DE CENTRO OSCILLATIONIS PER HUGENII REGULAM ANALYTICE INVESTIGANDO TENTAMEN.

QUOD

PRÆSIDE

VIRO EXCELLENTISSIMO ATQUE AMPLISSIMO

CHRISTOPHORO FRIDERICO PFLEIDERER

UNIVERSITATIS ET COLLEGII ILLUSTRIS PROF. PHYSICES ET MATHESEOS PUBL. ORD.

H. T.

RECTORE MAGNIFICO
ET FACULTATIS PHILOSOPHICÆ DECANO

PRÆCEPTORE AC PATRONO SUO PIE DEVENERANDO

PRO CONSEQUENDIS SUMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBUS

DIE SEPT. MDCCXCIX.

PUBLICE DEFENDET

AUCTOR

GUILIELMUS LUDOVICUS CHRISTMANN

HERCYNIO - HIRSAVIENSIS

CANDIDATUS MAGISTERII PHILOSOPHICI IN ILLUSTRI STIP. THEOLOGICO.

TUBINGÆ

LITTERIS FUESIANIS.

§ 1.

Inter acutissima Geometrarum elapsi seculi inventa referri potest demonstrata ab Hugenio regula ad determinandam penduli simplicis composito Isochroni longitudinem. Re enim â Summis Viris, Mersenno, Cartesio, Robervallio . . . . incassum tentatâ, primus Ille inveniri eam docuit, applicatis ad momenta inertiæ momentis staticis. Cum autem Hypothesis ejus, "gravitatis centrum ad eandem assurgere altitudinem, sive connexa sive soluta velocitates acquisitas pondera sursum convertant," per se quidem verissima, sed paulo tamen obscurior *a*) esset, & cum problematis dignitas postulare videretur, ut res e principiis indubiis evincatur, (Abbate præsertim Catelano aliisque acriter Hugenii Theoriam impugnantibus, vid. Journ. des Sav. a. 1681—82., Hor. Osc. P. IV. ed. Graves. pag. 273. seqq.); Jac. Bernoulli stabilire doctrinam hanc ausus est, & Vectis indolem vocavit in subsidium conatu non prospero (Acta Erud. 1691. pag. 317—21), sed methodo adhibitâ minus generali, ut quæ non ad omnes casus se extenderet *b*); quâ difficultate permotus Johannes frater, introductâ gravitate fictitiâ (1714) subtilissime indagatus est fundamentum illius regulæ, quæ nunc in Dynamicis non postremum tenet locum. *c*)

a) Ill. Kæstn. höh. Mech. III Abschnitt § 207 nro VII; Diction. Encycl. T. XXXI. pag. 515: „Cette Hypothese a été combattue par quelques auteurs, & regardée par d'autres comme fort doutense."

b) Opp. Jo. Bernoulli T. I. nro 90 § 23.

c) De hoc invento lis illi movebatur â Brooko Tayloro, Anglo, qui priorem se illâ methodo potitum fuisse jactitabat; vid. Io. B. T. II. pag. 473 seqq.; sed suspectum videri potest provocatum â

Ingenuo enim quodam artificio problema invertit hoc modo, ut ex innumeris Isochronis inveniret *illud*, quod â *nostrâ* gravitate acceleratur. Verum non pertigit Jacobi vita ad fraternum inventum usque, quippe quem fato defunctum jam a. 1705. Eruditorum luxerat Respublica.

§ 2.

Adhibitis mature formulis integralibus (Comment. Paris 1703. pag. 96—104. & 327—42. ed. Amst. auctore Jac. Bernoulli) nullo jam negotio ex æquatione figuræ seu curvæ propositæ centrum oscillationis eruebatur, cum neque *cunei abscissi d*) perplexitate amplius opus esset, nec etiam Cavallerianâ illâ Indivisibilium methodo, (molestâ Geometris recentiori adsuetis analysi); quam methodum ab Hugenio adhibitam jure suo Is. Neutonus (Princ. Lib. I. pag. 80. ed. Leseur & Jacq.) *duriorem* adpellat.

Res autem difficilior atque abstrusior etiam cum inventa esset, quoniam non omnibus æque manifesta erat, caute circumspecteque legendæ sunt nonnullorum hujus materiæ pertractationes, verbi causa 1) *Dechalii* in Mundo Math. (T. II. Stat. L. 3. prop. 65) aperte fatentis, suâ ætate (1674) mancam adhuc fuisse minimeque excultam centri hujus theoriam; unde ab ipso etiam Hugenio carpitur in appendice ad Hor. Oscill.,

Tayloro Keilii testimonium, Germanorum gloriæ infensissimi, ibid. 493. — Dict. Encycl. l. c. „Les deux Géometres s'accusérent reciproquement, de s'être pillés." — Bernoullianum hoc fictitiæ gravitatis inventum simplicius protulit Alembertus in „Traité de Dynam. L. II. Cap. 3. probl. 1. —"

d) *Cuneus*, (coin retranché), ita Lalovera & Hugenius; sed Gregor. â S. Vincentio, Pascalius, Vallisius .... *ungulam* dixerunt hanc solidi speciem; alii aliter; vid. *Excellentiss.* Dni PRÆSIDIS Diss. De Kepleri methodo solida quædam dimetiendi. pag. 10. notâ 8.

quod regulam suam ad experimenta revocans, debitas cautelas omiserit, pondus virgæ neglexerit, & cæt. — 2) *Georgii Cheynæi*, multa de Centro Oscillationis falsa proferentis in "Methodo inversâ fluxionum (1703)" ut monuerunt Abr. Moivræus & Jo. Bernoulli, uterque in suis animadversionibus, vid. Jo. B. IV. pag. 147. 3) *Eduardi Stonii* (a method of fluxions 1730), cujus errores perstringuntur â Jo. Bern. in Scholiis ad librum istum, Opp. IV. pag. 180—81; In eo præcipue vitiosus est Stonius, quod centri *Osc.* & *Percussionis* notionem haud distinxerit, utrumque Centrum sub unâ eademque ideâ contineri, falso existimans; cum tamen *illud* â merâ gravitate producatur, *hoc* autem spectetur in motu corporum non accelerato. *e*)

Ipsa autem Bernoulliorum Duumvirûm inventa habentur in Actis Lips. a. 1691 & 1714; Monum. Paris. 1703 & 14; Jo. & Jac. Opp. Wolfii Mechan. 1746. p. 101—119, in quâ dilucidatis fratrum theoriis nonnulla eorum traduntur exemplorum, quæ in Jacobi tribus tabulis synopticis continentur. — Commemorare lubet adhuc Johannis Fratris (in Discursu sur le Mouvem. nro 135. p. 77—80) demonstrationem e conservatione vis vivæ Leibnitianæ deductam; quæ quidem præ cæteris concinna omniumque captui accommodata est; et Jac. Hermanni in Comm. Petrop. T. III. p. 1—10. (1728), e motu gravium per arcus circulares; vel idem jam prius de eâ re egit in Phoronomiâ (1716) Lib. I. Cap. 5. — Leonh. Eulerus denique axium principalium artificio novam huic theoriæ viam stravit in

---

e) Nulla forsan alia causa errori huic suberat, nisi quod summi olim Geometræ, Wallisius, Hugenius, Hopitalius, Mariottus Lahirius minus considerate creberrimam utriusque centri identitatem in *omnibus* casibus locum habere, videntur statuisse.

opere suo *De motu solidorum seu rigid.* (*ed. Karsten* 1765) pag. 166. seqq. — Hæc ad πραγματειαν thematis nostri, quod summorum ingeniorum auspiciis evasit ita locuples, ut irritos Cartesii aliorumque conatus ubertate eorum quæ nunc inventa sint, large resarciat. Hugenii enim regula, suspecto primum innixa fundamento, & labefactata olim â Viris etiam Eruditis, non tantum αναμφιβόλως nunc demonstratur calculis inter se diversissimis, sed & fructus in Mechanicâ & Astronomiâ tulit opportunissimos.

§ 3.

Dicantur jam ponderum A, B (Fig. I) velocitates (ob virgæ rigiditatem distantiis proportionales) $= a, b$; ut sint vires vivæ massarum $= Aaa, Bbb$; sumatur centrum Oscillationis in puncto aliquo intermedio O, & fiat ejus velocitas $= x$; ergo cum Galilæana gravitas æqualiter agat in omnes vectis partes, momento dt omnia tria puncta gravia A, O, B, naturaliter accelerata, motu parallelo descenderent in N, P, L; unde merâ gravitatis actione pondera A, B vim vivam forent acquisitura $= Axx$, Bxx; quod cum fieri nequeat ob virgam ex hyp. rigidam, oriatur inde necesse est aliqua vis vivæ alteratio. Statuamus nunc punctum illud O â naturâ ita fore compositum, ut *quantitas actionis* in hanc virium vivarum alterationem collata, sit *minima*. Ad obtinendum ergo hoc minimum ducantur spatia percursa in alterationes istas, ut sit:

$$Aa(x-a)^2 + Bb(b-x)^2 = min.$$

$$2Aaxdx + 2Bbxdx = 2Aaadx + 2Bbbdx$$

$$(Aa+Bb)x = Aaa + Bbb;\ x = \frac{Aaa+Bbb}{Aa+Bb};$$ quo

designatur longitudo simplicis, quod sub elongatione pari parem composito obtinebit velocitatem angularem. Casu simplicissimo fiat $A = B$, ut sit minimum $= A\,[a(x-a)^2 + b(b-x)^2]$, & $x = \frac{aa + bb}{a + b}$; quod legitime congruit cum formulâ Kæstnerianâ (höh. Mech. III. § 17. Zusaz), nisi quod ibi in denominatore pro *summâ* distantiarum posita est distantia *centri Gravitatis* totius systematis ($= CG$), multiplex secundum ponderum numerum ($= n\,CG$, vel in nostrâ figurâ $= 2\,CG$); quod perinde est per Hugen. Hor. Osc. IV. Prop. 2. Jam vero si pendulum simplex AC unius tantum ponderis A mente nobis repræsentemus, (quod pendulum utique sibi ipsi erit Isochronum,) & si falso fingamus, *hîc* quoque fieri aliquam motus alterationem, quasi sit $A\,a(x-a)^2 = min.$, habebitur legitime $x = a$, nullâ plane alteratione factâ; quis negat enim, naturæ actionem tum esse *minimam*, ubi *nulla* est? — Tam late patet canonis hujus Maupertuisiani *f*) in Dynamicis usus! —

f) Cum hæc scriberem, probabile mihi fuit, Maupertuisium, minimæ actionis Inventorem, etiam ad Hugenianum Theorema illam applicuisse; sed fefellit me opinio, ut ex *Cosmologiâ* ejus, casu nunc demum visâ, intellexi; (Versuch einer Cosmol. aus dem Französ. 1751.); acquiescit enim in problemate suo tertio, staticæ legem exponente, (ibid. pag. 94); cui igitur Dynamica hæc regula, ex eodem fluens principio, subjungi posset tanquam additamentum. Maupertuisius quidem actione minimâ usus est ad analytice demonstrandam DEI EXISTENTIAM; nimirum lege motus & quietis ad Divini cujusdam Intellectus proprietates revocatâ, ope calculi differentialis. --- Cæterum *actio* minima minime confundenda est cum principio naturæ per minimam *viam* operantis, (quod utique jam dudum philosophi agnoverunt, vid. Is. Neutoni Princ. III. pag. 2. ed. PP. Jes. & Joh. Bernoulli T. IV. pag. 271. §. 23.), quippe in quo Dei Existentia *demonstrata* jam supponitur, & cujus applicatio obscura & parum explicita, ideoque erroribus facile obnoxia erat, teste Maupert. l. c. pag. 12. & Io. B. l. c. pag. 272. --- Proxime olim jam rem attigerat Leibnitius in Actis Lips. 1697, opticâ ansam dante; vid. Nostrates, Kraftii Prælect. Phys. 1754. P. III. pag. 181-94, & Clemms math. Lehrb. 1777. T. 2. pag. 49-51 & 146. - Plura

Conferri potest etiam Joh. Bernoullii Disc. sur le Mouvem. pag. 80; illic ipsæ vires vivæ, *hîc* earum alterationes, ibi Galilæana hypothesis, *hîc* minima actio in subsidium sunt vocata. Ipsam autem virium vivarum conservationem Hugenio jam constasse, docet substrata ab illo hypothesis in Horol. Osc. IV; (vid. Ill. Kæstn. l. c. III. § 207, nro VII); & nescius verissimum hoc principium Catelanus aggressus fuerat.

§ 4.

Transimus nunc ad explicandam terminorum analyticorum, qui adhiberi in hâc quæstione solent, genesin; sed præmissis sequentibus:

Materia, si per se sola spectetur, nullo externo motus principio in illam agente, *iners* dicitur; Inertia igitur pro generali illius charactere haberi potest, secundum quem „perseverat in statu suo vel motus vel quietis g).“ Cadit autem hæc inertiæ notio in omnia corpora, â quibus vel *metaphysico* conceptu gravitatem sejungamus, vel etiam *geometrico*, nempe si pondus dividamus per acceleratricem, â quâ illud animatur; unde si grâvitas ponatur $= g$, motrix $= P$, massa $= M$, habebuntur hæc tria: $g = P : M$, $P = g\,M$, $P : g = M$, quorum postremum insitam illam inertiam denotat. Perspectâ jam essentiali hâc materiæ qualitate perspicietur etiam momenti inertiæ notio;

vid. in ipsis monumentis Borussicis, quæ comparuerunt isto tempore; præsertim annus 1751 Euleri contra Samuelem König dissertationes continet, & Beguelini enumerationem casuum, legis Maupertuisianæ veritatem evincentium.

g) Hæc est Neutoni prima lex (Princ. p. 20. ed. PP. Jes.) — Inertia vero non est *vis* aliqua, ut vulgo falso dicitur; sed potius omnis vis *absentia*; vel *necessitas* materiæ, non mutandi statum suum, nisi externe aliunde coactam.

tio; quoniam enim per vulgaria Mechanices principia subrogari sibi massæ possunt, tanquam eandem oppositura resistentiam externo motus principio, si fuerint reciproce proportionales quadratis distantiae ab axe motus, hæc ipsa inertis materiæ proprietas denominationi illi originem dedit.

Unde manifestum est etiam, unius massæ innumera dari inertiæ momenta, quoniam innumeri dantur axes, quorum respectu investigari momentum illud potest. Quodsi massa M dividatur in particulas $a+b+c+d\ldots$, quarum inertiæ momenta fuerint $= a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2\ldots$, cernitur, eo majus fore momentum totius massæ, quo plures particulæ adfuerint; sed cum infinitus harum numerus esse nequeat, nisi fuerit $M = \infty$; idcirco mensurari poterunt momenta omnium partium simul sumtarum per constantis alicujus lineæ quadratum kk, ut sit $kk=(a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2\ldots):M$, & $Mkk=a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2\ldots=$ (si singulum elementum ponatur $= dM$, ejusque distantia $=r$) $\int rr\,dM$; quæ quidem expressio omnium, quæ cogitari possunt, momentorum inertiæ Symbolum est. Supponit autem hæc formula constantem particularum homogeneitatem; nam si massa fuerit heterogenea, necessario molecula solidi *densioris* plus massæ inertis inclusura est, quam *rarioris*; ergo nequit utriusque elementum per dM exprimi; verbi causa, si fingantur duo cubi, A, B ejusdem Voluminis, sed specifice diversi; erunt eorum momenta inertiæ $=\int rr\,dA$, $\int rr\,dB$, diversa inter se pro ratione densitatum; quodsi vellemus igitur utriusque cubi elementum per dM exprimere, molecula rarioris massæ augenda foret in ratione excessus densitatis majoris supra minorem. — Hæc ad generalem hujus momenti notionem; nunc ad ipsas formulas investigandas. —

§ 5.

Sit nempe determinandum illud pro planâ superficie CAD respectu axis per verticem ducti, Fig. 2; fiat $CB = x$, $AB = y$; ergo $dM = dxdy$. Erunt autem hîc pro Centri Oscillationis theoriâ duo casus sollicite inter se distinguendi; omnium nempe alicujus ordinatæ punctorum vel a) eadem est velocitas; (HO & y inter se parallelis,) vel b) non est eadem; (HO & y inter se normalibus; quo casu momentum inertiæ semper paulo majus *h*) evadit, quam agitatione in planum factâ. Pro casu priori prodit simpliciter $\int xx\,dM =$ (sumtis dy, dx successive variabilibus) $\int xxy\,dx$; pro altero autem est $\int (xx + yy)\,dM = \int (xx + \frac{1}{3}yy)\,y\,dx$ *i*). Quodsi in pondusculo $dxdy$ foret $y = Const.$, haberetur casus rectanguli, cujus nempe elementum $= a\,dx$; at si ipsam quoque constantem tollamus, adest virgæ rigidæ tenuis pondusculum $= dx$, pro quâ ideo $\int yy\,dM = 0$. Eodem plane modo prodeunt momenta etiam statica, nempe $\int x\,dM =$ (ut supra, bis integrando) $\int xy\,dx$. Denominator hîc aliter etiam potest exprimi; nimirum si CB sit linea centri, & $CG = \delta =$ distantiæ centri inertiæ ab axe, erit ille $= M.\,\delta$; constat enim ex Hugenio (Hor. Osc. IV. prop. 1. 2), si singulis pondusculis distantiæ competant $a, b, c, d \ldots$,

h) Discrimen hoc inter motum planum & lateralem nonnullos auctores effugit; v. c. Carræum (reprehensum idcirco â Mairano in Hist. Ac. Paris. a. 1735), Stonium, de quo Jo. Bernoulli (Rem. sur le calc. Int. de M. Stone IV, pag. 181): „Il suppose, que toutes les particules d'une tranche différentielle de la figure solide ont une même vitesse; ce qui est absolument faux." -- Eo magis mirum est, talem errorem Geometris excidisse, cum jam ante Hugenium Cartesius accurate duo Oscillandigenera distinxerit, Epp. Tomo III. nro 77. seqq.

i) In Hugenianâ Theoriâ redit hoc negotium ad abscissionem vel *unius* cunei, vel *duorum*.

fore $[a+b+c+d\,.\,.\,.]\,dM = M.\delta$. — Cæterum hic divisor innotuisset etiam ex staticâ; formula enim, quæ reperiendo Gravitatis Centro inservit, in numeratore momentum hoc continet. — Inventa est ergo æquatio pro determnandâ in figuris planis Isochroni simplicis longitudine $\frac{\int[xx+yy]\,dM}{M.\delta} = \frac{\int[xx+\frac{1}{3}y]\,y\,dx}{\int xy\,dx}$. — Pro solidis autem tornatis, (singulâ ordinatâ circulum describente,) res non ita promte expeditur, quoniam non omnia circularis alicujus intersectionis elementa in ipsâ ordinatâ jacent; sed demum ad ad eam revocanda sunt & redigenda; unde valor ponduscculi dM aliter determinandus erit, quam supra. Sit Fig. 3. $ML = u$, $LS = v$, denotetque x, y abscissam CP ac radium MP; erit elementum solidi ad punctum ordinatæ L revocatum $= dx.\,v\,du$; (est autem $dx = Const$, quoniam nondum in calculum integralem ingreditur, dum de *unâ* tantum circulari intersectione agitur;) ergo $\int v.\,du =$ frusto integro $MLS = MPS - LPS = \frac{1}{2}(yy.\ arc.\ sin.\ \phi - v.\,LP)$; ut habeatur igitur totus semicirculus, fiat $\phi = \pi$, $v = o$, redditâque constante dx, quæ nunc in variabilem abit, erit $dM = \frac{1}{2}\pi yy\,dx$, $\int xx\,dM$ autem $= \frac{1}{2}\pi\int x^2 y^2\,dx$. [Hoc paucis ita pronunciari potest: „Cum omnibus circuli punctis idem x competat; unice ducendum est xx in conoidis elementum $\pi yy\,dx$."] Res aliter se habet cum investigando valore $\int yy\,dM$ qui est $= dx\int[y^2 - 2yu + u^2]\,v\,du$, ($y$, dx constantibus respectu v, u); pro primo horum integralium erit, posito $v = o$, quæsitus valor, bis sumtus $=$ (fluentibus successive u, x) $\pi\int y^4\,dx$; pro secundo erit, sepositâ $Const. = -2y\,dx$, $\int vu\,du = \int u\,du\sqrt{(2yu - uu)} = \int\frac{u(2yu - u^2)\,du}{\sqrt{(2yu - uu)}} = \alpha$; pro tertio denique erit, (sepositâ dx)

$\int uuvdu = \int \frac{u^2(2yu - u^2)\,du}{\sqrt{(2yu - uu)}} = \beta$; recurramus (ad eruenda hæc duo integralia) ad Lemma ab Ill. Kæstnero adhibitum (in höh. Mech. II, 30) et huic calculo inserviens. Fiat generaliter $\int \frac{u^n du}{\sqrt{(bu - u^2)}} = mb^n \int \frac{du}{\sqrt{(bu - u^2)}} + Z\sqrt{(bu - uu)}$. Pars prior hujus integralis, ut intuitus docet, semper arcum aliquem continet, (utcunque fuerit valor litteræ n, modo sit numerus integer positivus,) altera vero erit mere algebraica, et evanescit MS in semiperipheriam abeunte, cum sit ordinatæ multiplex; ad hanc ergo partem non attendendum erit nobis, integralia pro toto semicirculo investigantibus. Jam si observentur ex II § 30. nro 45. valores numerales sibi invicem respondentes: $\begin{array}{lllll} n = 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline m = \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{5}{16} & \frac{35}{128} \end{array}$, habebitur (posito $b = 2y$) $\int \frac{u(2yu - u^2)\,du}{v} = 3\pi y^3 - \frac{5}{2}\pi y^3 = \frac{1}{2}\pi y^3 = \alpha$; et $\int \frac{uu(2yu - u^2)\,du}{v} = 5\pi y^4 - \frac{35}{8}\pi y^4 = \beta$; fiant nunc α et β iterum multiplices per suas respective constantes, et habebitur $-\pi y^4 dx + \frac{5}{8}\pi y^4 dx = -\frac{3}{8}\pi y^4 dx$. Hujus duplum valet pro utroque conoidis dimidio. Posito jam dx variabili, erit elementi istius integrale $= \frac{3}{4}\pi \int y^4 dx$. Ex quo habebuntur (additis membris supra jam inventis) omnia inertiæ momenta $\int (xx + yy)\,dM = \pi \int (xx + \frac{1}{4}yy)\,y^2 dx$. Valor autem pro staticis est primo intuitu $\int x\,dM = \pi \int xy^2 dx$. Littera π excidit; sed revocanda est iterum in calculum, si quæratur centrum oscillationis pro sphærâ vel conoide ad filum, ppedum, virgamve quamcunque non rotundam appenso.

Nota: In valoribus serierum ζ et η (Kæstn. Mech. III. § 30. nro IX) per aliquot vices ponendum est u loco LS; nam series illæ ordinatam non continent; et cum substituendo pro x Vir Summus scribere vellet u, falso posuit LS; deceptus sine dubio duplici literæ u significatione, cum semel ordinatam, semel abscissam designet.

§ 6.

Scholion. Cum in universâ rerum naturâ nusquam detur *simplex purum*, nihil actum est aliud cum Centri Oscillationis theoriâ, nisi ut naturali huic defectui succurratur; quare supersedere operoso hoc calculo possemus, nî alioquin perfecta penduli theoria praxin imperfectam relinqueret. Sed ut nihil mortalibus arduum est, ita & composita tam prope ad simplicitatem sunt revocata, ut pæne nullum sensibile discrimen intercedat. Hunc in finem Mairanus, subtilis ille Gallus, qui primus accuratam borealis ignis notitiam (tanquam Prometheus alter) in terram intulit, adhibuit filum cannabinum ex aloe paratum (fil de pite), vid. Tract. ejus in Monum. Paris. 1735; quod præstare sericis tortis, asserit etiam Lud. de l'Isle in Comm. Petrop. T. IV pag. 324; appensum autem ponderculum *sphærula* esto, (tanquam solidum minimi voluminis); eaque parata sit e plumbo, vel melius ex auro, si in promtu habeas (*höh. Mech.* II. § 46), juncto luxu cum utilitate. Mairanus periculum etiam fecit cum globis eburneis, crystallinis & cæt. (l. c.) Ejusmodi artificiis â simplicitate parum abfuturi essemus. Quod si autem non accurate satis institui ejusmodi experimenta aliquis existimet; commodissime is eum sequetur magistrum, quem & ipsi sequimur, Hugenium. Exemplorum autem â nobis pertractatorum nonnulla sunt adeo facilia, ut pæne ridiculum sit, illa inscribi problemate. Sit tamen.

§ 7.

Probl. 1. Proponatur quadratum $AEBC$ (Fig. 4) angulo E ad filum l appensum & ad normam oscillans, determinare Isochronum. Sit $EC=2a$, Ei vel $Ch=x$; erit (ob $x=y$ hoc casu) $\frac{2}{3}\int y^3\,dx$ (nempe bis sumtum, ut pro utroque triangulo valeat,) $=\frac{1}{6}a^4$; reliquas partes, ne pro utroque triangulo seorsim calculus institui debeat, sub hoc uno integrali restringo: $2\int(xx+ll+2aa-2ax+2al)\,x\,dx$, quod habetur $=\frac{7}{6}a^4+a^2l^2+2a^3l$; unde inertiæ momentorum summa est $=$ (sumto duplo, quoniam ista valent unice pro dimidiâ parte EAC. & positâ massâ $=M$) $\frac{1}{3}M(EC^2+3l.EC+3ll)$; staticorum autem dimidium est $2(a+l)\int x\,dx=\frac{1}{2}M(\frac{1}{2}EC+l)$; ex quo habetur longitudo Isochroni $=\frac{2EC^2+6l.EC+6ll}{3.EC+6l}$; q. e. i. — Suspensione ergo ex angulo E factâ, cadet Isochronum in duas tertias totius diagonii, uti invenit Hugenius pro quovis rectangulo. — In Eulerianâ vero *axium principalium* theoriâ omnis quæstio eo redit, ut inventum sit momentum inertiæ respectu axis per centrum massæ ducti, quoniam hoc uno invento reliqua omnia respectu innumerorum axium parallelorum inventa sunt; nimirum si datum sit, vel repertum concedatur momentum illud (quod brevitatis causa *Centrobarycum* appellari posset,) $=M.kk$, sive $=kk$ simpliciter, ob massam utrinque ex calculo excidentem; et si Centri inertiæ distantia dicatur $=\delta$, erit canonicus omnium momentorum terminus $=kk+\delta\delta$; retento unice axium parallelismo. Confer. Eul. mot. Solid. pag. 168. §430. 31. Ex quibus cernitur simul veritas theorematis 13. Hor. Osc. IV, quod ita sonat: „*si lamina aliter atque aliter suspendatur à punctis, quæ in eodem plano accepta, æqualiter à centro gravitatis* *distant; agitata in latus* (nam hac unâ conditione axes manent paralleli) *sibi isochrona est.* „ Quodsi in problemaie nostro virga l sensibilis in crassitiem dimensionis sit, erit Oscillationis Centrum = (positâ horizontali fili intersectione = B)

$$\frac{M[2EC^2+6l(EC+l)]+\frac{1}{3}Bl^3}{M[3(EC+2l)]+\frac{1}{2}Bll}.$$

§ 8.

Probl. 2. Invenire idem pro laminâ in parabolarum basi convergentium figuram efformatâ (Fig. 5) sit $CG = 2a$, CO vel $G\omega = x$, erit (ob $\sqrt{x} = y$) $\int \frac{2}{3} y^3 dx = \frac{4}{15} x^{5:2} = \frac{4}{15} a^{5:2}$; partes reliquæ continentur sub hoc elemento: $\int 2x^{1:2} dx (x^2 + l^2 + 2a^2 - 2ax + 2al) = \frac{172}{105} a^{7:2} + \frac{4}{3} a^{3:2} ll + \frac{8}{3} a^{5:2} l$; denominator autem $2(a+l)\int dx \sqrt{x} = \frac{4}{3}(a+l) x^{\frac{3}{2}}$ = (cum sit per quadraturum figuræ massa $= \frac{4}{3}xy = \frac{4}{3}x^{3:2} = \frac{4}{3}a^{3:2}$) $M(a+l) = M.\delta$ (5). Quodsi etiam numeratorem per massam exprimamus, erit ille $= M(\frac{129}{105}a^2 + 2al + ll\frac{1}{5}a)$; et C. Osc. $= (\frac{129}{105}a^2 + 2al + \frac{1}{5}a):(a+l)$; quod posito $l = o$ relinquit $\frac{129}{105}a + \frac{1}{5}$ parametri. Problema hoc generalius etiam potest proferri; nam æquatio $x^r - y^n = o$, omnes parabolas curvasque agnatas amplectitur. Ponendo $r = 2, n = 3$, haberetur casus *Neilianæ*, cujus massa per quadraturam reperitur $= \frac{3}{5}xy$. Et sic porro.

§ 9.

Probl. 3. Invenire simplex Circulo isochronum lateraliter circa axem C moto. Fiat $\frac{\int(xx + \frac{1}{3}yy)ydx}{\int xydx} = \int \frac{(2xx+ax)}{3}$ $\sqrt{(ax-xx)}dx : \int x\sqrt{(ax-xx)}dx$. Revocemus hæc integralia directe ad höh. Mech. II. § 30; ponamus generaliter $\int \frac{x^n dx}{y} =$ (si S arcum quemcunque trigonometricum designat)

$m a^n S + y Z = m a^n S + y(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots)$. Valor quidem m, semper â litterâ n dependens, indicatus est supra § 5. dissert.

Est vero Coëfficiens $A =$ (ex höh. Mech. I. c. nro 29) $- \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots}{2n(2n-2)\ldots} 2a^{n-1}$, et (ibid. nro II) $B = \frac{2A}{3a}$, $C = \frac{4B}{5a}$, $D = \frac{6C}{7a}$; unde Coëfficientes omnes ex primo A determinantur; patet jam, præsto nobis fore integralia quæsita, Lemmatis Kæstneriani tot, quot opus est, applicationibus factis. Primo quidem I) numerator quærendus est, cujus pars prior fit $= \int \frac{\frac{2}{3} xx(ax-x^2)dx}{y} = \frac{2}{3} a \int \frac{x^3 dx}{y} - \frac{2}{3} \int \frac{x^4 dx}{y} = \alpha - \beta$; pro α habetur (ob $n = 3$, $m = \frac{5}{16}$, $A = -\frac{5}{8} a^2$) integrale $= [\frac{5}{16} a^3 S + y (-\frac{5}{8} a^2 - \frac{5ax}{12} - \frac{1}{3} x^2)]$ Const. $\frac{2}{3} a$; et $-\beta$ (ob $n = 4$, $m = \frac{35}{128}$, $A = -\frac{35}{64} a^3$) prodit $= [-\frac{35}{128} a^4 S + y (\frac{35 a^3}{64} + \frac{35 a^2 x}{96} + \frac{7ax^2}{24} + \frac{1}{4} x^3)] \times \frac{2}{3}$. Altera numeratoris pars $\int \frac{ax\sqrt{(ax-x^2)}dx}{3}$ fit $= \frac{1}{3} aa \int \frac{xxdx}{y} - \frac{1}{3} a \int \frac{x^3 dx}{y} = \gamma - \delta$; pro γ quidem erit $n = 2$, $m = \frac{3}{8}$, $A = -\frac{3}{4} a$, ergo integrale ejus $= [\frac{3}{8} aa S + y(-\frac{3a}{4} - \frac{x}{2})] \times \frac{1}{3} aa$; et $-\delta$, quod congruit iterum cum valore α, erit $= [-\frac{5}{16} a^3 S + y (\frac{5a^2}{8} + \frac{5ax}{12} + \frac{1}{3} xx)] \frac{1}{3} a$. Eodem modo prodit II) denominator, qui fit $= a \int \frac{x^2 dx}{y} - \int \frac{x^3 dx}{y} = \mu - \nu = [\frac{3}{8} a^2 S + y(-\frac{3}{4}a - \frac{1}{2}x)] a$ —

$\frac{5a^3S}{16}+y\left(\frac{5a^2}{8}+\frac{5ax}{12}+\frac{x^2}{3}\right)$; ubi statim manifestum est, valores $\mu-\nu$ et $\gamma-\delta$ solis constantibus inter se discrepare. Habetur ergo Isochronum simplex $=\frac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{\mu-\nu}=$ (terminos inventos ad speciem concinnam redigendo,) $\frac{9a^4S+y(-18a^3-12a^2x+16ax^2+32x^3)}{12a^3S+y(-24aa-16ax+64xx)}=$(ponendo $a=2r$, et dividendo per 16) $\frac{9r^4S+(2x^3+2rx^2-9r^3-3rrx)\sqrt{(2rx-xx)}}{6r^3S+(4xx-6rr-2rx)\sqrt{(2rx-xx)}}$, quod transit in formulam ab Ill. K æ s t n e r o erutam, si *fili* etiam longitudinem in calculum introduceremus. Evanescente autem ordinatâ arcus abit in semiperipheriam, et relinquit Isochronum $=\frac{3}{4}$ totius diametri.

§ 10.

Faciliori etiam negotio habebimus ex istius Lemmatis applicatione Isochronum *peripheriæ* circuli, areâ scilicet sine pondere spectatâ, (Fig. 6) Fiat oscillatio normalis circa axem aliquem ultra tangentem ascendentem; jam si fuerit elementum Mm circuli $=dS$, erit formula $=\int[(x+l)^2+yy]dS:\int(x+l)dS=$ (ob $dS=\frac{rdx}{\sqrt{(2rx-xx)}}$) $\int\frac{[2r(l+r)x+rll]dx}{\sqrt{(2rx-xx)}}$, cujus pars prior $2r(l+r)\int\frac{xdx}{y}$ (ob $n=1, m=\frac{1}{2}, A=-1, B=0, C=0,$) erit $=$ $(r\,arc.\,sin.\frac{y}{r}-y)\times$ Const. $2r(l+r)$; posterior autem $=rll\,arc.\,sin.\frac{y}{r}$; qui numerator arcu in π abeunte fit $=[2r(l+r)+ll]r\pi$; denominator autem primo intuitu est $=r(r+l)\pi$, unde Centrum oscillationis $= \frac{ll+2(r+l)r}{r+l}$, quod relinquit ipsam diametrum, axe motus cum tangente coincidente, ut est apud Hugenium.

Cæterum manifestum est, peripheriam axi ad normam insistere, uti in § 9; alioquin enim esset $\int y^2 dS = o$, et peripheriæ in planum meantis paulo major est angularis velocitas, nec idem simplex. Sic pro *circulo* parallele moto adforet longitudo *höh. Mech.* III. § 29. Pro *peripheriâ* autem sic oscillante adest numerator $ll r. arc. sin. \frac{y}{r} + 2lr\int\frac{xdx}{y} + r\int\frac{xxdx}{y} =$ (e superioribus) $r[\frac{3}{2}rr. arc. sin. \frac{y}{r} + y(-\frac{3r+x}{2})] + 2(r arc. sin. \frac{y}{r} - y)lr + llr. arc. sin. \frac{y}{r}$. Dividitur hoc per $[(l+r) arc. sin. \frac{y}{r} - y] r$; unde centrum oscillationis $=$ (terminos istos in unum redigendo) $\frac{(\frac{3}{2}rr+2lr+ll) arc. sin. y:r + (-\frac{3r+x+4l}{2})\sqrt{(2rx-xx)}}{(l+r) arc. sin. y:r - \sqrt{(2rx-xx)}}$; æquatis jam partibus mere algebraicis $= o$, casu $x = 2r$ adest Isochronum $= \frac{3rr+4lr+2ll}{2(r+l)}$, id pro axe C (Fig. 6) derelinquit $\frac{3}{4}$ diametri, ut est apud Hugenium. Verum si investigassemus centrum nostrum pro arcu quocunque S respectu axis tangentis, habituri fuissemus $\frac{3rS-(3r+x)y}{2(S-y)} = \frac{3}{2}r + \frac{xy}{2(y-S)}$. Hæc ad applicationem loci *höh. Mech.* II. § 30. Cæterum peripheriæ Isochronum multo habetur facilius axium principalium artificio. Nam si cum Eulero ponamus $2r^3\pi$ pro momento inertiæ respectu axis per I normalis, addendo rrM obtinetur momentum pro axe tan-

gente. At axe principali cum diametro coincidente, erit (ab-
scissâ e centro sumtâ, positoque ponduscolo $= r(rr-xx)^{-\frac{1}{2}}dx$)
elementi inertiæ momentum $= rydx$, atque $r\int ydx = r^3\pi$,
ex quo habetur peripheriæ in planum sitæ Isochronum respectu
axis cujuscunque, vel extra vel intra jacentis, vel etiam tan-
gentis, ut liquet. — Considerandus jam detur rectanguli am-
bitus $CDBG$ Fig. 7, areâ scilicet sine pondere spectatâ, quæ-
ritur momentum inertiæ quoad punctum I in centro massæ si-
to. Fiat $CD = 2a$, $CB = 2b$, ponatur $\int(IZ)^2 dM = \int(aa+xx)dx$
$= aab + \frac{1}{3}b^3$. Hoc quater. Similiter pro reliquis partibus ad-
est $4(abb+\frac{1}{3}a^3)$; quarum summa sistit $\frac{1}{3}M(a+b)^2$; ut sit oscilla-
tionis centrum pro axe quocunque A, extra jacente, et char-
tæ normali $= \frac{aa+2ab+4bb+6bl+3ll}{3(b+l)}$; hinc pro figurâ qua-
drati (præter latera nusquam inerti) relinquitur longitudo
$= \frac{7}{6}CB$, respectu axis supremum latus sub 90° secantis. Eu-
lerus in libro suo nusquam pertractat hunc casum. Monere
ergo sufficiat, omnia, quæ habet Ille de laminis, extendi etiam
ad earum ambitus, exutâ nempe areis inertiâ. Observo hîc:
a) investigationem centrorum oscillationis & inertiæ analyti-
cam quanquam in laminis & solidis simillimam, in rectilineis fi-
gurarum perimetris nihil amplius commune habere; *b*) pro quo-
vis ambitu regulari polygono terminum generalem adhiberi pos-
se, sistentem in. mom. pro axe principali ad chartam normali;
nimirum si angulus ad centrum $= \Phi$, ideoque $n\Phi = 360^\circ$,
$ID = b$, polygoni latus $= 2c$, circuli circumscripti radius $= r$,
erit canonica illa expressio $= 2nr(bb+\frac{1}{3}cc)\sin\frac{1}{2}\Phi$. Applica-
tio: Si sit $n = 3$, postulatur mom. ambitus Δ æquilateri, cujus
perpendiculo $= a$ posito, erit e trianguli naturâ $bb = \frac{1}{9}aa$, ut

sit quæsitum $6 r. \sin 60^\circ (\frac{1}{9} aa + \frac{1}{3} cc) = \frac{2}{9} Maa$, ex quo erit isochronum $= a$. Verum si $n = 4$, $M = 8 r. \sin 45^\circ$, erit momentum quæsitum $=$ (ob $b = c$) $\frac{1}{3} M. AB^2$; ex quo. emergit simplex $= 1\frac{1}{6}$ lateris, ut supra invenimus. — Similis est etiam consideratio ppedi AG (Fig. 8) intus vacui; spectatâ unice superficie. Facile enim ope ternarum directricium, secantium se in I, omnium laterum in. mom. ad axem horizontaliter per centrum I meantem revocantur. Sic in figurâ 8 posito $AB = 2a$, $AC = 2b$, $EC = 2c$, reperi momentum respectu axis $Nn =$ $\frac{1}{3} M \frac{a(b^3+c^3)+bc(b^2+c^2)+3abc(b+c)}{ab+ac+bc}$. Nec id habet Eulerus.

§ 11.

Probl. 4. Quæritur sectoris ABC (Fig. 9.) isochronum, axe motus chartæ ad normam ducto? — Præstare hoc licet diversis methodis. Sequentem præfero, quia concinna est. Sit $AE = r$, $AF = z$, $BE = S$, $BD = b$, AL, $RL = x, y$; elementum $Mm = zdS : r$, & ponduscułum $= dS. zdz : r$, ejusque momentum inertiæ $dM (xx+yy) = dS. z^3 dz : r$, cujus, Integrale, sumtis dz, dS successive variabilibus, erit $= \frac{1}{4} r^3 S$ quod valet pro sectore ABE. Restat investigandum $\int x dM$; quod sic absolvo: elementi Rn mom. staticum est $= x. Rn$, sed ob $\Delta Rrn \backsim \Delta ALR$ erit $Rn : Rr = AR : AL = z : x$, hoc est $x. Rn = zdy$, ideoque mom. arcus $RF = yz$, & pro arcu $BE = rb$; sunt ergo mom. arcuum similium inter se ut $\Delta ALR : \Delta ADB = AR^2 : AB^2$, vel $zy : rb = zz : rr$, & mom. arcus $RF = bzz : r$, atque elementi sectoris $= bz^2 dz : r$, quod integratum fit $= \frac{1}{3} brr$. Unde longitudo huic sectori Isochrona $= 3rS : 4b$, hoc est, æquatur tribus quartis quartæ proportionalis ad sinum, radium & arcum, uti extat in Horologio. Cæterum isto solutionis compendio magnas evitamus ambages. Verbi causa si pro triangulo & segmento seorsim inquiramus momentum staticum, erit $\int x\,dx\sqrt{(rr-xx)} = C.-\frac{1}{3}y^3$; ubi quidem invariabilis quantitas minime est $= o$, ut primo intuitu videri posset. Consideretur enim, staticum momentum in lineâ $BD\,(= b)$ terminari, ibique evanescere; ut sit $C-\frac{1}{3}b^3 = o$, $C = \frac{1}{3}b^3$; ergo integrale completum est $= \frac{1}{3}(b^3-y^3)$, et pro toto segmento $= \frac{1}{3}b^3$; similiter pro triangulo ABC reperio $\frac{1}{3}b.AF^2$; ergo denominator est $= \frac{1}{3}b(AF^2+bb) = \frac{1}{3}brr$; legitime. — Momentum autem *inertiæ* isto modo eruere, longe foret adhuc operosius. Exuamus jam sectori inertiam, spectato unice filo, in speciem $ABECA$ efformato; erit momentum inertiæ totius ambitus $= \frac{2}{3}r^3+rrS$, si $BEC = S$; staticum pro radiis $= rr$; pro investigando autem arcus AEB momento fiat $-dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{(rr-xx)}}$; $r\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(rr-xx)}} = C.-ry$; ex quo habetur (posito $C. = rb$, et $y = o$) verum totius arcus momentum $= 2br$; quod idem mom. supra etiam invenimus, aliis usi ratiociniis; ergo Centrum oscillationis $= \frac{2rr+3rS}{6b+3r} =$ (si angulus $BAE = \Phi$) $\frac{2}{3}.\frac{rr(1+3\Phi)}{r+2b}$. Non plane inelegans est ejusmodi linearum consideratio.

§ 12.

Hæc de lineis et laminis. De plano autem motu nihil; monente jam Johanne Bernoullio (opp. IV. nro 177. § 9), omnem oscillationem ad normalem reduci posse. Transimus igitur ad solida; in quibus integratio fit longe magis expedita. Quâ de causâ paucis absolvere rem poterimus, præsertim cum spatii angustia nos longos esse vetet. — Ipsum autem canonem memento per π multiplicem, si quando opus id fuerit.

Probl. 5. Coni $BCDK$ (Fig. 10) inverse sibi junguntur; quæritur Isochronum? Sit $CK = 2a$, $BD = 2b$, ordinata $= bx : a$, unde $\frac{1}{2}\int y^4 dx = \frac{1}{10} ab^4$; reliquæ autem partes sunt $= \frac{2bb\int[2a(a+l-x)+ll+xx)x^2 dx}{aa} =$ (integrando et separando M) $M(\frac{11}{10}aa + 2al + ll)$. Momentum vero staticum habetur $= \frac{2}{3}(a+l)abb$; quod patuisset vel sine analysi; nam est $\int xyydx = M\delta$ per Horologium IV, 1. 2. Centrum vero massæ cadit in mediam CK. Prodit ex his quæsitum Isochronon $\frac{22aa+40al+20ll+3bb}{20(a+l)}$; quod axe motus parallele ad C descendente relinquit $\frac{11}{10}a + \frac{3bb}{20a}$; unde Centrum Oscillationis â massæ Centro distat intervallo $\frac{3bb}{20a} + \frac{1}{10}a$. Res eadem est, si axis infra verticem descendat, et per ipsum solidum transeat. Sit $NC = q$, $CS = x$, erit $SN = x - q$; unde inertiæ momenta $= 2\int yydx[2a(a-x-q)+xx+qq+\frac{1}{4}yy] = \frac{2}{3}(\frac{11}{10}aa + qq - 2aq + \frac{3bb}{20a})$; ex quo adest simplicis longitudo $= (\frac{11}{10}aa + qq - 2aq + \frac{3bb}{20a}) : (a-q)$, quod nullâ re differt â simplici supra invento, nisi quod aliquæ partes sint negativæ. Si fiat in numeratore isto q quantitas variabilis et ponatur $qq - 2aq = min.$, erit $q = a$; justo. Pro *uno* tantum cono habituri hoc modo fuissemus $q = \frac{3}{4}a$; sic e specialibus casibus generaliter probatur, momentum inertiæ omnium *minimum* cadere constanter in gravitatis centrum. Sed minimum illud excludit Oscillationem; est enim Isochronum $\delta + \frac{kk}{\delta}$

(ob $\delta = o$) $= \frac{kk}{o} = \infty$. Defectus hic Oscillationis evenit pro $\delta = \left(\frac{o}{\infty} \right.$. k)

§ 13.

Probl. 6. Quæritur, ubi sit isochronum in conis truncatis $BFKT$ Fig. 11, inverse sibi junctis? — Esto $FT = 2a$, $BK = 2b$, $= HC = 2b$, $FE = x$; fiat ordinata $= b + \frac{(c-b)x}{a}$; Integratio hîc est molesta magis, quam difficilis; primo quidem

$$\tfrac{1}{2}\int y^4 dx = \int \left[\tfrac{1}{2} b^4 + \frac{2b^3(c-b)x}{a} + \frac{3b^2(c-b)^2x^2}{aa} + \frac{2b(c-b)^3x^3}{a^3} + \frac{(c-b)^4x^4}{2a^4} \right] dx =$$

(integrando & reducendo ad formam concinnam) $\frac{1}{10} a (b^4 + b^3c + b^2c^2 + bc^3 + c^4)$. Accedit huc $2\int yydx (2a^2 - 2ax + xx) = \frac{1}{15} a^3 (16bb + 13bc + 11cc)$. Divisor autem est $2a\int yydx = \frac{2}{3} aa (bb + bc + cc)$; qui ex eo etiam manifestus fit, quod per Jac. Bernoullii regulam (opp. T. I pag. 311) $M = \frac{2}{3} a\pi (bb + bc + cc)$. Centrum vero massæ cadit in cen-

---

k) Stabile hoc æquilibrium, oriundum, si axis per centrum inertiæ transit, tum e vulgari patet Staticâ, tum eleganter etiam demonstratur e Bernoullianâ gravitatis fictitiæ analogiâ. Datum sit (Fig. 12.) pendulum æqualium brachiorum $MC = mC = b$; cujus altera massa m fingatur item in M collecta, tanquam motrix negativa $= -gM$; erit totalis motrix in M applicata $= g(M - m)$ et acceleratrix $= \frac{g(M-m)}{M+m}$; quod erit Psevd-Isochronum; ex quo prodit analogiâ institutâ Isochronum naturale $= \frac{b(M+m)}{M-m}$; jam si C sit centrum gravitatis totius systematis, ob $CM = Cm$, necessario etiam $M = m$, et simplex $= \frac{2bM}{o} = \infty$. Quo designatur, nullum hic præponderationi locum esse; sed systema redigi ad æquilibrium.

trum basis, utrique cono communis. Jam adest Isochronum =

$$\frac{\frac{1}{10}(b^4+b^3c+b^2c^2+bc^3+c^4)+\frac{1}{15}aa(16bb+13bc+11cc)}{\frac{2}{3}a(bb+bc+cc)}$$

Examen instituitur ponendo $b=o$, quo facto restat legitime $\frac{3cc}{20a}+\frac{11}{10}a$. At si $b=c$, adest $\frac{2}{3}FT+\frac{cc}{2FT}$. Pro *uno* cono truncato BFK reperio isochronum = (posito brevitatis causa $b^4+b^3c+b^2c^2+bc^3+c^4=Q$) $\frac{\frac{1}{20}Q+\frac{1}{30}aa(bb+3bc+6cc)}{\frac{1}{12}a(bb+2bc+3cc)}$; quod relinquit pro $b=o$ casum coni erecti $=\frac{4}{5}a+\frac{cc}{3a}$. Pro eodem cono â majori basi suspenso reperio $\frac{\frac{1}{20}Q+\frac{1}{30}aa(6bb+3cb+cc)}{\frac{1}{12}a(3bb+2bc+cc)}$; quod casu $b=o$ sistit Isochronum coni â basi suspensi $\frac{2}{5}a+\frac{3cc}{5a}$; id pro cono *rectangulo* abit in a, uti habet Bernoullii tabula I, nro 2. Unde Isochronum coni $\left(\begin{smallmatrix}\text{obtusi}\\ \text{acuti}\end{smallmatrix}\right)$ constanter est $\left(\begin{smallmatrix}>\\ <\end{smallmatrix}\right)$ a.

§ 14.

Probl. 6. Sint dati duo conoides parabolici ad virgam AB annexi, Fig. 13; quæ virga sit ppedum vel cylindrus; quæritur Oscillationis Centrum in hoc pendulo composito respectu axis per C ducti, Fiat $AB=a$, $CB=h$, latitudo ppedi $=2g$, ejusdem densitas $=f$. Manifestum est, huc non quadrare analyticum Bernoulli terminum. *l*) Quare confugiendum erit ad elementares tres

l) Nempe Viro summo propositum erat, unice exempla ab *Hugenio* pertractata revocare ad analysin; (Comment. Paris. 1703. pag. 341: Voila, que ma regle s' étend sur tout ce, qui Huyghens nous a laissé cette tres solidi dimensiones $dxdydz$, et eruendum inertiæ momentum integratione ter institutâ. Ponatur ideo $dM[(x-h)^2+yy]=(xx+yy+hh-2hx)dxdydz$. Hoc integretur pro y variabili, ut sit $\int[yy+(x-h)^2]dM=$ (reddendo g loco y) $g(xx+\frac{1}{3}gg+hh-2hx)dxdz$. Duplicetur hoc, et integretur x, ut habeamus inertiæ momentum verticalis rectanguli AB, ad axem motus normalis $=2ag(\frac{1}{3}aa+hh-ah+\frac{1}{3}gg).dz$, multiplicis per dz, hoc est per densitatis elementum. *) Ex quo emergit momentum totius ppedi $=$ (si pondus specificum quantitatis materiæ, ex quâ conflatum est ppedum, ponatur $=\varrho$) $2afg\varrho[\frac{1}{3}(aa+gg)+hh-ah]$; ubi manifesto est $2afg\varrho=M$; momentum vero staticum fit $=2\varrho\int(x-h)fgdx=M(\frac{1}{2}a-h)$. Reliquus calculus spectat ad conoides. Quorum inertiæ momenta sunt (posito $a-h=e$, et parametro $=p$) $=\int 4px(bb+be-bx+\frac{1}{2}ee+\frac{1}{2}xx+\frac{1}{8}px)dx=$ (massâ, ut par est, per cubaturam repræsentatâ, et posito $IS=r$) $P(\frac{7}{6}bb+2eb+ee+\frac{1}{6}rr)$. Divisor autem $2\pi p(e+b)\int.xdx=(e+b)P$. Ex his conficitur Centrum Oscillationis $=$

$$\frac{M[\frac{1}{3}(aa+gg)+hh-ah]+P(\frac{7}{6}bb+2eb+ee+\frac{1}{6}rr)}{M(\frac{1}{2}a-h)+P(e+b)}.$$

— Quodsi conoidum quæratur inertiæ momentum respectu axis RS, erit illud evidenter $=\frac{1}{6}P(bb+rr)$, omnium nempe possibilium *minimum*, ob conoides utrinque æquales; nam ex § 7. derivatur ge-

---

cette matiére,,) Hugenius autem, si recte memini, (præter laminas) ea tantum solida considerat, quæ revolvendo gignuntur. Præstitit ergo quod pollicitus est, Bernoullius. Cæterum hæc inertiæ momentorum in solidis quibuscunque investigatio habet suum singularem usum in aliis Mechanicæ partibus; nec ad pendula unice restringitur. Verbi causâ si quæstio sit de viribus machinas datas moventibus.

*) In Tabulâ æneâ Fig. 13 conois RAS tam acute sculptus est, ut illi minus commode applicari posse videatur ppedum; verum hoc ad quæstionem nihil confert.

neralis momenti *minimi* canon $= \left[\frac{\int . yy\delta x(4xx+yy)\pi}{4\pi\int . yydx} - \delta\delta\right] \times$ Massæ cuicunque ex valore yy determinandæ $= Mkk$. — Sub initium hujus §phi virgam statuimus esse vel *ppedum* vel *cylindrum*; secundo hoc casu res succedet promtissime, positâ unice $y = C$.; quum prior singularem sibi tractandi methodum postulet. — Porro, si fiat oscillatio circa axem L (Fig. 13), ob $AL = LB$, virgæ mom. stat. est $= o$; et quæ sunt consectaria his similia. — Tantum de solidis. Casum *sphæræ* omnium notissimum omittimus; Hugenius in Horologio reperit ejus Isochronum $=$ (si filum et radius $= l+r=f$) m) $f + \frac{2rr}{5 \cdot f}$; quod axe motus sphæram tangente sistit septem decimas diametri. — Ulterius jam rem non persequar; exempla enim per se luculenta sunt, et prostant etiam in tabulis. — Sed ne quis existimet, theoremate nostro Hugeniano in praxi rem integram absolvi! Superanda enim sunt et alia obstacula, *frictio* et *aëris* resistentia; *illius* quidem in oscillatione pendulorum axem terentium subtilissime rationem habuit Leonh. Eulerus (in Theoriæ suæ p. 464-481); ingenue fassus, quæstionem illam difficultates pæne non su-

---

m) Prodit nempe hoc simplex, fili momento $= o$ posito; sed caute agere jubet Eulerus, nec leviter contemnere momentum illud, recte monens, etiam si massarum virgæ & sphæræ ratio fuerit 1:30, pro $l = 3$ ped., $r = \frac{1}{12}$ ped., virgæ cylindricæ radio $= \frac{1}{500}$ ped., errorem tamen admitti $= 0,0173$ ped. $= 2\frac{1}{2}$ lin.; & pro ratione 1:60, errorem $= 0,0060$ ped. $= \frac{13}{15}$ lin. (de Motu Solid. p. 215 § 553.) Etiam hoc observandum est, in virgâ tenuissimâ esse Isochronum $= \frac{2}{3}$ longitudinis; sed $> \frac{2}{3}$ pro cylindro sensibilis alicujus radii: Incurius hujus discriminis Chalius æquale tribuit Isochronum & lineæ & cylindro. Etiam Saverien (Dict. de Math. & Phys.) pro cylindro ponit $\frac{2}{3}$, pro cono $\frac{4}{5}$ altitudinis; omisso semper *excessu*, quod quidem negligentius & minus accurate ita statuitur; vid. Tit. *Centre*.

perandas involvere. Hoc inprimis memorabile duco, quod, cum pendulorum circa axem firmum gyrantium Isochronum sit $= \delta + \frac{kk}{\delta}$ (§ 7), longitudo hæc evadat tantummodo $= \frac{kk}{\delta}$ n), *si pendulum cylindro annexum sit, horizontaliter duobus fulcris imposito, circa quæ fulcra oscillatio fiat libera*, nec ad axem aliquem certum restricta sit, uti assumitur apud Hugenium. Causam oscillationi huic expeditæ assignare nequeo aliam, nisi *istam ipsam axis libertatem*; quæ libertas, (si modo veram tetigi causam,) eo magis oscillationem promovet, quo major littera δ fuerit. Etiam hoc probe discernendum est, quod in Hugeniano pendulo plane *nullum* detur Isochronum $\frac{kk}{\delta}$, oscillatio enim evadit infinita; at in Euleri systemate hoc fit aliter. Dubius sum in hâc re, admirerne magis singularem istum Naturæ Ludum, an Euleriani ingenii subtilitatem. — Non minus considerabilis est aëris ambeuntis resistentia o), quæ ut sit quam minima, semper *aciem* suam viæ describendæ lentes opponunt. Supra dixi in notâ, investigationem inertiæ momentorum etiam in aliis casibus commodum usum præbere; v. c. si de machinis lucrose computandis agitur. Exemplum omnium facillimum foret rota *ATOR* fig. 14, constans annulo externo, ppedis & orbiculâ internâ; quæ tria computatu sunt facilli-

n) Vid. Eulerum l. c. pag. 480. § 1028.

o) Conferre aliquid aërem ad motum penduli retardandum, accuratissimis jam dudum experimentis comprobatum est; vid. Giornale de Lett. d' Italia, T. IV. 1710 pag. 334, ubi duo Viri nominantur, ambo summâ fide digni: „Avendo veduto il celebre Boyle ed il famoso Pascal, che un pendolo faccia piu vibrazioni nel vuoto, che nel pieno d' aria, anch' io tentai lo sperimento colla maggiore simplicitâ.„ (Sequitur ipsum auctoris Zendrini experimentum, qui reperit relationem Oscillationum in vacuo & aëre ut 400 : 50 = 8 : 1.

ma; magis jam composita foret rota *aquaria*; de quâ Ill. Kæstnerus l. sæpe cit. p. 445 : „Man müste an demselben die Momente der Wellen, der Arme, des Kranzes, der Schaufeln, kurz aller Theile einzeln zusammenrechnen, um das Moment des ganzen Rades zu finden.„ Langsdorfius, Vir longe Clariss. in Commentario suo ad hunc locum (Unters. aus der höh. Mech. p. 60) facem tyronibus præfert, singularum illius rotæ partium momenta colligendi. At si contendit, (§ 58. l. c. nro II) brachia esse ppeda, *quæ habeantur ex Kæstn. § 53*, id (nisi me fallunt omnia) minus stricte sumi debet. Kæstnerus enim (Ill. § 53) *vectis ppedi* momentum investigat respectu dati cujusdam *puncti*, at casu rotæ investigandum illud est pro *axe* vel *lineâ*, normaliter per *C* (Fig. 14) ducta; non autem pro aliquo axis *puncto*. — — Tantum de in. mom. tanquam fundamentali Hugenianæ regulæ principio; de quo vellem, ut citius Geometris constitisset; tum enim sequenti §pho supersederem.

§ 15.

Frustra nempe desudavisse in hoc problemate celebres quosdam viros sub medium XVII Seculum, Imo § monui; nec secus illi se dederunt huic quæstioni, ac si lapidem aliquem Lydium inquærerent. Sed, ut fieri solet, frustra. Hugenii enim Ingenio, difficillimorum problematum (ut ita dicam) Nucifrangibulo, etiam *hoc* mysterium reservatum fuit. At Geometras istos de re *nondum* inventâ, tanquam de asini umbrâ decertâsse inter se, quis *inventi auctor* esset, id sane ridiculum est. Nullus autem susceptum suum de aliquâ re judicium obstinatius defendit quam Cartesius, omnes aliter sentientes parum amice catulos, nanos, boves compellare solitus. Ejusmodi bellum indecens a. 1646 gessit cum Aristarcho Gallo pro defendendâ suâ Centri (ut ajebat,) *agitationis* investigatione contra Robervallianos conatus. — Præcipue diserte Robervallium aggreditur in Epistolâ ad Mersennum (Tomo III. pag. 348): „Prætendit, *gravitatis* Centrum contribuere aliquid ad Centrum *agitationis*. *Et sane* Magistraliter *admodum id defendit*, *cudendo Principium Mechanicum*, *quod vult à me honorari tanquam Oraculum*, *quod ex ore suo prodiit*. — — Sed ratiocinationes ejus sunt Nani monstroso capite, et parum sani sensus habent.„ — Hæc Cartesius. Multa etiam indecentius. Duo tamen excusant illius immodestiam; Jus Philosophi Ævique Rusticitas. — Famoso illi problemati solvendo frustra etiam se accinxerunt Cavendish, Eques Anglus, Steph. Gilletus aliique multi. — Sed in hoc sane devinxit sibi gratum posteritatis animum Mersennus, Pater Minimus, quod nodum hunc Hugenio, *pæne puero*" p) resolvendum proponeret, et summis Matheseos commodis futuri solutoris ingenium præpararet.

§ 16.

Investigatio Isochronismi elegantissimis problematis occasionem dedit. Sic Neutonus pro siphone brachiorum verticalium reperit dimidiam aquæ longitudinem, Princ. II prop. 44 (usus hoc casu ad determinandam undarum velocitatem, prop. 45). — Pro quâvis brachiorum inclinatione solverunt hoc problema Jo. & Dan. Bernoullius, ille opp. IV hic in Hydrodyn. — & Jac. Hermanns in Comm. Petrop. III p. 10—13. Omnes nempe vel majores vel minores Oscillationes in siphone sunt tautochronæ. Quod idem de omnibus in aquâ stagnante sursum & deorsum crispationibus observavit Joh. Bernoullius (Opp. IV pag. 295) pendulorum etiam turbinantium,

---

p) Horologium IV, initio.

luxantium, multifilium, titubationum ... inventor (T. II, IV); quæ partim Curiosa magis qum utilia sunt; hujusmodi est *sympathiæ* duorum pendulorum Consideratio, paxillo rigido, onere C onusto connexorum, & per minimos arcus excurrentium (Fig. 15), nempe si motrix in $C = gM$, patet totum pondus â filis in A & B sustineri. Verum id scire nondum satis est, sed determinate examinandum, quantum vis motricis ab uno, quantum ab altero filo sustineatur. Fiat $AD = m$, $BE = n$, $AC = a$, $BC = b$, $a+b = c$, erit motrix A: motrix in $B = b:a$, et vel gM: motrix in $B = CB + AC : AC = c:a$, et motrix in $B = \frac{agM}{c}$, in $A = \frac{bgM}{c}$, quibus duabus una gM æquivalet... Posito jam arcu excursionis minimo $Aa = Bb = x$, vis motrix totalis, seu conatus paxillum restituendi in æquilibrium, exprimitur per $\frac{xbgM}{mc} + \frac{xagM}{nc} = xgM[\frac{bn+am}{mnc}]$, et ficta acceleratrix $=$ $xg[\frac{bn+am}{mnc}]$; quæ fit ad x, ut g ad $\frac{mnc}{am+bn} =$ naturali simplici. Posito $a = b$, erit Isochronum $= \frac{2mn}{m+n}$; quod abit in m, si $m = n$; item si $a = o$, hoc est, si massa M in ipso puncto A fuerit applicata, erit evidenter $b = c$, et simplex $= m$; ergo hoc casu pendulum n plane nihil confert ad alterandam fili m velocitatem, cum nullum pondus gestet; nam vis motrix â filo n in B sustinenda $\frac{agM}{c}$ fit $= o$. Si sit autem in Isochrono $\frac{mnc}{am+nb}$ $n = \infty$, evanescet am, et simplex erit $= mc:b =$ (si quoque $a = b$) $2m$. Cæterum in hâc sympathiâ necessario est Isochronum $> m$ et $< n$, eâdem de causâ, quâ Fig. 1 Centrum Oscillationis O cadit inter A et B. — Alterum sympathicorum genus â Bernoullio non pertractatum est sequens: Considerentur idealiter tres rigidæ non graves $DABE$, sed onustæ in P et Q; (seponamus compendii causâ massam tertiam C;) Fiat $DP = k$, $EQ = s$. Annihilemus massas in P et Q, et substituamus in punctis A et B æquivalentes inertias $\frac{P.kk}{mm}$ et $\frac{Q.ss}{nn}$; acceleratrices autem in A et B sint $= \frac{g.m}{k}$ et $\frac{g.n}{s}$, unde motrices sunt $= \frac{gPk}{m}$ et $\frac{gQs}{n}$. Conatus autem totalis restituendi paxillum in æquilibrium determinatur per quantitatem motricium et filorum longitudinem, ut sit vis illa $= \frac{x.gPk}{m.\ m} + \frac{x.gQs}{n.\ n} = gx[\frac{n^2Pk + m^2Qs}{m^2n^2}]$; dividendo hoc per massarum summam, habebimus acceleratricem fictitiam $= xg[\frac{n^2Pk + m^2Qs}{m^2n^2}] : [\frac{Pk^2n^2 + Qs^2m^2}{m^2n^2}] = xg[\frac{Pkn^2 + Qsm^2}{Pk^2n^2 + Qs^2m^2}]$, ex quo habetur verum Isochronum $=$ (analogiâ superiori institutâ) $\frac{Pk^2n^2 + Qs^2m^2}{Pkn^2 + Qsm^2}$; si $P = Q$, erit illud $= \frac{k^2n^2 + s^2m^2}{kn^2 + sm^2}$. Si $s = o$, restat k, sin $k = o$, restat s, utrumque legitime. At si $k = m$, $s = n$, aderit $\frac{mn[P+Q]}{Pn + Qm} =$ (si $P = Q$) $\frac{2mn}{m+n}$, quod idem in superiori etiam Isochrono prodiit hâc conditione; nempe gravitatis Centro in medium paxillum cadente. — Observo, rem etiam ad tria vel plura sympathica extendi posse, (Fig. 16). Nam si pondera sint in a, b, c, facile ad puncta L, M, N, revocantur. Inprimis memorabile est, ex hac triplici sympathiâ generalem legem prodire pro quocunque $n$plici, nimirum si Fig. 15 filis $AD(m)$, $BE(n)$ in A et B applicatæ fuerint æquales motrices gM, erit Isochronum $= \frac{2mn}{m+n}$; sin Fig. 16 filis AL, BM, CN, (m, n, o)

item æquales gM applicatæ fuerint in punctis L, M, N, erit Isochronum $= \frac{3mno}{mo+no+mn}$; porro pro 4 filis, erit illud $= \frac{4mnop}{mno+mop+nop+mnp}$; & sic usque pro 5, 6 ... n filis. — Plura non addam de hâc re; quæ quamvis per se nullius momenti sit, tamen locum invenire potuit in exiguo hujusmodi tirocinio.

Et jam pæne timidus primum hoc Auctoritatis meæ Periculum publico examini subjicio, tantilli hujus ad Hugenium, Bernoullios, Eulerum, Kæstnerum, Maupertuisium Commentarioli clementem sperans Judicem. — Hæc. —

Errata Typi:

p. 12. lin. 9. von unten $l. -\frac{3}{4}\pi\int y^4 dx$ pro $\frac{3}{4}\pi\int y^4 dx$.
p. 15. lin. 14. lege $ll+\frac{1}{5}a$ pro $ll\frac{1}{5}a$
p. 22. lin. 9. vac. leg. . . $+\frac{3bb}{20a})abb$;

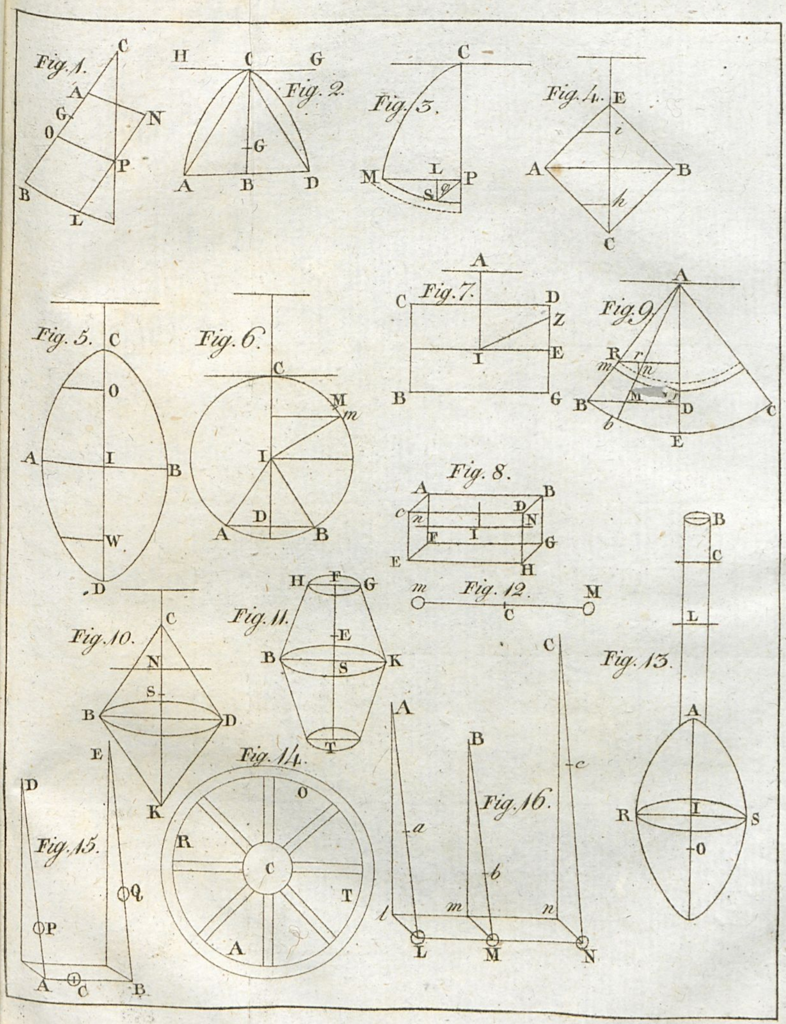
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.

11

11

DE CENTRO OSCILLATIONIS PER HUGENII REGULAM ANALYTICE INVESTIGANDO TENTAMEN.

QUOD

PRÆSIDE

VIRO EXCELLENTISSIMO ATQUE AMPLISSIMO

CHRISTOPHORO FRIDERICO PFLEIDERER

UNIVERSITATIS ET COLLEGII ILLUSTRIS PROF. PHYSICES ET MATHESEOS PUBL. ORD.

H. T.

RECTORE MAGNIFICO

ET FACULTATIS PHILOSOPHICÆ DECANO

PRÆCEPTORE AC PATRONO SUO PIE DEVENERANDO

PRO CONSEQUENDIS SUMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBUS

DIE SEPT. MDCCXCIX.

PUBLICE DEFENDET

AUCTOR

GUILIELMUS LUDOVICUS CHRISTMANN

HERCYNIO - HIRSAVIENSIS

CANDIDATUS MAGISTERII PHILOSOPHICI IN ILLUSTRI STIP. THEOLOGICO.

TUBINGÆ

LITTERIS FUESIANIS.

35

1799