Series P & S de quibuslibet Seriebus possint explicari; nec non in Demonstratione præcedente inventum sit $o + p + l + k + h + g = \frac{\overline{n-m}.\,q}{m+1}$; mediante hac æquatione, quæ terminorum Summam notat, in Methodum incidimus, summandi terminos quosvis n in Serie qualibet m; hoc solum observato: Terminum q æqualem Summæ uno loco superiorum terminorum Seriei præcedentis art. II. exprimi per summam terminorum Seriei præcedentis inventam.

1. Quod ad Seriem primam ex Vnitatibus conflatam attinet; Summa terminorum n erit $\frac{n}{1}$. Est enim per *Propos. primam*, $I : 1 = n \times 1 : S$.

2. Pro invenienda Summa terminorum n in Serie secunda, ponatur $m = 1$, $q = \frac{n}{1}$; unde $\frac{\overline{n-m}.\,q}{m+1} = \frac{n.\overline{n-1}}{1.2}$.

3. Pro invenienda Summa terminorum n in Serie tertia; fiat $m = 2$, $q = \frac{n.\overline{n-1}}{1.2}$. Erit $S = \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.\,2.\,3}$

4. Pro

4. Pro invenienda Summa terminorum n in Serie quarta, ponatur $m = 3$, $q = \frac{n.\ n-1.\ n-2}{1.\ 2.\ 3.}$; erit $S = \frac{n.\ n-1.\ n-2.\ n-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$

Denique in Serie m erit Summa indefinita terminorum n $\frac{n.\ n-1.\ n-2.\ n-3.\ n-4.\ \text{- - - -}\ n-m+1}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ \text{- - - -}\ m}$

Propos. IV. Probl.

Ex dato Indice Seriei m, invenire terminum quemlibet n.

Solutio.

Cum terminus ordinis n sit semper æqualis Summæ terminorum uno loco superiorum Seriei præcedentis; necesse est, ut tam numerus terminorum Seriei præcedentis, quam Index Seriei dictæ definiantur. Est autem generationis terminus n in Serie proposita m, unde numerus terminorum Seriei præcedentis erit $n - 1$ & Index $m - 1$.

1. Hinc, cum per Propos. III. in Serie prima $S = n$; erit terminus ordinis n in Serie secunda $\frac{n-1.}{1}$

2. Summa terminorum n in Serie secunda per eandem Propos. III. inventa est $\frac{n.\ n-1}{1.\ 2}$; unde terminus ordinis n in Serie tertia erit $\frac{n-1.\ n-2.}{1.\ 2}$

3. Summa terminorum n in Serie tertia inventa est $\frac{n.\ n-1.\ n-2}{1.\ 2.\ 3}$; unde terminus n in Serie quarta erit $\frac{n-1.\ n-2.\ n-3.}{1.\ 2.\ 3}$

4. Summa terminorum n in Serie quarta inventa est $\frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3}{1.\;\;2.\;\;3.\;\;4}$; unde terminus n in Serie quinta erit

$$\frac{n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4.}{1.\;\;2.\;\;3.\;\;4}$$

Denique in Serie m erit terminus ordinis n.

$$\frac{n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4\;\;\text{- - - - -}\;\;n-m+1.}{1.\;\;2.\;\;3.\;\;4\;\;\text{- - - - -}\;\;m-1.}$$

Propos. V. Theor.

In Seriebus figuratis Summa terminorum ab unitate incipientium est ad Summam terminorum totidem ultimum sequenti æqualium; ut Vnitas ad Seriei propositæ Indicem.

Demonstr.

Supra ostensum in Demonstratione Propos. III. esse $p+l+k+h+g = \frac{n-m}{m+1}q$. Quæ quidem æquatio multiplicata per $m+1$; dat $(p+l+k+h+g)(m+1) = (n-m)q$. ex cujus resolutione provenit $p+l+k+h+g : (n-m)q = 1 : m+1$.
Hoc est: Summa terminorum ab unitate incipientium est ad Summam terminorum totidem ultimum sequenti æqualium ut Vnitas ad Seriei propositæ Indicem $(m+1)$.

Propos. VI. Probl.

Ex dato Indice Seriei m & numero terminorum n; invenire terminorum quotlibet ab unitate incipientium, Summam.

Solutio.

Cum terminos ab unitate initium capere assumamus; evidens est, numerum terminorum n sub hac hypothesi esse $n+m-1$. Si igitur in Formulis Summarum supra Propos.

III. inventarum, loco n substituatur $n + m - 1$; terminorum ab unitate incipientium Summæ innotescent.

1. Nempe, in Serie prima ubi $m = 1$; formula supra inventa $\frac{n}{1}$ hic etiam valet.

2. In Serie secunda, ubi $m = 2$; formula supra inventa $\frac{n.\,n-1}{1.\,2}$ transmutatur in $\frac{n.\,n+1.}{1.\,2}$

3. In Serie tertia, ubi $m = 3$; formula $\frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2.\,3}$ transit in $\frac{n.\,n+1.\,n+2.}{1.\,2.\,3}$

Denique in Serie m, erit Summa terminorum ab unitate incipientium

$$\frac{n+m-1.\ n+m-2.\ n+m-3.\ n+m-4\ \text{- - -}\ n}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4\ \text{- - -}\ m}$$

Propos. VII. Probl.

Ex dato Indice Seriei m ab unitate incipientis; invenire terminum quemvis n.

Solutio.

Cum Summa terminorum quotlibet ab unitate incipientium ex Propos. VI. præcedente detur; terminus ordinis n Seriei m ab unitate incipientis, simul dabitur; si modo m transmutetur in $m-1$; unde pro Formula illa, quæ exprimit Summam terminorum quotlibet ab unitate incipientium, hæc pro termino quovis ordinis n in Serie m venit

$$\frac{n+m-2.\ n+m-3.\ n+m-4.\ n+m-5\ \text{- - -}\ n}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4\ \text{- - -}\ m-1}$$

Nota.

Haec sunt praecipua, quæ mysterio *Combinationum* explicando possunt inservire, *Serierum figuratarum* symptomata; uti proxima data occasione conabor ostendere. Vt plura paucis comprehenderentur; ad rei propositæ universalitatem, quantum fieri potuit, respexi; id quod scientiarum humanarum naturæ esse convenientissimum, censeo. Equidem *Io. Wallisius* in *Arithmetica sua Infinit.* quædam huc spectantia de Seriebus figuratis attulit; sed rem totam *Inductione sola* firmans, iis, qui Methodi Vniversalis leges sectantur, minus satisfacere videtur. Majori cum successu hoc discusserunt argumentum *Iac.* & *Io. Bernoulli*; ille in sua Arte Conj. hic Tom. III. Operum Lect. Hosp. 47: quibus meretur jungi B. *Christianus Aug. Hausenius* in Elem. Mathes. anno 1734. Lipsiæ in 4to editis, quo duce me olim *Mathemata* percepisse, semper lætabor. Restat, ut indicem Lectiones academicas per semestre hybernum anno 1763. habendas.

Hor. X-XI. *Privatim* explicabo *Philosophiam meam mathematicam ex Euclide restitutam.*

Hor. XI-XII. *Psychologiam*, secuturus Librum meum sub indice editum: *Versuch über die Folge der Veränderungen in der menschlichen Seele.*

Hor. II-III. *Mathesin Puram*, nach meiner *Anweisung zu den mathematischen Wissenschaften.*

Hor. III-IV. *Mathesin Applicatam*, secundum eadem Elementa.

Hor. IV-V. *Publice Staticam, Hydrostaticam & Hydraulicam* docebo.

Nec iis deero qui *Algebram*; nec non Architecturam Civilem & militarem secundum B. *Hederici Progymnasmata Architectonica*, quæ cum variis observationibus denuo publicavi, addiscere cupiunt.

Scribebam Helmstadii d. 15. Iul. anno 1763.

POTIORA

...VM FIGVRATARVM

...YMPTOMATA,

QVIBVS

...ATIONVM MYSTERIVM

CONTINETVR

DECLARAT

...OBVS HENTSCHIVS

...DEMIA IVLIA-CAROLINA PROFESSOR
...OC. CÆS. REG. ITAL. SODALIS.

... in Academia Iulia-Carolina, per ſemeſtre
...nno 1763. habendæ.

...HELMSTADII
...S DRIMBORNIANIS.