DISSERTATION SUR LA RÉSISTANCE DES FLUIDES,

QUI A REMPORTÉ LE PRIX PROPOSÉ

PAR

L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES ET BELLES LETTRES

DE PRUSSE,

POUR L'ANNEÉ MDCCL,

ADJUGÉ EN MDCCLII.

Gartz
Jhn.

À BERLIN
CHEZ HAUDE ET SPENER
Libraires du Roi & de l'Académie.
MDCCLII.

Permis d'imprimer.

P. L. MOREAU DE MAUPERTUIS,

Président de l'Académie.

SPECIMEN HYDRODYNAMICUM
DE
RESISTENTIA CORPORUM
IN FLUIDIS MOTORUM

AUCTORE
JACOBO ADAMI
J. U. D.

No. III.
SYMBOLUM:
Ardua, quæ pulchra.

DE
RESISTENTIA CORPORUM
IN FLUIDIS MOTORUM.

I.

Fluida corporibus in iis motis resistunt partim tenacitate mutuaque particularum attractione, quæ scilicet efficit, ut corpus non nisi cum aliquo virium dispendio eas separare fluidumque trajicere possit: partim inertiâ materiæ, cui necessario aliquis motus a corpore debet imprimi, ut ipsi locum concedat: partim elasticitate, fluidum condensationis & expansionis capax efficiente, atque præsertim in motibus celerioribus fortius in partes corporis anticas quam posticas agente: partim etiam gravitate, quæ, ut in sequentibus demonstrabitur, corpora celeritate, quam possunt acquirere, maximâ in fluidis continuis densitatisque constantis descendentia prorsus ut quiescentia in altum urget vi, quæ æqualis est ponderi massæ fluidæ ejusdem cum corpore voluminis: minore vero, quando corpus maximam velocitatem nondum assecutum est.

II. Sed cum resistentia, quæ oritur a tenacitate, constans sit, neque a velocitate corporis neque ab amplitudine vasis, quod fluidum con-

 tinet,

tinet, pendeat, nulla hæc premitur difficultate: illa vero, quæ eversioni æquilibrii inter vim elasticam fluidi corporis partes anticas urgentem, atque illam, quæ in posticas agit, debetur, ex dato motu corporis definiri nequeat, nisi cognita jam sit resistentia, quæ ab inertia atque pondere fluidi resultat, ita ut determinari possit spatium, corpori dato tempore absolvendum eo casu, quo densitas fluidi antici & postici eadem semper est, & perfectum æquilibrium inter modo dictas vires elasticas conservari ponitur; maximopere in hac materia requiritur, ut illa sollicite investigetur, atque ex principiis Mechanicis rite definiatur. Missis itaque resistentiis a reliquis causis oriundis, hanc solam hoc specimine pertractare constitui.

III. Utilem imprimis in hac materia deprehendi distinctionem vis mortuæ in *Vim efficacem* & *inefficacem*. Dico autem corpus aliquod urgeri a vi efficace, quando vi prementi vel urgenti nihil opponit præter solam suam vim inertiæ. Sic v. gr. corpus plano horizontali impositum ab elastro illud juxta plani ductum propellente remotâ frictione urgebitur a *vi efficace*. *Vim inefficacem* nuncupo vim illam, quæ nullum penitus motum producit, vel etiam nullam vim vivam. Sic vires mortuæ directe contrariæ & æquales agunt in corpus vi inefficace. Talis quoque est pressio in planum immobile, quæ habet directionem normalem ad ipsum planum. Hinc sequitur: quando vis mortua urgens præter inertiam corporis movendi aliud quid insuper superandum habet, vim corpus promoventem & accelerantem esse compositam ex vi efficace & inefficace. Hæc autem in Mechanica practica sive applicata ut plurimum obtinet, quamvis in Theoretica ut mere efficax consideretur.

IV. Quemadmodum autem hæ vires plane inter se differunt intuitu actionis; ita quoque earum diversissima est ratio respectu reactionis & propagationis. Corpus, quod urgetur a vi efficace ideo in causam

pre-

prementem reagit, quia ipsi certum velocitatis gradum non obstante reluctatione vis inertiæ imprimit; atque hoc velocitatis gradu existente $= 0$ vis efficax etiam nihilo æqualis est: certissimum enim est, quacumque etiam mole corpus fuerit præditum, tamen a vi quantumvis parva moveri debere, modo nihil præter inertiam motui obstet. Reactionem autem etiam hic æqualem actioni admittere opus est, quia reactio limitat & circumscribit effectum vis agentis, ut scilicet non possit dato corpori majorem quam definitum celeritatis gradum imprimere intra determinatum temporis intervallum. Aliter res est comparata cum vi inefficace, hæc enim conjunctam habet æqualem reactionem ideo, quia corpori nullum potest imprimere celeritatis gradum, atque una vis alteram ita cohibet, ac si ad generandam velocitatem poneretur nihil. Debebit itaque hujus vis magnitudo per ratiocinia a priori evinci, cum per effectus editos nullum sui relinquat vestigium, unde eam a posteriori æstimare valeamus. Deinde differunt hæ vires ratione propagationis. Vis efficax propagatur a corpore ad corpus corporave contigua cum jactura vis illius, quæ in corpore propagante ad propriam inertiam superandam remanet, transmittitur autem id, quod virium ad hunc finem non opus est, & ad inertiam corporum simul movendorum vincendam requiritur: propagatur itaque cum suo detrimento. Vis inefficax vero retinet semper & ubique eandem magnitudinem per quodcumque demum corpora, & per quantumlibet intervallum illa propagetur.

V. Nullum equidem movere potest scrupulum axioma: quod vis inefficax sit in necessario nexu cum reactione æquali: sed forsan illud non inepte in dubium vocaretur intuitu vis efficacis: pugnare enim videtur cum primis principiis statices: duas vires oppositas & æquales motum producere posse; atque illa, quæ de limitatione vis efficacis per inertiam reagentem modo attuli, non satis evidentia censeri possent: proinde addere juvabit lemma sequens

 PROP.

PROP. I. LEMMA

Qualibet vis efficax necessario conjuncta est cum reactione ipsi actioni æquali.

DEMONSTRATIO.

VI. Ponatur vis acceleratrix corpus quodlibet ſollicitans $= V$, vis reactionis $= R$; atque vim V uniformiter agentem in illo producere celeritatem $= c$. Finge jam, corpus manente, ſi placet, ejus volumine rareſcere in infinitum, ſicque ſuam vim reagendi exuere: hoc, quando a vi finita V ad motum ſollicitatur, acquirit velocitatem infinite magnam reſpectu velocitatis c eodem tempore in corpore non rarefacto genitæ: ſit illa $= i$. Et quia vires acceleratrices ſunt ut contemporanea velocitatis incrementa: erit V ſive vis agens in corpus rarefactum ad $V - R$ id eſt ad eandem vim, vi reactionis diminutam $= i : c$; hinc prodit $R = V - \frac{Vc}{i}$, atque ob c infinite minus quam i erit $R = V$. Liquet autem V eſſe vim efficacem: ergo conſtat propoſitum. Q. E. D.

VII. Quando corpora plura in uno ſyſtemate quomodocumque inter ſe agunt, dico, quod corporum actiones nullatenus alterentur a motu rectilineo toti ſyſtemati communi: poſſe proinde pro lubitu adjici vel demi communem motum ſalvis per omnia viribus, quibus corpora ſeſe mutuo ad motum ſollicitant. Dico etiam poſſe, ſalvis modo dictis viribus, ſingulis corporibus in ſyſtemate addi vel demi vires acceleratrices æquales ejusdem directionis. Sic, ut exemplo Newtoniano utar, actiones corporum in navi conſtitutorum non augentur vel minuuntur a motu navis rectilineo vel uniformi vel juxta quamcumque legem accelerato. Poſſunt quoque hic conſuli ea, quæ tradit Clariſs. Dnus Director EULERUS in opere Mechanico Tom. I. Prop. 95. & adjunctis Corollariis. His præmiſſis me ad materiam ipſam

ipſam converto: primo conſideraturus caſus reſiſtentiæ, ubi gravitas fluidi nihil confert ad reſiſtentiam: deinde quando ad hanc generandam cooperatur. Aſſumo autem, in eodem fluidi ſtrato ad directionem ſui motus normaliter ſumpto, omnes fluidi particulas eadem pollere celeritate, & quæ ſit reciproce ut apertura per quam tranſit.

PROP. II. PROBLEMA.

Moveatur fluidum datæ denſitatis in canali cylindrico horizontaliter locato data cum velocitate, definire preſſionem, quam corpus in eo firmatum & cujus baſis ad directionem fluidi normalis eſt, a vi fluidum accelerante ſuſtinet.

SOLUTIO.

VIII. Sit ABCD canalis ubique æqualis amplitudinis, inſtructus diaphragmate EF, atque horizontaliter locatus, continens fluidum homogeneum cujus denſitas ſit $=1$. Habeat quoque corpus inſitum GIH, cujus axis eſt I*b* baſis GBH. Pono autem, corpus eſſe immobile, atque fluidum, quod corpus ambit, nempe HDOIGCN, atque quod eſt ultra verticem I, ſcilicet NOFE, moveri in directione ad baſin GH normali, nec non diaphragma, intra canalem liberrimè mobile, a funiculo ipſi inſerto LK in K trochleam ambiente, & a cauſa Mechanica quacumque attracto, dum continuo ſuperficiem fluidi tangit, accelerari, & hoc modo fluidum per aperturam minimam CGHD propellere. Per verticem corporis I traducatur planum NO baſi GH æquidiſtans, nec non *no*, ipſi NO infinite propinquum & parallelum: ſimiliter ad diſtantiam quamlibet ab NO plana PQ, *pq* æquidiſtantia, corpus in *ux* & *vy* ſecantia, ita ut ſit N*n*: P*p* $=$ aperturæ in plano PQ: planum NO. Sit jam amplitudo canalis ſeu NO $=m$, NP $=\sigma$, apertura in plano PQ $=y$, apertura minima CGHD $=p$, baſis corporis GH $=n$, NE $=x$, altitudo conveniens velocitati fluidi NOFE, ſive quod mihi perinde eſt, ejus *aſcenſus* *Fig. I.*

poten-

potentialis, tum ſcilicet, cum diaphragma pervenit in ſitum EF, $= \omega$, aſcenſus autem potentialis fluidi in apertura minima $= v$. Eſt ergo $Nn = Ee = -dx$, $Pp = d\sigma$, & ex natura motus fluidorum $v = \frac{m^2\,\omega}{p^2}$. Exponatur velocitas per radicem quadratam altitudinis duplæ, ex qua corpus in vacuo & a gravitate naturali acceleratum illam velocitatem acquirit, eritque velocitas fluidi EFNO $= \sqrt{2\omega}$, nec non velocitas fluidi CGHD $= \frac{m}{p}\sqrt{2\omega} = \sqrt{2v}$. Jam liquet ex præmiſſis, ſtratum aqueum aliusve fluidi Pq, dum verſus baſin corporis promovetur, tranſitque in ſpatium proximum ps ipſi Pq æquale, duplici ex capite acceleratum iri: tum quia intrare cogitur ſpatium anguſtius; tum quia ab acceleratione diaphragmatis neceſſariò omne fluidum, etiamſi in ſpatia anguſtiora non tranſiret, aliquod accipere debet velocitatis incrementum. Quoniam autem duplex hoc incrementum non poteſt produci niſi ab aliqua vi, ſuperficies PQ ſtrati pq urgebitur a vi acceleratrice directionem axi corporis parallelam habente. Neque etiam hæc vis unam ſuperficiei partem magis poteſt urgere quam alteram, oriretur enim hinc motus aliquis partium inteſtinus, neque velocitas in ſtrati partibus æqualitatem conſervare poſſet, quod tamen propter æqualem ubique preſſionem, quâ diaphragma aquam contiguam, & per illam qua medium omne ſequens fluidum animat, omnino fieri debet.

Quemadmodum autem preſſio a diaphragmate propagatur ad planum PQ, ita viciſſim hoc illam tranſmittit ſaltem pro parte usque ad planum CD: ſed quia aperturæ a PQ verſus CD decreſcunt magnitudine, atque pro illa parte, quâ apertura PQ ſuperat aperturam ipſi CD viciniorem, in ſtratum, quod in hac verſatur nulla poteſt derivari preſſio a ſtrato, quod in illa movetur: vis, quæ in totam PQ agit, debet reduci ad vim ejusdem intenſitatis in planum aliquod conſtans, cujus area, ſi ſit unitati æqualis, *vim abſolutam* nuncupo.

Sit jam vis abſoluta in ſuperficiem $QP = P$, in $pq = \overset{I}{P}$, in $rs = \overset{II}{P}$ & ſic porro. Sunt autem vires hæ abſolutæ P, $\overset{I}{P}$, $\overset{II}{P}$ &c. non totæ efficaces reſpectu ſtratorum Pq, ps in quæ immediatè agunt, ſed compoſitæ ex efficacibus & inefficacibus. Efficax eſt vis P, quatenus ad productionem dicti duplicis incrementi velocitatis opus eſt: inefficax autem, quatenus ad ſtratum ſequens ps transmittitur. Hoc autem nullatenus a vi efficace, quâ antecedens urgetur, affici ex eo liquet, quod tunc non ſolum antecedenti ſtrato poſſet imprimere dato tempore certum celeritatis incrementum, ſed etiam præterea ſubſequens ſtratum accelerare: quod idem eſt atque ſtatuere, non poſſe vim datâ minorem intra certum temporis intervallum datum producere motus incrementum, nihilo tamen ſecius poſſe illam vim datam eodem tempore majorem adhuc effectum edere. Quod abſurdum eſſe nemo non videt.

Porro quoniam vis efficax, quâ ſtratum Pq urgetur, & inefficax, quæ per illud ad ſequens fluidum ps transmittitur, eandem habent directionem, axi nempe corporis parallelam, erit vis ex his compoſita earum ſummæ æqualis: id eſt vis abſoluta $P =$ vi efficaci abſolutæ, & vi inefficaci $\overset{I}{P}$ ſimul. Sed quia ex natura motus fluidorum velocitas in apertura $PQ = \frac{m\sqrt{2\omega}}{y}$, ejusdemque incrementum genitum tempore $-\frac{dx}{\sqrt{2\omega}}$ (quo nempe diaphragma ex EF pervenit in ſitum proximum ef) $= \frac{m\,d\omega}{y\sqrt{2\omega}} - \frac{m\,dy\sqrt{2\omega}}{y^2}$, nec non maſſa a vi efficace abſolutâ acceleranda propter denſitatem fluidi $= 1$, eſt exponenda per $d\sigma$, prodit dicta vis efficax abſoluta $= -\frac{m\,d\omega\,d\sigma}{y\,dx} + \frac{2m\omega\,dy\,d\sigma}{y^2\,dx}$. Diventum itaque eſt ad æquationem hanc:

$$P = -\frac{m\,d\omega\,d\sigma}{y\,dx} + \frac{2m\omega\,dy\,d\sigma}{y^2\,dx} + \overset{I}{P}$$

hoc est, ob $\overset{\text{I}}{P} - P = dP$, & $yd\sigma = - m\,dx$, $dP = \frac{m\,d\omega\,d\sigma}{y\,dx} - \frac{2\omega\,d\sigma\,dd\sigma}{dx^2}$. Quâ ita integrata, ut P, y, $d\sigma$ tantum ut variabiles considerentur, reperietur valor ipsius $P = \frac{m\,d\omega}{dx}\int\frac{d\sigma}{y} - \frac{\omega\,d\sigma^2}{dx^2} + C = \frac{m\,d\omega}{dx}\int\frac{d\sigma}{y} - \frac{m^2\omega}{y^2} + C$. Datur itaque P sive pressio absoluta in planum PQ ad quodlibet motus momentum in magnitudinibus, a velocitate, acceleratione & natura corporis pendentibus, modo constans C recte definiatur. Eum in finem sumatur integralis $\int\frac{d\sigma}{y}$ ita, ut evanescat posito $\sigma = o$ & $y = m$ & sit vis in planum NO absolute sumpta $= A$ hoc pacto generalis æquatio modo inventa præbebit $A = -\omega + C$, ideoque $P = \frac{m\,d\omega}{dx}\int\frac{d\sigma}{y} - \frac{m^2\omega}{y^2} + \omega + A$. Ponamus vim absolutam in stratum, per aperturam CGHD transiens, esse $= o$, quod quidem tunc locum habet, quando illud neque ulterius acceleratur, neque aliqua vis adest, quæ fluidum in plagam contrariam urget, atque integralem quantitatis $\frac{d\sigma}{y}$ dicto modo sumptam, in quâ pro σ substituta est NC (quam pono $= b$) & pro y apertura minima p, esse $= E$, & generalis æquatio ad stratum extimum applicata erit: $o = \frac{mE\,d\omega}{dx} - \frac{m^2\omega}{p^2} + \omega + A$: proinde $A = v - \omega - \frac{mE\,d\omega}{dx}$. Surrogetur hic valor in præcedenti, & erit $P = \frac{m\,d\omega}{dx}\int\frac{d\sigma}{y} - \frac{m^2\omega}{y^2} + v - \frac{mE\,d\omega}{dx}$. Sed quia vis hæc P conjuncta est cum æquali reactione, stratum Pq erit in statu violentæ compressionis: ergo hac eadem vi urgebit portionem infinite parvam tam canalis $PpQq$, quam zonulam corporis contiguam $uvyx$. Agit autem hæc vis in directione ad zonulam

nulam normali, quemadmodum etiam non poteſt non perpendiculariter agere ad internam canalis ſuperficiem; quare tota actio in zonulam eſt ut vis P ducta in zonulæ ſuperficiem. Decomponatur vis normalis in duas, unam ad axem corporis Ib normalem, alteram eidem parallelam, & neglecta priore, erit vis tota in zonulam, directionem axis corporis vel motus fluidi habens, ut differentia inter plana ux & $vy = -dy$ ducta in P: eſt itaque $= -\frac{m\,dy\,d\omega}{dx}\int\frac{d\sigma}{y} + \frac{m^2\omega\,dy}{y^2} - \upsilon\,dy + \frac{m\mathrm{E}\,dy\,d\omega}{dx}$. Qua ita integrata, ut ſaltem illæ quantitates, quæ ad corpus ſpectant, ut variabiles tractentur, & adjecta conſtante tali, ut integrale evaneſcat poſita $y = m$ & $\sigma = o$, prodibit vis, quæ a vi fluidum accelerante in corporis partem indefinitam redundat $= \int -\mathrm{P}\,dy = -\frac{m\,d\omega}{dx}\,y\int\frac{d\sigma}{y} + \frac{m\sigma\,d\omega}{dx} - \frac{m^2\omega}{y} - \upsilon y + \frac{m\mathrm{E}\,y\,d\omega}{dx} + m\omega + m\upsilon - \frac{m^2\mathrm{E}\,d\omega}{dx}$. Scribantur pro $\int\frac{d\sigma}{y}$, E, pro σ, N$c = b$ & pro y, p; & erit vis, quam totum corpus ab acceleratione fluidi perpetitur $= \frac{mb\,d\omega}{dx} - \frac{m^2\omega}{p} - \upsilon p + m\omega + m\upsilon - \frac{m^2\mathrm{E}\,d\omega}{dx} =$ (ob $p = m - n$) $\frac{m\,d\omega}{dx}(b - m\mathrm{E}) + \frac{mn^2\omega}{p^2}$ Q. E. I.

COROLLARIUM I.

IX. Quando $d\omega = o$, atque vis, qua diaphragma urgetur, nihil præterea efficit, quam ut illud, & ſimul aquam inter plana NO & CD verſantem in ſtatu motus æquabilis conſervet, patet ſolam ſupereſſe vim, oriundam a potentia, quæ accelerationem in fluido inter NO & CD, ob ejus continuum tranſitum in aperturas anguſtiores neceſſariam, generat: vis ergo, quam corpus inde ſentit eſt $= \frac{mn^2\omega}{p^2}$.

X. Præcedentis Corollarii veritatem etiam aſſecutus ſum methodo aliqua extraordinaria, ab effectu reactionis corporis ad ejusdem quantitatem, ſive ad actionis eidem ſemper æqualis magnitudinem argumentum ducendo: Theoriam tamen Virium Vivarum hic in ſubſidium vocare opus fuit. Sit itaque ut in præcedenti demonſtratione ABCD tubus vel canalis horizontaliter locatus, nunc autem non inſtructus diaphragmate; ſed fluidum, quod inter ſuperficiem EF & planum NO reperitur, atque gaudet velocitate $= \sqrt{2\omega}$, propellere illud, quod præcedit ejusdemque ſingula ſtrata in aperturas anguſtiores protrudere. Neceſſario itaque fluidum EFNO eo tempore, quo EF pervenit in ſitum proximum ef, aliquam motus ſui jacturam pati debet: debetur autem hæc corporis reactioni reſpondenti illi fluidi actioni, quæ omnia ſtrata, inter NO & CD exiſtentia, accelerat, atque ſimul ipſum corpus afficit. Erit itaque illa reactio ut motus deſtructus applicatus ad tempus, quo deſtruitur. Jam ſic ulterius ratiocinabor: ſuperficie fluidi exiſtente in EF, ſtratum γD, quod pono $= Ef = n$O, eſt effluxui proximum, & revera per aperturam CGHD tranſiit, ea in ef translata: ergo fluidum, quod tam ante quam poſt effluxum dicti ſtrati in canali deprehenditur, circumſcribitur ſpatio E$\gamma\zeta$IKδF: hujus itaque maſſæ decrementum motus computandum erit, quod nempe translata ſuperficie EF in ef patitur. Sit, retentis ſymbolis in priore ſolutione uſurpatis, quantitas motus fluidi omnis inter plana NO & CD, ſuperficie in EF exiſtente, $=$Q, & ejusdem vis viva $=$V, atque tunc quantitas motus fluidi inter EF & NO plana erit $= mx\sqrt{2\omega}$, & ejus, quod eſt inter NO & $\gamma\delta$ (ob ſtratum $\gamma D = Ef = -mdx$) $= Q + mdx\sqrt{2v}$: proinde quantitas motus omnis maſſæ fluidæ inter EF & $\gamma\delta$ in ſitu primo eſt $= mx\sqrt{2\omega} + Q + mdx\sqrt{2v}$, ejusdem vero maſſæ motus in ſitu proximo eſt $= m(x+dx)\left(\sqrt{2\omega} + \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega}}\right) + Q$: quo a priore ſubducto

relin-

relinquitur motus destructus $= - m\,dx\sqrt{2\omega} - \frac{mx\,d\omega}{\sqrt{2\omega}} + m\,dx\sqrt{2v}$: hoc per tempusculum $- \frac{dx}{\sqrt{2\omega}}$ diviso, prodit vis destruens sive reactio corporis $= 2m\omega + \frac{mx\,d\omega}{dx} - 2m\sqrt{v\omega}$. Propter conservationem Virium Vivarum vis viva fluidi omnis EFCD in situ primo, æqualis est vi vivæ ejusdem fluidi in situ proximo: harum proinde virium differentia est $= o$. Est autem vis viva in situ primo $= mx\omega + V$, & in sequente $= m(x+dx)(\omega+d\omega) + V - mv\,dx$, & harum differentia $= mx\,d\omega + m\omega\,dx - mv\,dx = o$: ergo $\frac{mx\,d\omega}{dx} = mv - m\omega$. Valore hoc substituto prodit vis reactionis corporis $= m\omega + mv - 2m\sqrt{v\omega} = \frac{m\omega}{p^2}(m^2 - 2mp + p^2) = \frac{mn^2\omega}{p^2}$. Quæ expressio cum illa, quam (§. 9) pro actione fluidi in corpus diversissima via invenimus, plane congruit.

COROLL. II.

XI. Posito iterum $d\omega = o$, & proinde vi in corpus ab acceleratione fluidi $= \frac{mn^2\omega}{p^2}$: patet omnia corpora æquales bases habentia ab hac vi æqualiter affici, figuramque corporis tunc nullam mutationem inducere: & quoniam expressionem illam nulla ingreditur magnitudo a longitudine axis pendens, hoc in infinitum diminuto, ut sola basis restet; hæc cæteris paribus a potentia fluidum accelerante eandem vim sentiet, quam corpus ipsum.

COROLL. III.

XII. Sit differentia inter ascensum potentialem fluidi in apertura angustissima & fluidi inter EF & NO plana $= v - \omega = z$, erit, existente $d\omega = o$, A magnitudo, sive vis absoluta, qua fluidum inter modo dicta plana versus corpus urgetur $= z$, & hæc propagatur a diaphragmate ad ſtratum vertici proximum nO non ſecus atque per corpus ſolidum immobile: omnia enim intermedia ſtrata hac eadem vi premuntur: & vis in corpus redundans ab hac potentia, fluidum inter NO & CD plana accelerante, prodit $= \frac{mn^2}{p^2} \cdot \frac{p^2 z}{(m^2-p^2)} = \frac{mnz}{m+p}$.

COROLL. IV.

XIII. Quando fluidum inter corpus datumque planum comprimitur, ita tamen ut hinc nullus reſultet motus inteſtinus progreſſivum turbans, atque ad baſin corporis fluidum liberum exitum habet: erit preſſio a plano per intermedium fluidum in corpus derivata ad eandem preſſionem ſed inefficaciter propagatam, ut amplitudo tubi & aperturæ minimæ ſimul ad ſolam tubi amplitudinem. Nam quoniam preſſio abſoluta qua diaphragma urget ſuperficiem aquæ eſt $= z$: preſſio hæc per ſyſtema inefficaciter propagata, præberet pro potentia in corpus integrum, directionem axi parallelam habente, valorem nz, quod ex Hydroſtaticis conſtat: ſed quia illa propagatio fit per corpus fluidum cujus ſtrata inter NO & CD diverſis pollent velocitatis gradibus, illud ſaltem urgetur a vi $\frac{mnz}{m+p}$: eſt itaque vis in corpus illo caſu, ad vim in corpus hoc caſu ut $nz : \frac{mnz}{m+p}$ ſive ut $m+p : m$.

COROLL. V.

XIV. Quoniam diminuto axe in infinitum corpus vertitur in baſin, erit etiam vis, qua pars ſtrati fluidi baſi æqualis & proxima ad majorem motum ſollicitatur, ad vim inefficacem in baſin, ut amplitudo tubi & aperturæ ſimul, ad ſolam tubi amplitudinem. Quamvis enim hoc caſu non dari videatur propagatio vis mortuæ per ſtrata diverſis velocitatibus pollentia: tamen quia ſtratum fluidi aperturæ proximum non per ſaltum ſed ſucceſſive velocitatis incrementum finitæ magnitudinis acquirere poteſt, pro baſi cogitatione poterit ſubſtitui corpus

corpus eidem basi superstructum, & axem habens satis parvum, & demonstratio ut prius locum habebit.

COROLL. VI.

XV. Quando ad minimam aperturam fluidum liberum exitum non habet, sed ibi contranititur vis absoluta $= B$, erit vis absoluta in stratum vertici corporis contiguum $= v - \omega - \frac{mEd\omega}{dx} + B$, & vis in corpus $= Bn + \frac{md\omega}{dx}(b - mE) + \frac{mn^2\omega}{p^2}$. Hinc sequitur, ad superandam vim contranitentem requiri vim absolutam in fluidum inter plana EF & NO agentem ipsi vi B æqualem: hanc proinde per intermedium fluidum diversis licet velocitatis gradibus præditum non aliter propagari, quam inefficaciter, sive eodem modo ac per corpus solidum immobile, aut etiam per fluidum stagnans. Proinde si atmosphæra urgeat superficiem EF, atque ad aperturam minimam sese effluxui opponat, sitque ejus pressio absolute sumpta $= B$, vis in corpus habens directionem axi parallelam inde augebitur magnitudine Bn.

COROLL. VII.

XVI. Quia vis efficax, quâ totum stratum Pq urgetur, est $= -\frac{md\omega}{dx}d\sigma - \frac{2m\omega dd\sigma}{dx}$, erit, hac formulâ ita integratâ ut fiat $= o$ posito $\sigma = o$ & $d\sigma = -dx$, vis efficax inter plana NO & PQ $= -\frac{m\sigma d\omega}{dx} - \frac{2m\omega d\sigma}{dx} - 2m\omega = -\frac{m\sigma d\omega}{dx} + \frac{2m^2\omega}{y} - 2m\omega$, & vis efficax tota omne fluidum inter NO & CD plana accelerans $= -\frac{mbd\omega}{dx} + \frac{2m^2\omega}{p} - 2m\omega = \frac{2mn\omega}{p} - \frac{mbd\omega}{dx}$. Vis autem in stratum integrum vertici proximum est $= mA = m(v - \omega) - \frac{m^2Ed\omega}{dx}$: harum proinde virium differentia est $= \frac{mn^2\omega}{p^2} + (mb - m^2E)\frac{d\omega}{dx}$.

Quæ

Quæ eadem eſt expreſſio, quam modo pro vi in corpus agente invenimus: ergo vis tota in ſtratum vertici proximum æquatur ſummæ ex vi efficace in fluidum inter NO & CD agente, & ex vi, qua corpus a potentia accelerante afficitur.

COROLL. VIII.

XVII. Moveatur fluidum ut priùs velocitate $= \sqrt{2\omega}$ & quidem conſtante, & ſimul corpus verſus eandem plagam celeritate $= \sqrt{2q}$ minore: erit vis, quam corpus a potentia fluidum accelerante ſuſtinet $= \frac{mn^2}{p^2}(\omega - 2\sqrt{\omega q} + q)$. Addatur enim toti ſyſtemati motus, motui corporis æqualis & contrarius; & corpus, reſpectu aliorum extra ſyſtema exiſtentium, quieſcet: fluidum autem inter EF & NO eodem reſpectu movebitur velocitate $= \sqrt{2\omega} - \sqrt{2q}$, CD verſus, eritque ejus aſcenſus potentialis $= \omega - 2\sqrt{\omega q} + q$. Quo valore loco ω in expreſſione vis corpus urgentis ſubſtituto prodit illa $= \frac{mn^2}{p^2}(\omega - 2\sqrt{\omega q} + q)$. Sed motus communis non alterat actionem fluidi in corpus (§. 7.), liquet ergo aſſerti veritas. Hinc quoque in aprico eſt, corpore & fluido contrarias habentibus directiones, vim illam eſſe $= \frac{mn^2}{p^2}(\omega + 2\sqrt{\omega q} + q)$.

SCHOLIUM.

XVIII. Vis hac Propoſitione determinata non eſt vis integra, quam corpus immobile a fluido ſuſtinet: illa enim evaneſcit cum vas eſt infinite amplum reſpectu areæ baſeos corporis. Urgeri itaque neceſſe eſt corpus ab alia vi, cujus quidem per effectus editos nulla datur menſura, ideoque pro inefficace reputanda; ut hinc iterum eluceſcat utilitas diſtinctionis vis mortuæ in efficacem & inefficacem: ad totam itaque potentiam in corpus agentem eruendam propoſitio ſequens deſtinata eſt.

PROP.

PROP. III. PROBLEMA.

Corpore intra canalem immobili existente, definire vim omnem, quam illud a fluido, quod in apertura unaquaque eandem conservat velocitatem, sustinet.

SOLUTIO.

XIX. Moveatur fluidum in canali ABCD horizontaliter locato ab AB versus CD hoc modo, ut in unaquaque canalis & corporis GIH sectione, veluti in PQ, eundem semper habeat velocitatis gradum. Potest autem illud obtineri, si in superficiem fluidi EF agere ponatur vis mortua, habens directionem cum motu fluidi congruentem, & quidem tanta, quantâ opus est ad conservationem motus fluidi inter plana EF & NO versantis. Sit ascensus potentialis fluidi in apertura minima $= v$, & ejus quod est inter modo dicta plana $= \omega$: reliquis literis suos valores, quos in Prop. præced. habebant, retinentibus, erit (§. 8.) vis absoluta ad accelerationem fluidi propter transitum in aperturas angustiores requisita agens in stratum nO, cujus asc. potent. est ω, $= v - \omega$, & vis hinc in corpus immobile redundans $= \frac{mn^2\omega}{p^2}$. Præter vim hanc, quam a solo incremento motus fluidi ab NO versus CD pergentis patitur corpus, sentit quoque vim ab inertia fluidi, quatenus illud habet asc. potent. ω, æqualem illi, quem habet fluidum, quod versatur inter plana EF & NO. Inertia illa, quoniam conservare nititur fluidum in statu motus cujus asc. pot. est $= \omega$, & corpus immobile illum statum evertere & fluidum ad quietem reducere conatur, consideranda est ut vis, quæ fluido in transitu ab NO ad CD potest impertiri asc. potent. $= \omega$, & vis, quæ inde in corpus redundat, illa ipsa est, quam corpus a dicta vi inertiæ sustinet: a vi autem absoluta in NO agente, quæ est $= \omega$, patitur corpus, per (§. 12.), vim $= \frac{mn\omega}{m+p}$: quare vis tota in corpus agens est $= \frac{mn^2\omega}{p^2} + \frac{mn\omega}{m+p} = \frac{m^3 n\omega}{p^2(m+p)}$.

Fig. 1.

ALITER.

Aliter.

XX. Sint $v, \overset{I}{v}, \overset{II}{v}, \overset{III}{v}, \overset{IV}{v}$ &c. tales magnitudines, ut quando quælibet illarum significat ascensum potentialem fluidi per aperturam angustissimam erumpentis, immediate subsequens indicet convenientem ascensum potentialem fluidi inter plana EF & NO. Existentibus jam v & $\overset{I}{v}$ ascensibus potent. respectivis, vis absoluta in planum NO, per quam massa fluidi inter EF & NO versantis se in suo statu motus conservare nititur, & quæ aperturæ angustissimæ propiori imprimit asc. potent. $= v - \overset{I}{v}$ tempore transitus ab NO ad CD, est (§. 8.) $= v - \overset{I}{v}$, atque potentia quâ corpus hoc impedire, & idem fluidum eodem transitus tempore ad ascensum potentialem $\overset{I}{v}$ reducere satagit, est $= \frac{mn^2\overset{I}{v}}{p^2} = \frac{n^2 v}{m}$. Sed quia corpus non solum augmentum ascensus potent. $v - \overset{I}{v}$ impedire, sed etiam, quia plane immobile est, idem fluidum & eodem tempore ad minores ascensus potent. $\overset{II}{v}, \overset{III}{v}, \overset{IV}{v}$ &c. usque ad statum quietis, perducere nititur, sustinebit illud insuper vires $\frac{n^2\overset{I}{v}}{m}, \frac{n^2\overset{II}{v}}{m}, \frac{n^2\overset{III}{v}}{m}$ & sic in infinitum, quas fluidi subsequentis inertia omnes vincere debet, ut æquabilis per aperturam angustissimam transitus succedat. Patitur itaque corpus vim exprimendam per hanc seriem: $\frac{n^2 v}{m} + \frac{n^2\overset{I}{v}}{m} + \frac{n^2\overset{II}{v}}{m} + \frac{n^2\overset{III}{v}}{m}$. Sed quia $\overset{I}{v} = \frac{p^2 v}{m^2}$, $\overset{II}{v} = \frac{p^2\overset{I}{v}}{m^2} = \frac{p^4 v}{m^4}$, $\overset{III}{v} = \frac{p^6 v}{m^6}$ &c. erit dicta vis $= \frac{n^2 v}{m}$

+

$+\frac{n^2p^2v}{m^3}+\frac{n^2p^4v}{m^5}+\frac{n^2p^6v}{m^7}$ &c. quæ eſt progreſſio Geometrica deſcendens, cujus nomen rationis eſt $=\frac{p^2}{m^2}$: quare illius in infinitum continuatæ ſumma eſt $=\frac{n^2v}{m}:\left(1-\frac{p^2}{m^2}\right)=\frac{mn^2v}{m^2-p^2}=\frac{mnv}{m+p}$: quæ expreſſio, ſubſtituto pro v, $\frac{m^2v}{p^2}$, præbet $\frac{m^3nv}{p^2(m+p)}$ eandem, quæ priùs.

XXI. Duæ priores ſolutiones magnam affinitatem habent; placet itaque adjungere aliam ex Theoria Virium Vivarum petitam. Corporis vertici I inſertus ponatur funiculus IST, trochleam in S ambiens, atque non neminem funiculum manu prehenſum in T tantâ vi deorſum trahere, quanta eſt vis reſiſtentiæ, quam corpus GIH velocitate $\sqrt{2\omega}$ motum in canali utrimque clauſo patitur. Hoc pacto ſatisfiet problematis hypotheſi, quæ motum fluidi ſive corporis ponit æquabilem. Locetur in axe corporis producto circellus KL magnitudine baſin corporis adæquans. Ex natura vis inefficacis, quæ per quantumlibet ſpatium propagata eandem conſervat magnitudinem & ubique in æquilibrio continetur, ſequitur, illam, quæ corpus velocitate $\sqrt{2\omega}$ verſus circellum motum urget, æqualem exiſtere vi illi inefficaci, quæ in circellum agit, eadem velocitate verſus corpus latum: utroque enim caſu eadem columna fluidi, corpori ſcilicet & circello interpoſita, eadem vi comprimitur. Circellus hanc habens celeritatem poteſt parti ſtrati fluidi ipſi æquali & contiguæ, percurrendo ſpatiolum infiniteſimum latitudini ſuæ æquale, modo illa extra ſyſtema conſideretur, impertiri eandem celeritatem, quam quâ ipſe circellus pollet: vis autem ad id requiſita eſt, ut conſtat ex principiis Mechanicis, $=n\omega$, poſita ſcilicet circelli area $=n$, & vis inefficax quam inde circellus in ſyſtemate ſuſtinet æquatur (§. 14.) vi ex- *Fig. II.*

primen-

primendæ per $\frac{mn\omega}{m+p}$. Et hæc eadem eſt vis, quam corpus ſuperare tenetur, quo cum velocitate $= \sqrt{2\omega}$ verſus AB progredi ſine retardatione poſſit.

Quoniam fluidum ponitur condenſationis rarefactionisve incapax, dum vertex corporis ex I pervenit in locum proximum i, tanta præcisè fluidi quantitas per aperturam minimam debet effluxiſſe, quanta eſt illa, quæ continetur ſpatio NnoO. Ducatur ad diſtantiam FP a plano baſeos planum PM, ita ut apertura in FR $= p$ ducta in FP ſit $=$ No. Nn: & quo tempore baſis corporis abſolvit ſpatium ipſi Ii æquale, quod pono $=$ QF $=$ Ru, ſectio fluidi PM ipſi debet obviam venire, & abſolvere ſpatium PQ vel Mu: ergo ſumma velocitatum ſectionis PM & baſeos GH, eſt ad velocitatem baſeos ſive totius corporis, ut FP: FQ $= m : p$; eſt proinde ſumma velocitatum $= \frac{m}{p}\sqrt{2\omega}$, & illa, quæ fluido in contrariam plagam nempe verſus CD tendenti propria eſt $= \frac{m}{p}\sqrt{2\omega} - \sqrt{2\omega} = \frac{n}{p}\sqrt{2\omega}$, ejusdemque aſcenſus potentialis $= \frac{n^2\omega}{p^2}$: nec non vis viva fluidi erumpentis $= \frac{mdy.\,n^2\omega}{p^2}$ (poſita ſcilicet lineola N$n = dy$) quæque ſimul, propter motum corporis æquabilem, æquatur incremento vis vivæ in omni fluido inter NO & FR tempore motus corporis per Ii producto. Nunc eſt, vi principii conſervationis Virium Vivarum, vis viva genita à tractione funiculi, manu, quæ trahit, per ſpatiolum $= dy$ deſcendente, demptâ vi vivâ, quæ a vi antea inventa & inefficace generari prohibetur, æqualis vi vivæ in particulis fluidi productæ. Itaque ſi vis mortua, quâ manus funiculum trahit, id eſt reſiſtentia fluidi dicatur R, erit $Rdy - \frac{mn\omega dy}{m+p} = \frac{mn^2\omega dy}{p^2}$: hinc prodit $R = \frac{m^3 n\omega}{p^2(m+p)}$.

Sed

Sed per (§. 7.) & notissimum principium Hydrodynamicum, hæc resistentia æqualis est vi, quâ quiescente corpore fluidum velocitate $\sqrt{2\omega}$ motum in illud agit, ergo vis hæc etiam est $= \frac{m^3 n \omega}{p^2 (m+p)}$.

COROLL. I.

XXII. Ad vim itaque, quam corpus ab acceleratione fluidi sentit, quæque est $= \frac{m n^2 \omega}{p^2}$ addenda est vis $\frac{m n \omega}{m+p}$, ut habeatur vis tota resistentiæ, quam corpus, cujus velocitas est $= \sqrt{2\omega}$ in fluido patitur.

COROLL. II.

XXIII. Quoniam hanc resistentiæ expressionem non ingreditur longitudo axis, vel aliqua ejus functio, erit cæteris paribus, & motu existente æquabili, resistentia, quam sola basis sustinet, æqualis resistentiæ corporis. Non autem hæc assertio extendenda est ad motum vel acceleratum vel retardatum, aut ad casum, cum figura corporis ita irregularis est, ut velocitates stratorum fluidi non amplius tenere possint rationem inversam aperturarum. Huic autem incommodo locus non est, quando curva corpus rotatione circa axem generans vel est continua, vel saltem sectiones corporis directioni fluidi normales non subito sed successivè finitæ magnitudinis incrementa accipiunt.

COROLL. III.

XXIV. Si basis corporis fuerit infinite parva respectu amplitudinis tubi, erit vis in corpus sive resistentia (existente hoc casu $p = m$) $= \frac{1}{2} n \omega$. Ejusdem magnitudinis est resistentia, si basis quidem non fuerit infinite parva; sed aperturæ ubique æquales ponantur, quod Propos. 4. ostendetur.

COROLL. IV.

XXV. Quando corpus non conservat suam velocitatem, sed acceleratur, erit resistentia, quam corpus sustinet $= \frac{m\, d\omega}{dx} (b - m\,\mathrm{E})$

$+ \frac{m^3 n \omega}{p^2(m+p)}$. Etenim si corpus moveatur versus AB velocitate $= \sqrt{2\omega}$, & hujus incrementum sit $= \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega}}$, addatur toti systemati & velocitas versus CD & vis acceleratrix vi acceleratrici corporis æqualis. Corpus itaque per hunc motum communem respectu corporum extra systema quieti restituetur, & vis acceleratrix versus AB per vim adventitiam versus CD elidetur: fluidum e contrario, quod inter plana NO & AB versatur, & movebitur eodem respectu velocitate $= \sqrt{2\omega}$, & eo tempore quo elementum spatii, quod Prop. 2. positum est $= -dx$, emetitur, acquiret incrementum celeritatis idem, quod corpus adipiscitur in systemate, & est $= \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega}}$: nec non stratum ad distantiam quamlibet ab NO basin versus movebitur celeritate $= \frac{m\sqrt{2\omega}}{y}$: ferebatur enim ante adjectum motum communem celeritate $= \frac{(m-y)\sqrt{2\omega}}{y}$ (quod ex demonstr. (§. 21.) potest colligi) adjecta itaque velocitate illa extranea, quæ est $= \sqrt{2\omega}$, prodit illa $= \frac{m\sqrt{2\omega}}{y}$, cujus incrementum ob mutatam magnitudinem ω est $= \frac{m\,d\omega}{y\sqrt{2\omega}}$: ab hac autem vi fluidum accelerante corpus afficitur (per Demonstr. §. 8.) potentiâ, quæ est $= \frac{m\,d\omega}{dx}(b-mE)$. Sed quoniam motus rectilineus & vis acceleratrix extrinsecus advenientes nihil quoad actiones corporum in systemate mutant (§. 7.), patet vim resistentiæ corporis, quod habet velocitatem $= \sqrt{2\omega}$, & acquirit tempore motus per spatiolum $= -dx$ incrementum celeritatis $= \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega}}$ esse $= \frac{m\,d\omega}{dx}(b-mE) + \frac{m^3 n \omega}{p^2(m+p)}$. Hoc itaque casu, quoniam $b-mE$ est functio ipsius axeos & sectionis corpotis ipsi normalis, resistentia utique a figura & altitudine corporis pendet.

COROLL.

COROLL. V.

XXVI. Posito eodem corpore, eodemque tubo sive canali, ut resistentia sit ut quadratum velocitatis, debet esse $d\omega = o$, id est motus corporis esse æquabilis : casus enim quo b est $= m$E locum non habet; nam supponeret aperturam saltem alicubi majorem esse ipsa tubi amplitudine. Hinc quoque sequitur in motibus acceleratis vel retardatis resistentiam illam, quæ non est in ratione duplicata velocitatis, non illico in tenacitatem fluidi rejiciendam esse.

SCHOLIUM.

XXVII. Contra hanc Theoriam facere videntur : primo, quod in hac nulla habeatur ratio incurvationis filamentorum fluidi, quæ & necessario fieri debeat, & non possit sine vi, quam corpus inde sustinet: adeo ut si tubus ita divergat, ut quodlibet planum ad motum fluidi normale habeat aperturam, amplitudini AB æqualem, omnis vis in corpus redundans soli debeatur potentiæ filamenta fluidi ei imminentia incurvanti, illaque a sua semita detorquenti, & nullus relinquatur locus vi illi, quæ per hanc theoriam ex compressione stratorum contiguorum diversis velocitatibus motorum derivatur. Secundo veram Theoriam resistentiæ ex regulis motus collisionis corporum petendam, & non ex vi mortua momentanea æstimandam esse. Tertio loco dubitatum esse memini, an experientia confirmatura sit propositionem ex hac theoria deductam : esse scilicet vim fluidi in corpus, posito tubo infinite amplo, non majorem, quam est pondus cylindri fluidi, cujus basis ipsi corporis basi æquatur, altitudo vero semissi illius altitudinis, ad quam in vacuo assurgere posset, celeritate initiali existente æquali illi, quâ corpus præditum est. Ad primum respondeo concedendo, ad incurvanda filamenta fluidi opus esse vi, qua corpus vel basis si illa sola adsit, afficiatur, negando autem, hujusvis in hac Theoria nullam haberi rationem. Vis inefficax, cujus magnitudinem determinavi, illud ipsum est, cujus actionem in corpus Fig. III.

pus vel planum omnium filamentorum ſimul incurvatio requirit: ad ſingulorum enim filamentorum incurvationem requiſitam vim, quam Viri Excellentiſſimi BERNOULLIUS & EULERUS jam dudum determinavere, animum advertere in hac materia non erat neceſſe. Exemplum allegatum tubi divergentis hanc utique theoriam everterent, ſi illa vim reſiſtentiæ faceret æqualem vi ab acceleratione ob mutatas aperturas, cujus magnitudinem Prop. 2. evici: jam vero res ſecus ſe habet: hæc utique hoc caſu nulla eſt, illa vero $= \frac{1}{2} n\omega$, exiſtente baſi corporis $= n$, ejusdemque aſcenſu potentiali $= \omega$: cujus demonſtrationem ſtatim poſt hoc ſcholium afferam. Quoad ſecundum dico, quod cum reſiſtentia talis ſit vis, quæ motum corporum ita retardat, ut decrementum motus inde genitum a vi mortua manus trahentis poſſit vel reſarciri, aut ne generetur prohiberi, ita ut motus corporis in fluido prodeat æquabilis, vim reſiſtentem atque contrariam vim accelerantem homogeneas res eſſe neceſſe eſt, atque menſura reſiſtentiæ ex vi illam deſtruente & in æquilibrio continente recte deprometur. Ipſæ regulæ motus in colliſione corporum per Theoriam Virium mortuarum, tempore, quo colliſio durat, agentium determinari poſſunt: cujus equidem rei mihi locuples teſtis eſt jam ſæpe laudatus Dnus Director EULERUS vid. Tom. V. Comment. Petrop. pag. 159. & ſeqq. nec non diſſertatio: *De la Force de Percuſſion & de ſa veritable Meſure*, quæ in Ill. hujus Academiæ Memoriis pro Anno 1745. legitur; nulla proinde apparet ratio, cur reſiſtentia non poſſit ut vis mortua, tractu temporis infinite exigui uniformiter agens, ſicque portiunculam vis vivæ deſtruens, in omnis generis motibus conſiderari? Intuitu tertii dico: an experientia contradicat propoſitioni? eſſe quæſtionem facti, quam vel ideo concedere nequeo, quia tunc experimenta experimentis contradicere cenſenda eſſent. Illa quæ infra tam pro medio aquæ quam aëris afferam, bonitatem Theoriæ abundanter evincent, neque ullum mihi hactenus occucurrit experimentum, quod cum illa non apprime conveniret.

PROP.

PROP. IV. THEOREMA.

Si canalis ſingulæ ſectiones normales ad directionem fluidi habeant aperturas æquales, erit vis, quam corpus immobile ſuſtinet, æqualis ſubduplo ponderi cylindri fluidi, cujus baſis æquatur baſi corporis, & altitudo æqualis aſcenſui potentiali fluidi allabentis.

DEMONSTRATIO.

XXVIII. Concipiatur canalis ABLK, qui intra ſuum ambitum firmatum habet corpus GHI, ita conſtructus, ut apertura plani cujuslibet $P\pi$ æqualis ſit functioni alicui ſimpliciſſimæ reſpondentis ſectionis corporis & conſtantium, & ſit apertura $P\pi = y$, ſectio corporis reſpondens $= k$, elementum axeos inter $P\pi$ & $Qq = d\sigma$, apertura $KGHL = p$, baſis corporis $GH = n$, altitudo conveniens celeritati fluidi in parte canalis $ABON = \omega$, quam a preſſione in planum AB invariatam conſervari pono: nec non $NO = AB = f$. Aſſumatur jam æquatio, quâ relatio inter aperturas & convenientes, ſeu in eodem plano ad axin corporis normali ſitas ſectiones definitur, hæc: $y = f - ek$, & ſit e numerus quilibet conſtans unitate minor; & erit hæc æquatio pro canali, qualem figura repræſentat, qui nempe pergendo ab NO verſus KL divaricat, cujus ſimul ſectiones habent aperturas, quo propiores baſi GH, eo anguſtiores. Complectitur autem hæc æquatio caſum, quando apertura eſt conſtans, ſcilicet cum e eſt fractio infinite parva, exiſtente tunc ubique $y = f =$ quantitati conſtanti. Sit porro preſſio abſoluta in planum $P\pi$ ad quamlibet diſtantiam a plano NO ſumptum $= P$, & per eadem ratiocinia, quibus in demonſtratione priore Prop. 2. uſi ſumus, pervenietur ad æquationem differentialem hanc: $dP = \frac{2f^2\omega dy}{y^3}$, exiſtente ω conſtante. Qua ita integratâ, ut fiat $= o$ poſita $y = p$, habetur $P = \frac{f^2\omega}{p^2} - \frac{f^2\omega}{y^2}$: quæ formula, propter reactionem ipſi P æqualem, ſimul exprimit vim in corporis zonulam, a planis $P\pi$ & Qq interceptam, normaliter agentem: ducta ergo hac in dk prodit elementum potentiæ habentis directionem axi parallelam $= \frac{f^2 \omega dk}{p^2} - \frac{f^2 \omega dk}{(f-ek)^2}$, qua ita integrata ut fiat $= o$ poſito $k = o$, prodit $\frac{f^2 \omega k}{p^2} - \frac{f^2 \omega}{e(f-ek)} + \frac{f\omega}{e} =$ vi, quâ corporis pars indefinita, planis NO & $P\pi$ interjecta, a potentia, fluidum inter NO & KL continuo in aperturas anguſtiores tranſiens accelerante, afficitur: ergo vis in totum corpus $= \frac{f^2 n \omega}{p^2} - \frac{f^2 \omega}{ep} + \frac{f\omega}{e} = \frac{fn\omega}{p^2}(f-p)$: expreſſio, ubi e evanuit. Ponatur $z =$ differentiæ aſc. potent. fluidi in $KGHL$ & $ABNO$ verſantis, quæ eſt $= \frac{(f^2-p^2)\omega}{p^2} =$ vi abſolutæ planum NO afficienti; illa itaque, quæ in totum planum agit, eſt $= fz$, & vis inde in corpus redundans $= \frac{fnz}{f+p}$. Hinc ſequitur, eandem hic eſſe relationem inter vim in planum NO, ſive quâ fluidum ultra verticem verſus corpus urgetur, atque potentiam illam, quâ hoc inde afficitur, quæ erat pro canali cylindrico: proinde eodem plane ratiocinio, quo (§. 19. & 20.) uſi ſumus, hoc quoque caſu demonſtrabitur, eſſe vim totam, quam corpus à fluido ſuſtinet $= \frac{f^3 n \omega}{p^2(f+p)}$. Fiat $e = o$, erit $y = f = p =$ quantitati conſtanti, & vis modo inventa aperturis jam ubique exiſtentibus æqualibus prodit $= \frac{1}{2} n\omega$. Q. E. D.

COROLL. I.

XXIX. Quotiescumque ergo fluidum uniformi cum velocitate per canalem tranſit, erit ejus vis in corporis inſiti partem anticam $= \frac{1}{2} n\omega$, poſita ſcilicet denſitate fluidi $= 1$. Et eadem quoque eſt reſiſtentia corporis in fluido moti, ſi hujus quodlibet ſtratum & ipſum corpus eandem conſtanter ſervant velocitatem relativam.

COROLL. II.

XXX. Quando ω non eſt conſtans, ejusque augmentum deſcribente ſuperficie AB ſpatiolum $= - dx$ eſt $= d\omega$, erit vis tota, quam corpus GIH in canali, cujus relatio inter aperturas & convenientes corporis ſectiones exprimitur æquatione $y = f - ek$, ſuſtinet $= \frac{f^3 n\omega}{p^2(f+p)} + \frac{nfd\omega}{(f-p)dx}(b - fE)$: exiſtente $b =$ axi corporis & $E = \int \frac{d\sigma}{y}$ ita ſumpto ut fiat $= o$ poſito $\sigma = o$, poſteaque pro σ ſurrogatum habenti b & pro y, p. Ultima hujus expreſſionis quantitas habet in numeratore & denominatore magnitudinem nihilo æqualem quando $e = o$: eſt enim tunc $f = p$ & $b = fE$; & hunc caſum ſingulatim tractando reperietur reſiſtentia $= \frac{1}{2} n\omega - \frac{d\omega}{dx}\int kd\sigma$: ſignificante $\int kd\sigma$ maſſam fluidam volumine ipſi corpori æqualem.

PROP. V. THEOREMA.

Si corpus, quod in canali cylindrico movetur æquabiliter, fuerit globus, & in ſolas ejus partes anticas, quæ nempe polo præcedenti & æquatori interjacent, agat fluidum, erit reſiſtentia ad vim uniformiter agentem, quâ totus globi motus poteſt vel tolli vel generari eo temporis intervallo, quo deſcribit longitudinem partibus octo tertiis diametri æqualem, in ratione, quæ componitur ex his tribus: amplitudinis canalis, ad exceſſum hujus amplitudinis ſupra ſemicirculum maximum globi; duplicatâ amplitudinis canalis ad hujus exceſſum ſupra integrum circulum maximum globi; & denſitatis fluidi ad denſitatem globi.

DEMONSTRATIO.

XXXI. Exiſtente denſitate fluidi $= 1$, ſit denſitas globi $= D$; erit proinde ejusdem quantitas materiæ $= \frac{2}{3} nbD$, ubi n ſignificat aream circuli maximi globi & b ejus diametrum; poſita porro ejus

veloci-

velocitate uniformi $= \sqrt{2\omega}$, erit quantitas motus $= \frac{2}{3} n b D \sqrt{2\omega}$: vis autem, quæ hunc motum poteſt producere, vel productum deſtruere eo tempore, quo octo tertiæ partes diametri deſcribuntur eſt $= \frac{2}{3} nbD\sqrt{2\omega} \cdot \frac{1}{8b:3\sqrt{2\omega}} = \frac{1}{2} Dn\omega$. Et quoniam ex Hyp. in partem globi poſticam nulla vis agit, ille non aliter afficietur, quam corpus

Fig. II. GIH uno vertice I præditum, & in cujus baſin GH nulla eſt fluidi actio: erit proinde ejus reſiſtentia $= \frac{m^3 n \omega}{p^2(m+p)}$ (Prop. 3.), quæ (ob $p = m - n$) eſt $= \frac{1}{2} \frac{m^3 n \omega}{(m-n)^2(m-\frac{1}{2}n)}$. Eſt ergo hæc, ad vim modo inventam $\frac{1}{2} D n \omega$, ut $m^3 : (m - \frac{1}{2} n)\ (m-n)^2 D$. Quam rationem compoſitam eſſe patet ex rationibus $m : m - \frac{1}{2} n$, $m^2 : (m-n)^2$ & $1 : D$. Q. E. D.

SCHOLIUM.

XXXII. Hæc eſt propoſitio, quam habet Newtonus Lib. 2. Princ. Philoſ. Prop. 39. Theor. 31. ſed ex ea ſola reſiſtentia corporum acceleratorum retardatorumve minus accurate determinatur. Fluida enim continua non ſolum in partes corporis anticas agunt ejus motum retardando, ſed etiam in baſin aut partes corporis poſticas: hæc autem vis reſiſtentiæ effectum diminuit; & eatenus hoc ſolo Theoremate ad determinandam reſiſtentiam adhibito peccatur in exceſſu. Datur præterea reſiſtentia alio ex capite reſultans: pendet autem hæc ab acceleratione vel retardatione corporis. Quando enim hoc acceleratur, omne fluidum, inter canalis ſuperficiem internam & corpus exiſtens, neceſſario etiam aliquod accipere debet celeritatis incrementum; quod cum actioni corporis debeatur, illud utique hinc aliquam reſiſtentiam pati debet. Hæc itaque non pendet a celeritate actuali, ſed ab ejus incremento, quod modo dictum fluidum lucratur. Hæc cum Newtono plurimisque aliis Scriptoribus, qui de motu corporum in mediis reſiſtentibus commentati ſunt, omiſſa, peccatur in defectu.

defectu. Quoniam autem excessus in uno & defectus in altero sese mutuo nonnunquam destruunt, aut saltem efficiunt, ut neuter in sensus cadat, mirum non est, quod Theoria Newtoniana cum experimentis ab ipso allegatis, ubi semper vasa valde ampla respectu globorum adhibita sunt, satis bene conspiraverit.

PROP. VI. PROBLEMA.

Corporis duobus verticibus præditi & in fluido continuo non elastico moti definire resistentiam.

SOLUTIO.

XXXIII. In canali ABCD utrimque clauso moveatur corpus, duobus verticibus præditum versus AB, sitque linea, in qua moveatur, horizonti parallela. Illud ergo, si a nulla vi acceleratrice urgeatur, a fluido in canali contento retardabitur, ejusque motus propter resistentiam jugiter languescet. Existente jam velocitate corporis $= \sqrt{2\omega}$, erit posita apertura qualibet $= y$, velocitas fluidi in illa (per demonstr. §. 21.) $= \frac{(m-y)}{y}\sqrt{2\omega}$: significante m amplitudinem vasis. Stratum itaque fluidi, quod est inter plana ST & EF, quo propius est ipsi EF, eo velocius movetur, atque corpore motum suum continuante indefinenter accelerabitur, donec ad ipsum planum EF appulerit: quod ubi prætergressum est, debebit propter continuum transitum in aperturas ampliores iterum retardari, donec ad planum MN perveniens omnem suum motum perdiderit. In fluidum itaque planis EF & MN interceptum aliquam vim retardantem, directionemque motui fluidi contrariam habentem, agere opus est: illa autem est reactio fluidi plano MN vicinioris, segnius proinde quam remotius fluidum lati, quæ tamen, ut levi saltem adhibita attentione patet, nullam strato per aperturam angustissimam EGHF transeunti injicit remoram, neque illud ulla afficit vi versus AB tendente, ibi- *Fig. IV.*

que effluxum impediente. Vis itaque, quam corporis pars GIH sustinet est $= \frac{m^3 n \omega}{p^2(m+p)} + \frac{m\,d\omega}{dx}(m\mathrm{E} - b)$ (est enim hoc casu $d\omega$ negativum). Restat ergo, ut vim in partem corporis posticam definiamus. Eum in finem addatur toti systemati motus ab AB versus CD, æqualis motui corporis versus AB, & insuper vis acceleratrix negativa seu retardatrix à CD scilicet ad AB tendens, & æqualis illi, quâ corpus a fluido repellitur versus CD. Hoc pacto corpus respectu aliorum, quæ sunt extra systema, quiescet, & vis retardatrix corporis tendens versus CD elidetur per vim adventitiam æqualem versus AB. Fluidum e contrario eodem respectu feretur in plagam CD, & vis acceleratrix adjecta hunc motum retardabit. His præmissis sit pressio absoluta in superficiem $Qq = \mathrm{P}$, in $\mathrm{P}\pi = \overset{1}{\mathrm{P}}$, & per ea, quæ in solutione Problematis Propos. 2. tradidimus patet esse $\mathrm{P} - \overset{1}{\mathrm{P}} = -d\mathrm{P} =$ vi efficaci absolutæ stratum $\mathrm{P}q$ retardanti: quâ in $Qq = y$ ductâ habetur vis in totam $Qq = -y\,d\mathrm{P}$. Porro quoniam ante adjectum motum communem strati modo dicti velocitas versus CD erat $= \frac{(m-y)\sqrt{2\omega}}{y}$, erit adjecta velocitate $= \sqrt{2\omega}$ summa $= \frac{m\sqrt{2\omega}}{y}$, & ascensus potent. $= \frac{m^2\omega}{y^2}$, hujusque incrementum infinitesimum $= \frac{m^2 d\omega}{y^2} - \frac{2m^2\omega\,dy}{y^3}$, nec non spatiolum, quo percurso illud genitum est $= \mathrm{QP} = d\sigma$. Prodit hinc per principia Mechanica vulgo nota: $-y\,d\mathrm{P}\,d\sigma = y\,d\sigma\left(\frac{m^2 d\omega}{y^2} - \frac{2m^2\omega\,dy}{y^3}\right)$, id est, $-d\mathrm{P} = \frac{m^2 d\omega}{y^2} - \frac{2m^2\omega\,dy}{y^3}$. Fiat stratum sT ad corporis verticem anticum $\mathrm{I} =$ strato $\mathrm{P}q$, & sit ut antea $\mathrm{S}s = -dx$, & æquatio modo inventa mutari poterit in hanc: $d\mathrm{P} = \frac{m\,d\omega}{dx}\cdot\frac{d\sigma}{y} + \frac{2m^2\omega\,dy}{y^3}$.

At

At vero quoniam pressio P requiritur pro illo momento, quando ascensus potentialis est $= \omega$ fluidi inter ST & AB, ejusque incrementum $= d\omega$, æquatio ita debet integrari, ut solæ quantitates σ & y ut variabiles tractentur, hoc modo habetur $P = \frac{m\,d\omega}{dx} \int \frac{d\sigma}{y} + \frac{m^2\omega}{y^2} + C$. Sumatur integralis ipsius $\frac{d\sigma}{y}$ ita, ut evanescat posito σ seu $MQ = o$ & $y = m$: substituatur deinde pro σ, ME, quam pono $= g$, nec non pro y apertura minima $= p$, & dicatur illud, quod facta hac substitutione prodit, F, erit propter pressionem in stratum, quod in apertura minima versatur $= o$; $o = \frac{m F\,d\omega}{dx} - \frac{m^2\omega}{p^2} + C$: ergo $C = \frac{m^2\omega}{p^2} - \frac{m F\,d\omega}{dx}$. Hoc valore substituto prodit $P = \frac{m\,d\omega}{dx} \int \frac{d\sigma}{y} - \frac{m^2\omega}{y^2} + \frac{m\;\omega}{p^2} - \frac{m F\,d\omega}{dx}$. Tanta ergo est vis absoluta stratum Pq comprimens, & in zonulam corporis planis $P\pi$ & Qq interjectam normaliter agens. Hac autem decompositâ, erit vis inde resultans habens directionem motui fluidi viribusque in partem corporis anticam agentibus directe contrariam $= - P\,dy = - \frac{m\,d\omega}{dx}\, dy \int \frac{d\sigma}{y} + \frac{m^2\omega\,dy}{y^2} - \frac{m^2\omega\,dy}{p^2} + \frac{m F\,d\omega\,dy}{dx}$. Qua ita integratâ ut evanescat posito $\sigma = o$ & $y = m$, consideratisque saltem quantitatibus illis ut variabilibus; habetur vis in partem corporis indefinitam, planis MN & $P\pi$ interjacens $= - \frac{m y\,d\omega}{dx} \int \frac{d\sigma}{y} + \frac{m\sigma\,d\omega}{dx} - \frac{m^2\omega}{y} + m\omega - \frac{m^2\omega y}{p^2} + \frac{m^3\omega}{p^2} + \frac{m F y\,d\omega}{dx} - \frac{m^2 F\,d\omega}{dx}$. Factis nunc in hac expressione $y = p$ & $\int \frac{d\sigma}{y} = F$, atque $\sigma = g$, erit vis in partem corporis posticam vi in partem anticam directe contraria $= \frac{m g\,d\omega}{dx} - \frac{m^2\omega}{p} + m\,\omega - \frac{m^2\omega}{p}$ +

$+\frac{m^3\omega}{p^2} - \frac{m^2 F d\omega}{dx} = \frac{m g d\omega}{dx} + \frac{m n^2 \omega}{p^2} - \frac{m^2 F d\omega}{dx}$. Subducatur hæc ab inventa vi in partem anticam, habetur differentia $= \frac{m n \omega}{m+p} + (mE + mF - b - g)\frac{m d\omega}{dx}$. Jam iterum auferantur motus adjectus & vis acceleratrix negativa seu retardatrix, quæ toti systemati superaddidimus, & corpus iterum movebitur versus AB & ejusdem erit asc. potent. variabilis $= \omega$, fluidum vero, in quod corpus penetrat quiescet, eritque (§. 7.) resistentia corporis a fluido retardati $= \frac{m n \omega}{m+p} + (mE + mF - b - g)\frac{m d\omega}{dx}$ Q. E. I.

COROLL. I.

XXXIV. Hinc poterit definiri velocitas aquæ in flumine horizontaliter & uniformiter fluentis. Sumatur globus fluido nonnihil *Fig. V.* specifice gravior, & trajiciatur filo in A firmato. Sintque AD, BC lineæ horizontales, BA vero & CD verticales. Demisso jam globo in fluidum observetur angulus BAC, quo globus a verticali declinat, in quo situ, si fuerit permanens, vires in eum agentes sunt in æquilibrio. Sit pondus globi in aqua $= \pi$, erit ponderis hujus momentum respectu puncti rotationis A seu π in BC $=$ momento vis fluidi in corpus $= \frac{m n \omega}{m+p}$. AB: id est, quoniam aqua in flumine non potest propter auctas corporis sectiones sensibile velocitatis incrementum adipisci $= \frac{1}{2} n \omega$. AB (§. 29.): hinc oritur $\omega = \frac{2\pi . BC}{n . AB}$: sed quia BC: AB est $=$ Tang. CAB posito sinu toto $= 1$, erit $\omega = \frac{2\pi}{n}$ Tang. CAB. Cum autem hæc tangens detur per observationem, dabitur quoque asc. potent. aquæ in flumine ejusdemque velocitas.

COROLL.

COROLL. II.

XXXV. Quando corporis pars antica eſt æqualis & ſimilis parti poſticæ, erit reſiſtentia corporis $= \frac{m n \omega}{m + p} + (2 m E - 2 b) \frac{m d \omega}{d x}$.

SCHOLIUM.

XXXVI. Theoria hæc imprimis uſui foret in determinatione motus globorum, qui e tormentis bellicis aut ſclopetis ejaculantur, ſi modo aër, qui medii reſiſtentis vice hic fungitur, talis eſſet conſtitutionis, qualem propoſitio requirit. Sed quia ille durante motu non conſervat æqualitatem, quam ſuppoſuimus inter denſitatem medii corporis partes anticas & poſticas ambientis, & magis afficiantur illæ quam hæ ab aëris elatere, motus adeo celeres in aëre ab hac theoria abludent, & major quoque erit reſiſtentia, quam hæc illam exhibet. Sed in motibus lentioribus illa per Theoriam recte exhibetur, ut ex experimentis infra allegandis patebit. Tractandi jam ſunt caſus, ubi gravitas fluidi quoque in computum venire debet.

PROP. VII. PROBLEMA.

Corporis in fluido continuo deſcendentis definire reſiſtentiam.

SOLUTIO.

XXXVII. Sit ABCD vas verticaliter locatum, fluido datæ denſitatis, quæ eſt $= 1$, repletum usque ad AB; & dum vertex corporis I verſabatur in plano AB, corpus deſcenſum a quiete inchoaſſe pono, ſuoque deſcenſu jam perveniſſe ad planum ST, ibique corpus acquiſiviſſe velocitatem convenientem altitudini ω, hujusque incrementum deſcenſu per ſpatiolum, ipſi Ss æquale, eſſe $= d\omega$. Addatur toti ſyſtemati motus, motui corporis æqualis & ſurſum tendens verſus AB, nec non vis acceleratrix, vi acceleratrici, quâ corpus a gravitate deorſum ſollicitatur, æqualis & directe contraria. Corpus itaque reſpectu *Fig. IV.*

corporum extra ſyſtema quieſcet, & vires contrariæ acceleratrices in illud agentes ſeſe deſtruent. Fluidum vero & movebitur ſurſum, & verſus eandem plagam accelerabitur; ſed quia illud grave eſt, diminuetur vis acceleratrix per vim gravitatis contrariam. Sit jam MQ $= \sigma$, QP $= d\sigma$, ſectio corporis ſita in plano Q$q = k$, reliquis literis ſuos valores retinentibus: & per ea, quæ tradidi in ſolutione priore Prop. 2. facile colligitur, eſſe preſſionem abſolutam in ſectionem fluidi Qq, demptâ vi gravitatis abſoluta ſtrati Pq ut & vi efficace, qua illud ſurſum urgetur, = vi abſolutæ ſectionem fluidi Pπ animanti: id eſt adhibendo ſymbola, $P - d\sigma + \frac{m\,d\omega}{dx}\cdot\frac{d\sigma}{y} + \frac{2m^2\omega\,dy}{y^3} = \overset{1}{P}$: ſive $-d\sigma + \frac{m\,d\omega}{dx}\,\frac{d\sigma}{y} + \frac{2m^2\omega\,dy}{y^3} = dP$. Qua formula ita integratâ ut quantitates σ & y ſaltem ut variabiles tractentur, habebitur: $-\sigma + \frac{m\,d\omega}{dx} \int \frac{d\sigma}{y} - \frac{m^2\omega}{y^2} = C + P$. Quæ præbebit valorem preſſionis abſolutæ in planum Qq, modo conſtans C recte definiatur. Eum in finem vocetur preſſio abſoluta in MN, A & in EF, B, & ſumatur integrale quantitatis $\frac{d\sigma}{y}$ ita, ut evaneſcat poſito $\sigma = o$ vel $y = m$. Sic æquatio generalis modo inventa dabit ſpeciales has, magnitudines A & C definientes: $-\omega = C + A$; $-b + \frac{mE\,d\omega}{dx} - \frac{m^2\omega}{p^2} = C + B$, exiſtente ME $= b$, & E integrali quantitatis $\frac{d\sigma}{y}$ dicto modo ſumpto, in quo pro σ ſubſtitutum eſt b, & pro y apertura in EF $= p$. Eliminatis literis A & C mediantibus inventis æquationibus ſpecialibus, invenitur $P = B + b - \frac{mE\,d\omega}{dx} + \frac{m^2\omega}{p^2} - \sigma + \frac{m\,d\omega}{dx} \int \frac{d\sigma}{y} - \frac{m^2\omega}{y^2}$. Quâ in $-dy$ ductâ, poſteaque integratâ debiteque tractatâ reperietur vis ab acceleratione fluidi in partem corporis KGH redundans $= Bn$

—

$-\frac{m^2 E\, d\omega}{dx} + M + \frac{m n^2 \omega}{p^2} + \frac{m b\, d\omega}{dx}$: ſignificante litera M maſſam fluidi volumine parti corporis KGH æqualem. Simili modo computando vim a retardatione fluidi in partem corporis GIH invenitur illa $= -N - \frac{m g\, d\omega}{dx} + \frac{m^2 F\, d\omega}{dx} + \frac{m n^2 \omega}{p^2} + Bn$: ubi N ſignificat maſſam fluidi, cujus volumen parti corporis GHI æquale eſt, g vero lineam ES ſeu FT, F autem ſimilem quantitatem ſpectantem ad partem poſticam GHI, qualis eſt E ad anticam pertinens. Quæ cum priori contraria ſit, ab illa ſubducenda eſt, eritque exceſſus, quo vis ab acceleratione urgens corporis partem KGH ſuperat vim a retardatione fluidi in GIH agentem $= M + N - \frac{m^2 d\omega}{dx}(E+F) + (b+g)\frac{m\, d\omega}{dx}$. Addatur (§. 22.) vis $\frac{m n \omega}{m+p}$, quæ in ſolam partem anticam agit, parte poſtica nullam vim quam quæ a compreſſione ſtratorum fluidi pendet, ſentiente, & prodibit vis, quam corpus quieſcens à fluido ſurſum moto & in eadem directione accelerato ſuſtinet $= M + N - \frac{m^2 d\omega}{dx}(E+F) + (b+g)\frac{m\, d\omega}{dx} + \frac{m n \omega}{m+p}$. Cogitatione adjectus motus & vis accelerans jam iterum tollantur, & corpus jam deſcendet & accelerabitur in directione deorſum tendente, eritque ejus velocitas deorſum $= \sqrt{2\omega}$, ejusque incrementum tempore deſcenſus per ſpatiolum $= -dx$ erit idem, quod antea fluidi ſurſum tendentis $= \frac{d\omega}{\sqrt{2\omega}}$ & per (§. 7.) reſiſtentia eadem, quæ vis modo inventa $M + N - \frac{m^2 d\omega}{dx}(E+F) + (b+g)\frac{m\, d\omega}{dx} + \frac{m n \omega}{m+p}$. Q. E. I.

COROLL. I.

XXXVIII. Ex hac Theoria ſequitur utile illud Hydroſtatices dogma, quod corpus fluido ſtagnanti immerſum & in illo quieſcens tantum de suo pondere amittat, quantum est pondus fluidi ejusdem cum corpore voluminis: cessante enim omni motu & acceleratione vis resistentiæ, sive vis, qua corpus sursum urgetur, est $= M + N$.

COROLL. II.

XXXIX. Primo descensus momento, quando ω est $= o$, resistentia est $= M + N + (b + g - mE - mF)\frac{m\,d\omega}{dx}$. Lubrica ergo est hypothesis, quam adhibuit Clariss. Dnus D. BERNOULLI Tom. 2. Comment. Petrop. p. 324, primo momento descensus totam vim corpus sursum urgentem non esse pondere fluidi, quod hic per $M + N$ exprimitur, majorem. Patet hoc etiam ex eo, quod tam primo, quam omnibus sequentibus momentis temporis, massa fluida, cui augmentum velocitatis imprimendum est, corpusque juxta totam suam longitudinem cingit, non sit infinite parva, sed magnitudinis finitæ, cui ut imprimatur celeritatis incrementum infinitesimum a corpore tempore infinite parva, hoc utique vim finitam impendere debet. Sequitur etiam ex Propositione; corpus, quod descendendo acceleratur, plus de sua gravitate, non consideratâ resistentiâ a velocitate pendente, perdere, quam idem corpus, si vel penitus quiescat, vel maximam velocitatem jam adeptum sit. Sed ut Theoriam cum experientia conferre possimus, illam ad globos descendentes applicabimus.

PROP. VIII. PROBLEMA.

Globi in fluido datæ densitatis, quod continetur vase datæ amplitudinis, descendentis definire motus symptomata.

SOLUTIO.

Fig. IV. XL. Sit P pondus globi in vacuo, ejusdemque ascensus potentialis postquam a quiete motum inchoando descendit per spatium $AS = \omega$, ipsa $AS = x$, tota vis, qua globus descendens sursum urgetur

tur $= R$, reperietur per principia Mechanica: $(P - R)\,dx = P\,d\omega$. Mutato autem ſigno ipſius dx, quoniam jam ſimul linea x cum ω creſcit & decreſcit, ſecus quam antea ſuppoſuimus, eſt per (§. 37.) $R = M + N + \frac{m^2 d\omega}{dx}(E + F) - (b + g)\frac{m\,d\omega}{dx} + \frac{mn\omega}{m+p}$. Sed propter partem globi anticam ſimilem & æqualem parti poſticæ, eſt $E = F$, $M = N$ & $b = g =$ radio globi; ergo $P\,dx - 2M\,dx - 2m^2 E\,d\omega + 2bm\,d\omega - \frac{mn\omega\,dx}{m+p} = P\,d\omega$. Omnes quantitates conſtantes in hac æquatione occurrentes ſunt cognitæ: magnitudo autem E ex natura globi ſic definietur. Eſt $\frac{d\sigma}{y} = \frac{b^2 d\sigma}{mb^2 - 2nb\sigma + n\sigma^2}$: hujus integralis, cum σ evaneſcens, pendet a quadratura circuli, & eſt $= \frac{b}{\sqrt{pn}}\,A.T\,\frac{n^{1:2}}{p^{1:2}} - \frac{b}{\sqrt{pn}}\,A.T\,\frac{n^{1:2}(b-\sigma)}{b\,p^{1:2}}$, ubi A. T ſignum indicat arcum circuli, cujus tangens eſt quantitas illa, cui præfigitur, exiſtente radio $= 1$. Facta jam $\sigma = b$, erit $E = F = \frac{b}{\sqrt{pn}}\,A.T\,\frac{n^{1:2}}{p^{1:2}} = \frac{b}{p}\left(1 - \frac{n}{3p} + \frac{n^2}{5p^2} - \frac{n^3}{7p^3} + \frac{n^4}{9p^4}\ \&c.\right)$. Quæ ſeries in experimentis adducendis citiſſime convergens præbet verum valorem ipſius E vel F.

Scribantur brevitatis gratia pro $P - 2M =$ ponderi globi in fluido, π; pro $P + 2Em^2 - 2mb$, β; pro $\frac{mn}{m+p}$, ζ, & ſit e numerus, cujus logarithmus Hyperbolicus eſt $= 1$. Inventa æquatio hoc modo tranſibit in hanc: $\pi\,dx - \zeta\omega\,dx = \beta\,d\omega$. Quâ debite integratâ & reductâ reperitur $\omega = \frac{\pi(e^{\zeta x:\beta} - 1)}{\zeta e^{\zeta x:\beta}}$. Porro quia elementum temporis dt eſt $= dx : \sqrt{2\omega} = \frac{\beta\,d\omega}{(\pi - \zeta\omega)\sqrt{2\omega}}$; hæc ſimiliter integrata &

reducta præbet $\omega = \frac{\pi}{\zeta} \frac{(e^{t\sqrt{(2\pi\zeta)}:\beta} - 1)^2}{(e^{t\sqrt{(2\pi\zeta)}:\beta} + 1)^2}$. Duobus his valoribus ascensus potentialis ω æquatis invenientur duæ æquationes sequentes:

$$x = \frac{2\beta}{\zeta} l\left(\tfrac{1}{2} e^{t\sqrt{(2\pi\zeta)}:\beta} + \tfrac{1}{2}\right) - t\sqrt{\frac{2\pi}{\zeta}} \quad \&$$

$$t = \frac{\beta}{\sqrt{(2\pi\zeta)}} l\left(\frac{e^{\zeta x:2\beta} + \sqrt{(e^{\zeta x:\beta} - 1)}}{e^{\zeta x:2\beta} - \sqrt{(e^{\zeta x:\beta} - 1)}}\right)$$

Quæ ad motum globi determinandum sufficiunt. Q. E. I.

SCHOLIUM I.

XLI. Formulæ hæ, spatium & tempus exprimentes, non sunt satis ad calculum accommodatæ: præstat itaque, commodam adhibere approximationem. Distinguendi autem sunt duo casus, unus est, quando $\frac{\zeta x}{\beta}$ est quantitas satis magna, alter vero, quando est satis parva. Priori casu, qui frequentissimus est, $e^{\zeta x:\beta}$ unitatem multum superat, posteriori vero, ad eam proxime accedit. Illo ergo pro $\sqrt{(e^{\zeta x:\beta} - 1)}$ scribi potest $e^{\zeta x:2\beta} - \frac{1}{2} e^{-\zeta x:2\beta}$, eritque $t = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi\zeta}} l(4e^{\zeta x:\beta} - 1) =$ ferè $\frac{\beta}{\sqrt{(2\pi\zeta)}} l4 + \frac{x\sqrt{\zeta}}{\sqrt{2\pi}}$ nec non $x = t\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\zeta}} - \frac{\beta l4}{\zeta}$. Hoc vero velocitas $\sqrt{2\omega}$ per seriem ex potestatibus temporis t & constantibus conflatam mediante æquatione $\frac{\beta d\omega}{(\pi - \zeta\omega)\sqrt{2\omega}} = dt$, exprimenda est, quâ deinde in dt ductâ & integratâ prodit $x = \frac{\pi t^2}{2\beta} - \frac{\zeta\pi^2 t^4}{24\beta^3} + \frac{\zeta^2\pi^3 t^6}{180\beta^5}$ — &c. & per methodum reversionum $t^2 = \frac{2\beta x}{\pi} + \frac{\zeta x^2}{3\pi} + \frac{\zeta^2 x^3}{45\beta\pi}$ + &c., quæ quo minor est $\frac{\zeta x}{\beta}$, eo citius convergunt.

SCHO-

SCHOLIUM II.

XLII. Quoniam tempus & spatium sunt heterogenea, ut illud per hoc in data mensura determinetur verbi gr. in minutis secundis, unum casum cognitum considerare opus est. Talis est, quando fluidum est infinite rarum, ut corpus in vacuo descendere censeri possit: tunc enim est $t = \sqrt{2x}$. Posito itaque $t =$ uno min. sec., erit, ut constat ex observationibus, x in digitis pedis Londin. expressum $= 193\frac{1}{3} = \frac{580}{3}$: cujus numeri logarithmus tabularis est $= 2,\ 2863067$

$$\begin{array}{rl} l\,2 = & 3010300 \\ \hline l\,2x = & 2,\ 5873367 \\ l\sqrt{2x} = & 1,\ 2936683 \end{array}$$

qui cum debeat esse logar. unitatis, ut sumptâ x in dig. ped. Londin. expressio temporis prodeat in minutis secundis, debet inde semper subduci constans logar. hic: $1,2936683$. Notandum quoque est, quod in æquationibus prioribus occurrens quantitas $l\,4$ non debeat ex tabulis depromi, sed sumi logar. numeri quaternarii ex Logarithmica cujus subtangens est $= 1$, qui est $= 1,3863$ q. p. & hujus logarithmi logarithmus tabularis est $= 0,1418573$.

SCHOLIUM III.

XLIII. Computemus juxta hanc Theoriam experimentum primum Newtonianum, quod habetur Lib. 2. Princ. Phil. post Prop. 40. p. m. 320. Sumsit nempe Newtonus vas ligneum quadratum longitudinis & latitudinis internæ dig. novem pedis Londin., & globos ex cera, plumbi nonnihil inclusum habente, formatos demisit in aquam vase contentam, ita ut descensus altitudo esset 112 dig. ped. Londin. Unus ex illis habebat pondus in aëre $156\frac{1}{4}$ gran., in aqua 77 gr. & in vacuo $156\frac{13}{38}$ gr. Quando jam, ut Newtonus assumit, globus aqueus diametro digiti unius descriptus in medio aëris 132, 645 gr. & in

vacuo

vacuo 132, 8 gr. pondo eſt, erit globi diameter $= 0,84224$ dig. Ex his datis ſequitur eſſe $m = 81$, $n = 0,55714$, $p = 80,44286$. Et quia denſitas globi eſt ad denſitatem aquæ ut $156\frac{13}{38} : 79\frac{13}{38}$, hæc autem aſſumpta fuit $= 1$, denſitas globi exprimenda eſt per $\frac{5941}{3015}$: ideoque P (cujus valor per factum ex volumine in denſitatem exponendus eſt) $= 0,61642$, $\pi = 0,30359$, $\zeta = \frac{mn}{m+p} = 0,27953$: nec non $l\beta = l(P + 2Em^2 - 2mb) = -0,0310606$. His ad calculum præparatis perſpicitur, $\frac{\zeta x}{\beta}$ eſſe quantitatem ſatis magnam, ut unitas præ numero $e^{\zeta x:\beta}$ negligi poſſit, & aſſumi (§. 41.) $t = \frac{\beta l4}{\sqrt{2\pi\zeta}} + \frac{x\sqrt{\zeta}}{\sqrt{2\pi}}$. Eſt vero

$$\text{Log. } l4 = 0,1418573 \text{ (§. 42.)} \qquad l2 = 3010300$$
$$l\beta = -\ \underline{310606} \qquad l\pi = -\ \underline{5177066}$$
$$l(\beta l4) = 0,1107967 \qquad l2\pi = -\ 2166766$$
$$l\sqrt{2\pi\zeta} = -\ 3851243 \qquad l\zeta = -\ \underline{5535720}$$
$$l\frac{\beta l4}{\sqrt{2\pi\zeta}} = 0,4959210 \qquad l2\pi\zeta = -\ 7702486$$
$$l\sqrt{2\pi\zeta} = -\ 3851243$$
$$\frac{\beta l4}{\sqrt{2\pi\zeta}} = 3,133$$
$$lx = 2,0492180 \qquad l\sqrt{2\pi} = -\ 1083383$$
$$l\sqrt{\zeta} = -\ \underline{2767860}$$
$$lx\sqrt{\zeta} = 1,7724320 \qquad l\left(\frac{x\sqrt{\zeta}}{\sqrt{2\pi}}\right) = 1,8807703 \quad \frac{x\sqrt{\zeta}}{\sqrt{2\pi}} = 75,99$$
$$\frac{\beta l4}{\sqrt{2\pi\zeta}} + \frac{x\sqrt{\zeta}}{\sqrt{2\pi}} = 79,12,\ l79,12 = 1,8982863$$
$$\text{log. conſt. ſubtr. } \underline{1,2936683} \text{ (§. 42.)}$$
$$lt \text{ in min. ſec.} = 6046180$$
$$t \text{ in min. ſec.} = 4,023$$

Globus

Globus itaque juxta nostram Theoriam per spatium 112 dig. cadere debuit tempore 4, 023 min. sec. Cecidit in experimento tempore $4''$: differentia $\frac{23}{1000}$ unius min. sec. est imperceptibilis.

SCHOLIUM IV.

XLIV. Similibus calculis usus sum ad determinanda tempora descensuum globorum ad experimenta octava, nona, decima, undecima & duodecima a summo Newtono adhibitorum: ratio, quod illa selegerim, est; quod in illis oscillationes globorum descendentium majori cum cura evitare studuerit, quam in reliquis. Erat in his altitudo descensus $181\frac{1}{2}$, 182, $182\frac{1}{2}$ dig. sectionis transversæ vasis area $= \frac{676}{9}$. Ad dimetienda tempora adhibuit pendulum, quod singulis minutis secundis bis oscillabat, observavitque pondera tam in aëre, quam in aqua suorum globorum. Ex datis his ponderibus & pondere globi aquei in aëre diametro digiti unius, invenitur hâc simplici analogiâ diameter globi: ut pondus globi aquei in aëre diametro digiti unius (quod juxta Newtonum est 132, 645 gran.) ad cubum diametri suæ seu 1, ita differentia inter pondus globi cujuslibet in aëre & pondus ejusdem in aqua, ad cubum diametri suæ. Cum perfecta sphærica rotunditas corporibus difficulter inducatur, hoc modo tutius investigatur diameter, quam solâ mensuratione. Ex calculis juxta regulas institutis reperi ea, quæ in sequenti tabula apparent: supposui autem cum Newtono esse densitatem aëris ad densitatem aquæ ut 155 : 132800.

Exper. Newton. ad calculum revocata	Pond. globorum observata in aqua in granis	Pond. glob. in aëre observata in gran.	Pond. glob. in vacuo computata in gran.	Diam. glob. computati in dig. ped. Angl.	Tempora descensuum per Theoriam per numerum oscillationum expressa	Tempora descensuum observata
8	6,5	139	139,154	0,9996	52,14	51 vel 52
9	140,75	273,25	273,405	0,9996	11,39	12 vel 13
10	119,5	384	384,31	1,2586	15,54	17 vel 18
11	3,91	48	48,05	0,7126	46,00	45 vel 46
12	4,375	141	141,16	1,0099	64,50	64 vel 65

SCHOLIUM V.

XLV. Ex hac tabula constat, Theoriam cum experientia satis congruere. Maxima differentia inter illam & hanc deprehenditur in experimentis decimis, in quibus pondus globi in vacuo erat maximum, & simul globus diametro reliquos superabat. Tribuendum hoc puto cum Newtono, quod vel superficiei pars, quæ plumbum insertum habebat, non satis accurate locum infimum sub initium descensus occupaverit, vel quod globi per lineam brevissimam non descenderint: ipso enim fatente Newtono globi experimentorum decimorum nonnunquam in parietes vasis internos impegerunt, antequam fundum attingerent. Oscillationes efficiunt, ut globi nonnihil de suo motu prodigant, quid in descensum impendendum erat. In globis autem majoris diametri & gravioribus oscillationes cæteris paribus magis impediunt descensum, quam in minoribus & levioribus. Illorum enim oscillationes, utpote validiores, non tam cito ab aqua cohiberi possunt, quam horum. Hac autem ratione differentiæ non admissâ, non videtur posse reddi ulla, cur sub iisdem circumstantiis repetito experimento tempora descensuum mox fuerint $17\frac{3}{4}$, 18 mox $18\frac{1}{2}$ & 19 oscillationum. Quam enim rationem porro allegat Newtonus, quod nempe globi velociores minus premantur ad posticas suas partes, in aqua,

ut

ut puto, locum non habet, niſi ſtatuere velimus contra experientiam, eam a motu globorum poſſe comprimi. Vas enim, quo illa continetur, habet durante deſcenſu conſtanter eandem aquæ altitudinem: idem itaque ſpatium, aquâ compreſſionis incapace repletum, poſito licet motu quantumvis veloce, non poteſt unquam continere aquam ad poſticas partes rariorem, niſi aliqua ibi aquæ maſſa annihiletur. De motibus autem in aëre longe aliter ſentiendum, ibi quippe illa ratio veriſſima eſt.

SCHOLIUM VI.

XLVI. Ad inveniendam reſiſtentiam aëris adhibuit Newtonus c. l. p. m. 325 experimenta ab Hauksbeo capta, qui a culmine Eccleſiæ St. Pauli Londinenſis globos vitreos argento vivo, partim aëre plenos demiſerat. Deſcripſerant autem caſu 220 ped. Londin. Ut itaque & hæc experimenta ad calculum revocemus, ponamus cum Newtono eſſe jam denſitatem aëris ad denſitatem aquæ, ut 1 : 860, & globum aqueum diametro dig. 5 habere pondus 16600 gr. Quoniam his caſibus aperturæ, quæ ſunt in planis ſectionum horizontalium globi non augentur neque diminuuntur, erit (§. 29.) $\zeta = \frac{1}{2} n$; $\beta = P + \frac{4}{3} n b$. Inſtituto itaque calculo ex formula $x = \frac{t\sqrt{2\pi\zeta} - \beta l 4}{\zeta}$ (§. 41.) reperi ea, quæ tabula ſequens exhibet.

Experimenta Hauksbeana	Pondera glob. in aëre in gr.	Pond. glob. in vacuo in gr.	Diam. glob. in dig.	Tempora deſcenſuum in min. ſec. per Theoriam Galilæanam correcta	Spatia abſolvenda per Theoriam in ped. & dig.	Velocitates glob. finales per ped. & dig. uno min. ſec. motu æquabili abſolvendos expreſſæ
					ped. dig.	ped. dig.
1	510	530,5	5,1	8,2	226.5	30.2
2	642	663,7	5,2	7,7	230.2	33.2
3	599	619,5	5,1	7,7	227.0	32.8
4	515	534,3	5	7,95	223.8	30.11
5	483	502,3	5	8,2	224.9	29.11
6	641	662,7	5,2	7,7	230.1	33.2

SCHOLIUM VII.

XLVII. Differentiam inter Theoriam & experientiam, quæ in experimento ſecundo & ſexto ad decem pedes excreſcit, maxima ex parte tribuo, quod durante motu aër anticus & poſticus in globos agens non eundem denſitatis & elaſticitatis gradum conſervaverit. Pendet autem hoc a globorum velocitate, quæ quo major eſt, eo magis condenſatur aër, qui anteriorem cingit partem, & rareſit, qui poſteriorem. Itaque ſi illa eſt vera differentiæ ratio, debet, exiſtentibus finalibus globorum velocitatibus minoribus, Theoria cum experientia magis convenire. Qua de re ut certior fierem, calculo ſubjeci experimenta a Clariſs. Deſaguilierio Anno 1719 veſicis porcinis, quas pyxidi ligneæ, figuram globi habenti, incluſerat, incluſisque inflando figuram pyxidis conciliaverat, inſtituta. Erat autem deſcenſus altitudo 272 ped. Londin. Ad illa conſideranda & quæ per calculum invenerim perſpicienda ſequentem exhibeo tabulam

Experimenta Deſaguilieriana	Pond. glob. in aëre in gran.	Pond. glob. in vacuo in gran.	Diam. glob. in dig.	Tempora deſcenſuum in min. ſec.	Spatia abſolvenda per Theor. in ped. & dig.	Velocitates glob. finales per ped. uno min. ſec: motu æquabili abſolv. expreſſæ
					ped. dig.	ped. dig.
1	128	151	5,3	19,375	275. 5	14. 6
2	156	177,62	5,193	17,25	275. 2	16. 4
3	137,5	160,88	5,33	18,75	274. 6	15. 0
4	97,5	119,97	5,26	22,125	277. 9	12. 9
5	99,125	118,66	5,02	21,125	279. 9	13. 6

SCHOLIUM VIII.

XLVIII. Collatâ hac tabula cum priore, patet velocitates finales prioris ut plurimum duplo majores eſſe, velocitatibus finalibus hujus

tabulæ.

tabulæ. Et quamvis descensus globorum priorum multo breviori tempore fuerint absoluti quam posteriorum; maxima tamen differentia inter Theoriam & observationes hujus tabulæ, quæ est 7 ped. 9 dig. minor est maxima illius nempe 10 ped. 2 dig. licet tempora descensuum hujus tabulæ multo sint longiora, quam tempora descensuum illius. Me autem vel non monente liquet, eo majores errores a globo descendente sublata æqualitate densitatis aëris postici & antici committi debere cæteris paribus, quo diuturnior est descensus. Propter has cæteroquin differentias Theoriam in suspicionem falsitatis venire non posse vel inde constat, quod ad perfectam harmoniam inter illam & observationes inducendam, tempus saltem esset diminuendum quantitate vix perceptibili, aut substituenda pro ratione densitatis aëris ad densitatem aquæ, quam posui $= 1 : 860$ alia parumper major veluti $1 : 850$; adeo ut si assumptam hanc inter densitates aëris & aquæ rationem pro non accurata habere velis, ne quidem dici possit, quod celeritas, quâ corpus absolvit spatium triginta pedum vel circiter tempore unius minuti secundi, sensibilem jam secum vehat eversionem æquilibrii inter vim elasticam aëris antici & postici.

PROP. IX. PROBLEMA.

Globi in fluido datæ densitatis in vase datæ amplitudinis ascendentis definire motus symptomata.

SOLUTIO.

XLIX. Sit ABCD vas, quod fluidum continet, sitque profunditas initialis verticis sive $AU = a$, $AS = x$: habueritque corpus, dum vertex sub strato fluidi altissimo AB ad profunditatem $= a$ esset depressus, ascensum potentialem $= \lambda$. Distinguendi autem hic sunt casus tres. Primus est, quando globus est specifice levior fluido, ejusque velocitas initialis tanta est, ut illa ad certum usque terminum decrescere debeat. Secundus, quando velocitas non est tanta, sed *Fig. IV.*

illa a primo aſcenſus momento creſcit. Tertius autem, quando globus eſt ſpecifice gravior fluido. Diſtinctionis gratia ſingulos caſus ſeparatim tractabimus.

Caſu primo x & ω (exiſtente $\omega =$ aſc. potent. globi poſtquam aſcendit per ſpatium US) ſimul creſcunt vel decreſcunt, & vires, quæ in globum aſcendentem agunt, erunt P, 2 M, $\frac{2Em^2 d\omega}{dx} - \frac{2mbd\omega}{dx}$ & $\frac{mn\omega}{m+p}$ (§. 37). Eſt enim hic $M = N$ & $b = g =$ radio globi; P autem ſignificat maſſam globi, ſeu pondus ejus in vacuo: reliquæ literæ idem ſignificant, quod (§. 37.); mutandum ſaltem hic eſt ſignum quantitatis dx, quoniam ibi, creſcente ω, x decreſcere ponebatur. Eſt vero P vis deorſum tendens, e contrario 2 M tendit ſurſum; quemadmodum etiam vis $(2Em^2 - 2mb)\frac{d\omega}{dx}$. Nam quoniam magnitudo ω, dum corpus aſcendit, decreſcit, decreſcit quoque celeritas fluidi inter canalis internam ſuperficiem & globum verſantis, quatenus nempe illa pendet a magnitudine ω: quoniam autem ad id vi retardante opus eſt, ipſum autem fluidum deſcendit, illius directio erit utique verſus altiora. Tandem vis $\frac{mn\omega}{m+p}$, ut per ſe liquet, deorſum tendit. Poſito itaque $2M - P =$ vi qua globus quieſcens ſurſum urgetur $= \pi$, quæ hoc caſu quantitas poſitiva eſt, habebitur per principia Mechanica hæc æquatio: $\pi\, dx + (2Em^2 - 2mb)\, d\omega - \frac{mn\omega\, dx}{m+p} = P\, d\omega$. Fiat brevitatis gratiâ $P - 2Em^2 + 2mb = \beta$, & $\frac{mn}{m+p} = \zeta$, & prodit brevior æquatio hæc: $dx = \frac{\beta\, d\omega}{\pi - \zeta\omega}$: ergo $x = a - \frac{\beta}{\zeta}\, l\left(\frac{\pi - \zeta\omega}{\pi - \zeta\lambda}\right)$, & tempus $t = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}\,\zeta}\, l\left(\frac{(\pi^{1:2} - \sqrt{\zeta\omega})\,(\pi^{1:2} + \sqrt{\zeta\lambda})}{(\pi^{1:2} + \sqrt{\zeta\omega})\,(\pi^{1:2} - \sqrt{\zeta\lambda})}\right)$.

Æqua-

Æquatio autem, qua ſpatium aſcenſus ex tempore definitur, hæc reperietur:

$$a - x = t\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\zeta}\right)} + \frac{2\beta}{\zeta}\, l\, 2\pi^{1:2} - \frac{2\beta}{\zeta}\, l\left(e^{t\sqrt{(2\pi\zeta)}:\beta}(\pi^{1:2} - \sqrt{\zeta\lambda}) + \pi^{1:2} + \sqrt{\zeta\lambda}\right)$$

Caſu ſecundo poſito incremento ipſius $\omega = + d\omega$, erit incrementum ipſius $x = - dx$; & vis $2M - P = \pi$, tendit ſurſum; reliquæ autem duæ deorſum: & erit

$$\left(\pi + \frac{2Em^2 d\omega}{dx} - \frac{2mb\, d\omega}{dx} - \frac{mn\omega}{m+p}\right)\cdot - dx = P d\omega$$

Quæ, poſito iterum $P + 2Em^2 - 2mb = \beta$, & $\frac{mn}{m+p} = \zeta$, tranſit in hanc: $- dx = \frac{\beta\, d\omega}{\pi - \zeta\omega}$. Hic ergo β alium habet valorem, quam caſu priore, ſola ſigni mutatione in valorem prioris non tranſeuntem. Ex hac æquatione reſultant ſequentes finitæ: $x = a + \frac{\beta}{\zeta}$ $l\left(\frac{\pi - \zeta\omega}{\pi - \zeta\lambda}\right)$ $t = \frac{\beta}{\sqrt{(2\pi\zeta)}}\, l\left(\frac{(\pi^{1:2} + \sqrt{\zeta\omega})\,(\pi^{1:2} - \sqrt{\zeta\lambda})}{(\pi^{1:2} - \sqrt{\zeta\omega})\,(\pi^{1:2} + \sqrt{\zeta\lambda})}\right)$,
$a - x = \frac{2\beta}{\zeta}\, l\left(e^{t\sqrt{(2\pi\zeta)}:\beta}(\pi^{1:2} + \sqrt{\zeta\lambda}) + \pi^{1:2} - \sqrt{\zeta\lambda}\right) - t\sqrt{\frac{2\pi}{\zeta}}$
$- \frac{2\beta}{\zeta}\, l\, 2\pi^{1:2}$. Quæ ſufficiunt ad determinanda motus ſymptomata eo caſu, quo pondus globi in vacuo minus eſt pondere fluidi ejusdem cum illo voluminis.

Caſu tertio vis $\pi = P - 2M$ tendit deorſum, ut & vis $\frac{mn\omega}{m+p}$, & quoniam hoc caſu globus aſcendens ſemper retardatur, x & ω creſcunt vel decreſcunt ſimul, & vis $(2Em^2 - 2mb)\, \frac{d\omega}{dx}$ ſemper ſurſum dirigitur. Habetur ergo æquatio differentialis hæc: $\pi\, dx$

—

$-2Em^2d\omega+2mbd\omega+\frac{mn\omega dx}{m+p}=Pd\omega$: ſcribendo autem pro $P+2Em^2-2bm$, β; pro $\frac{mn}{m+p}$, ζ; erit $dx=\frac{\beta d\omega}{\pi+\zeta\omega}$ hinc erit $x=a+\frac{\beta}{\zeta}l\left(\frac{\pi+\zeta\omega}{\pi+\zeta\lambda}\right)$, $t=\frac{\beta\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\zeta}}.\ A.T\sqrt{\left(\frac{\zeta\lambda}{\pi}\right)}-\frac{\beta\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\zeta}}.\ A.T\sqrt{\left(\frac{\zeta\omega}{\pi}\right)}$ & $x-a=\frac{\beta}{\zeta}l\left(\frac{\pi}{\pi+\zeta\lambda}\right)+\frac{2\beta}{\zeta}l\,\text{Sec. Arc.}\left(A.T\sqrt{\left(\frac{\zeta\lambda}{\pi}\right)}-\frac{t\sqrt{\pi\zeta}}{\beta\sqrt{2}}\right)$. Significat autem ultimus terminus membri dextimi hujus æquationis, magnitudinem $\sqrt{\left(\frac{\zeta\lambda}{\pi}\right)}$ conſiderandam eſſe ut tangentem alicujus arcus circularis radii $=1$, hujusque tangentis ſumendum eſſe arcum, & ſubtracta ab hoc quantitate $t\frac{\sqrt{\pi\zeta}}{\beta\sqrt{2}}$, reſiduum conſiderandum eſſe ut arcum circularem ejusdem radii, & capiendum eſſe ſecantis hujus arcus duplum logar. in $\frac{\beta}{\zeta}$ ductum. Eſt ergo etiam $x-a=\frac{\beta}{\zeta}$ $l\left(\frac{\pi}{\pi+\zeta\lambda}\right)-\frac{2\beta}{\zeta}l\,\text{coſ. A}\left(A.T\sqrt{\left(\frac{\zeta\lambda}{\pi}\right)}-\frac{t\sqrt{\pi\zeta}}{\beta\sqrt{2}}\right)$. Q. E. I.

COROLL. I.

L. Maximus aſcenſus globi ſpecifice gravioris eſt $=\frac{\beta}{\zeta}l\left(\frac{\pi+\zeta\lambda}{\pi}\right)$: eſt enim tunc $\omega=o$, & corpus poſtquam eousque aſcendit iterum decidet, & poterit ex Prop. præced. determinari aſcenſus potentialis in fine temporis vel ſpatii acquiſitus. Et ſi quidem globus fuerit perfecte elaſticus, impingendo in fundum vaſis reflectetur, inchoabitque cum invento aſcenſu potentiali aſcenſum ſecundum, reperieturque per hanc altitudo ad quam pervenire poſſit: & ita porro. Quomodo autem inveniatur altitudo aſcenſus poſt magnum numerum hujusmodi reflexionum non eſt hujus loci oſtendere: docuit illud Clariſs. Dnus EULERUS in Mechanica Part. 1. Prop. 58. pag. 192.

COROLL.

COROLL. II.

LI. Quando globus fluido est specifice levior, atque $\zeta\lambda > \pi$, non potest ω eousque decrescere, ut sit $\zeta\omega < \pi$; fieret enim tunc tam spatium quam tempus ascensus imaginarium: neque etiam nisi præterlapso tempore infinito ascensus potentialis corporis eousque decrescet ut sit $\pi = \zeta\omega$.

COROLL. III.

LII. Fiat in fundo vasis apertura, per quam durante ascensu globi fluido specifice levioris hoc effluat, sitque fluidi supra globum versantis ascensus potentialis $= \alpha$ atque constantis magnitudinis, & globus ad quamlibet profunditatem demersus quiescet, si fuerit $\alpha = \frac{4}{3} b \left(\frac{2m-n}{m}\right)(1-\gamma)$, in qua retinentibus m & n suos valores, b est $=$ radio globi, $\gamma =$ densitati globi, existente densitate fluidi $= 1$. Maxima autem velocitas, quam in fluido descendente globus potest acquirere, est $= \sqrt{\frac{2\pi}{\zeta}} - \sqrt{2\alpha}$. Innotescit cæteroquin ipse globi motus ex his æquationibus: tempus t est $= \frac{\beta}{\sqrt{2\pi\zeta}}$

$$l\left(\frac{(\pi^{1:2} + \sqrt{\zeta\alpha} + \sqrt{\zeta\omega})\,(\pi^{1:2} - \sqrt{\zeta\alpha})}{(\pi^{1:2} - \sqrt{\zeta\alpha} - \sqrt{\zeta\omega})\,(\pi^{1:2} + \sqrt{\zeta\alpha})}\right),$$

atque spatium, per quod globus ascendere debet, ut acquirat ascensum potentialem $= \omega$, est $= a - x = \frac{\beta}{\zeta}\, l\left(\frac{\pi - \alpha\zeta}{\pi - (\alpha^{1:2} + \omega^{1:2})^2\zeta}\right) + \frac{\alpha^{1:2}\beta}{\sqrt{\pi\zeta}}$

$$l\left(\frac{(\pi^{1:2} - \sqrt{\omega\zeta} - \sqrt{\alpha\zeta})\,(\pi^{1:2} + \sqrt{\alpha\zeta})}{(\pi^{1:2} + \sqrt{\omega\zeta} + \sqrt{\alpha\zeta})\,(\pi^{1:2} - \sqrt{\alpha\zeta})}\right).$$

SCHOLIUM.

LIII. Æquationibus his ad calculum magis adaptandis supersedeo, cum non sint experimenta in promptu, cum quibus illas conferre

ferre possim. Aptissima his capiendis videtur machina quatuor epistomiis instructa, quibus mediantibus potest effici, ut aqua interna præcise habeat simplum, duplum, triplum, quadruplum, quintuplum, sextuplum & septuplum velocitatis gradum, & cui juncta bilanx magnitudinem vis fluidi cum dictis velocitatis gradibus descendentis in corpus submersum demonstrat. Describit illam Clariss. s'Gravesande in Phys. Element. Mathem. Lib. 3. Cap. 15. pag. 529. edit. noviss. Sed ut æstimare valeamus, quantos errores globus in aëre cum magno velocitatis gradu projectus propter condensatum aërem anticum & rarefactum posticum committat, sequentem propositionem adjicimus.

PROP. X. PROBLEMA.

Globi in aëre juxta lineam horizonti parallelam projecti, cujus semita non multum a linea recta aberrat, definire ascensum potentialem residuum, postquam datum spatium est emensus, ex dato ascensu potentiali initiali.

SOLUTIO.

Fig. VI. LIV. Projiciatur corpus juxta datam lineam horizontalem AB ab A versus B, habueritque in A ascensum potentialem datum $= \lambda$, & quæritur quantus adhuc ille sit, cum globus in puncto B versatur. Sit $AB = a$, $BC = x$, globi ascensus potent. in puncto quolibet $C = \omega$, & in c puncto $= \omega + d\omega$, $Cc = dx$: proinde resistentia (§. 33. & 29.) $= \frac{1}{2} n\omega + (2m^2 E - 2mb) \frac{d\omega}{dx}$. Quoniam autem pro globo est $E = \frac{b}{p}\left(1 - \frac{n}{3p}\right)$ (§. 40.), erit $2m^2E - 2mb = \frac{4}{3} nb$, & existente $P =$ ponderi globi in vacuo, habebitur per princ. Mechanica hæc æquatio: $\frac{1}{2} n\omega\, dx + \frac{4}{3} nb\, d\omega = P\, d\omega$. Quâ ita integratâ ut posito $\omega = \lambda$ fiat $x = a$, prodit $x = a + \left(\frac{6P - 8nb}{3n}\right) l \frac{\omega}{\lambda}$; hinc

$\omega =$

$\omega = \lambda e^{\frac{3n(x-a)}{6P-8nb}}$: ubi e est numerus, cujus logar. hyperb. est $= 1$: consequenter in puncto B ubi $x = o$, est ascensus potentialis $= \lambda e^{-3na:(6P-8nb)}$. Q. E. I.

COROLL.

LV. Ad conferendam hanc Theoriam cum experientia & propter commoditatem calculi, sit velocitas globi initialis numero pedum Londin. uno minuto sec. motu æquabili absolvendorum expressa $= Q$, & velocitas similiter expressa absoluto dato spatio $a = q$: densitas globi posita densitate aëris $1 = \gamma$; & ex propositione facile reperietur æquatio hæc: $lQ - \frac{3 \cdot 4342945\, a}{16\, b\, (\gamma - 1)} = lq$: in quâ occurrentes logarithmi quantitatum Q & q sumendi sunt ex tabulis vulgaribus, spectantibus ad Logarithmicam cujus subtangens est $= 4342945$.

SCHOLIUM I.

LVI. Adinvenit Dnus Robins Anglus pendulum, cujus subsidio potest determinari velocitas globorum, qui e sclopetis mediante pulvere pyrio exploduntur. Librum ubi illud & experimenta a se instituta descripsit Germanicâ linguâ donavit & eruditissimis notis illustravit Excellentiss. Dnus Director Eulerus ediditque Berolini Anno 1745 sub Titulo: Neue Grund-Sätze der Artillerie. Recensentur ibi pag. 489. experimenta globis plumbeis instituta, repertaque dicitur velocitas globi, diametro $\frac{3}{4}$ dig. descripti, ad distantiam 25 ped. Anglic. a principio semitæ absolvendæ tanta, quâ possit tempore unius min. sec. motu æquabili percurrere pedes 1670. Remoto autem loco explosionis ad distantiam 75 & 125 pedum a pendulo velocitates globi impingentis mensurante, tantas illas fuisse perhibetur, quantis opus fuisset, ad absolvendum tempore unius min sec. spatium 1550 & 1425 ped. respectivè. Per æquationem autem Coroll. præced. invenitur facto $Q = 1670$, $a = 50$ & $\gamma = 9647$ (tot enim vici-

vicibus plumbum gravius est aëre) $q = 1619$ ped. Manentibus reliquis fiat $a = 100$ ped. erit $q = 1569$. Constat itaque, si aër anticus & posticus eandem semper conservassent densitatem, globis post emensum spatium 50 & 100 pedum majorem superfuturam fuisse velocitatem, quam quâ pendulum Robinsianum eos revera præditos fuisse demonstravit.

SCHOLIUM II.

LVII. Quod ad velocitates globorum a Clariss. Robinsio erutas attinet, notandum est, quod non liceat illis satis tuto confidere. Falsam enim adhibuit hypothesin, massam scilicet totius penduli posse concipi collectam in illo puncto, ubi globus pendulum ferit, cum tamen illa semper a veritate abeat, nisi punctum in quo globus in pendulum impingit, sit hujus centrum oscillationis. Peccatur autem per hanc hypothesin ad determinandas velocitates adhibitam in excessu, quando punctum illud centro oscillationis est superius, in defectu vero quando est inferius. Videantur notæ sæpius laudati Dni EULERI ad cit. Tr. p. 184. Prodidisse autem se maxime videtur hic error in experimento illo, cum pendulum ad distantiam 100 pedum a loco explosionis remotum esset. Erat autem ille suffragantibus reliquis experimentis in defectu, veraque velocitas major, quam juxta suam hypothesin Robinsius eam reperit: adeo ut globus in pendulum impegerit in aliquo puncto centro oscillationis humiliore.

LVIII. Sed missis his, in quibus nihil certi statui posse puto priusquam nova experimenta penduli hujus ope capiantur, velocitatesque globorum inde rectius determinentur, addere placet problema sequens, non inutile, atque ab aliis nondum satis accurate solutum, cum cognitionem pressionis fluidorum motorum in plana opposita, hactenus minime vulgarem, deposcat.

PROP.

PROP. XI. PROBLEMA.

Aquæ e vaſe cylindrico, verticaliter erecto, per foramen in fundo factum exſilientis, definire velocitatem, poſtquam ejus ſuperficies ad datam profunditaeem ſubſedit.

SOLUTIO.

LIX. Sit ACHB vas verticaliter erectum, habens in fundo CH aperturam IK per quam aqua erumpit. Ponamus ſuperficiem aquæ, tunc cum eſſet in AB, motum a quiete inchoaſſe: poſtquam autem pervenit in GF, aquam internam GCHF acquiſiviſſe aſcenſum potent. $= \omega$, tuncque aquam erumpentem præditam eſſe aſc. potent. $= v$. Sit porro AC $= a$, CG $= x$, amplitudo vaſis $= m$, foraminis $= p$, fundi vaſis area $= n$, denſitas aquæ $= 1$. Quando aſc. potent. aquæ internæ creſcit quantitate $d\omega$, altitudo CG decreſcit quantitate Gg, quæ proinde eſt $= - dx$. Jam per ſe evidens eſt, vim quâ ſtratum effluxui proximum urgetur, æqualem eſſe vi inefficaci, quâ fundus CIKH premitur, una cum vi efficace, qua ſtratum effluxui proximum animatur; ſequitur hoc etiam ex traditis (§. 16). Vis prior, qua nempe ſtratum effluxui proximum urgetur, eſt $= mx$, ponderi ſcilicet fluidi, demptâ hinc vi efficace, qua aqua interna ad majorem motum ſollicitatur: pugnare enim facile intelligitur cum natura vis efficacis, illam ulla ex parte in ſtratum *c*H agere poſſe: conſtat autem per principia Mechanica eam eſſe $= - \frac{m x d\omega}{dx}$. Ex viribus vero poſterioribus vis inefficax, quâ fundus vaſis premitur, eſt (§. 25.) $= \frac{m^3 n \omega}{p^2 (m+p)}$: cum quæ ibi erant *b* & E hic evaneſcant; vis vero efficax ſtratum effluxui proximum ſollicitans eſt (§. 16.) $= \frac{2 m n \omega}{p}$. Hæc ergo habetur æquatio: $mx + \frac{m x d\omega}{dx} = \frac{m^3 n \omega}{p^2 (m+p)} + \frac{2 m n \omega}{p}$: quæ

Fig. VII.

quæ poteſt transmutari in hanc: $xdx + xd\omega = \frac{n\omega dx}{m+p} + \frac{(m^2-p^2)}{p^2}$ ωdx. Scribatur brevitatis gratiâ pro $\frac{n}{m+p} + \frac{m^2-p^2}{p^2}$, g: & prodit hæc brevior: $xdx + xd\omega = g\omega dx$. Integretur hæc ita, ut fiat $\omega = o$ poſito $x = a$, & erit $\omega = \frac{a}{g-1}\left(\frac{x}{a} - \frac{x^g}{a^g}\right)$, nec non $v = \frac{m^2 a}{p^2(g-1)}\left(\frac{x}{a} - \frac{x^g}{a^g}\right)$. Ex data ergo x datur aſcenſus potentialis aquæ tam internæ quam erumpentis. Q. E. I.

COROLL. I.

LX. Quando vas nullum habet fundum, aqua non aliter accelerabitur, quam corpora libere cadentia: ergo debet per theoriam Galilæanam eſſe $\omega = a - x$. Eandem æquationem præbet Propoſitio: eſt enim hoc caſu $n = o$, atque $m = p$, proinde $g = o$, nec non $\omega = v = -a\left(\frac{x}{a} - 1\right) = a - x$.

COROLL. II.

LXI. Sit apertura in fundo infinite parva ratione amplitudinis tubi, atque ponamus aquam jam aliquantulum ſubſediſſe, ita ut x ſit parumper minor quam a, erit, propter $g = \frac{m^2}{p^2}$ = quantitati infinite magnæ, $\omega = \frac{x}{g} = o$, & $v = \frac{m^2 x}{p^2 g} = \frac{m^2 x}{m^2} = x$. Hoc ergo caſu, quamprimum minima aquæ quantitas effluxerit, aſcenſus potentialis aquæ erumpentis æquatur ejusdem altitudini ſupra foramen. Quod etiam aliunde notum eſt.

COROLL.

COROLL. III.

LXII. Maximus valor ipſius v reperitur per vulgarem methodum de maximis & minimis, eſtque $= \frac{m^2 a}{p^2 g^{g:(g-1)}}$: atque tunc eſt altitudo aquæ ſupra aperturam $= a\, g^{-1:(g-1)}$. Eſt autem eo caſu, quo vas verticaliter locatur, a tam longitudo ejus, quam altitudo initialis aquæ ſupra aperturam. Quando autem vas efficit cum horizonte angulum obliquum, facile patet, pro a non ſumendam eſſe ejus longitudinem, ſed altitudinem.

COROLL. IV.

LXIII. Sumſit Clariſs. Dnus BERNOULLI, vid. Hydrodyn. p. 54, tubum cylindricum, eumque oblique ad horizontem poſuit. Erat autem altitudo tubi $= 81$, amplitudo ejus ad amplitudinem aperturæ $= 2:1$: proinde $m = 2$, $p = 1$, $n = 1$, $g = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$, $a = 81$. Inventi valoris maximi aſc. potent. aquæ erumpentis logarithmus prodit ex his datis $= 1,7635755$: cui proxime convenit numerus 58, talium ſcilicet particularum, qualium 81 tubi altitudinem æquabant. Invenit autem per experimentum laudatus Dnus BERNOULLIUS aſcenſum potent. revera fuiſſe $= 56$. Propius itaque hæc theoria accedit ad veritatem quam Bernoulliana, quæ illum facit $= 64$.

COROLL. V.

LXIV. Repetiit experimentum Dnus BERNOULLI ſub iisdem circumſtantiis: eo ſolo excepto, quod amplitudo aperturæ ſaltem fuerit ſubquadrupla amplitudinis tubi, & per illud reperit aſcenſum potent. maximum aquæ erumpentis $= 68$. Hoc ergo caſu eſt $g = \frac{78}{5}$ & maximus aſc. potent. $= 68,82$, qui juxta Theoriam Bernoullianam eſt $= 70$. Hoc & præcedens Corollarium noſtram theoriam ſane non leviter confirmant.

COROLL.

COROLL. VI.

LXV. Ex his poterit etiam tempus definiri, quo superficies aquæ internæ ad datam profunditatem in vase descendit. Nam quoniam dt est $= -\frac{dx}{\sqrt{2\omega}} = -\frac{dx\sqrt{(\frac{1}{2}g-\frac{1}{2})}}{\sqrt{\left(x-\frac{x^g}{a^{g-1}}\right)}}$, t exprimetur per seriem satis celeriter convergentem hanc: $\sqrt{(\frac{1}{2}g-\frac{1}{2})}\Big(2\sqrt{a}-2\sqrt{x}$

$$+\frac{1.(a^{g-\frac{1}{2}}-x^{g-\frac{1}{2}})}{2\,a^{g-1}\,(g-\frac{1}{2})}+\frac{1.3\,(a^{2g-\frac{3}{2}}-x^{2g-\frac{3}{2}})}{2.4\;a^{2g-2}\,(2g-\frac{3}{2})}$$

$$+\frac{1.3.5\,(a^{3g-\frac{5}{2}}-x^{3g-\frac{5}{2}})}{2.4.6\;a^{3g-3}\,(3g-\frac{5}{2})}+\frac{1.3.5.7\,(a^{4g-\frac{7}{2}}-x^{4g-\frac{7}{2}})}{2.4.6.8\;a^{4g-4}\,(4g-\frac{7}{2})}\;\&c\Big).$$

Et tempus quo vas penitus evacuatur est $= \sqrt{(\frac{1}{2}ag-\frac{1}{2}a)}$

$$2+\frac{1}{2(g-\frac{1}{2})}+\frac{1.3}{2.4(2g-\frac{3}{2})}+\frac{1.3.5}{2.4.6(3g-\frac{5}{2})}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8(4g-\frac{7}{2})}.$$

Et hæc cum experientia convenient, modo contractio venæ aqueæ præ foramine per tubulum cylindricum illi insertum evitetur. Per ea autem, quæ §. 42. tradidi, liquet, a logarithmo serierum harum, tempus exprimentium, subduci debere logar. constantem 1, 2936683, ut illud in min. sec. expressum prodeat.

SCHOLIUM.

LXVI. Qui æquationem differentialem inventam $x\,dx + x\,d\omega = \frac{n\,\omega\,dx}{m+p} + \frac{(m^2-p^2)}{p^2}\,\omega\,dx$ conferet cum Bernoulliana pro solutione ejusdem problematis §. 13. Hydrodyn. exhibita, deprehendet, eas differre termino $\frac{n\,\omega\,dx}{m+p}$, qui hanc non ingreditur. Ratio est, quod Clariss. Dnus BERNOULLIUS vim aquæ, quam fundus vasis sustinet,

sustinet, non consideraverit, & ascensum potentialem descensui actuali æqualem esse crediderit. At vero quoniam fundus, quatenus reagit, vires aquæ deorsum agentes diminuit, æqualitas illa, quæ vim omnem supponit esse efficacem, locum habere non potest, sed descensus actualis semper erit major ascensu potentiali. An vero dicta æqualitate non admissa non quoque simul evertitur principium conservationis virium vivarum. Minime gentium! Ex illo enim principio id saltem consequitur, vires, actu in systemate genitas, perdurare, atque in hoc vel illo corpore ad systema spectante deprehendi debere: frustra autem quæruntur in systemate vires vivæ, quæ non potuerunt propter vim mortuam contra nitentem generari. Itaque si singulorum corporum in systema coadunatorum sumantur facta ex massis in quadrata velocitatum actualium, aut in ascensus potentiales, illis velocitatibus convenientes, licet utique de viribus juxta hanc mensuram sumptis vel æstimatis prædicare, eas transferri quidem, sed non annihilari posse, & hoc respectu indifferens esse, an omnes vires mortuæ, quas adfuisse & egisse constat, efficaces fuerint, an vero compositæ ex efficacibus & inefficacibus. Secus se res habet, quando ex altitudine descensus centri gravitatis de ejusdem ascensu potentiali judicandum est; & hæc nunquam pro æqualibus reputanda erunt, nisi constet nullas adesse vires inefficaces: adeo ut ad æqualitatem inter hæc duo habendam a descensu actuali semper subduci debeat ascensus potentialis, a viribus inefficacibus generandus, si illæ pariter ut reliquæ efficaces fuissent. Sed ut constet, nostram solutionem principio conservationis virium vivarum nihil derogare, placet adjungere propositionem sequentem.

PROP. XII. PROBLEMA.

Aquæ e vase cylindrico per foramen in fundo factum erumpentis definire motum ex natura & conservatione virium vivarum.

SOLUTIO.

LXVII. Retineantur eadem ſymbola, quæ in ſolutione priori adhibuimus. Et erit tota vis efficax in ſyſtemate agens, æqualis ponderi fluidi CHFG $= mx$ demptâ vi illâ, quâ fundus fluidum incumbens fulcit $= \frac{m^3 n \omega}{p^2(m+p)}$. Finge jam, fundum vaſis abeſſe, totamque maſſam aquæ urgeri a vi $mx - \frac{m^3 n \omega}{p^2(m+p)}$, & ſingula illius ſtrata capient æqualia vis vivæ incrementa: incrementum vis vivæ ergo, quod producitur in tota maſſa durante deſcenſu ſuperficiei per ſpatiolum $Gg = -dx$ eſt $= -dx\left(mx - \frac{m^3 n \omega}{p^2(m+p)}\right)$. Ablatus cogitatione fundus vaſi jam iterum reſtituatur, & eædem quidem iterum agent vires efficaces, ſed omnia ſtrata non accipient, ut antea, idem vis vivæ incrementum; ſtratum enim effluens aliud accipit, quam ſtratum ſimile & æquale in vaſe remanens. Quia autem principium conſervationis virium vivarum depoſcit, ut quod uni ſtrato decedit, alteri accreſcat, ita ut in toto ſyſtemate eadem permaneat virium vivarum ſumma, harum incrementa in unam ſummam collecta æqualia erunt incremento modo invento, cum fundus abeſſe ſupponeretur. Sed vis efficax ad propellendum ſtratum cH in ſyſtemate requiſita eſt (per §. 16.) $= \frac{2mn\omega}{p}$, & incrementum vis vivæ ab illa productum $= -\frac{2mn\omega dx}{p}$: nec non vis efficax ad accelerandam aquam internam requiſita $= -\frac{mx\,d\omega}{dx}$, & vis viva genita $= mx\,d\omega$. Habetur ergo: $-mx\,dx + \frac{m^3 n \omega\, dx}{p^2(m+p)} = -\frac{2mn\omega dx}{p} + mx\,d\omega$: ſive $mx + \frac{mx\,d\omega}{dx} = \frac{m^3 n \omega}{p^2(m+p)} + \frac{2mn\omega}{p}$. Quæ æquatio cum illâ, quam per primam ſolutionem invenimus, plane conſpirat. Q. E. I.

LXVIII.

LXVIII. Coronidis loco placet adjungere methodum pro investiganda resistentia corporum descendentium a me tunc temporis excogitatam, cum illam a priori quam nunc exposui, adhuc ignorarem, hanc enim non exiguam in hac materia utilitatem posse præstare confido.

PROP. XIII. PROBLEMA.

Datâ unicâ observatione temporis, quo corpus in fluido a quiete descendens datum spatium est emensum, determinare resistentiam, quæ rationem duplicatam velocitatum sequitur, nec non ascensum potentialem maximum, quem descendendo potest consequi.

SOLUTIO.

LXIX. Sit AS $= x$, ascensus potentialis corporis, postquam descendit per spatium $x = \omega$, pondus corporis in medio resistente $= \pi$, resistentia, quæ sequitur duplicatam rationem velocitatum post descensum per spatium $x = r$, ascensus potent. maximus quæsitus $= a$, massa globi alteriusve corporis $=$ P. Significet porro β idem, quod (§. 40.), & erit $\beta = P + 2Em^2 - 2mb$ magnitudo data: tempus descensus a quiete $= t$, ejusque differentiale $= \frac{dx}{\sqrt{2\omega}} = dt$. Erit ergo per princ. Mechanica: $\pi dx - r dx = \beta d\omega$. Sed quia r est resistentia, quæ sequitur duplicatam rationem velocitatum, erit $ar = \pi\omega$, & $adr = \pi d\omega$; nec non ob $dt = \frac{dx}{\sqrt{2\omega}}$, $dx = \frac{dt\sqrt{2ar}}{\sqrt{\pi}}$: valoribus his substitutis prodit: $\pi^{3:2} dt \sqrt{2r} - \pi^{1:2} r dt \sqrt{2r} = a^{1:2} \beta dr$. Æquatio hæc hoc laborat incommodo, quod una ex variabilibus nempe r non prius assequatur valorem finitum π, quam altera ad infinitatem perveniat: hoc autem ad inventionem quæsiti non satis commodum est. Introducatur ergo magnitudo aliqua variabilis z, quæ simul cum t nullescat & infinitescat. Sit ergo $z = \frac{\pi r^{1:2}}{\pi^{1:2} - r^{1:2}}$.

Hinc est $r^{1:2} = \frac{z\pi^{1:2}}{\pi+z}$, $r = \frac{z^2\pi}{(\pi+z)^2}$ & $dr = \frac{2\pi^2 z\,dz}{(\pi+z)^3}$. Substitutis in æquatione his valoribus, prodit $\pi^2 dt + 2\pi z\,dt = \beta dz\sqrt{2a}$. Quâ integratâ ita ut z & t simul evanescant, reperitur $t = \frac{\beta}{2\pi}\sqrt{(2a)}\; l\left(\frac{\frac{1}{2}\pi+z}{\frac{1}{2}\pi}\right)$, & $\sqrt{2a} = \frac{2\pi t}{\beta\, l\left(\frac{\frac{1}{2}\pi+z}{\frac{1}{2}\pi}\right)}$.

Resumatur æquatio differentialis prior, in quâ pro $d\omega$ substitutus est valor $adr:\pi$, & erit $\pi^2 dx - \pi r\,dx = \beta a\,dr$. Proinde $x = \frac{\beta a}{\pi}\; l\left(\frac{\pi}{\pi-r}\right)$ (resistentia enim de qua hic agimus est in principio motus nulla) atque $\sqrt{2a} = \frac{\sqrt{2x\pi}}{\beta^{1:2}\sqrt{l\left(\frac{\pi}{\pi-r}\right)}}$. Ergo $\frac{\sqrt{2x\pi}}{\beta^{1:2}\sqrt{l\left(\frac{\pi}{\pi-r}\right)}} = \frac{2\pi t}{\beta\, l\left(\frac{\frac{1}{2}\pi+z}{\frac{1}{2}\pi}\right)}$, vel $x^{1:2}\beta^{1:2}\, l\left(\frac{\frac{1}{2}\pi+z}{\frac{1}{2}\pi}\right) = 2^{1:2}\pi^{1:2}t\sqrt{l\left(\frac{\pi}{\pi-r}\right)}$. Sed ut æquationem nanciscamur, quam non nisi unica incognita ingrediatur, fiat $\frac{\frac{1}{2}\pi+z}{\frac{1}{2}\pi} = n$, & erit $z = \frac{1}{2}\pi(n-1)$; quare cum $r = \frac{\pi z^2}{(\pi+z)^2}$, est $\frac{\pi}{\pi-r} = \frac{n}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}$. His valoribus in inventa æquatione surrogatis, pervenietur ad hanc: $\overset{(B)}{l\,n} = \frac{2^{1:2}\pi^{1:2}t}{x^{1:2}\beta^{1:2}}\overset{(A)}{\sqrt{l\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}\right)}}$. Quam nulla ingreditur incognita præter n; & talis necessario pro n substituendus est valor, ut æqualitas inter duo æquationis membra prodeat. Ad illum autem inveniendum in nostro negotio non opus est ad series confugere; possumus enim in omnibus, quæ occurrunt experimentis labore illum accurate determinandi supersedere. Ut autem ille circiter innotescat, assumatur pro n numerus unitate

unitate major, nisi enim major fuerit, resistentia erit $= o$. Quodsi
jam, substitutione illius numeri pro n facta, contingat, membrum
inventæ æquationis (A) majus esse membro (B), tuto hinc conclu-
demus, assumptum valorem ipsius n nimis esse parvum, & ad obti-
nendam æqualitatem inter (A) & (B) majorem eum assumi opor-
tere. Sit enim f valor ipsius n vero proximus, illoque substituto
superet membrum (A) membrum (B) magnitudine &c., & reperie-
tur per vulgares approximandi methodos esse $n = f + f$ &c.

$$\left(1 + \frac{\pi^{1:2} t\,(f-1)}{2^{1:2} x^{1:2} \beta^{1:2} (f+1) \sqrt{l\left(\frac{f}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4f}\right)} - \pi^{1:2} t\,(f-1)}\right).$$

Quæ quantitas ipsi f addenda, existente &c. magnitudine positiva,
nunquam potest esse privativa. Postquam sic inventus est valor ipsius n,
dabitur quoque r per hanc æquationem: $\frac{\pi}{\pi - r} = \frac{n}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}$.
Quando itaque, quod solet in experimentis n permagnum est,
r ad π proxime accedet. Porro quoniam $z = \frac{\pi \sqrt{r}}{\sqrt{\pi} - \sqrt{r}} = \frac{\pi(\sqrt{r\pi} + r)}{\pi - r}$,
erit, surrogato hoc valore in æquatione supra inventa, $t = \frac{\beta}{2\pi} \sqrt{(2a)}$
$l\left(\frac{\frac{1}{2}\pi + z}{\frac{1}{2}\pi}\right)$, $\frac{2^{1:2}\pi t}{\beta\sqrt{a}} + l(\pi - r) = l(\pi + r + 2\sqrt{\pi r})$. Ex æqua-
tione autem $x = \frac{\beta a}{\pi}\, l\left(\frac{\pi}{\pi - r}\right)$, invenitur $l(\pi - r) = l\pi - \frac{\pi x}{\beta a}$
propterea $\frac{2^{1:2}\pi t}{\beta\sqrt{a}} + l\pi - \frac{\pi x}{\beta a} = l(\pi + r + 2\sqrt{\pi r}) =$
$2\, l(\pi^{1:2} + r^{1:2})$, atque velocitas maxima sive $\sqrt{2a}$
$= \frac{\pi t}{2\beta\, l(\pi^{1:2} + r^{1:2}) - \beta\, l\pi} - \frac{1}{2\beta\, l(\pi^{1:2} + r^{1:2}) - \beta\, l\pi}$.
$\sqrt{\left(\pi^2 t^2 + 2\pi x \beta\, l\pi - 4\pi x \beta\, l(\pi^{1:2} + r^{1:2})\right)}$. Sed cum r pro-

xime

xime accedit ad π, prodit æquatio multo ſuccinctior hæc: $\surd 2a = \frac{\pi t}{\beta l 4} - \frac{1}{\beta l 4} \surd(\pi^2 t^2 - 2\pi x \beta l 4)$. Ex data autem velocitate maxima datur aſcenſus potentialis maximus, atque reſiſtentia, quæ ſequitur duplicatam rationem velocitatum in quolibet ſpatii percurrendi puncto. Q. E. I.

SCHOLIUM I.

LXX. Sumamus ad illuſtrandam hanc methodum experimentum 4tum Newtonianum, quod habetur poſt Prop. 40. Princ. Philoſ. In hoc experimento erat ſpatium $x = 182$ dig. tempus $t = 25''$: fiebat autem deſcenſus in aqua, cujus denſitas ſi ponatur $= 1$, denſitas globi erit $= \frac{5576}{5291}$, & diameter $= 0,99868$: hinc prodit $l\pi = -1551415 3$. Significat porro β hic idem, quod §. 40, & quia hoc caſu amplitudo vaſis eſt $= \frac{676}{9}$, & area circuli maximi globi $= 0,7833$, invenitur $l\beta = 0,0028563$, nec non $l\left(\frac{2^{1:2}\pi^{1:2}t}{x^{1:2}\beta^{1:2}}\right) = 0,9349519$: ubi obſervandum eſt, logar. temporis in minutis ſecundis expreſſi, augendum eſſe (per §. 42.) logarithmo conſtante $1,2936683$. Subſtituatur jam pro n in æquatione $ln = \frac{2^{1:2}\pi^{1:2}t}{x^{1:2}\beta^{1:2}} \surd l\left(\frac{n}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4n}\right)$ (in qua occurrentes logarithmi inveniuntur dividendo logarithmos tabulares per 4342945) numerus ex unitate & triginta nullionibus conſtans, cujus ergo logar. tabularis eſt $= 30,0000000$ & docebit calculus, membrum poſterius æquationis modo memoratæ adhuc majus eſſe membro priore; n itaque adhuc major eſt dicto enormi numero, atque $\frac{\pi}{\pi - r}$ eſt numerus, qui excedit decem myriades quadrillionum: conſtat ergo, finalem resistentiam globi ipsi ponderi π absque omni sensibili errore æqualem statui posse. Quare per ultimo inventam propositionis æquationem habetur $l\sqrt{2a} = -0,4227842$: cui proxime convenit numerus $0,3777$. Ut hic conferatur cum illo, quem dat Theoria Prop. 8. resumenda est æquatio differentialis ibi inventa: $\pi dx - \zeta\omega dx = \beta d\omega$: & cum hic desideretur valor maximus ipsius ω, qui hic dicitur a, $d\omega$ est ponendum $= 0$, & prodit $a = \frac{\pi}{\zeta}$, atque $\sqrt{2a} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\zeta}} = \frac{\sqrt{2\pi(2m-n)}}{\sqrt{mn}}$, existente $m =$ amplitudini vasis, n vero = areæ circuli maximi globi. Substitutis jam harum literarum valoribus ostendit calculus esse $l\sqrt{2a} = -4231503$, cui convenit numerus $0,3774$. Quæ convenientia inter methodos, ad inveniendam velocitatem maximam, toto cœlo diversas egregie, ni fallor, expositas Theorias confirmat.

SCHOLIUM II.

LXXI. Velocitas prior talis est, quâ globus experimenti, (§. 71.) memorati, tempore unius minuti secundi potest absolvere motu æquabili spatium 7, 428 dig. posterior vero talis, quâ eodem tempore absolvit spatium 7, 422 dig. Qui lentus motus itaque jam habet conjunctam resistentiam maximam, ponderi nempe globi in fluido ad sensus æqualem.

SCHOLIUM III.

LXXII. Qui juxta Newtonianam theoriam computat, reperiet $\sqrt{2a} = 0,3735$, & spatium, quod globus eâ velocitate tempore $1''$ potest absolvere $= 7,345$ dig. secundum illam ergo velocitas maxima nimis parva prodit, estque hæc ad eam, quæ per nostram theoriam reperitur, in ratione excessus amplitudinis vasis supra circulum maximum globi, ad ipsam vasis amplitudinem.

ADDI-

ADDITAMENTUM
AD
SPECIMEN HYDRODYNAMICUM
DE
RESISTENTIA CORPORUM
IN FLUIDIS MOTORUM,
TRANSMISSUM AD PERILLUSTREM ACADEMIAM REGIAM SCIENTIARUM BEROLINENSEM SUB SYMBOLO:
Ardua, quæ pulchra.

Cum ante aliquot dies ideas circa hanc materiam ferè obliteratas revocare ſtuderem, incidit demonſtratio Propoſ. 3. §. 13. ſpeciminis mei; cujus communicationem cum Perill. Academiam non indigne laturam confidam, illam transmittere, ejusque judicio ſubmittere non dubitavi.

Corpori GIH immobili fingo adhærere cylindrum, baſeos GH & longitudinis arbitrariæ; illumque circumdari annulo ſolido CD*cd*, qui tubi quidem aperturam minimam CD perfecte claudat, mobilis tamen exiſtat juxta longitudinem cylindri GK vel HL; illiusque denſitatem æqualem denſitati aquæ, latitudinem vero C*c* infinite parvam.

Moveatur aqua ab AB ad NO & ſit ejus aſcenſus potentialis $= \omega$. Illa cum attingit aperturam minimam CD & annulum quieſcentem offendit, pollebit aſcenſu potentiali $= \frac{m^2\omega}{p^2}$ (ſignificante m amplitudinem tubi, p vero amplitudinem aperturæ minimæ) $= v$: abripietur itaque annulus ab aqua, & movebitur juxta longitudinem cylindri cum corpore immobili conjuncti, acquiretque tempuſculo infinite parvo

parvo asc. potent. eundem, quæ est aquæ contiguæ, nempe v. Ad hunc autem in eo producendum cooperatur vis inertiæ omnis fluidi (nullum enim ejus stratum potest in suo motu perseverare, nisi ille ipse asc. potent. in annulo generetur) & requiritur vis absoluta agens in annulum, quæ etiam est $= v$; proinde tanta quoque erit vis reagens, & liberum aquæ effluxum impediens, atque a locato in apertura annulo corpus perpetietur vim $= nv$, normalem ad basin corporis, & ab NO ad planum CD inefficaciter propagatam (§ 15. spec.). Postquam autem annulus asc. potent. $= v$ jam adeptus est, ille cum aqua contigua, quæ a reactione annuli velocitatis suæ jacturam tantum infinite parvam fecit, hunc semper retinebit, atque eadem vis, jam suo fulcro annulo scilicet reagente destituta, & in corpus immobile derivata, erit ad vim priorem, ut amplitudo tubi ad summam amplitudinis tubi & aperturæ; sive ut $m : m+p$ (§. 13. specim.). Quare annulo dicto asc. potent. jam gaudente, aut quod perinde est, eo penitus remoto corpus sustinet vim $= \frac{mnv}{m+p} = \frac{m^3 n \omega}{p^2(m+p)}$, existente n basi corporis $= m - p$. Q. E. D.

Tribus autem casibus Theoria ab experientia faciet divortium: primus est, quando corpus fluido non est impervium. Secundus, quando illud ad corporis partes anticas condensatur, ad posticas vero rarescit; cujus in specimine jam est facta mentio. Tertius, & qui imprimis mihi notatu dignus videtur, est, quando particulæ fluidi a corpore nonnihil pro truduntur, & per aliquem demum circuitum in spatium inter superficiem corporis & tubi internam devehuntur: hujus enim vis propellentis in Theoria nulla habita est ratio, sed consideratæ sunt particulæ fluidi tum demum, cum ad externam corporis superficiem sese composuerunt, eamque stringunt, suâ inertiâ corporibus resistentiam creare. Quemadmodum enim major debet esse vis venæ aqueæ in planum immobile impingentis & hinc reflexæ, quam est illa quæ in specimine considerata est, & exercetur in corpus absque reflexione, ita etiam diversa est ratio, an priori an posteriori modo fluidum resistentiam corpori moto injiciat. Cessantibus autem his dissensûs inter Theoriam & experientiam causis, non dubito illam pro vera venditare, sive corpora dentur rotunda, sive terminata plano ad partes anticas: prius constat ex observationibus globorum cadentium; posterius verò ex phænomenis effluxus aquarum e vasis in fundo perforatis. Nam quod a foramine fundi reliquum est, ab aqua interna descendente vim aliquam patitur, quæ eadem est cum vi illa, quam sustinet idem fundus, foramine obturato, versus aquam quiescentem eâdem celeritate motus, existente spatio aperto inter tubum & fundum æquali foramini. Illius vero magnitudinem per Theoriam recte definiri liquet per experimenta Bernoulliana §. 64. & 65. specim. adducta, quæ ex notissima Viri eruditione & in consulenda experientia sagacitate utique plenam fidem merentur.

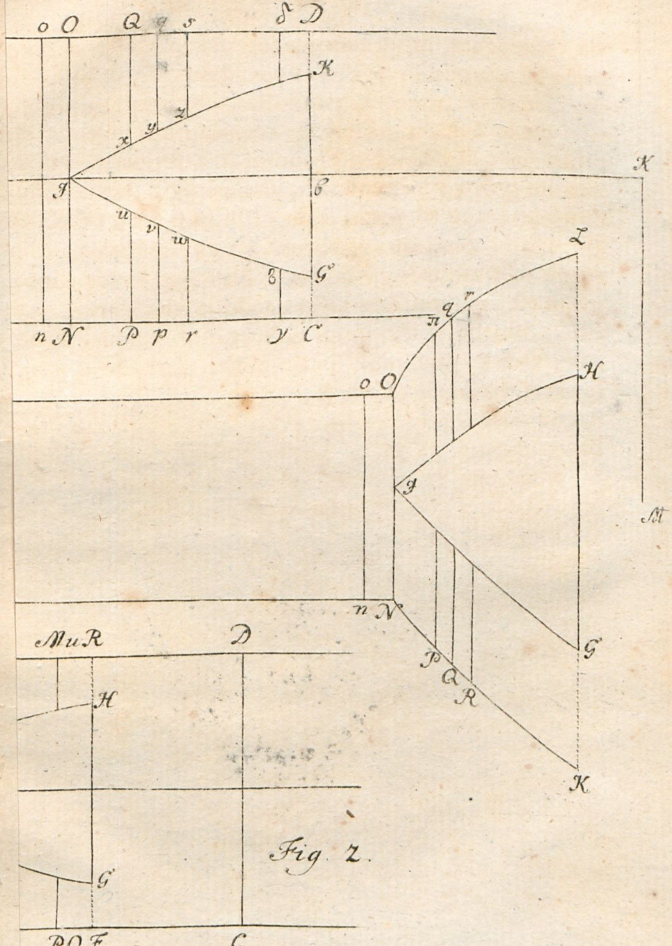
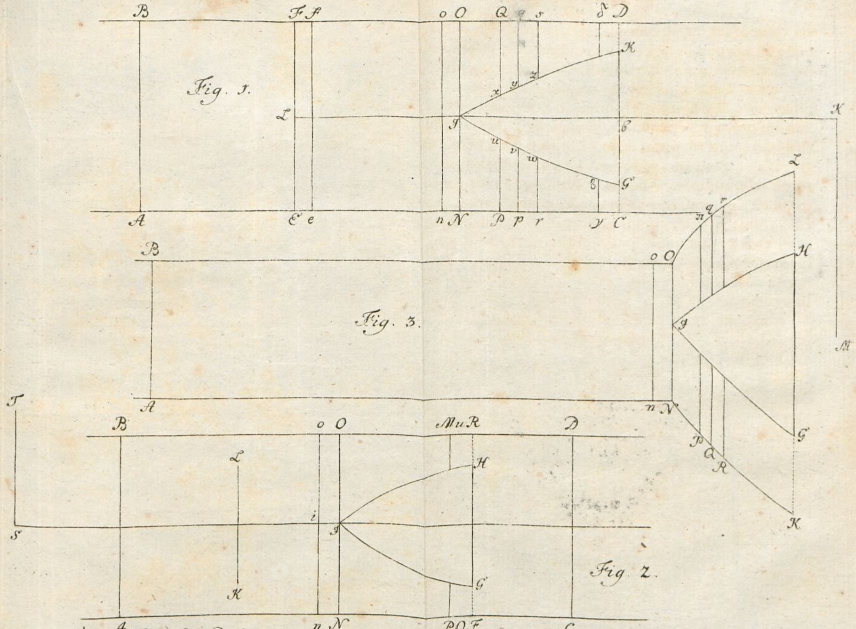


Fig. 2.

F.H. Frisch sc. B.

Tab. I.



Spec. Hydrod. ad finem.

F.H. Frisch sc. B.

4

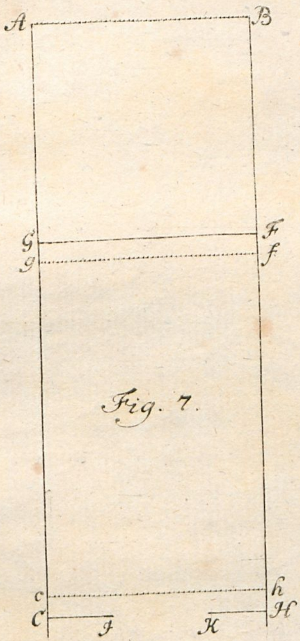
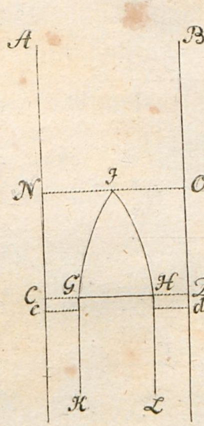


Fig. 7.

Fig.



Tab. II.

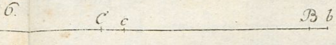


Fig. 6.

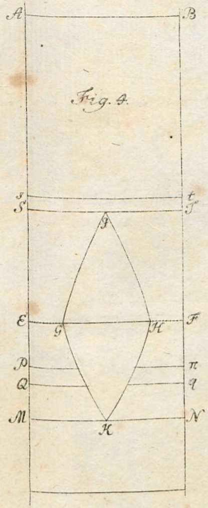


Fig. 4.

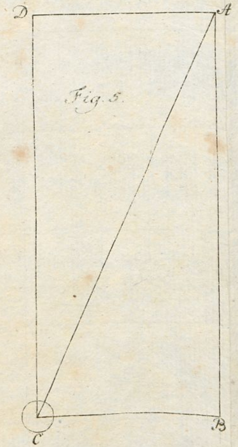


Fig. 5.

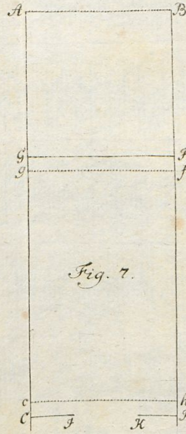


Fig. 7.

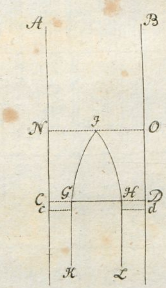


Fig.

Spec. Hydrod. ad finem.

15

DISSERTATION SUR LA RÉSISTANCE DES FLUIDES,

QUI A REMPORTÉ LE PRIX PROPOSÉ

PAR

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES LETTRES DE PRUSSE,

POUR L'ANNEÉ MDCCL,

ADJUGÉ EN MDCCLII.

Gartz
Hn.

A BERLIN
CHEZ HAUDE ET SPENER
Libraires du Roi & de l'Académie.
MDCCLII.

39