Bey dem Antritte
des
öffentlichen Lehramtes
der
Mathematik und Naturlehre
auf
der Friedrichs-Universität zu Halle
zeigt
seine nächst zu haltenden Vorlesungen
an,

und verbindet mit dieser Anzeige
eine
geometrische Entwickelung
der Eigenschaften
der
stereographischen Projection

Georg Simon Klügel,
der Weltw. Doctor und Correspondent der Königl. Gesellsch. der Wissenschaften zu Göttingen.

1788.

Habe ich je gewünscht, daß mir ein reicheres Maaß von Kräften und Kenntnissen zu Theil geworden seyn möchte, als ich zu besitzen mir schmeicheln darf, so ist es jetzt, da ich dem allergnädigsten Rufe Seiner Königl. Majestät von Preußen zufolge ein Lehramt antrete, das mich durch den Glanz einer der angesehensten Universitäten Deutschlands, durch die Verdienste meiner würdigen Vorgänger, und durch die von ganz Europa anerkannte Wichtigkeit der Wissenschaften, welche ich zu lehren übernommen habe, zu der äußersten Anstrengung meiner Kräfte auffordert. Was ich bis jetzt in der Lehrstelle, die ich zwar verlassen habe, aber immer in dem dankbarsten Andenken erhalten werde, für die Ausbreitung nützlicher Kenntnisse etwa gethan haben mag, sehe ich gewissermaaßen als Vorbereitung zu einer noch größern Wirksamkeit an. So sehr erkenne ich mit dem gerührtesten Herzen die für mich so ehrenvolle Empfehlung des erhabenen Beförderers der Wissenschaften in den Königl. Preußischen Staaten, wodurch Seine Königl. Majestät bewogen worden, mir eine Lehrstelle anzuvertrauen, deren Wichtigkeit in ihrem ganzen Umfange zu übersehen ich mir selbst nicht ohne Schüchternheit getraue. Möge ich des auszeichnenden in mich gesetzten Vertrauens würdig erfunden werden, und die großen, der spätesten Nachkommenschaft noch wichtigen Bemühungen Seiner Excellenz um den Flor der Lehranstalten, innerhalb des mir angewiesenen Wirkungskreises befördern können.

Die Theilnehmung an dem Wohl der Universität macht es mir zur Pflicht, dem für ihren Flor so thätigen Herrn Canzler zu bezeugen, wie sehr die Verbesserungen, welche durch desselben Bemühung seit kurzem in mehrern Fächern gemacht worden, mir erfreulich gewesen sind, und wie sehr ich den Veranstaltungen, welche desselben für den Ruhm dieser Universität eifrige Sorgfalt noch treffen wird, den besten Erfolg wünsche.

Daß ich die Ehre mit so vielen, durch ihre Verdienste um die Wissenschaften bekannten Männern näher verbunden zu werden, innigst schätze, davon wird mein ganzes künftiges Betragen ein Beweis seyn. Ich freue mich auf das Vergnügen, welches mir durch den lehrreichen Umgang mit denselben verschafft werden wird, und statte Ihnen meinen Dank für die schon erhaltenen Proben Ihrer Freundschaft und Zuneigung ab.

Die hier studierenden Freunde der Gelehrsamkeit versichere ich der eifrigsten Bemühung, Ihnen die wichtigen Wissenschaften, mit welchen ich mich beschäftige, so deutlich als gründlich vorzutragen. Wie sehr die Mathematik ihren Einfluß auf viele Wissenschaften und Künste verbreitet, ist bekannt genug. Als das vorzüglichste Mittel zur Bildung des Verstandes ist sie auch denjenigen wichtig, welche keinen unmittelbaren Gebrauch von derselben zu machen gedenken. Sie steht in der genauesten Verbindung mit der Naturlehre, in welcher alle Sätze, die sich strenge erweisen lassen, mathematischen Inhalts sind. Ich werde in dem gegenwärtigen halben Jahre mich auf die theoretische Mathematik und den mathematischen Theil der Naturlehre einschränken. Die **Anfangsgründe der reinen Mathematik**, werde ich nach meinem Handbuche, das aus dem ersten Theile meiner Encyklopädie besonders abgedruckt ist, von 10 = 11 Uhr vortragen, und die Anwendung der abstracten Lehren, so viel nur möglich ist, zu zeigen suchen.

Bey dem Vortrage der höhern Mathematik oder der Analysis endlicher und unendlicher Größen werde ich die Hauptlehren vornemlich aus einander setzen, und die Schwierigkeiten, welche durch die Allgemeinheit des symbolischen Ausdrucks der Verbindung der Größen dem Anfänger hinderlich fallen, aus dem Wege räumen. Daher werde ich mich nicht genau an irgend ein vorhandenes System dieser Wissenschaft binden: es werden aber die Anfangsgründe des Herrn Obristlieutenants von Tempelhoff vorzüglich von mir erläutert werden.

Von der **angewandten Mathematik** werde ich den physikalischen Theil, nemlich die mechanischen, die optischen und die astronomischen Wissenschaften, nach dem Handbuche des sel. Hrn. Hofr. Karsten von 11 - 12 Uhr vortragen. Meine Absicht ist, sowol eine kurze Uebersicht der physisch-mathematischen Lehren selbst als ihrer Anwendungen zu geben, wobey ich die Beweise durch die Erfahrung anschaulich machen werde. Künftig gedenke ich die ganze Physik nach dem Erxleben-Lichtenbergischen Handbuche zu lehren, und die Freunde der mathematischen Physik, mit Uebergehung der schon erlernten Elementarkenntnisse, tiefer in ihre Untersuchungen zu führen.

In den öffentlichen Stunden von 3 - 4 Uhr werde ich die Anwendung der Rechenkunst auf die Geschäfte des gemeinen Lebens nach der zweyten Abtheilung des ersten Theils der mathematischen Anfangsgründe von Hr. Hofr. Kästner zeigen. Ueberhaupt werde ich die Anwendungen der Theorie sowol gelegentlich als auch in besondern Anweisungen zu machen, keine Veranlassung versäumen.

Eine Probe habe ich gleich in der folgenden Abhandlung, welche einen für die Theorie und Praxis zugleich wichtigen Gegenstand betrifft, gegeben. Der erste Zweck derselben ist zwar die reine geometrische Entwickelung eines besondern Falles der Perspectiv, der durch mehrere schöne Eigenschaften sich auszeichnet. Ich glaube, daß meine Behandlungsart größtentheils neu ist, und habe dadurch insbesondere das Studium der reinen Geometrie den Liebhabern der Mathematik empfehlen wollen. Die großen Fortschritte, welche die Analysis, oder die Entwickelung der Verbindungen der Größen durch allgemeine Rechnung gemacht hat, sind Ursache, daß die reine, von der Rechnung

nung freye Geometrie etwas vernachlässigt worden. Es ist aber nichts geschickter den Scharfsinn zu üben, als die Geometrie, wenn sie nach den großen Mustern des Alterthums behandelt wird. Zugleich empfiehlt sich diese Methode durch die Annehmlichkeit der Darstellung, welcher die allgemeinen Rechnungsmethoden entbehren. Meine Meynung ist zwar nicht, daß alle geometrische Untersuchungen synthetisch, das ist durch eine Zusammenkettung weniger einfachen Grundlehren, auf eine für jeden Fall eigenthümliche Art, ohne allgemeine, weitgreifende Rechnungsformeln behandelt werden sollen: denn die analytische Geometrie hat auch ihre Vorzüge. Nur wünsche ich, daß die synthetische Geometrie nicht versäumt werden möge. Als ein Beytrag zu derselben, der nur die gewöhnlichen Lehren der Geometrie voraussetzt, wird der folgende Aufsatz eine nützliche Uebung verschaffen. Die Anwendung auf die Zeichnung der Landcharten und Sonnenuhren wird die Nutzbarkeit abstracter Theorien gut darthun.

Geometrische Entwickelung der Eigenschaften der stereographischen Projection.

§. 1.

Die stereographische Projection ist eine perspectivische Entwerfung der Puncte einer Kugelfläche, wobey die Tafel durch den Mittelpunct der Kugel gelegt wird, und das Auge sich in dem einen Endpuncte des auf die Tafel senkrecht stehenden Durchmessers befindet. Es sey nämlich *ANBO* ein großer Kreis der Kugel: durch den Durchmesser *AB* setze man eine Ebene senkrecht auf Fig. 1.

auf

auf diesen Kreis, ziehe *NCO* senkrecht auf *AB*, und stelle das Auge in den Endpunct *O* des Durchmessers *NO*. Nun nehme man irgend einen Punct *D* auf *ANB*, ziehe *DO*, welche *AB* in *G* schneidet, so ist *G* die Projection oder das Bild von *D*. Nimmt man den Punct *E* in dem Halbkreise *AOB*, und zieht *OEH* an die verlängerte *AB* in *H*, so ist *H* das Bild von *E*. Solchergestalt wird jeder Punct der jenseitigen Halbkugel durch einen Punct innerhalb des großen Kreises durch *AB* auf der Tafel abgebildet, und jeder Punct der disseitigen Halbkugel durch einen Punct außerhalb dieses Kreises. Gewöhnlich wird nicht mehr als die jenseitige Halbkugel abgebildet; doch kann es wegen des Zusammenhanges der auf beiden Halbkugeln befindlichen Puncte nützlich seyn, auch einen Theil der disseitigen Halbkugel abzubilden. Um alle Gestirne, die in unserer Breite sichtbar werden, auf eine Charte zu bringen, hat Hr. Bode in der stereographischen Projection des Himmels, die seiner Anleitung zur Kenntniß des gestirnten Himmels beygefügt ist, von der südlichen Halbkugel eine Zone bis zum

40sten

40sten Grad der Breite mitgenommen. Wenn die Bogen *BE* und *Ae* vierzig Grad halten, so stellt diese Charte die scheinbare Höhlung des Himmels *eANBE* vor, wie sie einem Beobachter am Südpol erscheinen würde, wenn der Erdkörper weggenommen wird, und der Durchmesser der Charte ist *Hh*, deren Endpuncte durch die Linien *OE*, *Oe* bestimmt werden. Eine Landcharte, die nach der stereographischen Projection verfertigt ist, aus dem rechten Gesichtspuncte zu betrachten, muß man das Auge in die auf dieselbe durch den Mittelpunct der Charte senkrechte Linie stellen, in einer Entfernung, die dem Halbmesser der Kugel gleich ist, von deren Oberfläche ein Theil durch die Charte abgebildet wird, und das Auge betrachtet hiebey eigentlich einen Theil der innern Höhlung einer durchsichtigen Kugelfläche. Der Mittelpunct ist derjenige Ort, der auf der Kugel der Pol desjenigen großen Kreises ist, welcher zur Tafel dient. Eine solche Charte ist keine Abbildung einer Kugelfläche, wie sie einem Auge, das von außen die Kugel ansieht, erscheint. Will man sie als eine solche betrachten, so muß man sich immer an den Unterschied erinnern, der entsteht, wenn man eine hohle Kugelfläche von der innern Seite aus einem gewissen bestimmten Puncte oder ihre äußere Seite von irgend einem Puncte betrachtet.

§. 2.

Was die stereographische Projection zur Entwerfung der Landcharten vorzüglich brauchbar macht, wenn nicht etwa gewisse andere Zwecke erreicht werden sollen, ist, daß alle Kreise auf der Kugel nach dieser Projection entweder durch gerade Linien oder durch Kreise dargestellt werden, und daß die Winkel, unter welchen sich die Kreise auf der Kugel schneiden, in der Projection dieselben bleiben. Dadurch werden einzelne mäßig große Stücke, besonders um den Mittelpunct der Tafel, in der Abbildung den abgebildeten Theilen ziemlich ähnlich. Nur in Absicht der Größe darf man die verschiedenen Theile einer Projection nicht mit einander vergleichen, weil die dem Mittelpuncte der Tafel näherliegenden Theile kleiner sind, als die nach dem Umfange hin befindlichen, wenn

gleich

gleich die dadurch abgebildeten Theile der Kugelfläche einerley Größe haben. Zu astronomischen Zeichnungen wird die stereographische Projection fast in allen Fällen am dienlichsten seyn, insbesondere zu graphischen Operationen, die entweder die Stelle der Rechnung vertreten, oder zu einem vorläufigen Entwurf derselben, oder zur deutlichen Darstellung der Sätze und Auflösungen von Aufgaben dienen sollen. Bey den Doppelmayerischen Himmelscharten ist das Auge in dem Mittelpuncte der Kugel, und die Tafel ist eine die Kugel berührende Ebene. In dem Atlas des Herrn Bode ist das Auge auch in den Mittelpunct der Kugel gesetzt, und die Specialcharten stellen einzelne Stücke der Kugelfläche vor, von 60 Grad in der Länge und 46 Gr. etwa in der Breite, wo aber die Theile an dem Umfange nothwendig etwas verzogen sind. Die auf der Kugel gleich weit abstehenden Parallelkreise haben auch auf der Charte gleiche Entfernung, und sind gerade Linien; aber die Grade derselben haben zu den Graden des Meridians das gehörige Verhältniß, daher die Meridiane, außer dem mittlern auf der Charte krummlinicht sind, und die Parallelen nicht unter rechten Winkeln schneiden. Die Generalcharten von beiden Halbkugeln, und die erste Specialcharte sind nach der stereographischen Projection gezeichnet. Es ließe sich auch die Art, wie Seecharten gezeichnet werden, bey Himmelscharten gut anbringen, wenn die Declination nicht zu groß, etwa nicht über 60 Grad ist.

§. 3.

Die stereographische Projection ist schon den Alten bekannt gewesen. Ptolemäus bediente sich derselben, um den Himmel auf einer mit dem Aequator parallelen Ebene zu entwerfen. Ein solches Planisphärium hieß sonst ein Astrolabium *). In der ersten Hälfte des 16ten

*) Was Ptolemäus selbst im Almagesto V. 1. ein Astrolabium nennt, ist eine Gattung von Ringkugel (sphaera armillaris), die er zu Beobachtungen gebraucht. Bey den Schriftstellern des 16ten und 17ten Jahrhunderts bedeutet Astrolabium eine Projection der Kreise am Himmel auf eine Ebene, oder ein Planisphärium. Das Instru-

16ten Jahrhunderts nahm **Gemma Frisius** die Ebene des Colurus der Sonnenstillstands-puncte zur Tafel, und nannte die Projection ein Astrolabium catholicum. Nachher haben sich besonders einige Mathematiker unter den

Instrument ist wie eine flache Schüssel gestaltet, in deren Vertiefung mehrere Platten, für verschiedene Polhöhen, liegen, auf welchen die stereographischen Projectionen des Aequators, der Wendekreise, des Horizonts, der Verticalkreise, der Almucantarath oder dem Horizonte parallelen Kreise, des Dämmerungskreises und gewisser astrologischer Kreise gezeichnet sind. Auf dem Rande sind die Weltgegenden, die Winde und die Stunden aufgetragen. Auf der Hinterseite befindet sich ein Kreis, der in viermal 90 Grad getheilt ist, der Thierkreis mit den Monatstagen, eine Sonnenuhr und eine Scale zum Messen der Höhen. Noch gehört zu der vordern Seite eine Art von Netz, worauf der Thierkreis, der Aequator, die Coluri und verschiedene Kreise sich befinden, an welchen die Stellen merkwürdiger Sterne durch die Spitzen kleiner Ansätze angegeben sind. Dieses Netz wird auf die gedachten Platten gelegt, und stellt den Himmel in jeder

Jesuiten, Clavius, Aguilon, Tacquet und Dechales mit der Untersuchung der Eigenschaften der stereographischen Projection beschäfftigt. Des Clavius ziemlich seltenes Werk führt den Titel, Astrolabium, und ist zu Rom 1593.

(759.

jeder Lage gegen den Horizont vor. Eine recht gute Erklärung des Astrolabium, doch ohne Beweise, enthält die Elucidatio fabricae ususque Astrolabii, Jo. Stoeflerino authore. Lutetiae 1553. 8. welche Ausgabe ein Nachdruck ist, wie es der Verleger selbst anführt, aber ein sauberer und richtiger. Die Original-Ausgabe ist, nach Weidlers Bibliogr. Astron. zu Oppenheim 1513. in fol. gedruckt. In den mittlern Zeiten haben sich viele mit dem Astrolabium beschäfftigt, welche man in der eben gedachten Bibliographie und der Geschichte der Astronomie eben des Verf. nachsehen kann. Einer der ältesten ist ein gewisser Messalah im 9. Jahrh. dessen Arbeit Orontius Fineus, Prof. der Mathem. zu Paris im 16. Jahrh. gebraucht hat. Das Astrolabium scheint darum ein beliebtes Werkzeug gewesen zu seyn, weil man es bequem gebrauchen konnte, die astrologischen Themata zu entwerfen. Darum fehlen die Kreise für die 12 himmlischen Häuser und für die planetarischen Stunden auf demselben nicht.

(759. S. fol.) herausgekommen. Die äußerst verwickelten und bunten Figuren sind nicht einladend; auch sagt selbst Tacquet, daß er zweifele, ob jemand das ganze Buch mit Bedacht durchzulesen sich die Mühe genommen habe. Clavius macht viel Rühmens von seinem Werke. Des Ptolemäus Planisphärium erhebt er als eine übermenschliche Erfindung, glaubt aber doch, seine eignen Verzeichnungsarten so viel weiter getrieben zu haben, daß Ptolemäus seine Grundlage darin nicht wieder erkennen würde. Er eignet sich die Erfindung der Theilkreise zu, die wol das feinste in dieser Lehre ist, bemerkt inzwischen, daß **Andreas Schoner** in seinem Buche über die Verfertigung des Astrolabium den Horizont und die Ecliptik mit ihren Parallelkreisen in Grade einzutheilen gelehrt, aber keinen Beweis seines Verfahrens gegeben habe. Er selbst habe, sagt er, mehrere Wege dazu angegeben, und die Schonerische Methode erwiesen und allgemein gemacht. Wahrscheinlich ist er also durch Schoner auf seine Erfindung gebracht. Er führt es ferner als seine

Verdienste um diese Lehre an, daß er den vielfältigen Gebrauch des Astrolabium gezeigt, und die Verzeichnung der sphärischen Dreyecke in der Projection derselben gelehrt habe, eine Anwendung, die nicht schwer zu machen war. Das Buch ist äußerst weitschweifig, ohne alle geometrische Eleganz; bloß die Marginalien sind lesbar, worin man glücklicher Weise alle Sätze und Aufgaben antrifft.

§. 4.

In dem gegenwärtigen Jahrhunderte gab der ehemalige Lehrer der Mathematik zu Wittenberg, **Joh. Matth. Hase**, einen Entwurf eines vollständigen Werkes über die Landcharten, Kugelprojectionen und insbesondere die stereographische Projection heraus, wodurch er den Gebrauch der letztern sehr befördert zu haben scheint. Weil inzwischen die geometrischen Beweise des Verfahrens bey dieser Entwerfungsart Mühe machten, so blieben sie den meisten unbekannt, und die Zeichner der Landcharten mochten sie oft nur, ohne die Gründe ihres Verfahrens zu kennen, verfertigen.

tigen. In Mayers mathematischem Atlas findet man auf der 30. Tafel die Regeln für die Projection der Erdfläche auf einen gegebenen Horizont, aber ohne Beweis, dem Zwecke des Werkes gemäß. In Wolfs lateinischen Elementen der Mathematik, ist bloß die Entwerfung der Meridiane und der Parallelen des Aequators theils auf den Aequator, theils auf einen Meridian, gezeigt und erklärt worden. Dadurch sind nun einige neuere Mathematiker veranlaßt worden, die analytische Trigonometrie auf die Projectionen der Kugelflächen anzuwenden, und insbesondere die Gründe des Verfahrens bey der stereographischen Projection aufzusuchen. Dieses haben in demselben Jahre (1766.) Herr Hofr. Kästner und der sel. Karsten gethan, jener in einer der Göttingischen Societät der Wissenschaften vorgelegten Abhandlung, die in desselben Dissertationibus mathematicis et physicis, Altenb. 1771. abgedruckt ist, zu welcher sich noch ein Zusatz in dem 1. Theile der neuen Göttingischen Commentarien findet, dieser in dem 5. Bande der Abhandlungen der Bayerischen

schen Academie der Wissenschaften und nachher noch in dem 8. Bande dieser Sammlung. In dem 7. Bande des Karstenschen Lehrbegriffs der Mathematik ist die Lehre von den Projectionen nach analytisch-trigonometrischer Methode ausführlich abgehandelt. Eine kurze und ziemlich faßliche Erklärung des analytischen Verfahrens bey dieser Untersuchung giebt Hrn. Röhls Einleitung in die astronomischen Wissenschaften, 2. Th. 6. Cap. Sonst findet man noch analytische Untersuchungen über die Landcharten in **Lamberts** Beyträgen zum Gebrauche der Mathematik, 3. Th. 6. Abhandl. und in drey Abhandlungen von **Euler**, die in den Actis Acad. Petrop. T. I. a. a. 1777. sich befinden.

§. 5.

Die Anwendung der neuern Trigonometrie auf die Geometrie hat aber auch ihre Schwierigkeiten, weil die Rechnung da, wo es auf die Bestimmung der Lage ankömmt, oft weitläuftiger wird, als die geometrische Zeichnung. Die reine, bloß zeichnende Geometrie

hat

hat Vorzüge vor der rechnenden Geometrie, weil sie ihr Verfahren auf die Betrachtung des jedem Falle Eigenthümlichen gründet, und jeden Schritt dem Auge sinnlich darstellt. Sie ist daher einer Eleganz fähig, welche man der rechnenden Geometrie nicht geben kann, weil diese sich allgemeiner Formeln bedient, die Zeichen anstatt der Größen gebraucht, und die Verbindung der Größen bloß durch arithmetische Operationen entwickelt. Die letztere hat freylich auch ihre eigenen Vorzüge, weil sie mehrere Fälle, die in Absicht auf das Wesentliche der Verknüpfung der Größen nicht verschieden sind, unter einer einzigen Rechnung begreift, dagegen die zeichnende Geometrie jeden Fall besonders betrachten muß. Sie ist ihrer ältern Schwester weit überlegen, wo es auf Differentialverhältnisse ankommt, und wird in allen Fällen, wo Größen durch eine angenommene Einheit darzustellen sind, vorzuziehen seyn. Wo aber Zeichnung der Endzweck ist, wird man lieber alle Vorschriften aus reinen geometrischen Gründen herzuleiten haben, und aus den gefundenen Verhältnissen

der

der Größen Rechnungsformeln für diejenigen Fälle ziehen, in welchen wegen besonderer Umstände die Zeichnung beschwerlich und unsicher in der Ausführung wird. Die intellectuelle Zeichnung bleibt freylich in einem Falle so sicher und leicht, als in dem andern; aber die ausübende Zeichnung kann in Verlegenheit gerathen, und hier muß die Rechnung allerdings zu Hülfe kommen. Diese Betrachtungen haben mich veranlaßt, die geometrischen Beweise der Eigenschaften der stereographischen Projection aufzusuchen. Die Erfindung derselben hat mir Vergnügen gemacht, und ich hoffe denjenigen, die sich von den Gründen, worauf die Zeichnung der Landcharten beruht, unterrichten oder selbst solche verfertigen wollen, durch die Mittheilung meiner Untersuchungen einen Gefallen zu erweisen.

§. 6.

Die Eigenschaften der stereographischen Projection gründen sich auf eine gewisse Eigenschaft des Kegels, daß nicht allein der Schnitt, der parallel mit der Grundfläche geführt wird, ein

ein Kreis ist, sondern, daß in dem schiefen Kegel auch der Wechselschnitt oder die sectio subcontraria diese Figur ist. Es sey nemlich in dem schiefen Kegel $ODFE$ das Dreyeck ODE senkrecht auf die Grundfläche OFE durch den Durchmesser DE. Man ziehe darin durch irgend einen Punct G der einen Seite OD die Linie GH unter dem Winkel $OGH = OED$, daher der W. $OHG = ODE$. Durch GH führe man einen Schnitt $GLHL$ senkrecht auf die Ebene des Dreyecks, so ist dieser Schnitt der Wechselschnitt oder die sectio subcontraria. Man lege durch irgend einen Punct M auf GH einen Schnitt $PLQL$ parallel mit der Grundfläche, so ist dieser, wie bekannt, ein Kreis. Er schneide den Schnitt $GLHL$ in LML, so ist diese LML eine auf die Ebene des Dreyecks und also auch auf GH und PQ senkrechte Linie. In dem Kreise $PLQL$ ist $PM : ML = ML : MQ$. Wegen der ähnlichen Dreyecke GMP und QMH ist $PM : GM = MH : MQ$, also ist $GM : ML = ML : MH$. Daher ist der Schnitt $GLHL$ ein Kreis. Jeder Schnitt, der mit $GLHL$

Fig. 2.

paral-

parallel geführt wird, auch in dem nach *DE* hin fortgeführten Kegel, ist also auch ein Kreis.

§. 7.

Satz. In der stereographischen Projection ist die Projection eines jeden Kreises der Kugel ein Kreis.

Fig. 1. Bew. Es sey *ANBO* ein großer Kreis einer Kugel, in welchem das Auge sich in *O* befindet. Auf den Durchmesser *NCO* ziehe man *ACB* senkrecht durch den Mittelpunct *C*, und gedenke sich durch *AB* eine Ebene auf den Kreis *ANBO* senkrecht, als die Tafel oder Ebene der Projection. Weiter ziehe man irgend eine Chorde *DE*, und führe durch diese einen Schnitt senkrecht auf *ANBO*. Dieser Schnitt, der immer ein Kreis ist, ist die Grundfläche eines Kegels, dessen Spitze *O* ist. Man ziehe *OD*, *OE*, welche die Tafel in *G* und *H* schneiden, so ist der Schnitt der Tafel mit dem Kegel ein Wechselschnitt. Denn es ist $ODE + NOE = R$, weil die Bogen, worauf

auf diese Winkel stehen, einen Halbkreis ausmachen, und $NOE + OHC = R$, also ist $ODE = OHC$. Eben so ist $OED = OGH$. Daher ist der Schnitt der Tafel mit dem Kegel ein Kreis. (§. 6.) In dem Falle der Figur muß der Kegel DOE über die Grundfläche DE hinaus erweitert werden.

Für jeden Schnitt der Kugel kann man einen großen Kreis wie $ANBO$ senkrecht auf ihn setzen, und der Beweis, der hier für den auf einen angenommenen großen Kreis senkrecht durch DE gesetzten Kreis geführt worden, ist allgemein.

§. 8.

Aufg. Die Projection eines großen Kreises der Kugel zu finden, dessen Lage gegen die Tafel gegeben ist.

Aufl. Es sey $ANBO$ der große Kreis, dessen Ebene die Tafel ist; der Mittelpunct desselben und der Kugel C, und NO der Durchmesser, in welchem der ge- Fig. 3.

gebene große Kreis jenen schneidet. Man ziehe den Halbmesser *AB* auf *NO* senkrecht, mache den Winkel *AÇD* gleich dem Neigungswinkel des gegebenen Kreises gegen die Tafel und verlängere *DC* bis *E*; ziehe *OD* und *OH*, deren jene die Linie *AB* in *G*, diese ihre Verlängerung in *H* schneidet. Man halbire *GH* in *I*, so ist *I* der Mittelpunct der Projection oder des Kreises *GNHO*, wovon *OGN* die Projection des über oder jenseits der Tafel liegenden Halbkreises, *OHN* des untern oder disseitigen Halbkreises ist.

Bew. Man stelle sich den auf der Tafel beschriebenen Kreis *ANBO* zugleich über der Tafel durch *AB* senkrecht aufgerichtet vor, so fällt *O* in den Ort des Auges. Ferner ist der Winkel, welchen die Durchschnittslinie dieses senkrechten Kreises und des zu entwerfenden mit *AC* macht, dem Neigungswinkel dieses letztern gegen die Tafel gleich, und es ist also die in der Tafel gezogene *DE* in dem aufgerichteten Kreise die Durchschnittslinie mit dem zu entwerfenden Kreise. Daher sind *G* und *H*

zwey

zwey Puncte der Projection. Nun sind die Durchschnittspuncte *N* und *O* mit dem großen Kreise auf der Tafel ebenfalls Puncte der Projection; also sind *GH* und *NO* zwey Chorden des gesuchten Kreises der Projection, und da die erstere auf die letztere senkrecht steht und sie halbirt, so ist sie der Durchmesser des Kreises *GNHO*. Daß *NGO* die Projection des jenseitigen Halbkreises, *NHO* des disseitigen ist, erhellt für sich.

§. 9.

Aufg. Die Projection des Pols des durch *OGNH* entworfenen Kreises zu finden.

Aufl. Man nehme *BF* gleich der Höhe des Pols über der Tafel, oder dem Complemente der Neigung *AD*, ziehe *FO*, welche *AB* in *P* schneide, so ist *P* die Projection des Pols. Fig. 3.

Bew. Wie §. 8.

§. 10.

Zusatz. Der Winkel *GOP* ist ein halber rechter.

§. 11.

Zusatz. Man nehme $Af = BF$, ziehe *Ofp* an die verlängerte *BA*, so ist der Durchschnitt *p* die Projection des untern, dem Auge nächsten Pols des entworfenen Kreises.

§. 12.

Aufg. Auf *NGO* die Projection eines gegebenen Bogens von *O* aus abzuschneiden.

Fig. 4. Aufl. Der Kreis *ANBO* und der Bogen *NGO* sind was sie vorher waren; *DO* sey der gegebene Bogen. Man nehme $OE = OD$, ziehe *AE*, welche *NO* in *F* schneide, und beschreibe durch *D*, *F*, *E* einen Kreisbogen *DFE* aus dem Mittelpuncte *H*, welcher *NGO* in *K* schneide, so ist *KO* die Projection eines dem *DO* gleichen Bogens.

Bew.

Bew. Man stelle sich den Kreis *ANBO* auf die Tafel über *NO* senkrecht aufgerichtet vor, so fällt *A* in den Ort des Auges, und *F* ist die Projection des Punctes *E* oder des höchsten Punctes in dem durch *D* und *E* auf die Tafel senkrecht gesetzten kleinerm Kreise. Die Projection der obern Hälfte dieses kleinern Kreises ist also der Kreisbogen *DFE*. Nun ist der Pol dieses kleinern Kreises der in der Tafel liegende Punct *O*, und er schneidet also auf den durch *O* gehenden großen Kreisen gleiche Bogen ab; die Projection *DFE* seiner Hälfte schneidet folglich auch perspectivisch gleiche Bogen ab, und *DO* ist gleich dem durch *KO* abgebildeten Bogen des großen durch *N* und *O* gelegten und durch *NGKO* zur Hälfte abgebildeten großen Kreises.

Eine bequemere Auflösung folgt unten §. 27.

§. 13.

Satz. Der Halbmesser *HK* des Kreisbogens *DFE* berührt den Bogen *NGO* in *K*. Fig. 4.

Bew. Man ziehe CE, so ist der W. $AEC = CAE$, und der W. $HEF = HFE = AFC$, folglich $AEC + HEF = R$, das ist $HEC = R$, und HE berührt den Bogen OB in E. Daher ist HEquad. $= HN \times HO$ (Eucl. III. 36.). Also ist an den Kreisbogen NKO, für die daran gezogene Linie HK, auch $HKqu = HN \times HO$, und HK ist eine Berührungslinie an dem Bogen NGO. (Eucl. III. 37.)

§. 14.

Zusatz. Die kleinern auf die Tafel senkrecht stehenden Kreise durchschneiden die großen, deren Durchschnitte mit dem großen Kreise der Tafel ihre Pole sind, in der Projection eben so unter rechten Winkeln wie auf der Kugel. Die Winkel nemlich, unter welchen zwey Kreise sich schneiden, sind die Winkel ihrer Berührungslinien in den Durchschnittspuncten.

§. 15.

Fig. 5. Satz. Wie vorher, sey NGO die Hälfte der Projection eines großen

Krei=

Kreises, welcher die Tafel in *NO* schneidet, und gegen sie unter dem W. *ACD* geneigt ist. Man ziehe die Berührungslinien *EO*, *FO* an die Bogen *AO*, *GO* in *O*, so ist der W. $EOF = ACD$.

Bew. Man ziehe *DO*, so geht diese durch *G* (§. 8.). Auch ziehe man *OI* an den Mittelpunct *I* des Bogens *NGO*, so ist $FOG + GOI = R$, oder $FOG + OGI = R$. Da auch $GOC + OGC = R$ ist, so ist $FOG = GOC = CDG$, und *FO* parallel mit *DC*. Daher ist $FON = DCN$ und $EOF = ACD$.

§. 16.

Satz. Der Winkel, unter welchem die Projection eines großen Kreises den großen Kreis der Tafel schneidet, ist derselbe wie auf der Kugel. Fig. 5.

Bew. Die Projection des jenseitigen Halbkreises sey *NGO*, so ist der Winkel, unter welchem sie den Kreis der Tafel *ANBO* schneidet, der Winkel der beiderseitigen Berührungslinien *FO*, *EO* in dem Durchschnittspuncte *O*. Dieser ist dem Neigungswinkel des entworfenen Kreises gegen die Tafel gleich, und dieser ist der Winkel, welchem derselbe und der Kreis der Tafel auf der Kugel mit einander machen, als welcher dem Winkel der beiderseitigen Berührungslinien gleich ist, das ist, dem Winkel, der auf den Durchschnitt ihrer Ebenen senkrecht gezogenen Linien, wodurch die Neigung der beiden Ebenen gemessen wird.

§. 17.

Zusatz. Die Winkel, unter welchen sich die Projectionen großer Kreise, deren gemeinschaftlicher Durchschnitt in die Tafel fällt, schneiden, ist ihrem Neigungswinkel gegen einander, oder dem Winkel ihrer Bogen gleich.

§. 18.

Satz. Die Projectionen zweyer großen Kreise, deren einer auf die Tafel senkrecht steht, schneiden sich unter demselben Winkel, welchen die ihnen zugehörigen Kreise auf der Kugel machen.

Bew.

Bew. Es sey *SNZO* ein großer Kreis der Kugel, in dessen Puncte *S* sich das Auge befindet. *NAO* ist die Hälfte des Kreises, der in der Tafel liegt, der hier perspectivisch durch eine Ellipse für ein Auge außerhalb der Kugel, das die ganze Zeichnung ansieht, dargestellt wird. *NLO* ist die Hälfte eines großen Kreises, der die Tafel in *NO* schneidet. Der Mittelpunct der Kugel ist *C*, und die gerade Linie *SCZ* ist der Durchmesser, der durch *S* senkrecht auf die Tafel steht. *ZLS* ist die Hälfte eines großen Kreises, der senkrecht auf die Tafel steht, da er durch die Pole des Kreises der Tafel gezogen ist. Er schneidet den Halbkreis *NAO* in *M*, und *NLO* in *L*. Durch den Punct *L* ziehe man an die Kreise *NLO* und *ZLS* die berührenden *LH*, *LI*: die erstere schneide den verlängerten Durchmesser *NO* in *H*, die andere den verlängerten Halbmesser *CM* in *I*. Durch *S* und *L* ziehe man die Linie *SL*, welche die Tafel und den Halbmesser *CM* in *K* treffe, so daß *K* die Projection von *L* ist, so wie *NGKO* die Projection von *NLO* ist. Nun ziehe man *HK*, so ist Fig. 6.

$HK = HL$. Denn man nehme auf NAO den Bogen $OD = OL$, so liegen die Puncte K, D in einem Kreisbogen, dessen Mittelpunct derjenige Punct auf der verlängerten NO ist, wo diese von der den Kreis NAO in D berührenden Linie getroffen wird. (§. 12. 13.) Dieser Punct ist H selbst, weil wegen der gleichen Bogen OL, OD die berührenden LH, DH in demselben Puncte des verlängerten Durchmessers zusammenkommen. Wegen der gleichen Bogen ist $LH = DH$, und es ist auch $DH = KH$, also ist $LH = KH$. Ferner ist der Winkel $CSK = CLK$. Da nun CLI und SCK in der Kugel beides rechte sind, so ist der W. $CKS = KLI$, oder der W. $LKI = KLI$. Daher ist $KI = LI$. Es ist also das Dreyeck $IKH = ILH$, und der W. $IKH = ILH$. Nun ist der W. ILH der Winkel der beiden Kreisebenen NLO, ZLS, weil HL und IL auf ihren Durchschnitt CL senkrecht sind, also ist in der Projection der W. IKH, unter welchem sich die Projectionen von den Kreisen NLO und ZLS schneiden, dem Winkel derselben auf der Kugel gleich. Nemlich der Winkel, unter welchem

chem der Kreisbogen *NGO*, als die Projection von *NLO*, die Linie *CM*, als die Projection von *ZLM*, schneidet, ist der Winkel der berührenden *KH* mit *CM*, denn *HK* berührt den Bogen *NGO* in *K* (§. 13.). Folglich ist der Winkel eines großen Kreises mit einem auf die Tafel senkrechten Kreise auf der Kugel und der Winkel ihrer Projectionen derselbe.

§. 19.

Zusatz. Eben dieser Beweis wird geführt, wenn der Punct *L* disseits der Tafel nach dem Auge *S* hinfällt, so daß der Satz für alle Durchschnittspuncte der beiden Kreise gilt.

§. 20.

Satz. Es sey der Kreis *AFBG* der große Kreis in der Ebene der Tafel; die Kreisbogen *APB*; *DQE*; *FRG* seyn Projectionen von den Hälften dreyer großen Kreise, welche also den Kreis *AFBG* halbiren. Ihre Durchschnitte *P*, *Q*, *R* geben das krummlinichte Dreyeck *PQR*, so sind die Winkel die- Fig. 7.

ses

ses Dreyecks den Winkeln des dadurch abgebildeten sphärischen Dreyecks gleich.

Bew. Man ziehe durch den Winkelpunct P den Halbmesser CPM, so ist dieser die Projection eines auf die Tafel senkrecht stehenden Kreises, und es sind die Winkel CPB, CPE den Winkeln dieses senkrechten Kreises mit den durch APB, DPE abgebildeten Kreisen auf der Kugel gleich; also ist auch der W. BPE dem Winkel dieser Kreise gleich. Eben dieser Beweis wird für die andern beiden Puncte auch geführt.

§. 21.

Zusatz. Verlängert man die Bogen RP, RQ bis an ihren zweyten Durchschnittspunct S, so ist PQS die Projection des zu PRQ gehörigen Nebendreyecks, das mit demselben den Sector $RPSQR$ ausmacht. Verlängert man auch auf der andern Seite die Bogen RB, QR bis zu ihrem Durchschnitte in S, so hat man alle vier Kugelsegmente, welche die beiden Kreise durch PR, PQ bilden, in der Pro-

Projection. Es ist daher die stereographische Projection zu sphärischen Zeichnungen sehr bequem, und oft noch bequemer als die Darstellung auf der Kugel selbst.

§. 22.

Zusatz. Auch die Projectionen kleinerer Kreise schneiden sich oder die Projectionen großer Kreise unter denselben Winkeln wie auf der Kugel. Denn man ziehe durch den Durchschnittspunct auf der Kugel berührende Linien in den Ebenen jedes kleinern Kreises, und lege durch dieselben große Kreise, so schneiden sich die Projectionen der letztern unter dem Winkel der berührenden Linien (§. 18.), das ist, unter dem Winkel der beiden kleinern Kreise. Ist nun ein kleinerer Kreis da, der einen großen schneidet, so hat man anstatt der berührenden des einen kleinern Kreises die berührende eines großen Kreises zu nehmen.

§. 23.

Satz. Es sey wiederum *ANBO* der große Kreis in der Ebene der Tafel; Fig. 8.

sel; *NGO* die Projection der Hälfte eines großen Kreises, deren Mittelpunct in *I* ist, und *DFE* die Projection der Hälfte eines kleinern auf die Tafel senkrecht stehenden, und mit dem Durchmesser *AB* parallelen Kreises, welcher die Bogen *AO*, *GO* in *D*, *F* schneidet. Durch die Puncte *D* und *F* ziehe man die Linie *DF* bis an *P* auf *AB*; ich sage, daß $CP:PI = CA:IG$.

Bew. Der Mitelpunct des Kreises *DFE* sey *H*. Es berühren die Halbmesser *HD*, *HF* die Bogen *AO*, *GO* (§. 13.), und stehen also auf *CD*, *IF*, senkrecht. Man verlängere *IF* bis *R* auf *CD*, so ist der W. $CRI = 2\,RFD$, $= 2\,PFI$. Man ziehe *FL* parallel mit *DC*, so ist der W. $LFI = 2\,PFI$, und der W. $LFP = PFI$; daher $LP:PI = FL:FI$. (Eucl. VI. 3.), oder $LP:FL = PI:FI$. Nun ist auch, wegen der parallelen *CD* und *LF*, $LP:FL = CP:CD$, also ist $CP:CD = PI:FI$; oder $CP:PI = CA:IG$.

§. 24.

Zusatz. Es ist $CP + PI : CP = CA + IG : CA$ oder $CA + IG : CA = IG : CP$; also ist der

der Punct P ein bestimmter Punct, wie man auch F auf NGO nehmen mag.

§. 25.

Satz. Der gefundene Punct P ist die Projection des jenseits der Tafel liegenden Pols des durch NGO entworfenen Kreises.

Bew. Man ziehe aus N, dem andern Endpuncte des Durchmessers NO, die Linien NG, NP, NI, so ist der W. $GNC = \frac{1}{2} GIN$. Weil $CP:PI = CA:IG = CN:IN$, so ist der W. $CNP = PNI$, und $CNP + \frac{1}{2} CIN = \frac{1}{2} R$, das ist $PNG = \frac{1}{2} R$; also ist P die Projection des jenseitigen Pols des durch NGO entworfenen Halbkreises. (§. 10.) Fig. 8.

§. 26.

Zusatz. Die Chorde des zwischen GO und BO enthaltenen Bogens FE geht nach der Projection des disseitigen Pols des durch NGO entworfenen Kreises. Der Beweis ist dem in §. 23. und 25. geführten ähnlich. Die Proportion, die bey der Halbirung des innern

Win-

Winkels eines Dreyecks entsteht, gilt auch für den Fall, da der äußere Winkel halbirt wird.

§. 27.

Aufg. Auf der Projection eines großen Kreises *NGO* von dem Puncte *F* aus die Projection eines gegebenen Bogens abzuschneiden.

Aufl. Man ziehe durch die Projection des einen Pols *P* und *F* die Linie *PFD* bis an *D* auf dem Bogen *ADO*; nehme nach der gehörigen Seite hin den Bogen *DQ* dem gegebenen gleich, ziehe *PQ*, welche *NGO* in *M* schneide, so ist *FM* die verlangte Projection. Fig. 8.

Der Beweis erhellt aus §. 23. und 25. Der Punct *P* dient auch zur Eintheilung der andern Hälfte der Projection, die hier nicht gezeichnet ist.

§. 28.

Zusatz. Wenn der Bogen *FM* der Projection gegeben ist, so ziehe man *PFD*, *PMQ* an *D* und *Q* auf *NAO*, so ist *DQ* dem durch *FM* entworfenen Bogen gleich.

§. 29.

Zusatz. Die Construction §. 8. ist ein besonderer Fall dieser hier gefundenen. Es ist daselbst *AB* die Projection eines großen auf die Tafel senkrechten Kreises, dessen Pole *N* und *O* sind, und worauf *AG* die Projection eines Bogens, der dem *AD* gleich ist. *Fig. 3.*

§. 30.

Aufg. Die Projection eines Parallelkreises zu zeichnen.

Aufl. Es sey *NGO* die Projection eines großen Kreises, dessen Parallelkreis gezeichnet werden soll, *P* die Projection des jenseitigen Pols. Man ziehe *OPF* an den großen Kreis in der Ebene der Tafel, nehme *FD* = *FE* gleich dem Abstande des Parallelkreises von dem Pole über der Tafel, ziehe *OD*, *OE*, welche *AB* in *H*, *K* treffen, be- *Fig. 9.*

schreibe über *HK* einen Kreis, so ist dieser die Projection des gegebenen Parallelkreises.

Bew. Man stelle sich den Kreis *ANBO* über *AB* senkrecht auf die Tafel aufgerichtet vor, so fällt *F* in den Pol des Parallelkreises, und *DE* ist der Durchschnitt des Parallelkreises mit dem über *AB* senkrecht auf die Tafel gesetzten Kreise, folglich sind *H* und *K* die Projectionen der beiden Puncte *D* und *E* des Parallelkreises, die in den senkrechten Kreis fallen. Daß *HK* ein Durchmesser der Projection ist, erhellt daher, weil der durch *AB* auf die Tafel gesetzte Kreis auch auf den großen durch *NGO* zur Hälfte abgebildeten Kreis und auf die Parallelkreise desselben senkrecht stehet. Der Parallelkreis wird also von demselben halbirt, oder *DE* in demselben ist ein Durchmesser der Grundfläche, das Dreyeck *DOE* ein Schnitt des Kegels durch die Axe und senkrecht auf die Grundfläche, daher ist auch *HK* ein Durchmesser des Wechselschnittes (§. 6.).

§. 31.

Aufg. Die Projection eines großen Kreises, der durch den Pol *P* des Kreises *NGO* geht, zu zeichnen.

Erste Aufl. Man nehme *AL* gleich dem Bogen, der den Winkel des zu zeichnenden Kreises mit dem durch *AB* auf die Tafel senkrecht stehenden mißt; ziehe die gerade Linie *PL*, welche *NGO* in *M* schneidet, beschreibe durch *M*, *P* und die Projection *p* des andern Pols einen Kreisbogen, welcher *AOBN* in *Q* und *R* treffe, so ist *QPR* die verlangte Projection des überhalb der Tafel liegenden Halbkreises. Fig. 9.

Der Beweis ist aus §. 27. klar. Man muß sich dabey erinnern, daß der Winkel zweyer Kreise auf der Kugel durch den Bogen eines Kreises gemessen wird, dessen Pole die Durchschnitte jener Kreise sind. Dieser Bogen ist der durch *GM* abgebildete.

Fig. 10. Zweyte Aufl. Man halbire *Pp* in *V*, beschreibe aus *V* mit dem Halbmesser *VP* einen Kreis, nehme den Bogen *PD* doppelt so groß als das Complement des Winkels, welchen der zu verzeichnende Kreis mit dem durch *AB* auf die Tafel senkrechten macht, ziehe den Durchmesser *DT* und durch *T* die Chorde *TP*, welche die auf *Pp* senkrechte *VU* in *S* schneide, beschreibe aus *S* mit dem Halbmesser *SP* den Kreisbogen *QPR*, so ist dieser die Projection der jenseitigen Hälfte des durch *P* gelegten großen Kreises.

Oder man nehme den Bogen *PUT* gleich dem doppelten Winkel des gegebenen Kreises mit dem durch *AB* auf die Tafel senkrechten, ziehe *PT*, welche *VU* in *S* schneide, und verfahre wie vorher.

Bew. Da *P* und *p* die Pole sind, durch welche der Kreis gezogen werden soll, so ist *Pp* eine Chorde desselben, und der Mittelpunct fällt in die durch die Mitte *V* gezogene *UU* oder deren Verlängerung. Weil die Projection

des

des durch *AB* senkrecht auf die Tafel gesetzten Kreises in *AB* fällt, und die Projectionen sich unter demselben Winkel, wie die zu ihnen gehörigen Kreise, auf der Tafel schneiden (§. 18.), so ist der W. *VPD* der Linie *AB* mit der Linie, welche den Kreisbogen *QPR* in *P* berührt, dem Winkel gleich, welchen der durch *QPR* abgebildete Bogen auf der Kugel mit dem zu *AB* gehörigen Kreise macht. Daher ist *PVD* das Doppelte des Complements dieses Winkels. Der Mittelpunct des Kreisbogens *QPR* liegt in der auf die berührende *PD* senkrechten, also in *S*.

§. 32.

Anmerk. Wenn *Pp* in der Zeichnung zu groß ausfällt, so muß man *PV* durch Rechnung bestimmen, und für große Winkel *VPD* das doppelte Complement von *P* nach *D* tragen, für kleine aber das doppelte selbst von *P* nach *T* hinsetzen.

§. 33.

Zusatz. Der Kreis über *Pp* als Durchmesser ist die Projection desjenigen, der mit dem durch *AB* auf die Tafel senkrechten einen rechten Winkel macht, und durch *N* und *O* geht.

§. 34.

Fig. 9. **Anm.** Der durch *P* gezogene Kreis schneidet auf dem perspectivischen Parallelkreise einen Bogen *Hm* ab, dessen zugehöriger auf der Kugel dem Bogen *AL* ähnlich ist. Allein es wäre doch angenehm, eine eben so leichte Theilungsmethode für kleinere Kreise zu haben, als die §. 27. gelehrte für große ist. Es läßt sich vermuthen, daß der Punct *P* zur Eintheilung auch der kleinern Kreise gebraucht werden könne, wenn man nur einen gewissen andern Theilkreis sucht. Die Linie *PL* stellt die Projection eines kleinen Kreises vor, dessen Ebene durch das Auge und den jenseits der Tafel gelegenen Pol des Kreises *NGO* geht. Dieser schneidet also auf den beiden großen Kreisen *ANBO* und dem durch *NGO* vorgestellten von *O* aus gleiche Bogen ab. Es ist die Frage, ob dieses auch bey kleinern Kreisen Statt habe, die gleiche Entfernung von einem

ihrer

ihrer Pole haben, und wovon einer das Auge zum Pol hat.

§. 35.

Lehnsatz. Es ist das gleichschenklichte Dreyeck *ABC*, worin *AB* = *AC* ist, die Grundfläche einer Pyramide, deren Seitenflächen *ADB*, *ADC* gleiche Winkel mit der Grundfläche machen, so sind die Winkel *DBA*, *DCA* der Durchschnittslinien der dritten Seitenfläche mit *AB* und *AC* einander gleich. Fig. 11.

§. 36.

Satz. Es sey *OLNP* ein großer Kreis einer Kugel, dessen Mittelpunct *C*; *FQK* sey die Hälfte eines kleinern Kreises, dessen Pol *P*, und sein Durchschnitt mit dem großen Kreise sey *FQ*, seine Entfernung vom Mittelpuncte sey *CA*. In eben der Entfernung *CB* = *CA* sey durch *LV* in dem großen Kreise ein kleinerer Kreis *LMV* gelegt, dessen Pol *O* ist. Der Durchschnitt beider Kreise sey *GH*, wiewol der Durchschnitt ihrer Ebenen auch Fig. 12.

außerhalb der Kugel fallen kann. Man ziehe *OP* und lege durch *OP* willkührlich eine Ebene, welche die Ebene des erstern Kreises *FQD* in *DQ*, die Ebene des zweyten *LMV* in *ME* schneide; ich sage, diese durch *OP* gelegte Ebene schneidet auf den beiden Kreisen gleiche Bogen *FQ*, *LM* ab.

Bew. Es schneide *OP* die Linie *FK* in *D*, und die Linie *LV* in *E*, so sind die Dreyecke *APD*, *BOE* gleich, wegen der rechten Winkel bey *A* und *B*, der gleichen Winkel bey *P* und *O*, und wegen der gleichen Seiten *PA*, *OB*. Folglich ist der W. *ADP* = *BEO*, und das Dreyeck *DEG* ist gleichschenklicht. Da die Ebenen der beiden kleinern Kreise senkrecht auf die Ebene des großen *ONP* stehen, weil ihre Pole in dem Umfange desselben liegen, so machen die Durchschnitte der dritten durch *DE* oder *OP* gelegten Ebene mit den Seiten *DG*, *EG* des Dreyecks *DEG* gleiche Winkel (§. 35.), oder es ist der W. *FDQ* = *LEM*. Weil *AD* = *BE* und *FA* = *LB*, also *FD* = *LE*, so ist der Bogen *FQ* = *LM*.

§. 37.

Satz. Es sey wiederum *ONP* ein großer Kreis einer Kugel, *FQK* die Hälfte eines kleinern auf denselben durch *FK* senkrechten Kreises, dessen Pol *P*, und der Abstand vom Mittelpuncte *CA*. In eben dem Abstande *CB* = *CA* setze man einen andern kleinern Kreis, dessen Hälfte *STZ* ist, senkrecht auf die Ebene des großen Kreises, durch die Linie *SZ*. Beide kleinern Kreise schneiden sich in *GH*. Durch die entgegengesetzten Pole *p*. *O* ziehe man die Linie *EpOD*, welche die verlängerte *FK* in *D*, und die verlängerte *ZS* in *E* schneide, und lege durch diese Linie eine Ebene, welche den Kreis *FQK* in *Qq* und den Kreis *STZ* in *tT* schneide: ich sage, der Bogen *FQ* ist gleich dem Bogen *ZT*. Fig. 13.

Bew. Es ist das rechtwinklichte Dreyeck *pAD* dem *OBE* gleich, also sind in dem Dreyecke *EGD* die Winkel bey *D* und *E* gleich. Die Ebenen der beiden kleinern Kreise, die durch *GD*, *GE* senkrecht auf den großen Kreis gesetzt sind, machen mit der Ebene des Dreyecks *DGE* gleiche Winkel, und daher machen die Durchschnittslinien der dritten durch $EpOD$ gelegten Ebene und jener beiden mit GD und EG gleiche Winkel $GDQ = GET$. Wegen der gleichen Winkel bey D und E ist $GD = GE$, also auch $DK = ES$, und daher ist der Bogen $Kq = St$; $KQ = ST$; also auch $ZT = FQ$.

§. 38.

Aufg. Die Projection eines Parallelkreises einzutheilen.

Fig. 14. Erste Aufl. Es sey $ANBO$ der große Kreis in der Ebene der Tafel, NGO die Projection der Hälfte eines großen Kreises, dessen jenseitiger Pol über der Tafel um den Bogen BD erhoben ist; EFH ein Theil der Projection eines zu NGO gehörigen Parallelkreises, dessen Entfernung von dem jenseitigen Pol der Bogen DI auf der Kugel mißt. Man nehme auf OAN den Bogen $OK = DI$, ziehe durch K die Linie OL bis an L in der verlängerten BA, und beschreibe aus C durch L den Kreis $LMVL$, nehme darauf einen dem

auf

auf *FH* abzuschneidenden Bogen ähnlichen *LM*, ziehe aus der Projection des jenseitigen Pols *P* der Kreise *NGO* und *EFH* die Linie *PM*, welche den Parallelkreis in *Q* schneide, so ist *FQ* die Projection eines dem *LM* ähnlichen Bogens auf dem Parallelkreise, oder der zu *FQ* gehörige Bogen auf der Kugel verhält sich zum Umfange, wie *LM* sich zu dem Umfange *LMVL* verhält.

Bew. In der Fig. 12. zu §. 36. sey der Durchmesser *NO* dem Durchmesser *NO* oder *AB* in Fig. 14. gleich; *FQK* sey der Parallelkreis, wovon *EFQH* einen Theil abbildet; und *P* sey der in Absicht auf das Auge jenseitige Pol, und *O* sey dort der Punct, wo das Auge befindlich ist. Zufolge der Construction ist der Kreis *LMV* (Fig. 12.) derjenige, wovon *LMV* (Fig. 14.) die Projection ist. Man stelle den Kreis *ONP* (Fig. 12.) senkrecht auf die Tafel durch *AB* (Fig. 14.), und lasse den Bogen *LM* für die Projection von dem dortigen *LM* seyn, so ist *PM* der Durchschnitt, der durch das Auge *O* und den Pol *P* gelegten Ebene mit der

Tafel,

Tafel, also ist *FQ* (Fig. 14.) die Projection von *FQ* (Fig. 12.), demnach sind *LM*, *FQ* die Projectionen gleicher Bogen (§. 36.). Es ist aber die Projection *LM* dem dadurch entworfenen Bogen ähnlich, weil ein mit der Tafel paralleler Kreis und seine Projection parallele Schnitte eines Kegels sind; also verhält sich *LM* zum Umfange, wie der durch *FQ* (Fig. 14.) entworfene Bogen zum Umfange.

Zweyte Aufl. Man nehme $NR = DI$, dem Abstande des Parallelkreises von dem jenseitigen Pol: ziehe *OR*, welche *AB* in *S* schneidet; beschreibe aus *C* durch *S* den Kreis *STZS*, nehme den Bogen *ZT* dem abzuschneidenden Bogen ähnlich, ziehe aus der Projection des disseitigen Pols *p* die Linie *pT*, welche den Parallelkreis in *Q* schneide, so ist *FQ* die Projection des dem *ZT* ähnlichen Bogens auf dem Parallelkreise.

Bew. In der Fig. 13. zu §. 37. sey *NO* dem Durchmesser der Kugel, die in Fig. 14. entworfen ist, gleich; *O* das Auge; *FQK* der Paral-

Parallelkreis, der durch *EFH* zum Theil abgebildet wird. Daher ist der Kreis *STZ* derjenige, dessen Projection *STZ* (Fig. 14.) ist. Setzt man den Kreis *ONP* (Fig. 13.) senkrecht auf die Tafel (Fig. 14.) durch *AB*, und läßt *ZT* dort den hier durch *ZT* abgebildeten Bogen seyn, so ist *pQT* (Fig. 14.) der Durchschnitt der durch *DOpE* gelegten Ebene mit der Tafel, also ist *FQ* (Fig. 14.) die Projection von *FQ* (Fig. 13). Die beiden Bogen *ZT* sind sich ähnlich, also ist auch *ZT* (Fig. 14.) dem Bogen *FQ* (Fig. 13.) ähnlich, und daher ist in Fig. 14. *FQ* die Projection eines dem *ZT* ähnlichen Bogens auf dem Parallelkreise.

§. 39.

Aufg. Den Theilkreis durch den Endpunct *F* des Durchmessers der Projection eines Parallelkreises zu ziehen.

Aufl. Die mit denselben Buchstaben (Fig. 14. 15.) bezeichneten Kreise und Puncte bedeuten dasselbige. Man suche zu *PL*, *CL*, *FP* die vierte Pro- *Fig. 15.*

por-

portionallinie FX, so ist X der Mittelpunct eines durch F zu beschreibenden Theilkreises $FUfF$. Nimmt man nemlich den Bogen FU dem abzuschneidenden Bogen ähnlich, zieht durch die Projection des Pols P und U die Linie PUQ bis an Q auf der Projection des Parallelkreises, so ist der zu FQ gehörige Bogen auf der Kugel dem Bogen FU ähnlich.

Bew. Man verlängere PU bis an M auf dem vorigen Theilkreise $LMVL$, und ziehe XU. Weil $PL : CL = FP : FX$, so ist $PL - CL : FP - FX = CL : FX$, oder $PC : PX = CL : FX = CM : XU$. Folglich ist das Dreyeck CPM dem Dreyecke XPU ähnlich, wenn die Winkel bey C und X entweder beide spitz oder beide stumpf sind. Also ist XU der CM parallel, oder der Winkel $X = C$, und der Bogen FU dem LM ähnlich, so daß anstatt des Theilkreises $LMVL$ der Kreis $FUfF$ gebraucht werden kann.

§. 40.

Zusatz. Man kann sich auch eines durch A gezogenen Kreises zur Theilung bedienen, wenn man zu PL, CL und PA die vierte Proportionallinie AV sucht, welche der Halbmesser des durch A zu beschreibenden Theilkreises ist. Es lassen sich solchergestalt unzählig viele Theilkreise angeben, worunter man einen zur Zeichnung bequem wählen kann.

§. 41.

Aufg. Durch zwey gegebene Puncte in einem Kreise einen Kreis zu ziehen, der jenen halbirt.

Aufl. Der Mittelpunct des Kreises sey C, die gegebenen Puncte A und B. Die Linie AB schneide den Kreis in D und E. Man suche die vierte Proportionallinie zu $BE - AD$; AE und AD, und trage diese auf der verlängerten BD von A nach F, so daß $BE - AD : AE = AD : AF$; ziehe nun durch den Mittelpunct C an den Kreis die Linie $FGCH$, welche den Kreis in G und H schneide; setze Fig. 16.

auf

auf GH durch C die senkrechte CK, und auf AB durch die Mitte L dieser Chorde die senkrechte LK, so ist K der Mittelpunct des gesuchten Kreises, der durch die gegebenen Puncte A, B, und die Endpuncte des Durchmessers GH geht.

Bew. Es sey geschehen, was verlangt wird, so ist in dem gegebenen Kreise $FD:FG = FH:FE$; in dem Kreise $GABH$ ist $FG:FA = FB:FH$. Aus diesen beiden Proportionen folgt $FD:FA = FB:FE$ (Eucl. V. 23.), und aus dieser $FA - FD:FA = FE - FB:FE$ (Eucl. V. 17.) oder $AD:AF = EB:EF$, oder $AD:EB = AF:EF$, und daher $EB - AD:AD = AE:AF$, also ist der Punct F, in welchem der verlängerte Durchmesser GH des gegebenen Kreises, der zugleich die Chorde des gesuchten ist, die gegebene Linie ED schneidet, bestimmt, und daher ist die Lage des Durchmessers GA durch F gegeben. Daß der Mittelpunct eines Kreises in dem Durchschnitt der beiden Perpendikel liegt, welche auf zwey Chorden durch die Mitte derselben gezogen werden, ist bekannt.

§. 42.

§. 42.

Zusatz. Die vierte Proportionallinie zu *BE* — *AD*; *AD*: *AE* findet man bequem, wenn man mit dem Unterschiede *BE* — *AD* aus *A* einen Kreis beschreibt, durch den Durchschnittspunct desselben mit dem gegebenen und den Punct *A* eine Linie zieht, die den gegebenen Kreis *GDEH* irgendwo schneidet; das Segment von *A* bis an diesen Durchschnitt ist die vierte zu findende Proportionallinie, wegen einer bekannten Eigenschaft des Kreises.

§. 43.

Zusatz. Wenn *DE* eine berührende Linie ist, oder ein Kreis gefunden werden soll, der eine gerade Linie berühre und einen gegebenen Kreis halbire, so ist die Auflösung dieselbe wie §. 41., indem nun die Puncte *A*, *B*, *L* in Eins fallen.

§. 44.

Zusatz. Wenn *A* und *B* zwey Puncte einer stereographischen Projection sind, so ist *GABH* die Projection der Hälfte eines großen Kreises, der durch *A* und *B* geht; *H*, *G* sind die Durchschnittspuncte mit dem großen Kreise in der Tafel, und der Winkel *DGA* der beiden

Kreise in der Projection ist dem Winkel auf der Kugel gleich. Es ergiebt sich auch nach §. 28. die Größe des durch *AB* entworfenen Bogens, nebst den Abständen der Puncte *A*, *B* von *G* oder *H*.

§. 45.

Aufg. Aus zwey Seiten eines sphärischen Dreyecks mit dem eingeschlossenen Winkel die Projection desselben zu zeichnen.

Fig. 17. **Aufl.** Die Lage eines der beiden Kreise, worauf die Seiten des Dreyecks zu nehmen sind, gegen die Ebene der Tafel, nebst einem Endpuncte dieser Seite muß gegeben seyn. Die Ebene der Tafel sey der Kreis *AOBN*; der gegen sie der Lage nach gegebene Kreis sey *NGO*, wovon hier nur die eine Hälfte entworfen ist; der Mittelpunct dieses Kreises sey *D*. Der gegebene Endpunct der einen Seite sey *E*. Man schneide nach §. 27. darauf den gegebenen Bogen *EF* ab; ziehe durch den Mittelpunct *C* der Tafel die Linie *ECH*, welche den Kreisbogen *EGNH* in *H* schneidet. Ferner halbire man *EH* in *I*, setze *IK* senkrecht darauf, mache den Winkel

kel *DEK* dem gegebenen Winkel gleich, wobey man wissen muß, auf welcher Seite von *DE* der Mittelpunct *K* liegt. Hierauf beschreibe man aus *K*, dem Durchschnitte von *EK* und *IK*, mit dem Halbmesser *EK* den Bogen *ELH*, worauf die zweyte Seite *EL* des Dreyecks abzuschneiden ist; ziehe nun durch die Puncte *F* und *L* die Projection eines großen Kreises, so ist das Dreyeck *EFL* die verlangte Projection des gegebenen sphärischen Dreyecks.

Bew. Weil alle große Kreise sich in einem Durchmesser der Kugel schneiden, und die Projection eines jeden Durchmessers eine gerade durch den Mittelpunct gehende Linie ist, so liegen die Durchschnittspuncte der beiden Kreise *ENH*, *ELH* mit *C* in gerader Linie. Da ferner die Projectionen zweyer Kreise sich unter demselben Winkel wie ihre zugehörigen Bogen auf der Kugel schneiden, und der Winkel zweyer Kreisbogen mit einander dem Winkel der Berührungslinien an dem Durchschnittspuncte, das ist, dem Winkel ihrer Halbmesser daselbst gleich ist, so erhellt, warum *DEK* dem Winkel der beiden Bogen gleich gemacht ist. Das übrige ist für sich klar.

§. 46.

Aufg. Aus zwey Winkeln eines sphärischen Dreyecks, mit der eingeschlossenen Seite die Projection des Dreyecks zu zeichnen.

Aufl. Man schneide auf der Projection des Kreises, worauf die gegebene Seite liegt, die Projection dieser Seite ab, neige, wie in der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe, gegen diese Seite in ihren Endpuncten unter den gegebenen Winkeln zwey Projectionen großer Kreise: So ist das verlangte geschehen.

§. 47.

Aufg. Aus drey Seiten eines sphärischen Dreyecks die Projection desselben zu zeichnen.

Aufl. Man zeichne die Projection der einen Seite, beschreibe um ihre Endpuncte als Pole in dem Abstande des dritten Winkelpuncts die Projection eines Kreises, so geben die Durchschnitte dieser Kreise den dritten Winkelpunct, durch welchen und jeden der beiden andern schon bestimmten die Projectionen großer Kreise gezogen werden, womit der Aufgabe ein Genüge geschehen ist.

§. 48.

Anmerk. Diese letzte Aufgabe ist besonders nützlich, die Lage des Mondes oder eines Planeten, dessen Entfernung von zwey bekannten Sternen, oder von einem Sterne und vom Zenith beobachtet sind, in Absicht auf die Ekliptik oder den Aequator durch Zeichnung anzugeben. Man kann sich hiebey, wie auch in andern Fällen, die Zeichnung der Seiten selbst ersparen, wenn man bloß die Lage des dritten Puncts verlanget.

§. 49.

Anmerk. Vermittelst dieser Methoden kann man alle Rechnungen der sphärischen Trigonometrie in Zeichnungen verwandeln, wodurch man sich, wenn keine Schärfe verlangt wird, Erleichterung verschaffen, auch die Zeichnung zur Probe, daß keine gröbere Rechnungsfehler begangen sind, gebrauchen, und der Einbildungskraft sehr zu Hülfe kommen kann, weil die Zeichnung alles unmittelbar neben einander darstellt.

§. 50.

Anwendung. Bey der Zeichnung einer Weltcharte wird entweder der Aequator, oder ein Meridian oder der Horizont eines gewissen Ortes zur Tafel angenommen. Die Projection auf den Aequator heißt die Polarprojection, wobey alle Meridiane als gerade Linien und die Parallelkreise des Aequators als concentrische Kreise erscheinen. Die Projection auf einen Meridian heißt eine Aequatoreal-Projection. Man pflegt gewöhnlich den ersten Meridian, den durch die Insel Ferro, zur Tafel zu nehmen. Herr Bode hat in seiner Anleitung zur allgemeinen Kenntniß der Erdkugel (Berlin 1786.) besser den Meridian durch den 120sten und 300sten Grad zur Tafel seiner Weltcharte genommen, wobey man das ganze Südmeer und den Zusammenhang zwischen America und Asien übersieht, obgleich Nordamerica zerschnitten wird. Drittens nimmt man den Horizont eines gewissen Orts zur Tafel an, so daß die beiden Weltcharten zwey Hälften der Erde darstellen, in deren einer der gewählte Ort, und in der andern sein Fußpunct gerade in die Mitte der Charte fällt. So hat der Pater Chrysologue 1774 zwey Weltcharten herausgegeben, auf welchen der Horizont von Paris die Tafel ist, und Hr. Bode im Jahre 1783. zwey Weltcharten, auf welchen der Horizont von Berlin zur Tafel genommen ist. Diese Charten sind sehr

brauch-

brauchbare Beyspiele zur Anwendung der vorgetragenen Lehren. Aus dem Unterrichte, den Hr. Bode von dem Gebrauche der Charten herausgegeben hat, wird man nützliche Erläuterungen unserer Theorie hernehmen können.

§. 51.

Bey der Entwerfung einzelner Theile des Erdbodens wird ein Punct in der Mitte desselben zum Gegenpunct des Auges gewählt. Wenn hier der zu der Zeichnung erforderliche Raum zu groß ausfällt, so muß man die Halbmesser der Kreise, und die geraden Linien, welche man zu ziehen hat, berechnen, wozu sich die Formeln aus der vorgetragenen geometrischen Theorie leicht finden lassen. Man könnte zwar wol die Zeichnung des Netzes, das aus den aufzutragenden Kreisen und geraden Linien entsteht, zuerst im Kleinen verfertigen, und solche darauf vermittelst eines dazu eingerichteten Storchschnabels vergrößern. Nur möchte die gehörige Genauigkeit dabey leicht verfehlt werden. Es können aber auch selbst die Halbmesser der Kreise so groß ausfallen, daß diese sich nicht ohne Unbequemlichkeit und Unsicherheit ziehen lassen. In diesem

Falle muß man einige Puncte der zu zeichnenden Kreise bestimmen, und durch diese mit freyer Hand einen Kreisbogen ziehen. Die Kreise, welche man auf der Charte zu ziehen hat, sind die Meridiane und die Parallelkreise zu dem Aequator. Man nehme mehrere Puncte eines Parallelkreises und berechne aus der Entfernung derselben und des angenommenen Mittelpuncts der Charte vom Pole, und aus dem Unterschiede der Länge den Abstand jedes dieser Puncte von dem Mittelpunete der Charte. Diesen Mittelpunct, welcher der Gegenpunct des Auges ist, bezeichne man durch *A*, den angenommenen Punct des Parallelkreises durch *B*, so giebt die Rechnung den Bogen von *A* bis *B*, und auch den Winkel desselben mit dem Meridian von *A*, den wir hier als den ersten betrachten können. Die Projection des Bogens von *A* bis *B* ist eine gerade Linie, deren Größe sehr leicht gefunden wird. Man stelle nemlich (Fig. 3.) den Kreis *ANBO* senkrecht auf die Tafel durch den Mittelpunct der Kugel *C*, so ist *GC* die Projection von dem Bogen *DN*. Es ist aber *GC* die Tangente des

Fig. 3.

W.

W. *GOC* für den Halbmesser *OC* der Kugel, und *GOC* die Hälfte des zu *DN* gehörigen Winkels *DCN*, also ist die Projection *GC* die Tangente der Hälfte des zu *DN* gehörigen Winkels am Mittelpuncte der Kugel. Demnach findet man aus dem berechneten Bogen zwischen den beiden Oertern *A* und *B* den geradlinichten Abstand derselben auf der Charte. Nur muß man vorher den Halbmesser der Kugel bestimmt haben, von deren Oberfläche die Charte einen Theil abbilden soll. Man muß sich nemlich den Theil der Erdfläche, welcher auf der Charte dargestellt werden soll, auf einer Kugel im Kleinen abgezeichnet vorstellen, und von dieser Zeichnung ist die Charte die unmittelbare perspectivische Abbildung. Die halbe Breite der Charte von Norden nach Süden bestimmt den Halbmesser der Kugel, zu welcher die Charte gehört, da diese halbe Breite die Tangente des halben Abstandes des Mittelpuncts der Charte von dem südlichsten oder nördlichsten Parallelkreise ist, den Halbmesser der Kugel als Radius angenommen, so daß das Verhältniß beider aus den trigonometrischen Tafeln bekannt wird. Nun ziehe man die gerade Linie, auf welcher der Abstand des Ortes B von A zu nehmen ist, unter dem Winkel mit dem Meridian, welcher dem berechneten Winkel des Bogens zwischen beiden Oertern mit dem Meridian von A gleich ist, und trage darauf die Entfernung des Punctes B von A, nemlich die Tangente des halben Abstandes auf der Kugel, den Halbmesser als Radius genommen, so hat man die Projection des Punctes B. Verfährt man so mit mehrern Puncten desselben Parallelkreises, so läßt sich die Projection zeichnen: und wenn man dieselbe Arbeit mit mehrern Parallelkreisen vornimmt, so hat man zugleich Puncte der Meridiane in denjenigen Puncten verschiedener Parallelkreise, die einerley Länge haben.

Die Arbeit möchte etwas beschwerlich scheinen, allein es bleiben auf demselben Parallelkreise gewisse Größen in der Rechnung dieselben. Es seyn α und β die geographischen Breiten zweyer Oerter, D der Unterschied ihrer Längen, und δ ihre Entfernung nach einem Bogen eines großen Kreises, so ist *)

$$\cos.\delta = \sin.\alpha.\sin.\beta + \cos.\alpha.\cos.\beta.\cos.D.$$

oder

*) Diese Formel folgt aus der 146sten meiner analyt. Trigonom. S. 169.; die andere daraus mit Zuziehung der Formeln 28. und 32. S. 35.

oder noch etwas bequemer

$$\cos.\delta = \cos.(\alpha - \beta) - 2\cos.\alpha.\cos.\beta.\sin.\tfrac{1}{2}D^2$$

der Radius wird für Eins genommen. Hier bleibt für denselben Parallelkreis das erste Stück jeder der beiden Formeln nebst zwey Factoren des zweyten Stücks unverändert.

In dem sphärischen Dreyecke, dessen Winkelpuncte der Pol und die beiden Oerter A, B sind, seyn die beiden Winkel an den Puncten A und B durch A und B bezeichnet; die Breite von A sey α, die von B sey β, der Unterschied der Länge sey D, so ist

$$\frac{\sin.\frac{1}{2}(\alpha - \beta).\cot.\frac{1}{2}D}{\cos.\frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \tang.\tfrac{1}{2}(A - B)$$

$$\frac{\cos.\frac{1}{2}(\alpha - \beta).\cot.\frac{1}{2}D}{\sin.\frac{1}{2}(\alpha + \beta)} = \tang.\tfrac{1}{2}(A + B)$$

welche Formeln aus der 158sten und 159sten der analyt. Trigon. S. 178. folgen. Hat man nun die Summe $A + B$ nebst dem Unterschiede $A - B$ gefunden, so sind beide Winkel A und B bekannt. Der Winkel A bestimmt die Lage der Projectionslinie des Bogens zwischen A und B in Absicht auf den Meridian; der andere Winkel B ist auch nützlich, weil die Projection des Meridians durch B mit der

gerad-

geradlinichten Projection des Bogens zwischen *A* und *B* denselben Winkel macht, so daß man dadurch die Berührungslinie der Projection des zu *B* gehörigen Meridians in dem Puncte *B* erhält, deren Lage die Zeichnung dieses Meridians sehr erleichtert.

§. 52.

Es ist noch eine schöne Eigenschaft der stereographischen Projection übrig, welche **Lambert**, so viel ich weiß, zuerst bekannt gemacht hat (Anmerk. zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten, in den mathem. Beyträgen 3 Th. S. 120.), daß man aus den Abständen zweyer Puncte auf der Charte von dem Mittelpuncte derselben ihren Abstand von einander auf der Kugel leicht finden kann.

Fig. 18. Es sey nemlich *ANBO* der große Kreis in der Ebene der Tafel, *C* der Mittelpunct, *D* und *E* zwey Puncte in der Projection, und *OEDN* die Hälfte eines großen Kreises durch *D* und *E*. Der Bogen auf der Kugel zwischen *C* und *D* sey α, zwischen *C* und *E* sey der Bogen β, und zwischen *D* und *E* sey der Bogen γ, so ist

$$CD + CE : DE = \text{chord.}(\alpha + \beta) : ch.\gamma$$
$$CD - CE : DE = \text{chord.}(\alpha - \beta) : ch.\gamma$$

Der Beweis, den Lambert gegeben, ist etwas umständlich. Hier folgt ein kürzerer.

Der Winkel *DCE* der Projectionen *CD*, *CE*, ist derselbe, welchen die dadurch abgebildeten Bogen auf der Kugel machen (§. 20.). Es sey nun der W. $DCE = \omega$, so ist in dem geradlinichten Drenecke *DCE*

$$DE^2 = CD^2 + CE^2 - 2\,CD.CE.\cos.\omega$$

(Anal. Tr. 15. F. 22. S.)

oder

$$DE^2 = (CD + CE)^2 - 2\,CD.CE\,(1 + \cos.\omega)$$

In dem sphärischen Drenecke, dessen Seiten α, β, γ sind, und ω der Winkel, welcher der Seite γ gegenüber steht, ist

$$\cos.\omega = \frac{\cos.\gamma - \cos.\alpha.\cos.\beta}{\sin.\alpha.\sin.\beta}$$

(A. Tr. 145. F. 169. S.)

$$1 + \cos.\omega = \frac{\cos.\gamma - \cos.\alpha.\cos.\beta + \sin.\alpha.\sin.\beta}{\sin.\alpha.\sin.\beta}$$

$$= \frac{\cos.\gamma - \cos.(\alpha + \beta)}{\sin.\alpha.\sin.\beta}$$

(A. Tr. 27. F. 35. S.)

Nun

Nun ist, wenn der Halbmesser der Kugel für Eins genommen wird, $CD = tang. \frac{1}{2}\alpha$; $CE = tang. \frac{1}{2}\beta$, wie §. 51. bemerkt worden, also ist $CD + CE = tang. \frac{1}{2}\alpha + tang. \frac{1}{2}\beta = \frac{sin. \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{cos. \frac{1}{2}\alpha . cos. \frac{1}{2}\beta}$. (An. Tr. 56. F. 38. S.), und
$CD . CE = tang. \frac{1}{2}\alpha . tang. \frac{1}{2}\beta =$
$\frac{sin. \frac{1}{2}\alpha . sin. \frac{1}{2}\beta}{cos. \frac{1}{2}\alpha . cos. \frac{1}{2}\beta}$.

Daher

$$CD . CE . (1 + cos. \omega) = \frac{cos. \gamma - cos. (\alpha + \beta)}{4 \, cos. \frac{1}{2}\alpha^2 . cos. \frac{1}{2}\beta^2}$$

weil $sin. \alpha = 2 \, sin. \frac{1}{2}\alpha . cos. \frac{1}{2}\alpha$
und $sin. \beta = 2 \, sin. \frac{1}{2}\beta . cos. \frac{1}{2}\beta$. Demnach ist

$$DE^2 = \frac{2 \, sin. \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2 - cos. \gamma + cos. (\alpha + \beta)}{2 \, cos. \frac{1}{2}\alpha^2 . cos. \frac{1}{2}\beta^2}$$

Es ist aber für jeden Winkel A, $1 - cos. 2A = 2 \, sin. A^2$, also ist

$$DE^2 = \frac{1 - cos. \gamma}{2 \, cos. \frac{1}{2}\alpha^2 . cos. \frac{1}{2}\beta^2} = \frac{sin. \frac{1}{2}\gamma^2}{cos. \frac{1}{2}\alpha^2 . cos. \frac{1}{2}\beta^2}$$

und $DE = \frac{sin. \frac{1}{2}\gamma}{cos. \frac{1}{2}\alpha . cos. \frac{1}{2}\beta}$.

Nun ist auch $CD + CE = \frac{sin. \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{cos. \frac{1}{2}\alpha . cos. \frac{1}{2}\beta}$,

also

also ist

$$CD + CE : DE = \sin.\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) : \sin.\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Da die Chorde eines Bogens der doppelte Sinus des halben Bogens ist, so ist $\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \tfrac{1}{2}\,chord.(\alpha + \beta)$ und $\sin.\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}\,chord.\gamma$, also ist $CD + CE : DE = ch.(\alpha + \beta) : ch.\gamma$.

Auf dieselbe Art wird auch die andere Proportion erwiesen. Es ist nemlich

$$DE^2 = (CD^2 - CE)^2 + 2\,CD.CE(1 - \cos.\omega),$$

und $CD - CE = \dfrac{\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos.\tfrac{1}{2}\alpha . \cos.\tfrac{1}{2}\beta}$; auch

$$1 - \cos.\omega = \frac{\cos.(\alpha - \beta) - \cos.\gamma}{\sin.\alpha . \sin.\beta},$$ woraus

die zweyte Proportion leicht hergeleitet wird.

§. 53.

Man kann sich dieser Eigenschaft der stereographischen Projection auch zu der Zeichnung der Parallelkreise und der Meridiane bedienen. Man nehme auf dem Meridiane des Ortes A, welcher der Mittelpunct der Projection ist, einen Ort C, der mit dem Orte B einerley Breite hat. Der Abstand der Oerter B und C auf der Kugel ist leicht gefunden, da sie gleiche Entfernung vom Pol haben. Dieser Abstand sey γ, und der Abstand von A sey α und β (welche Bezeichnungen hier nicht die Breite, wie §. 51. bedeuten), so bekommt man aus der Formel, $DE = \frac{sin.\frac{1}{2}\gamma}{cos.\frac{1}{2}\alpha.cos.\frac{1}{2}\beta}$ die geradlinichte Entfernung von B und C auf der Projection, und man kann also leicht das Dreyeck zwischen den drey Oertern A, B, C zeichnen, von welchen A und C auf dem geradlinichten Meridian durch A liegen.

Den Abstand zweyer Oerter zu finden, die gleiche Breite haben, setze man in der Formel §. 51.

$$cos.\delta = cos.(\alpha - \beta) - 2\,cos.\alpha.cos.\beta.sin.\tfrac{1}{2}D^2$$

wo α und β die Breiten zweyer Oerter bedeuten, $\alpha = \beta$, so ist

$$cos.\delta = 1 - 2\,cos.\alpha^2.sin.\tfrac{1}{2}D^2$$

oder $1 - cos.\delta = 2\,cos.\alpha^2.sin.\tfrac{1}{2}D^2$

das ist $sin.\frac{1}{2}\delta = cos.\alpha.sin.\frac{1}{2}D.$

§. 54.

Da man auch einen Parallelkreis in perspectivisch gleiche Theile zu theilen den Theilkreis auf unzählige Arten nehmen kann, so wird man wol in den mehresten Fällen einen Theilkreis finden können, der zu der Eintheilung der gezogenen Parallelkreise bequem sey, um solcher-

gestalt

gestalt von den Meridianen so viele Puncte, als nur nöthig seyn mögen, ohne Rechnung zu bekommen.

§. 55.

Anwend. auf die Gnomonik. Die stereographische Projection kann in der Gnomonik sehr bequem gebraucht werden.

Man nehme den Aequator zur Tafel, und zeichne darauf die Projection des gegebenen Horizonts. Nemlich, es sey *AOBW* der Aequator, *NOSW* die Projection des gegebenen Horizonts, die aus der Höhe des Aequators für den gegebenen Ort, nach §. 8. bestimmt wird. In der Figur ist der Neigungswinkel 38°30′, nahe die Aequatorshöhe für Halle. Der Meridian geht durch die Linie *ANCBS*. Es sey das Auge in dem Südpol befindlich, so ist *WNO* die Projection der nach Norden liegenden Hälfte des Horizonts. Man nehme *BCD* irgend einem Stundenwinkel z. E. für 3 Uhr Nachmittag (45 Grad) gleich, ziehe *CD* bis an den Horizont in *E*, so ist *SE* die Projection des Bogens auf dem Horizonte von dem Meridian *CS* bis an den Stundenkreis *CDE*. Durch die Projection des Zeniths *Z* und *E* ziehe man Fig. 19.

 ZE,

ZE, welche den Aequator in *F* schneide, so ist *BF* der durch *SE* abgebildete Bogen (§. 27.). Zieht man also *CF*, so ist diese der Durchschnitt des Stundenkreises mit der Horizontalebene, auf welcher *CB* die Mittagslinie ist, oder *BCF* ist der Schattenwinkel. Verlängert man *CF* nach *G* hin, so ist *CG* die Schattenlinie.

Es ist nicht nöthig, das große Segment der Projection des Horizonts zu nehmen, als welches man, wo es zu groß ausfällt, füglich größtentheils weglassen kann. Man nehme *ACH* dem Stundenwinkel gleich, und *CH* schneide *NO* in *K*; hierauf ziehe man durch *K* die Linie *ZKG* bis an den Aequator in *G*, und ziehe darauf *CG*, so ist diese die Schattenlinie.

§. 56.

Fortsetzung. Es sey wiederum
Fig. 20. *AOBW* der Aequator, und *NOSW* die Projection des Horizonts, welche den Aequator in *WO* schneide. Man nehme *WD* = *WE* = dem Abstande der Wendekreise vom Aequator, ziehe aus dem Endpuncte *B* des Quadranten *WB* die Linien *BDF* und *BGE*, welche die Linie *WO* in *F* und *G* schneiden, und beschreibe aus dem Mittelpuncte des Aequators

C durch *F* und *G* Kreise, so sind diese die Projectionen jener des Wendekreises des Steinbocks, dieser des Krebses. Der erstere schneide den Horizont in *H* und *I*, den Meridian in *K*, *k*, so ist der Bogen *HkI* der Länge des Tages proportional, und der Bogen *IkH* der Länge der Nacht zur Zeit der Winternachtgleiche. Der Bogen *OH* stellt die Morgenweite perspectivisch vor, *FI* die Abendweite, *KS* die Höhe zu Mittage. Der Wendekreis des Krebses schneide den Horizont in *L*, *M*, den Meridian in *R*, *r*, so ist der Bogen *LRM* der Länge des Tages, und *MrL* der Länge der Nacht zu der Zeit des Sommerstillstandes proportional; der Bogen *OL* ist die Morgenweite, *WM* die Abendweite, aber perspectivisch genommen, und eben so *SR* die Höhe der Sonne zu Mittage. Um die Nachtgleiche geht die Sonne gerade in Osten *O* auf, und in Westen *W* unter.

§. 57.

Forts. Durch die Projection des Zeniths *Z* ziehe man die Projection eines großen Kreises, welche den Horizont in *V* und *U* schneide. Man schneidet entweder auf dem Horizont die Bogen *SV* und *NU* ab, welche die Projectionen der Bogen sind, die den Abstand dieses Verticalkreises von Süden nach Osten und von Norden nach Westen hin messen (§. 27.), wobey zu merken ist, daß die Puncte *V* und *U* mit *C* in gerader Linie liegen. Oder man verfährt auch nach der Anweisung §. 31. Zur Zeit des Winterstillstandes tritt die Sonne Vormittags in die Ebene dieses Verticalkreises, wenn sie in *a* auf dem Wendekreise *FKH* ist, und Nachmittags, wenn sie in *b* ist. Dieses geschieht aber erst nach ihrem Untergange. Auf eine ähnliche Art verhält es sich, wenn die Sonne in irgend einem andern Parallelkreise ist.

§. 58.

Forts. Soll auf einer Verticalebene eine Sonnenuhr gezeichnet werden, so suche man zuerst die Projection des Verticalkreises, der in diese Ebene fällt. Es muß zu dem Ende der Winkel der Ebene mit dem Meridian bekannt seyn. Nun ziehe man (nach §. 57.) durch die Projection des Zeniths die Projection des gegebenen Verticalkreises *VZU*. Diese kann man als die Projection des Horizontes eines gewissen Ortes betrachten, folglich durch Hülfe derselben eben so die Schattenwinkel auf der Verticalebene bestimmen, wie vorher

her §. 55. für eine Horizontalebene gezeigt ist. Nur werden die Stunden nicht von dem Mittage des Ortes, für welchen *VZU* der Horizont ist, gezählt, sondern von dem Mittage des Ortes, für welchen er ein bestimmter Verticalkreis ist. Die Projection *VZU* schneide den Aequator in *d*, *e*, so sind diese Puncte für *VZU*, was *O* und *W* für *NOSW* sind. Zieht man die gerade Linie *de* und darauf eine senkrechte durch *C* bis an den Aequator, so bekommt man die Neigung des Verticalkreises gegen den Aequator, und die Projection eines seiner Pole, durch welche man wie vorher die Winkel der Schattenlinien mit dem Durchschnitte des gegebenen Meridians und der Verticalebene findet. Wie frühe die Ebene des Morgens, und wie lange sie Nachmittags beschienen werden kann, ergiebt sich aus der Zeichnung sehr leicht. Diese Methode, Sonnenuhren auf Verticalebenen zu zeichnen, ist sehr bequem, und stellt dabey alles, was man zu wissen braucht, sehr deutlich auf einmal vor. Wenn der Halbmesser der Projection sehr groß wird, so hat die Construction ihre Schwierigkeiten. Alsdann werden andere Methoden aber auch unbequem.

§. 59.

Forts. Auf eine ähnliche Art kann man auf jeder Ebene eine Sonnenuhr beschreiben. Man muß nur erstlich die Puncte wissen, wo sie den Horizont durchschneidet, um die Projectionen derselben *V*, *U* anzugeben. Zweytens muß man den Winkel der Ebene mit dem Horizont wissen, woraus man auf die §. 45. angegebene Art die Projection des Kreises findet, der in die gegebene Ebene fällt. Nun verfährt man mit dieser Projection, wie für die Projection einer Verticalebene gelehrt worden ist. Diese allgemeine Anzeige des Verfahrens kann hier genügen, da es hier nur die Absicht ist, zu zeigen, wie die stereographische Projection mit den schwersten Fällen der Gnomonik fast eben so gut fertig wird, als mit den leichten.

Halle, gedruckt bey Johann Jacob Gebauer.

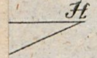


Fig. 2.

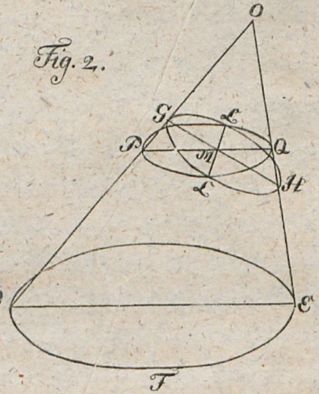
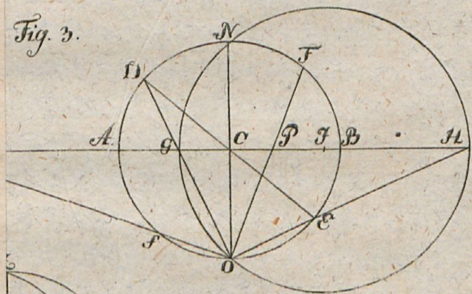


Fig. 3.



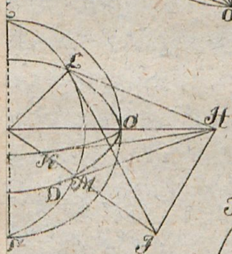
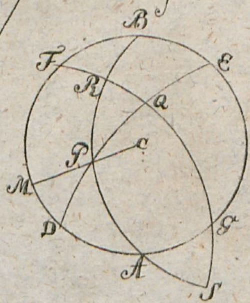


Fig. 7.



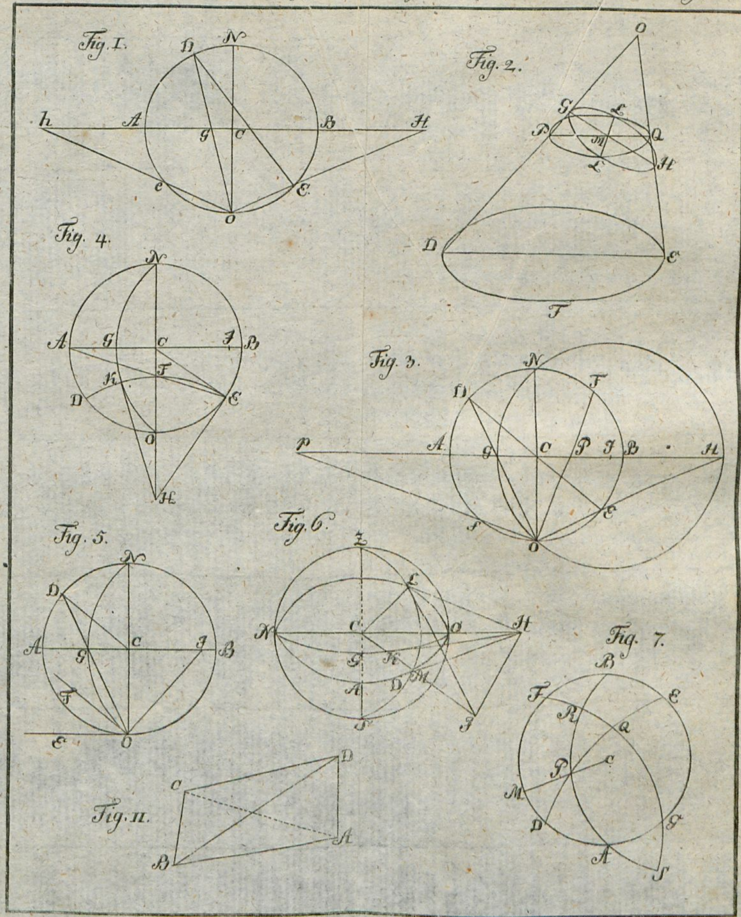


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 11.

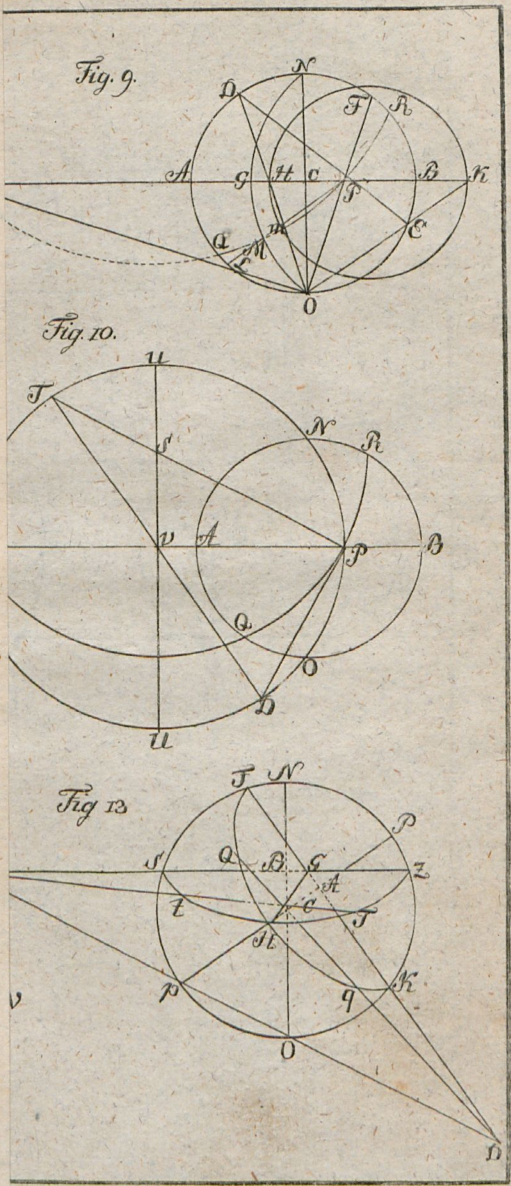


Fig. 9.

Fig. 10.

Fig 13

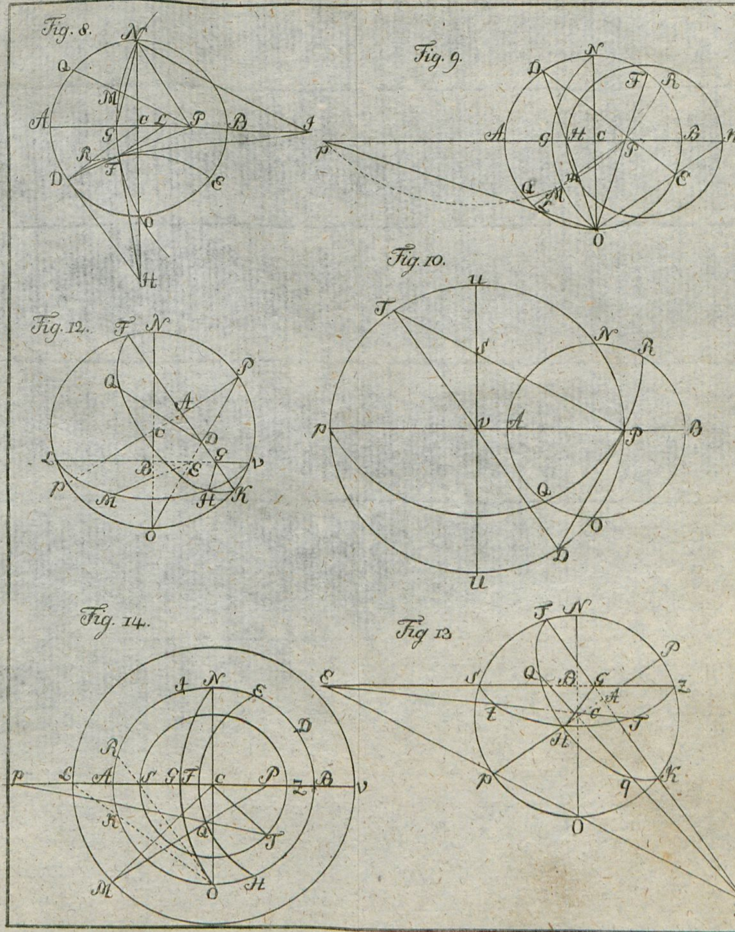


Fig. 8.
N Q M A c L P B f G R D F E o H
Fig. 9.
D N F R A G H c B K p f E Q m M L o
Fig. 10.
u T N R s p v A P B Q o D u
Fig. 12.
F N Q P A c D G L B E v p M H K o
Fig. 13.
T N P E S Q B G Z A t C T H p q K o D
Fig. 14.
f N E D R p L A S G F c P Z B v K Q T M o H

16.

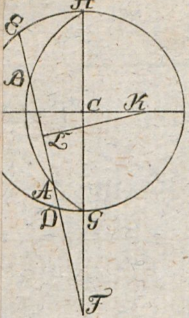
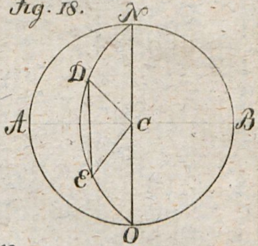


Fig. 18.



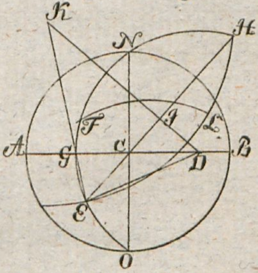
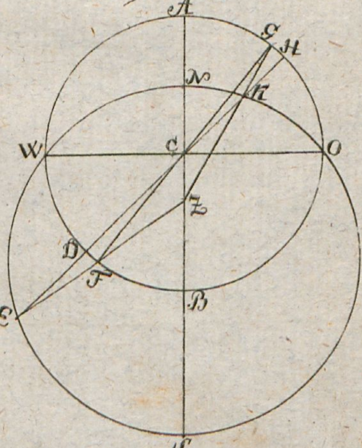
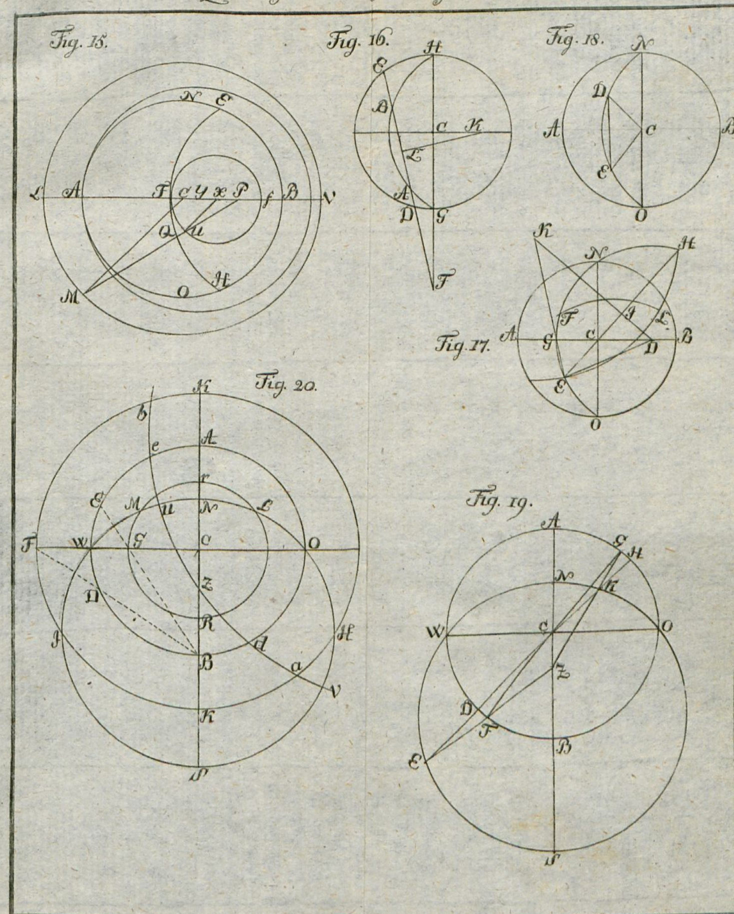


Fig. 17.

Fig. 19.



zu Klügel Stereogr: Projection. III. Tafel



Bey dem Antritte

des

öffentlichen Lehramtes

der

Mathematik und Naturlehre

auf

der Friedrichs-Universität zu Halle

zeigt

seine nächst zu haltenden Vorlesungen

an,

und verbindet mit dieser Anzeige

eine

geometrische Entwickelung der Eigenschaften

der

stereographischen Projection

Georg Simon Klügel,

der Weltw. Doctor und Correspondent der Königl. Gesellsch. der Wissenschaften zu Göttingen.

1788.