



Ausbreitung elastischer Wellen in komplexen dünnwandigen Strukturen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktoringenieur (Dr.-Ing.)

vorgelegt dem

Zentrum für Ingenieurwissenschaften
der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
als organisatorische Grundeinheit für Forschung und Lehre im Range einer Fakultät
(§75 Abs. 1 HSG LSA, §19 Abs. 1 Grundordnung)

von

Markus Michael Kohlhuber

Geboren am 14.07.1982 in Schrobenhausen

Gutachter:

1. Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. Holm Altenbach
2. Prof. Dr.-Ing. Thomas Brandmeier
3. Prof. Dr.-Ing. Christian Krä

Tag der Verteidigung: 20. Juni 2012 in Merseburg

In Erinnerung an Onkel Robert
(★25. Januar 1958; †16. April 2012)

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Angewandte Forschung der Hochschule Ingolstadt. An dieser Stelle möchte ich abseits der wissenschaftlichen Ausarbeitung all den Menschen meinen persönlichen Dank aussprechen, die mich in dieser Zeit unterstützten.

Die Betreuung der Promotion übernahm Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. Holm Altenbach. Er stand mir jederzeit mit wertvollem Rat zur Seite, sodass ich mit seiner Hilfe meinen Weg in den Wirren der Wissenschaft fand. Prof. Dr.-Ing. Thomas Brandmeier gab mir im Rahmen eines Forschungsprojektes (Bayerische Forschungstiftung, AZ-861-09) die Möglichkeit, an den Inhalten dieser Dissertation zu arbeiten. Die beiden oben genannten Professoren erstellten zusammen mit Prof. Dr.-Ing. Christian Krä die Gutachten.

Mein Diplomand und späterer Kollege Michael Luja unterstütze mich stets in hervorragender Weise in der professionellen Implementierung zahlreicher Algorithmen. Bei der Erledigung der täglichen Arbeiten konnte ich mich immer auf die Mithilfe von Paul Spannaus verlassen. Die dadurch gewonnene Zeit sowie sein Rat waren eine große Hilfe für mich. Eine allgemeine Einführung in das Thema Körperschall erfolgte durch Marinus Luegmair. Er stand regelmäßig für fachliche Diskussionen zur Verfügung. Bei mathematischen Fragestellungen erhielt ich von Manuel Appel viele wertvolle Anregungen.

Meine Freunde Steffen, Jan, Franz, Tanja, Stefan, Sabine, Andreas und Janosch zeigten immer Verständnis und sorgten für die notwendige Zerstreuung.

Ganz besonderer Dank gilt Rita und meinen Eltern Rosemarie und Michael. Ihr stetiger Rückhalt und ihre unendliche Geduld waren sehr wichtig für mich.

Markus Kohlhuber, Juli 2012

Inhaltsverzeichnis

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis	8
1. Einleitung	15
1.1. Körperschallmessung zur Detektion von Crashsituationen	15
1.2. Simulation der Körperschallausbreitung	16
1.3. Anforderungen an die Simulationsmethode	18
1.4. Stand der Entwicklung	19
1.5. Ziel und Inhalt der Arbeit	19
2. Struktur- und werkstoffmechanische Grundlagen	21
2.1. Definition Körperschall	22
2.2. Elastizitätstheorie	23
2.2.1. Bezugssysteme, Verschiebungen, Belastungen und Spannungen	23
2.2.2. Verzerrungen	25
2.2.3. Gleichgewichtsbedingungen	26
2.2.4. Konstitutive Gleichungen	26
2.2.5. Arbeitssatz	28
2.3. Wellenausbreitung in Tragwerkselementen	28
2.3.1. Stab	31
2.3.2. Scheibe	32
2.3.3. Balken	34
2.3.3.1. Theorie nach Euler-Bernoulli	36
2.3.3.2. Theorie nach Bresse-Timoshenko	38
2.3.3.3. Theorie nach Levinson	40
2.3.3.4. Abwandlungen der Bresse-Timoshenko-Theorie	41
2.3.3.5. Diskussion	44
2.3.4. Platte	45
2.3.4.1. Schubelastische Platte	45
2.3.4.2. Plattenwellen nach Rayleigh-Lamb	49
2.3.4.3. Diskussion	52
3. Welleneffekte	54
3.1. Dispersion	54
3.2. Reflexion und Transmission	56
3.3. Materialdämpfung	59
3.4. Superpositionsprinzip	61
3.5. Amplitudenabnahme auf der Platte	62
3.6. Beugung	64
3.7. Huygenssches Prinzip	65

4. Eigenschaften des Ausbreitungsbereichs	67
4.1. Dominante Wellenart	68
4.1.1. Theoretische Betrachtung	68
4.1.2. Differenzmessverfahren	70
4.1.3. Dispersionsanalyse	71
4.2. Gültigkeit der mechanischen Modelle	72
4.3. Flächige Ausbreitung	74
4.4. Näherung der Amplitudenabnahme	75
4.5. Reflexion und Transmission an komplexen Übergängen	77
4.5.1. Theoretische Betrachtung	77
4.5.2. Numerische Parameterstudie	79
5. Verfahren zur Analyse der Wellenausbreitung	82
5.1. Finite-Differenzen-Methode	83
5.2. Finite-Elemente-Methode	84
5.2.1. Elementwahl	85
5.2.2. Elementlänge	85
5.2.3. Zeitschritt	86
5.3. Rand-Elemente-Methode	86
5.4. Transmission-Line-Methode	87
5.5. Äquivalente-Quellen-Methode	88
5.6. Vergleich	90
6. Modifizierte Strahlen- und Wellenverfahren	91
6.1. Strahlenverfahren	91
6.1.1. Konzept	92
6.1.2. Berechnung der Strahlverfolgung	95
6.1.3. Abbruchbedingungen	97
6.1.3.1. Laufzeit	97
6.1.3.2. Amplitudenabnahme	97
6.1.3.3. Materialdämpfung	97
6.1.3.4. Reflexions- und Transmissionsstellen	98
6.1.4. Berechnung des Zielsignals	98
6.1.4.1. Mechanismen der Ausbreitung	99
6.1.4.2. Mechanismen der Ränder	99
6.1.4.3. Zusammenfassung der Mechanismen	100
6.2. Pfadverfahren	100
6.2.1. Netzerstellung	101
6.2.2. Pfadverbindungen	101
6.2.3. Suchalgorithmus	102
6.2.4. Korrektur	103
6.2.5. Beugung	104
6.3. Wellenverfahren	104
6.3.1. Eindimensionale Beschreibung der Biegewelle	105
6.3.1.1. Wellenansatz	105
6.3.1.2. Feldgrößen	105
6.3.1.3. Balkenelement	106

6.3.2.	Überführung in den Zeitbereich	107
6.3.3.	Koppel-und Randbedingungen	108
6.3.4.	Lösungsverfahren	109
6.3.5.	Erweiterung auf zweidimensionale Strukturen	111
6.3.5.1.	Amplitudenabnahme	112
6.3.5.2.	Beugung	113
6.3.5.3.	Optimierung	114
6.4.	Vergleich	115
7.	Simulation räumlich dünnwandiger Strukturen	120
7.1.	Erweiterung	120
7.2.	Analyse	121
7.3.	Optimierung	125
7.4.	Simulationsprozess	127
7.5.	Anwendung	128
8.	Schlussbetrachtung	133
8.1.	Zusammenfassung	133
8.2.	Weitere Einsatzmöglichkeiten	136
8.3.	Ausblick	137
A.	Herleitungen zur Scheibentheorie	139
A.1.	Wellengleichung für die Scheibe	139
A.2.	Wellenzahl und Phasengeschwindigkeit für die Scheibe	143
B.	Herleitungen zu den Balkentheorien	146
B.1.	Massenträgheitsmoment für lineare Verschiebungsansätze	146
B.2.	Levinson-Theorie	147
B.2.1.	Formfunktion	147
B.2.2.	Biegemoment	148
B.2.3.	Querkraft	149
B.2.4.	Massenträgheitsmoment für Verschiebungsansätze höherer Ordnung	149
B.3.	Schub-Lösung	151
B.3.1.	Wellengleichung	151
B.3.2.	Vergleich der Wellenzahlen von Bresse-Timoshenko- und Schub-Lösung	152
C.	Herleitung der Frequenzgleichung nach Rayleigh-Lamb	155
D.	Inverse Fouriertransformation	157
E.	Beispiel zum Wellenverfahren	158
F.	Einfluss der Zielposition beim Strahlenverfahren	163
	Abbildungsverzeichnis	165
	Tabellenverzeichnis	168
	Literaturverzeichnis	169

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

Formelzeichen (lateinisch)

A	Fläche
$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$	Konstanten der Rayleigh-Lamb-Theorie
a	Körperschallbeschleunigung
\mathbf{a}	Lösungsvariable für den Wellenansatz
B	Biegesteifigkeit
$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$	Konstanten der Rayleigh-Lamb-Theorie
b	Breite
C_1, C_2	Konstanten für die Amplitudenabnahme
C	Verhältniszahl für den Vergleich der Balkentheorien
c	Phasengeschwindigkeit
\mathbf{c}	Steifigkeitsmatrix der Finiten-Elemente-Methode
D	Dehnsteifigkeit der Scheibe
D	Verhältniszahl für den Vergleich der Balkentheorien
\mathbf{d}	Dämpfungsmatrix der Finiten-Elemente-Methode
E	Elastizitätsmodul
E'	Realteil des komplexen Elastizitätsmoduls
E''	Imaginärteil des komplexen Elastizitätsmoduls
\mathcal{E}	Fehler
e	Komponenten des Einheitsvektors
e	Euler-Zahl
F	Kraft
\mathbf{F}	Kraftvektor
\mathbf{f}	Vektor der Oberflächenspannung
f	Frequenz
G	Schubmodul
\mathcal{G}	Faltungssumme der Äquivalenten-Quellen-Methode
g	g -Funktion der Äquivalenten-Quellen-Methode
\mathbf{g}	Geometrische Gerade
H	Übertragungsfunktion
$\mathcal{H}_0^{(2)}$	Hankelfunktion 0. Ordnung und 2. Art
h	Höhe

Formelzeichen (lateinisch)

I	Flächenmoment 2. Ordnung
i	Elektrischer Strom
j	Massenträgheitsmoment
j	Imaginäre Einheit
K	Biegesteifigkeit der Platte
\mathcal{K}	Richtungsfaktor
k	Wellenzahl
\mathbf{k}	Wellenvektor
L	Wellenlänge
l	Länge
M	Biegemoment
\mathbf{M}	Matrix der Äquivalenten-Quellen-Methode
m	Masse
\mathbf{m}	Massenmatrix der Finiten-Elemente-Methode
N	Normalkraft
\mathcal{N}	Anzahl der Abtastwerte
n	Anzahl
O	Oberfläche
\mathcal{O}	\mathcal{O} -Notation
P	Geometrischer Punkt
\mathcal{P}	Abkürzung der Rayleigh-Lamb-Theorie
\mathfrak{P}	Leistung
\mathbf{p}	Vektor der Körperkräfte
Q	Querkraft
\mathcal{Q}	Abkürzung der Rayleigh-Lamb-Theorie
q	Äquivalente Quelle
R	Reflexionsfaktor
\mathbf{R}	Vektor der Äquivalenten-Quellen-Methode
\mathcal{R}	Biegeradius
\mathfrak{R}	Reflexionsgrad
r	Abstand von der Anregung bzw. Länge des Strahls
\mathbf{s}	Streckenvektor
T	Transmissionsfaktor
\mathfrak{T}	Transmissionsgrad
t	Zeit

Formelzeichen (griechisch)

\mathbf{t}	Spannungsvektor
U	Elektrische Spannung
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor
V	Volumen
\mathbf{V}	Vektor der Äquivalenten-Quellen-Methode
v	Körperschallschwingschnelle
W	Arbeit
w	Verschiebung in z -Richtung
X	Signal
x	Koordinate
\mathbf{x}	Koordinatenvektor
y	Koordinate
Z	Impedanz
z	Koordinate

Formelzeichen (griechisch)

α	Biegewinkel
β	Verhältniszahl zur Berechnung von Reflexions- und Transmissionsfaktoren
Γ	Duplizierende Kanten beim Strahlenverfahren
γ	Gleitung
δ	Kronecker-Delta
ϵ	Verzerrungstensor
ϵ	Dehnung
ζ	Verhältniszahl zur Vernachlässigung der Amplitude beim Strahlenverfahren
η	Verlustfaktor
Θ	Lösungsfunktion der Rayleigh-Lamb-Theorie
θ	Komponente des Vektorpotentials der Rayleigh-Lamb-Theorie
$\boldsymbol{\theta}$	Vektorpotential der Rayleigh-Lamb-Theorie
ϑ	Ablenkungswinkel der Welle

κ	Schubkorrekturfaktor
\varkappa	Tangentensteigung zur Näherung der Amplitudenabnahme
Λ	Winkeldiskretisierung beim Strahlenverfahren
λ	Erste Lamé-Konstante
μ	Zweite Lamé-Konstante
ν	Querkontraktionszahl
Ξ	Akustischer Schalldruck
ξ	Phase
Π	Ausbreitungsfunktion
π	Kreiszahl
ρ	Dichte
σ	Normalspannung
$\boldsymbol{\sigma}$	Spannungstensor
ς	Variable zur Schnittpunktberechnung
τ	Schubspannung
Υ	Relevante Nachbarknoten beim Pfadverfahren
Φ	Lösungsfunktion der Rayleigh-Lamb-Theorie
ϕ	Skalarpotential der Rayleigh-Lamb-Theorie
φ	Geometrischer Winkel
χ	Formfunktion der Levinson-Theorie
ψ	Verdrehung der Querschnitte
Ω	Winkelgeschwindigkeit der Verdrehung
ω	Kreisfrequenz

Indizes

+	Vorlaufend
-	Rücklaufend
0	Ausgangswert
12	Zwei Lösungen sind möglich
η	Materialdämpfung
κ	Schubkorrektur

Indizes

A	Ausgang
abs	Absolut
AM	Ausbreitungsmechanismus
app	Approximiert
au	Äußere
B	Biegewelle (B-Welle)
Ba	Balken
BB	Einfallende Biegewelle zu reflektierter bzw. transmittierter Biegewelle
Bsp	Beispiel
BT	Balkentheorie nach Bresse-Timoshenko
d	Trägheitskraft oder -moment nach dem Prinzip von d'Alembert
E	Eingang
e	Einfallende Welle
EB	Balkentheorie nach Euler-Bernoulli
EB+j	Balkentheorie nach Euler-Bernoulli mit zusätzlicher Berücksichtigung der Rotationsträgheit
EB+ τ	Balkentheorie nach Euler-Bernoulli mit zusätzlicher Berücksichtigung der Schubspannungen
FEM	Finiten-Elemente-Methode
G	Wellengruppe oder -paket
Geo	Geometrie
Grenz	Festgelegte Grenze
i, j, k, l, m, n, o	Zählindizes
in	Innere
j	Nahfeld
K	Plattentheorie bzw. Richtungsfaktor nach Kirchhoff
L	Longitudinalwelle der Rayleigh-Lamb-Theorie
L	Longitudinalwelle (L-Welle)
Lot	Lotgerade oder -punkt
M	Plattentheorie nach Mindlin
max	Maximal
min	Minimal
par	Parallel
Π	Amplitudenabnahme

Pl	Platte
Q	Quelle
q	Äquivalente Quellen
R	Oberflächenwelle nach Rayleigh
r	Reflektierte Welle
rays	Strahlen
rel	Relativ
RL	Theorie der Plattenwellen nach Rayleigh-Lamb
RM	Randmechanismus
rt	Reflexion und Transmission
Sch	Scheibe
seq	Sequenziell
SP	Schnittpunkt
SR	Abtastfrequenz (Sample-Rate)
St	Stab
subrays	Teilstrahlen
T	Transversalwelle der Rayleigh-Lamb-Theorie
T	Transversalwelle (T-Welle)
t	Zeit
t	Transmittierte Welle
Tan	Näherungslösung durch angelegte Tangente
Vgl	Vergleich
x, y, z	Koordinatenindizes
Z	Ziel

Sonderzeichen und Operatoren

d	Kennzeichnet eine infinitesimal kleine Größe
Δ	Kennzeichnet ein finites Intervall
∂/∂	Partielle Ableitung
$\mathcal{F}\{\dots\}$	Fouriertransformierte von ...
$f(\dots)$	Funktion von ...
$\text{Im}\{\dots\}$	Imaginärteil der komplexen Zahl ...
$\text{Re}\{\dots\}$	Realteil der komplexen Zahl ...
Δ	Laplaceoperator
∇	Nablaoperator

Abkürzungen

1-D	Eindimensional
2-D	Zweidimensional
3-D	Dreidimensional
B-Welle	Biegewelle
BEM	Rand-Elemente-Methode
BQT	Biegequerträger
BS	B-Säule
CAD	Computer-Aided-Design
CB	Crashbox
ECU	Airbag-Steuergerät
ESM	Äquivalente-Quellen-Methode
FDM	Finite-Differenzen-Methode
FEM	Finite-Elemente-Methode
HLT	Hecklängsträger
HQT	Heckquerträger
ID	Identifikator
L-Welle	Longitudinalwelle
LT	Längsträger
meas	Messung
MP	Messposition
RB	Rückbank
RTTF	Geforderte Zündzeit
SEA	Statistische-Energie-Analyse
SEM	Spektrale-Elemente-Methode
sim	Simulation
SPW	Spritzwand
SQT	Sitzquerträger
SW	Schweller
T-Welle	Transversalwelle
TL	Transmission-Line
TLM	Transmission-Line-Methode
TU	Tunnel
UB	Unterboden

1. Einleitung

Im Jahr 2010 kam es auf deutschen Straßen im Durchschnitt alle 13 Sekunden zu einem Verkehrsunfall [145]. Nahezu im Minutentakt wurde dabei ein/e Verkehrsteilnehmer/in verletzt und alle zwei Stunden musste ein Todesfall beklagt werden [145]. Das Statistische Bundesamt fordert daher dazu auf, dass "[...]die Bemühungen, den Verkehr auf deutschen Straßen noch sicherer zu machen, nicht nachlassen[...]" [145] sollten.

Die ursprünglich aus Schweden stammende Sicherheitsphilosophie „Vision Zero“, die Vision von Null Verkehrstoten und Schwerstverletzten, bildet die Basis für eine Vielzahl an internationalen Verkehrssicherheitsprogrammen und -maßnahmen¹ [76, 146]. Unter der Prämisse, dass Menschen Fehler machen, wird nicht der einzelne Verkehrsteilnehmer sondern das gesamte System Verkehr zum zentralen Objekt der Sicherheitsarbeit [76].

Weiterhin ist die Sicherheit der Fahrzeuge ein entscheidendes Verkaufsargument. Einer Umfrage des ADAC² zufolge, halten 95 % der Befragten den Airbag im Fahrzeug für wichtig [144]. Dicht gefolgt auf Platz zwei, erachten 94 % der Teilnehmer den Sicherheitsgurt als sinnvoll [144]. Diese beiden Maßnahmen dienen dazu, im Falle einer Kollision die Folgen des Unfalls für die Insassen zu vermindern. Aus diesem Grund werden sie den passiven Sicherheitssystemen zugeordnet [93].

Die Ansteuerung der Sicherheitssysteme darf nur bei richtiger Erkennung der jeweiligen Crashsituation geschehen. Im Gegensatz dazu ist die Aktivierung bei unkritischen Situationen, die kein Gefährdungspotential für die Insassen aufweisen, zu unterlassen. Die Entscheidung zur Zündung von Airbag und Gurtstraffer muss sehr schnell durch das Airbag-Steuergerät (ECU)³ erfolgen. Die Zeitspanne von Kollisionsbeginn bis zur Zündentscheidung wird als Geforderte Zündzeit (RTTF)⁴ bezeichnet. Sie ist gegeben durch die notwendige Zeitdauer zur vollständigen Entfaltung des Airbags und der dynamischen Insassenverlagerung im Verhältnis zum verfügbaren Überlebensraum [33]. Je nach Crashlastfall und Fahrzeugtyp beträgt die RTTF für Frontalunfälle etwa 20 bis 30 ms [33, 175] und für seitliche Kollisionen etwa 4 bis 15 ms [33, 89]. Informationen zur Crashsituation erhält die ECU über Sensoren, die im Steuergerät verbaut oder in externen Gehäusen in der Fahrzeugstruktur verteilt sind [89]. Letztere werden auch als Satelliten bezeichnet. Für die Frontalcrashererkennung werden derzeit Beschleunigungssensoren eingesetzt. Die Detektion von seitlichen Unfällen erfolgt in gleicher Weise und kann durch Messung von Druckänderungen der Luftmenge im Inneren der Türe, die sich durch Deformation der Struktur ergeben, unterstützt [89] werden.

1.1. Körperschallmessung zur Detektion von Crashsituationen

Während der Kollision des Fahrzeugs mit einem Hindernis wird durch eine Vielzahl verschiedener Effekte die Struktur des Fahrzeugs in der Deformationszone zu hochfrequenten

¹Die Sicherheitsphilosophie „Vision Zero“ wird u. a. durch den Deutschen Verkehrssicherheitsrat e. V., den Verkehrsclub Deutschland e. V. und das Schwedische Zentralamt für Straßenwesen gefördert.

²Allgemeiner Deutscher Automobil-Club (ADAC) e. V.

³Electronic Control Unit

⁴Required Time To Fire

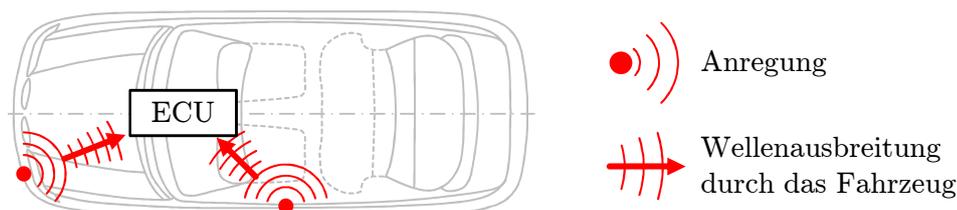


Abbildung 1.1.: Anregung und Ausbreitung der Körperschallschwingung in der Fahrzeugkarosserie für Frontal- und Seitencrash

Schwingungen angeregt [175, 176]. Diese Schwingungen werden als Körperschall bezeichnet und breiten sich von ihrer Anregerstelle sehr schnell in der gesamten Fahrzeugkarosse aus (s. Abb. 1.1) [21, 116, 118]. Die Messung dieser Körperschallschwingungen liefert ergänzend zur Beschleunigungs- und Druckmessung weitere Informationen zur Erkennung von Frontal- [21, 102, 116, 118, 176] und Seitencrashlastfällen [89, 177]. Obwohl die physikalische Einheit bei der Verzögerungs- und Körperschallmessung immer der einer Beschleunigung¹ entspricht, müssen beide Prinzipien in ihrer Interpretation im Kontext der Erkennung von Fahrzeugkollisionen unterschieden werden. Die Verzögerungsmessung erfolgt im niederfrequenten Bereich bis max. 400 Hz [21] und repräsentiert die Geschwindigkeitsabnahme einzelner Bauteile bzw. der gesamten Karosse. Im Gegensatz dazu beschreibt die Körperschallmessung die hochfrequente Schwingung bzw. Vibration der Struktur mit einer Bandbreite von bis zu 20 kHz [21, 102, 116] an einem einzelnen Punkt. Der Körperschallaufnehmer befindet sich im Gehäuse der ECU, das in zentraler Position im Fahrzeug verbaut wird [21, 89]. Nachdem die Anregung an der Front- bzw. Seitenstruktur geschieht, die Messung des Körperschalls aber in der Mitte des Fahrzeugs stattfindet, ist die Karosserie als Übertragungsstrecke ein wesentlicher Teil des Messsystems.

Die interne Kommunikation und Auswertung von Sensorsignalen in der ECU erfolgt bei einer Frequenz von 4 kHz [21, 116]. Die hochfrequenten Schwingungen können dadurch nicht direkt erfasst werden. Um die Körperschallinformationen dennoch der ECU zur Verfügung zu stellen, wird eine Vorverarbeitung zur Datenreduktion direkt im Sensor [21] vorgenommen. Dazu wird in einem ersten Schritt das Signal durch eine Bandpassfilterung auf den relevanten Bereich (6 bis 20 kHz [102]) beschränkt [116]. Anschließend wird eine Betragsbildung und im letzten Schritt eine Tiefpassfilterung [116] durchgeführt. Das erhaltene Signal wird als Körperschalleinhüllende bezeichnet und kann direkt von der ECU abgetastet werden.

Dieses System, das sich bereits seit 2008 in Serie befindet [172], kann durch die Erzeugung deterministischer Körperschallsignale in der Fahrzeugfront verbessert werden [37, 172]. Dazu bewegen sich zwei Bauteile eines Schiebesitzes am Typschadenelement in der ersten Phase der Kollision relativ zueinander und regen ein mechanisches Element an, das seinerseits die Schwingungen als Körperschall in die Fahrzeugstruktur emittiert [37, 172]. Damit ist auch eine Erweiterung des Systems möglich, da mit den Signalen Informationen zur relativen Crashgeschwindigkeit übertragen werden können [37, 172]. Jedoch nutzt auch dieses Prinzip die Fahrzeugkarosse als Übertragungsmedium für die Körperschallsignale.

1.2. Simulation der Körperschallausbreitung

Der moderne Entwicklungsprozess in der Automobilindustrie zeichnet sich durch einen zunehmenden Virtualisierungsgrad aus [135]. Es wird im verstärkten Maße versucht, möglichst

¹Die Beschleunigung wird in m/s^2 oder in g angegeben. Ein g entspricht $9,81 \text{ m/s}^2$ [38].

alle Eigenschaften des Fahrzeugs virtuell zu erfassen und damit Aussagen über das Fahrzeugverhalten zu treffen, ohne auf reale Prototypen zurückgreifen zu müssen. Dies schließt auch sämtliche Teilsysteme, wie bspw. die Crasherkenkung mithilfe der Körperschallmessung, ein. Die Virtualisierung bietet die Möglichkeit, sämtliche Tätigkeiten, die zur Entwicklung des Sicherheitssystems notwendig sind, bereits in einem sehr frühen Stadium des Entwicklungsprozesses durchführen zu können. Die optimale Sensorposition kann z. B. durch Variationsuntersuchungen gefunden und bei der Verteilung des verfügbaren Bauraums berücksichtigt werden. Weiterhin ist es möglich, die Signalverarbeitung parallel zur Fahrzeugentwicklung zu testen, ohne auf Messdaten realer Prototypen angewiesen zu sein [172]. Dadurch ergibt sich ein Zeit- und schließlich auch ein Wettbewerbsvorteil.

Die Simulation der Körperschallausbreitung für die gesamte Fahrzeugstruktur ist mit herkömmlichen Verfahren bisher noch nicht gelungen. Die Eigenschaften des Ausbreitungsbereiches werden demnach noch messtechnisch erfasst [118]. Wie [116, 118] zu entnehmen ist und wie in Kapitel 5 ergänzend dargestellt wird, ist es aufgrund des hohen Frequenzbereichs von bis zu 20 kHz mit vertretbarem Aufwand unter Verwendung gegenwärtiger Simulationsmethoden nicht möglich, die Ausbreitung des Körperschalls zu bestimmen. Aus diesem Grund sind alternative Lösungsansätze notwendig.

Aus den Erkenntnissen vorausgegangener Forschungsprojekte stellte sich ein zweigeteilter Ansatz zur Simulation des Körperschallsignals als sinnvoll heraus [114, 116, 118, 175, 176]. Die Fahrzeugstruktur wird dazu in eine Körperschallentstehungs- sowie eine Körperschallausbreitungszone unterteilt. Diese Aufteilung erfolgt lediglich in der ersten Phase der Kollision vom ersten Kontakt bis zum Erreichen der RTTF. Die in dieser Zeitspanne deformierte Struktur des Fahrzeugvorderwagens ist exemplarisch in Abb. 1.2 dargestellt. Die Entstehungszone

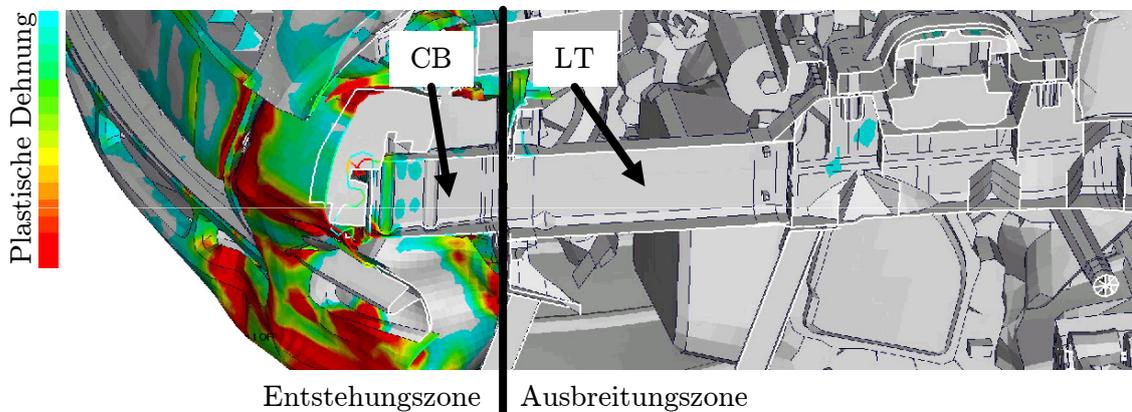


Abbildung 1.2.: Unterteilung der Fahrzeugkarosserie während der Frontalkollision in eine Zone der Körperschallentstehung und eine Zone der Körperschallausbreitung [114, 116] (Die Teilung erfolgt zwischen der Crashbox (CB) und dem Längsträger (LT))

ist im Wesentlichen durch große Deformationen gekennzeichnet, die zu einem plastischen Materialverhalten führen [116, 176]. Eine detaillierte Analyse der Entstehungsmechanismen ist [176] zu entnehmen. Diese Zone nimmt nur ein kleines räumliches Gebiet der Fahrzeugstruktur ein. Das dort in die Karosserie emittierte Signal kann mithilfe der nichtlinearen, transienten Finite-Elemente-Methode (FEM) numerisch ermittelt werden [176]. Im Gegensatz dazu, ist die restliche Struktur des Fahrzeugs als Ausbreitungszone gegeben. Aufgrund des elastischen Materialverhaltens und der vernachlässigbar kleinen Deformationen kann sie bis zur RTTF als linearer Ausbreitungsbereich angenommen werden [116].

1.3. Anforderungen an die Simulationsmethode

Für die Auswahl bzw. Entwicklung eines geeigneten Simulationsverfahrens ist es notwendig, die Anforderungen an die Methode zu definieren. Diese sind durch die Anwendung, die Simulation von Körperschallsignalen in Fahrzeugstrukturen, gegeben:

- Die Simulation muss das transiente Zeitverhalten an der Messposition abbilden.
- Die maximale Simulationsdauer ist durch die geforderte Zündzeit RTTF vorgegeben.
- Die Simulation der Wellenfortpflanzung erfolgt im linearen Ausbreitungsbereich der Fahrzeugkarosse.
- Die Ausbreitungspfade des Körperschalls durch die Struktur sollen nicht durch den Anwender vorgegeben werden.

Weiterhin ergeben sich spezielle Anforderungen durch den eingesetzten Sensor und die Signalverarbeitungskette:

- Die Simulation soll direkt die hochfrequente Schwingung der Struktur bestimmen.
- Die Strukturschwingung ist nicht für die gesamte Karosserie zu ermitteln, sondern nur für eine ausgewählte Messposition.
- Die Schwingung ist für den relevanten Frequenzbereich von 5 bis 20 kHz zu berechnen.
- Die Bewertung der Ergebnisse erfolgt aus Sicht des Steuergerätes. Folglich werden dazu die Einhüllenden aus der Messung und Simulation miteinander verglichen.
- Die Genauigkeit der Ergebnisse soll im Rahmen der üblichen Streuung entsprechender Crashtests liegen [116].

Schließlich ergeben sich aus dem Entwicklungsprozess und den verfügbaren Ressourcen zusätzlich nachfolgende Anforderungen:

- Die Simulation muss rein auf Basis virtueller Daten und ggf. durch Erkenntnisse aus vorangegangenen Untersuchungen erfolgen können. Sie darf nicht auf die Verfügbarkeit realer Prototypen angewiesen sein [116]. Für die Berechnung wird in dieser Arbeit ein Konzept-Modell mithilfe von Computer-Aided-Design (CAD) erstellt, das die notwendigen Geometrie- und Materialparameter enthält.
- Der Aufwand für die Modellerstellung und Berechnung soll maximal den derzeit üblichen FEM-Simulationen entsprechen.
- Die Berechnung soll auf handelsüblichen Workstations¹ durchführbar sein.
- Durch Variation von Parametern soll eine Optimierung, z. B. eine Anpassung der Struktur oder die Festlegung der Messposition, möglich sein [116].

¹Als handelsübliche Workstation kann im Kontext dieser Arbeit bspw. ein DELL[®] PRECISION[™]T3500 System mit einem Intel[®] Xeon[®] W3520 (2,67 GHz) Prozessor, 6,0 GB Arbeitsspeicher und einem Microsoft[®] Windows[®] 7 Enterprise 64 Bit Betriebssystem verstanden werden.

1.4. Stand der Entwicklung

Neben der Empfehlung, die Fahrzeugstruktur in eine Entstehungs- und Ausbreitungszone zu unterteilen, sind aus vorangegangenen Untersuchungen weitere Erkenntnisse entstanden, die nachfolgend kurz skizziert werden. Mit Verweis auf [116] ist zur Bestimmung der Körperschallausbreitung in Fahrzeugstrukturen als bereits bekannt anzusehen:

1. Die Beschreibung der Ausbreitung von Longitudinalwelle (L-Welle), Transversalwelle (T-Welle) und Biegewelle (B-Welle). Letztere Wellenart wird für einen Balken nach der Euler-Bernoulli-Theorie modelliert.
2. Analytische Beschreibung und praktische Bewertung der Spannungsabhängigkeit auf die Ausbreitung der B-Welle. Dieser Effekt ist nach [116] für die Simulation von Sensorsignalen während eines Crashvorgangs nicht relevant.
3. Identifizierung der B-Welle als dominante Wellenart in Fahrzeugstrukturen im gegebenen Frequenzbereich (Beweisführung mithilfe der Wellenimpedanz) [116].
4. Analyse der Verfahren FEM, Statistische-Energie-Analyse (SEA), Spektrale-Elemente-Methode (SEM) und Transmission-Line-Methode (TLM) bezüglich ihrer Anwendbarkeit zur Simulation der Körperschallausbreitung.
5. Erweiterung der TLM auf die B-Welle für die Anwendung im Zeitbereich.

Auf die Aspekte aus dieser Aufzählung wird, mit Ausnahme der Spannungsabhängigkeit, auch in dieser Arbeit eingegangen. Sie werden dazu vielfach neu bewertet und erfahren eine Erweiterung. Im Rahmen gemeinsamer Forschungsaktivitäten erfolgte die Anpassung der TLM für ebene Bauteile in Form eines Strahlenverfahrens [117].

1.5. Ziel und Inhalt der Arbeit

Aufbauend auf den bisherigen Entwicklungsstand, ist das Ziel dieser Arbeit, neue Lösungsansätze zur Simulation der Körperschallsignale in Fahrzeugstrukturen zu erarbeiten und umzusetzen. Neben den definierten Anforderungen aus Abschnitt 1.3 liegt der Fokus vor allem auf einer effizienten Berechnung der hochfrequenten und zugleich transienten Wellen.

Zu Beginn der Arbeit werden in Kapitel 2 die grundlegenden Körperschalleigenschaften definiert. Anschließend erfolgt die Darstellung relevanter Auszüge aus der Elastizitätstheorie, um damit entsprechende Modelle für die Tragwerkselemente Stab, Scheibe, Balken und Platte ableiten zu können. Die aus der Literatur bekannten Theorien, im Speziellen die Balkentheorien nach Euler-Bernoulli, Bresse-Timoshenko und Levinson, die Plattentheorien nach Kirchhoff und Mindlin sowie der Potentialansatz zur Beschreibung von Plattenwellen nach Rayleigh-Lamb, werden zusammengefasst und ergänzt.

Aufgrund der Tatsache, dass es sich bei der Ausbreitung von Körperschall um eine fortschreitende Welle handelt, werden in Kapitel 3 ihre typischen Eigenschaften beschrieben. Dies ist notwendig, um in den Simulationsverfahren die entsprechenden Effekte implementieren zu können.

In Kapitel 4 werden die speziellen Eigenschaften der Fahrzeugstruktur als Ausbreitungsbereich untersucht. Die B-Welle wird als dominante Wellenart mithilfe der Rayleigh-Lamb-Theorie sowie experimentell durch eine Differenzmessung und Dispersionsanalyse bestätigt. Weiterhin werden die Fehler der Tragwerksmodellierungen verglichen und der Einfluss der flächigen Ausbreitung

diskutiert. Die Ermittlung von Reflexions- und Transmissionsfaktoren abgerundeter Bauteile auf Basis unterschiedlicher Methoden wird abschließend durchgeführt.

Bekannte Simulationsverfahren, die prinzipiell in der Lage sind, eine transiente Wellenausbreitung zu beschreiben, werden in Kapitel 5 betrachtet. Die bereits in [116] behandelten Verfahren (Abschnitt 1.4, Punkt 4) werden um die Finite-Differenzen-Methode (FDM), Rand-Elemente-Methode (BEM) und Äquivalente-Quellen-Methode (ESM) ergänzt.

Auf Grundlage der TLM und ESM werden in Kapitel 6 drei Simulationsverfahren zur Bestimmung der transienten Ausbreitung von B-Wellen grundlegend dargestellt. Zunächst wird das Strahlenverfahren detailliert beschrieben. Der hohe Aufwand zur Bestimmung der Strahlen soll mithilfe des Pfadverfahrens umgangen werden. Anschließend wird das Wellenverfahren als eine Methode entwickelt, die es u. a. erlaubt, an einer Vielzahl von Punkten die Schwingung zu bestimmen. Nach einem umfassenden Vergleich der Verfahren untereinander, wird die zielgerichtetste Methode zur Simulation komplexer dünnwandiger Strukturen gewählt.

Diese Lösung wird in Kapitel 7 auf reale Fahrzeugstrukturen angepasst, die als räumlich dünnwandige Struktur aufgefasst werden können. Nach einer umfassenden Analyse des Verfahrens an einer einfachen dreidimensionalen Struktur wird es auf eine reale Fahrzeugkarosserie angewendet. Dazu werden im Vorfeld Optimierungsmöglichkeiten aufgezeigt, ein Prozess zur Durchführung der Simulation festgelegt und schließlich das berechnete Signal mit Daten aus einer realen Messung verglichen.

Die Schlussbetrachtung in Kapitel 8 fasst die gewonnenen Erkenntnisse zusammen und gibt einen Ausblick auf die weiteren Entwicklungs- und Einsatzmöglichkeiten.

Umfassende Herleitungen zu den Berechnungen sowie weiterführende Grafiken sind den Anhangsteilen A bis F zu entnehmen.

2. Struktur- und werkstoffmechanische Grundlagen

Im ersten Teil dieses Kapitels erfolgt die Definition des Begriffs „Körperschall“. Anschließend wird auf die grundlegende Betrachtung der Körperschallwelle hinsichtlich ihrer Bewegungsgrößen, Ausbreitungsgeschwindigkeit und Eingangsimpedanz eingegangen.

Der folgende zweite Teil dieses Kapitels enthält eine grundlegende Einführung in die Elastizitätstheorie. Nach der Definition geeigneter Bezugssysteme können die Verschiebungen, die Belastung sowie die Beanspruchung des Körpers beschrieben werden. Die Deformation eines elastischen Kontinuums wird mithilfe von Verzerrungen erfasst. Zusätzlich stellt sich im statischen wie auch im dynamischen Fall für die im Körper wirkenden Spannungen ein Gleichgewicht ein. Die Verzerrungen werden mit den Spannungen über die konstitutiven Gleichungen verknüpft. Im Anschluss wird der für Energiebetrachtungen wichtige Arbeitssatz erläutert.

Der dritte Abschnitt behandelt die freie, ungestörte Wellenausbreitung für ein- und zweidimensionale Tragwerkelemente. Dazu werden für die Elemente kinematische Hypothesen festgelegt, aus denen sich unter Verwendung der Elastizitätstheorie Zusammenhänge ergeben, die das dynamische Verhalten beschreiben. Neben der allgemeinen Beschreibung longitudinaler Schwingungen in einem Stab wird über die allgemeinen Bedingungen des ebenen Spannungszustandes in einer Scheibe eine Beziehung ermittelt, aus der sowohl die Longitudinalwelle (L-Welle) als auch die Transversalwelle (T-Welle) abgeleitet werden. Die Darstellung der Wellenausbreitung auf einem Balken erfolgt mithilfe der Theorien nach Euler-Bernoulli, Bresse-Timoshenko sowie Levinson. Abschließend wird das Tragwerkelement Platte beschrieben. Die Ableitung erfolgt zum einen anhand des schubelastischen Plattenmodells nach Mindlin, aus der die Beziehungen der schubstarren Platte nach Kirchhoff gefolgert werden können. Zum anderen wird auf die Theorie der Plattenwellen nach Rayleigh-Lamb, ein Potentialansatz, eingegangen.

Die Darstellung der mathematischen Zusammenhänge orientiert sich an der Nomenklatur aktueller Literatur. Allerdings besitzen manche der hier verwendeten Symbole in den Fachbeiträgen unterschiedliche Bedeutungen. Aus diesem Grund soll zu Beginn eine Darstellung aller eingeführten Schreibweisen erfolgen:

- Skalare, reelle Zahlen werden in kursiver Schrift angegeben: a
- Skalare, komplexe Zahlen werden kursiv und unterstrichen dargestellt: \underline{z}
- Tensoren erster (Vektor) bzw. zweiter Stufe (Matrix) werden fett geschrieben: \mathbf{x}
- Werden die Indizes i, j, k oder l durch Komma getrennt, ist die Einsteinsche Summenkonvention anzuwenden (Absatz 2.3.4.2): $\sigma_{ij,j}$
Dies gilt nicht für die Indizes m, n, o, x, y und z .
- Werden sonstige Indizes durch Kommatrennung einer Größe zugeordnet, wird die Größe durch die Bedeutung aller einzelnen Indizes charakterisiert: $k_{L,st}$
- Die Euler-Zahl wird mit e und die imaginäre Einheit mit j abgekürzt.

2.1. Definition Körperschall

Als Körperschall wird ein Teilgebiet der Physik bezeichnet, das sich mit der Erzeugung, Übertragung und Abstrahlung von schwingenden Bewegungen und Kräften in festen Körpern beschäftigt [26]. Eine kompaktere Bezeichnung ist in [140] mit „Schall in festen Medien“ gegeben. Für den Menschen ist Körperschall nur bei hohen Amplituden und kleinen Frequenzen direkt als Vibration fühlbar. Im Alltag ist die Tatsache, dass Schall in festen Körpern die umgebende Luft zu Schwingungen anregt, viel relevanter [26, 138]. Durch diese Abstrahlung entsteht u. a. Luftschall, der direkt mit dem Gehör wahrnehmbar ist.

Die Messung des Körperschalls liefert qualitative Aussagen über Amplitude und Frequenz der Schwingung. Weiterhin kann für transiente Kraftverläufe die Wellenausbreitung im Festkörper experimentell analysiert oder bei Betrachtung längerer Zeiträume Aussagen zum Eigenverhalten der Bauteile gemacht werden. Die messtechnische Umsetzung der Versuche erfolgt entweder mit berührenden Sensoren oder mit optischen Aufnehmern [138]. Ein an der Oberfläche eines Körpers montierter Messaufnehmer ist generell in der Lage, die longitudinalen und transversalen Bewegungen der Messposition zu erfassen (s. Abb. 2.1 a)). Wird bspw. ein piezoelektrischer

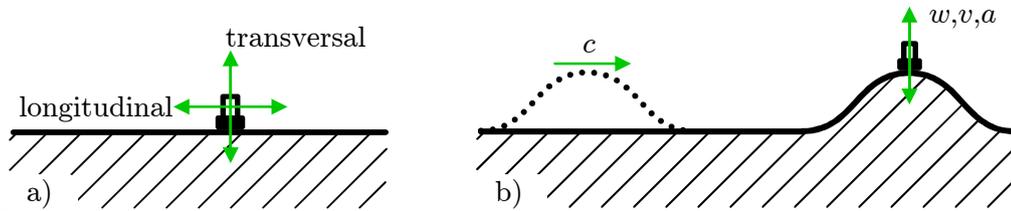


Abbildung 2.1.: a) Longitudinale und transversale Bewegungsrichtung eines auf der Oberfläche montierten Messaufnehmers, b) Schwinggrößen am Sensor (w , v , a) und Ausbreitungsgeschwindigkeit (c) der Welle

Beschleunigungssensor nach [143] in transversaler Messrichtung auf das Bauteil montiert, kann die Beschleunigung der Schwingung a messtechnisch erfasst werden. Durch Integration der Beschleunigung lässt sich die Schwingschnelle v und die transversale Auslenkung der Schwingung w mit

$$v(t) = \int_0^t a(t) dt \quad \text{und} \quad w(t) = \int_0^t v(t) dt \quad (2.1)$$

bestimmen. Bei den Beziehungen in (2.1) wird vorausgesetzt, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Schwingschnelle und die Auslenkung Null sind ($v(t = 0) = 0$ und $w(t = 0) = 0$). Diese Voraussetzung bedeutet auch, dass die hier betrachteten transienten Ereignisse erst ab $t > 0$ eintreten und das System sich für alle Zeiten $t \leq 0$ in Ruhe befindet. Da eine Welle Energie, jedoch keine Materie transportiert [61], beschreiben die Bewegungsgrößen w , v und a die Schwingung der um einen fixierten Ort oszillierenden Teilchen. Sie sind von der Ausbreitungsgeschwindigkeit c , mit der sich die Welle fortpflanzt, zu unterscheiden (s. Abb. 2.1 b)).

Bevor sich eine Körperschallwelle in einem Körper ausbreiten kann, muss sie zunächst angeregt werden. Die dafür bestimmende Kraft regt das Bauteil zu proportionalen Bewegungen an, wenn von extrem hohen Belastungen abgesehen wird [26, 138]. Das Verhältnis von anregender Kraft \underline{F} und Schwingschnelle \underline{v} an der Anregestelle ist mit der mechanischen Eingangsimpedanz

$$\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{\underline{v}} \quad (2.2)$$

gegeben [26, 138]. Die Größen Anregkraft und Schwingschnelle sind als periodische Funktionen vorausgesetzt und werden durch komplexe Werte repräsentiert. Beliebige zeitliche Signalverläufe, z. B. transiente Ereignisse, können mithilfe der Spektralanalyse auf periodische Signale zurückgeführt werden [26, 138]. Zur messtechnischen Erfassung der Impedanz muss neben der Bewegungsgröße noch die Kraft ermittelt werden. Dies kann bspw. mit einem piezoelektrischen Modalhammer nach [141] erfolgen. Laut [26, 138] kann von einer Punktanregung ausgegangen werden, „[...]wenn die Abmessungen des unmittelbar angeregten Gebiets wesentlich kleiner sind (etwa ein Zehntel) als die Wellenlänge.“ Der Durchmesser des hier verwendeten Modalhammers beträgt 2,5 mm [141] und aus Tabelle 6.1 auf Seite 91 ist für eine Stahlplatte mit einer Wandstärke von 1,0 mm eine minimale Wellenlänge von 22 mm zu entnehmen. Die Anregung mit dem Modalhammer kann damit als punktförmig gelten.

2.2. Elastizitätstheorie

Der Fahrzeugcrash kann insgesamt nicht als ein linearer Vorgang betrachtet werden, da bei einem Unfall sehr große Deformationen auftreten. Wird jedoch nur das Zeitfenster vom ersten Kontakt der Unfallpartner bis zur geforderten Zündzeit (RTTF) für den jeweiligen Testfall betrachtet, lässt sich die Struktur in eine Zone der Körperschallentstehung und -ausbreitung unterteilen [89, 116]. Vor allem die Ausbreitung ist durch ein linear-elastisches Werkstoffverhalten charakterisiert. Unter dieser Voraussetzung ist die Elastizitätstheorie der allgemeine Einstiegspunkt für die vorhandene Thematik.

Die nachfolgenden Annahmen behalten für die gesamte Arbeit ihre Gültigkeit:

- Die Werkstoffeigenschaften sind homogen und isotrop.
- Betrachtet wird ausschließlich der Bereich, in dem der Werkstoff ein linear-elastisches Verhalten aufweist.
- Die auftretenden Deformationen und Verschiebungen sind klein.
- Der Spannungstensor aus Gleichung (2.9) auf Seite 25 ist symmetrisch.

2.2.1. Bezugssysteme, Verschiebungen, Belastungen und Spannungen

Die Definition eines Bezugssystems zur Beschreibung räumlich ausgedehnter realer Körper erfolgt mithilfe eines kartesischen Koordinatensystems. Die drei aufeinander orthogonale Raumrichtungen werden als Komponenten x , y und z in einem Koordinatenvektor [7, 9]

$$\mathbf{x}^T = [x \quad y \quad z] \quad (2.3)$$

zusammengefasst. Das hochgestellte T kennzeichnet dabei einen transponierten Vektor.

Wirkt auf einen deformierbaren Körper eine äußere Belastung, ändert sich seine Form und ein beliebiger Punkt des Körpers verschiebt sich im Raum. Diese Verschiebung in Richtung der Achsen x , y und z wird mit dem Verschiebungsvektor [7]

$$\mathbf{u}^T = [u_x \quad u_y \quad u_z] \quad (2.4)$$

angegeben. Das Bezugssystem mit den dargestellten Koordinaten- bzw. Verschiebungskomponenten und den Komponenten des Einheitsvektors e_x , e_y und e_z ist in Abb. 2.2 dargestellt.

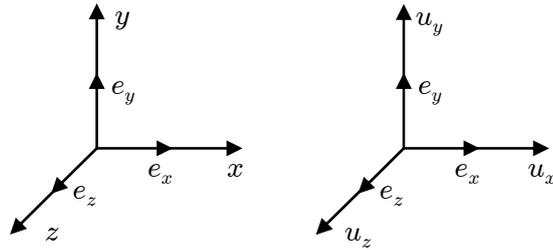


Abbildung 2.2.: Bezugssysteme. Koordinatensystem und Verschiebungskomponenten [7, 9]

Die für eine Deformation verantwortlichen äußeren Belastungen werden als eingeprägte Kräfte bezeichnet und können in Körper- und Oberflächenkräfte unterteilt werden [7]. Körperkräfte werden auf die Masse oder das Volumen eines Körpers bezogen. Diese sind nachfolgend als Vektor der Körperkräfte

$$\mathbf{p}^T = [p_x \quad p_y \quad p_z] \quad (2.5)$$

definiert [7, 19]. Die Oberflächenkräfte wirken immer von außen über die Kontaktfläche auf einen Körper und werden bei räumlichen oder flächigen Bauteilen auf die Wirkfläche bezogen. Sie sind im Oberflächenspannungsvektor

$$\mathbf{f}^T = [f_x \quad f_y \quad f_z] \quad (2.6)$$

zusammengefasst [7, 19]. Wird das Bauteil als Linientragwerk aufgefasst (z. B. der Stab aus Abschnitt 2.3.1 oder der Balken aus Abschnitt 2.3.3), werden die Oberflächenkräfte auf die Wirklänge normiert. Die Komponenten von \mathbf{p} und \mathbf{f} wirken entlang der jeweiligen Raumrichtungen des Koordinatenvektors \mathbf{x} .

Die Beanspruchungen im Inneren eines Körpers werden als Spannungen bezeichnet [7, 9]. In einem Schnitt (s. Abb. 2.3 a)) durch einen beliebigen Körper sind sie über den Querschnitt verteilt. Durch Grenzwertbildung ergibt sich für den Spannungsvektor der differentielle Zusammenhang [7, 9, 59]

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{F}}{dA} \quad (2.7)$$

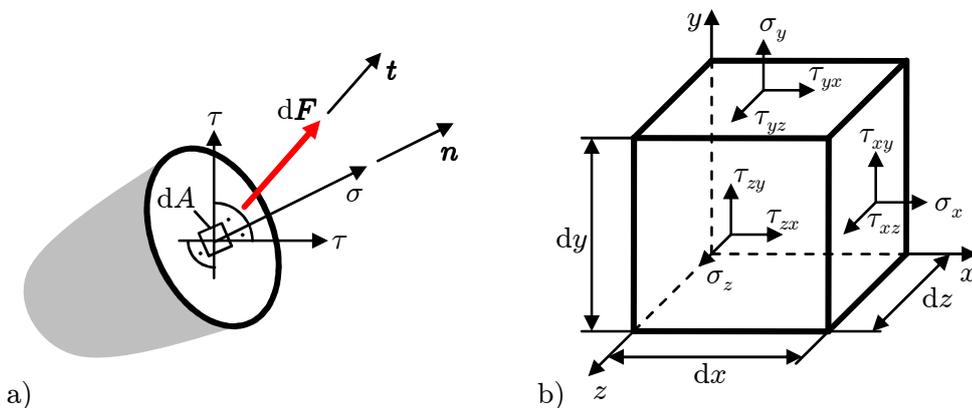


Abbildung 2.3.: a) Spannungen in einem beliebigen Schnitt, b) Normal- und Schubspannung an einem infinitesimal kleinen Quaderelement [7, 9, 45, 48, 52, 59]

mit dem resultierenden Kraftvektor

$$\mathbf{F}^T = [F_x \quad F_y \quad F_z] \quad (2.8)$$

und der Schnittfläche A . Die senkrecht zur Schnittfläche wirkenden Komponenten von \mathbf{t} werden als Normalspannungen σ , die tangential dazu wirkenden Schubspannungen als τ bezeichnet (s. Abb. 2.3 a)). Die Spannungen sind weiterhin abhängig von der Lage der gewählten Schnittfläche, weshalb es sinnvoll ist, diese am gewählten Bezugssystem auszurichten [7, 9]. In Abb. 2.3 b) ist ein infinitesimal kleines Quaderelement des Gesamtkörpers dargestellt. Die Normal- und Schubspannungen sind an den sichtbaren Schnittflächen eingezeichnet und lassen sich allgemein zu einem Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

mit $\sigma_{ii} = \sigma_i$ und $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \tau_{ij}$ zusammenfassen¹ [7, 19, 59, 121].

2.2.2. Verzerrungen

Treten an einem beliebigen Punkt eines Körpers Verschiebungen auf, muss dies nicht zwangsläufig bedeuten, dass der Körper einer Deformation unterliegt [7]. Ist z. B. der Verschiebungsvektor \mathbf{u} für alle Punkte eines Körpers zur selben Zeit gleich, wird von einer Starrkörperverschiebung gesprochen [9]. Erst wenn die Punkte ihre relative Lage zueinander ändern, erfährt der Körper eine Deformation und es wirken Spannungen. In Abb. 2.4 sind drei beliebige Punkte P, Q und R eines eben angenommenen Körpers dargestellt. Ausgehend vom unverformten Zustand PQR wird der Körper durch Belastung deformiert und geht in den verformten Zustand P'Q'R' über. Die dabei auftretenden Längenänderungen sind ebenfalls

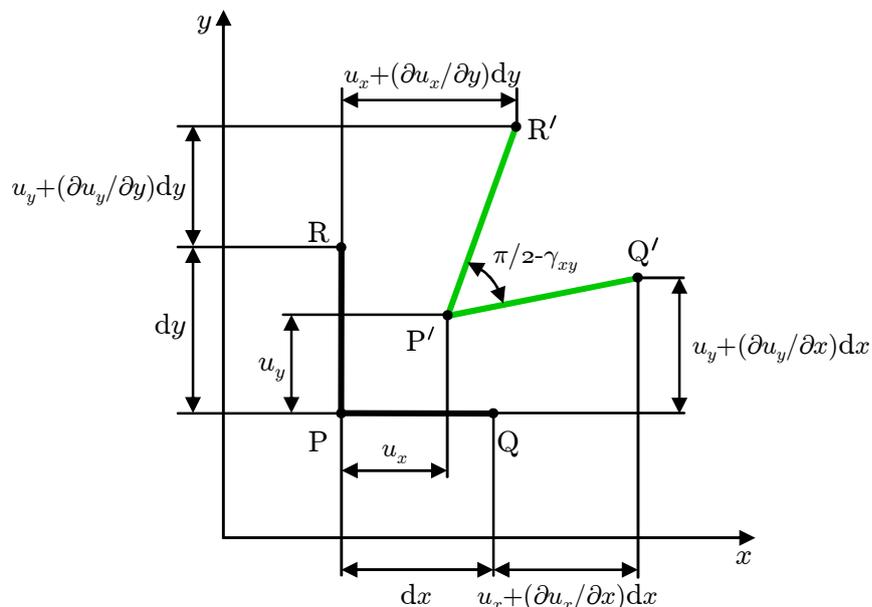


Abbildung 2.4.: Verzerrungen in der Ebene [7, 19, 48]

¹Für die Indizes gilt $i, j = x, y, z$.

angegeben. Die relativen Verschiebungen sind somit ein Maß für die Deformation eines Körpers und werden als Verzerrungen bezeichnet. Für infinitesimal kleine Verschiebungen lassen sich die Verzerrungen unterteilen in Dehnungen [7, 59, 121, 185]

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.10)$$

und Gleitungen (auch Schubverformungen oder Schiebung) [7, 59, 121, 185]

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad \gamma_{xz} = 2\epsilon_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad \gamma_{yz} = 2\epsilon_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \quad (2.11)$$

und können in einem Verzerrungstensor

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 1/2 \gamma_{xy} & 1/2 \gamma_{xz} \\ 1/2 \gamma_{xy} & \epsilon_y & 1/2 \gamma_{yz} \\ 1/2 \gamma_{xz} & 1/2 \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

zusammengefasst werden [7, 19, 51, 59, 121]. In diesem Tensor gilt mit den Indizes $i, j = x, y, z$ für die Dehnungen $\epsilon_{ii} = \epsilon_i$ und für die Gleitungen $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} = 1/2 \gamma_{ij}$. Eine ausführliche Herleitung dieser Größen mittels Taylorreihenentwicklung kann [7, 51] entnommen werden.

2.2.3. Gleichgewichtsbedingungen

Wie bereits erwähnt, sind die Spannungen von der Schnittfläche abhängig. Werden diese am Bezugssystem ausgerichtet, bleibt eine Abhängigkeit von der jeweiligen Richtungskomponente x, y oder z . Entlang dieser Komponenten wirken die Belastungen \mathbf{p} bzw. \mathbf{f} und es ergibt sich in einem infinitesimal kleinen Kontrollvolumen ein Zuwachs an Spannung zwischen parallelen Schnitten [7]. Für dieses Kontrollvolumen gilt das Kräftegleichgewicht und folglich bei statischer Betrachtung in x -Richtung die Beziehung [7, 19, 45, 59, 121, 185]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + p_x = 0. \quad (2.13)$$

Bei der Betrachtung dynamischer Vorgänge sind die Trägheitskräfte des Körpers nach dem Prinzip von d'Alembert zu berücksichtigen. Mit der Dichte ρ des Körpers und der Zeitvariablen t lautet die Gleichgewichtsbedingung im dynamischen Fall in x -Richtung [7]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + p_x = \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}. \quad (2.14)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen in y - und z -Richtung ergeben sich analog dazu. Eine detaillierte Herleitung ist in [7, 19, 51] enthalten.

2.2.4. Konstitutive Gleichungen

Die Verschiebungen bzw. Verzerrungen werden mit den Spannungen über die konstitutiven Gleichungen in Beziehung gesetzt. In der Literatur sind diese Gleichungen auch als Werkstoff- bzw. Elastizitätsgesetz, Material- oder Stoffgleichungen bekannt [7, 48, 51, 128]. Im allgemeinen Fall gilt für linear-elastisches Material das Hookesche Gesetz [7, 19, 51, 59]

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl}. \quad (2.15)$$

Der in Gleichung (2.15) verwendete Proportionalitätsfaktor E_{ijkl} bezeichnet die Koordinaten des Elastizitätstensors des Werkstoffs. Wird davon ausgegangen, dass der Werkstoff homogen und isotrop ist sowie darüber hinaus keine Dehnungen infolge einer Temperaturänderung auftreten, ergeben sich mit dem Elastizitätsmodul (E-Modul) E und dem Schubmodul G die konstitutiven Gleichungen [7, 45, 51, 121, 185]

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad \text{und} \quad \gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \quad (2.16)$$

Durch zyklisches Vertauschen der Indizes folgen aus (2.16) die Gleichungen für die Verzerrungen ϵ_y , ϵ_z , γ_{xz} und γ_{yz} . Der Schubmodul wird aus dem E-Modul und der Querkontraktionszahl ν mithilfe der Beziehung

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.17)$$

bestimmt [7, 19, 45, 51, 59, 121, 128, 185]. Wird das Werkstoffgesetz (2.16) nach den Spannungen aufgelöst, ergibt sich [7, 27, 128]

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z)] \quad \text{und} \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}. \quad (2.18)$$

Unter Verwendung der Laméschen Konstanten [19, 27, 51, 59]

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.19)$$

gilt für die Gleichungen in (2.18)

$$\sigma_x = 2\mu\epsilon_x + \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \quad \text{und} \quad \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}. \quad (2.20)$$

Zur Bestimmung der Größen σ_y , σ_z , τ_{xz} und τ_{yz} aus (2.18) bzw. (2.20) müssen hier ebenfalls die Indizes zyklisch vertauscht werden.

Spezielle Zustände hinsichtlich der Spannungen bzw. Verzerrungen vereinfachen das Werkstoffgesetz und somit auch die Modellierung mechanischer Elemente. Treten z. B. in einem Bauteil nur Spannungen in einer Ebene auf, wird von einem ebenen Spannungszustand gesprochen [7, 59, 128, 181]. Ist diese Lastebene bspw. die x - y -Ebene, gilt für die Spannungen

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad (2.21)$$

womit alle Spannungen verschwinden, die senkrecht zur Lastebene wirken [19, 48, 59, 128, 181]. Praktische Bedeutung hat dies bei dünnen Blechen, die nur in der Scheibenebene belastet werden oder bei der Applizierung von Dehnmessstreifen an einer freien Bauteiloberfläche.

Werden im Gegensatz dazu die Verzerrungen bspw. senkrecht zur x - y -Ebene gleich Null, ist dies als ebener Verzerrungszustand definiert [7, 27, 128]. In diesem Fall gilt für die Verzerrungen [19, 48, 59, 128]

$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \quad (2.22)$$

Eine solche Situation kann beim Einspannen eines Bauteils zwischen zwei Festlagern oder bei der Annahme einer unendlich großen Ausdehnung in z -Richtung eintreten.

2.2.5. Arbeitssatz

Das Gleichgewicht eines Körpers, an dessen Rändern eine Belastung wirkt, kann über den Arbeitssatz

$$W_{\text{au}} = W_{\text{in}} \quad (2.23)$$

beschrieben werden [27, 48, 128]. Dabei ist W_{au} die bis zum betrachteten Gleichgewichtszustand in das Bauteil eingebrachte äußere Arbeit. Sie wird bei linear-elastischen Körpern vollkommen reversibel als innere Arbeit W_{in} gespeichert. Über die allgemeine Definition der Arbeit [27, 52]

$$W = \int_{\mathbf{s}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad (2.24)$$

wobei der Streckenvektor mit

$$\mathbf{s}^T = [s_x \quad s_y \quad s_z] \quad (2.25)$$

bezeichnet ist, ergibt sich für die über die Oberfläche O eingebrachte äußere Arbeit [51, 52]

$$W_{\text{au}} = \int_O \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dO. \quad (2.26)$$

Durch Integration der im Inneren des Körpers wirkenden Spannungen und Verzerrungen über das gesamte Volumen V kann die innere Arbeit mit

$$W_{\text{in}} = \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} dV \quad (2.27)$$

bestimmt werden [51, 96]. Für einen Körper, der sich im Gleichgewicht befindet, ist bei elastischem Materialverhalten mit

$$\int_O \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dO = \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} dV \quad (2.28)$$

ein Zusammenhang zwischen den außen aufgebrachten Belastungsgrößen und den inneren Zuständen gegeben [51, 96, 128].

2.3. Wellenausbreitung in Tragwerkselementen

Durch meist transiente Ereignisse werden Wellen angeregt, die sich als Körperschall in Strukturen ausbreiten. Im Gegensatz zu Fluiden treten in Festkörpern zusätzlich Schubspannungen auf. Aus diesem Grund existiert im Festkörper eine höhere Anzahl an möglichen Wellenarten. In Abb. 2.5 sind die wichtigsten Arten sowie ihr schematisches Verformungsbild

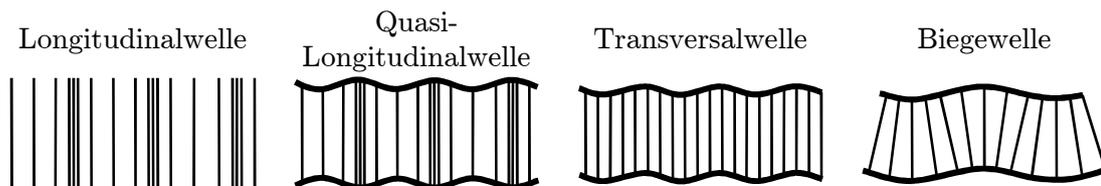


Abbildung 2.5.: Relevante Wellenarten in einem Festkörper

dargestellt [26, 116, 138, 176]. Eine reine Longitudinalwelle schwingt in Richtung ihrer Ausbreitung und kann sich nach ihrer Definition nur in allseits unbegrenzten Medien ausprägen [26, 138]. Bei der Betrachtung realer, technischer Strukturen, die immer Begrenzungen aufweisen, ist sie im Rahmen dieser Arbeit somit irrelevant. Breitet sich ein Zug- bzw. Druckstoß in einem Stab oder einer Scheibe aus, wird diese Wellenart als Quasi-Longitudinalwelle (L-Welle)¹ bezeichnet [26, 138]. Dabei entstehen auch immer aufgrund der Querkontraktion transversale Verschiebungen an der Bauteiloberfläche. Die Transversalwelle (T-Welle) schwingt im Gegensatz zur L-Welle senkrecht zu ihrer Ausbreitungsrichtung [26, 100, 138]. Bei der Biegewelle (B-Welle) erfährt das Bauteil zusätzlich zur transversalen Auslenkung noch eine Rotation. Die B-Welle breitet sich senkrecht zur Auslenkung und Rotation aus [26, 100, 138].

Die Körperschallausbreitung erfolgt in Strukturen, die als Tragwerke aufgefasst werden können und sich somit in entsprechende Tragwerkselemente unterteilen lassen. Es wird zwischen ein- und zweidimensionalen Elementen unterschieden [6, 7]:

- Bei eindimensionalen Strukturelementen ist eine Abmessung (die Elementlänge l) wesentlich größer als die beiden anderen Abmessungen. Letztere werden als Elementquerschnittsmaße bzw. als Elementbreite b und -höhe h bezeichnet. Die Flächenschwerpunkte der Querschnitte ergeben die Mittellinie. Gerade Linientragwerke werden bei reiner Zug-/Druck-Belastung als Stäbe, ober bei reiner Biegebelastung als Balken bezeichnet [7].
- Zweidimensionale Elemente sind in zwei Raumrichtungen (l_1 und l_2) wesentlich größer ausgedehnt als in die dritte Richtung. Die kleine Abmessung wird als Elementdicke h bezeichnet. Wird h an jeder Stelle halbiert, ergibt sich die Mittelfläche des Elements. Ebene Flächentragwerke werden als Scheibe bezeichnet, wenn die äußeren Belastungen in der Mittelfläche wirken. Dabei treten keine Biegebelastungen auf. Sind die Belastungen senkrecht zur Mittelfläche gerichtet, wird das Element als Platte bezeichnet und auf Biegung beansprucht [7].

In den folgenden Abschnitten wird die Ausbreitung der genannten Wellen behandelt. Bei dieser Abhandlung wird zunächst auf die Tragwerkselemente Stab und Scheibe, die eine L-Welle und ggf. auch eine T-Welle zulassen, eingegangen. Anschließend werden Balken und Platte betrachtet, für die sowohl T- und B-Welle als relevante Arten in Frage kommen. Die Bestimmung der freien Wellenausbreitung erfolgt immer mit der Prämisse

$$\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (2.29)$$

womit sämtliche äußeren Belastungen verschwinden [26, 58, 137, 138].

Die hier behandelten Wellengleichungen besitzen die Eigenschaften partieller Differentialgleichungen. Bei den eindimensionalen Tragwerkselementen Stab und Balken sind sie vom Ort x und der Zeit t abhängig. Bei den zweidimensionalen Elementen Scheibe und Platte zusätzlich vom Ort y . Bei der eindimensionalen freien Ausbreitung einer Welle in eine Richtung kann das Fortschreiten der Welle mit

$$u_i(x, t) = u_{i,E} \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad (2.30)$$

beschrieben werden [137, 162]. Die Eingangsfunktion $u_{i,E}$ repräsentiert dabei die Form der Welle, die sich mit der Geschwindigkeit c in positiver x -Richtung ausbreitet (Phasengeschwindigkeit).

¹In dieser Arbeit wird nur die Quasi-Longitudinalwelle behandelt. Sie wird abgekürzt als Longitudinalwelle bzw. L-Welle bezeichnet.

Auch eine ebene Welle, die sich im zwei- oder dreidimensionalen Raum in x -Richtung fortbewegt, kann über (2.30) beschrieben werden.

Beliebige Signalverläufe lassen sich im Sinne der Fourieranalyse aus Linearkombinationen von harmonischen Zeitverläufen

$$u_i(x, t) = u_{i0} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \quad (2.31)$$

zusammensetzen [26, 137, 138]. Mit der Beziehung für die Wellenzahl [26, 27, 108, 137, 138, 195]

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (2.32)$$

ergibt sich daraus [138, 162]

$$u_i(x, t) = u_{i0} \cos(\omega t - kx) \quad (2.33)$$

bzw. in komplexer Zeigerschreibweise [26, 27, 100, 108, 137, 138, 195]

$$u_i(x, t) = u_{i0} \operatorname{Re} \left\{ e^{-j(kx - \omega t)} \right\}. \quad (2.34)$$

Die Kreisfrequenz der Welle ist hier mit ω und die konstante Amplitude der Verschiebung mit u_{i0} bezeichnet. Zur vereinfachten Darstellung der Wellenfelder wird auf den Realteiloperator $\operatorname{Re}\{\dots\}$ in allen folgenden Gleichungen verzichtet.

Die allgemeine Lösung der Wellenausbreitung in zwei oder drei unabhängigen räumlichen Dimensionen lässt sich auf ähnliche Weise durch Linearkombination ebener Wellen mit

$$u_i(\mathbf{x}, t) = u_{i0} e^{-j(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} \quad (2.35)$$

angeben [36, 100]. Für den Wellenvektor im dreidimensionalen Raum gilt [178]

$$\mathbf{k} = [k_x \quad k_y \quad k_z]. \quad (2.36)$$

Mehrdimensionale Probleme liefern bei einer beliebigen Frequenz nur für bestimmte Kombinationen der Komponenten von \mathbf{k} eine Lösung [36]. Diese Kombinationen ergeben sich, wenn der Lösungsansatz (2.35) in die entsprechende Wellengleichung eingesetzt wird.

Die Abhängigkeit der Wellenzahl von der Kreisfrequenz der Welle wird als Dispersionsgesetz bezeichnet [26, 36, 100, 138]. Die Dispersionsbeziehung ist eine Funktion der Form [26, 125, 138]

$$k = f(\omega). \quad (2.37)$$

Für eindimensionale Tragwerkselemente wird der Dispersionszusammenhang ermittelt, indem der Lösungsansatz (2.34) nach den Variablen x und t differenziert und anschließend in die entsprechende Wellengleichung eingesetzt wird. Bei den in Absatz 2.3.2 bzw. Absatz 2.3.4 behandelten zweidimensionalen Tragwerkselementen ist im Rahmen dieser Arbeit lediglich die Ausbreitung ebener Wellen in eine bestimmte Richtung von Interesse. Fällt diese Richtung bspw. mit der x -Koordinate zusammen, werden bei ebenen Wellen alle Ableitungen senkrecht dazu Null ($\partial/\partial y = 0$). Die Betrachtung der Wellenausbreitung auf der Scheibe und Platte wird somit auf eine Dimension reduziert. Dadurch kann ebenfalls der Lösungsansatz (2.34) verwendet werden. Der Effekt der kreisförmigen Ausbreitung in der Ebene und die daraus resultierende Abnahme der Schwingamplitude wird in Abschnitt 3.5 als zusätzlicher Faktor separat berücksichtigt.

Ist die Dispersionsbeziehung (2.37) bekannt, kann die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer einzelnen Frequenz (Phasengeschwindigkeit) mithilfe von

$$c = \frac{\omega}{k} \quad (2.38)$$

bestimmt werden. Diese Beziehung ergibt sich durch Umstellen von (2.32).

Um den Einfluss der Beugung und damit die Güte der Strahlennäherung für das in Abschnitt 6.1 vorgestellte Verfahren abschätzen zu können, ist die Kenntnis der Wellenlänge notwendig. Sie kann über die Beziehung

$$L = \frac{2\pi}{k} \quad (2.39)$$

bestimmt werden [26, 36, 137, 138].

2.3.1. Stab

Ein Stab beschreibt ein eindimensionales Tragwerkselement, das nur entlang seiner Hauptabmessung eine Belastung auf Zug/Druck übertragen kann. Dadurch stellt sich ein einachsiger Spannungszustand im Stab ein. Die einzige Spannung ist folglich die Normalspannung in Balkenlängsrichtung, während alle anderen Spannungen zu Null werden. Es gilt:

$$\sigma_x = \sigma \quad \text{und} \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (2.40)$$

In Abb. 2.6 ist die Lage des Stabes im Raum sowie ein infinitesimal kleines Stabsegment

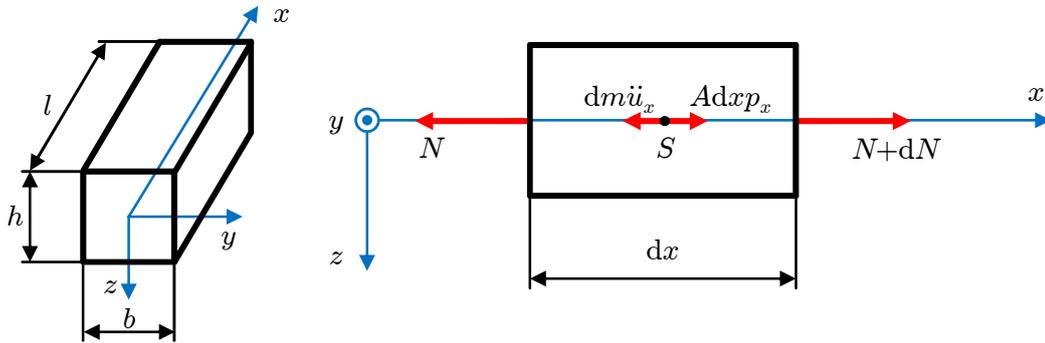


Abbildung 2.6.: Räumliche Ausdehnung eines Stabes (links) und Schnittgrößen an einem infinitesimal kleinen Stabsegment (rechts)

mit allen wirkenden Kräften in x -Richtung dargestellt. Die Punkte über der Verschiebung u_x bedeuten dabei die zweite Zeitableitung. Das Gleichgewicht dieser Kräfte liefert mit der auf das Volumen bezogenen Körperkraft p_x im dynamischen Fall

$$-N - dm \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + Adxp_x + N + dN = 0. \quad (2.41)$$

Die Querschnittsfläche ist mit A bezeichnet und für die infinitesimal kleine Masse gilt

$$dm = \rho Adx. \quad (2.42)$$

Es wird vorausgesetzt, dass sich A und ρ nicht über die Länge des Stabes ändern. Nach Vereinfachen, Sortieren und Einsetzen von (2.42) wird aus (2.41)

$$\frac{\partial N}{\partial x} + p_x A = \rho A \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}. \quad (2.43)$$

Aus den Gleichungen (2.10) und (2.16) sowie der Annahmen aus (2.40) folgt

$$\sigma = E\epsilon_x \quad (2.44)$$

und in Kombination mit den Beziehungen (2.7) sowie (2.10) lässt sich die Normalkraft mit

$$N = EA \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.45)$$

berechnen. Wird (2.45) in (2.43) eingesetzt, ergibt sich die Wellengleichung der L-Welle mit [26, 100, 138, 181, 187]

$$E \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + p_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}. \quad (2.46)$$

Diese Beziehung kann unter Verwendung von (2.10) und (2.40) auch direkt aus (2.14) abgeleitet werden. Mit der Bedingung einer freien Wellenausbreitung (2.29) und dem harmonischen Ansatz (2.34), kann durch entsprechendes Ableiten auf die Zusammenhänge

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = k^2 u_{x0} e^{-j(kx-\omega t)} \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \omega^2 u_{x0} e^{-j(kx-\omega t)} \quad (2.48)$$

geschlossen werden. Durch Einsetzen von (2.47) und (2.48) in (2.46) ergibt sich die Wellenzahl für die L-Welle in einem Stab [26, 100, 138]

$$k_{L,St} = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega \quad (2.49)$$

sowie durch Einsetzen von (2.49) in (2.38) die Phasengeschwindigkeit [26, 100, 138, 187]

$$c_{L,St} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (2.50)$$

2.3.2. Scheibe

Eine Scheibe (s. Abb. 2.7) stellt das flächige Äquivalent zum Stab dar. Bei ihr wirken alle äußeren Belastungen in der Mittelfläche. Um die „Dünne-Hypothese“ zu erfüllen, soll für die Abmessungen der Scheibe $h/\min(l_1, l_2) \ll 1$ gelten [7, 13]. Dies bedeutet, dass die Scheibe deutlich länger und breiter als dick ist. Die Mittelfläche wird durch die Belastung nur verzerrt und nicht gekrümmt. In z -Richtung (Dickengerichtung) werden die Normalspannungen und folglich die entsprechenden Schubspannungen vernachlässigt und es gilt

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (2.51)$$

Dadurch stellt sich ein ebener Spannungszustand (Absatz 2.2.4) ein [45]. Das allgemeine Werkstoffgesetz (2.16) vereinfacht sich für die Dehnungen dadurch zu

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad \text{und} \quad \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x). \quad (2.52)$$

Werden die Beziehungen (2.52) ineinander eingesetzt und die Dehnungen aus (2.10) berücksichtigt, ergeben sich die Normalspannungen mit [128]

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right). \quad (2.53)$$

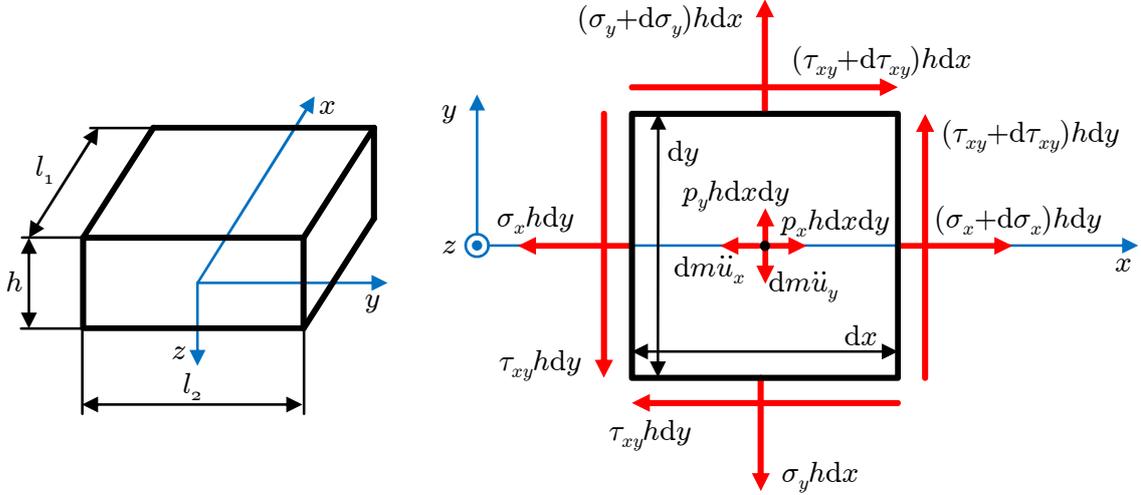


Abbildung 2.7.: Räumliche Ausdehnung einer Scheibe (links) und Schnittgrößen an einem infinitesimal kleinen Scheibensegment (rechts)

Für die Schubspannung gilt entsprechend (2.11), (2.16) und (2.17)

$$\tau_{xy} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.54)$$

Mit der Dehnsteifigkeit der Scheibe [7, 100]

$$D = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad (2.55)$$

ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen (2.14), unter Berücksichtigung der Grundannahmen aus (2.51), nach Einsetzen von (2.53) und (2.54) sowie der Voraussetzung einer konstanten Dicke der Scheibe nachfolgende Differentialgleichungen [100]

$$D \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + D \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + D \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + p_x h = \rho h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad (2.56)$$

$$D \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + D \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + D \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + p_y h = \rho h \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}. \quad (2.57)$$

Diese Beziehungen folgen auch bei der Betrachtung eines infinitesimal kleinen Scheibensegmentes nach Abb. 2.7. Mehrmaliges Ableiten und ineinander Einsetzen führt unter Annahme der freien Wellenausbreitung (2.29) mit dem Laplaceoperator [7, 45, 179]

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.58)$$

auf die Differentialgleichung für die Verschiebung in x -Richtung

$$\Delta \Delta u_x + \frac{2\rho^2 h^2}{D^2 (1-\nu)} \frac{\partial^4 u_x}{\partial t^4} - \frac{\rho h (3-\nu)}{D (1-\nu)} \Delta \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0. \quad (2.59)$$

Eine entsprechende Referenz aus der Literatur ist für die Beziehung (2.59) nicht bekannt. Folglich ist ihre Herleitung aus (2.56) und (2.57) ausführlich in Anhang A.1 beschrieben. Für

die Verschiebung in y -Richtung gilt der analoge mathematische Zusammenhang (s. ebenfalls Anhang A.1). Mit dem harmonischen Wellenansatz (2.34) sind aus (2.59) zwei Lösungen

$$k_{L,Sch} = \sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}}\omega \quad \text{und} \quad k_{T,Sch} = \sqrt{\frac{2\rho(1+\nu)}{E}}\omega \quad (2.60)$$

für die Wellenzahl in einer Scheibe möglich, aus denen sich die Phasengeschwindigkeiten

$$c_{L,Sch} = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad \text{und} \quad c_{T,Sch} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}. \quad (2.61)$$

ergeben. Der Rechengang zur Bestimmung der Beziehungen in (2.60) und (2.61) ist dem Anhang A.2 zu entnehmen. Die mit dem Index L gekennzeichneten Größen repräsentieren dabei die L-Welle. Die jeweils zweiten Lösungen mit dem Index T führen auf die Beziehungen der T-Welle. Die Schwingungsrichtung dieser T-Welle liegt in der Mittelfläche der Scheibe. Es treten dabei keine Bewegungen senkrecht zu dieser Fläche auf.

An dieser Stelle ist noch zu erwähnen, dass in der Literatur (z. B. [26, 138]) weiter vereinfachende Annahmen getroffen werden, um die Komplexität in (2.56) bzw. (2.57) zu reduzieren. Dabei wird mit

$$\epsilon_y = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \quad (2.62)$$

die Dehnung und Winkeländerung vernachlässigt. Diese Annahme ist aber nicht widerspruchsfrei zum vorausgesetzten ebenen Spannungszustand. Für dünne Wandstärken liefert sie aber brauchbare Ergebnisse [26, 51, 138]. Für die Verschiebung in x -Richtung folgt damit die vereinfachte Wellengleichung [26, 138]

$$\frac{D}{h} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + p_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}. \quad (2.63)$$

Daraus abgeleitet ergeben sich die gleichen Beziehungen für die L-Welle wie bereits in (2.60) und (2.61) angegeben. Die T-Welle kann mit diesem Ansatz nicht beschrieben werden. In [26, 138] wird dazu ein separater Ansatz mit vereinfachten Annahmen gewählt. Die dadurch erhaltenen Beziehungen für die Wellenzahl und Phasengeschwindigkeit von L- und T-Welle sind mit den Gleichungen (2.60) und (2.61) identisch.

2.3.3. Balken

Ein Balken wird ausschließlich auf Biegung beansprucht womit die relevante Wellenart für dieses Element in erster Linie die B-Welle darstellt. Für die nachfolgenden Modellierungen der Wellenausbreitung auf einem Balken wird vorausgesetzt [48, 182]:

1. Im ursprünglich unbelasteten Zustand ist die Balkenachse gerade.
2. Es herrschen keine Belastungen in der Balkenlängsachse.
3. Der Balkenquerschnitt ist symmetrisch bezüglich der z -Achse.
4. Die Lasten auf den Balken wirken in der x - z -Ebene.
5. Diese Belastungen werden in den Gleichgewichtsbeziehungen in der Weise eingeführt, als ob sie am unverformten Balken wirken würden [182].

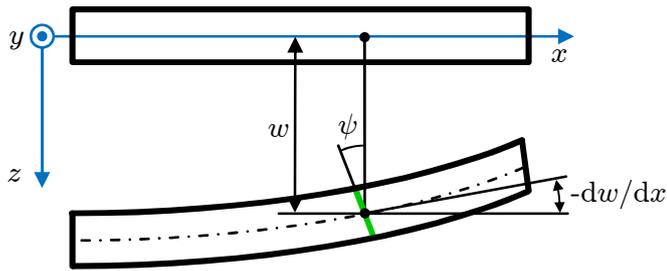


Abbildung 2.8.: Balkenverformung. Die Querschnitte erfahren eine Verschiebung w und eine Drehung ψ

Sind die Voraussetzungen 3. und 4. erfüllt, wird auch von einer geraden Biegung gesprochen [48]. In Abb. 2.8 ist der ursprünglich gerade Balken sowie seine Verformung aufgrund einer Biegebelastung dargestellt. Ein exemplarischer Schnitt durch den Balken ist grün markiert. Die Deformation des Balkens wird durch die Verschiebung w der Balkenachse in z -Richtung und die Drehung ψ der Balkenquerschnitte um die y -Achse charakterisiert. Die Normalspannungen in y - und z -Richtung sollen klein gegenüber den Normalspannungen in x -Richtung des Balkens sein und können folglich vernachlässigt werden. Es gilt [48, 194]:

$$\sigma_x = \sigma \quad \text{und} \quad \sigma_y = \sigma_z = 0. \quad (2.64)$$

Wie beim Stab folgt aus den Dehnungen (2.10), dem Werkstoffgesetz (2.16) und dieser Annahme (2.64) der Zusammenhang

$$\sigma = E \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.65)$$

Des Weiteren erfahren alle Punkte des Querschnitts dieselbe Verschiebung w in z -Richtung. Sie ist somit unabhängig von z . Da nur Bewegungen in der x - z -Ebene beobachtet werden, ist w ebenfalls unabhängig von der y -Koordinate womit

$$u_z(x, t) = w(x, t) \quad (2.66)$$

gilt [48]. Diese Annahme bedeutet auch, dass sich in einem Querschnitt die Breite und Höhe des Balkens während der Biegung nicht ändert.

Die dynamische Betrachtung erfolgt unter Berücksichtigung aller relevanten Kräfte und Momente am infinitesimal kleinen Balkensegment, das in Abb. 2.9 dargestellt ist. Das Kräfte-

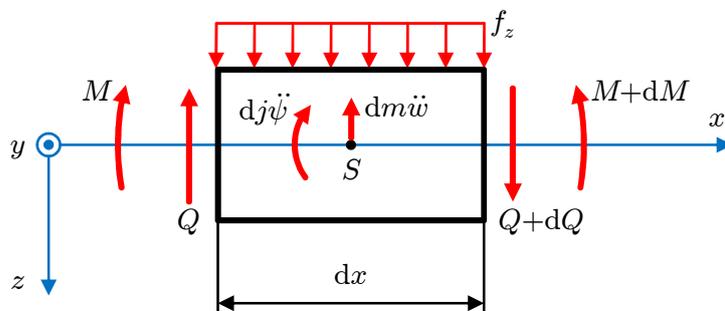


Abbildung 2.9.: Schnittgrößen an einem infinitesimal kleinen Balkensegment

gleichgewicht in z -Richtung

$$-Q + f_z dx - dm \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Q + dQ = 0 \quad (2.67)$$

liefert unter Berücksichtigung der d'Alembertschen Trägheitskraft mit der infinitesimal kleinen Masse (2.42) die Differentialgleichung

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + f_z = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2.68)$$

Das Momentengleichgewicht um den Schwerpunkt des Balkenelements entlang der y -Achse ergibt folgenden Zusammenhang

$$M + Q \frac{dx}{2} + dj \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + Q \frac{dx}{2} + dQ \frac{dx}{2} - M - dM = 0 \quad (2.69)$$

wobei der Term, der von höherer Ordnung klein ist ($dQ dx/2$), nachfolgend vernachlässigt wird [7, 50]. Für das infinitesimal kleine Massenträgheitsmoment dj ergibt sich [51]

$$dj = \rho I dx. \quad (2.70)$$

Die Herleitung von (2.70) ist im Detail dem Anhang B.1 zu entnehmen. Das Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich der Biegeachse (hier die y -Achse) wird mit I bezeichnet und repräsentiert das Integral [48, 52, 128, 182]

$$I = \int_A z^2 dA. \quad (2.71)$$

Wird (2.70) in (2.69) eingesetzt, lässt sich der Zusammenhang der wirkenden Momente in Form der Differentialgleichung

$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.72)$$

angeben.

Die für die Gleichgewichtsbedingungen verwendeten Schnittgrößen ergeben sich aus den Resultierenden der Normalspannung σ und Schubspannung τ mittels Integration über die Querschnittsfläche. Es gilt für die Querkraft [7, 48, 51, 128]

$$Q = \int_A \tau dA \quad (2.73)$$

und für das Biegemoment [7, 48, 51, 128]

$$M = \int_A z \sigma dA. \quad (2.74)$$

2.3.3.1. Theorie nach Euler-Bernoulli

Diese Biegetheorie basiert auf den klassischen Annahmen von Euler und Bernoulli, weshalb das entsprechende Modell als Euler-Bernoulli-Balken bezeichnet wird. In diesem Modell sind sämtliche Forderungen aus der Bernoullischen Hypothese erfüllt [48, 69, 182]:

- Die Querschnittsebenen sollen auch nach der Deformation eben sein, d. h. keine Verwölbung erfahren.
- Die vor der Deformation zur Balkenachse senkrechten Querschnittsebenen sollen auch nach der Deformation senkrecht zur Biegelinie stehen. Das Balkenelement erleidet dadurch keine zusätzliche Winkeländerung.

Durch die Drehung um den Normalendrehwinkel ψ erfährt ein beliebiger Punkt im Abstand z somit eine Verschiebung in x -Richtung von [48, 69]

$$u_x(x, z, t) = \psi(x, t) z. \quad (2.75)$$

Durch diese Hypothese ist die Verschiebung u_x somit unabhängig von y und z . Die zweite Annahme führt auf den Zusammenhang [48]

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \psi = 0. \quad (2.76)$$

Aus der Normalspannungsbeziehung (2.65) sowie den Forderungen nach Bernoulli (2.75) und (2.76) ergibt sich für die Normalspannung

$$\sigma = -E \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \quad (2.77)$$

und unter Beachtung von (2.71) und (2.74) lässt sich das Biegemoment mit [48, 128, 181, 187]

$$M = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.78)$$

berechnen. In der Euler-Bernoulli-Theorie wird die Rotationsträgheit vernachlässigt und es folgt aus dem Momentengleichgewicht (2.72) der nur für Euler-Bernoulli gültige Zusammenhang [181]

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x}. \quad (2.79)$$

Werden die Beziehungen (2.78) und (2.79) unter der Voraussetzung eines konstanten Querschnitts über die Balkenlänge in (2.68) eingesetzt, ergibt sich die Wellengleichung für die B-Welle im Euler-Bernoulli-Balken [25, 30, 51, 125, 187, 194]

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f_z. \quad (2.80)$$

Die Forderung der freien Wellenausbreitung (2.29) und der harmonische Wellenansatz¹ (2.34) führen auf die Wellenzahl der B-Welle in einem Balken nach Euler-Bernoulli [26, 51, 137, 138, 187]

$$k_{\text{B,Ba,EB}} = \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI}} \sqrt{\omega} \quad (2.81)$$

und mit (2.38) ermittelt sich die Phasengeschwindigkeit zu [26, 30, 51, 137, 138]

$$c_{\text{B,Ba,EB}} = \sqrt[4]{\frac{EI}{\rho A}} \sqrt{\omega}. \quad (2.82)$$

¹Der harmonische Lösungsansatz wird entsprechend der Terme in (2.80) abgeleitet und anschließend dort eingesetzt. Für die Schubelastische Platte sind in Absatz 2.3.4.1 die Ableitungen entsprechend ausformuliert (vgl. Gleichung (2.136) und (2.139) auf Seite 48).

2.3.3.2. Theorie nach Bresse-Timoshenko

Wie bei der Theorie nach Euler-Bernoulli wird bei Bresse-Timoshenko¹ von einem Ebenbleiben des Querschnitts nach der Verformung ausgegangen. Für die Verschiebung der Querschnittspunkte in x -Richtung gilt somit auch der Zusammenhang (2.75). Die in der Euler-Bernoulli-Theorie vernachlässigte Schubdeformation wird hier durch ein Stoffgesetz für die Querkräfte berücksichtigt [22, 30, 48, 58, 125]. Geometrisch betrachtet erfahren die Balkensegmente eine Durchbiegung und unabhängig dazu eine Drehung. Eine Beziehung (2.76) zwischen w und ψ wie bei der Euler-Bernoulli-Theorie gibt es deshalb nicht.

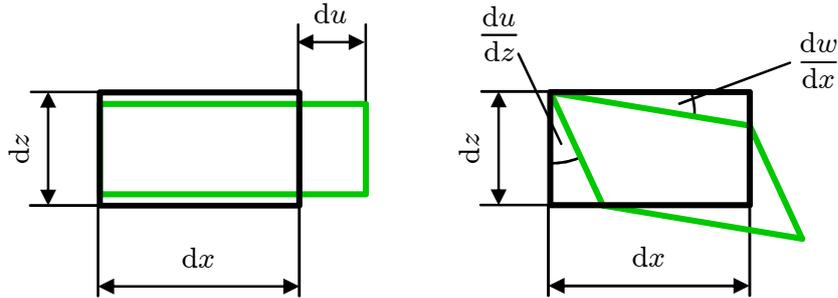


Abbildung 2.10.: Deformationen am infinitesimal kleinen Element

Für ein infinitesimal kleines Balkenelement sind die Verformungen in Abb. 2.10 ersichtlich. Aus der Normalspannungsbeziehung (2.65) und der Verdrehung der Querschnittsebenen (2.75) ergibt sich für die Normalspannung

$$\sigma = E \frac{\partial \psi}{\partial x} z. \quad (2.83)$$

Unter Verwendung von (2.71), (2.74) und (2.83) gilt für das Biegemoment [48, 51, 183]

$$M = EI \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.84)$$

Die Schubspannung kann in analoger Weise aus den Gleichungen (2.11), (2.16), (2.66) und (2.75) mit

$$\tau_{xz} = \tau = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) \quad (2.85)$$

angegeben werden. Diese Gleichung liefert aufgrund der obigen Annahmen von eben bleibenden Querschnitten eine konstante Schubspannung τ über den Balkenquerschnitt. Dies trifft in Wirklichkeit jedoch nicht zu. Mithilfe der zugeordneten Schubspannungen² ist ersichtlich, dass am oberen und unteren Rand des Balkens die Schubspannungen zu Null werden, da am Rand in Balkenlängsrichtung keine Schubspannungen auftreten können [48]. Die ungleichmäßige Verteilung von τ wird mit dem Schubkorrekturfaktor κ berücksichtigt indem eine sog. Schubfläche

$$A_\kappa = \kappa A \quad (2.86)$$

eingeführt wird [48, 51, 125]. Auf dieser Schubfläche werden die Schubspannungen in der Bresse-Timoshenko-Theorie als konstant angesehen. Mit den Beziehungen (2.85) und (2.86) folgt aus

¹Diese Theorie ist in der Literatur auch lediglich unter dem Namen Timoshenko bekannt. Nach [58] sind die entsprechenden Differentialgleichungen ebenfalls von Bresse in [22] angegeben.

²Schubspannungen in aufeinander senkrecht stehenden Querschnitten sind gleich groß [48].

(2.73) für die Querkraft [48, 51, 183]

$$Q = \kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right). \quad (2.87)$$

Durch die Gleichungen (2.68), (2.72), (2.84) und (2.87) stehen nun vier Zusammenhänge zur Beschreibung der Schwingung zur Verfügung. Werden nun die Biegemomente und Querkräfte in den Differentialgleichungen der Kräfte- und Momentengleichgewichte ersetzt, entsteht ein System aus zwei gekoppelten partiellen Differentialgleichungen [30, 48, 51, 109, 183]

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) \right] = f_z, \quad (2.88)$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) = 0. \quad (2.89)$$

Unter der Voraussetzung eines konstanten Querschnitts entlang der Balkenlänge kann dieses System zusammengefasst werden. Dazu werden nach einer weiteren Ortsableitung die Beziehungen (2.68) und (2.87) eingesetzt und es ergibt sich die Wellengleichung des Bresse-Timoshenko-Balkens mit [48, 51, 109, 183]

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho I \left(1 + \frac{E}{\kappa G} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = f_z - \frac{EI}{\kappa GA} \frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} + \frac{\rho I}{\kappa GA} \frac{\partial^2 f_z}{\partial t^2}. \quad (2.90)$$

Die Herleitung von (2.90) aus den Beziehungen (2.88) und (2.89) ist in [51] beschrieben. Mit der Annahme eines schubstarren Balkens ($\kappa G \rightarrow \infty$) und unter Vernachlässigung der Rotationsträgheit ($\rho I \rightarrow 0$) vereinfacht sich (2.90) zur Wellengleichung der Euler-Bernoulli-Theorie (2.80).

Um die Wellengleichung einsetzen zu können, muss der Schubkorrekturfaktor κ bestimmt werden. Für einen Rechteckquerschnitt der Höhe h und Breite b ist aus der Literatur unter Einfluss der Querkraft Q der parabelförmige Schubspannungsverlauf

$$\tau(z) = \frac{3Q}{2A} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \quad (2.91)$$

mit einem Maximalwert von $\tau_{\max} = (3Q)/(2A)$ bei $z = 0$ bekannt [48, 52, 128]. Die Minima werden am Rand für $z = \pm h/2$ mit $\tau = 0$ erreicht. Unter Verwendung des Arbeitssatzes aus Gleichung (2.28) kann folgender Zusammenhang

$$\frac{Q^2}{\kappa GA} = \int_A \frac{\tau^2}{G} dA, \quad (2.92)$$

aufgestellt werden [48]. Durch Einsetzen von (2.91) in (2.92) folgt für den rechteckigen Querschnitt der Schubkorrekturfaktor $\kappa = 5/6$ [48]. Schubkorrekturfaktoren für andere Querschnittsformen sind bspw. in [29, 73, 184] zu finden.

Aus Gleichung (2.90) ergibt sich für die freie Wellenausbreitung (2.29) und mithilfe des harmonischen Lösungsansatzes¹ (2.34) die Wellenzahl für B-Wellen in einem Balken nach der

¹Der harmonische Lösungsansatz wird entsprechend der Terme in (2.90) abgeleitet und anschließend dort eingesetzt. Für die schubelastische Platte sind in Absatz 2.3.4.1 die Ableitungen entsprechend ausformuliert (vgl. Gleichung (2.136), (2.137), (2.138) und (2.139) auf Seite 48).

Theorie von Bresse-Timoshenko [51, 58, 125]

$$k_{B,Ba,BT,12} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{E} + \frac{\rho}{\kappa G} \right) \omega^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\rho}{E} + \frac{\rho}{\kappa G} \right)^2 \omega^4 + 4 \frac{\rho A}{EI} \omega^2 - 4 \frac{\rho^2}{E \kappa G} \omega^4}} \quad (2.93)$$

und mit (2.38) kann die Phasengeschwindigkeit

$$c_{B,Ba,BT,12} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{E} + \frac{\rho}{\kappa G} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\rho}{E} + \frac{\rho}{\kappa G} \right)^2 + 4 \frac{\rho A}{EI} \frac{1}{\omega^2} - 4 \frac{\rho^2}{E \kappa G}} \right]^{-1/2} \quad (2.94)$$

berechnet werden.

2.3.3.3. Theorie nach Levinson

Die bisher gemachte Annahme ebener Querschnitte steht im Widerspruch zum parabelförmigen Schubspannungsverlauf eines Rechteckprofils über der Balkenhöhe aus (2.91). Dieser Sachverhalt ist in der Bresse-Timoshenko-Theorie durch den Schubkorrekturfaktor berücksichtigt. In [109] verzichtet Levinson auf einen solchen Faktor und führt statt dessen die Formfunktion χ für die Verschiebung in x -Richtung

$$u_x(x, z, t) = \psi(x, t) z + z^3 \chi(x, t) \quad (2.95)$$

ein. Dieser Verschiebungsansatz gehört zu den Theorien höherer Ordnung, was in der kubischen Potenz von z begründet ist [66, 75, 164, 174]. Aufgrund der Bedingung, dass die Schubverzerrung am oberen und unteren Rand des Balkens verschwindet (für $z = \pm h/2$ gilt $\gamma_{xz} = \gamma = 0$), lässt sich diese Formfunktion ermitteln. Aus den Gleitungen (2.11), den erwähnten Randbedingungen und (2.95) ergibt sie sich zu [109]

$$\chi(x) = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right). \quad (2.96)$$

Die Herleitung der Beziehung (2.96) ist in Anhang B.2.1 detailliert dargestellt. Unter der Annahme eines rechteckigen Balkenquerschnitts mit den Grenzen $z = \pm h/2$ lässt sich aus (2.65), (2.74), (2.95) und (2.96) für das Biegemoment [109]

$$M = \frac{EI}{5} \left(4 \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.97)$$

(Herleitung in Anhang B.2.2) und mit (2.11), (2.16), (2.95) sowie (2.96) für die Querkraft

$$Q = \frac{2}{3} GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) \quad (2.98)$$

ermitteln (Herleitung in Anhang B.2.3) [109]. Das infinitesimal kleine Moment in Folge der Rotationsträgheit nach dem Prinzip von d'Alembert ist für das Balkensegment in Abb. 2.9 mit $dj\ddot{\psi}$ angegeben. Unter Berücksichtigung der Beschleunigungen der einzelnen Massenpunkte des Querschnitts mit Wirkung des entsprechenden Hebelarms in z -Richtung wird es in der Levinson-Theorie [109] durch Integration über die Querschnittsfläche mit

$$\frac{\partial M_d}{\partial x} = \frac{\rho I}{5} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(4\psi - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.99)$$

bestimmt (Herleitung in Anhang B.2.4). Durch Einsetzen von (2.97) und (2.98) in die Differentialgleichungen aus dem dynamischen Kräfte- bzw. Momentengleichgewicht (2.68) und (2.72) ergibt sich das gekoppelte Differentialgleichungssystem [109]

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) \right] = f_z, \quad (2.100)$$

$$\frac{2}{3} AG \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) + \frac{1}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left[EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] = \frac{\rho I}{5} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - 4\psi \right). \quad (2.101)$$

Der d'Alembertsche Trägheitsterm $\partial M_d / \partial x$ aus (2.99) ersetzt dabei im Momentengleichgewicht (2.72) den Term $\rho I \partial^2 \psi / \partial t^2$. Die zu (2.100) und (2.101) korrespondierenden Beziehungen der Bresse-Timoshenko-Theorie sind (2.88) und (2.89). Hier gilt erneut die Annahme eines konstanten Querschnittverlaufs über die Balkenlänge und es folgt die Wellengleichung [109]

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho I \left(1 + \frac{6E}{5G} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{6\rho^2 I}{5G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = f_z - \frac{6EI}{5GA} \frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} + \frac{6\rho I}{5GA} \frac{\partial^2 f_z}{\partial t^2}. \quad (2.102)$$

Diese Beziehung ist identisch mit jener der Bresse-Timoshenko-Theorie (2.90), wenn dort $\kappa = 5/6$ gewählt wird. Die Berechnung der Wellenzahl bzw. der Phasengeschwindigkeit führt erneut auf (2.93) und (2.94). Die Verwendung der Theorie höherer Ordnung bei einem rechteckigen Balkenquerschnitt bringt somit keinen Vorteil im Vergleich zur Theorie nach Bresse-Timoshenko. Eine Verbesserung der Genauigkeit ist dadurch nicht gegeben.

Auf den Unterschied der beiden Theorien im statischen Anwendungsfall wird im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter eingegangen. Informationen hierzu sind in [109] enthalten.

2.3.3.4. Abwandlungen der Bresse-Timoshenko-Theorie

Wird im Balkenmodell nach Bresse-Timoshenko die Verformung in Folge von Schub vernachlässigt, also ein schubstarrer Balken ($\kappa G \rightarrow \infty$) angenommen, ergibt sich aus (2.90) die Wellengleichung

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = f_z \quad (2.103)$$

und damit für die B-Welle die Wellenzahl [58, 125]

$$k_{B,Ba,EB+j} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\rho}{E} \omega^2 + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\rho}{E}\right)^2 \omega^4 + 4 \frac{\rho A}{EI} \omega^2}} \quad (2.104)$$

und entsprechend mit (2.38) die Phasengeschwindigkeit

$$c_{B,Ba,EB+j} = \left[\frac{1}{2} \frac{\rho}{E} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\rho}{E}\right)^2 + 4 \frac{\rho A}{EI} \frac{1}{\omega^2}} \right]^{-1/2}. \quad (2.105)$$

Dieses Modell, das auf Rayleigh zurückgeht [58, 125], berücksichtigt zusätzlich zum Euler-Bernoulli-Modell die Rotationsträgheit und wird aus diesem Grund mit dem Index EB+j gekennzeichnet. Streng mathematisch sind auch hier zwei Lösungen möglich, jedoch ist für die zweite Lösung (negatives Vorzeichen des inneren Wurzelausdrucks) keine physikalische Berechtigung vorhanden. Aus diesem Grund ist sie nicht angegeben.

Des Weiteren soll auch untersucht werden, welchen Einfluss die Vernachlässigung der Rotationssträgheit bei gleichzeitiger Berücksichtigung des Schubeinflusses hat. Die Terme mit dem

Faktor ρI können in (2.90) nicht direkt vernachlässigt werden, da nicht ersichtlich ist, ob sie aus dem Rotations- oder Schubanteil resultieren. Aus diesem Grund wird in (2.69) das infinitesimal kleine Massenträgheitsmoment vernachlässigt ($dj\partial^2\psi/\partial t^2 \rightarrow 0$) und die Herleitung der Bresse-Timoshenko-Theorie erneut vollzogen. Dies führt auf die Wellengleichung der B-Welle auf einem Balken unter Berücksichtigung der Schubverformung zusätzlich zum Euler-Bernoulli-Modell

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{EI\rho}{\kappa G} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f_z - \frac{EI}{\kappa GA} \frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2}. \quad (2.106)$$

Die Herleitung von (2.106) ist in Anhang B.3.1 dargestellt. Die Wellenzahl, basierend auf der Wellengleichung (2.106), der freien Wellenausbreitung (2.29) und des harmonischen Wellenansatzes (2.34), lässt sich mit

$$k_{B,Ba,EB+\tau} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\rho}{\kappa G} \omega^2 + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\rho}{\kappa G}\right)^2 \omega^4 + 4 \frac{\rho A}{EI} \omega^2}} \quad (2.107)$$

berechnen¹. Unter Verwendung von (2.38) folgt aus (2.107) für die Phasengeschwindigkeit

$$c_{B,Ba,EB+\tau} = \left[\frac{1}{2} \frac{\rho}{\kappa G} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\rho}{\kappa G}\right)^2 + 4 \frac{\rho A}{EI} \frac{1}{\omega^2}} \right]^{-1/2}. \quad (2.108)$$

Die Beachtung des Schubeinflusses zusätzlich zur Euler-Bernoulli-Theorie wird mit dem Index EB+ τ gekennzeichnet. Auch hier sind zwei mathematische Lösungen möglich, von denen die zweite ausschließlich komplexwertig wird und deshalb nicht angegeben ist.

Bevor die verschiedenen Balkentheorien und die daraus resultierenden Wellenzahlen im Folgenden miteinander verglichen werden, sind sie zur besseren Übersicht in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

Tabelle 2.1.: Zusammenfassung der Balkentheorien

Name	Index	Wellengleichung	Wellenzahl
Euler-Bernoulli	EB	(2.80)	(2.81)
Bresse-Timoshenko	BT*	(2.90)	(2.93)
Rayleigh-Lösung	EB+j	(2.103)	(2.104)
Schub-Lösung	EB+ τ	(2.106)	(2.107)

*In symbolischer Schreibweise: „BT $\hat{=}$ EB+j+ τ “

Die entwickelte Euler-Bernoulli-Lösung mit berücksichtigtem Schubeinfluss (Schub-Lösung) wird zunächst mit der Theorie nach Bresse-Timoshenko verglichen. Die Beurteilung erfolgt anhand der Wellenzahlen, wobei beim Bresse-Timoshenko-Modell die erste Lösung (Plus vor dem inneren Wurzelausdruck) herangezogen wird. Diese entspricht dem B-Wellen-Mode [58]. Unter Anwendung des zweiten binomischen Satzes ergibt sich aus (2.93) für den hier dargestellten Vergleich

$$k_{B,Ba,BT,1} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{E} + \frac{\rho}{\kappa G} \right) \omega^2 + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\rho}{E} - \frac{\rho}{\kappa G} \right)^2 \omega^4 + 4 \frac{\rho A}{EI} \omega^2}}. \quad (2.109)$$

¹Die Wellenzahl (2.107) ist bereits aus [110] bekannt. Sie wird dort aus einer Wellengleichung hergeleitet, die nicht exakt mit (2.106) übereinstimmt. Der Term $-(EI\partial^2 f_z)/(\kappa GA\partial x^2)$ auf der rechten Seite von (2.106) ist in [110] nicht vorhanden. Aufgrund der Annahme der freien Wellenausbreitung (2.29) gilt für $f_z = 0$ und es ergeben sich im Vergleich mit [110] keine Unterschiede in den Wellenzahlen bzw. Phasengeschwindigkeiten.

Unter Verwendung des Schubmoduls aus (2.17) gilt für den Term

$$\frac{\rho}{\kappa G} = \frac{\rho}{E} \frac{2(1+\nu)}{\kappa}. \quad (2.110)$$

Der zweite Koeffizient auf der rechten Seite von (2.110) wird mit der Variablen

$$C = \frac{2(1+\nu)}{\kappa} \quad (2.111)$$

abgekürzt. Diese Beziehung (2.111) führt für die Bresse-Timoshenko-Lösung (2.109) auf

$$k_{B,Ba,BT,1} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{2E}} \sqrt{C + 1 + \sqrt{(C-1)^2 + 4 \frac{AE}{\rho I} \frac{1}{\omega^2}}}. \quad (2.112)$$

Zusammen mit (2.111) folgt für die Schub-Lösung aus (2.107)

$$k_{B,Ba,EB+\tau} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{2E}} \sqrt{C + \sqrt{C^2 + 4 \frac{AE}{\rho I} \frac{1}{\omega^2}}}. \quad (2.113)$$

Unter den Voraussetzungen $\rho > 0$, $E > 0$, $\nu \geq 0$, $A > 0$, $I > 0$, $\kappa > 0$ und $\omega > 0$ lässt sich zeigen, dass stets die Ungleichung

$$k_{B,Ba,EB+\tau} < k_{B,Ba,BT,1} \quad (2.114)$$

erfüllt ist. Dieser Zusammenhang (2.114) ist in Anhang B.3.2 bewiesen und bedeutet, dass die Wellenzahl der Schub-Lösung stets kleiner ist als die der Bresse-Timoshenko-Theorie. Sofern die Voraussetzungen erfüllt sind, ist diese Aussage auch unabhängig von den gewählten Material- und Geometrieparametern sowie von der betrachteten Frequenz.

Werden die Wellenzahlen der Rayleigh-Lösung aus (2.104) mit der Schub-Lösung (2.107) verglichen, fällt der gleiche Charakter der Dispersionsbeziehung auf. Er ist mit

$$k_{B,Ba,Vgl} = \sqrt{\frac{1}{2} \mathcal{D} \omega^2 + \frac{1}{2} \sqrt{\mathcal{D}^2 \omega^4 + 4 \frac{\rho A}{EI} \omega^2}} \quad (2.115)$$

gegeben. Für die Variable \mathcal{D} gilt in Abhängigkeit der Lösung

$$\mathcal{D} = \begin{cases} \frac{\rho}{E} & \text{für die Rayleigh-Lösung (Index : EB+j)} \\ \frac{\rho}{\kappa G} & \text{für die Schub-Lösung (Index : EB+\tau)}. \end{cases} \quad (2.116)$$

Mit Verweis auf (2.110) wird \mathcal{D} der Schub-Lösung ersetzt und es folgt

$$\mathcal{D}_{EB+\tau} = \frac{2(1+\nu)}{\kappa} \mathcal{D}_{EB+j} \quad (2.117)$$

Wird für die Querkontraktionszahl¹ ein Gültigkeitsbereich von $0 \leq \nu \leq 0,5$ sowie für den Schubkorrekturfaktor von $0 < \kappa \leq 1$ betrachtet, ist $\mathcal{D}_{EB+\tau}$ (Schub-Lösung) mindestens um den

¹Es sind einige Materialien mit einer negativen Querkontraktionszahl bekannt. Diese Werkstoffe werden als auxetisch bezeichnet und können Werte im Bereich $-1 \leq \nu \leq 0,5$ annehmen [34, 99]. Diese werden hier ausgeschlossen.

Faktor 2 bis ∞ größer als \mathcal{D}_{EB+j} (Rayleigh-Lösung). Der Wertebereich für den Schubkorrekturfaktor ist mit Verweis auf [8, 55, 74, 83, 184] festgelegt. Dort sind keine Schubkorrekturfaktoren nach der hier verwendeten Definition (2.86) mit einem Wert $\kappa < 0$ oder $\kappa > 1$ zu finden. Dies schließt auch kompliziert geformte Querschnitte mit Hohlräume ein [55]. In [29] finden sich für den Schubkorrekturfaktor vereinzelt Werte die größer als Eins bzw. kleiner als Null sind. Diese werden aber als nicht plausibel eingestuft [29]. Weiterhin sind aus [73] für rechteckige Querschnitte und für große Verhältnisse von Breite zu Höhe Schubkorrekturfaktoren größer Eins bekannt. Diese Fälle sollen hier ausgeschlossen werden, jedoch wird nicht behauptet, dass diese nicht existieren [5]. Anzumerken ist, dass sich κ oftmals in Abhängigkeit der Querkontraktionszahl ändert [29, 55, 73] und damit für das Verhältnis $\mathcal{D}_{EB+\tau}/\mathcal{D}_{EB+j} = f(\nu)$ gilt. Für einen rechteckigen Balkenquerschnitt mit $\kappa = 5/6$ und Stahl ($\nu = 0,3$) als Werkstoff ergibt sich bspw. $\mathcal{D}_{EB+\tau}/\mathcal{D}_{EB+j} = 3,12$. Folglich gilt nach (2.115) und (2.117) für die vorausgesetzten Gültigkeitsbereiche

$$k_{B,Ba,EB+j} < k_{B,Ba,EB+\tau}. \quad (2.118)$$

Die Ungleichungen (2.114) und (2.118) ergeben im Verbund

$$k_{B,Ba,EB+j} < k_{B,Ba,EB+\tau} < k_{B,Ba,BT,1}. \quad (2.119)$$

Die Wellenzahl der Schub-Lösung nähert sich unter den Voraussetzungen $\rho > 0$, $E > 0$, $0 \leq \nu \leq 0,5$, $A > 0$, $I > 0$, $0 < \kappa \leq 1$ und $\omega > 0$ damit zunehmend der Bresse-Timoshenko-Lösung an und ist im Vergleich zur Rayleigh-Lösung die bessere Approximation.

2.3.3.5. Diskussion

Ein wesentlicher Unterschied zwischen der Ausbreitung einer B-Welle auf einem Balken und der L-Welle in Stäben besteht darin, dass die Wellenzahlen bzw. Phasengeschwindigkeiten der B-Welle Funktionen der Frequenz sind. Dies wird als Dispersion bezeichnet und bewirkt bei einer impulsförmigen Anregung, die eine Vielzahl an Frequenzen enthält, ein „Auseinanderlaufen“ des Wellenpaketes mit zunehmender Ausbreitungsstrecke (Abschnitt 3.1).

Für einen dünnen rechteckigen Balken mit der Höhe $h = 3$ mm aus Stahl ($E = 210$ GPa, $\rho = 7850$ kg/m³, $\nu = 0,3$ und $\kappa = 5/6$) sind in Abb. 2.11 die Phasengeschwindigkeiten der Wellenarten als Funktion der Frequenz miteinander verglichen. Zur Orientierung ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der L-Welle nach (2.50) ebenfalls eingezeichnet. Der Kurvenverlauf des Biegemodells nach Euler-Bernoulli basiert auf (2.82). Der wurzelförmige Verlauf über der Frequenz ist gut ersichtlich. Die Schwächen dieser Theorie sind hier klar erkennbar, denn die Phasengeschwindigkeit strebt für hohe Frequenzen gegen unendlich [26, 58, 138].

In den Balkenmodellen nach Bresse-Timoshenko (2.93) bzw. Levinson (2.94) fällt auf, dass zwei Lösungen existieren. Die erste beschreibt die erwartete Biegemode der B-Welle, die zweite ist als Transversalmode zu interpretieren [58]. Für niedrige Frequenzen wird letztere Lösung komplex, wodurch dieser Mode nicht auftritt. Im Unterschied zu den T-Wellen in einer Scheibe nach (2.61) mit dem Index T, schwingt die T-Welle der Bresse-Timoshenko-Theorie senkrecht zur Mittellinie des Balkens [58].

Ebenfalls ist die Phasengeschwindigkeit des Rayleigh-Modells als „Euler-Bernoulli+j“ aus Gleichung (2.105) angegeben. Sie nähert sich für hohe Frequenzen der Geschwindigkeit der L-Welle bzw. der zweiten Bresse-Timoshenko-Lösung an. Die Schub-Lösung ist in Abb. 2.11 mit „Euler-Bernoulli+ τ “ abgekürzt und kommt der ersten Bresse-Timoshenko-Lösung am nächsten. Aufgrund der Beziehung (2.38) verhalten sich sämtliche Phasengeschwindigkeiten bei gleicher Frequenz umgekehrt proportional zur Wellenlänge. Die Verhältniszeichen in (2.119) müssen für die Phasengeschwindigkeiten demnach invertiert werden.

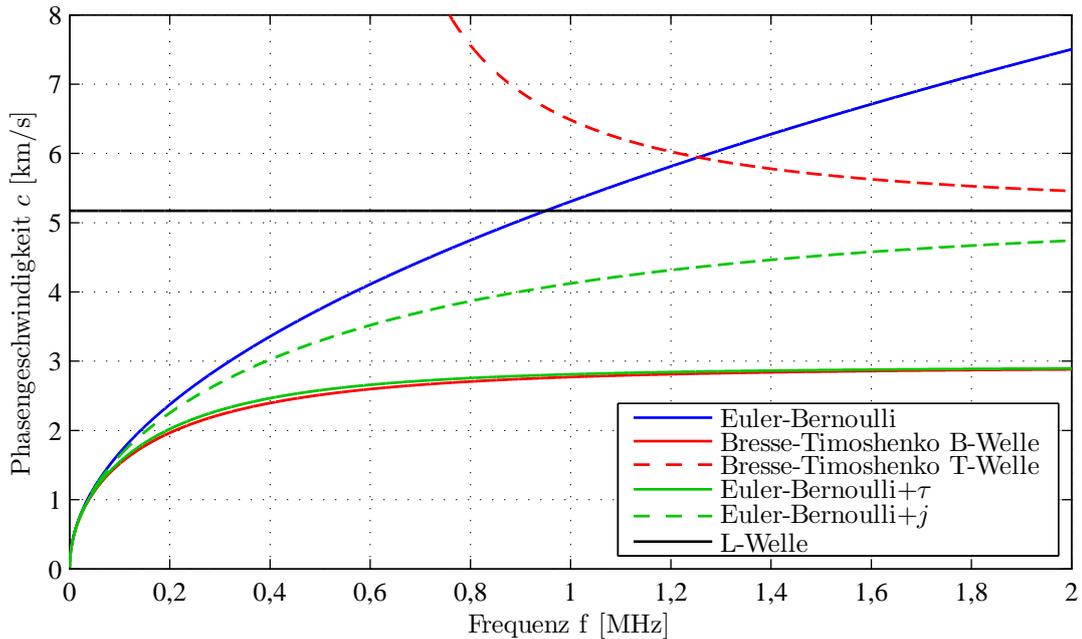


Abbildung 2.11.: Dispersionsdiagramm für Balkenmodelle (Parameter: $h = 3 \text{ mm}$, $E = 210 \text{ GPa}$, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0,3$, $\kappa = 5/6$)

2.3.4. Platte

Die Platte stellt die zweidimensionale Erweiterung des Balkens dar. Im vorangegangenen Absatz sind zur Beschreibung der Balkenbiegung verschiedene Theorien unter Berücksichtigung der Schubspannungen und Rotationsträgheiten als bestmögliche mechanische Modelle aufgeführt. Um die Beschreibung abzukürzen, wird hier zunächst auf die schubelastische Platte eingegangen. Die schubstarre Platte wird nicht im Detail erläutert, da sie aus dem schubelastischen Modell abgeleitet werden kann. Plattenwellen werden im zweiten Teil anhand eines Potentialansatzes beschrieben, womit sich die Frequenzgleichung nach Rayleigh-Lamb ergibt.

2.3.4.1. Schubelastische Platte

Die Darstellung der schubelastischen Platte orientiert sich an [7]. Mindlin entwickelte als erster den nachfolgend vorgestellten kinematischen Ansatz. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle von der Mindlin-Platte gesprochen. Dazu werden zunächst folgende Annahmen getroffen [7]:

- Die „Neutrale Ebene“ der Biegeverformung ist die Mittelfläche.
- Die Verschiebungen sind klein im Vergleich zur Plattendicke.

Weiterhin sollen für die Spannungen und Verzerrungen in Richtung der Plattennormalen

$$\sigma_z = 0 \quad \text{und} \quad \epsilon_z = 0 \tag{2.120}$$

gelten [7, 72]. Diese beiden letzten Annahmen sind nicht widerspruchsfrei, denn die gleichzeitige Definition eines ebenen Spannungszustandes (2.21) und eines ebenen Verzerrungszustandes (2.22) ist streng genommen nicht zulässig [72]. In der Plattentheorie führen sie aber auf akzeptable Näherungen und haben somit ihre Berechtigung [7, 51, 72].

In Abb. 2.12 sind die geometrischen Größen der Platte nach der Verformung an zwei Schnitten dargestellt. Daraus können die kinematischen Beziehungen

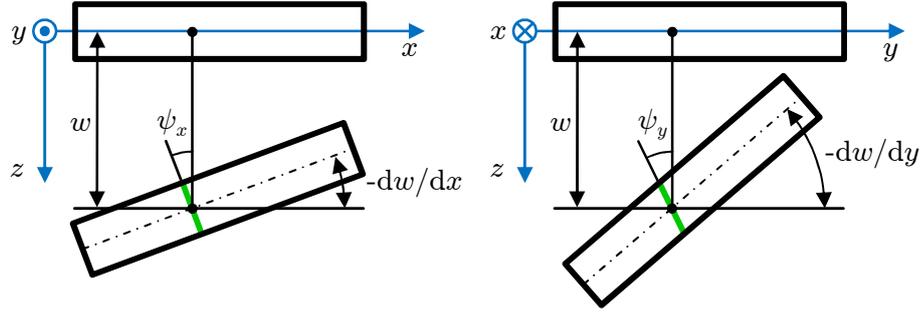


Abbildung 2.12.: Plattendeformation. Die Querschnitte erfahren eine Verschiebung w und, abhängig von der Schnittebene, eine Drehung ψ_x und ψ_y [7]

$$u_x(x, y, z) \approx z\psi_x(x, y), \quad u_y(x, y, z) \approx z\psi_y(x, y) \quad \text{und} \quad u_z(x, y, z) \approx w(x, y) \quad (2.121)$$

abgelesen werden [7, 45, 72]. Die Schnittgrößen werden bei der Plattenmodellierung auf die Kantenlänge bezogen. Für die Biegemomente normal zum Richtungsindex gilt [7, 45, 72, 186]

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad \text{und} \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad (2.122)$$

ebenso für die Torsionsmomente [7, 45, 72, 186]

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (2.123)$$

und für die Querkräfte des jeweiligen Schnittufers [7, 45, 72, 186]

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad \text{und} \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz. \quad (2.124)$$

Die kinematischen Beziehungen (2.121) ergeben nun mit den Gleichungen für die Dehnungen (2.10) sowie Gleitungen (2.11) die Verzerrungen in der Platte. Unter Beachtung der Annahmen (2.120) folgen mit den konstitutiven Gleichungen (2.18) die Spannungen. Diese können mithilfe von (2.122), (2.123) und (2.124) integriert und somit die Schnittreaktionen [7, 45]

$$M_x = K \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad M_y = K \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right), \quad (2.125)$$

sowie [7, 45]

$$M_{xy} = \frac{1-\nu}{2} K \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \quad (2.126)$$

und [7, 45]

$$Q_x = \kappa h G \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \text{und} \quad Q_y = \kappa h G \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.127)$$

berechnet werden. Die Biegesteifigkeit der Platte ist mit

$$K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.128)$$

abgekürzt [7, 26, 45, 137, 138, 186]. In Abb. 2.13 sind an einem infinitesimal kleinen Plattenseg-

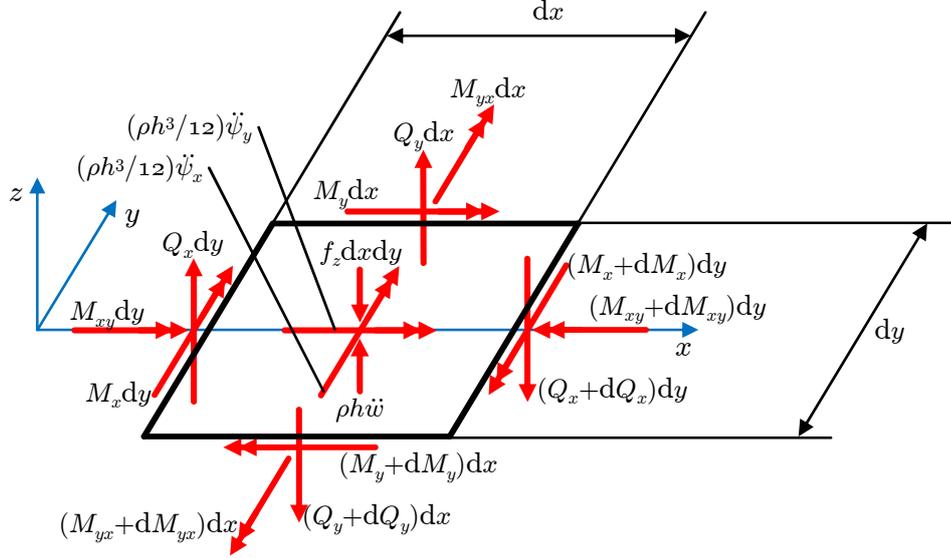


Abbildung 2.13.: Schnittgrößen an einem infinitesimal kleinen Plattensegment. Die Trägheitskraft und Trägheitsmomente sind auf die Fläche bezogen [7, 45]

ment, repräsentiert durch die Plattenmittelfläche, sämtliche Schnittgrößen angetragen. Unter Berücksichtigung des d'Alembertschen Prinzips ergibt das Kräftegleichgewicht in z -Richtung zusammen mit den Momentengleichgewichten in x - und y -Richtung die Gleichgewichtsbedingungen für den dynamischen Fall unter Vernachlässigung von Termen, die von höherer Ordnung klein sind, zu [7]

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + f_z = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2.129)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + Q_x = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x^2}{\partial t^2}, \quad (2.130)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_y^2}{\partial t^2}. \quad (2.131)$$

Nach Einsetzen von (2.125), (2.126) und (2.127) in (2.129), (2.130) und (2.131) folgt das gekoppelte Differentialgleichungssystem [7]

$$\kappa h G \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + f_z = \rho w \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2.132)$$

$$K \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) - \kappa h G \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \quad (2.133)$$

$$K \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) - \kappa h G \left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}. \quad (2.134)$$

Für die Mindlin-Platte ergibt sich aus (2.132), (2.133) und (2.134) durch mehrmaliges Ableiten und ineinander Einsetzen die Wellengleichung [7, 26, 138]

$$K\Delta\Delta w - \left(\frac{\rho K}{\kappa G} + \frac{\rho h^3}{12}\right)\Delta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 h^3}{12\kappa G}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = f_z - \frac{K}{\kappa h G}\Delta f_z + \frac{\rho h^2}{12\kappa G}\frac{\partial^2 f_z}{\partial t^2}. \quad (2.135)$$

Diese partielle Differentialgleichung entspricht in ihrer Struktur jener der Bresse-Timoshenko-Balkentheorie und ist folglich als zweidimensionale Erweiterung zu (2.90) zu sehen. Mit (2.29) wird die rechte Seite der Wellengleichung (2.135) zu Null. Aus dem Lösungsansatz (2.34) ergeben sich durch Ableiten folgende Zusammenhänge:

$$\Delta\Delta w = k^4 w_0 e^{-j(kx-\omega t)}, \quad (2.136)$$

$$\Delta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = k^2 \omega^2 w_0 e^{-j(kx-\omega t)}, \quad (2.137)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = \omega^4 w_0 e^{-j(kx-\omega t)}, \quad (2.138)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\omega^2 w_0 e^{-j(kx-\omega t)}. \quad (2.139)$$

Damit lässt sich die Wellenzahl der B-Welle für eine ebene Ausbreitung entlang einer Richtung in der Schubelastischen Platte nach Mindlin mit

$$k_{B,Pl,M,12} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\rho h^3}{12K} + \frac{\rho}{\kappa G}\right)\omega^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\rho h^3}{12K} + \frac{\rho}{\kappa G}\right)^2\omega^4 + 4\frac{\rho h}{K}\omega^2 - 4\frac{\rho^2 h^3}{12K\kappa G}\omega^4}} \quad (2.140)$$

ermitteln [26, 125, 138]. Über den allgemeinen Zusammenhang (2.38) ergibt sich die Phasengeschwindigkeit zu

$$c_{B,Pl,M,12} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\rho h^3}{12K} + \frac{\rho}{\kappa G}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\rho h^3}{12K} + \frac{\rho}{\kappa G}\right)^2 + 4\frac{\rho h}{K}\frac{1}{\omega^2} - 4\frac{\rho^2 h^3}{12K\kappa G}}\right]^{-1/2}. \quad (2.141)$$

Unter Vernachlässigung der Schubelastizität ($\kappa G \rightarrow \infty$) und der Rotationsträgheit ($\rho h^3/12 \rightarrow 0$) in Gleichung (2.135) kann die einfachere Beziehung der schubstarrten Platte

$$K\Delta\Delta w + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f_z \quad (2.142)$$

erhalten werden [25, 26, 136–138, 181]. Dieses Modell wird auch als Kirchhoff-Platte bezeichnet. Die Wellenzahl [26, 138]

$$k_{B,Pl,K} = \sqrt[4]{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}}\sqrt{\omega} \quad (2.143)$$

und die Phasengeschwindigkeit [26, 136–138]

$$c_{B,Pl,K} = \sqrt[4]{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}}\sqrt{\omega} \quad (2.144)$$

tragen aus diesem Grund den Index K. Grundlage zu deren Bestimmung ist wiederum die freie Wellenausbreitung (2.29), der harmonische Wellenansatz (2.34) sowie die Beziehung (2.38).

2.3.4.2. Plattenwellen nach Rayleigh-Lamb

Aus der Literatur sind weitere Wellenarten bekannt, die in dieser Arbeit bisher noch nicht berücksichtigt sind. Die Oberflächenwelle nach Rayleigh ist hierfür ein Beispiel [2, 26, 46, 138]. Sie tritt nur in halbbunendlichen Medien an der freien Oberfläche auf. Ihre Berechtigung findet sie bspw. in der Beschreibung von seismischen Wellen, die in der Erdkruste auftreten [180]. Weiterführende Informationen sind in [2, 26, 138] enthalten.

Diese Rayleigh-Welle kann nur bei ausreichender Dicke des Materials senkrecht zur Oberfläche entstehen. Für den Fall einer beidseitigen parallelen Begrenzung, wie es bei einer Scheibe oder Platte der Fall ist, wird von einer Plattenwelle (Lamb-Welle) gesprochen. Letztere Wellen werden unterteilt in symmetrische und antisymmetrische Moden [94]. Das prinzipielle Schwingungsbild dieser Moden ist in Abb. 2.14 dargestellt. Die nachfolgende Darstellung des Lösungsweges zur Beschreibung von Plattenwellen orientiert sich an [1, 46].

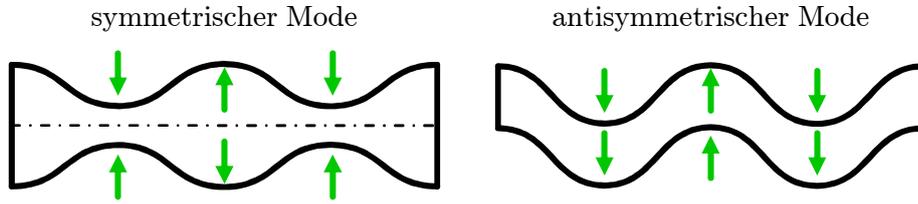


Abbildung 2.14.: Schwingformen des symmetrischen und antisymmetrischen Moden

Die kinematischen Beziehungen (2.10) und (2.11), die Gleichgewichtsbedingungen (2.14) sowie die konstitutiven Gleichungen (2.18) werden in Indexschreibweise unter Anwendung der Einsteinschen Summenkonvention¹ für den allgemeinen Fall mit

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (2.145)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad (2.146)$$

$$\epsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.147)$$

angegeben [1, 7, 51]. Das Kronecker-Delta² wird mit δ_{ij} bezeichnet und für die Indizes gilt $i, j, k = x, y, z$. Die Punkte über der Verschiebung repräsentieren die zweite Zeitableitung. Aus den Gleichungen (2.145), (2.146) und (2.147) folgt unter Vernachlässigung der Körperkräfte f_i die Wellengleichung [1, 51]

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} = \rho \ddot{u}_i. \quad (2.148)$$

Mit Verwendung des Nablaoperators [179]

$$\nabla^T = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right] \quad (2.149)$$

wird diese Beziehung in Vektornotation mit

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.150)$$

geschrieben [1]. Als Lösungsansatz für die Wellengleichung (2.150) wird nach dem Helmholtz-Theorem das Verschiebungsfeld \mathbf{u} aus einem rotationsfreien (Skalarpotential ϕ) und einem divergenzfreien (Vektorpotential $\boldsymbol{\theta}$) Feld zusammengesetzt [1, 3, 42, 46, 179]:

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\theta}. \quad (2.151)$$

¹Über gleiche Indizes wird aufsummiert. Partielle Ableitungen sind im Index durch Kommatrennung und Nennung der Variablen repräsentiert [7, 51].

²Das Kronecker-Delta ist für $i = j$ mit $\delta_{ij} = 1$ und für $i \neq j$ mit $\delta_{ij} = 0$ definiert [7].

Das Einfügen von (2.151) in (2.150) führt auf [1]

$$\mu \nabla^2 (\nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\theta}) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot (\nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\theta}) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\theta}). \quad (2.152)$$

Ein Umsortieren von (2.152) unter Beachtung der Beziehungen [1, 179]

$$\nabla \cdot \nabla \phi = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{\theta} = 0 \quad (2.153)$$

ergibt [1]

$$\nabla \left[(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi - \rho \ddot{\phi} \right] + \nabla \times \left[\mu \nabla^2 \boldsymbol{\theta} - \rho \ddot{\boldsymbol{\theta}} \right] = 0. \quad (2.154)$$

Die Wellengleichung (2.152) bzw. (2.154) wird erfüllt, wenn mit den Abkürzungen [1, 32]

$$\frac{1}{c_L^2} = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \quad \text{und} \quad \frac{1}{c_T^2} = \frac{\rho}{\mu} \quad (2.155)$$

die Zusammenhänge [1, 46]

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c_L^2} \ddot{\phi} \quad \text{und} \quad \nabla^2 \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{c_T^2} \ddot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.156)$$

gelten. Werden die hier definierten Phasengeschwindigkeiten¹ c_L und c_T mit den Geschwindigkeiten $c_{L,\text{Sch}}$ und $c_{T,\text{Sch}}$ des Scheibenmodells aus Gleichung (2.61) verglichen, kann für die L-Welle folgender Quotient

$$\frac{c_L}{c_{L,\text{Sch}}} = \sqrt{\frac{(\nu - 1)^2}{1 - 2\nu}}. \quad (2.157)$$

bestimmt werden. Die konstant angenommene Phasengeschwindigkeit der L-Welle nach Rayleigh-Lamb liegt für den Wertebereich der Querkontraktion von $0 < \nu < 0,5$ daher immer über der Geschwindigkeit nach dem Scheibenmodell. Bei den Phasengeschwindigkeiten der T-Welle ist dies nicht feststellbar, da

$$c_T = c_{T,\text{Sch}} \quad (2.158)$$

gilt. Das Ausschreiben des Helmholtz-Theorems (2.151) führt auf

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_z}{\partial y} - \frac{\partial \theta_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial z} - \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.159)$$

Die Wellenbewegung tritt nur in der xy -Ebene² auf und deswegen kann der ebene Verzerrungszustand aus Gleichung (2.22) angenommen werden [1, 46]. Daraus folgt [1, 46]:

$$u_z = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0. \quad (2.160)$$

¹Die Phasengeschwindigkeit der verschiedenen Wellenmoden besitzen nach dem Potentialansatz von Rayleigh-Lamb eine Frequenzabhängigkeit. Die Größen c_L und c_T dürfen demnach nicht als die wahre Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellenmoden verstanden werden, sondern sind hier als Materialparameter zu interpretieren.

²Im Vergleich zur Plattenmodellierung aus Absatz 2.3.4.1 ist hier das Koordinatensystem gedreht.

Für die Verschiebungskomponenten u_x und u_y ergibt sich aus (2.159) in Kombination mit (2.160) somit [1, 46]

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \text{und} \quad u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (2.161)$$

Die z -Komponente des Vektorpotentials θ wird dazu vereinfachend mit

$$\theta_z = \theta \quad (2.162)$$

geschrieben. Unter Verwendung der Verzerrungsbeziehungen (2.10) und (2.11), des Werkstoffgesetzes (2.20) sowie den Zusammenhängen aus (2.161) lassen sich die Spannungen mit

$$\sigma_y = 2\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \right) + \lambda \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right), \quad (2.163)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (2.164)$$

berechnen [1, 46]. An den Oberflächen der Platte bei $y = \pm h/2$ ist aufgrund der Randbedingung die Normalspannung σ_y sowie die Schubspannung τ_{xy} mit

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (2.165)$$

bekannt [1, 46]. Aus den Beziehungen in (2.156) muss für ebene Wellen

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (2.166)$$

gelten [1, 46]. Unter Verwendung der Lösungsfunktionen

$$\phi = \Phi(y) e^{j(kx - \omega t)} \quad \text{mit} \quad \Phi(y) = \mathcal{A}_1 \sin(\mathcal{P}y) + \mathcal{A}_2 \cos(\mathcal{P}y) \quad (2.167)$$

und

$$\theta = \Theta(y) e^{j(kx - \omega t)} \quad \text{mit} \quad \Theta(y) = \mathcal{B}_1 \sin(\mathcal{Q}y) + \mathcal{B}_2 \cos(\mathcal{Q}y) \quad (2.168)$$

werden die Wellengleichungen in (2.166) erfüllt [1, 46]. \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 , \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 bezeichnen dabei Konstanten. Für die Abkürzungen \mathcal{P} und \mathcal{Q} gelten die folgenden Beziehungen [1, 46]

$$\mathcal{P}^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2 \quad \text{und} \quad \mathcal{Q}^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2. \quad (2.169)$$

Werden in (2.163) und (2.164) nun die Lösungsfunktionen (2.167) und (2.168) eingesetzt, können die Spannungen als Funktion von Φ und Θ mit

$$\sigma_y = 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - jk \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) + \lambda \left(-k^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right), \quad (2.170)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(j2k \frac{\partial \Phi}{\partial y} + k^2 \Theta + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right) \quad (2.171)$$

angegeben werden [1, 46]. Der Term $e^{j(kx - \omega t)}$ wird dabei weggelassen, da er lediglich als Faktor in Erscheinung tritt und mit der Randbedingung (2.165) verschwindet [1, 46]. Für die Betrachtung der Schwingform wird in symmetrische (S-Mode) und antisymmetrische (A-Mode) Moden

unterschieden. Der S-Mode zeichnet sich dadurch aus, dass für die Verschiebungen in x -Richtung nur \cos -Terme und in y -Richtung nur \sin -Terme in den Gleichungen auftreten, womit

$$\Phi = \mathcal{A}_2 \cos(\mathcal{P}y) \quad \text{und} \quad \Theta = \mathcal{B}_1 \sin(\mathcal{Q}y) \quad (2.172)$$

gilt [1, 46]. Daraus ergibt sich für die Spannungen der symmetrischen Schwingform [1, 46]

$$\sigma_y = -2\mu [\mathcal{P}^2 \mathcal{A}_2 \cos(\mathcal{P}y) + jk\mathcal{Q}\mathcal{B}_1 \cos(\mathcal{Q}y)] - \lambda(k^2 + \mathcal{P}^2) \mathcal{A}_2 \cos(\mathcal{P}y), \quad (2.173)$$

$$\tau_{xy} = \mu [-j2k\mathcal{P}\mathcal{A}_2 \sin(\mathcal{P}y) + (k^2 - \mathcal{Q}^2) \mathcal{B}_1 \sin(\mathcal{Q}y)]. \quad (2.174)$$

Im antisymmetrischen Fall treten für die Verschiebung in x -Richtung nur \sin -Terme und in y -Richtung ausschließlich \cos -Terme auf. Unter Verwendung von [1, 46]

$$\Phi = \mathcal{A}_1 \sin(\mathcal{P}y) \quad \text{und} \quad \Theta = \mathcal{B}_2 \cos(\mathcal{Q}y) \quad (2.175)$$

kann damit für die Spannungen

$$\sigma_y = -2\mu [\mathcal{P}^2 \mathcal{A}_1 \sin(\mathcal{P}y) - jk\mathcal{Q}\mathcal{B}_2 \sin(\mathcal{Q}y)] - \lambda(k^2 + \mathcal{P}^2) \mathcal{A}_1 \cos(\mathcal{P}y), \quad (2.176)$$

$$\tau_{xy} = \mu [j2k\mathcal{P}\mathcal{A}_1 \cos(\mathcal{P}y) + (k^2 - \mathcal{Q}^2) \mathcal{B}_2 \cos(\mathcal{Q}y)] \quad (2.177)$$

geschrieben werden [1, 46]. Für diese homogenen Gleichungssysteme ((2.173) und (2.174) bzw. (2.176) und (2.177)) können jeweils Lösungen angegeben werden, sofern die Determinante aufgrund der Randbedingungen (2.165) verschwindet. Für beide Schwingformen kann daraus die bekannte Rayleigh-Lamb-Frequenzgleichung [1, 26, 32, 63, 130, 138, 167, 193]

$$\frac{\tan(\mathcal{Q} h/2)}{\tan(\mathcal{P} h/2)} = - \left[\frac{4k^2 \mathcal{P} \mathcal{Q}}{(\mathcal{Q}^2 - k^2)^2} \right]^{\pm 1}, \quad (2.178)$$

hergeleitet werden, wobei der positive Exponent für den symmetrischen Mode steht. Der antisymmetrische Mode ergibt sich mit -1 . Eine ausführliche Beschreibung dieses Rechenschrittes für die symmetrische Form findet sich in Anhang C. Die transzendente Gleichung (2.178) kann bislang nur numerisch gelöst werden [63, 167]. Sie ist als allgemeine Erweiterung der Mindlin-Gleichung zu sehen und nach [125] die exakteste bekannte Theorie für Plattenwellen. Eine Berechnungsvorschrift zur numerischen Ermittlung der Dispersionsdiagramme aus (2.178) ist in [167] enthalten.

2.3.4.3. Diskussion

In Abb. 2.15 sind für ein Tragwerkselement der Höhe $h = 3$ mm aus Stahl ($E = 210$ GPa, $\rho = 7850$ kg/m³ und $\nu = 0,3$) die Ergebnisse der Platten- und Scheibenmodelle dargestellt. Die diskreten Lösungen der Frequenzgleichung nach Rayleigh-Lamb (2.178) sind durch Punkte repräsentiert. Die symmetrischen Moden werden mit blauer Farbe bzw. mit dem Buchstaben S und nachgestellter Modennummer beginnend bei 0 gekennzeichnet. Für die antisymmetrischen Wellenformen gilt in analoger Weise der rote Punkt bzw. die Bezeichnung A.

Die Äste 0. Modenordnung (S0 und A0) nähern sich bei höheren Frequenzen nicht der Phasengeschwindigkeit der T-Welle in einer Scheibe an, sondern münden in die Phasengeschwindigkeit der reinen Oberflächenwelle nach Rayleigh c_R [26, 138], die für die angegebene Querkontraktionszahl bei 92,6 % bis 93,1 % der T-Wellengeschwindigkeit liegt. Die aus der

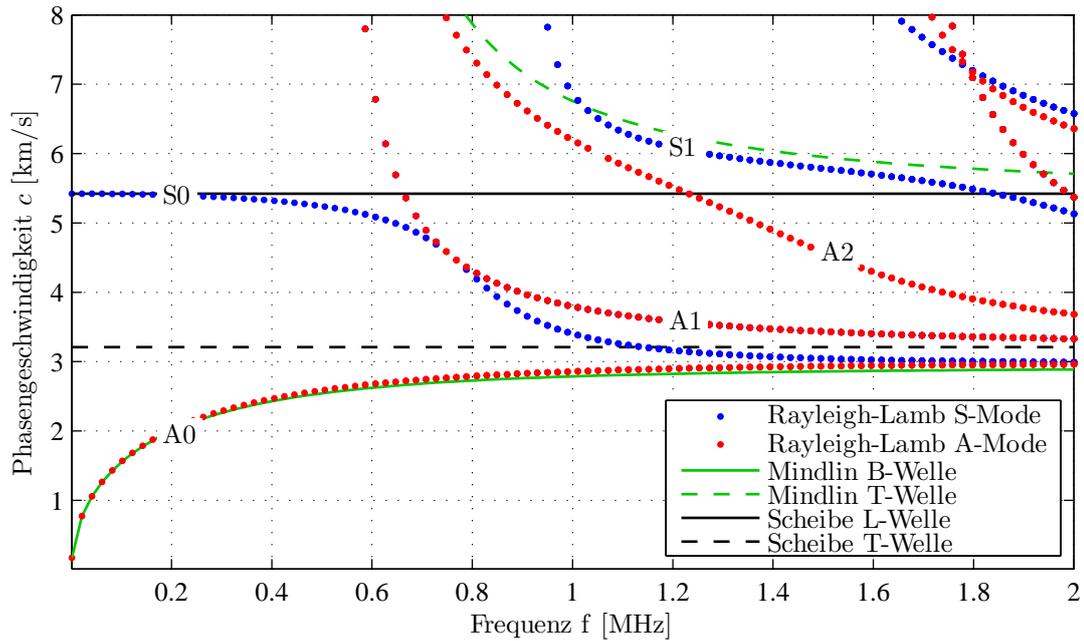


Abbildung 2.15.: Dispersionsdiagramm für Scheiben- und Plattenmodelle (Parameter: $h = 3$ mm, $E = 210$ GPa, $\rho = 7850$ kg/m³, $\nu = 0,3$)

Literatur bekannten Approximationen zur Ermittlung dieser Prozentzahlen sind nachfolgend zusammengefasst:

$$\frac{c_R}{c_T} \approx \begin{cases} \frac{0,862 + 1,14\nu}{1 + \nu} & \text{nach [1]} \\ \frac{0,87 + 1,12\nu}{1 + \nu} & \text{nach [18,94]} \\ \frac{0,874 + 1,12\nu}{1 + \nu} & \text{nach [26,138].} \end{cases} \quad (2.179)$$

Demgegenüber stehen die kontinuierlich berechenbaren Lösungen der Mindlin-Theorie nach (2.141), die in grüner Farbe eingezeichnet sind. Der herkömmliche Biegemode nähert sich mit steigender Frequenz ebenfalls der Rayleigh-Welle an [26,138]. Die zweite Lösung ist wie beim Balken als T-Welle, deren Schwingrichtung senkrecht zur Plattenmittelfläche steht, zu sehen. Diese geht für hohe Frequenzen in die Phasengeschwindigkeit der L-Welle in einer Scheibe nach (2.61) über. Die zweite Lösung dieser Scheibengleichung repräsentiert die T-Welle und ist in schwarzer Farbe gestrichelt eingezeichnet. Sie stellt für Moden höherer Ordnung ($\geq S1$ bzw. $\geq A1$) eine Grenze nach unten hin dar [26,138].

3. Welleneffekte

In der klassischen Physik wird zwischen zwei fundamentalen Konzepten unterschieden: Teilchen und Welle¹ [60, 61, 188]. Das Teilchenmodell beschreibt dabei eine Materiekonzentration, die Energie übertragen kann [61]. Bei der Wellenvorstellung wird von einer Energieverteilung im gesamten Raum ausgegangen, in dem sich die Welle ausbreitet [61]. Die Wellen transportieren Energie, jedoch keine Materie. Durch diesen Energietransport können auch Informationen übertragen werden [61].

Abhängig von der geometrischen Ausdehnung des umgebenden Mediums und der Art der Anregung ergeben sich unterschiedliche Formen der Wellenfronten. In linienförmigen Tragwerkelementen können sich nur ebene Wellen fortpflanzen, wobei die Ausbreitung stets eindimensional ist. Auf Platten ergeben sich bei punktförmiger Anregung Kreiswellen bzw. bei linienförmiger Anregung ebene Wellen. Für sehr große Entfernungen vom Anregepunkt geht die Kreiswelle näherungsweise in eine ebene Welle über. In der Luftschallakustik bzw. in Festkörpern breiten sich ebene Wellen als parallele Flächen aus. Bei punktförmiger Anregung entstehen dort Kugelwellen bzw. bei linienförmiger Anregung Zylinderwellen [108, 133, 137].

In diesem Kapitel liegt der Fokus auf der Körperschallausbreitung in Strukturen. Hier werden alle relevanten Welleneffekte beschrieben, die später in der Simulation abgebildet werden. Zunächst wird auf die Effekte eingegangen, die bei ein- und zweidimensionaler Wellenausbreitung auftreten (Dispersion, Reflexion und Transmission, Materialdämpfung sowie Superposition). Anschließend werden spezielle Eigenschaften der zweidimensionalen Ausbreitung behandelt. Hier wird auf die Amplitudenabnahme der Körperschallwelle bei punktförmiger Anregung auf der Platte, die Beugung und das Huygenssche Prinzip betrachtet.

3.1. Dispersion

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle mit einer einzelnen Frequenz wird als Phasengeschwindigkeit c bezeichnet [26, 138]. Ist diese Geschwindigkeit abhängig von der Kreisfrequenz der Welle, wird von Dispersion gesprochen [189]. Die Biegewelle (B-Welle) ist in jedem Fall dispersiv. Für die Longitudinalwelle (L-Welle) tritt bei einfacher Modellierung keine Dispersion auf. Nach Rayleigh-Lamb ist sie bei sehr hohen Frequenzen ebenfalls dispersiv (Absatz 2.3.4.2).

Bei der Beschreibung transienter Ereignisse die zu Wellenbewegungen führen, wird eine Vielzahl an Frequenzen in das System eingebracht. In Abb. 3.1 wird ein unendlich langer Balken

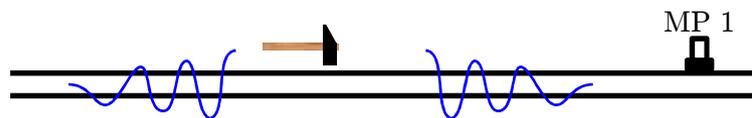


Abbildung 3.1.: Anregung eines unendlich langen Balkens

¹Die strikte Trennung von Teilchen und Welle ist bei der Beschreibung von Vorgängen der Quantenmechanik nicht mehr möglich [188]. Die Objekte im atomaren bzw. subatomaren Bereich verhalten sich dort je nach Art des Experiments als Teilchen oder Welle [60]. Aus diesem Grund wird vom Welle-Teilchen-Dualismus gesprochen [60, 112, 188]. Die Quantenmechanik bildet hierfür jedoch nicht die Grundlage.

durch einen Hammerschlag zu Wellenbewegungen angeregt, die an der Messposition (MP) 1 betrachtet werden. Dieser Eingangsimpuls (E), der ein breites Frequenzspektrum zur Folge hat, ist in Abb. 3.2 in blauer Farbe zu erkennen. Für nicht dispersive Vorgänge ändert sich die Form des Ausgangssignals (A) der Welle nicht, da sich alle Frequenzen gleich schnell ausbreiten [26, 138]. Tritt Dispersion auf, breiten sich i. d. R. die hohen Frequenzen schneller aus als die niedrigen, was zwangsweise zu einem „Auseinanderlaufen“ oder „Verschleifen“ der Wellenform führt [26, 116, 138].

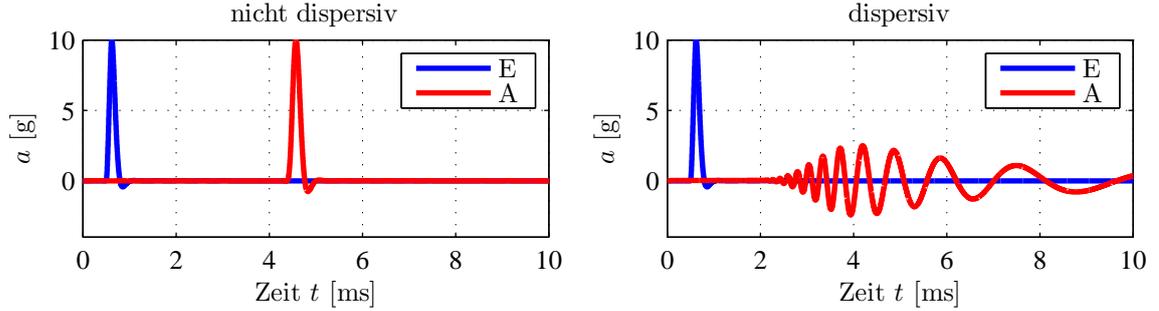


Abbildung 3.2.: Darstellung des Dispersionseffektes. (E) Eingangssignal, (A) Ausgangssignal

Besteht die sich ausbreitende Welle aus mehreren Teilwellen mit ähnlichen Frequenzen, wird von einem Wellenpaket oder einer Wellengruppe gesprochen [26, 138, 162, 167, 178]. Wenn Dispersion vorliegt, ist die Geschwindigkeit dieser Gruppe von der Phasengeschwindigkeit der einzelnen Wellen verschieden [178]. Der Transport von Energie bzw. Information durch eine Wellengruppe breitet sich mit der Gruppengeschwindigkeit aus [26, 138, 178]. Dies ist vor allem bei der Analyse von Messsignalen von Bedeutung, da bei transienten Vorgängen eine Vielzahl an Frequenzen angeregt werden und ein Messaufnehmer immer das gesamte Wellenpaket beobachtet. In Abschnitt 2.3 werden eindimensionale, ebene Wellen mithilfe der Lösungsansätze (2.33) bzw. (2.34) beschrieben. Die Phase der Welle

$$\xi = \omega t - kx \quad (3.1)$$

entspricht dabei dem Argument der cos- bzw. e-Funktion [167]. Schreitet die Welle fort, ändert sich die Phase. Das Inkrement der Phase $d\xi$ zum Zeitpunkt $t = t_0 + dt$ und am Ort $x = x_0 + dx$ beträgt damit [167]

$$d\xi = [\omega(t_0 + dt) - k(x_0 + dx)] - [\omega t_0 - kx_0] = \omega dt - k dx. \quad (3.2)$$

Die Phasenänderungen aller Komponenten derselben Wellengruppe müssen gleich sein [167]. Werden bspw. zwei Komponenten der Gruppe mit dem Index i und j betrachtet, gilt [167]

$$0 = d\xi_i - d\xi_j = (\omega_i - \omega_j) dt - (k_i - k_j) dx. \quad (3.3)$$

Infinitesimal kleine Unterschiede der Kreisfrequenzen ($\omega_i \rightarrow \omega_j$) bzw. Wellenzahlen ($k_i \rightarrow k_j$) ergeben für die Gruppengeschwindigkeit [26, 36, 138, 162, 167, 178]

$$c_G = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (3.4)$$

Neben dieser klassischen Definition der Gruppengeschwindigkeit [167] kann (3.4) auch aus der Schwebung zweier harmonischer Signalverläufe erhalten werden [26, 138, 167]. Wird die

Dispersionsbeziehung der Biegewelle auf einem Balken nach der Euler-Bernoulli-Theorie (2.82) in (3.4) eingesetzt, ergibt sich [26, 138]

$$c_{G,B,Ba,EB} = 2 \sqrt[4]{\frac{EI}{\rho A}} \sqrt{\omega} = 2 c_{B,Ba,EB}. \quad (3.5)$$

In diesem Fall breitet sich die Wellengruppe doppelt so schnell aus, wie eine Welle mit einer einzelnen Frequenz.

Die Berechnung der Dispersion im Zeitbereich ist nur mit numerischen Methoden möglich. In [116] werden mehrere analytische Lösungsansätze vorgestellt, die jedoch aufgrund der nicht vorhandenen Konvergenz der Frequenzspektren nicht berechenbar sind (Anhang D).

3.2. Reflexion und Transmission

Die sich im Körper ausbreitenden Wellen treffen bei realen Bauteilen früher oder später auf Stellen, an denen sich die Bauform oder das Material ändert. Bei solchen mechanischen Impedanzsprüngen an Bauteilrändern oder zwischen einzelnen Bauteilsegmenten wird die einfallende Welle in das ursprüngliche Segment reflektiert. Weiterhin passiert die Welle diese Sprungstelle und setzt ihre Ausbreitung auf dem anderen Segment des Bauteils fort, was als Transmission bezeichnet wird. In Abb. 3.3 ist die einfallende Welle blau, die reflektierte Welle rot und die transmittierte Welle grün dargestellt. Sofern keine hundertprozentige Reflexion oder Transmission erfolgt, wird in jedem Fall die Amplitude der einfallenden Welle größer sein als die der reflektierten bzw. transmittierten Welle. Durch solche Reflexions- und Transmissionsstellen wird die Körperschallwelle in ihrer Amplitude reduziert. Unabhängig davon kann je nach Randbedingung auch eine Phasenänderung hervorgerufen werden. Trifft bspw. eine B-Welle auf einen freien Rand, wird ein Phasensprung um 90° auftreten [26, 116, 117, 138]. Die Reduzierung der Körperschallamplitude durch Reflexion und Transmission wird auch als Dämmung bezeichnet [26, 138].

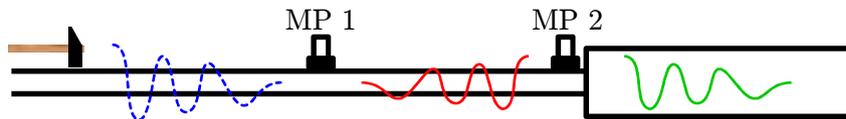


Abbildung 3.3.: Reflexion und Transmission von Wellen. Die einfallende Welle (—) wird reflektiert (—) und transmittiert (—)

Treten Reflexionen bei nicht dispersiver Wellenausbreitung auf, nimmt ein Beobachter lediglich Echos des ursprünglichen Signals wahr. Sind Reflexion und Dispersion gemeinsam vorhanden, wird die ursprüngliche Welle durch Überlagerung zusätzlich verfälscht (s. Abb. 3.4). Durch eine impulsförmige Erregung wird eine B-Welle erzeugt, die am MP 1 als auseinander gelaufene Welle (Abschnitt 3.1) ohne Einwirkung von Reflexion beobachtet werden kann. Diese Welle wird als einfallende Welle (E) bezeichnet. Erreicht sie die Reflexionsstelle am MP 2 (vor Ref.), wird sie dort reflektiert (nach Ref.) und es tritt in diesem Beispiel eine Abnahme der Amplitude auf. Das Ausgangssignal (A) am MP 1 setzt sich aus der Überlagerung der vor- und rücklaufenden Welle zusammen.

Mithilfe der Reflexions- und Transmissionsfaktoren R und T lässt sich die Amplitude der reflektierten Welle X_r sowie die der transmittierten Welle X_t in Abhängigkeit der Amplitude der einfallenden Welle X_e mit

$$X_r = R X_e \quad \text{und} \quad X_t = T X_e \quad (3.6)$$

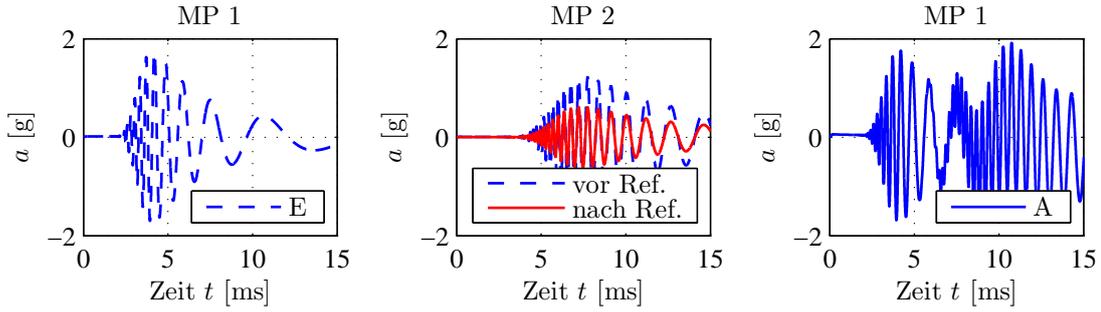


Abbildung 3.4.: Änderung der Wellenform bei dispersiver Wellenausbreitung und Reflexion. (E) Eingangssignal, (Ref.) Reflexion, (A) Ausgangssignal

bestimmen [26, 138]. Diese Faktoren sind von der Wellenart, der Verbindung und oftmals auch von der Frequenz abhängig. Wird die reflektierte Leistung der Körperschallwelle \mathfrak{P}_r bzw. die transmittierte Leistung \mathfrak{P}_t ins Verhältnis zur ursprünglich einfallenden Leistung \mathfrak{P}_e gesetzt, ergeben sich die Reflexions- und Transmissionsgrade \mathfrak{R} und \mathfrak{T} zu [26, 36, 132, 138]

$$\mathfrak{P}_r = \mathfrak{R}\mathfrak{P}_e \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}_t = \mathfrak{T}\mathfrak{P}_e. \quad (3.7)$$

Für die Reflexion und Transmission einer senkrecht einfallenden L-Welle an einer stirnseitigen Verbindung gelten nach [26, 138] aufgrund der Energieerhaltung die Zusammenhänge

$$\mathfrak{R} = |R|^2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{T} = 1 - \mathfrak{R}. \quad (3.8)$$

Bei einem allgemeinen Reflexions- bzw. Transmissionsvorgang können zusätzlich Wellen anderer Art entstehen [26, 94, 138], womit die einfachen Beziehungen aus (3.8) ungültig werden. Trifft bspw. in einem Balken eine B-Welle auf eine rechtwinklige Abkantung, wird eine B- und L-Welle reflektiert sowie transmittiert. Weiterhin entstehen für die reflektierte und transmittierte B-Welle Nahfelder (exponentiell abklingende Überlagerung mit den Wellen an den Rändern). Dieses Phänomen ist auch bei schrägem Einfall auf eine Berandung zu beobachten [26, 94, 138].

In flächigen Bauteilen hängen die Faktoren zusätzlich vom Einfallswinkel auf die Diskontinuität ab. In Abb. 3.5 a) trifft eine schräg einfallende Welle unter dem Winkel φ_e auf eine Sprungstelle. Die Winkel der reflektierten und transmittierten Welle ergeben sich aus dem Gesetz von Snellius, das für den allgemeinen Fall

$$\frac{\sin \varphi_1}{c_1} = \frac{\sin \varphi_2}{c_2} \quad (3.9)$$

lautet [26, 36, 94, 100, 138]. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) der Welle im jeweiligen Medium ist mit c bezeichnet. Für die Winkel der Reflexion φ_r bzw. der Transmission φ_t gilt in Abhängigkeit des Einfallswinkels

$$\varphi_r = \varphi_e \quad \text{und} \quad \varphi_t = \arcsin\left(\frac{c_t}{c_e} \sin \varphi_e\right). \quad (3.10)$$

Sind die Phasengeschwindigkeiten der Bauteile 1 und 2 in (3.9) bzw. (3.10) unterschiedlich, folgt $\varphi_e \neq \varphi_t$. Dies wird als Brechung bezeichnet [64, 94, 157] (s. Abb. 3.5 a)). Für den Fall, dass in (3.10) das Argument des arcsin für den Transmissionswinkel größer Eins wird, ergibt sich für φ_t keine reellwertige Lösung und es wird von Totalreflexion gesprochen.

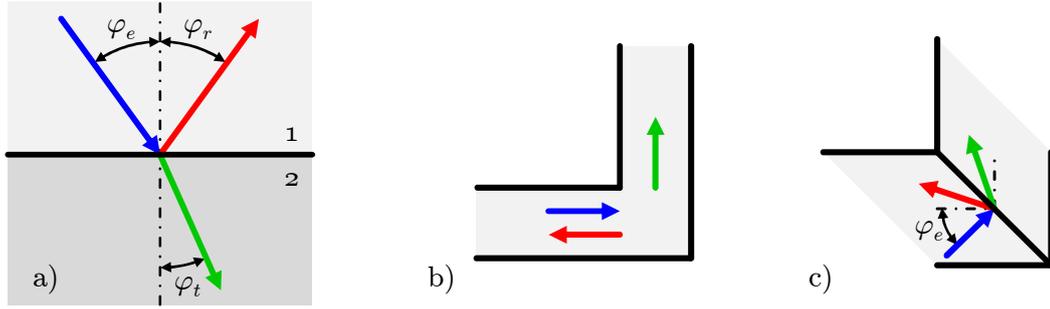


Abbildung 3.5.: Reflexion und Transmission bei schiefem Einfall. a) Gesetz von Snellius [94], b) Rechtwinklige Balkenverbindung, c) Rechtwinklige Plattenverbindung

In Abb. 3.5 b) ist eine rechtwinklige Balkenverbindung dargestellt. Die einfallende Welle ist dort mit \rightarrow , die reflektierte Welle mit \leftarrow und die transmittierte Welle mit \rightarrow gekennzeichnet. Eine mathematische Beschreibung dieser Verbindung findet sich in [26, 138]. Unter den Voraussetzungen, dass eine B-Welle auf die Abkantung einfällt und auf beiden Seiten der Sprungstelle die Querschnittsmaße und Materialien gleich sind, vereinfachen sich die dort angegebene Berechnung der Faktoren für die B-Welle zu

$$R_{BB,Ba} = \frac{\beta^2 - 1 - j\beta}{1 + 3\beta + \beta^2 - j(1 - \beta^2)} \quad \text{und} \quad T_{BB,Ba} = \frac{-2\beta + j(1 - \beta^2)}{1 + 3\beta + \beta^2 - j(1 - \beta^2)} \quad (3.11)$$

mit

$$\beta = \frac{Ik_B^3}{Ak_L}. \quad (3.12)$$

Der Index BB kennzeichnet dabei das Verhältnis von einfallender zu reflektierter bzw. transmittierter B-Welle. Für diese Verbindung werden die Wellenzahlen der L-Welle nach (2.49) bzw. die der B-Welle nach (2.81) berechnet. Bei dieser Verbindung entstehen zusätzlich zu den B-Wellen auch L-Wellen. Auf die Angabe der Faktoren der L-Wellen und die Nahfelder der B-Wellen wird hier verzichtet und stattdessen auf [26, 138] verwiesen.

Als weitere Verbindungsart ist in Abb. 3.5 c) eine rechtwinklige Plattenverbindung dargestellt. Die nachfolgenden Beziehungen sind ursprünglich [26, 138] entnommen. Mit der Annahme, dass beide Platten gleiche Wandstärken und Materialien aufweisen, vereinfachen sie sich zu

$$R_{BB,Pl} = \frac{-2\sqrt{1 + \sin^2 \varphi_e} + j(\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_e} - \cos \varphi_e)}{2\sqrt{1 + \sin^2 \varphi_e} - j(\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_e} + \cos \varphi_e)} \quad (3.13)$$

und

$$T_{BB,Pl} = \frac{j2 \cos \varphi_e}{2\sqrt{1 + \sin^2 \varphi_e} - j(\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_e} + \cos \varphi_e)}. \quad (3.14)$$

Im Gegensatz zu (3.11) tritt hier keine Frequenzabhängigkeit und aufgrund gleicher Wandstärken auch keine Totalreflexion auf. Der Verlauf von Betrag und Phase der Faktoren R und T ist in Abb. 3.6 in Abhängigkeit des Einfallswinkels φ_e dargestellt.

In der Literatur werden noch weitere Verbindungsarten hinsichtlich ihrer Reflexions- und Transmissionseigenschaften für L- und B-Wellen beschrieben. Stirnseitige Verbindungen sind bspw. in [26, 36, 132, 138] zu finden. T- und Kreuzverbindungen von Balken können [26, 132, 138]

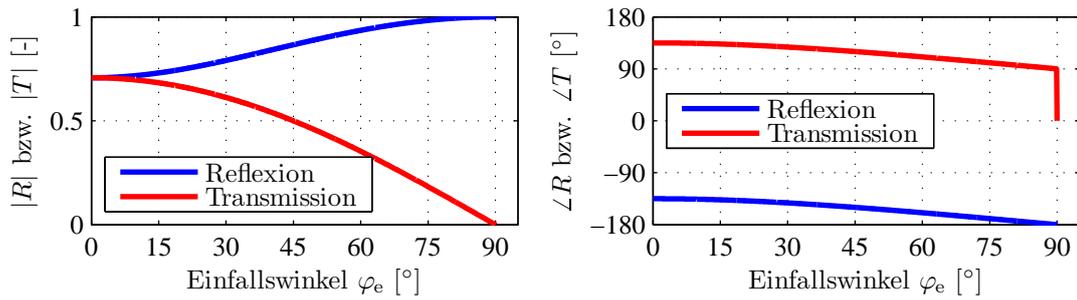


Abbildung 3.6.: Reflexions- und Transmissionsfaktor einer rechtwinkligen Plattenverbindung (unter Annahme gleicher Wandstärken und Materialien)

bzw. von Platten [169] entnommen werden. Die Körperschalldämmung mithilfe von Sperrmassen wird in [26, 132, 138, 169] behandelt. Kommen elastische Zwischenschichten zum Einsatz, ist auf [26, 132, 138] zu verweisen. Es werden oftmals nur die Transmissionsgrade \mathfrak{T} angegeben. Aus ihnen können die Reflexions- und Transmissionsfaktoren ansatzweise bestimmt werden. Eine Berechnung der Phasenlage ist aufgrund der Betragsbildung nicht möglich.

3.3. Materialdämpfung

Bei der Ausbreitung einer Welle durch das Kontinuum erfährt diese eine Dämpfung. Mit zunehmenden Weg und folglich auch mit voranschreitender Zeit wird ihre Amplitude und somit auch die transportierte Energie immer geringer [26, 138]. Dies ist auch bei jedem Vorgang in der Natur zu beobachten, da eine in Gang gesetzte Bewegung ohne Energieeintrag mit fortschreitender Zeit immer zum Erliegen kommt. Diese Materialdämpfung kann über einen komplexen Elastizitätsmodul

$$\underline{E} = E' + jE'' \quad (3.15)$$

abgebildet werden [26, 138]. Als Verhältnis zwischen Imaginär- und Realteil des komplexen E-Moduls wird der Verlustfaktor

$$\eta = \frac{E''}{E'} \quad (3.16)$$

eingeführt [26, 138]. Für den komplexen E-Modul ergibt sich damit [26, 138]

$$\underline{E} = E' (1 + j\eta) . \quad (3.17)$$

Die Größen $E' = E$ und η können messtechnisch erfasst werden [26, 138] und sind für wichtige Materialien in Tabelle 3.1 angegeben.

Tabelle 3.1.: Materialwerte wichtiger Werkstoffe (Richtwerte) [26, 27, 38, 52, 128]

Kennwert	ρ^* [kg/m ³]	E^* [GPa]	ν^* [-]	η_L [-]	η_B [-]
Aluminium	2700	72	0,34	$1 \cdot 10^{-4}$	$0,3 - 10 \cdot 10^{-5}$
Stahl	7850	210	0,30	$2 - 6 \cdot 10^{-4}$	$0,2 - 3 \cdot 10^{-4}$
Kupfer	8900	125	0,35	$2 \cdot 10^{-3}$	$0,2 - 2 \cdot 10^{-3}$
Magnesium	1740	43	0,29	—	$\approx 1 \cdot 10^{-4}$

* Bezugstemperatur 20°C

3. Welleneffekte

Die Betrachtung einer gedämpften Wellenausbreitung in einem Stab führt unter Verwendung von (2.49) und (3.17) auf die komplexe Wellenzahl der L-Welle

$$\underline{k}_L = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega (1 + \eta_L^2)^{-1/4} e^{-j\frac{1}{2} \arctan \eta_L}. \quad (3.18)$$

Bei kleinen Dämpfungen ($\eta_L \ll 1$) kann $\eta_L^2 \approx 0$ und $\arctan \eta_L \approx \eta_L$ angenommen werden. Damit vereinfacht sich (3.18) zu [26, 138]

$$\underline{k}_{L,\text{app}} = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega \left(1 - j\frac{\eta_L}{2}\right). \quad (3.19)$$

Bei der gedämpften B-Wellenausbreitung ergeben sich ähnliche Beziehungen. Wird der komplexe E-Modul (3.17) in die Wellenzahl für die B-Welle auf einem Balken nach der Euler-Bernoulli-Theorie (2.81) eingesetzt, kann die exakte Lösung mit

$$\underline{k}_B = \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI}} \sqrt{\omega} (1 + \eta_B^2)^{-1/8} e^{-j\frac{1}{4} \arctan \eta_B} \quad (3.20)$$

ermittelt werden. Für kleine Dämpfungsfaktoren ($\eta_B \ll 1$) ergibt sich die genäherte Wellenzahl der gedämpften B-Welle auf einem Balken mit [26, 138]

$$\underline{k}_{B,\text{app}} = \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI}} \sqrt{\omega} \left(1 - j\frac{\eta_B}{4}\right). \quad (3.21)$$

Zur Fehlerabschätzung der Näherungen werden die absoluten und relativen Fehler betrachtet. Sie können mit

$$\mathcal{E}_{\text{abs}} = k_{B,\text{app}} - k_B \quad \text{und} \quad \mathcal{E}_{\text{rel}} = \frac{k_{B,\text{app}} - k_B}{k_B} \quad (3.22)$$

bestimmt werden [27, 52]. In Abb. 3.7 sind die komplexen Wellenzahlen für die B-Welle

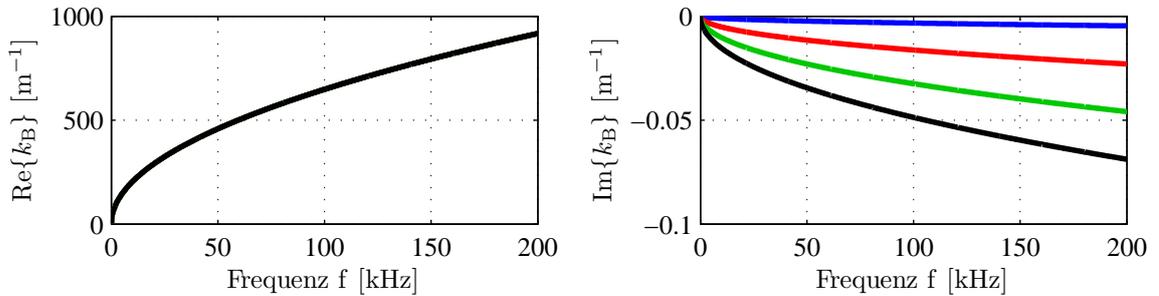


Abbildung 3.7.: Wellenzahlen einer gedämpften B-Wellenausbreitung auf einem Stahlbalken (Legende: — $\eta_B = 0,2 \cdot 10^{-4}$, — $\eta_B = 1,0 \cdot 10^{-4}$, — $\eta_B = 2,0 \cdot 10^{-4}$, — $\eta_B = 3,0 \cdot 10^{-4}$)

auf einem dünnen rechteckigen Balken mit der Höhe¹ $h = 1,0$ mm aus Stahl ($E = 210$ GPa und $\rho = 7850$ kg/m³) angegeben. Die linke Spalte zeigt dabei den Realteil und die rechte Spalte den Imaginärteil an. Der Realteil ändert sich bei den verschiedenen Dämpfungsfaktoren kaum. Folglich liegen alle Varianten eng beieinander und daher ist nur die schwarze Kurve zu erkennen. Der absolute Fehler ist in Abb. 3.8 als Funktion über der Frequenz dargestellt. Bei einem maximalen Verlustfaktor von $\eta_B = 3,0 \cdot 10^{-4}$ und einer Frequenz von 200 kHz

¹Für größere Werte von h verringern sich die absoluten Fehler. Die relativen Fehler sind unabhängig von $\sqrt[4]{\rho A \omega^2 / (EI)}$ und folglich bleiben sie konstant.

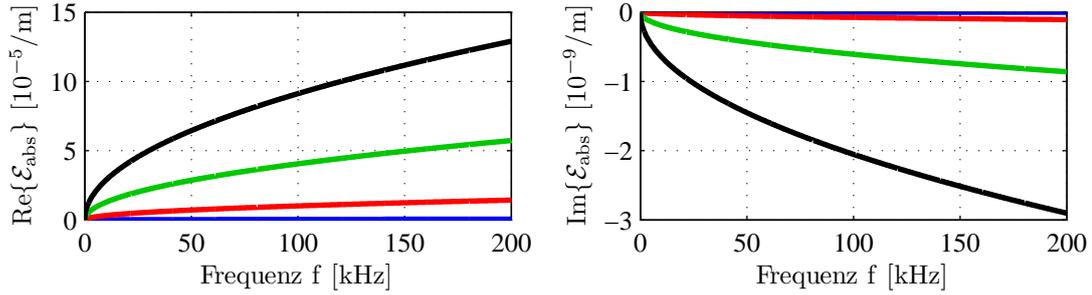


Abbildung 3.8.: Absoluter Fehler einer gedämpften B-Wellenausbreitung auf einem Stahlbalken (Legende: — $\eta_B = 0,2 \cdot 10^{-4}$, — $\eta_B = 1,0 \cdot 10^{-4}$, — $\eta_B = 2,0 \cdot 10^{-4}$, — $\eta_B = 3,0 \cdot 10^{-4}$)

weicht die Näherung des Realteils lediglich um $14 \cdot 10^{-5}/\text{m}$ von der exakten Lösung ab. Die Differenz des Imaginärteils ist um mehrere Zehnerpotenzen geringer. Der relative Fehler, der in Abb. 3.9 dargestellt ist, ist unabhängig von der Frequenz. Er ist über die verschiedenen Dämpfungsfaktoren aufgetragen, die der Tabelle 3.1 entnommen sind. Die verschiedenen Farben repräsentieren die unterschiedlichen Werte. Die genäherte Wellenzahl für eine gedämpfte Ausbreitung der B-Welle (3.21) kann aufgrund der geringen Abweichung für die angegebenen Verlustfaktoren verwendet werden.

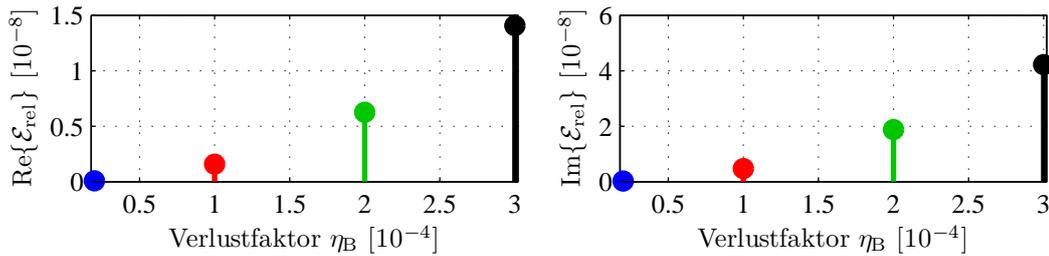


Abbildung 3.9.: Relativer Fehler einer gedämpften B-Wellenausbreitung auf einem Stahlbalken

3.4. Superpositionsprinzip

Treffen mehrere einzelne Wellen an einem Ort \mathbf{x} zur selben Zeit t zusammen, überlagern sie sich. Die Einzelwellen addieren sich zu einer resultierenden Wellenform [189]. Diese Überlagerung erfolgt in ungestörter Weise, d. h. die Wellen beeinflussen sich nicht gegenseitig [178]. Dieser Effekt wird als lineare Superposition bezeichnet und berechnet sich aus der algebraischen Summe der einzelnen Komponenten [64]. Für verschiedene Zeiten ist in Abb. 3.10 diese Überlagerung für zwei entgegenlaufende Wellen dargestellt. Es kann dabei eine kurzzeitige Überhöhung ($t = 0,44$ ms bzw. $t = 0,56$ ms) der Amplitude sowie eine komplette Auslöschung ($t = 0,5$ ms) erfolgen. Die mathematische Formulierung des Superpositionsprinzips ist bspw. für die Körperschallschwingungsgeschwindigkeit mit

$$v(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n v_i(\mathbf{x}, t) \quad (3.23)$$

gegeben [25]. Die Komponenten v_i stellen dabei die Funktionen der ursprünglich einzelnen Wellen dar. Für diese Einzelwellen ist die Phasengeschwindigkeit die ausschlaggebende Ausbreitungsgeschwindigkeit (Abschnitt 3.1).

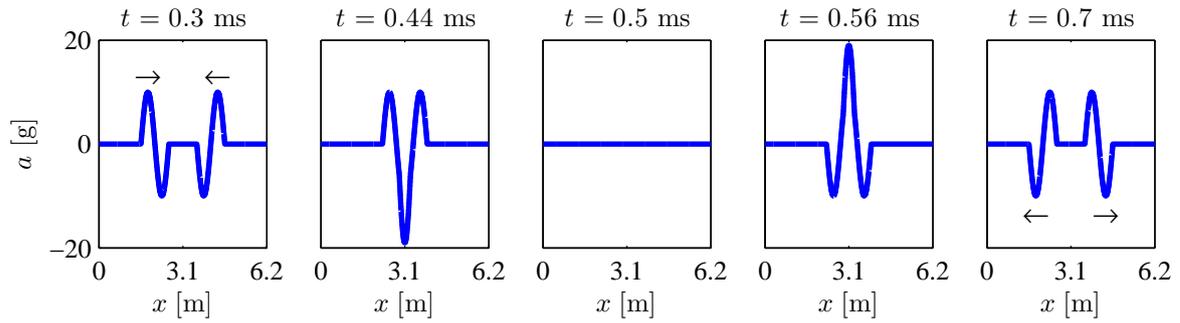


Abbildung 3.10.: Superposition zweier Wellen an verschiedenen Zeiten. Zwei L-Wellen in einem Stahlstab bei einer Frequenz von $f = 5$ kHz überlagern sich

Die Gültigkeit des Superpositionsprinzips ist auch die Voraussetzung, um beliebige Signale mithilfe der Fourieranalyse in die spektralen Anteile zerlegen zu können.

Für jede Welle, die durch eine lineare Wellengleichung beschreibbar ist, gilt das Superpositionsprinzip [61]. Treten sehr große Amplituden auf, können nichtlineare Effekte eine Rolle spielen. Damit ist das Superpositionsprinzip nicht mehr gültig [64, 189].

3.5. Amplitudenabnahme auf der Platte

Bei der Ausbreitung von B-Wellen auf einer Platte muss im Gegensatz zum Balken zusätzlich der Effekt der Amplitudenabnahme berücksichtigt werden. Mit zunehmenden Abstand r von der Anregerstelle nimmt hier die Amplitude der Welle ab [26, 137, 138]. Wird eine unendlich ausgedehnte Platte punktförmig angeregt, breiten sich die Wellen in konzentrischen Kreisen in zwei Dimensionen aus (s. Abb. 3.11 links). Aufgrund des Energieerhaltungssatzes verteilt sich die eingebrachte Energie mit dem Fortschreiten der Welle auf eine immer größer werdende Fläche (Kreisumfang \times Plattendicke). Mit geringer werdender Energie pro Flächeneinheit nimmt folglich die Amplitude der Welle ab.

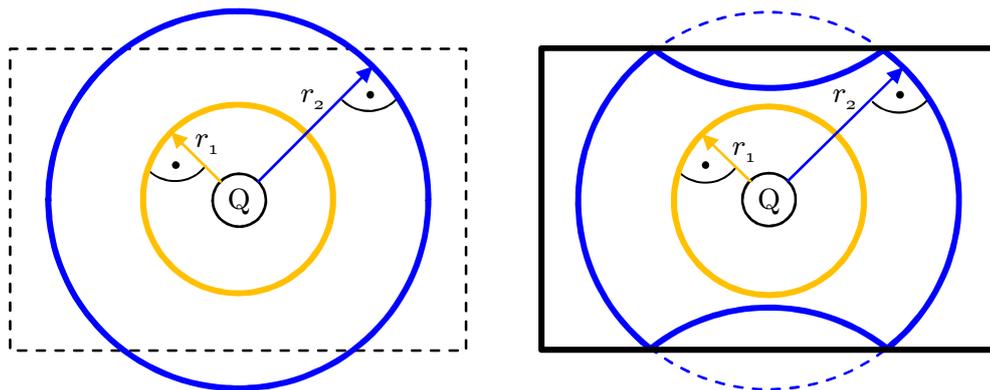


Abbildung 3.11.: Wellenausbreitung durch punktförmige Anregung an der Quelle Q . unendliche Platte (links), allseitig begrenzte Platte (rechts)

In Abb. 3.11 auf der rechten Seite ist eine allseitig begrenzte Platte dargestellt. Die Wellenfronten treten hier nicht über die Plattenränder hinaus, werden dort aber reflektiert. Die Wellenfront wird an den Rändern gespiegelt. Der Umfang der Kreislinie bleibt dabei gleich und es ergibt sich für die Amplitudenabnahme kein Unterschied zur unbegrenzten Platte [116].

In [137] wird eine Beziehung für die Amplitudenabnahme von B-Wellen angegeben, in der die Amplitude umgekehrt proportional zu \sqrt{r} ist. Dieser Zusammenhang ist jedoch nur für größere Entfernungen gültig. Zunächst können kleine Entfernungen nicht ausgeschlossen werden. Folglich ist eine allgemeine Beschreibung notwendig. Diese orientiert sich an [26, 138] und wird für die transversale Durchsenkung w angegeben. Mit der komplexen Zeigerschreibweise

$$\underline{w} = \underline{w}_0 e^{j\omega t} \quad (3.24)$$

zur Darstellung harmonischer Vorgänge lässt sich die Wellengleichung der B-Welle auf einer Platte nach Kirchhoff (2.142) mit der Annahme einer freien Wellenausbreitung (2.29) im Frequenzbereich mit

$$\Delta \Delta \underline{w} - k_B^4 \underline{w} = (\Delta - k_B^2) (\Delta + k_B^2) \underline{w} = 0 \quad (3.25)$$

ermitteln [26, 138]. Für die Wellenzahl gilt $k_B = k_{B,PI,K}$ aus (2.143). Eine Zerlegung von (3.25) anhand der dritten binomischen Formel führt auf zwei Differentialgleichungen [26, 138]

$$\Delta \underline{w}_1 + k_B^2 \underline{w}_1 = 0 \quad \text{und} \quad \Delta \underline{w}_2 - k_B^2 \underline{w}_2 = 0. \quad (3.26)$$

In [26, 138] wird dieses Gleichungssystem mithilfe der Hankelfunktion 0. Ordnung sowie 2. Art $\mathcal{H}_0^{(2)}$ unter Beachtung nachfolgender Randbedingungen gelöst:

- Die Lösung ist rotationssymmetrisch.
- An der Anregestelle treten keine Drehbewegungen auf.
- Die anregende Kraft ist die Summe der Querkräfte an der Anregestelle.
- Die Lösung genügt der Sommerfeldschen Ausstrahlbedingung.

Mit den Konstanten C_1 und C_2 ergeben sich die folgenden Teillösungen [26, 138]

$$\underline{w}_1 = C_1 \mathcal{H}_0^{(2)}(k_B r) \quad \text{und} \quad \underline{w}_2 = C_2 \mathcal{H}_0^{(2)}(-jk_B r). \quad (3.27)$$

Aus der Summe der Teillösungen folgt mit

$$\underline{w} = C_1 \mathcal{H}_0^{(2)}(k_B r) + C_2 \mathcal{H}_0^{(2)}(-jk_B r) \quad (3.28)$$

die Gesamtlösung [26, 138]. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen für die Durchsenkung an der Stelle $r = 0$ kann für die Konstanten [26, 138]

$$\underline{w}(r = 0) = \underline{w}_0 = C_1 = -C_2 \quad (3.29)$$

angegeben werden. Die Gesamtlösung ist damit [26, 138]

$$\underline{w} = \underline{w}_0 \left[\mathcal{H}_0^{(2)}(k_B r) - \mathcal{H}_0^{(2)}(-jk_B r) \right]. \quad (3.30)$$

Die Differenz der beiden Hankelfunktionen wird als Ausbreitungsfunktion

$$\Pi(k_B r) = \mathcal{H}_0^{(2)}(k_B r) - \mathcal{H}_0^{(2)}(-jk_B r) \quad (3.31)$$

bezeichnet und repräsentiert das Verhältnis der Amplitude \underline{w} im Abstand r zu anregender Amplitude \underline{w}_0 [26, 138]. Für große Argumente der Hankelfunktion sind in [26, 138] die Näherungen

$$\mathcal{H}_0^{(2)}(k_B r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_B r}} e^{-j(k_B r - \frac{\pi}{4})} \quad \text{und} \quad \mathcal{H}_0^{(2)}(-jk_B r) \approx j \sqrt{\frac{2}{\pi k_B r}} e^{-k_B r} \quad (3.32)$$

zu finden. Unter Verwendung dieser Approximationen ergibt sich für die Ausbreitungsfunktion

$$\Pi(k_B r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_B r}} \left(e^{-jk_B r + j\frac{\pi}{4}} - j e^{-k_B r} \right). \quad (3.33)$$

In erster Linie ist das Verhältnis von \underline{w} zu \underline{w}_0 ohne Beachtung der Lage der komplexen Zeiger wichtig [26, 138]. Folglich wird die Ausbreitungsfunktion betragsmäßig betrachtet und (3.33) führt auf die Näherung

$$|\Pi|_{\text{app}} = \sqrt{\frac{2}{\pi k_B r}} \sqrt{1 - \sqrt{2} [\cos(k_B r) - \sin(k_B r)] e^{-k_B r} + e^{-2k_B r}}. \quad (3.34)$$

Der zweite Wurzelausdruck in dieser Beziehung strebt für große $k_B r$ gegen Eins. Als Ergebnis kann die asymptotische Approximation

$$|\Pi|_{\text{app,asy}} = \sqrt{\frac{2}{\pi k_B r}} \quad (3.35)$$

verwendet werden [26, 138]. In Abschnitt 4.4 wird die Näherung (3.35) mit der exakten Lösung (3.31) verglichen und mithilfe einer Tangente hinsichtlich einer besseren Approximation erweitert.

3.6. Beugung

Trifft eine Welle nur teilweise auf ein Hindernis, bewegt sie sich an den Rändern nicht nur gerade weiter, sondern wird auch in den geometrischen Schattenraum gebeugt (s. Abb. 3.12). Das Verhältnis von Wellenlänge zu den Abmessungen der Hindernisse entscheidet dabei über die Relevanz des Beugungseffektes [178, 189]. Der Beugungseffekt ist klein, wenn die Abmessungen der Hindernisse groß gegenüber der Wellenlänge sind. Ist das Hindernis jedoch klein gegenüber der Wellenlänge, ist der Beugungseffekt deutlich zu beobachten [189]. Luftschall im hörbaren Bereich besitzt im Allgemeinen eine große Wellenlänge gegenüber alltäglichen Hindernissen. Befindet sich bspw. auf einem freien Feld ein Baum in direkter Verbindung zwischen einer Schallquelle und einem Beobachter, ist die Schallquelle immer noch aufgrund der Beugung wahrzunehmen. Anders verhält es sich mit Licht im sichtbaren Bereich, da hier die Wellenlängen sehr klein gegenüber dem Hindernis sind. Der Beugungseffekt kann hier nicht leicht beobachtet werden. Aus diesem Grund kann i. d. R. auch von einer geradlinigen Ausbreitung des Lichts

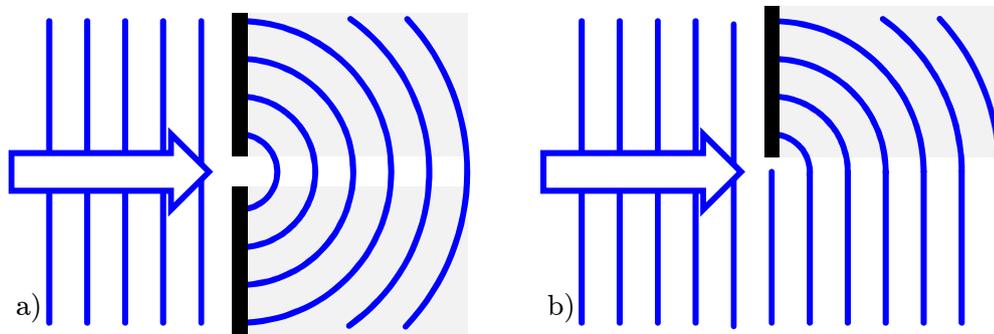


Abbildung 3.12.: Ausbreitung einer Welle in den Schattenraum (grau hinterlegt). a) spaltförmige Hindernisse, b) einseitige Barrieren

ausgegangen werden. Das Auflösungsvermögen von Systemen, die mithilfe reflektierter Wellen arbeiten, ist durch die Beugung jedoch eine natürliche Grenze gesetzt. Wellen, deren Wellenlänge gleich oder größer der Abmessung von Hindernissen sind, werden von diesen nicht reflektiert [189]. Folglich können in einer ersten Näherung bei der Modellierung der Struktur vereinzelt vorkommende Diskontinuitäten (in Fahrzeugen z. B. Bohrungen, Anschraubbolzen, kleine Halter u. s. w.) vernachlässigt werden.

3.7. Huygenssches Prinzip

Das nach dem holländischen Physiker Christiaan Huygens benannte Prinzip beschreibt die Form einer Welle bei ihrer Ausbreitung folgendermaßen [64]:

- Jeder Punkt einer Wellenfront (die Primärwelle) ist Ausgangspunkt einer sekundären Elementarwelle.
- Die Einhüllende aller Elementarwellen beschreibt die Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt.
- Die Elementarwellen besitzen die gleiche Frequenz, Phasenlage und Ausbreitungsgeschwindigkeit wie die Primärwelle.

Aus dem letzten Postulat folgt, dass die Elementarwellen vom Medium abhängig sind, in dem sie sich ausbreiten. Ist dieses Medium homogen, können die Radien der Elementarwellen mit endlichen Radien konstruiert werden [64]. Bei inhomogenen Medien ist mit infinitesimal kleinen Radien zu arbeiten [64].

Die Überlegungen von Fresnel, die das Prinzip von Huygens um den Vorgang der Interferenz erweitern, vervollständigen diesen Sachverhalt. Als Interferenz wird im Allgemeinen die Überlagerung von Wellen mit festen Phasenbedingungen verstanden. Das Fresnel-Huygens-Prinzip fordert zusätzlich, dass die Ausbreitung einer Welle unter der gegenseitigen Interferenz der entstehenden Elementarwellen stattfindet [64, 111]. Eine mathematische Bestätigung dieses Prinzips findet sich in [108].

Bereits Huygens berücksichtigte die Richtung der Elementarwellenausbreitung indem er die rücklaufende Elementarwelle vernachlässigte [157]. Aus der ursprünglichen Annahme würde sich eine rückwärts bewegende Welle ableiten lassen, die jedoch nicht zu beobachten ist [64]. In Abb. 3.13 ist dies bereits berücksichtigt. Daher sind dementsprechend nur vorwärtsgerichtete halbkreisförmige Elementarwellen eingezeichnet. Die Wellenausbreitung

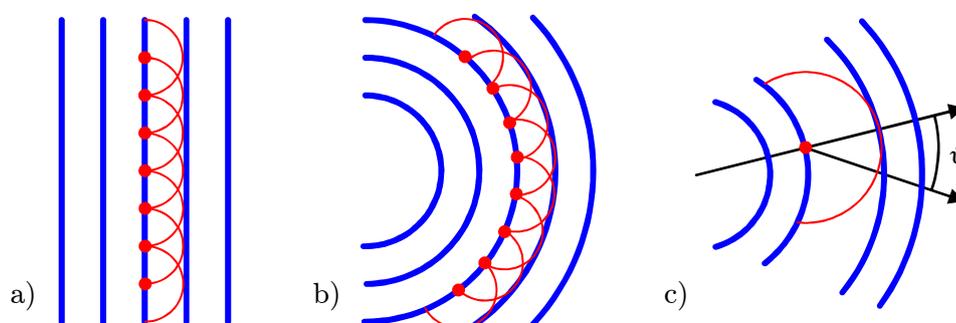


Abbildung 3.13.: Fresnel-Huygens-Prinzip. a) ebene Welle [178], b) kreisförmige Welle [178], c) Ablenkung der Elementarwelle um den Winkel ϑ

ebener Wellen (s. Abb. 3.13 a)) kann damit ebenso wie die Ausbreitung kreisförmiger Wellen (s. Abb. 3.13 b)) beschrieben werden [178]. Vor allem der Effekt der Beugung, aber auch die Reflexion sowie Brechung lassen sich mit dem Fresnel-Huygens-Prinzip erklären [178].

Die Amplitude der um den Winkel ϑ von der ursprünglichen Ausbreitungsrichtung abgelenkten Elementarwelle (s. Abb. 3.13 c)) wird mit dem Richtungsfaktor $\mathcal{K}(\vartheta)$ erfasst. Für die freie Ausbreitung von Lichtwellen (transversale Kugelwellen [157]) sind aus der Literatur Beziehungen für den Richtungsfaktor bekannt. Basierend auf der skalaren Beugungstheorie nach Kirchhoff wird in [64, 157] der Faktor mit

$$\mathcal{K}(\vartheta) = \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \quad (3.36)$$

angegeben. Ein von (3.36) abweichender Richtungsfaktor findet sich in [20]. Dieser geht ursprünglich auf Stokes zurück und bezieht zusätzlich einen Phasensprung, indem mit $-j$ multipliziert wird, sowie die Wellenlänge in die Berechnung mit ein [20]. Trotz des unterschiedlichen Vorfaktors sind beide Richtungsfaktoren in ihrem Charakter identisch, da sie, multipliziert mit der ursprünglichen Amplitude der Welle, die Elementarwelle in alle Richtungen abschwächen, die nicht mit der direkten Ausbreitungsrichtung der primären Wellenfront übereinstimmen [64, 157]. Für eine Winkelablenkung von -180° bis 180° ist der Richtungsfaktor (3.36) in Abb. 3.14 aufgetragen.

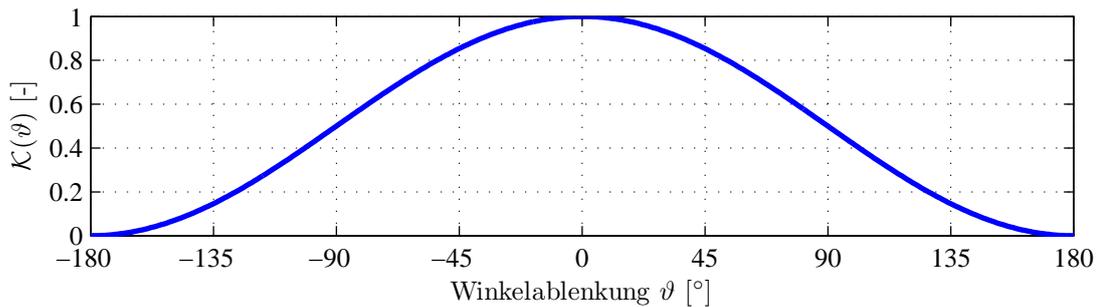


Abbildung 3.14.: Richtungsfaktor $\mathcal{K}(\vartheta)$ (berechnet nach (3.36))

Für die Ausbreitung von B-Wellen auf Platten sind aus der Literatur keine entsprechenden Richtungsfaktoren bekannt.

4. Eigenschaften des Ausbreitungsbereichs

Der Ausbreitungsbereich fasst den gesamten Raum zusammen, in dem die Wellenausbreitung des Körperschalls stattfindet. Er weist folgende Eigenschaften auf:

- Der Ausbreitungsbereich liegt als Festkörper vor.
- Die Werkstoffeigenschaften sind homogen und isotrop. Das Werkstoffverhalten wird als linear-elastisch vorausgesetzt (Abschnitt 2.2).
- Der Ausbreitungsbereich ist eine zusammenhängende Struktur beliebiger Form.
- Die Struktur kann in einzelne, untereinander verbundene Elemente unterteilt werden.
- In einem Element findet die Wellenausbreitung statt (Abschnitt 2.3 bzw. 3.1, 3.3, 3.5).
- An den Elementrändern tritt Reflexion und/oder Transmission (Abschnitt 3.2) auf.
- Die Anregung der Struktur erfolgt an diskreten Punkten.

Der Ausbreitungsbereich lässt sich für die Anwendung der Simulation auf Fahrzeugkarossen weiter spezifizieren. Die Struktur setzt sich in diesem Fall hauptsächlich aus flächigen Elementen zusammen, die als Scheibe oder Platte modelliert werden. Vereinzelt Bauteile können als linienförmige Stab- oder Balkenelemente approximiert werden (z. B. der Längsträger (LT)). In Abb. 4.1 ist für die Körperschallausbreitung die relevante Struktur einer Fahrzeugkarosserie schematisch dargestellt. Die Einzelteile der Karosse werden gewöhnlich aus umformenden Fertigungsverfahren, wie z. B. Tiefziehen, hergestellt und anschließend zusammengefügt (Schweißen, Kleben u. a.) [28, 196]. Als Ausgangsmaterial werden dazu Stahlbleche bis max. 3,0 mm verwendet. Am gebräuchlichsten sind im Automobilbau jedoch Blechstärken bis 1,0 mm [204].

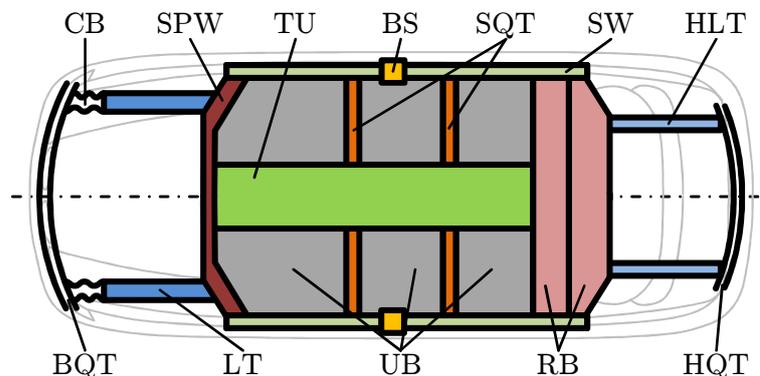


Abbildung 4.1.: Für die Körperschallausbreitung relevante Struktur einer Fahrzeugkarosserie (Crashbox (CB), Spritzwand (SPW), Tunnel (TU), B-Säule (BS), Sitzquerträger (SQT), Schweller (SW), Hecklängsträger (HLT), Biegequerträger (BQT), Längsträger (LT), Unterboden (UB), Rückbank (RB), Heckquerträger (HQT))

Aufgrund der geforderten Reduzierung des Fahrzeuggewichts kommen auch andere Materialien zum Einsatz. Hier ist gegenwärtig vor allem Aluminium zu nennen, das meist in Form stranggepresster Hohlprofile zur Anwendung kommt [152]. Die Wandstärken der verwendeten Rechteckrohre liegen ebenfalls hauptsächlich im Bereich bis 3,0 mm.

In den nachfolgenden Kapiteln werden die speziellen Eigenschaften der Fahrzeugstruktur für die Berechnung der Körperschallausbreitung untersucht. Als erster Schritt erfolgt eine Bewertung der verschiedenen Wellenarten hinsichtlich ihrer Relevanz. Hier wird das Ziel verfolgt, die dominante Wellenart zu identifizieren und das Simulationsverfahren entsprechend auf diese abzustimmen. Für diese Wellenart wird anschließend die Gültigkeit der verfügbaren Tragwerksmodelle aus Abschnitt 2.3 überprüft. Darauf aufbauend wird zunächst die Wellenausbreitung in der Ebene und die dadurch hervorgerufene Abnahme der Schwingamplitude betrachtet. Bei der Modellierung der Fahrzeugstruktur sind die aus Abschnitt 3.2 bekannten Reflexions- und Transmissionsfaktoren nicht ausreichend. Der Grund hierfür liegt in der geometrischen Gestaltung der Übergänge, die oftmals als Verrundungen ausgeführt sind. Im letzten Abschnitt wird eine aus der Literatur bekannte Theorie für verrundete Übergänge vorgestellt. Hierbei müssen jedoch die Grenzen des Modells beachtet werden. Mithilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) wird eine Methode beschrieben, mit der für beliebige Übergänge die entsprechenden Faktoren bestimmt werden können. Die Validierung erfolgt durch den Vergleich der Theorie mit dem numerischen Experiment.

4.1. Dominante Wellenart

Treten mehrere Wellenarten gleichzeitig bei der Ausbreitung durch das Bauteil auf, kann durch eine komponentenweise Superposition [182] (Abschnitt 3.4) das gesamte Schwingungsbild aller Wellen ermittelt werden. Mehrere Wellenarten müssen in diesem Fall parallel berechnet und die Konversion der Wellen an Übergängen (Abschnitt 3.2) berücksichtigt werden [26, 116, 138]. Dominiert eine Wellenart in ihrer Amplitude alle anderen, können Letztere vernachlässigt werden. Durch die alleinige Berechnung der dominanten Wellenart wird die Effizienz der Simulation hinsichtlich der Rechenzeit deutlich erhöht.

4.1.1. Theoretische Betrachtung

Anhand der Rayleigh-Lamb-Theorie zur Beschreibung von Plattenwellen (Absatz 2.3.4.2) können die Amplituden der einzelnen Moden bewertet werden. Das bei der Diskussion der Plattenmodelle in Absatz 2.3.4.3, Abb. 2.15 gewählte Zahlenbeispiel zeigt, dass für Frequenzen kleiner 600 kHz einer 3,0 mm starken Stahlplatte nur die Moden 0. Ordnung der symmetrischen und antisymmetrischen Welle betrachtet werden müssen. Für dünnere Bleche steigt diese Grenzfrequenz weiter nach oben an. Die Longitudinalwelle (L-Welle) entspricht dabei dem symmetrischen Mode während die Biegewelle (B-Welle) der antisymmetrischen Schwingung zugeordnet werden kann [26, 138].

Die Konstanten \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 , \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 der Lösungsfunktionen (2.167) sowie (2.168) sind von der Anregung abhängig. Die Amplituden der Plattenschwingung sind je nach Art des Modes durch zwei dieser Konstanten gegeben. Für den symmetrischen Mode ist \mathcal{A}_2 sowie \mathcal{B}_1 und für den antisymmetrischen Mode \mathcal{A}_1 und \mathcal{B}_2 relevant. Die beiden Konstanten des jeweiligen Modes stehen zueinander in Beziehung [46, 193]. Es existieren damit Funktionen der Form $\mathcal{B}_1 = f(\mathcal{A}_2)$ bzw. $\mathcal{B}_2 = f(\mathcal{A}_1)$ die [46, 193] entnommen werden können. Um den Einfluss der anregenden Amplitude auf die Verschiebungen der Schwingung zu eliminieren, werden die Komponenten des Verschiebungsvektors \mathbf{u} für den symmetrischen Mode auf \mathcal{A}_2 bzw. für den antisymmetrischen Mode auf \mathcal{A}_1 normiert. In Abb. 4.2 ist die Verformung als Vektor ($-$) des symmetrischen

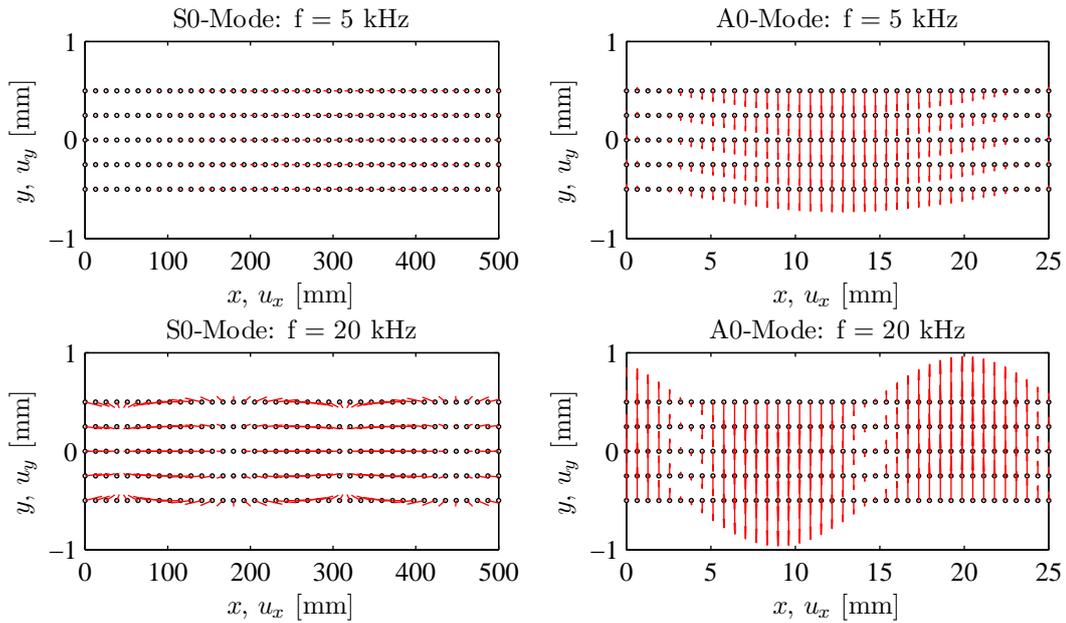


Abbildung 4.2.: Schwingformen des symmetrischen und antisymmetrischen Modes bei Frequenzen von 5 kHz und 20 kHz zum Zeitpunkt $8 \mu\text{s}$

(S0-Mode) und antisymmetrischen (A0-Mode) Mode zur Zeit $t = 8 \mu\text{s}$ bei einer Frequenz von 5 bzw. 20 kHz dargestellt. Die unverformten materiellen Punkte der 1,0 mm dicken Stahlplatte sind mit Kreisen (\circ) eingezeichnet. Um die unterschiedlichen Wellenlängen beurteilen zu können, ist der Ausschnitt der Platte in Längsrichtung beim symmetrischen Mode auf 500 mm und beim antisymmetrischen Mode auf 25 mm begrenzt. Zur Skalierung der Verschiebungen wird die Amplitude des antisymmetrischen Modes mit $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2/1000$ abgeschwächt.

In Abb. 4.3 sind jeweils für den symmetrischen und antisymmetrischen Mode die longitudinalen (x -Richtung) sowie die transversalen (y -Richtung) Verschiebungen entlang der Plattendicke (y -Koordinate) dargestellt. Die Verschiebungen sind an den Stellen ausgewertet, an denen sie maximal sind und auf die Anregung \mathcal{A}_2 bzw. \mathcal{A}_1 bezogen. Die Auslenkungen in y -Richtung bei S0 bzw. in x -Richtung bei A0 sind im betrachteten Frequenzbereich verschwindend gering womit sie vernachlässigt werden. Der antisymmetrische Mode weist in transversaler Richtung eine um etwa den Faktor 20 höhere Schwingamplitude auf als der symmetrische Mode in longitudinaler

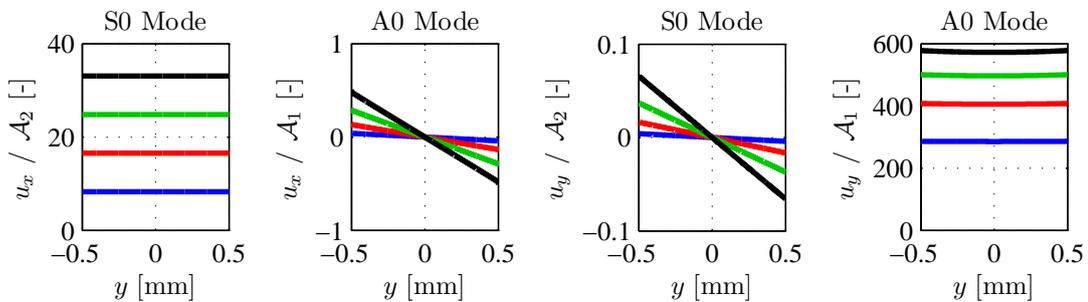


Abbildung 4.3.: Auf die Anregung normierter Verschiebungsverlauf entlang der Plattendicke (Legende: $-$ $f = 5 \text{ kHz}$, $-$ $f = 10 \text{ kHz}$, $-$ $f = 15 \text{ kHz}$, $-$ $f = 20 \text{ kHz}$)

Richtung. Die hohe Auslenkung des A0 Modes in transversaler Richtung entspricht somit genau der üblicherweise verwendeten Messrichtung zur Detektion von Strukturschwingungen [26, 138] und folglich wird nahezu ausschließlich die B-Welle erfasst¹.

Bei der messtechnischen Aufnahme hochfrequenter Schwingungen werden oftmals piezoelektrische Sensoren eingesetzt, die eine Querempfindlichkeit aufweisen. Dadurch reagieren sie auch auf seitliche Bewegungen, die in diesem Fall von der L-Welle ausgehen. Die Seitenempfindlichkeit moderner Sensoren wird mit $< 5\%$ angegeben [143], womit der Einfluss des S0-Modes auch bei diesem Messprinzip vernachlässigt werden kann ($0,05 u_x(S0) \ll u_y(A0)$). Aus theoretischer Sicht ist dadurch die B-Welle gegenüber der L-Welle die dominante Wellenart.

4.1.2. Differenzmessverfahren

Die Methode der Differenzmessung ist bereits aus [63] bekannt. Die Verschiebungen an der Oberfläche eines Bauteils werden mithilfe von Beschleunigungssensoren messtechnisch erfasst. Diese Messaufnehmer arbeiten nach dem piezoelektrischen Prinzip und sind an zwei Stellen gegenüberliegend auf einer Platte appliziert. In Abb. 4.4 ist dieser Versuchsaufbau schematisch dargestellt. Die Platte wird an einem Ende in Sand gebettet, um Reflexionen durch die Lagerung zu minimieren [26, 138]. Die reflektierten Wellen können damit, im Vergleich zu einer festen Einspannung, um den Faktor 5 bis 10 gedämpft werden (Absatz 6.3.4).

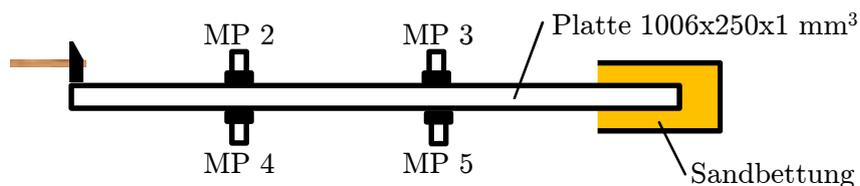


Abbildung 4.4.: Differenzmessung an einer einfachen Platte, die Sandbettung dient zur Unterdrückung von Reflexionen

Bei einem symmetrischen Schwingmode (L-Welle) müssen die Verschiebungen der gegenüberliegenden Sensoren gegenläufig bzw. bei einem antisymmetrischen Mode (B-Welle) gleichläufig zueinander sein. In Abb. 4.5 sind zum Vergleich mit den gemessenen Signalen die beiden prinzipiellen Schwingformen mit ihren Verschiebungen dargestellt.

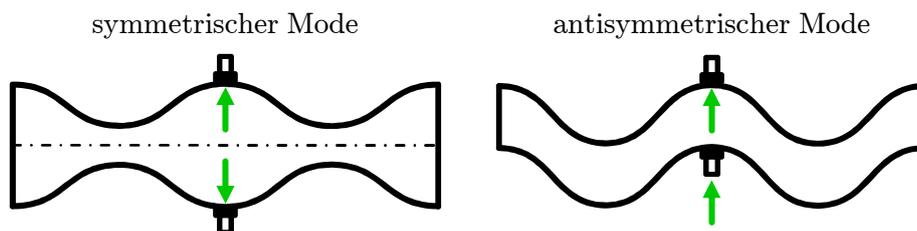


Abbildung 4.5.: Schwingformen des symmetrischen und antisymmetrischen Modes

¹Werden nur die Auslenkungen in transversaler Richtung miteinander verglichen, kann bei einer Frequenz von 20 kHz aus Abb. 4.2 für den S0-Mode eine Auslenkung von ca. 0,1 mm abgelesen werden. Für den A0-Mode ergibt sich, bei einer um den Faktor 1000 verringerten Anregung, eine Auslenkung von ca. 1,0 mm. Die Schwingamplitude des antisymmetrischen Modes ist in diesem Beispiel folglich 10^4 -mal höher als die des symmetrischen Modes. Dieses Verhältnis wird bestätigt, wenn die auf die Anregung normierten, maximalen Auslenkungen der beiden rechts stehenden Diagramme aus Abb. 4.3 verglichen werden. Hier ist das abgelesene Verhältnis 600 zu 0,06 und damit ist derselbe Verstärkungsfaktor gegeben.

Die Beschleunigungen an den Sensoren werden nach einem Hammerschlag messtechnisch erfasst und anschließend im Zeitbereich mit einem Bandpass von 5 bis 20 kHz gefiltert. Durch zweifache Integration nach t ergeben sich die Verschiebungen w in transversaler Richtung an den Sensoren (vgl. Gleichung (2.1)). Für die vier Messpunkte der Platte sind sie in der ersten Zeile der Abb. 4.6 dargestellt.

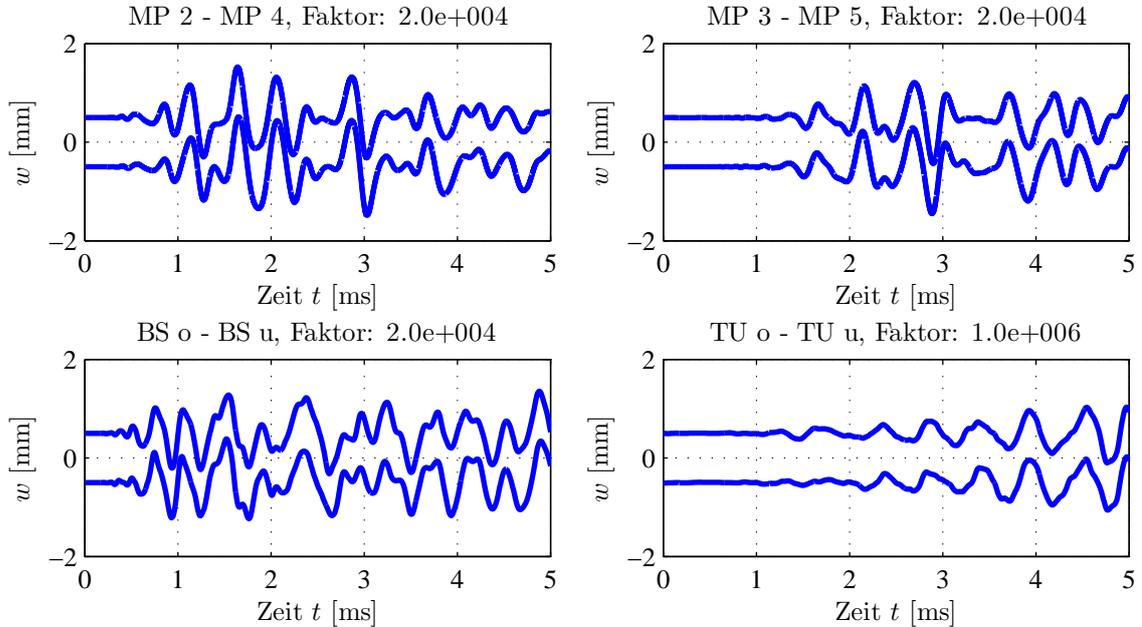


Abbildung 4.6.: Differenzmessung. Verschiebungen w gegenläufig angebrachter Sensoren.
Platte: MP 2 - MP 4, MP 3 - MP 5. Fahrzeug: BS o - BS u, TU o - TU u

Um die Verschiebungen gegenüber der Plattendicke sichtbar zu machen werden sie mit dem angegebenen Faktor skaliert. Die Berücksichtigung der unterschiedlichen Messrichtungen zwischen oberem und unterem Sensor erfolgt indem die Messsignale der unteren Messaufnehmer mit -1 multipliziert werden. Diese Messung wird an weiteren Positionen einer realen Fahrzeugstruktur wiederholt. In der zweiten Zeile der Abb. 4.6 sind die Verschiebungen für die B-Säule (BS) und den Tunnel (TU) der jeweils auf der Ober- (o) und Unterseite (u) angebrachten Sensoren dargestellt. Die Position der Bauteile in der Gesamtfahrzeugstruktur kann Abb. 4.1 entnommen werden.

Werden die theoretischen Formen aus Abb. 4.5 mit den Zeitsignalen in Abb. 4.6 verglichen, wird in jedem Fall ein antisymmetrischer Mode interpretiert und dadurch die B-Welle als die am stärksten dominierende Wellenart eingestuft. Aufgrund von Ungenauigkeiten bei der Positionierung der Sensoren können diese leicht gegeneinander verschoben sein. Aus diesem Grund ist ein Phasenfehler zwischen den Messsignalen gegenüberliegender Messpositionen möglich. Wird dieser Fehler sehr groß, ist eine Fehlinterpretation der Wellenart möglich.

4.1.3. Dispersionsanalyse

Aus dem Differenzmessverfahren liegen bereits erste experimentelle Indizien für die B-Welle als dominante Wellenart vor. Bestätigt werden können diese, wenn das für die B-Welle typische Dispersionsverhalten (Abschnitt 3.1) nachgewiesen wird. Dazu wird erneut ein Messaufbau nach Abb. 4.4 gewählt, jedoch ohne die Sensoren MP 4 und MP 5. Der Abstand zwischen

der Anregung mit einem Modalhammer und der ersten Messposition MP 2 beträgt 300 mm. Zwischen MP 2 und MP 3 beträgt die Distanz 250 mm.

Das Wellenpaket breitet sich mit der Gruppengeschwindigkeit (3.4) aus, die mithilfe der Phasengeschwindigkeit aus der Plattentheorie nach Kirchhoff (2.144) bestimmt werden kann. Der Zeitpunkt an dem das B-Wellenpaket am Sensor eintrifft ergibt sich aus

$$t_G = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}} \frac{r}{\sqrt{\omega}}. \quad (4.1)$$

Der Abstand der Anregung zu den einzelnen Sensoren wird mit r bezeichnet.

Die Messsignale werden mit der Fouriertransformation [148, 151, 191] analysiert und mit der theoretischen Abschätzung der Signallaufzeit verglichen. Helle Bereiche der Spektrogramme in Abb. 4.7 kennzeichnen hohe Amplituden der jeweiligen Frequenz während dunkle Bereiche niedrige Amplituden repräsentieren. Der frequenzabhängige Verlauf von (4.1) ist mit roter Farbe eingezeichnet. Die Übereinstimmung der theoretischen Laufzeit mit dem Übergang von dunkel zu hell in den Spektrogrammen bestätigt die B-Welle als dominante Wellenart.

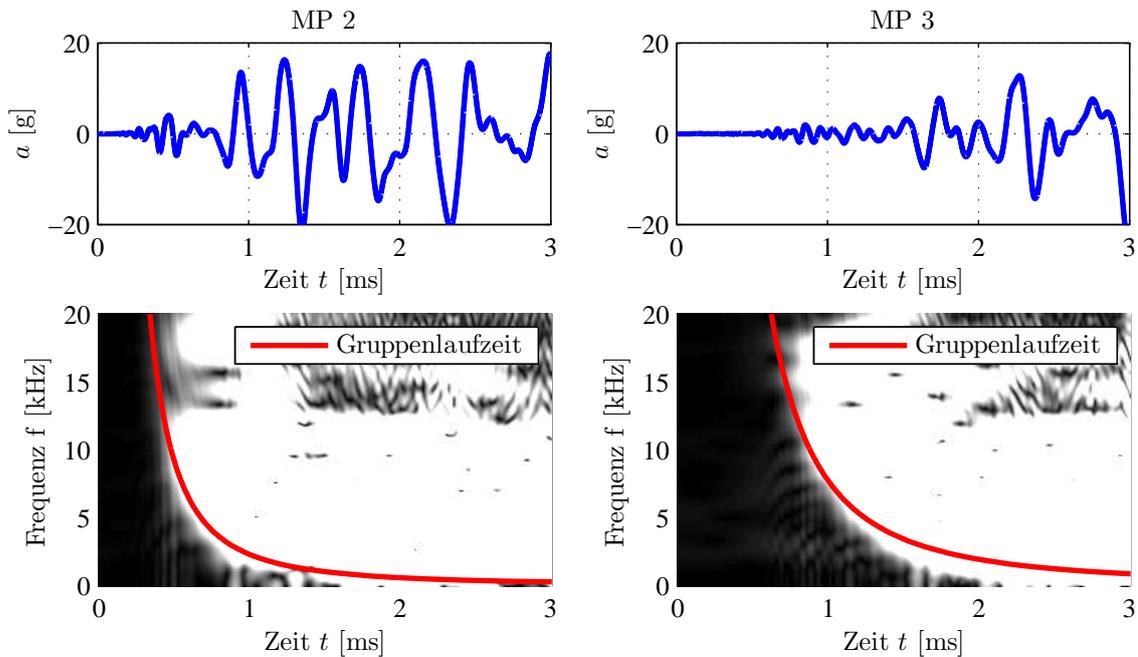


Abbildung 4.7.: Dispersionsanalyse gemessener Signale mithilfe der Fouriertransformation

4.2. Gültigkeit der mechanischen Modelle

Nachdem die B-Welle als wesentliche Wellenart identifiziert ist, müssen zur Beschreibung ihrer Ausbreitung geeignete Modelle aus Abschnitt 2.3 gewählt werden. Als relevante Tragwerkselemente kommen hierfür der Balken (eindimensional) sowie die Platte (zweidimensional) in Betracht. In Tabelle 4.1 sind die behandelten Theorien anhand ihrer Komplexität sortiert dargestellt. Die Beschreibung von Plattenwellen nach Rayleigh-Lamb aus Absatz 2.3.4.2 entspricht nicht dem in der Mechanik üblichen Modellierungsansatz von Plattenelementen und ist aus diesem Grund nicht mit aufgenommen. Dieser Potentialansatz ermittelt auf Basis bestimm-

Tabelle 4.1.: Verfügbare Tragwerksmodelle für die B-Welle

	Komplexität →		
Balken	Euler-Bernoulli	Bresse-Timoshenko	Levinson
Platte	Kirchhoff	Mindlin	⁻¹

ter Annahmen das Schwingverhalten eines elastischen Körpers und ist den Lösungsansätzen mechanischer Feldprobleme zuzuordnen.

Für die Wahl eines geeigneten Modells ist ein Kompromiss aus hinreichend genauer Beschreibung der Wellenausbreitung bei gleichzeitig einfacher Berechnung zu wählen. Dies entspricht dem im Ingenieurwesen oft gebrauchten Grundsatz: „So grob wie möglich, so fein wie nötig!“ [31, 198, 204].

Als Bewertungskriterium der Modelle werden die Phasengeschwindigkeiten herangezogen. Der relevante Frequenzbereich von 5 bis 20 kHz sowie die üblichen Materialdicken bis max. 3,0 mm aus Stahlblech dienen als Randbedingungen für den Vergleich. In Abb. 4.8 ist für die B-Welle die Phasengeschwindigkeit auf einem Balken (links) bzw. einer Platte (rechts) dargestellt. Die Abweichung der einfacheren Modelle bezogen auf die jeweilig genaueste Theorie ist als relativer Fehler (analog zu (3.22)) angegeben. Im relevanten Bereich beträgt er max. ca. 2 %. Um die Bedeutung dieser Größenordnung abschätzen zu können, werden die Impulsantworten auf Basis eines rechtwinkligen Balkens ($h = 3,0$ mm und $\kappa = 5/6$) aus Stahl ($E = 210$ GPa, $\rho = 7850$ kg/m³ und $\nu = 0,3$) für die Euler-Bernoulli- und Bresse-Timoshenko-Theorie sowie für

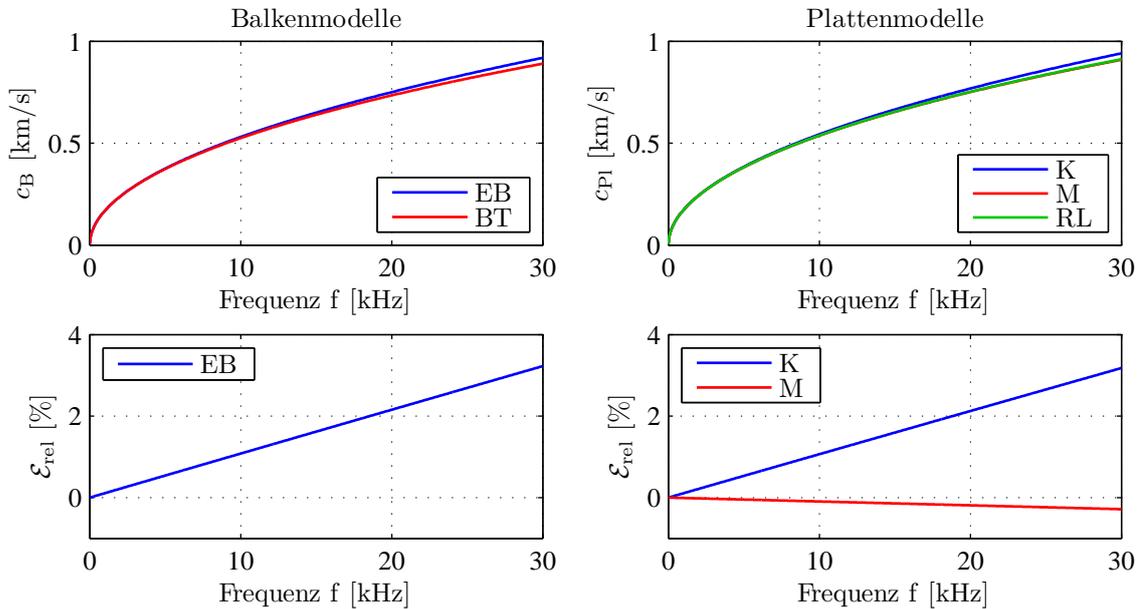


Abbildung 4.8.: Fehlervergleich der Phasengeschwindigkeit für Balken- und Plattenmodelle.
 (Balkentheorien: Euler-Bernoulli (EB), Bresse-Timoshenko (BT))
 Plattentheorien: Kirchhoff (K), Mindlin (M), Rayleigh-Lamb (RL))

¹Entsprechend der Levinson-Theorie für die Biegung von Balken (Absatz 2.3.3.3) sind in der Literatur ebenfalls Theorien höherer Ordnung für Platten bekannt. Aufgrund der Ausführung der Plattenwellen nach Rayleigh-Lamb (Absatz 2.3.4.2) werden diese Modelle hier nicht dargestellt, sondern exemplarisch auf [43, 165] verwiesen. Verschiedene Ansätze zur Ermittlung der entsprechenden Formfunktionen werden in [12] miteinander verglichen.

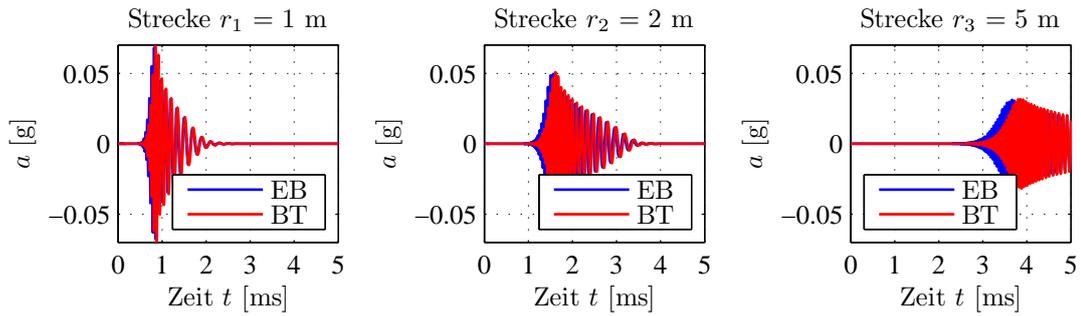


Abbildung 4.9.: Vergleich der Impulsantwort für Balkenmodelle (EB: Euler-Bernoulli-Modell und BT: Bresse-Timoshenko-Modell)

verschiedene Ausbreitungsstrecken ($r_1 = 1$ m, $r_2 = 2$ m und $r_3 = 5$ m) berechnet (s. Abb. 4.9). Es ist zu erkennen, dass sich die Welle bei der Euler-Bernoulli-Modellierung immer schneller ausbreitet als bei Bresse-Timoshenko. Der Balken verhält sich aufgrund der vernachlässigten Schubdeformation steifer als in Realität. Bei einer Ausbreitungsstrecke von 5 m trifft die Euler-Bernoulli-Welle ca. 0,2 ms früher ein. Diese zeitliche Abweichung kann vernachlässigt werden, folglich wird eine Modellierung nach der Euler-Bernoulli- bzw. Kirchhoff-Theorie als hinreichend genau erachtet.

4.3. Flächige Ausbreitung

Bei einer zweidimensionalen (2-D) Wellenausbreitung müssen gegenüber der Ausbreitung in eindimensionalen (1-D) Tragwerken weitere Effekte berücksichtigt werden. Die Welle wird nicht nur wie bei einer 1-D-Ausbreitung an den gegenüberliegenden Seiten durch Reflexion und Transmission, sondern ebenfalls durch die seitlichen Begrenzungen des Bauteils beeinflusst [89].

Zusätzlich muss die geometrische Form der Anregung beachtet werden. Für die vorliegende Anwendung wird aufgrund der folgenden Argumente im Allgemeinen von einer punktförmigen Anregung ausgegangen:

- Eine linienförmige Anregung kann aus der Summe von Punktquellen beschrieben werden und ist somit ein Sonderfall der punktförmigen Anregung.
- Im Übergang von 1-D- auf 2-D-Elementen wirkt der Koppelpunkt als punktförmige Quelle.
- Bei einem Frontalcrash wirkt die Crashbox als örtlich konzentriertes Element, das Körperschall in den Längsträger emittiert (s. Abb. 4.1) [176].

Die ersten beiden Aspekte gehen direkt aus dem Prinzip nach Huygens hervor (Abschnitt 3.7).

Die Finite-Differenzen-Methode (FDM) bietet die Möglichkeit, die Differentialgleichung der B-Welle schrittweise zu lösen [89]. Für beliebige Zeitpunkte lässt sich damit die Form der Schwingung visualisieren und auf das Ausbreitungsverhalten der Welle schließen. Die FDM ist detailliert in Abschnitt 5.1 beschrieben. Um den Einfluss der Reflexion an den Begrenzungen einer rechteckigen Platte zu untersuchen, wird als Randbedingung für alle Kanten der freie Rand gewählt. Dadurch werden dort die Schnittgrößen zu Null und die B-Welle erfährt einen Phasensprung um 90° bei gleichbleibender Amplitude [7, 26, 116, 138]. Die Anregung erfolgt punktförmig durch einen idealen Impuls und ist senkrecht zur Mittelfläche der ebenen Platte

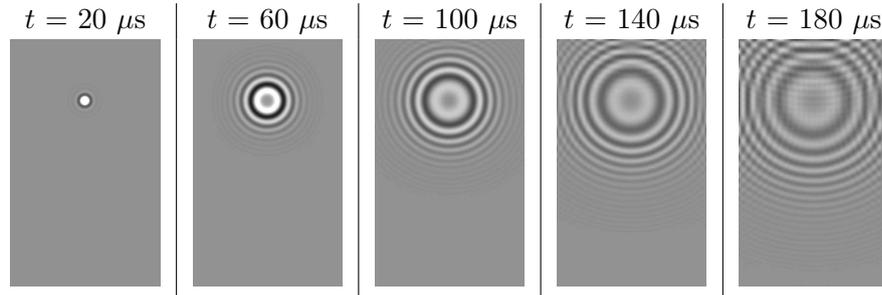


Abbildung 4.10.: Punktförmig angeregte B-Welle auf einer Stahlplatte ($500 \times 300 \times 1 \text{ mm}^3$) simuliert mithilfe der FDM (dargestellt sind unterschiedliche Zeitpunkte)

gerichtet. Das Schwingungsbild eines solchen FDM-Modells ist zu fünf verschiedenen Zeitpunkten in Abb. 4.10 dargestellt. Die Abmessungen der Stahlplatte betragen $500 \times 300 \times 1 \text{ mm}^3$ und orientieren sich an den Größenverhältnissen typischer Bauteile im Bereich der Spritzwand, des Unterbodens oder der Tunnelseitenwand (s. Abb. 4.1). Bei ca. $100 \mu\text{s}$ sind am oberen Rand bereits erste Reflexionen schwach zu erkennen. Nach weiteren $40 \mu\text{s}$ wird die Welle zusätzlich an den seitlichen Begrenzungen reflektiert. Ab $180 \mu\text{s}$ sind diese Reflexionen bereits stark ausgeprägt und sie beginnen sich zu überlagern. Zu diesem Zeitpunkt ist die Welle noch nicht am unteren Ende eingetroffen.

Eine eindimensionale Betrachtung der Wellenausbreitung in Längsrichtung auf einer solchen Platte hätte zur Folge, dass die früh entstehenden seitlichen Reflexionen vernachlässigt würden. Die dadurch erhaltenen Ergebnisse sind nicht hinreichend, da sie nur den ersten Signalanstieg (bis ca. 3 ms) repräsentieren [89]. Aus diesem Grund ist eine zweidimensionale Modellierung der betrachteten Fahrzeugstrukturen zwingend notwendig [89].

4.4. Näherung der Amplitudenabnahme

Aus der punktförmigen Art der Anregung ergibt sich ein weiterer zu beachtender Effekt. Breitet sich die Welle in konzentrischen Kreisen um die Anregerstelle aus, verteilt sich die eingebrachte Energie gleichmäßig auf die Fläche der Wellenfront (Umfang \times Plattendicke). Folglich nimmt die Amplitude der Schwingung mit zunehmender Entfernung vom Ursprung ab. Dieser Effekt der Amplitudenabnahme auf der Platte ist bereits aus Abschnitt 3.5 bekannt und wird in der Ausbreitungsfunktion $|\Pi| = |w/w_0|$ zusammengefasst [26, 138]. Bei der Berechnung dieser Verhältniszahl kommt dem Argument $k_B r$, in dem die Ausbreitungseigenschaften der Welle in k_B mit der Entfernung r zusammengefasst sind, eine wesentliche Bedeutung zu. In Tabelle 4.2 sind die Wellenzahlen für Platten unterschiedlicher Dicke, Materialien und Frequenzen zusammengefasst, um die Größenordnungen für $k_B r$ bestimmen zu können. Für

Tabelle 4.2.: Wellenzahlen der B-Welle in m^{-1} auf Platten unterschiedlicher Dicke h , Frequenz f und Materialien (berechnet nach (2.143), Materialparameter nach Tabelle 3.1)

f [kHz]	Stahl h [mm]				Aluminium h [mm]				Magnesium h [mm]			
	0,8	1,0	2,0	3,0	0,8	1,0	2,0	3,0	0,8	1,0	2,0	3,0
5	158	142	100	82	157	141	100	81	162	145	102	84
10	224	200	142	116	223	199	141	115	229	205	145	118
15	274	245	174	142	273	244	172	141	280	251	177	145
20	317	283	200	164	315	282	199	163	324	289	205	167

eine Stahlplatte mit einer Wandstärke von 1,0 mm ergibt sich bspw. bei einer Frequenz von 5 kHz und einer Entfernung von $r = 10$ mm zur punktförmig angenommenen Anregestelle das Argument $k_B r = 1,42$.

In Abb. 4.11 ist auf der linken Seite die exakte Lösung der Ausbreitungsfunktion Π nach (3.31) mit der asymptotischen Näherung (3.35) verglichen. Mithilfe des relativen Fehlers (analog zu (3.22)) wird die Güte der Näherung bewertet. Für sehr kleine Argumente ($k_B r < 1$) streben die Fehler gegen unendlich. Die Näherung ist in diesem Bereich nicht verwendbar. Für die Stahlplatte tritt dies im ungünstigsten Fall ($h = 3,0$ mm und $f = 5$ kHz) für Entfernungen $r \leq 13$ mm ein. Sehr gute Ergebnisse werden mit der asymptotischen Näherung ab $k_B r > 4$ erreicht [26, 138]. Daraus folgt, dass für die kleinste relevante Wellenzahl von 82 m^{-1} diese Bedingung für $r \geq 49$ mm erfüllt ist.

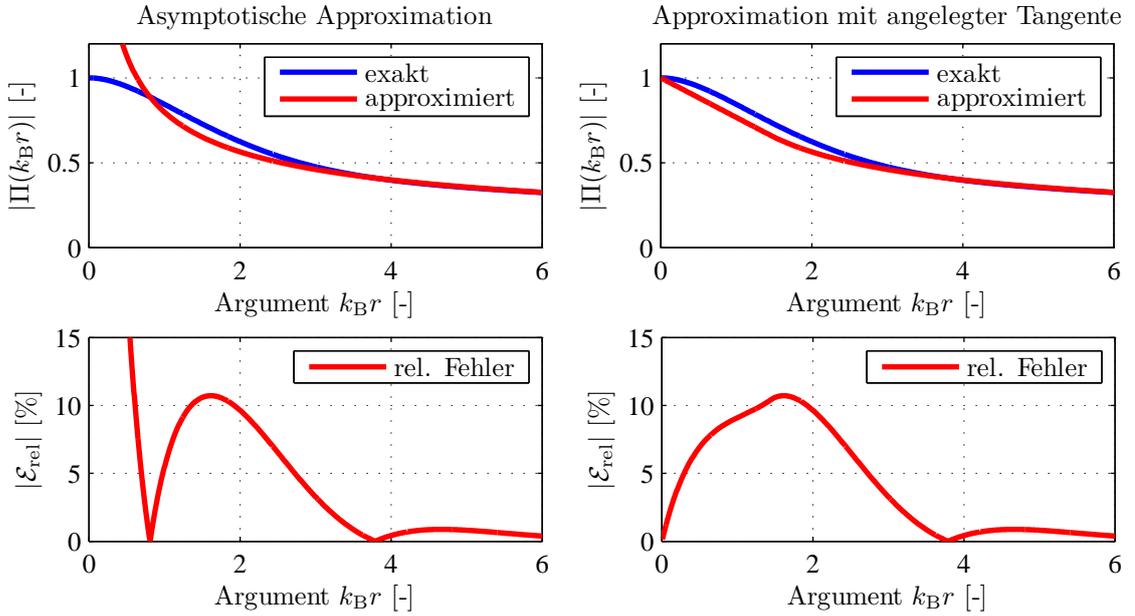


Abbildung 4.11.: Exakte Lösung und Näherungen der Ausbreitungsfunktion Π . Asymptotische Näherung (links) und Näherung mit angelegter Tangente (rechts)

Um die Näherung im Bereich von $0 \leq k_B r \leq 4$ zu verbessern, kann diese abschnittsweise definiert werden. Im ersten Bereich wird ausgehend von $k_B r = 0$ und $|\Pi| = 1$ eine Tangente an die Asymptote gelegt. Dies ist in der Tatsache begründet, dass die exakte Lösung der Ausbreitungsfunktion hier Eins wird [26, 138]. Der zweite Bereich wird wie bisher mithilfe von (3.35) beschrieben. Die Berechnung des Übergangspunktes von Tangente auf Asymptote ergibt sich aus den Bedingungen

$$|\Pi|_{\text{app,asy}} = \varkappa k_B r + 1 \quad \text{und} \quad \varkappa = \frac{d|\Pi|_{\text{app,asy}}}{dk_B r}. \quad (4.2)$$

Die Steigung der Tangente ist hier mit \varkappa bezeichnet und die Näherung $|\Pi|_{\text{app,asy}}$ ist durch (3.35) gegeben. Die $k_B r$ -Koordinate des Schnittpunktes kann analytisch bestimmt werden indem die beiden Bedingungen ineinander eingesetzt werden. Dadurch folgt die abschnittsweise Definition

der asymptotischen Näherung mit angelegter Tangente

$$|\Pi|_{\text{app,asy,Tan}} = \begin{cases} -\frac{2}{27}\pi k_B r + 1 & \text{für } k_B r \leq \frac{9}{2\pi} \\ \sqrt{\frac{2}{\pi k_B r}} & \text{für } k_B r > \frac{9}{2\pi}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Abbildung 4.11 zeigt auf der rechten Seite einen Vergleich zwischen der exakten Lösung und der erweiterten Approximation. Durch die angelegte Tangente sinkt der relative Fehler bei der asymptotischen Näherung (4.3) bis auf maximal ca. 10 % im gesamten Bereich. Damit ist es möglich auf einfache Art die Amplitudenabnahme zu bestimmen.

4.5. Reflexion und Transmission an komplexen Übergängen

Durch Reflexions- und Transmissionsvorgänge an Übergängen ändert sich die Signalform der Welle (Abschnitt 3.2). Für eine Beschreibung dieses Effekts bei der Wellenberechnung ist die genaue Kenntnis der Reflexions- und Transmissionsfaktoren notwendig. In der Literatur sind sie i. d. R. nur für bestimmte Sonderfälle einiger Verbindungsarten angegeben (z. B. stirnseitige Verbindungen sowie T- und Kreuzverbindungen von Balken und Platten [26, 36, 132, 138, 169]).

Die großflächigen Fahrzeugteile, wie z. B. die Spritzwand, der Tunnel oder der Unterboden (s. Abb. 4.1) stellen für die Körperschallausbreitung auf Platten wesentliche Bauteile dar. Sie werden überwiegend in Umformprozessen wie dem Tiefziehen gefertigt [28, 196]. Aufgrund der geometrischen Anforderungen an diese Karosserieteile wird oftmals ein von 90° abweichender Verbindungswinkel zwischen einzelnen Segmenten gefordert (s. Abb. 4.12 a)). Um ein Materialversagen während der Fertigung zu vermeiden werden die Übergänge zwischen verschiedenen Segmenten zusätzlich abgerundet. In Abb. 4.12 b) ist ein solcher Übergang mit dem Biegeradius \mathcal{R} dargestellt.

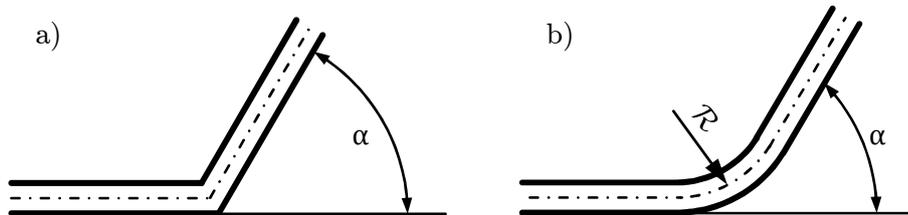


Abbildung 4.12.: Verbindungsarten zwischen zwei Segmenten. a) scharfkantig, b) abgerundet

4.5.1. Theoretische Betrachtung

Die theoretische Betrachtung scharfkantiger Übergänge für Balken ist bereits in [105, 203] beschrieben. In [200] wird ein universelles Verfahren dargestellt, mit dem für runde und scharfkantige Balkenverbindungen die Reflexions- und Transmissionsfaktoren bestimmt werden können. Dabei wird angenommen, dass die Rotationsträgheit und die Schubverformungen vernachlässigbar klein sind. Dies entspricht der Balkenmodellierung nach der Euler-Bernoulli-Theorie (Absatz 2.3.3.1) und ist für die geforderte Anwendung ausreichend genau (Abschnitt 4.2). Die Methode wird in [16] experimentell bestätigt und hier verwendet, um für relevante Verrundungen die Faktoren R und T zu bestimmen.

Die Reflexions- und Transmissionsfaktoren werden für eine runde Balkenverbindung mit dem Biegeradius \mathcal{R} auf Basis eines rechteckigen Querschnitts mit der

Breite 10 mm und der Höhe 1,0 mm aus Stahl ($E = 210 \text{ GPa}$, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$) ermittelt. Die Berechnungsvorschrift ist [16, 200] zu entnehmen. Der betragsmäßige Verlauf der Faktoren, in Abhängigkeit der Frequenz, ist für die Biegewinkel 30° , 60° und 90° in Abb. 4.13 dargestellt. Unterschiedliche Biegeradien sind durch verschiedene Farben gekennzeichnet. Die Faktoren beziehen sich auf das Verhältnis der Amplituden der reflektierten bzw. transmittierten B-Welle zu einfallender B-Welle. Deshalb werden die Faktoren mit dem Index BB gekennzeichnet.

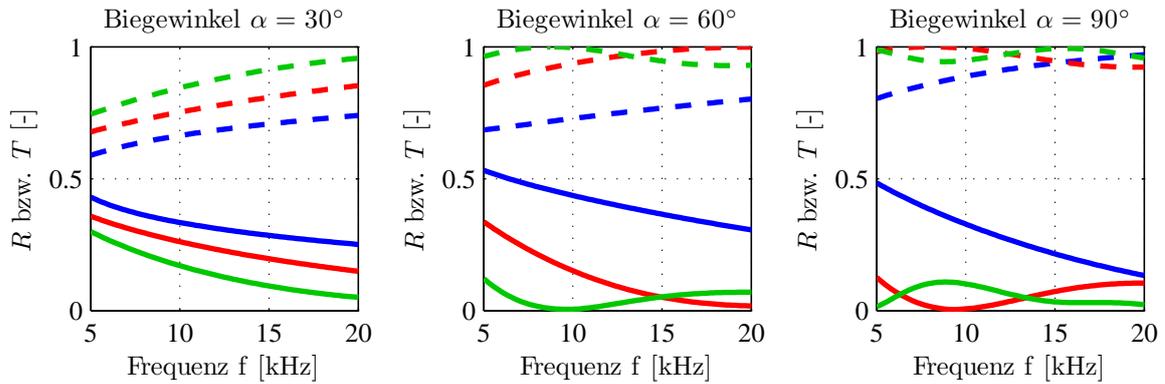


Abbildung 4.13.: Frequenzverlauf der Reflexions- und Transmissionsfaktoren (Legende:
 — $R_{BB}(\mathcal{R} = 10 \text{ mm})$, — $R_{BB}(\mathcal{R} = 20 \text{ mm})$, — $R_{BB}(\mathcal{R} = 30 \text{ mm})$,
 - - $T_{BB}(\mathcal{R} = 10 \text{ mm})$, - - $T_{BB}(\mathcal{R} = 20 \text{ mm})$, - - $T_{BB}(\mathcal{R} = 30 \text{ mm})$)

Die Vielzahl der möglichen Kombinationen aus α und \mathcal{R} werden in einer Parametervariation bewertet. Dazu wird der Betrag des Frequenzverlaufs der jeweiligen Faktoren im Frequenzband von 5 bis 20 kHz arithmetisch gemittelt. In Abb. 4.14 sind diese Mittelwerte der Faktoren jeweils für R_{BB} und T_{BB} in einem Farbdigramm dargestellt. Für Biegewinkel $\alpha > 90^\circ$ bzw. Biegeradien $\mathcal{R} > 40 \text{ mm}$ wird die B-Welle nahezu ausschließlich transmittiert. Folglich kann für derart gestaltete Übergänge $T_{BB} \approx 1$ angenommen werden. Biegeradien im Bereich der Balkendicke können mit dieser Theorie nicht mehr berechnet werden [200]. Daher ist der Verlauf bei Radien kleiner 10 mm in Abb. 4.14 nicht dargestellt.

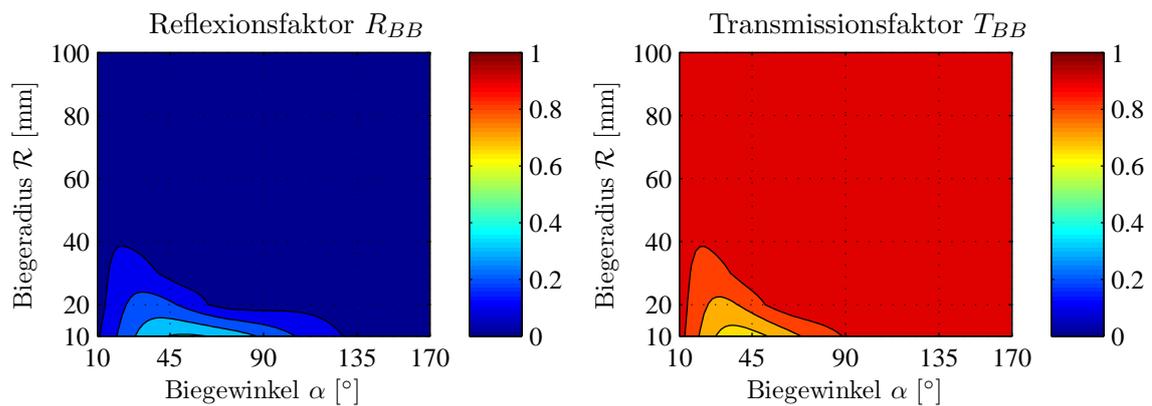


Abbildung 4.14.: Reflexions- und Transmissionsfaktoren runder Balkenverbindungen (die Farbskala repräsentiert den Mittelwert im Frequenzband von 5 bis 20 kHz)

4.5.2. Numerische Parameterstudie

Mithilfe der FEM (Abschnitt 5.2) kann das Reflexions- und Transmissionsverhalten von Balkenverbindungen beliebiger Übergänge untersucht werden. Für die Darstellung der Methode wird ein FEM-Modell für runde Übergänge nach Abb. 4.15 aufgebaut. Diese Struktur ist im

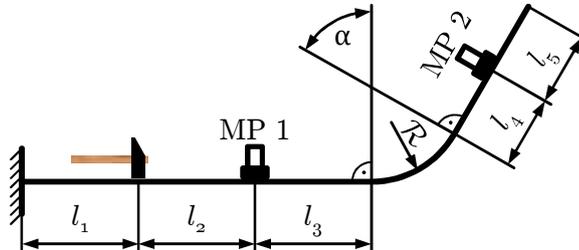


Abbildung 4.15.: FEM-Modell zur Bestimmung der Reflexions- und Transmissionsfaktoren an runden Balkenverbindungen mit dem Biegewinkel α und Biegeradius \mathcal{R}

Vergleich zum Gesamtfahrzeug sehr klein und kann daher mit vertretbarem Rechenaufwand für die hochfrequente Wellenausbreitung entsprechend fein¹ vernetzt werden. Der gekrümmte Balken mit den Querschnittsmaßen $10 \times 1 \text{ mm}^2$ wird an der Hammerposition mit einem idealisierten Diracimpuls beaufschlagt und das Antwortsignal an den virtuellen Messpositionen MP 1 und MP 2 ermittelt. Biegewinkel und Biegeradius werden variiert, um verschiedene Abhängigkeiten aufzulösen. Die einzelnen Teillängen werden bei jeder Variation in der Weise angepasst, dass sich die einzelnen Wellen aufgrund von Reflexion nicht überlagern. Um dies sicherstellen zu können müssen nachfolgende Bedingungen erfüllt sein:

- Die langsamste B-Welle muss MP 1 passieren, bevor die schnellste B-Welle nach ihrer Reflexion an der Krümmung zu MP 1 zurückgelangt.
- Die langsamste B-Welle muss nach Reflexion an der Krümmung MP 1 erreichen, bevor dort die schnellste B-Welle über die Reflexion an der festen Einspannung ankommt.
- Die langsamste B-Welle muss MP 2 erreichen, bevor dort die schnellste B-Welle über die Reflexion am freien Ende ankommt.

Die Ergebnisse des Verfahrens werden anhand des Sonderfalls $\alpha = 90^\circ$ und $\mathcal{R} = 0 \text{ m}$ mit Werten aus der Literatur [26, 138] verglichen (Abschnitt 3.2). Für diesen Sonderfall wird kein Radius modelliert, vielmehr stehen die Balkenverbindungen direkt senkrecht aneinander. In Abb. 4.16 werden die mit einer transienten FEM-Analyse berechneten Zeitsignale ausgewertet und daraus die Reflexions- und Transmissionsfaktoren als Funktion der Frequenz ermittelt. Die Beschleunigungen in longitudinaler Richtung zu den Messpositionen werden als L-Welle bzw. in transversaler Richtung als B-Welle interpretiert. In der ersten Zeile ist das Signal der einfallenden B-Welle im Zeit- und Frequenzbereich dargestellt. Die rote Kurve repräsentiert das mithilfe eines gleitenden Mittelwerts geglättete Frequenzspektrum. Die zeitlich entsprechend zugeschnittenen Signale der reflektierten L- und B-Welle sowie die der transmittierten L- und B-Welle sind in der zweiten Zeile ersichtlich. Diese Bereiche werden anschließend in den Frequenzbereich transformiert (Zeile drei). Die Spektren werden durch das Eingangssignal geteilt

¹Die Länge der Balkenelemente in der FEM-Modellierung beträgt auf den geraden Abschnitten $1,0 \text{ mm}$ und in der Krümmung $0,1 \text{ mm}$. Damit ist die Bedingung der maximalen Elementlänge (5.7) aus Absatz 5.2.2 erfüllt. Bei der Berechnung der transienten Antwortsignale ist zur Wahl der Zeitschrittgröße Absatz 5.2.3 zu beachten.

4. Eigenschaften des Ausbreitungsbereichs

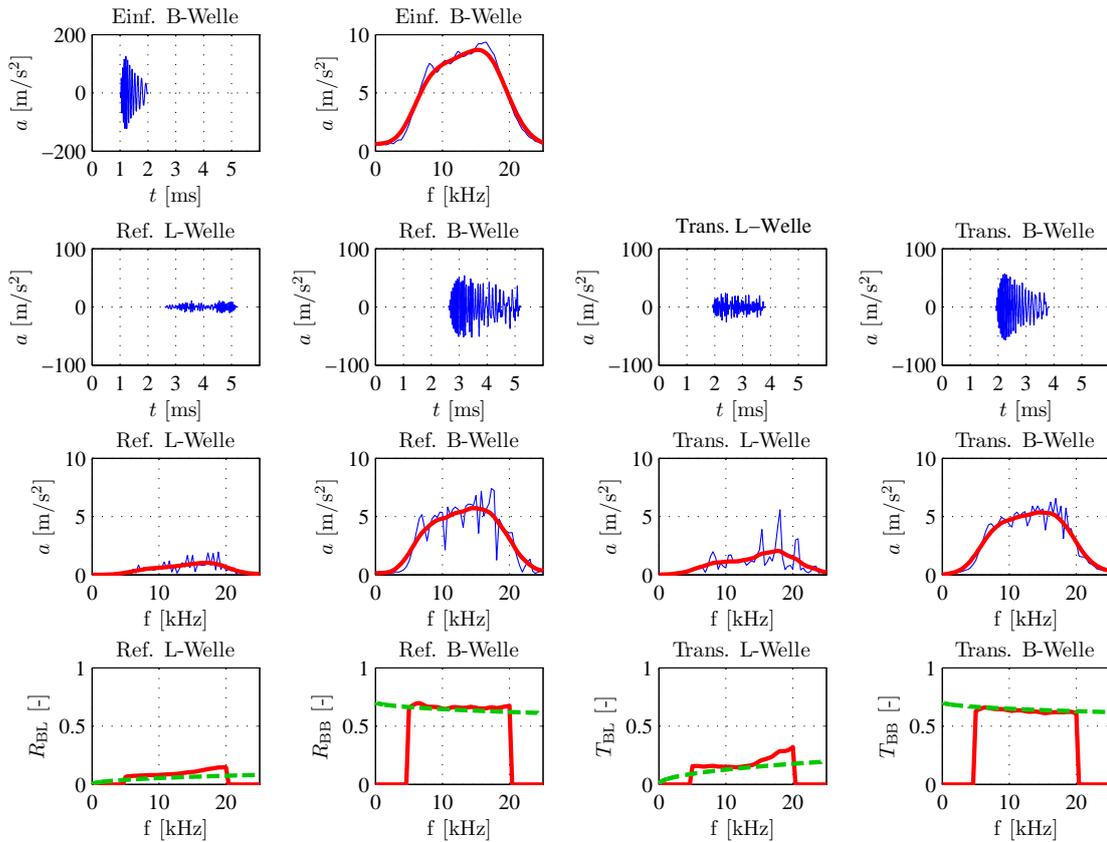


Abbildung 4.16.: Auswertung der FEM-Analyse zur Ermittlung der Faktoren (Einfallende Welle (Einf.), Reflexion (Ref.), Transmission (Trans.)). Parameter: $\alpha = 90^\circ$, $\mathcal{R} = 0$ mm. Legende: — Rohsignal, — Mittel, - - Theorie

und damit die Übertragungsfunktionen der jeweiligen Reflexions- und Transmissionsfaktoren bestimmt (letzte Zeile). Die Faktoren sind mit den aus der Literatur bekannten Angaben für rechtwinklige Balkenverbindungen [26, 138] verglichen (grün gestrichelte Kurve).

Alle Reflexions- und Transmissionsfaktoren aus der numerischen Abschätzung erreichen eine sehr gute Übereinstimmung mit der Theorie. Einzig die Faktoren für die L-Welle werden für höhere Frequenzen leicht überschätzt. Dies ist in der hohen Ausbreitungsgeschwindigkeit der L-Welle begründet. Durch Reflexion an den Rändern des FEM-Modells entstehen Eigenfrequenzen, die das Ergebnis beeinträchtigen. Um diese Reflexionen ebenfalls zu vermeiden, müsste das FEM-Modell wesentlich größer dimensioniert sein. Jedoch ergibt sich dadurch ein hoher numerischer Aufwand. Die Faktoren für die B-Welle weisen, aufgrund der niederen Ausbreitungsgeschwindigkeit, diese Ungenauigkeit nicht auf, denn das Modell ist speziell dieser Wellenart angepasst.

Der Vergleich der Reflexions- und Transmissionsfaktoren von L-Welle mit B-Welle (bei einfallender B-Welle) zeigt für die L-Welle sehr geringe Werte. Passiert eine Welle mehrere Übergänge, fällt die Amplitude der L-Welle deutlich schneller gegen Null als dies bei der B-Welle der Fall ist. Aufgrund der Dominanz der B-Welle (Abschnitt 4.1) und der vernachlässigbaren Auskopplung der L-Welle an Übergängen, wird eine Modenkonzersion nicht berücksichtigt.

Eine automatisierte Modellerstellung und Auswertung erfolgt für Biegewinkel von 10° bis 170° und Biegeradien von 1 bis 100 mm. Für die Faktoren wird erneut der Mittelwert in einem Bereich

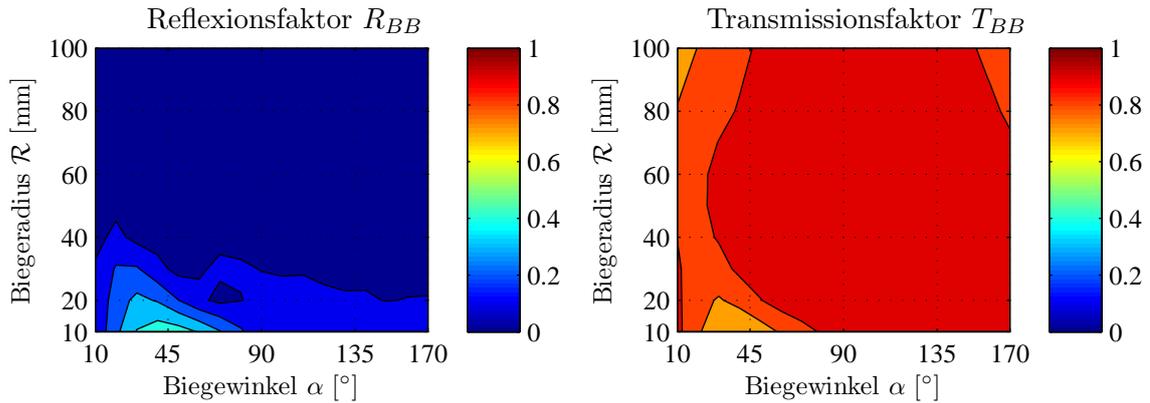


Abbildung 4.17.: Reflexions- und Transmissionsfaktoren mithilfe einer FEM-Analyse bestimmt (Biegeradius $10 \text{ mm} \leq \mathcal{R} \leq 100 \text{ mm}$, die Farbskala repräsentiert den Mittelwert im Frequenzband von 5 bis 20 kHz)

von 5 bis 20 kHz berechnet. Die Ergebnisse der FEM-Analyse für $10 \text{ mm} \leq \mathcal{R} \leq 100 \text{ mm}$ sind in Abb. 4.17 dargestellt. Werden diese Resultate mit den theoretischen Ergebnissen aus Abb. 4.14 verglichen, zeigt sich eine gute Übereinstimmung beider Methoden. Einzig in den Randbereichen der Biegewinkel ($< 20^\circ$ und $> 160^\circ$) bei sehr großen Biegeradien ($\mathcal{R} \approx 100 \text{ mm}$) ergibt sich aufgrund der automatisierten Wahl der Zeitausschnitte eine geringe Abweichung, und folglich wird der Transmissionsfaktor minimal unterschätzt.

Unter Verwendung sehr kleiner finiter Elemente in der Verrundung können auch für Radien $\mathcal{R} < 10 \text{ mm}$ die Faktoren bestimmt werden. In Abb. 4.18 sind sie, nach entsprechender Auswertung, als Farbdigramm dargestellt. Für sehr kleine Radien nähern sich die Faktoren der scharfen rechteckigen Kante an. Mit zunehmendem Biegeradius wird ein höherer Wellenanteil transmittiert. Bei Biegewinkel von ca. 45° bis 90° ist dieser Trend nicht so stark ausgeprägt wie in den restlichen Regionen.

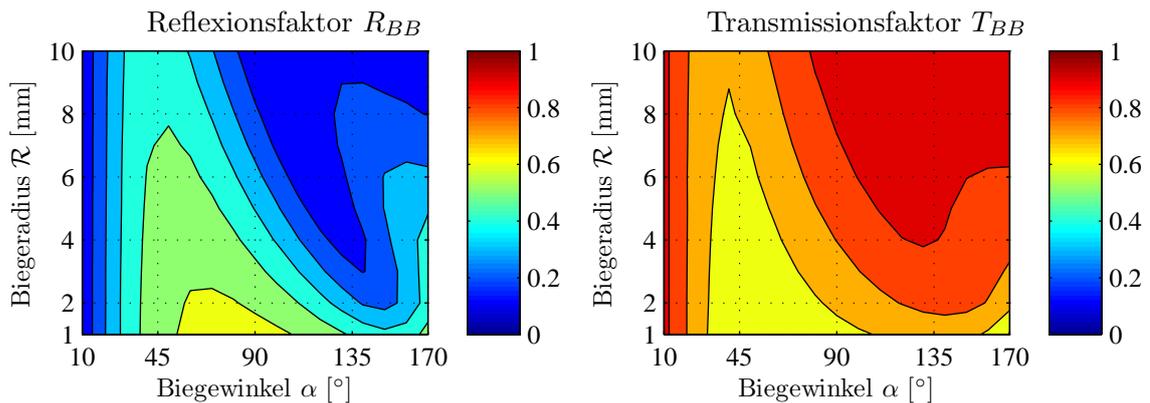


Abbildung 4.18.: Reflexions- und Transmissionsfaktoren mithilfe einer FEM-Analyse bestimmt (Biegeradius $1 \text{ mm} \leq \mathcal{R} \leq 10 \text{ mm}$, die Farbskala repräsentiert den Mittelwert im Frequenzband von 5 bis 20 kHz)

Diese Art der Auswertung kann auch auf Messdaten realer Experimente angewendet werden. Um Reflexionen zu vermeiden ist eine entsprechend große Versuchsanordnung zu wählen.

5. Verfahren zur Analyse der Wellenausbreitung

Der steigende Kostendruck und der Trend hin zu kürzeren Entwicklungszyklen [54] erfordert die virtuelle Erfassung der Eigenschaften des zukünftigen Produkts ohne auf reale Prototypen zurückgreifen zu müssen [135]. Die Berechnungsmodelle dieser Entwicklungsphase werden entsprechend als digitale Prototypen bezeichnet [88]. Die Beschreibung der physikalischen Sachverhalte führt dabei i. d. R. auf Systeme gekoppelter Differentialgleichungen mit mehreren Dimensionen [52]. Die Lösung dieser Gleichungssysteme erfolgt mithilfe numerischer Berechnungsverfahren [52]. Im Wesentlichen werden die Finite-Elemente-Methode (FEM), die Finite-Differenzen-Methode (FDM) sowie die Rand-Elemente-Methode (BEM) eingesetzt [52]. Diese Verfahren sind prinzipiell in der Lage, die Ausbreitung von Wellen abzubilden. Aus diesem Grund werden sie in diesem Kapitel grundlegend vorgestellt.

Weniger bekannt sind die Verfahren Transmission-Line-Methode (TLM) und Äquivalente-Quellen-Methode (ESM). Sie werden hier ebenfalls beschrieben, da mit ihnen die Berechnung von transienten Wellenausbreitungsvorgängen in effizienter Weise im Zeitbereich möglich sind [85, 89, 97, 116, 117].

Aus der Literatur sind weitere Berechnungsverfahren mit dem Schwerpunkt in der Beschreibung von Strukturschwingungen bekannt. Gegenwärtig sind sie aufgrund diverser Limitierungen nicht in der Lage den hier gestellten Anforderungen zu genügen. Nachfolgende Aufzählung wird kurz auf die Statistische-Energie-Analyse (SEA) und Spektrale-Elemente-Methode (SEM) eingehen, ihre Einsatzgebiete beschreiben, die Einschränkungen erläutern und auf entsprechende Literatur verweisen:

- Statistische-Energie-Analyse (SEA)
Diese Methode wird gewöhnlich zur Ermittlung des hochfrequenten Verhaltens komplexer Strukturen eingesetzt [136]. In [86, 87, 170] sind Berechnungen von Fahrzeugkarosserien mithilfe der SEA zu finden. Wie der Name bereits impliziert, liegt bei der SEA lediglich die zeitlich und örtlich gemittelte Energieverteilung der jeweiligen Subsysteme als Ergebnis vor [116, 122, 136]. Die Information über das Schwingverhalten ist dadurch nicht mehr vorhanden und folglich ist die Angabe eines Zeitsignals nicht möglich [116]. Aus diesem Grund ist sie für die geforderte Anwendung nicht geeignet. Für eine grundlegende Einführung ist [122] heranzuziehen.
- Spektrale-Elemente-Methode (SEM)
Gegenwärtig ist diese Methode noch nicht so stark verbreitet wie die SEA. Sie findet lediglich bei der Analyse von Rissen in Fachwerken Anwendung [30, 95, 154]. Die Wellenausbreitung auf Elementen wird durch eine spezielle Formulierung im Frequenzbereich [30] beschrieben. Die Lösung der SEM erfolgt ebenfalls im Frequenzbereich und liefert die Betrags- und Phaseninformation der Schwingung. Diese kann mithilfe der inversen Fouriertransformation in den Zeitbereich übersetzt werden [30, 116, 123, 124]. Für eindimensionale Stab- und Balkenelemente existieren die notwendigen Ansatzfunk-

tionen für die SEM bereits [30]. Probleme bereiten jedoch zweidimensionale Elemente wie z. B. eine Platte [30, 116]. Hier sind nur für spezielle Plattenstrukturen (z. B. die halbbeschränkte Platte) Lösungen bekannt [30]. Aus diesem Grund können mit der SEM keine beliebigen Strukturen modelliert werden, die zweidimensionale Elemente aufweisen. Für eine ausführliche Einführung in die SEM ist auf [30] zu verweisen.

5.1. Finite-Differenzen-Methode

Die Finite-Differenzen-Methode (FDM) ist ein numerisches Verfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen [71, 135] und dadurch prinzipiell in der Lage eine Wellengleichung zu lösen [89]. In diesen Gleichungen werden dabei die Differentialquotienten durch Differenzquotienten angenähert [71, 129, 135]. Um bspw. die Ausbreitung der Biegewelle (B-Welle) auf einer Platte nach der Kirchhoff-Theorie mithilfe der FDM zu berechnen, muss

$$K \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (5.1)$$

approximiert werden. Diese Beziehung ergibt sich, wenn in (2.142) die Laplace-Operatoren (2.58) ausgeschrieben werden und die freie Wellenausbreitung (2.29) gilt. Ausgehend von der allgemeinen Form der Taylorreihe [155, 179] für eine beliebige Funktion

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \frac{df(x_0)}{dx} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} (x - x_0)^2 + \dots \quad (5.2)$$

ergeben sich für die Funktion $w(x, y, t)$ die zentralen Differenzen der vierten Ableitung in Richtung der x -Koordinate mit

$$\frac{\partial^4 w_{m,n,o}}{\partial x^4} \approx \frac{w_{m+2,n,o} - 4w_{m+1,n,o} + 6w_{m,n,o} - 4w_{m-1,n,o} + w_{m-2,n,o}}{\Delta x^4}. \quad (5.3)$$

Für eine übersichtlichere Darstellung wird mit $w(m\Delta x, n\Delta y, o\Delta t) = w_{m,n,o}$ eine Indexschreibweise eingeführt. Die ganzzahligen Größen m , n und o beschreiben dabei die aktuelle Position des Funktionswertes w an einer diskreten Stelle im Raum bzw. in der Zeit. Die Größen Δx , Δy und Δt sind konstant und repräsentieren die äquidistante Diskretisierung der Raum- bzw. Zeitkoordinaten. Die Differenzbildung für die y -Variable ermittelt sich analog zu (5.3). Die partiell gemischten zweiten Ableitungen nach x und y lassen sich mit

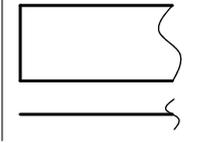
$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w_{m,n,o}}{\partial x^2 \partial y^2} \approx & \frac{1}{\Delta x^2 \Delta y^2} (w_{m+1,n+1,o} - 2w_{m,n+1,o} + w_{m-1,n+1,o} - 2w_{m+1,n,o} \\ & + 4w_{m,n,o} - 2w_{m-1,n,o} + w_{m+1,n-1,o} - 2w_{m,n-1,o} + w_{m-1,n-1,o}) \end{aligned} \quad (5.4)$$

und die zweite Zeitableitung mit

$$\frac{\partial^2 w_{m,n,o}}{\partial t^2} \approx \frac{w_{m,n,o+1} - 2w_{m,n,o} + w_{m,n,o-1}}{\Delta t^2} \quad (5.5)$$

berechnen [71]. Die Approximationen (5.3), (5.4) und (5.5) können in die Wellengleichung (5.1) eingesetzt werden. Der Term $w_{m,n,o+1}$ aus der zweiten Zeitableitung (5.5) beschreibt die Schwingung am Ort $m\Delta x, n\Delta y$ zum nächsten Zeitpunkt $(o+1)\Delta t$ und kann aus den Werten des aktuellen und des letzten Zeitschritts berechnet werden. Ein solches Lösungsschema wird als explizite Methode bezeichnet [14].

Tabelle 5.1.: Lagerungsarten einer Platte (Auszug aus [7])

Feste Einspannung		Alle Durchbiegungen und Neigungen werden Null.
Freier Rand		Alle Kräfte und Momente werden Null ¹ .

Um die FDM auf ein konkretes Bauteil anwenden zu können, muss zusätzlich das Verhalten der Differenzen an den Rändern berücksichtigt werden. Für diese Stellen gilt es die Forderungen aus den Randbedingungen der Platte (s. Tabelle 5.1) zu erfüllen. Damit ergeben sich weitere Beziehungen, die mit finiten Differenzen an der Randstelle angenähert werden können. Entsprechendes Auflösen nach unbekanntem Funktionswerten führt auf Zusammenhänge, die es erlauben, die Differenzen (5.3), (5.4) und (5.5) an den Rändern zu berechnen.

Bei der Implementierung ist auf einen ausreichend kleinen Zeitschritt zu achten, um die Stabilität des Verfahrens zu gewährleisten [47, 129]. Das zu wählende Zeitintervall Δt ist ferner von der Ortsdiskretisierung abhängig. Zur Bestimmung der Konvergenzschwelle wird auf [14, 47, 159, 190] verwiesen.

Für eine praktische Anwendung sind auch beliebig berandete Gebiete zu betrachten. Für diese Anwendungsfälle ergeben sich bei der FDM Schwierigkeiten, da es nicht immer problemlos möglich ist, eine geeignete Diskretisierung des Raums zu erstellen [197].

5.2. Finite-Elemente-Methode

Viele Fragestellungen im Ingenieurwesen können mithilfe der FEM hinreichend genau beantwortet werden. Ihr Einsatzbereich umfasst bspw. die Berechnung linearer und nichtlinearer Elastostatik und -Dynamik, Wärmeübertragung und Thermoelastizität sowie Aerodynamik und Akustik [84].

Kommerziell verfügbare FEM-Programme erlauben den Einsatz einer Vielzahl an unterschiedlichen Elementtypen und ermöglichen es, diese innerhalb eines FEM-Modells auch beliebig miteinander zu kombinieren. Oftmals werden z. B. ein- und zweidimensionale Elemente gekoppelt [131, 204]. Dadurch reduzieren sich die unbekanntem Größen um eine ggf. zwei räumliche Dimensionen. Aufgrund der geringeren Modellgröße lassen sich Parameteroptimierungen für komplexe Strukturen (z. B. Fahrzeugkarosserien) effektiv durchführen [82].

Die Berechnung elastischer Wellenausbreitung fällt in das Aufgabengebiet der dynamischen FEM [14]. Mit der Massenmatrix \mathbf{m} , der Dämpfungsmatrix \mathbf{d} und der Steifigkeitsmatrix \mathbf{c} muss dazu die Gleichung

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{d}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{c}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (5.6)$$

gelöst werden [14, 72, 84]. In dieser ist der Verschiebungsvektor mit \mathbf{u} benannt, wobei die Punkte über dem Vektor die erste bzw. zweite Zeitableitung repräsentieren. In [36] wird diese Gleichung ausführlich aus der Biegung dünner, ebener und rechteckiger Platten hergeleitet.

¹Streng genommen sind diese Forderungen für die schubstarre Platte (Kirchhoff-Theorie) nicht zu erfüllen [7]. Dieses Problem wird gelöst, indem die Drillmomente durch statisch äquivalente Kräftepaare ersetzt werden [7]. Weitere Details hierzu und ergänzende Lagerungsarten können [7] entnommen werden.

Zur Lösung von (5.6) bieten sich direkte Integrationsmethoden sowie eine Lösung anhand der Überlagerung von Moden an [14]. Die direkte Integration löst (5.6) unmittelbar ohne sie vorher in eine andere Form zu transformieren [14]. Die Methoden der direkten Integration können weiter in explizite und implizite Verfahren unterteilt werden [14]. Explizite Verfahren ermitteln die Lösung von $\mathbf{u}(t + \Delta t)$ aus den Gleichgewichtsbedingungen bzw. Bewegungsgleichungen zum Zeitpunkt t [14, 84]. Nutzt ein direktes Integrationsverfahren im Gegensatz dazu die Gleichgewichtsbedingungen zur Zeit $t + \Delta t$, wird es als implizites Verfahren bezeichnet [14, 84]. Die Größe Δt ist, wie bei der FDM, die Schrittweite der Zeitdiskretisierung. Für explizite Verfahren kommt als Lösungsschema die zentrale Differenzenmethode (Abschnitt 5.1) zum Einsatz [14]. Die Operationen je Zeitschritt sind bei dieser Methode im Vergleich zu impliziten Verfahren i. d. R. deutlich geringer, daher ist hier der numerische Aufwand günstiger [14]. Jedoch ist durch einen ausreichend kleinen Zeitschritt auf numerische Stabilität zu achten, da andernfalls beliebige Fehler anwachsen können und die Lösung somit wertlos wird [14].

Es müssen die nachfolgenden Bedingungen berücksichtigt werden, wenn die FEM auf transiente Vorgänge angewendet werden soll.

5.2.1. Elementwahl

Bei der Verwendung von Volumenelementen zur Beschreibung einer Biegebewegung ist darauf zu achten, dass mindestens zwei, besser jedoch drei Elemente über die Dicke der Platte verteilt werden [15]. Weiterhin ist auch das Verhältnis der Kantenlängen wichtig. Ein Verhältnis von Länge zu Breite zu Dicke von 1:1:1 ist anzustreben [53]. Bei Seitenverhältnissen von 1:1:10 können noch akzeptable Lösungen erhalten werden [53]. Bei großen Verzerrungen der Elemente, z. B. durch spitze Winkel $< 10^\circ$, wird eine Änderung des FEM-Netzes empfohlen [84]. Elemente dürfen keine Innenwinkel $> 180^\circ$ aufweisen, denn dann sind die numerischen Ansätze nicht mehr gültig [53]. Unabhängig davon entsteht bei der Modellierung mit Volumenelementen ein sehr großes Modell, was die Rechenzeit verlängert.

Die Verwendung von Platten- oder Schalenelementen zur Modellierung von dünnwandigen Strukturen kann in diesem Fall Abhilfe schaffen [53, 84]. Das Verhalten der Elemente wird dazu über mechanische Modelle beschrieben (Abschnitt 2.3). Dadurch kann die Dimension der Aufgabenstellung und folglich auch der Berechnungsaufwand reduziert werden. Diese Theorien basieren ihrerseits auf grundlegenden Annahmen, die für die Richtigkeit der Berechnung eingehalten werden müssen [89].

5.2.2. Elementlänge

Die maximale Kantenlänge der Elemente ist durch die minimale Wellenlänge L_{\min} gegeben, da die Welle geometrisch aufgelöst werden muss [53, 116]. Abhängig von der geforderten Anzahl der Elemente pro Wellenlänge n_{FEM} kann mit nachstehender Formel die maximale Elementlänge

$$l_{\text{FEM,max}} = \frac{L_{\min}}{n_{\text{FEM}}} \quad (5.7)$$

berechnet werden [4]. Je nach Literaturquelle werden für n_{FEM} 10 bis 20 Elemente pro Wellenlänge vorgeschlagen [4, 115, 116]. Es ist jedoch nicht ausreichend, nur einzelne, interessante Bereiche sehr fein zu diskretisieren¹. Die gesamte Struktur muss ausreichend fein vernetzt werden, um Reflexionen und Überlagerungen berücksichtigen zu können [23].

¹Lokale Verfeinerung des FEM-Netzes wird häufig angewendet, wenn die Spannungsverteilung in einem speziellen Gebiet des Bauteils fein aufgelöst werden soll.

5.2.3. Zeitschritt

Die Wahl der Zeitschrittgröße nimmt erheblichen Einfluss auf das Ergebnis. Im Wesentlichen gilt es die nachfolgenden Bedingungen zu beachten. Der Zeitschritt Δt muss kleiner gewählt werden als das die schnellste Welle (i. d. R. die Longitudinalwelle (L-Welle)) den kürzesten Abstand zwischen zwei Knoten l_{\min} im FEM-Netz innerhalb dieser Zeit durchlaufen kann [14, 47, 84]:

$$\Delta t_{\max} \leq \frac{l_{\min}}{c_{\max}}. \quad (5.8)$$

Zur Vermeidung des Aliasing-Effekts ist das Abtasttheorem nach Nyquist und Shannon zu beachten [134]. Es besagt, dass ein kontinuierliches System mit der Bandbreite f_{\max} nur dann aus seiner abgetasteten Version mit der Abtastfrequenz f_{SR} fehlerfrei rekonstruiert werden kann, wenn $f_{\text{SR}} > 2 f_{\max}$ gilt [134]. Für eine ausreichende Güte im Zeitbereich wird in [116] ein Faktor von 20 vorgeschlagen:

$$\Delta t_{\max} \leq \frac{1}{20 f_{\max}}. \quad (5.9)$$

Der kleinere Zeitschritt aus (5.8) oder (5.9) ist zu wählen.

Durch den hohen Frequenzbereich bis 20 kHz, der für die körperschallbasierte Crashererkennung betrachtet werden muss, ergibt sich ein großer Aufwand bei der Simulation der gesamten Fahrzeugstruktur mithilfe der FEM [89, 116]. Die korrekte geometrische Abbildung der Welle fordert aufgrund der Beziehung (5.7) ein fein aufgelöstes Netz. Dies führt nach Gleichung (5.8) oder (5.9) wiederum zu einer kleinen Zeitschrittgröße. Aufgrund des hohen Diskretisierungsaufwands ist es nicht praktikabel, die strukturdynamischen Ausbreitungseigenschaften mithilfe der FEM zu bestimmen [89, 115, 116].

5.3. Rand-Elemente-Methode

Die Rand-Elemente-Methode (BEM)¹ ist eine Integralgleichungsmethode und nutzt die Tatsache, dass die Lösung einer Differentialgleichung durch die Integration der Greenschen Funktion (Einflussfunktion) und der Belastungsfunktion erhalten werden kann [52]. Bei dieser Methode wird nur der Rand des betrachteten Gebietes vernetzt [42, 91, 136, 197] (s. Abb. 5.1 rechts). Im Vergleich zur FEM (s. Abb. 5.1 links) ergibt sich dadurch eine Reduktion der Unbekannten um eine Dimension [91, 136, 197]. Die Gesamtmatrix ist damit kleiner, jedoch

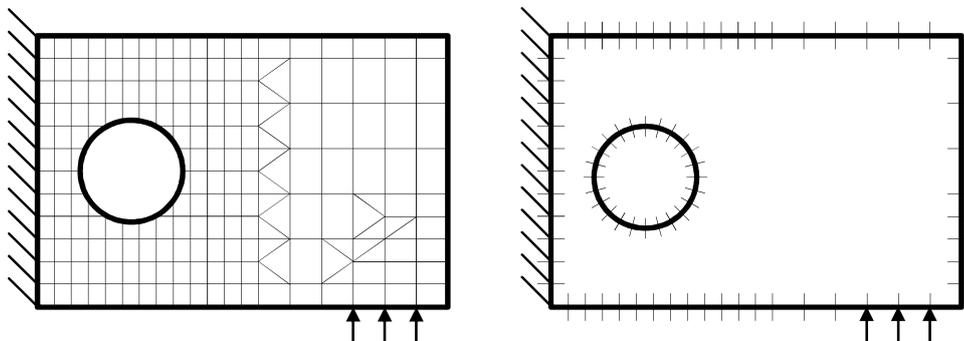


Abbildung 5.1.: Diskretisierung der Struktur bei FEM (links) und BEM (rechts) [42]

¹Boundary-Element-Method

vollbesetzt sowie unsymmetrisch. Aus diesem Grund ergeben sich kaum numerische Vorteile gegenüber der FEM [91, 136, 197].

Die BEM kann nicht ohne Weiteres das gleiche Problemspektrum abbilden wie die FEM, da für jede physikalische Fragestellung die entsprechende Fundamentallösung bekannt sein muss [129]. Es können bspw. keine inhomogenen Regionen abgebildet werden [42, 202]. Ihr Einsatz beschränkt sich im Wesentlichen auf die Behandlung von halbunendlichen Gebieten [197] und die Untersuchung von Rissproblemen [129]. Halbunendliche Gebiete sind vor allem bei der Bewertung akustischer Abstrahlvorgänge von Vorteil. Dabei wird oftmals die FEM mit der BEM gekoppelt [129]. Die Matrizen der BEM hängen bei dieser Aufgabenstellung jedoch von der Wellenzahl ab und müssen für jede Frequenz neu berechnet werden [91]. Ein hoher numerischer Aufwand ist die Folge. Eine Möglichkeit die Berechnung von Plattenschwingungen basierend auf (2.142) mithilfe der BEM durchzuführen ist [81] zu entnehmen.

Bei der Beschreibung dynamischer Vorgänge setzen die meisten BEM-Verfahren eine harmonische Art der Anregung voraus [62]. Die standardmäßige Formulierung der BEM kann dabei in Abhängigkeit der Erregerkreisfrequenz singuläre Wellenzahlen hervorrufen [91]. Durch eine alternative Formulierung, die numerisch aufwändiger ist, kann dieses Problem umgangen werden [90, 91]. In [103] wird eine spezielle Methode der BEM (Hochfrequenz-BEM) für den Einsatz im hochfrequenten Bereich als Alternative zur SEA vorgeschlagen. Eine Bewertung dieses Verfahrens für automobile Strukturen ist [87] zu entnehmen. Die Ergebnisse der Hochfrequenz-BEM enthalten im Vergleich zur SEA mehr Informationen [87]. Allerdings ist dieses Verfahren ebenfalls, wie die SEA, auf die Energiedichte als Mittel der Frequenz beschränkt [103]. Weiterhin ist zu beachten, dass der Rechenaufwand für Frequenzen im kHz-Bereich deutlich ansteigt [62, 150].

Die Lösung transienter Probleme in der Luftschallakustik ist mit speziellen Formulierungen der BEM möglich [62]. Jedoch können diese Verfahren instabil und somit fehlerhaft werden [62]. Aufgrund von Faltungsintegralen in den Fundamentallösungen ist hier ebenfalls die Berechnung numerisch aufwändig [197].

5.4. Transmission-Line-Methode

Die Transmission-Line-Methode (TLM) ist ein weiteres Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen [89]. Im Rahmen dieser Arbeit soll das Verfahren als eindimensionale Methode verstanden werden, die eine entsprechende Wellengleichung entlang dieser Dimension im Zeit- oder Frequenzbereich löst.

Es besteht die Möglichkeit das Verfahren auch mehrdimensional zu betreiben. In der Literatur wird dies als Transmission-Line-Matrix-Methode bezeichnet und ebenfalls mit TLM abgekürzt [163]. Dieses Verfahren, das auch unter dem Namen Discret-Huygens-Modelling zur Berechnung der Luftschallausbreitung [78, 79] bzw. für die Ausbreitung elastischer Wellen in Festkörpern [77] bekannt ist, kann nicht klar gegenüber der FDM abgegrenzt werden. Die wesentlichen Aspekte sind deshalb Abschnitt 5.1 zu entnehmen. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle nicht näher auf die mehrdimensionale Transmission-Line-Matrix-Methode eingegangen, sondern nur die eindimensionale TLM behandelt.

Die TLM wird bereits zur Beschreibung der Ausbreitung elektrischer Größen (Spannung U und Strom i) in einem Leiter, der als Transmission-Line (TL) bezeichnet wird, eingesetzt [116, 153]. Es lassen sich damit umfangreiche Netzwerke, z. B. die Versorgung mit elektrischer Energie oder die Telekommunikationsanbindung, berechnen [57, 153]. Weitere Einsatzgebiete sind bspw. die Berechnung akustischer Sensoren [113] sowie die schnelle Analyse von transienten Problemen [57]. Eine TLM wird hierzu aus einem vorwärts- und rückwärtsgerichteten Signalpfad sowie einem

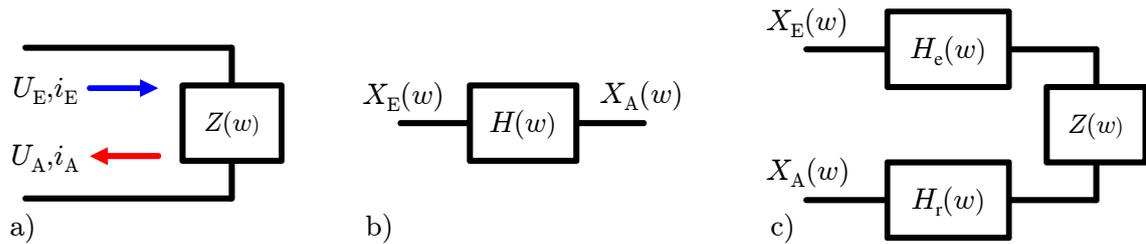


Abbildung 5.2.: Darstellung der Transmission-Line (TL). a) TL mit Impedanz Z [153],
 b) Übertragungsfunktion $H(\omega)$, c) TL kombiniert aus Übertragungsfunktionen

Impedanzsprung Z an den Enden des Leiters aufgebaut (s. Abb. 5.2 a)). Die betrachteten elektrischen Wellen sind mit den strukturdynamischen L-Wellen in einem Stab nach (2.46) vergleichbar [116, 153]. Einzige physikalischen Größen unterscheiden sich [116, 153].

Die einzelnen Bestandteile einer TL können als Übertragungsfunktion

$$H(\omega) = \frac{X_A(\omega)}{X_E(\omega)} \quad (5.10)$$

aufgefasst werden (s. Abb. 5.2 b)). Dabei ist die Eingangsgröße $X_E(\omega)$ und die Ausgangsgröße $X_A(\omega)$ ebenfalls im Frequenzbereich formuliert. Die gesamte TL lässt sich aus Kombination einer „einfallenden“ und „reflektierten“ Übertragungsfunktion ($H_e(\omega)$ bzw. $H_r(\omega)$) sowie der Reflexionsfunktion $Z(\omega)$ mit

$$X_A(\omega) = H_e(\omega) Z(\omega) H_r(\omega) X_E(\omega) \quad (5.11)$$

angeben (s. Abb. 5.2 c)).

Eine Formulierung der TLM im Frequenzbereich bietet weiterhin die Möglichkeit, das Gesamtsystem nach dem Mason-Formalismus zu vereinfachen [126, 127, 156]. Dies ist aber nur dann sinnvoll, wenn Netzwerke betrachtet werden. Für aneinander gereihete Übertragungsstrecken, wie z. B. in Abb. 5.2 c) dargestellt, ergibt sich kein Vorteil. Eine gelungene Anwendung der Mason-Vereinfachung ist [119] zu entnehmen.

5.5. Äquivalente-Quellen-Methode

Aus der Akustik ist zur Berechnung der Ausbreitung von Luftschall die Äquivalente-Quellen-Methode (ESM)¹ bekannt [70, 150]. Sie wird zur Beschreibung elektromagnetischer Wellen genutzt [202]. Besonders gut eignet sie sich, wenn transiente Vorgänge von Interesse sind [97]. In der englischsprachigen Literatur wird sie auch als Source-Simulation-Method [85, 149], Substitute-Sources-Method [85, 149] oder als Wave-Superposition-Method [35, 92, 104] bezeichnet. Die Anwendung der ESM auf akustische Fragestellungen ist ausführlich in [149] wiedergegeben. Neben ihrer allgemeinen Formulierung im Frequenzbereich wird in [85, 97, 98] eine Möglichkeit zur Berechnung im Zeitbereich vorgestellt. Dadurch können zeitlich veränderliche Randbedingungen sowie nichtlineare Effekte berücksichtigt werden [85].

Die eindimensionale Wellenausbreitung wird dazu über Ansatzfunktionen mit den unbekanntenen Quellen beschrieben. Diese Quellen werden folgendermaßen bestimmt, dass sie die Randbedingungen erfüllen [85, 97, 98]. Für die Formulierung im Zeitbereich existieren Lösungen, die eine Kopplung der ESM mit der ein- oder zweidimensionalen FDM ermöglichen [85]. Die

¹Equivalent-Source-Method

ESM nach [85] bietet weiterhin die Möglichkeit, die zu lösende Aufgabenstellung in ein System linearer Gleichungen zu überführen. Für die Umsetzung auf einem Computersystem ergeben sich dadurch weitere Vorteile [30]. Im Vergleich zur BEM oder FEM, die ebenfalls ein lineares Gleichungssystem lösen, ist der numerische Aufwand bei der ESM geringer [104].

Basierend auf der Zeitbereichsformulierung für longitudinale Luftschallwellen aus [85] wird in Abschnitt 6.3 die Methode auf die B-Welle erweitert. Anschließend wird eine Möglichkeit für die Beschreibung zweidimensionaler Strukturen dargestellt. Aus diesem Grund wird nachfolgend auf die Grundzüge der bekannten ESM eingegangen.

Ein einzelnes ESM-Element bzw. -Segment beschreibt in der Akustik gewöhnlich eine starre, mit Luft gefüllte Röhre [85]. Die Wellenausbreitung auf dem Element wird durch eine Greensche Funktion beschrieben [85]. Um die Randbedingungen erfüllen zu können, werden an den Rändern der Elemente die äquivalenten Quellen q_i eingeführt [85].

Breitet sich eine als eben angenommene Welle auf einem geraden Element der Länge l und dem Querschnitt A mit der Geschwindigkeit c aus, kann der akustische Schalldruck mit

$$\Xi(\omega, x) = \frac{\rho c}{A} q_1(\omega) e^{-jkx} + \frac{\rho c}{A} q_2(\omega) e^{-jk(l-x)} \quad (5.12)$$

im Frequenzbereich beschrieben werden [85]. Auf den Faktor $e^{j\omega t}$ wird für eine übersichtliche Darstellung verzichtet [85]. Die Dichte der Luft ist mit ρ und die äquivalenten Quellen an beiden Rändern der Röhre mit $q_1(x=0)$ und $q_2(x=l)$ bezeichnet. Die e-Funktionen werden zu den g -Funktionen zusammengefasst und es ergibt sich

$$\Xi(\omega, x) = \frac{\rho c}{A} q_1(\omega) g_1(\omega, x) + \frac{\rho c}{A} q_2(\omega) g_2(\omega, x). \quad (5.13)$$

Eine Multiplikation von q_i mit g_i im Frequenzbereich entspricht nach [134, 151, 179] einer Faltung im Zeitbereich. Mit dem Faltungsoperator $*$ kann folglich eine Formulierung im Zeitbereich mit

$$\Xi(t, x) = \frac{\rho c}{A} q_1(t) * g_1(t, x) + \frac{\rho c}{A} q_2(t) * g_2(t, x) \quad (5.14)$$

angegeben werden [85, 97, 98]. Die Funktionen $g_i(t, x)$ in (5.14) stellen die invers Fouriertransformierten von $g_i(\omega, x)$ dar. Sie können mit

$$g_i(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_i(\omega, x) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.15)$$

berechnet werden [134, 151, 179]. Details hierzu sind dem Anhang D zu entnehmen. Nachdem es sich ursprünglich um zwei Spektren handelt, liegt eine periodische bzw. zyklische Faltung vor [85, 134]. Der negative Integrationsbereich muss dadurch nicht berechnet werden und es gilt [85, 97, 98, 134]

$$q_i(t) * g_i(t, x) = \int_0^t q_i(\tau) g_i(t - \tau, x) d\tau. \quad (5.16)$$

In diskreter Form lautet diese Faltung mit $n\Delta t$ als aktueller Zeitschritt damit [85, 97, 98]

$$\begin{aligned} q_i(n\Delta t) * g_i(n\Delta t, x) &= \sum_{k=0}^n q_i(k\Delta t) g_i((n-k)\Delta t, x) \\ &= q_i(n\Delta t) g_i(0, x) + \sum_{k=0}^{n-1} q_i(k\Delta t) g_i((n-k)\Delta t, x). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Das n -te Glied wird separat zur Summe geschrieben, wodurch sich diese um Eins verringert. Der erste Term beschreibt die Quellgröße $q_i(n\Delta t)$ zum aktuellen Zeitschritt. Der zweite Term hingegen enthält alle Quellgrößen aus den vorangegangenen Zeitschritten. Mit der Abkürzung

$$\mathcal{G}_i = \sum_{k=0}^{n-1} q_i(k\Delta t) g_i((n-k)\Delta t, x) \quad (5.18)$$

ergibt sich für Gleichung (5.14)

$$\Xi(t, x) = \frac{\rho c}{A} q_1(n\Delta t) g_1(0, x) + \frac{\rho c}{A} \mathcal{G}_1 + \frac{\rho c}{A} q_2(n\Delta t) g_2(0, x) + \frac{\rho c}{A} \mathcal{G}_2. \quad (5.19)$$

Werden zwei Elemente miteinander verbunden, muss an der Verbindungsstelle der Schalldruck gleich sein [85]. Weiterhin muss die Kontinuitätsgleichung [52] erfüllt sein, womit die Massenströme bzw. die Volumenströme (bei gleicher Dichte) an der Koppelstelle identisch sind [85]. Damit sind bereits zwei Gleichungen bekannt, um die vier unbekanntenen Quellen der beiden Elemente zu bestimmen. Die restlichen beiden Zusammenhänge ergeben sich aus den Randbedingungen, die an den Enden der Segmente vorliegen. Die Terme $\rho c/A$ können je Segment unterschiedlich sein und sind entsprechend anzupassen. Diese Vorgehensweise ist ausführlich in [85] beschrieben.

5.6. Vergleich

In Tabelle 5.2 sind die aufgezählten Verfahren hinsichtlich der wesentlichen Anforderungen miteinander verglichen. Nahezu alle Verfahren erlauben die Berechnung transienter Probleme und die Angabe der Lösung im Zeitbereich. Einzig die BEM bereitet hier aufgrund ihrer Formulierung noch Schwierigkeiten. Die Behandlung beliebiger Strukturen ist bei den Verfahren FEM und BEM problemlos, bei der FDM mit Einschränkungen möglich. Für die hier vorgestellten Verfahren TLM und ESM ist gegenwärtig keine universell einsetzbare Vorschrift zur Modellierung zweidimensionaler Bauteile gegeben. Der Vorteil dieser Methoden besteht, im Gegensatz zu den Methoden FDM, FEM und BEM, in den geringen numerischen Kosten und kommt somit der Anforderung schnell verfügbarer Berechnungsergebnisse nach.

Tabelle 5.2.: Gegenüberstellung bekannter Verfahren

Bewertungskriterium	FDM	FEM	BEM	TLM	ESM
Transiente Probleme	● ¹	● ¹	◐ ¹	●	●
Schwingverhalten im Zeitbereich	●	●	◐	●	●
Beliebige zweidimensionale Berandungen	◐ ¹	● ¹	● ¹	○	○
Numerischer Aufwand	hoch	hoch	hoch	gering	neutral

Problembehandlung: ist möglich ●, ist schwierig ◐, ist nicht möglich ○

¹ Bewertung aus [197] übernommen

Die Anforderungen, die Ausbreitung einer transient angeregten B-Welle im hochfrequenten Bereich auf beliebige Balken- und Plattenstrukturen mit geringem numerischen Aufwand zu berechnen, erfüllt gegenwärtig kein Verfahren. Die geringe Rechenzeit der TLM und ESM erscheinen jedoch vorteilhaft. Aus diesem Grund werden im nachfolgenden Kapitel 6 diese Methoden zur Simulation der Körperschallausbreitung in Fahrzeugstrukturen entsprechend modifiziert.

6. Modifizierte Strahlen- und Wellenverfahren

Mit den bekannten Verfahren zur Analyse der Wellenausbreitung aus Kapitel 5 ist eine effektive Lösung der Körperschallausbreitung in komplexen Strukturen wie Fahrzeugkarosserien nicht möglich. Um das hochfrequente Schwingverhalten der Struktur an einzelnen Positionen rasch bestimmen zu können sind alternative Methoden notwendig. In diesem Kapitel werden zu diesem Zweck drei Verfahren vorgestellt, an die vorhandene Aufgabenstellung angepasst und anschließend miteinander verglichen. Dieser Vergleich liefert die Entscheidungsgrundlage für die Umsetzung des optimalen Verfahrens in Kapitel 7.

Zunächst wird das aus der Optik und Raumakustik bekannte Strahlenverfahren für die Körperschallausbreitung angepasst. Die Berechnung der relevanten Strahlverbindungen stellt jedoch einen hohen numerischen Aufwand dar, der mithilfe des Pfadverfahrens umgangen werden soll. Dieses Konzept gibt eine endliche Anzahl an Verbindungen vor, auf denen sich der Körperschall ausbreiten „darf“. Die Abweichungen, die durch diesen Zwang entstehen, werden anhand des Huygensschen Prinzips über einen Richtungsfaktor korrigiert. Die Äquivalente-Quellen-Methode (ESM) aus Abschnitt 5.5 wird bereits in der Akustik zur Simulation eindimensionaler Schallausbreitung eingesetzt. Zuerst wird dieses Wellenverfahren auf die Biegewelle (B-Welle) angepasst und anschließend eine Möglichkeit zur Berechnung zweidimensionaler Tragwerkelemente vorgestellt.

6.1. Strahlenverfahren

In der Optik wird bei der Ausbreitung von Licht im Allgemeinen eine Welle beschrieben. Für kleine Wellenlängen kann die Wellenoptik mit der geometrischen Optik angenähert werden. Außerdem wird von einer geraden Ausbreitung des Lichts ausgegangen [20, 157]. Dabei gilt je kleiner die Wellenlänge gegenüber den Abmessungen des Raumes ist, in dem sich die Welle ausbreitet, desto besser ist diese Näherung.

Das Strahlenverfahren approximiert die Ausbreitung der Körperschallwelle als geradlinigen Strahl. Sie ist folglich nur hinreichend genau, wenn die Abmessungen des Modells größer sind als die größte relevante Wellenlänge (Abschnitt 3.6). In Tabelle 6.1 sind die Wellenlängen der B-Welle L_B für unterschiedliche Frequenzen, Plattendicken und Materialien angegeben. Für Stahl- bzw. Aluminiumplatten bei einer Frequenz von 5 kHz und einer Dicke von 3,0 mm beträgt die größte Wellenlänge 77 mm. Die kritische Länge, ab dieser der Beugungseinfluss

Tabelle 6.1.: B-Wellenlängen in mm auf Platten unterschiedlicher Dicke h , Frequenz f und Materialien (berechnet nach (2.39) und (2.143), Materialparameter nach Tabelle 3.1)

f [kHz]	Stahl h [mm]				Aluminium h [mm]				Magnesium h [mm]			
	0,8	1,0	2,0	3,0	0,8	1,0	2,0	3,0	0,8	1,0	2,0	3,0
5	40	44	63	77	40	45	63	77	39	43	61	75
10	28	31	44	54	28	32	45	55	27	31	43	53
15	23	26	36	44	23	26	36	45	22	25	35	43
20	20	22	31	38	20	22	32	39	19	22	31	38

wesentlich wird, ist hier i. d. R. kleiner als die Hauptabmessungen der flächigen Fahrzeugteile (z. B. Spritzwand, Tunnel oder Unterboden aus Abb. 4.1).

Kleinere Diskontinuitäten, wie bspw. Bohrungen, Anschraubbolzen oder kleine Halter, dürfen demnach nicht in das Fahrzeugmodell aufgenommen werden. Sie würden die Welle in der Simulation komplett reflektieren und damit die Wellenausbreitung blockieren, da das Strahlenverfahren nicht die Ausbreitung in Schattenräumen von Hindernissen darstellen kann (Blockadewirkung). In der Realität wird die Welle jedoch aufgrund des Beugungseffekts von Hindernissen kleiner ihrer Wellenlänge kaum gestört [189]. Unter der Voraussetzung kleiner Wellenlängen gegenüber den Abmessungen einer ebenen Struktur wird nachfolgend ein auf Strahlen basierendes Verfahren vorgestellt. Grundlegende Informationen hierzu finden sich bereits in [116, 117].

Das Strahlenverfahren gliedert sich in zwei wesentliche Berechnungsabschnitte. Zuerst werden für eine ebene Struktur alle relevanten Strahlen ermittelt (Absatz 6.1.1, 6.1.2 und 6.1.3) und anschließend die Berechnung des Signals an der Sensorposition (Ziel) mit der Transmission-Line-Methode (TLM) durchgeführt (Absatz 6.1.4). Ansätze zur Optimierung des Verfahrens zeigt Abschnitt 7.3 im nächsten Kapitel.

6.1.1. Konzept

Die Anregung der Struktur erfolgt örtlich sehr konzentriert. Folglich wird von einer punktförmigen Anregung an der Quelle Q ausgegangen. Das transiente Schwingverhalten der Struktur wird nicht für das gesamte Bauteil angegeben. Es ist ausreichend die Schwingung an einem einzigen Zielpunkt Z zu bestimmen. In der Regel wird dies die Position des Körperschallsensors sein, der die Beschleunigung der Welle erfasst. Wird die Struktur an mehreren Orten angeregt oder sind mehrere Zielpunkte von Interesse, wird das Verfahren entsprechend wiederholt.

Mithilfe der Methode der Spiegelquellen, bekannt aus der Raumakustik [138] oder der elektrischen Feldtheorie [106], ist es möglich, das Problem der Berandung realer Bauteile auf eine unendlich ausgedehnte Platte mit der Einführung von Spiegelquellen SQ zu vereinfachen [116, 139]. Diese Spiegelquellen entstehen, wenn die originale Quelle Q an den Rändern gespiegelt wird [116, 139]. In Abb. 6.1 (links) ist dies für eine Spiegelung an der unteren Berandung dargestellt. Es entsteht dadurch ein neues Quellfeld mit gleicher Frequenz, Phasenlage und

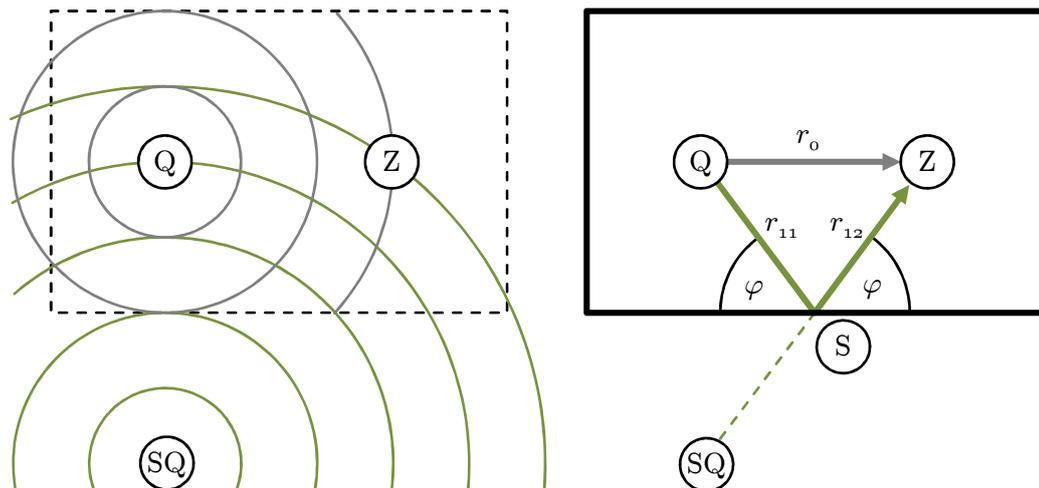


Abbildung 6.1.: Einführung von Spiegelquellen SQ zur Beschreibung von Reflexionen (links), Wellenfelder der Spiegelquelle werden mithilfe von Strahlen repräsentiert (rechts)

Ausbreitungsgeschwindigkeit der originalen Quelle. Durch die Spiegelung ist der Abstand von SQ zu Z größer als die direkte Verbindung von S zu Z. Folglich trifft die Welle erst später im Ziel ein. Der durch die Reflexion am Rand des realen Bauteils entstehende Anteil des Signals wird durch die Hinzunahme der Spiegelquelle beschrieben [116]. Eine ausführliche Konstruktionsvorschrift dieser Methode ist [116] zu entnehmen. Für geometrisch komplexere Bauteile ist dieses Verfahren nicht praktikabel. Weiterhin ist ein hoher numerischer Aufwand anzunehmen [41]. Eine alternative Modellierung mit verringertem Rechenaufwand [41] ergibt sich, wenn das Wellenfeld durch einen geradlinigen Strahl dargestellt wird (s. Abb. 6.1 rechts). Die Strecke SQ-Z schneidet dabei die Berandung der Platte im Punkt S. Die Verbindung von Q zum Punkt S lässt sich als einfallender und entsprechend S-Z als ausfallender Strahl interpretieren. Durch die ursprüngliche Spiegelung an der Kante ergibt sich die Gleichheit von Einfallswinkel zu Ausfallswinkel. Das Gesetz von Snellius (3.9) sowie die Betrachtung der Reflexion nach dem Prinzip von Huygens (Absatz 3.7) bestätigen dies. Der Reflexionspunkt S ist nicht Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle nach Huygens. Das Strahlenverfahren wendet diese Konstruktionsvorschrift am nächsten Elementrand erneut an.

Gestartet wird das Verfahren indem ausgehend von der Quelle Q unter einem Winkel φ ein Strahl ausgesandt wird. Bezogen auf das lokale Koordinatensystem des Bauteils können aus dem Winkel die Komponenten des Quellvektors

$$\mathbf{V}_Q = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

bestimmt werden. Durch Variation des Winkels ergibt sich eine Strahlenschar (s. Abb. 6.2 links), in der jeder einzelne Strahl getrennt verfolgt wird. Diese Strahlen setzen sich aus einer Menge an Teilstrahlen (Index j) mit der Länge r_{ij} zusammen (s. Abb. 6.1 rechts). Die Gesamtlänge des Strahls i berechnet sich mit

$$r_i = \sum_{j=1}^n r_{ij}. \quad (6.2)$$

Der Anfangspunkt des Gesamtstrahls ist immer die Quelle, der Endpunkt immer das Ziel. Die Reflexionspunkte der einzelnen Teilstrahlen repräsentieren den Verlauf, den der betrachtete Strahl im Bauteil zurücklegt. Dadurch können auch individuelle Reflexions- bzw. Transmissionsfaktoren bei der Berechnung des Signals je nach Randbedingung berücksichtigt werden. Die Abfolge der einzelnen Reflexionen ist für jeden Gesamtstrahl eindeutig und wird diesem als Identifikator (ID) zugeordnet. In Abb. 6.2 (rechts) ist der Verlauf anhand von vier Strahlen

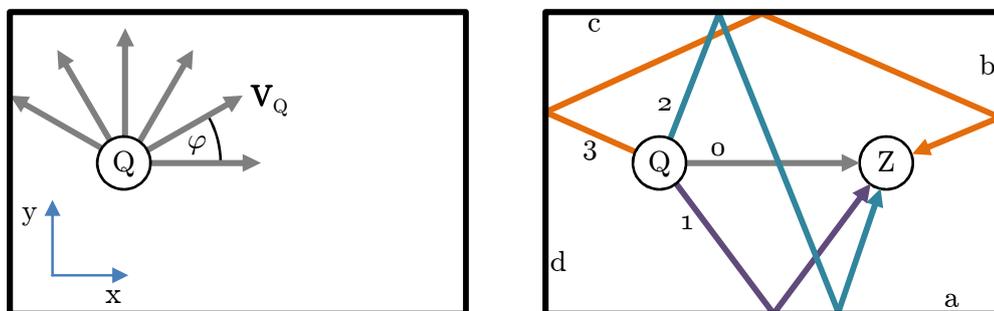


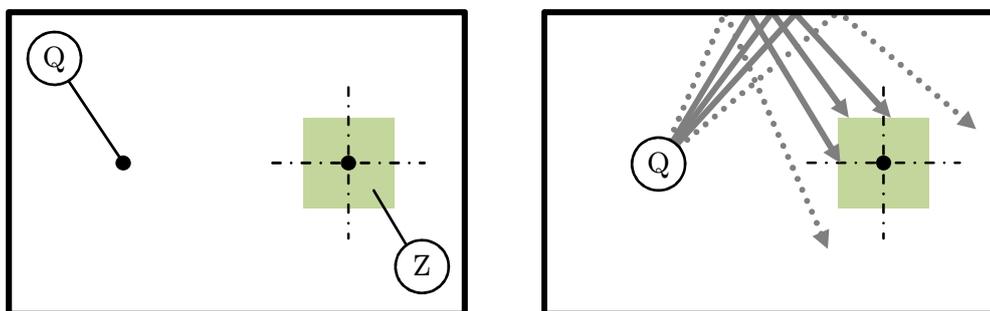
Abbildung 6.2.: Diskrete Aussendung von Strahlen (links) und Überprüfung, ob das Ziel Z getroffen wird (rechts)

Tabelle 6.2.: Identifikatoren (ID) der Strahlen aus Abb. 6.2 (rechts) und Abb. 6.4 (rechts)

Strahlnummer	ID in Abb. 6.2 (rechts)	ID in Abb. 6.4 (rechts)
0	-	e
1	a	e-c-b-a-e
2	c-a	d-c-e
3	d-c-b	

ersichtlich. Deren Identifikatoren sind in Tabelle 6.2 angegeben. Der direkte Strahl von Q nach Z ist hier die einzige Ausnahme, da er keinen ID besitzt.

Im Gegensatz zur Quelle ist das Ziel nicht als Punkt definiert, sondern wird als Fläche festgelegt (s. Abb. 6.3 links) [116, 117]. Als Form der Zielfläche wird ein Quadrat gewählt, das der Grundfläche des Sensors entspricht¹. Piezoelektrische Sensoren zur hochfrequenten Körperschallmessung nach [143] besitzen bspw. eine Grundfläche von $5,1 \times 5,1 \text{ mm}^2$. Für kleine Winkel zwischen den Strahlen kommt es vor, dass Strahlen über die gleiche Abfolge ihrer Kantenkontakte das Ziel erreichen (s. Abb. 6.3 rechts). Diese mehrfachen Strahlen sind physikalisch nicht möglich und würden bei der Berechnung des Zielsignals eine fehlerhafte Amplitude ergeben. Aus diesem Grund müssen sie berichtigt werden [107]. Wird ein eindeutiger ID als Name des Strahls zur Speicherung herangezogen, ergibt sich in der numerischen Implementierung eine automatische Aussortierung gleicher Strahlen, da sie sich gegenseitig überschreiben. Dadurch wird der Speicher nicht mehrfach belegt und Rechenzeit eingespart. Ein nachträgliches Aussortieren, wie in [116], ist nicht mehr notwendig.

**Abbildung 6.3.:** Definition des Zielgebiets als quadratische Fläche (links) und Strahlen, die über die obere Begrenzung das Zielgebiet treffen bzw. es verfehlen (rechts)

Bei der Konstruktion der Teilstrahlen wird laufend überprüft, ob das Ziel erreicht ist. Tritt dieser Fall ein, wird der aktuelle Strahl abgespeichert, die Strahlverfolgung jedoch fortgesetzt. Trifft im weiteren Verlauf der Strahl erneut im Ziel ein, muss der gesamte Verlauf als weiterer Strahl abgespeichert werden. Dieses Vorgehen ist physikalisch darin begründet, dass die Welle den Sensor auf direktem Weg erstmalig passiert und ihn durch anschließende Reflexion möglicherweise ein zweites Mal, ggf. noch öfters, erreicht. Erst wenn eine festgelegte Abbruchbedingung (Absatz 6.1.3) erfüllt ist, terminiert die Verfolgung des aktuellen Strahls endgültig.

Gelangt ein Strahl auf einen Bauteilübergang, findet an dieser Stelle Reflexion und Transmission (Abschnitt 3.2) statt. Um diesen Effekt abbilden zu können wird an den entsprechenden

¹Aus der Luftschallakustik existieren für das Strahlenverfahren unterschiedliche Ansätze zur Modellierung der Empfänger an der Zielposition. Eine entsprechende Zusammenstellung ist [201] zu entnehmen.

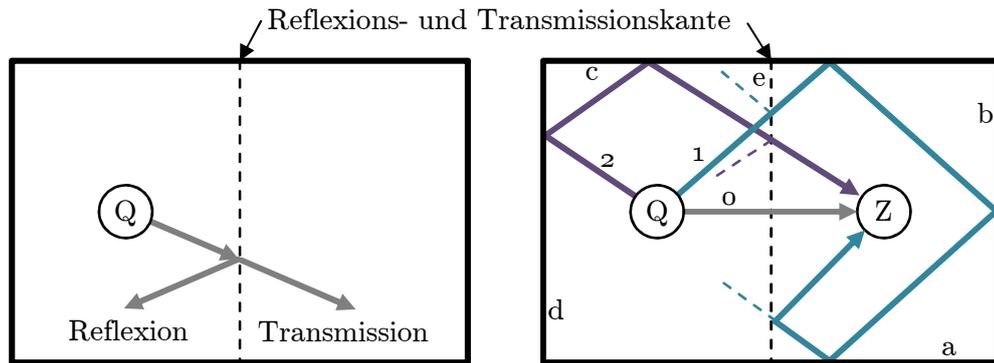


Abbildung 6.4.: Aufspaltung der Strahlen in einen reflektierten und einen transmittierten Strahl an Übergängen (links) und exemplarische Beispiele (rechts)

Kanten der reflektierte Strahl nachgebildet und zusätzlich die Strahlverfolgung der Transmission gestartet (s. Abb. 6.4 links). Sofern keine Brechung auftritt, besitzt der ausfallende Strahl der Transmission die gleiche Orientierung wie der einfallende Strahl. Durch Anpassung des Ausfallswinkels nach Gleichung (3.10) lässt sich eine Ablenkung des Strahls berücksichtigen. Der ursprüngliche Strahl wird dadurch in zwei Teile aufgespalten, die voneinander getrennt verfolgt werden. In Abb. 6.4 (rechts) sind verschiedene Lösungen möglicher Kombinationen aus Reflexion und Transmission dargestellt. Die Identifikatoren der Strahlen sind in Tabelle 6.2 angegeben.

6.1.2. Berechnung der Strahlverfolgung

Die Berechnung des Strahlverlaufs für den reflektierten und transmittierten Strahl erfolgt mithilfe der analytischen Vektoralgebra in der xy -Ebene. Alle notwendigen Größen sind in Abb. 6.5 dargestellt. Zu Beginn ist der Quellpunkt P_Q sowie der Quellvektor V_Q bekannt. Der

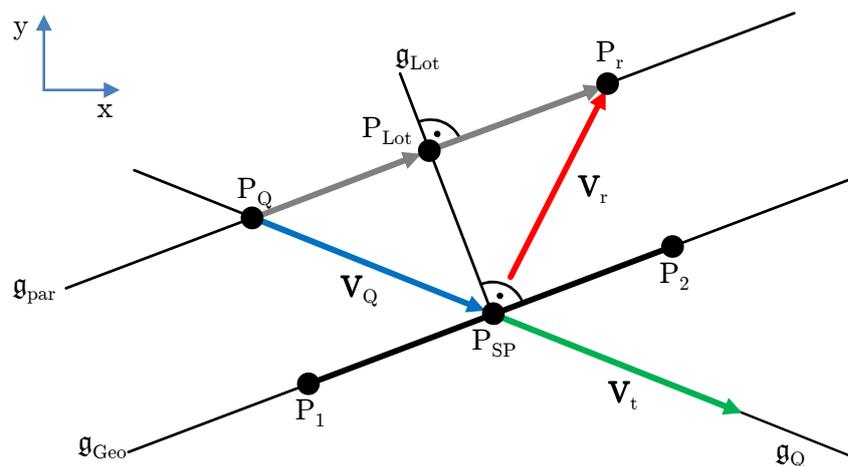


Abbildung 6.5.: Berechnung der Strahlverfolgung in der xy -Ebene, bekannt sind die Punkte P_Q , P_1 und P_2 sowie der Quellvektor V_Q

Punkt P_{SP} ergibt sich als Schnittpunkt der beiden Geraden¹

$$\mathbf{g}_{\text{Geo}} : P(\varsigma_{\text{Geo}}) = P_1 + \varsigma_{\text{Geo}} \mathbf{V}_{\text{Geo}} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_{\text{Q}} : P(\varsigma_{\text{Q}}) = P_{\text{Q}} + \varsigma_{\text{Q}} \mathbf{V}_{\text{Q}}. \quad (6.3)$$

Weiter ist die Reflexions- und Transmissionskante mit ihren Eckpunkten P_1 und P_2 gegeben. Daraus wird der Verbindungsvektor der Geometrie anhand der nachfolgenden Berechnung

$$\mathbf{V}_{\text{Geo}} = \begin{bmatrix} P_{2,x} - P_{1,x} \\ P_{2,y} - P_{1,y} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

bestimmt. Aus (6.3) und (6.4) ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} V_{\text{Geo},x} & -V_{\text{Q},x} \\ V_{\text{Geo},y} & -V_{\text{Q},y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varsigma_{\text{Geo}} \\ \varsigma_{\text{Q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{\text{Q},x} - P_{1,x} \\ P_{\text{Q},y} - P_{1,y} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

und damit die beiden Variablen ς_{Geo} sowie ς_{Q} . Eingesetzt in (6.3) lässt sich der Schnittpunkt P_{SP} berechnen. Zur Ermittlung des Reflexionsvektors \mathbf{V}_{r} wird eine Lotgerade \mathbf{g}_{Lot} auf die Geometrie durch den Schnittpunkt erzeugt und diese mit einer Parallelen \mathbf{g}_{par} zur Geometrie durch den Quellpunkt geschnitten. Die Komponenten des Lotvektors \mathbf{V}_{Lot} ergeben sich aus dem Verbindungsvektor der Geometrie mit

$$\mathbf{V}_{\text{Lot}} = \begin{bmatrix} -V_{\text{Geo},y} \\ V_{\text{Geo},x} \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Damit sind die beiden Geraden

$$\mathbf{g}_{\text{Lot}} : P(\varsigma_{\text{Lot}}) = P_{\text{SP}} + \varsigma_{\text{Lot}} \mathbf{V}_{\text{Lot}} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_{\text{par}} : P(\varsigma_{\text{par}}) = P_{\text{Q}} + \varsigma_{\text{par}} \mathbf{V}_{\text{Geo}} \quad (6.7)$$

bekannt². Das Gleichsetzen dieser Geraden liefert das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} V_{\text{Lot},x} & -V_{\text{Geo},x} \\ V_{\text{Lot},y} & -V_{\text{Geo},y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varsigma_{\text{Lot}} \\ \varsigma_{\text{par}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{\text{Q},x} - P_{\text{SP},x} \\ P_{\text{Q},y} - P_{\text{SP},y} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

und nach Auflösen von (6.8) und Einsetzen in (6.7) den Schnittpunkt P_{Lot} . Durch die doppelte Addition der Verbindung $P_{\text{Q}}P_{\text{Lot}}$ zum Quellpunkt wird der Reflexionspunkt P_{r} erhalten. Zusammengefasst ergeben sich seine Komponenten mit

$$P_{\text{r},x} = 2P_{\text{Lot},x} - P_{\text{Q},x} \quad \text{und} \quad P_{\text{r},y} = 2P_{\text{Lot},y} - P_{\text{Q},y}. \quad (6.9)$$

Der für die weitere Strahlverfolgung notwendige Reflexionsvektor berechnet sich aus

$$\mathbf{V}_{\text{r}} = \begin{bmatrix} P_{\text{r},x} - P_{\text{SP},x} \\ P_{\text{r},y} - P_{\text{SP},y} \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Aus Abb. 6.5 kann für den Transmissionsvektor

$$\mathbf{V}_{\text{t}} = \mathbf{V}_{\text{Q}} \quad (6.11)$$

abgelesen werden. Der Strahl wird für den reflektierten und transmittierten Pfad getrennt voneinander mit dem dargestellten Schema weiterverfolgt, wobei der Schnittpunkt P_{SP} als neuer Quellpunkt festgelegt wird.

¹Die mathematische Schreibweise der Beziehung (6.3) orientiert sich an [155].

²Die mathematische Schreibweise der Beziehung (6.7) orientiert sich an [155].

6.1.3. Abbruchbedingungen

Nahezu jeder ausgesandte Strahl wird bei ausreichend langer Verfolgung das Ziel über eine Vielzahl an Reflexionen oder Transmissionen erreichen. Eine praktikable Berechnung der Wellenausbreitung ist nur möglich, wenn nach sinnvollen Kriterien die Strahlverfolgung abgebrochen wird. Diese Abbruchbedingungen sind physikalisch bedingt indem sie die maximale Länge des Strahls r_{\max} begrenzen bzw. die Anzahl der Übergänge, an denen Reflexion und Transmission auftreten, limitieren [116, 117, 139]. Sie ergeben sich aus nachfolgenden Betrachtungen.

6.1.3.1. Laufzeit

Ein transientes Signal zeichnet sich durch seine Änderungen innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls aus. Diese maximale Zeitdauer t_{sim} , die simuliert werden soll, bestimmt zusammen mit der Phasengeschwindigkeit den Weg, den die Welle in dieser Zeit zurücklegen kann [116, 117]. Für Sensorsignale, die zur Ansteuerung von passiven Sicherheitssystemen verwendet werden, ist t_{sim} durch die Geforderte Zündzeit (RTTF) dieser Systeme gegeben. Mit (2.144) berechnet sich für die B-Welle auf einer Platte die maximale Ausbreitungsstrecke mit

$$r_{\max} = t_{\text{sim}} \sqrt[4]{\frac{K}{\rho h}} \sqrt{\omega_{\max}}. \quad (6.12)$$

Aufgrund der frequenzabhängigen Ausbreitungsgeschwindigkeit der B-Welle muss die maximal relevante Kreisfrequenz mit ω_{\max} festgelegt werden. Sie beträgt für die gegebene Anwendung $2 \pi 20$ kHz.

6.1.3.2. Amplitudenabnahme

Breitet sich eine Welle auf einer Platte aus, nimmt deren Amplitude mit zunehmender Ausbreitungsstrecke ab (Abschnitt 3.5). Ist die Amplitude der aktuellen Welle im Verhältnis zu ihrer ursprünglichen Amplitude stark gefallen ist es nicht mehr praktikabel, diesen Strahl weiter zu verfolgen [116, 117]. Dieses Verhältnis wird mit ζ_{Π} bezeichnet und ist aus ingenieurmäßigen Überlegungen zu gewinnen. Die maximal sinnvolle Ausbreitungsstrecke der Welle auf einer Platte wird i. d. R. nur für große Werte von $k_{\text{B}} r_{\max}$ erreicht und kann folglich aus der asymptotischen Näherung (3.35) mit

$$r_{\max} = \frac{2}{\pi} \sqrt[4]{\frac{K}{\rho h}} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\min}}} \frac{1}{\zeta_{\Pi}^2} \quad (6.13)$$

berechnet werden. Aufgrund der Dispersion muss hier ebenfalls die Frequenz betrachtet werden. Die Strahlverfolgung soll nur abgebrochen werden, wenn auch die Welle mit der niedrigsten Frequenz in ihrer Amplitude vernachlässigbar ist. Daher ist hier die kleinste relevante Frequenz ω_{\min} zu wählen. Sie beträgt für die gegebene Anwendung $2 \pi 5$ kHz.

6.1.3.3. Materialdämpfung

Die Körperschallwelle erfährt bei der Ausbreitung durch das Bauteil eine Dämpfung. Mit zunehmendem Ausbreitungsweg verringert sich ihre Amplitude. Ist der Verlustfaktor η_{B} der B-Welle und die Verhältniszahl ζ_{η} bekannt, wird die maximale Länge auf einer Platte mit

$$r_{\max} = -\sqrt[4]{\frac{K}{\rho h}} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\max}}} \frac{4}{\eta_{\text{B}}} \ln(\zeta_{\eta}). \quad (6.14)$$

berechnet. Sie gibt an, welche Entfernung die gedämpfte Welle zurücklegen kann, bis ihre Amplitude unter das ζ_{η} -fache der Ausgangsamplitude gefallen ist [116, 117].

6.1.3.4. Reflexions- und Transmissionsstellen

Trifft die Welle auf einen Übergang, an dem sowohl Reflexion als auch Transmission erfolgt, wird die einfallende Energie entsprechend der Faktoren R und T zwischen dem reflektierten und transmittierten Strahl aufgeteilt (Abschnitt 3.2). Die Amplitude dieser Strahlen ist anschließend kleiner als die Amplitude des einfallenden Strahls [116, 117]. Die Verhältniszahl ζ_{rt} gibt hier an, wie viele Reflexions- bzw. Transmissionsstellen der Strahl passieren kann, bevor seine Amplitude im Verhältnis zur ursprünglichen Amplitude vernachlässigbar klein ist. Die maximal zulässige Anzahl an Übergängen n_{\max} , für die nur ganzzahlige Ergebnisse sinnvoll sind, kann aus

$$\zeta_{rt} \geq \prod_{j=1}^{n_{\max}} |(R_j, T_j)| \quad (6.15)$$

abgeschätzt werden. Für den senkrechten Einfall des Strahls auf eine rechtwinklige Plattenverbindung ergeben sich nach (3.13) und (3.14) gleiche Reflexions- und Transmissionsfaktoren. Unter der Annahme, dass ein Strahl ausschließlich unter diesen Bedingungen reflektiert bzw. transmittiert wird, berechnet sich das Amplitudenverhältnis mit

$$\zeta_{rt, \text{Bsp}} = |R_j|^{n_{\max}}. \quad (6.16)$$

In Tabelle 6.3 sind für diesen Fall die Amplitudenverhältnisse bei unterschiedlicher Anzahl von Übergängen angegeben. Nach neun Reflexionen oder Transmissionen der Welle ist ihre Amplitude bereits unter 5 % der Ausgangsamplitude gefallen und kann vernachlässigt werden. Die Bestimmung von n_{\max} kann über eine Abschätzung für alle Strahlen im Vorfeld der Strahlverfolgung geschehen oder n_{\max} wird durch laufende Multiplikation während der Strahlermittlung berechnet. Letzteres fordert bereits bei der Strahlverfolgung genaue Kenntnis über die Faktoren und ist mit geringfügig mehr Rechenaufwand verbunden.

Tabelle 6.3.: Amplitudenverhältnis bei mehrfacher Reflexion bzw. Transmission (berechnet für eine rechtwinklige Plattenverbindung bei senkrechtem Einfall nach (6.16))

n_{\max} [-]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\zeta_{rt, \text{Bsp}}$ [%]	100,0	70,7	50,0	35,4	25,0	17,7	12,5	8,8	6,3	4,4	3,1	2,2

6.1.4. Berechnung des Zielsignals

Nach der Ermittlung der relevanten Strahlen wird die Berechnung des Signals am Ziel X_Z mithilfe der TLM durchgeführt. Als Eingangsgröße dient das Signal an der Quelle X_Q . Das Eingangssignal kann bspw. eine analytische Abschätzung liefern, wenn ein impulsförmiger Zeitverlauf vermutet wird. Ferner kann die Eingangsgröße durch die Finite-Elemente-Methode (FEM) [176] ermittelt werden oder sie ist messtechnisch zu erfassen. Ebenfalls ist es möglich, einen gemessenen Kraftverlauf als Eingangsgröße zu verwenden, da der Kraftverlauf mithilfe der Impedanzbeziehung (2.2) in die Körperschallschwingschnelle umgerechnet werden kann.

Weiterhin sind die gefundenen Strahlen notwendig. Diese werden im Vorfeld der Berechnung anhand ihrer Länge aufsteigend sortiert. Die kürzeren Strahlen, die den zeitlich ersten Einfluss auf das transiente Signalverhalten haben, werden dadurch zuerst simuliert und das Summensignal dieser Strahlen kann dem Benutzer vorab für eine Kontrolle der Plausibilität ausgegeben werden.

Die Berechnung der relevanten Welleneffekte erfolgt zweigeteilt. Sie wird in Mechanismen unterteilt, die einerseits die Körperschallwelle während der freien Ausbreitung in der

Struktur beeinflussen und andererseits die Welle manipulieren sobald diese auf Bauteiloberflächen oder -übergänge trifft. Für jeden Strahl wird mit einfachen, eindimensionalen Übertragungsgliedern das Signal im Frequenzbereich am Ziel ermittelt. Eine anschließende Addition aller einzelnen Ergebnisse, basierend auf dem Superpositionsprinzip aus Abschnitt 3.4 sowie die Rücktransformation in den Zeitbereich (Anhang D) liefert das transiente Verhalten der Schwingung an der Zielposition.

6.1.4.1. Mechanismen der Ausbreitung

Der ursprüngliche Zustand der Welle, bevor sie sich über die Struktur ausbreitet, wird als Quellsignal X_Q bezeichnet. Nach der Ausbreitung entlang des Strahls i wird das Signal mit $X_{Z,i}$ benannt. Die Charakteristik dieser Ausbreitung wird für die Welle mithilfe der Übertragungsfunktion $H_{AM,i}(\omega)$ beschrieben. Auf Basis des in Abb. 6.6 dargestellten

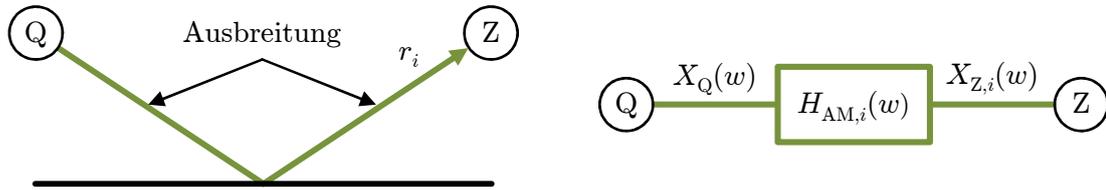


Abbildung 6.6.: Übertragungssystem der Ausbreitungsmechanismen. Quellsignal $X_Q(\omega)$, Zielsignal $X_{Z,i}(\omega)$, Übertragungsfunktion $H_{AM,i}(\omega)$

Übertragungssystems ergibt sich das Zielsignal im Frequenzbereich aus

$$X_{Z,i}(\omega) = H_{AM,i}(\omega) X_Q(\omega). \quad (6.17)$$

Die unter dem Begriff der Ausbreitungsmechanismen zusammengefassten Welleneffekte beinhalten die Dispersion (Abschnitt 3.1), die Materialdämpfung (Abschnitt 3.3) und die Amplitudenabnahme auf der Platte (Abschnitt 3.5). Unter der Voraussetzung, dass die Ausbreitung in Elementen gleicher Dicke und Materialien erfolgt, ergibt sich für den gesamten Strahl mit dem Index i die Übertragungsfunktion

$$H_{AM,i}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_B r_i}} e^{-j k_B r_i}. \quad (6.18)$$

Der Effekt der Dispersion wird über den Term $e^{-j k_B r_i}$ beschrieben (vgl. Lösungsansatz eindimensionaler Wellen aus Gleichung (2.34)). Soll die Materialdämpfung berücksichtigt werden, ist für k_B die komplexe Wellenzahl (3.19) zu verwenden. Da bei der Ausbreitung der gesamte Strahl betrachtet wird, muss für r_i entsprechend die gesamte Strahllänge (6.2) herangezogen werden. Obwohl es sich um eindimensionale Strahlen handelt, repräsentieren sie eine zweidimensionale Struktur. Folglich muss die Amplitudenabnahme für die B-Welle erfasst werden. Selbst für den kürzesten Strahl in einer Fahrzeugstruktur ist von einer Länge $r > 49$ mm auszugehen. Aus diesem Grund kann die asymptotische Näherung (3.35) aus Abschnitt 4.4 verwendet werden. Dies entspricht in (6.18) der Wurzelfunktion. Da sich der Umfang der Wellenfront durch Reflexionen nicht ändert (Abschnitt 3.5), wird auch in diesem Fall die gesamte Strahllänge verwendet.

6.1.4.2. Mechanismen der Ränder

Sobald die Welle einen Rand oder Bauteilübergang erreicht, wird sie dort reflektiert und/oder transmittiert (Abschnitt 3.2). Das Signal wird unmittelbar vor diesem Übergang mit $X_{E,ij}$ und unmittelbar danach mit $X_{A,ij}$ bezeichnet. Das Übertragungssystem, aus dem sich

$$X_{A,ij}(\omega) = H_{RM,ij}(\omega) X_{E,ij}(\omega) \quad (6.19)$$

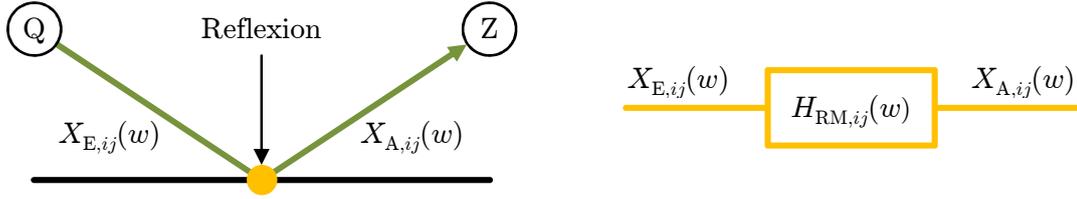


Abbildung 6.7.: Übertragungssystem der Randmechanismen. Eingangssignal $X_{E,ij}(\omega)$, Ausgangssignal $X_{A,ij}(\omega)$, Übertragungsfunktion $H_{RM,ij}(\omega)$

ableiten lässt, ist in Abb. 6.7 dargestellt. Für einen Strahl i , der aus $n_{\text{subrays},i}$ Teilstrahlen mit dem Index j besteht, ist je Übergang die Übertragungsfunktion der Randmechanismen entsprechend

$$H_{RM,ij}(\omega) = \begin{cases} R & \text{für Reflexion} \\ T & \text{für Transmission} \end{cases} \quad (6.20)$$

zu wählen. Durch Multiplikation aller Reflexions- bzw. Transmissionsfaktoren lässt sich der Einfluss auf den gesamten Strahl mit

$$H_{RM,i}(\omega) = \prod_{j=1}^{n_{\text{subrays},i}-1} H_{RM,ij}(\omega) \quad (6.21)$$

berechnen. Davon ausgenommen kann der direkte Strahl von der Quelle zum Ziel sein, da er ggf. keine Reflexions- oder Transmissionsstellen besitzt.

6.1.4.3. Zusammenfassung der Mechanismen

Werden die Ausbreitungs- und Randmechanismen zusammengefasst, ergibt sich für den jeweiligen Strahl i das Zielsignal

$$X_{Z,i}(\omega) = H_{AM,i}(\omega) H_{RM,i}(\omega) X_Q(\omega), \quad (6.22)$$

die durch Superposition das gesuchte Gesamtsignal am Zielpunkt Z ergeben:

$$X_Z(\omega) = \sum_{i=1}^{n_i} X_{Z,i}(\omega). \quad (6.23)$$

Eine abschließende Rücktransformation in den Zeitbereich (Anhang D) liefert das transiente Zeitverhalten.

6.2. Pfadverfahren

Der wesentliche numerische Aufwand des Strahlenverfahrens ist durch die Suche der relevanten Verbindungen gegeben. Das folgende Pfadverfahren umgeht diesen Schritt, indem die Körperschallausbreitung ausschließlich auf vorab definierten Pfaden erfolgt. Zunächst wird in Absatz 6.2.1 ein Netz aller zugelassenen Pfade automatisiert erstellt, das die Struktur repräsentiert. Als nächstes erfolgt in Absatz 6.2.2 die Darstellung der Pfadverbindungen die anschließend über einen automatisierten Suchalgorithmus ermittelt werden (Absatz 6.2.3). Durch die ausschließliche Verwendung der vorgegebenen Pfade entstehen Abweichungen zwischen der physikalischen Ausbreitung und der Ausbreitung auf eben diesen Verbindungen. Diese Abweichungen werden durch einen Korrekturfaktor berücksichtigt (Absatz 6.2.4). Die Modellierung des Beugungseffektes ist bei sinnvoller Wahl der Netzstruktur möglich und wird in Absatz 6.2.5 beschrieben.

6.2.1. Netzerstellung

Die Suche der relevanten Strahlen kann umgangen werden, indem ein Netz an möglichen Pfaden vorgegeben wird. Die Wellenausbreitung erfolgt ausschließlich auf diesen Pfaden. Die Pfade sind durch ebene Elemente beliebiger Form definiert, an deren Berandung (Elementkanten) Knoten sitzen. Je Element werden alle Knoten untereinander verbunden und dadurch die Pfade festgelegt. Das Pfadnetz hängt folglich von der Anzahl und Beschaffenheit der Elemente sowie von den Abständen der Knoten auf einer Elementkante ab. Stoßen zwei Elemente aneinander, sind die entsprechenden Knoten Teile beider Elemente. Die Pfade dürfen nicht die eingeschlossene Fläche des jeweiligen Elements verlassen. Die Quelle Q sowie das Ziel Z müssen jeweils auf einem Knoten liegen. Bei der Unterteilung der gesamten Struktur ist dies, wie Abb. 6.8 (links) zeigt, zu berücksichtigen. Eine äquidistante Verteilung der Knoten auf den Elementkanten wird als eine sinnvolle Aufteilung betrachtet (s. Abb. 6.8 rechts). Ein solches Netz kann einfach automatisiert erzeugt werden und stellt im Vergleich zur Strahlverfolgung keinen Mehraufwand in der Berechnung dar. Vereinzelt manuelle Positionsanpassungen der Knoten können bei komplexeren Geometrien zweckmäßig sein um diese besser abzubilden. Solche Modifikationen können nach der automatischen Netzerstellung manuell durchgeführt werden.

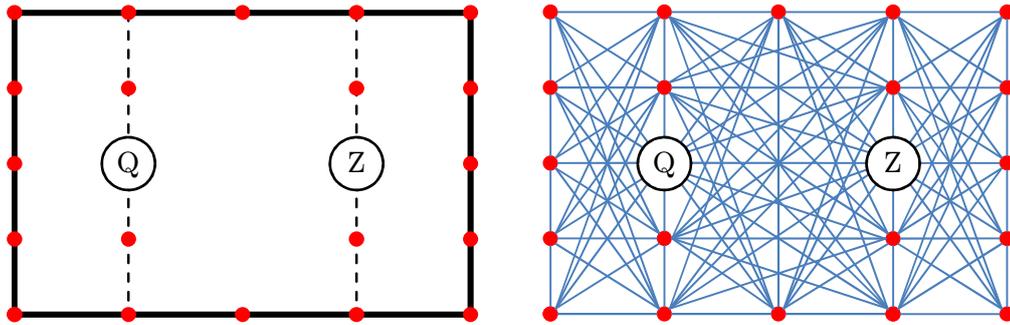


Abbildung 6.8.: Unterteilung der Struktur (links) und Netzerstellung (rechts)

6.2.2. Pfadverbindungen

In der Realität (und beim Strahlenverfahren) erreicht die Körperschallwelle über eine Vielzahl von Wegen das Ziel. Um das Schwingverhalten an der Sensorposition für ein bestimmtes Zeitintervall berechnen zu können, müssen relevante Verbindungen bis zu einer maximalen Gesamtlänge bestimmt werden, welche die Welle in dieser Zeit zurücklegen kann. Diese Tatsache wird beim Strahlenverfahren in der Abbruchbedingung „Laufzeit“ (Absatz 6.1.3.1) berücksichtigt. Es wird eine Menge an kürzesten Verbindungen ermittelt und anschließend damit die Körperschallausbreitung auf Basis der TLM berechnet.

In Abb. 6.9 a) sind mögliche Verbindungen eingezeichnet und mit Indizes versehen. Die direkte Verbindung zwischen Quelle und Ziel ist darin mit dem Index 0 gekennzeichnet. Dieses Ergebnis liefert ebenfalls das Strahlenverfahren. Als nächste Lösung würde das Strahlenverfahren die Verbindung 2 liefern, da hier das Gesetz von Snellius (Gleichung (3.9), $\varphi_e = \varphi_r$) gilt. Dieses Resultat ist für das Pfadverfahren allerdings ein Sonderfall. Der Grund dafür ist eine fehlende Bedingung in der Netzerzeugung, dass der in einen Randknoten einfallende Pfad nicht zwangsläufig im gleichen Winkel wieder aus dem Knoten ausfallen muss. Dadurch liefert das Pfadverfahren prinzipiell auch die Varianten 1 und 3 deren Verlauf nicht der geradlinigen Strahlausbreitung entspricht. In beiden Fällen tritt eine Ablenkung der Welle von ihrer ursprünglichen Ausbreitungsrichtung auf, die mit dem Winkel ϑ bezeichnet wird. Für

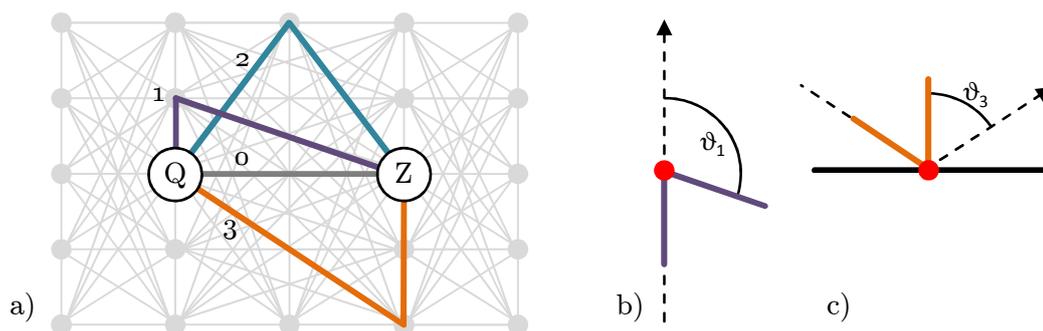


Abbildung 6.9.: a) Mögliche Pfadverbindungen von der Quelle Q zum Ziel Z, b) Ablenkung θ an einem inneren Knoten, c) Ablenkung ϑ an einem Randknoten

Knoten, die sich im Inneren des Bauteils befinden, ist die Ablenkung vom geraden Verlauf zu messen (s. Abb. 6.9 b), Transmission). Wird an der Stelle des Knotens die Welle reflektiert, muss der Winkel zwischen der Reflexion und dem Pfad berücksichtigt werden (s. Abb. 6.9 c)).

6.2.3. Suchalgorithmus

Eine Menge von Knoten, die untereinander über Pfade verbunden sind, wird in der Informatik als Graph bezeichnet [192]. Das Pfadnetz kann folglich als Graph betrachtet werden. Durch die Anwendung von Suchalgorithmen auf Graphen lässt sich eine Vielzahl an Problemen, wie bspw. die Wegsuche in Routenplanern, die Suche in Datenbanken oder die Ermittlung der Routingverbindung im Internet, lösen [24, 168, 192]. Oftmals werden dazu die Verfahren der Tiefen- und Breitensuche eingesetzt [24, 168, 192]. Zur Ermittlung der kürzesten Verbindung sind mit dem Dijkstra- und A*-Algorithmus spezielle Verfahren bekannt [24, 168, 192]. Ist eine Vielzahl an kürzesten Verbindungen gefragt, kann die Kostensuche [56] mit Rücksetzverfahren [158] verwendet werden. Als Rücksetzverfahren wird im speziellen Fall des Pfadverfahrens ein Mechanismus bezeichnet, der es dem Algorithmus erlaubt, beim Erreichen des Zielknotens zum letzten Entscheidungspunkt zurückzukehren und eine alternative Route zu verfolgen. Für die automatisierte Bestimmung der Verbindungen auf Basis des Pfadnetzes ist ein Suchalgorithmus notwendig, der den nachfolgenden Anforderungen unter Berücksichtigung der physikalischen Körperschallausbreitung entspricht:

- Der Suchalgorithmus muss innerhalb eines bekannten Pfadnetzes Verbindungen von einem gegebenen Startknoten (Q) zu einem Zielknoten (Z) suchen.
- Die Verbindungen bestehen i. d. R. aus mehreren Knoten die über Teilpfade miteinander verbunden sind.
- Der Suchalgorithmus muss eine beliebige Anzahl an kürzesten Verbindungen von Q nach Z als Ergebnis zurückgeben.
- Die Summe der Längen aller Teilpfade einer Verbindung ergibt die Gesamtlänge der Verbindung.

Die Kosten eines Pfades entsprechen dessen Länge. Auf Basis der Kostensuche wird ein Algorithmus entwickelt, der ausgehend vom Startknoten mögliche Verbindungen ermittelt. Diese werden sortiert nach ihrer aufsteigenden Gesamtlänge zurückgegeben. Das folgende Schema zeigt die Vorgehensweise [120]:

1. Ausgehend von der Quelle wird die Verbindung mit der geringsten Länge gewählt (Initialisierung).
2. In einer Prioritätenliste werden alle Nachbarn des aktuellen Knotens hinsichtlich des bisherigen Pfadverlaufs und der Kosten vermerkt.
3. Aus der Prioritätenliste wird der Eintrag mit den geringsten Kosten herausgenommen. Die Informationen zum bisherigen Pfadverlauf sowie die Kosten werden in einem Zwischenspeicher abgelegt. Der entsprechende Eintrag in der Prioritätenliste wird anschließend gelöscht.
4. Für diesen bisherigen Pfad (Verlauf mit den minimalen Kosten) werden erneut die Nachbarn nach Schritt 2 ermittelt und der Vorgang entsprechend wiederholt.

Sobald das Ziel erreicht ist, wird der Verbindungsverlauf abgespeichert. Das Verfahren wird abgebrochen, wenn eine maximal zulässige Gesamtlänge der Verbindungen (vgl. Abbruchbedingungen beim Strahlenverfahren, Absatz 6.1.3) oder eine vorab definierte Obergrenze an maximalen Verbindungen erreicht ist.

Die auf diese Weise ermittelten Verbindungen werden anschließend der TLM-Berechnung zur Verfügung gestellt. Das Zeitsignal wird nahezu analog mithilfe der Berechnungsvorschrift des Strahlenverfahrens aus Abschnitt 6.1.4 bestimmt. Einzig eine Korrektur der Ablenkung muss zusätzlich erfolgen.

6.2.4. Korrektur

Die Berechnung der Schwingantwort am Ziel erfolgt nahezu identisch mit dem in Abschnitt 6.1.4 beschriebenen Vorgehen. Die Mechanismen der Ausbreitung werden anhand der Pfadverbindungen berechnet (Gleichung (6.18)). Die gesamte Länge des Pfades (Gleichung (6.2)) wird zur Ermittlung der Amplitudenabnahme herangezogen. Führt eine Verbindung auf einen Randknoten, wird die Welle dort reflektiert oder transmittiert. Ist nach dem Randknoten der nächste Teilpfad im selben Element, tritt Reflexion auf und in Gleichung (6.20) ist der Faktor R zu verwenden. Wird der Pfad im Nachbarelement fortgeführt entspricht dies einer transmittierten Welle und T ist heranzuziehen.

Wird an einem Knoten die geradlinige Wellenausbreitung bzw. das Reflexionsverhalten an Rändern um einen Winkel ϑ abgelenkt, muss an dieser Stelle eine Abnahme der Amplitude erfolgen. Dies geht aus dem Huygensschen Prinzip aus Abschnitt 3.7 hervor. Der dort eingeführte Richtungsfaktor¹ ist mit $\mathcal{K}(\vartheta)$ bezeichnet. Folglich kann die Amplitude der Welle X_A nach dem Knoten mit

$$X_A(\omega) = \mathcal{K}(\vartheta) X_E(\omega) \quad (6.24)$$

berechnet werden. Die Amplitude der einfallenden Welle ist mit X_E bezeichnet. In der Literatur sind keine Richtungsfaktoren für die Ausbreitung kreisförmiger B-Wellen in dünnen Platten bekannt (Abschnitt 3.7). Aus diesem Grund muss für einen Einsatz des Pfadverfahrens die Wahl von $\mathcal{K}(\vartheta)$ überprüft bzw. ein entsprechender Richtungsfaktor ermittelt werden.

Der Suchalgorithmus kann dahingehend optimiert werden, dass nur Verbindungen berücksichtigt werden für die $\mathcal{K}(\vartheta)$ hoch ist. Damit werden Pfade, die nur einen geringen Einfluss auf die Körperschallamplitude haben, vernachlässigt. Verbindungen, die nicht in einem gegebenen Bereich von $-\vartheta_{\text{Grenz}} < \vartheta < \vartheta_{\text{Grenz}}$ liegen, werden dadurch nicht betrachtet.

¹Der Richtungsfaktor (3.36) in Abschnitt 3.7 beschreibt die Beugung von Lichtwellen (transversale Kugelwellen) nach Kirchhoff.

Mithilfe eines Gedankenexperiments kann das Pfadverfahren in das Strahlenverfahren überführt werden. Für den Fall eines unendlich feinen Pfadnetzes sowie bei infinitesimal kleinen Grenzwinkeln $\vartheta_{\text{Grenz}} \rightarrow 0$ sind die Lösungen von Pfadverfahren und Strahlenverfahren identisch.

Der Suchalgorithmus des Pfadverfahrens darf, wie beim Strahlenverfahren, nur Verbindungen mit eindeutiger Abfolge von Kantenkontakten zulassen oder der Richtungsfaktor wird um eine entsprechende Korrektur erweitert. Der Grund für diese Beschränkung liegt in der Tatsache, dass die Diskretisierung des Pfadnetzes durch den Richtungsfaktor Einfluss auf die simulierte Amplitude nimmt. Aus diesem Grund wird gegenwärtig zur Anwendung des Pfadverfahrens ein feines Netz empfohlen. Der Suchalgorithmus sollte nur geringe Ablenkungswinkel ϑ_{Grenz} zulassen. Weiterhin sind Verbindungen mit gleicher Abfolge von Kantenkontakten zu eliminieren.

6.2.5. Beugung

Aufgrund der geradlinigen Ausbreitung der Welle ist das Strahlenverfahren nicht in der Lage, den Beugungseffekt (Abschnitt 3.6) nachzubilden. Entweder werden die Strahlen an einem Hindernis reflektiert, oder sie passieren es vollständig (s. Abb. 6.10 links). Folglich erreichen sie auf einer unendlich ausgedehnten Platte niemals ein Ziel, das hinter dem Hindernis liegt. Werden beim Pfadverfahren die Knoten in der Art gewählt, dass Verbindungen von Q nach Z seitlich am Hindernis vorbei möglich sind, kann auf diese Weise der Beugungseffekt berücksichtigt werden. In Abb. 6.10 (rechts) sind zwei solcher Pfade mit den entsprechenden Abweichungen ϑ dargestellt.

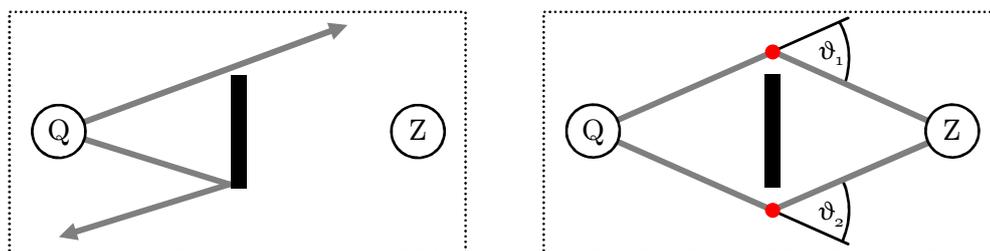


Abbildung 6.10.: Der Beugungseffekt kann beim Strahlenverfahren nicht abgebildet werden (links). Durch geschickte Positionierung der Verbindungen kann Beugung mithilfe des Pfadverfahrens modelliert werden (rechts)

6.3. Wellenverfahren

Die in den vorangegangenen Abschnitten 6.1 und 6.2 beschriebenen Verfahren berechnen das Schwingverhalten nur an einem Zielpunkt. Sind mehrere Punkte von Interesse, muss die Strahlverfolgung bzw. die Pfadsuche erneut durchgeführt und im Anschluss abermals das Zielsignal berechnet werden.

Für Körperschallwellen ist in der Literatur bezüglich der ESM im Zeitbereich noch kein Ansatz bekannt. Im Nachfolgenden wird zunächst für eindimensionale Elemente eine mathematische Beschreibung für B-Wellen angegeben. Im Weiteren wird anhand der in Absatz 6.2.2 vorgestellten Vernetzungsmethode eine Möglichkeit aufgezeigt beliebige zweidimensionale Strukturen abzubilden. Für Anwendungen in der Raumakustik ist in [104] bereits ein dreidimensionaler Ansatz zu finden, welcher sich an Randintegralen orientiert, der hier nicht als Grundlage dient. Abschließend werden Optimierungsmöglichkeiten aber auch Limitierungen der Methode diskutiert.

6.3.1. Eindimensionale Beschreibung der Biegewelle

Das Verfahren der Spektrale-Elemente-Methode (SEM) nach [30] ist der hier vorgestellten Darstellung eindimensionaler Elemente durchaus ähnlich. Im Unterschied zur ESM wird die Lösung bei der SEM jedoch im Frequenzbereich angegeben. Weiterhin bereitet die Modellierung beliebiger zweidimensionaler Strukturen anhand der SEM Schwierigkeiten [30, 116]. Die nachfolgenden Ausführungen werden deshalb aus der in Abschnitt 5.5 beschriebenen Methode der ESM [85, 97, 98] und den in [26, 36, 138] dargestellten Wellenansätzen abgeleitet.

6.3.1.1. Wellenansatz

Die Wellengleichung der B-Welle auf einem Balken nach der Euler-Bernoulli-Theorie (2.80) kann unter Annahme der freien Wellenausbreitung (2.29) und mithilfe der komplexen Zeiger-schreibweise (3.24) im Frequenzbereich mit

$$\frac{d^4 \underline{w}}{dx^4} - k_B^4 \underline{w} = 0 \quad (6.25)$$

angegeben werden [26, 30, 36, 138]. Diese Theorie ist für den hier betrachteten Anwendungsfall geeignet (Abschnitt 4.2). Wird für die Verschiebung der Lösungsansatz $\underline{w} = e^{j\alpha x}$ gewählt, ergeben sich die vier Lösungen $\alpha_{12} = \pm k_B$ und $\alpha_{34} = \pm jk_B$. Diese vier Bestandteile führen auf die Gesamtlösung

$$\underline{w}(x) = \underline{w}_+ e^{-jk_B x} + \underline{w}_- e^{jk_B x} + \underline{w}_{+j} e^{-k_B x} + \underline{w}_{-j} e^{k_B x}, \quad (6.26)$$

die auch als Wellenansatz der B-Welle bezeichnet wird [26, 30, 36, 138]. Die ersten beiden Terme können als vor- bzw. rücklaufendes Fernfeld und die letzten beiden Terme als in positiver bzw. negativer x -Richtung wirkende Nahfelder interpretiert werden [26, 138] (s. Abb. 6.11 a)).

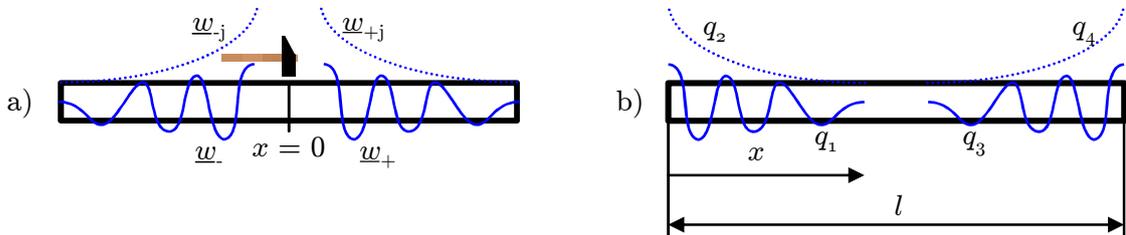


Abbildung 6.11.: a) Nah- und Fernfeldausbreitung der B-Welle auf einem angeregten Balken, b) Modellierung eines diskreten Balkenelements für die B-Welle

6.3.1.2. Feldgrößen

Aufgrund der vier unabhängigen Amplituden in (6.26) besitzt die B-Welle grundsätzlich auch vier unabhängige Feldgrößen [26, 138]. Diese sind die Schwingschnelle v des Balkens in transversaler Richtung (z -Koordinate), die Winkelgeschwindigkeit der Verdrehung Ω , das Biegemoment M und die Querkraft Q .

Die Verschiebung eines Balkens in z -Richtung ist in Absatz 2.3.3 mit w benannt. Die zeitliche Änderung dieser Größe wird als Schwingschnelle bezeichnet und berechnet sich mit

$$v = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (6.27)$$

Aus der Balkentheorie nach Euler-Bernoulli (Absatz 2.3.3.1) ist mit (2.76) ein Zusammenhang zwischen der Durchsenkung und der Verdrehung gegeben. Für die Winkelgeschwindigkeit der

Verdrehung gilt analog zu (6.27) der Zusammenhang

$$\Omega = \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (6.28)$$

Werden die Beziehungen (2.76), (6.27) und (6.28) ineinander eingesetzt, ergibt sich

$$\Omega = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (6.29)$$

Das im Balken wirksame Biegemoment berechnet sich nach Euler-Bernoulli mit (2.78). Eine zeitliche Ableitung führt auf

$$j\omega M = -EI \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (6.30)$$

Es wird, wie in Absatz 2.3.3, davon ausgegangen, dass der E-Modul und das Flächenmoment 2. Ordnung konstant über die Balkenlänge sind. Die Ableitung in (6.30) ist auf der linken Seite im Frequenzbereich formuliert. Durch Einsetzen von (6.27) in (6.30) folgt

$$M = -\frac{EI}{j\omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (6.31)$$

Aus (2.72) ist für die Euler-Bernoulli-Theorie durch Vernachlässigung der Rotationsträgheit die einfache Beziehung $Q = \partial M / \partial x$ bekannt und folglich lässt sich die Querkraft mit

$$Q = -\frac{EI}{j\omega} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \quad (6.32)$$

berechnen. Die Beziehungen (6.31) und (6.32) sind nur für dynamische Vorgänge ($\omega > 0$) gültig.

6.3.1.3. Balkenelement

Analog der in Abschnitt 5.5 beschriebenen ESM, wird ein diskretes Balkenelement, basierend auf der Beschreibung (6.26), für die B-Wellenausbreitung der Länge l erstellt (s. Abb. 6.11 b)). Die komplexen Amplituden \underline{w}_+ , \underline{w}_- , \underline{w}_{+j} , \underline{w}_{-j} entsprechen den äquivalenten Quellen q_1 , q_2 , q_3 und q_4 . Die Amplituden sind mit den Quellen jedoch nicht gleich, da im Unterschied zu (6.26) hier die Schwingschnelle beschrieben wird. Im Frequenzbereich gilt

$$v(\omega) = q_1(\omega) e^{-jk_B x} + q_2(\omega) e^{-k_B x} + q_3(\omega) e^{jk_B(x-l)} + q_4(\omega) e^{k_B(x-l)}, \quad (6.33)$$

wobei die Reihenfolge der Terme im Vergleich zu (6.26) vertauscht ist. Die ersten beiden Terme beschreiben das vorlaufende Fern- und Nahfeld am Balkenende bei $x = 0$ und die letzten beiden Terme das rücklaufende Fern- und Nahfeld am Balkenende bei $x = l$ (s. Abb. 6.11 b)). Die Exponentialfunktionen werden in den Funktionen $g_i(\omega)$ zusammengefasst. Der Index der g -Funktionen beschreibt dabei den Wellenterm bzw. die Quelle. Aus (6.33) ergibt sich damit

$$v(\omega) = q_1(\omega) g_1(\omega) + q_2(\omega) g_2(\omega) + q_3(\omega) g_3(\omega) + q_4(\omega) g_4(\omega). \quad (6.34)$$

Mit den Beziehungen (6.29), (6.31) und (6.32) sind Zusammenhänge zwischen der Schwingschnelle und den restlichen Feldgrößen bekannt. Die Winkelgeschwindigkeit der Verdrehung lässt sich aus (6.29) und (6.33) mit

$$\Omega(\omega) = - \left[-jk_B q_1 e^{-jk_B x} - k_B q_2 e^{-k_B x} + jk_B q_3 e^{jk_B(x-l)} + k_B q_4 e^{k_B(x-l)} \right] \quad (6.35)$$

berechnen. In vergleichbarer Weise ist mithilfe von (6.31) und (6.33) das Biegemoment mit

$$M(\omega) = -\frac{EI}{j\omega} \left[-k_B^2 q_1 e^{-jk_B x} + k_B^2 q_2 e^{-k_B x} - k_B^2 q_3 e^{jk_B(x-l)} + k_B^2 q_4 e^{k_B(x-l)} \right] \quad (6.36)$$

sowie aus (6.32) und (6.33) die Querkraft mit

$$Q(\omega) = -\frac{EI}{j\omega} \left[jk_B^3 q_1 e^{-jk_B x} - k_B^3 q_2 e^{-k_B x} - jk_B^3 q_3 e^{jk_B(x-l)} + k_B^3 q_4 e^{k_B(x-l)} \right] \quad (6.37)$$

zu bestimmen.

Durch die zeitlichen Ableitungen ergeben sich in den Gleichungen (6.35), (6.36) und (6.37) mit der Wellenzahl weitere Terme, die Funktionen der Kreisfrequenz sind. Diese werden nicht mit in die g -Funktionen aufgenommen, denn diese würden im Vergleich zu den e -Funktionen dominieren und dadurch bei der numerischen Rücktransformation fehlerhafte Werte liefern. Stattdessen werden sie bei der Betrachtung der Koppelbedingungen (Absatz 6.3.3) aufeinander bezogen. In den Gleichungen der Randbedingungen, ebenfalls Absatz 6.3.3, werden die Feldgrößen zu Null und damit verschwinden die Wellenzahlen. In beiden Fällen entfällt damit die Frequenzabhängigkeit dieser Vorfaktoren (s. Beispiel in Anhang E).

6.3.2. Überführung in den Zeitbereich

Die bisher angegebenen Beziehungen sind für eine Anwendung im Frequenzbereich formuliert. Eine Anforderung, die an alle Simulationsmethoden gestellt wird, ist die Angabe des transienten Schwingverhaltens im Zeitbereich. Die Formulierung für die Schwingschnelle (6.33) wird nachfolgend in den Zeitbereich übergeführt. Für dieses Verfahren ergeben sich noch weitere Vorteile:

- Zeitlich verschiedene Körperschallanregungen können einfach dargestellt werden.
- Für die Lösung im Zeitbereich greift das Wellenverfahren auf eine explizite Zeitintegration zurück. Damit kann es mit entsprechenden herkömmlichen Berechnungsmethoden wie der Finite-Differenzen-Methode (FDM) oder FEM gekoppelt werden [85].
- Zeitliche Nichtlinearitäten können berücksichtigt werden [85].

Aufgrund des Faltungssatzes der Fouriertransformation entspricht eine Multiplikation im Frequenzbereich einer Faltung im Zeitbereich [179]. Aus (6.34) ergibt sich

$$v(t) = q_1(t) * g_1(t) + q_2(t) * g_2(t) + q_3(t) * g_3(t) + q_4(t) * g_4(t), \quad (6.38)$$

wobei der Stern $*$ die Faltungsoperation beschreibt. Die Funktionen $g_i(t)$ in (6.38) stellen die inverse Fouriertransformierten von $g_i(\omega)$ dar. Deren Berechnung ist in Anhang D beschrieben. Die Berechnung der diskreten Faltung und die Umformulierung der Faltungssumme erfolgt analog der in Abschnitt 5.5 gegebenen Gleichungen (5.16) und (5.17). Mit der aus (5.18) bekannten Abkürzung [85, 97, 98]

$$\mathcal{G}_i(n\Delta t) = \sum_{k=0}^{n-1} q_i(k\Delta t) g_i((n-k)\Delta t) \quad (6.39)$$

folgt daraus für (6.38)

$$v(t) = q_1(n\Delta t) g_1(0) + \mathcal{G}_1(n\Delta t) + q_2(n\Delta t) g_2(0) + \mathcal{G}_2(n\Delta t) + q_3(n\Delta t) g_3(0) + \mathcal{G}_3(n\Delta t) + q_4(n\Delta t) g_4(0) + \mathcal{G}_4(n\Delta t). \quad (6.40)$$

Die Feldgrößen Ω , M und Q können analog zu (6.40) in den Zeitbereich überführt werden.

6.3.3. Koppel- und Randbedingungen

Komplexe Bauteile werden aus einer Vielzahl an Elementen aufgebaut. An der Verbindungsstelle (Koppelstelle) zweier Elemente müssen die Gleichgewichtsbedingungen hinsichtlich der kinematischen (v und Ω bei der B-Welle) und kinetischen (M und Q bei der B-Welle) Feldgrößen erfüllt sein. Abbildung 6.12 zeigt eine stirnseitige Kopplung zweier Balkenelemente sowie die Quellen des ersten (q_{1j}) bzw. zweiten Balkens (q_{2j}). Zur klaren Unterscheidung der beiden

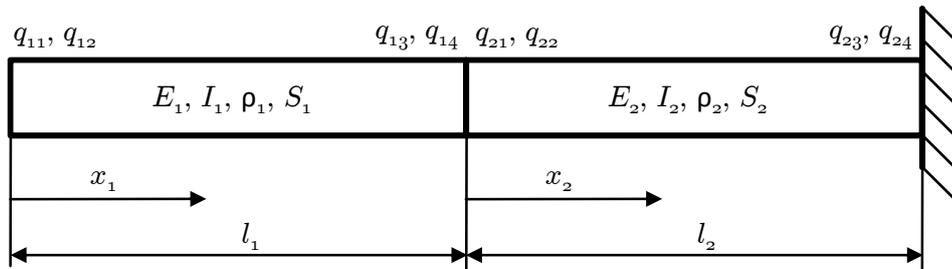


Abbildung 6.12.: Kopplung zweier Balkenelemente

Balkenelemente wird die Indizierung der Quellen und der g -Funktionen angepasst. Der Index i soll nun das Element und der Index j die einzelnen Quellenterme je Element beschreiben. An der Stelle $x_1 = l_1$ bzw. $x_2 = 0$ müssen die Schwingschnellen, die Winkelgeschwindigkeiten der Verdrehungen, die Biegemomente sowie die Querkräfte der Balkenelemente 1 und 2 gleich sein. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten demnach

$$v_1(\omega, x_1 = l_1) = v_2(\omega, x_2 = 0), \quad (6.41)$$

$$\Omega_1(\omega, x_1 = l_1) = \Omega_2(\omega, x_2 = 0), \quad (6.42)$$

$$M_1(\omega, x_1 = l_1) = M_2(\omega, x_2 = 0), \quad (6.43)$$

$$Q_1(\omega, x_1 = l_1) = Q_2(\omega, x_2 = 0). \quad (6.44)$$

Zur Lösung des Systems in Abb. 6.12 müssen in Summe acht Größen bestimmt werden. Diese setzen sich aus den jeweils vier unbekanntenen Quellen des ersten und zweiten Balkens zusammen. Mit (6.41) bis (6.44) stehen zunächst nur vier unabhängige Gleichungen zur Verfügung.

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen ergeben sich weitere Beziehungen, die zur Lösung des Systems herangezogen werden. In Tabelle 6.11 sind wichtige Randbedingungen für den Balken zusammengefasst [26, 138]. Lagerungsarten für spezielle Fälle sind unter anderem in [30] zu finden. Das Beispiel aus Abb. 6.12 besitzt auf der linken Seite ein „freies Ende“ und auf der rechten Seite eine „feste Einspannung“.

Tabelle 6.4.: Randbedingungen an einem Balken [26, 138]

$Q=0$ und $M=0$	$v=0$ und $M=0$	$\Omega=0$ und $Q=0$	$v=0$ und $\Omega=0$

alle Kräfte und Momente. Damit ergibt sich

$$M_1(\omega, x_1 = 0) = 0, \quad (6.45)$$

$$Q_1(\omega, x_1 = 0) = 0. \quad (6.46)$$

Die feste Einspannung bei $x_2 = l_2$ liefert

$$v_2(\omega, x_2 = l_2) = 0, \quad (6.47)$$

$$\Omega_2(\omega, x_2 = l_2) = 0. \quad (6.48)$$

6.3.4. Lösungsverfahren

Die Beziehungen (6.41) bis (6.48) werden unter Verwendung von (6.33) bis (6.37) im Frequenzbereich formuliert und anschließend, wie in Absatz 6.3.2 beschrieben, in den Zeitbereich überführt. Die Zeitbereichsdarstellung der Feldgrößen, vgl. Gleichung (6.40), wird in der Weise sortiert, dass sich auf einer Seite des Gleichungssystems lediglich die gesuchten Quellen zum aktuellen Zeitpunkt befinden und auf der anderen Seite die Lösungen der Quellen zu den vergangenen Zeitpunkten in den Summen \mathcal{G}_{ijk} enthalten sind. Dazu wird die Indizierung der g -Funktionen und Summen angepasst. Der Index k repräsentiert nun die laufende Nummer der g -Funktionen. In der Matrixschreibweise kann das Gesamtsystem mit

$$\mathbf{M}\mathbf{V}(n\Delta t) = \mathbf{R}(n\Delta t) \quad (6.49)$$

zusammengefasst werden. Die Matrix \mathbf{M} enthält nur den jeweils ersten Wert der g -Funktionen sowie Konstanten aus den Geometrie- und Werkstoffparametern. Im Vektor $\mathbf{V}(n\Delta t)$ sind die Werte aller Quellen $q_{ij}(n\Delta t)$ des aktuellen Zeitschritts $n\Delta t$ zusammengefasst. Die vergangenen Lösungen der Quellen sowie die Anregung sind im Vektor $\mathbf{R}(n\Delta t)$ enthalten. Das Gleichungssystem (6.49) muss für jeden Zeitschritt neu gelöst werden. Bei dieser Prozedur ändert sich je Zeitschritt lediglich der Vektor $\mathbf{R}(n\Delta t)$, da die Summen $\mathcal{G}_{ijk}(n\Delta t)$ immer neu berechnet werden müssen. Die Größe \mathbf{M} bleibt während des gesamten Lösungsvorgangs gleich. Zu Beginn der Berechnungsschleife wird die Matrix \mathbf{M} einmalig invertiert. Die Operation je Zeitschritt beschränkt sich damit auf

$$\mathbf{V}(n\Delta t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{R}(n\Delta t). \quad (6.50)$$

Für das in Abb. 6.12 dargestellte Beispiel wird in Anhang E das Gleichungssystem zunächst im Frequenzbereich aufgestellt und anschließend für den Zeitbereich die Matrix bzw. die Vektoren angegeben. Als Anregung wird ein transienter Kraftverlauf (in Anhang E mit F bezeichnet) auf das freie Ende bei $x_1 = 0$ aufgebracht. Die Ergebnisse dieser Simulation werden mit real gemessenen Signalen verglichen. Der reale Versuch wird für einen Balken mit den Abmessungen $2000 \times 40 \times 15 \text{ mm}^3$ durchgeführt und ist in Abb. 6.13 dargestellt. Der Abstand von der Modalhammeranregung bis zum Messpunkt MP beträgt 0,95 m. Die Lagerung erfolgt

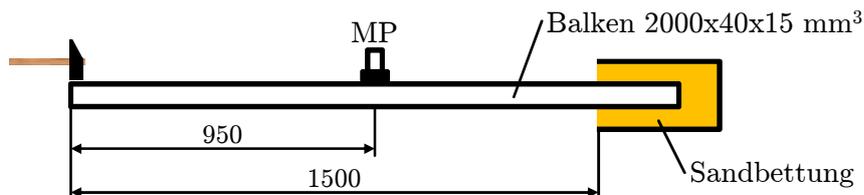


Abbildung 6.13.: Messung zur Validierung des Wellenverfahrens

durch eine Sandbettung auf einer Länge von 0,5 m. Beide Balkenelemente besitzen, bis auf die jeweilige Elementlänge, identische Eigenschaften. Der Balken besteht aus Stahl ($E = 210$ GPa und $\rho = 7850$ kg/m³). Abbildung 6.14 zeigt die Ergebnisse zweier unterschiedlicher Simulations-

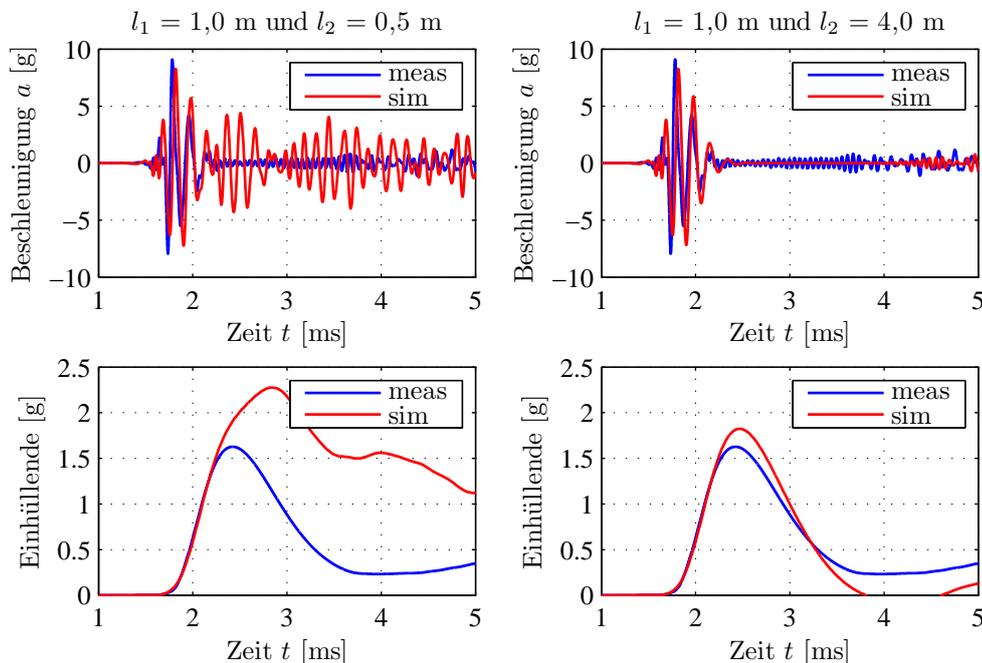


Abbildung 6.14.: Vergleich von Signalen aus Messung (meas) und Simulation (sim) für das in Abb. 6.12 dargestellte Modell mit unterschiedlichen Längen (dargestellt sind die im Bereich von 5 bis 20 kHz gefilterten Beschleunigungen (erste Zeile) sowie die Einhüllenden (zweite Zeile))

modelle (sim) mit $l_1 = 1,0$ m und $l_2 = 0,5$ m (linke Spalte) sowie $l_1 = 1,0$ m und $l_2 = 4,0$ m (rechte Spalte) im Vergleich mit der Messung (meas). Die Körperschallbeschleunigung aus der ersten Zeile zeigt in jedem Fall eine sehr gute Übereinstimmung des ersten Signalverlaufs bis 2,2 ms. Lediglich ein minimaler Phasenverzug zwischen Messung und Simulation ist zu erkennen. Dies kann durch die Anregung¹ erklärt werden. Ab 2,2 bis 5 ms treffen für $l_2 = 0,5$ m die ersten Reflexionen der festen Einspannung am Messort ein. Für $l_2 = 4,0$ m sind sie erst ab ca. 4,5 ms zu erkennen. Die Wellenausbreitung sowie Reflexionen an den Rändern können für die B-Welle durch das Wellenverfahren nachgestellt werden. Die Rechenzeit² der beiden Simulationsmodelle beträgt jeweils ca. 2 s. Diese Angabe bezieht sich auf ein DELL[®] PRECISION[™] T3500 System mit einem Intel[®] Xeon[®] W3520 (2,67 GHz) Prozessor, 6,0 GB Arbeitsspeicher und einem Microsoft[®] Windows[®] 7 Enterprise 64 Bit Betriebssystem. Die Implementierung erfolgt mithilfe des Softwarepaktes MathWorks[®] MATLAB[®] Version 7.10.0.499 (R2010a). Im Gegensatz zur Methode der Finiten-Differenzen oder Finiten-Elementen ist die Rechenzeit hier unabhängig von der Länge des Bauteils.

Obwohl eine Modellierung nach Euler-Bernoulli bei einer Balkenhöhe von 15 mm nicht mehr

¹Aufgrund der manuellen Betätigung des Modalhammers, der zur Anregung und Aufzeichnung des eingebrachten Kraftverlaufs dient, ist nicht exakt nachvollziehbar, an welcher Stelle bei den einzelnen Messungen das Bauteil genau getroffen worden ist. Abweichungen von bis zu 5 mm sind vorstellbar.

²Die Abtastrate in der Simulation beträgt 204800 Hz für eine maximale Simulationszeit von 10 ms. Damit sind je Modell 2048 Rechenschritte zu lösen.

durch die Abschätzung aus Abschnitt 4.2 abgedeckt ist, ergeben sich dennoch gute Lösungen.

Die Analyse der reflektierten Signale im Frequenzbereich aus Simulation und Messung ergibt für die Sandbettung eine Dämpfung der Amplitude um den Faktor 5 bis 10 im Vergleich zu einer festen Einspannung (vgl. Sandbettung bei dem Differenzmessverfahren (Absatz 4.1.2) bzw. der Dispersionsanalyse (Absatz 4.1.3)).

6.3.5. Erweiterung auf zweidimensionale Strukturen

Die bisher vorgestellte Wellenmethode ist bislang nur für Strukturen anwendbar, die sich aus eindimensionalen Tragwerkselementen zusammensetzen. Ein Konzept für die Erweiterung des Verfahrens auf zweidimensionale Elemente wird nachfolgend beschrieben. Für die Wellenzahl k_B wird folglich die Platte nach der Kirchhoffschen Modellierung (2.143) verwendet.

Bei einer ebenen und unbegrenzten Platte breiten sich von der Quelle Q die Wellen in konzentrischen Kreisen aus. In Abb. 6.15 (links) ist zu erkennen, dass die Wellenfronten auch die rot markierten Randpunkte, die zunächst beliebig gewählt sind, durchlaufen. Die Wellenausbreitung

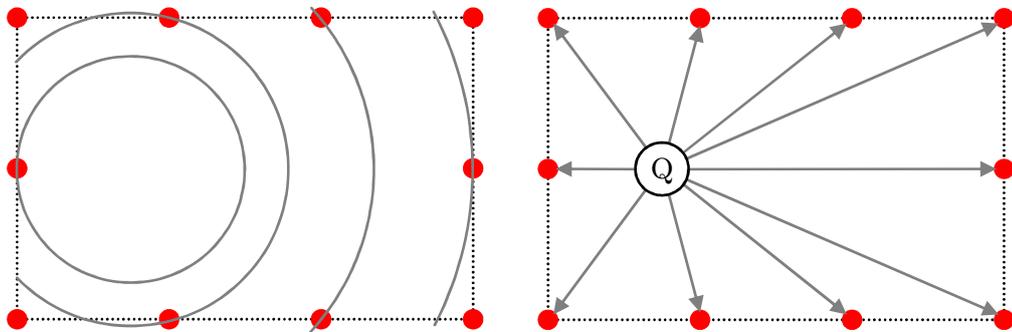


Abbildung 6.15.: Wellenausbreitung von Anregstelle Q zu den Randpunkten (links), Beschreibung dieser Ausbreitung mit geraden Verbindungen (rechts)

von der Quelle zu diesen Punkten kann analog zur eindimensionalen TLM des Strahlen- oder Pfadverfahrens erfolgen (s. Abb. 6.15 rechts). Die Randpunkte können nach dem Prinzip von Huygens als Ausgangspunkte neuer Elementarwellen aufgefasst werden. Sie senden ihrerseits wieder Wellenfronten in konzentrischen Kreisen aus (s. Abb. 6.16 links). Ohne Berücksichtigung der ursprünglichen Quelle Q treffen durch die Ausbreitung der Elementarwellen diese Wellenfronten wiederum alle anderen Randpunkte. Die Punkte stehen dadurch untereinander über eine gerade Verbindung in direktem Kontakt. In Abb. 6.16 (rechts) sind für den Punkt R links

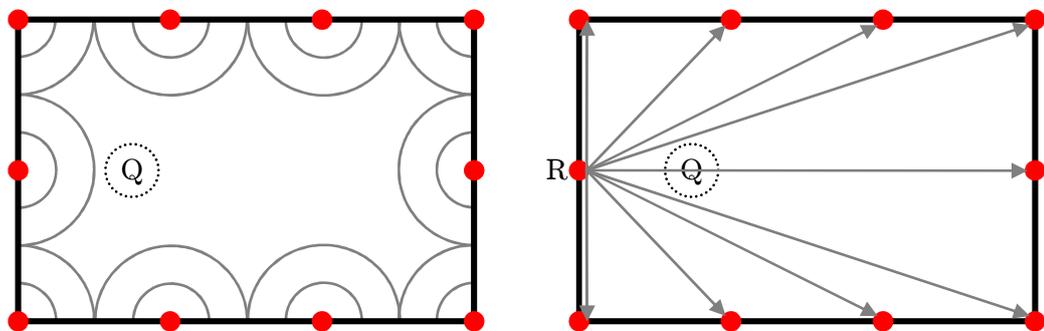


Abbildung 6.16.: Randpunkte wirken als Quellen von Elementarwellen (links), die Randpunkte stehen untereinander durch gerade Verbindungen in Beziehung (rechts)

der Quelle die Verbindungen zu allen anderen Randpunkten eingezeichnet. Diese eindimensionalen Verbindungen zwischen zwei Randpunkten werden mit eindimensionalen Elementen nach Absatz 6.3.1.3 modelliert und beschreiben auf diese Weise eine zweidimensionale Struktur (s. Abb. 6.17 a)). Aufgrund der ungestörten Superposition der Wellen (Abschnitt 3.4) beeinflussen sie sich nicht gegenseitig und damit stellen sich überkreuzende Verbindungen im Netz kein Problem dar. Abbildung 6.17 b) zeigt, wie komplexe Strukturen ebener Flächen durch die Verbindung von mehreren Elementen vernetzt werden können.

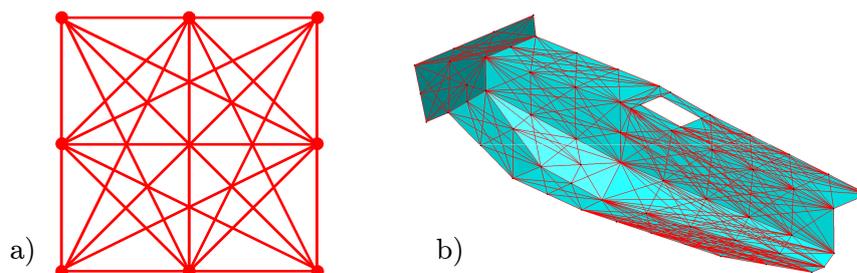


Abbildung 6.17.: a) Struktur eines quadratischen Elements, b) Vernetzung komplexer Strukturen

An jedem der Verbindungspunkte sind die kinematischen und kinetischen Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen. Verbindungen, die ein ebenes Flächentragwerkselement (Platte und Scheibe) im dreidimensionalen Raum beschreiben und eine Kopplung mit anderen Elementen erlauben sollen, müssen aus diesem Grund in der Lage sein Torsionsmomente sowie Längs- und Querkräfte in Scheibenebene zu übertragen. Das bedeutet, dass zusätzlich zur B-Welle jede Verbindung eine Longitudinalwelle (L-Welle), Transversalwelle (T-Welle)¹ und Torsionswelle² zu beschreiben hat. Die notwendigen Quellen je Verbindung erhöhen sich dadurch auf 10 Unbekannte ($4 \times$ B-Welle, $2 \times$ L-Welle, $2 \times$ T-Welle und $2 \times$ Torsionswelle).

6.3.5.1. Amplitudenabnahme

Die Genauigkeit der Amplitudenabnahme für die Ausbreitung auf flächigen Bauteilen beim Wellenverfahren ist in jedem Fall von der Modellierung abhängig. Da im Gegensatz zum Strahlen- oder Pfadverfahren nicht der gesamte Weg der Welle durch das Bauteil bekannt ist, kann i. d. R. dieser Effekt nicht exakt auf der Basis des Lösungsansatzes aus Abschnitt 3.5 berechnet werden. Weiterhin kann die Länge der Verbindungen sehr kurz sein und damit die asymptotische Näherung nach Gleichung (3.35) nicht mehr verwendet werden. Abhilfe bietet hier die Näherung mit angelegter Tangente (4.3) aus Abschnitt 4.4.

Unabhängig von der verwendeten Näherung, wird nachstehend der Einfluss der Vernetzung auf die Amplitudenabnahme diskutiert. In Abb. 6.18 sind zwei Vernetzungsvarianten desselben Gebietes dargestellt. Bei der direkten Verbindung (Abb. 6.18 links) von Quellpunkt zu Ziel soll die Amplitudenabnahme im einfachen Fall mit der asymptotischen Näherung (3.35) beschrieben werden. Wird das Element aber zusätzlich unterteilt (Abb. 6.18 rechts), ergibt sich für die Amplitude an der Zielposition bei einer multiplikativen Überlagerung der Amplitudenabnahme

¹Die T-Welle tritt hier in der Mittelebene der Scheibe auf. Die Wellenzahl und Phasengeschwindigkeit ist mit (2.60) und (2.61) gegeben. Der Charakter der Wellengleichung entspricht dem der L-Welle aus Absatz 2.3.1 und besitzt damit zwei unabhängige Feldgrößen.

²Eine detaillierte Beschreibung und Herleitung der Wellengleichung sowie Angabe der Wellenzahl und Phasengeschwindigkeit ist [26, 138] zu entnehmen. Der Charakter der Wellengleichung entspricht dem der L-Welle aus Absatz 2.3.1 und besitzt damit zwei unabhängige Feldgrößen.

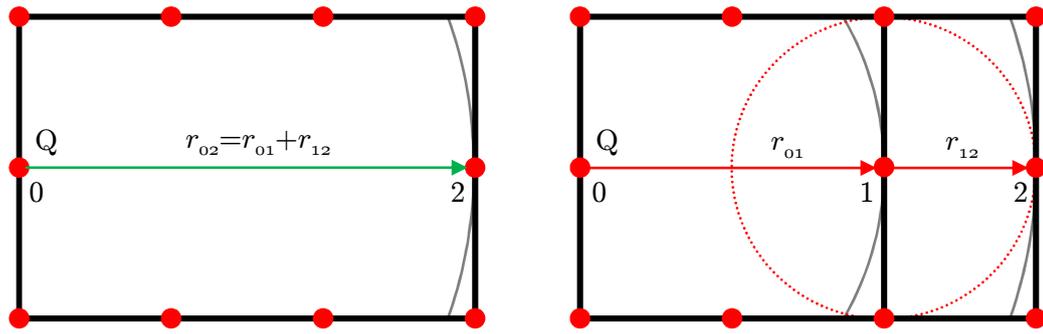


Abbildung 6.18.: Einfluss der Vernetzung auf die Amplitudenabnahme beim Wellenverfahren.
a) Grobe Vernetzung, b) Feine Vernetzung

beider Verbindungen ein anderer Faktor. Der Vergleich der beiden Situationen führt auf

$$\sqrt{\frac{2}{\pi k_B (r_{01} + r_{12})}} \neq \sqrt{\frac{2}{\pi k_B r_{01}}} \sqrt{\frac{2}{\pi k_B r_{12}}}. \quad (6.51)$$

Aus physikalischer Sicht ist jedoch die linke Seite zutreffend. Werden Verbindungen betrachtet, bei denen die Welle eine Ablenkung von der gradlinigen Ausbreitungsrichtung erfährt, muss zusätzlich die Richtungsabhängigkeit berücksichtigt werden (vgl. Absatz 6.2.4).

6.3.5.2. Beugung

Die Wellenmethode besitzt aufgrund der Anwendung des Huygensschen Prinzips mehr „Wellencharakter“ als die Strahlenmethode. Unter Voraussetzung geeigneter Vernetzung kann der für Wellen typische Effekt der Beugung (Abschnitt 3.6) viel besser abgebildet werden. Trifft eine Welle ausgehend von der Quelle Q auf ein breites Hindernis, das einen schmalen Spalt aufweist, kann beim Strahlenverfahren die Wellenausbreitung direkt hinter dem Hindernis nur im Öffnungsbereich beschrieben werden, der sich durch den Abstand der Quelle zum Spalt und dessen Größe ergibt (s. Abb. 6.19 links). Für große Entfernungen von Q bis zum Spalt entsteht lediglich ein sehr kleiner Öffnungswinkel und der beschreibbare Bereich wird entsprechend klein.

Bei der Wellenmethode hingegen wird die gesamte Struktur aus zwei einzelnen Elementen (I und II) aufgebaut (s. Abb. 6.19 rechts). Ein im Spalt sitzender Randpunkt koppelt beide Elemente. Der Koppelknoten ist im Element II mit allen Randpunkten verbunden. Diese

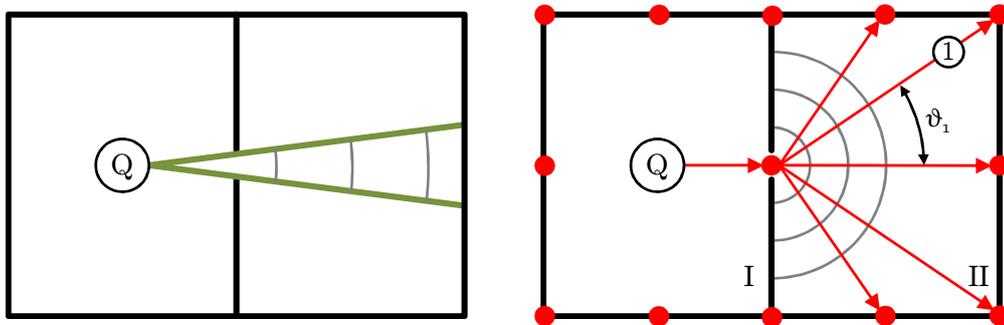


Abbildung 6.19.: Modellierung des Beugungseffektes beim Strahlenverfahren (links) und Wellenverfahren (rechts)

Verbindungen beschreiben die Ausbreitung der Elementarwelle ausgehend vom Spalt. Dadurch wird die Wellenausbreitung in den Schattenraum mithilfe der Randpunkte berücksichtigt. Wie beim Pfadverfahren, muss auch hier eine Ablenkung der ursprünglichen Welle um den Winkel ϑ beachtet werden. Folglich muss die Richtungsabhängigkeit der Welle wie in Absatz 6.2.4 entsprechend mit einbezogen werden.

6.3.5.3. Optimierung

Bei der rechnerischen Umsetzung des Wellenverfahrens muss Speicherplatz für die Variablen vorgesehen werden. Die Größen $q_{ij}(t)$ und $g_k(t)$ sind Funktionen der Zeit und werden als Vektoren implementiert. Die Anzahl der Werte, die je Funktion im Speicher vorzuhalten sind, ist von der Abtastfrequenz und der gewünschten Länge des Zeitsignals abhängig. Die Quellen q_{ij} können nicht zusammengefasst werden, da sie für jeden Knoten individuell berechnet werden müssen. In jedem Fall sind die Wellenzahlen k_B aller Verbindungen je Plattenelement identisch. Sofern Plattenelemente untereinander ebenfalls gleich sind (einheitliche Wandstärke und Material) kann die Vereinfachung auch elementübergreifend erfolgen. Die g -Funktionen unterscheiden sich noch in der Länge

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (6.52)$$

der zu beschreibenden Verbindung (vgl. Gleichung (6.33)). In der Ebene sind die xy -Koordinaten der Anfangs- und Endpunkte der jeweiligen Verbindungen mit den Indizes 1 bzw. 2 gekennzeichnet. Um Speicherplatz zu sparen, können gleich lange Verbindungen und dadurch gleiche g -Funktionen zusammengefasst werden. Dadurch ergibt sich auch ein verringerter Rechenaufwand bei der Bestimmung der inversen Fouriertransformation. Je gleichmäßiger ein Element ist, desto größer ist die Einsparung von Speicherplatz und Rechenkapazität. In Abb. 6.20 ist für ein quadratisches Element (links) mit vier Randknoten je Begrenzung die Längen aller Strahlen sortiert dargestellt (Mitte). Werden gleich lange Verbindungen zusammengefasst, verringert sich die gesamte Anzahl von ursprünglich 54 auf 8 (rechts).

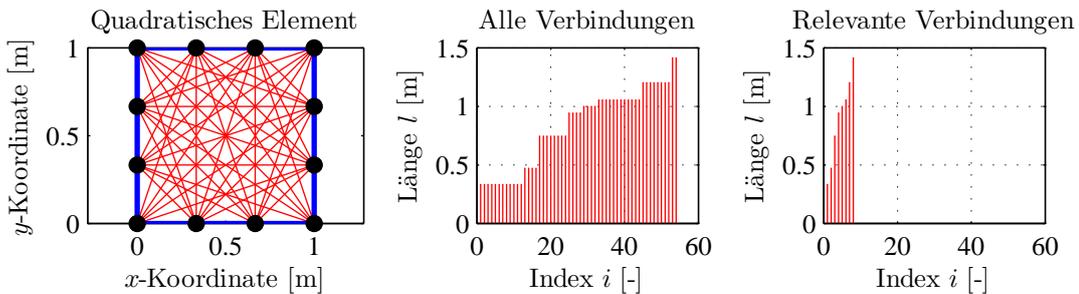


Abbildung 6.20.: Verbindungslängen eines quadratischen Elements. Durch Zusammenfassen verringert sich die Anzahl der im Speicher abzulegenden Verbindungen.

Eine Möglichkeit zur Reduzierung der Systemgröße und damit zur Verringerung der Rechenzeit besteht in der Vernachlässigung der wirkenden Nahfelder. Wie aus dem Wellenansatz der B-Welle in Gleichung (6.26) hervorgeht, repräsentieren zwei der Quellen die Amplitude exponentiell abklingender Felder¹. Mit zunehmender Länge des Elements gehen diese Terme gegen Null und es müssen lediglich zwei, statt vier, unbekannte Quellen ermittelt werden. Für mehrdimensionale Systeme muss jedoch beachtet werden, dass dadurch die entsprechenden Koppelbedingungen u. U. nicht widerspruchsfrei aufgestellt werden können.

¹Eine Abhandlung über die Beschreibung dieser Nahfelder für dünne Platten ist in [101] gegeben.

6.4. Vergleich

Die vorgestellten Verfahren aus den Abschnitten 6.1 bis 6.3 sind prinzipiell in der Lage die Körperschallausbreitung in beliebigen dünnwandigen Strukturen zu modellieren und das Schwingverhalten an bestimmten Positionen des Körpers zu ermitteln. Die folgende Gegenüberstellung liefert für den geforderten Anwendungsbereich die optimale Methode. Die Bewertung erfolgt anhand der Kriterien:

- Modellierbarkeit der Welleneffekte
 - Dispersion und Materialdämpfung
 - Reflexion und Transmission
 - Amplitudenabnahme auf der Platte
 - Beugung
- Ressourcenverbrauch der rechnerischen Umsetzung
 - Rechenzeit
 - Speicherbedarf
- Kopplung von ein- mit zweidimensionalen Elementen

Die Ergebnisse dieser Diskussion werden in Tabelle 6.5 am Ende des Kapitels zusammengefasst.

Die Simulationsmethode muss in der Lage sein, die wichtigsten Welleneffekte ausreichend genau abzubilden. Diese Anforderung stellt für die erfolgreiche Anwendung eine notwendige und hinreichende Bedingung dar. Alle vorgestellten Verfahren beschreiben die ebene Wellenausbreitung basierend auf dem komplexen Lösungsansatz (2.34). Die Wellenzahl wird anhand des Tragwerkelements gewählt. Die Materialdämpfung wird ebenfalls mithilfe von \underline{k} berücksichtigt. Zwischen den Verfahren ergeben sich hinsichtlich dieser Effekte keine Unterschiede.

Die Reflexion und Transmission an Übergangsstellen werden beim Strahlen- und Pfadverfahren über die Faktoren R und T implementiert. Diese Faktoren werden in der Berechnung als Funktionen der Kreisfrequenz an den jeweiligen Stellen des Strahl- bzw. Pfadverlaufs als Übertragungsfunktion eingebracht. Je nach Art der Verbindung ergeben sich die Faktoren aus theoretischen Ableitungen (Abschnitt 3.2 bzw. Absatz 4.5.1) oder numerischen Berechnungen (Absatz 4.5.2). Für einfache Übergänge, bspw. stirnseitige Kopplungen oder rechtwinklige Verbindungen, erfolgt die analytische Bestimmung der Faktoren aus der Betrachtung der Gleichgewichts- bzw. Randbedingungen an der Koppelstelle [26, 36, 138] die identisch der Modellierung des Wellenverfahrens (Absatz 6.3.3) sind. Einfache Verbindungen werden beim Wellenverfahren ohne die direkte Verwendung von R und T abgebildet. Sind komplexere Übergänge (z. B. Rundungen), die im Modell vereinfacht angenommen sind (z. B. mit einer scharfen Ecke) zu berücksichtigen, müssen Ausgleichsfaktoren bestimmt werden. Dadurch ergibt sich ein höherer Aufwand in den Vorarbeiten zur Modellerstellung.

Das Strahlen- und Pfadverfahren bilden die Amplitudenabnahme auf der Platte auf Basis der gesamten Länge (6.2) des Strahls bzw. Pfades von der Quelle bis zum Ziel ab. Die Gesamtlänge wird direkt in die asymptotische Näherung (3.35) eingesetzt und ist für große Argumente von k_{BR} ausreichend genau (Abschnitt 4.4). Beim Wellenverfahren ist der Weg der Welle durch das Bauteil nicht bekannt. Aus diesem Grund muss die Amplitudenabnahme anhand der einzelnen Verbindungen berechnet werden. Die Vernetzung hat damit erheblichen Einfluss auf die Abbildung dieser Welleneigenschaft (Absatz 6.3.5.1 und Abb. 6.18).

Der Effekt der Beugung kann durch das Strahlenverfahren nicht dargestellt werden, da die Wellenausbreitung ausschließlich auf geradlinigen Wegen erfolgt. Die Abschätzung aus Abschnitt 6.1 zeigt, dass für den hier diskutierten Anwendungsfall dieser Effekt keinen wesentlichen Einfluss hat. Sowohl das Pfad- als auch das Wellenverfahren basieren auf geradlinigen Verbindungen und können bei geeigneter Vernetzung die Beugung mithilfe eines entsprechenden Richtungsfaktors nachbilden (Absatz 6.2.5 bzw. 6.3.5.2). Allerdings ist zu beachten, dass der Richtungsfaktor eine Beziehung zwischen der Geometrie der Vernetzung und der berechneten Amplitude herstellt. Diese ist dadurch nicht mehr unabhängig von der Diskretisierung. Beim Pfadverfahren kann dieser Nachteil abgeschwächt werden, wenn ein sehr feines Netz erzeugt und der maximale Ablenkungswinkel ϑ_{Grenz} klein gewählt wird.

Der Ressourcenverbrauch einer rechnerischen Umsetzung wird anhand der Rechenzeit sowie des Speicherbedarfs bewertet. Um die notwendige Rechenzeit eines Algorithmus abschätzen zu können, wird dessen Zeitkomplexität mithilfe der \mathcal{O} -Notation betrachtet [24, 27, 67, 166]. Die \mathcal{O} -Notation beschreibt den Zeitaufwand für einen bestimmten Algorithmus in Abhängigkeit seiner Eingangsvariablen. Für das Strahlenverfahren lässt sich eine Zeitkomplexität von

$$\mathcal{O}(360^\circ \Lambda 2^\Gamma) \tag{6.53}$$

angeben. Die Anzahl der ausgesandten Teststrahlen Λ geht in die Zeitkomplexität linear ein. An den Reflexions- und Transmissionsstellen werden aus dem einfallenden Strahl zwei Strahlen, die getrennt von einander verfolgt werden müssen. Die Größe Γ beschreibt die maximale zulässige Anzahl an Kanten, an denen die Strahlen dupliziert werden.

Die Zeitkomplexität des Pfadverfahrens ergibt sich aus

$$\mathcal{O}(n_Q \Upsilon^{n_{\max}}) \quad \text{mit} \quad \Upsilon \geq 2. \tag{6.54}$$

Die Anzahl der Nachbarknoten des Quellknotens ist mit n_Q bezeichnet. Für den Suchalgorithmus ist dies die Anzahl der initial möglichen Pfadverbindungen. Die Basis der Potenzfunktion ist im Gegensatz zum Strahlenverfahren nicht bestimmt. Die Größe Υ bezeichnet die Anzahl der durchschnittlich relevanten Nachbarknoten (sinnvolle Abweichungen von der physikalischen Wellenausbreitungsrichtung entsprechend den Absätzen 6.2.2 und 6.2.4) im gesamten Netz (ausgeschlossen der Quellknoten). Die Einschränkung für $\Upsilon \geq 2$ ergibt sich aus der Überlegung, dass für $\Upsilon = 1$ der Pfadverlauf gegeben ist und nicht mehr gesucht werden muss. Die maximal zulässige Anzahl der Knoten in einem Pfad, ausgenommen der Quellknoten, wird mit n_{\max} bezeichnet. Mit der Einteilung der Zeitkomplexität in Klassen [67, 166], lässt sich in Abhängigkeit der Eingangsvariablen für das Pfadverfahren ein „aggressiveres“¹ Laufzeitverhalten als für das Strahlenverfahren abschätzen. Die auf der Strahlänge basierenden Abbruchbedingungen sind hier nicht berücksichtigt, da sie für das Strahlen- und Pfadverfahren gleichermaßen gelten. Wird für das Pfadverfahren die bereits in Absatz 6.2.4 dargestellte Grenzwertbetrachtung durchgeführt, indem von einem unendlich feinen Netz und einem infinitesimal kleinen Grenzwinkel ($\vartheta_{\text{Grenz}} \rightarrow 0$) ausgegangen wird, geht das Pfadverfahren in das Strahlenverfahren über. Unter der Voraussetzung, dass an jedem Knoten Reflexion und Transmission auftreten, nimmt Υ den Wert 2 an und n_{\max} geht in Γ über. Im besten Fall ergibt sich für das Pfadverfahren dieselbe Zeitkomplexität wie für das Strahlenverfahren.

Die Multiplikation der quadratischen Matrix mit einem Vektor besitzt im Allgemeinen (ohne Berücksichtigung spezialisierter Algorithmen) eine von der Systemgröße n_q quadratisch

¹In Abhängigkeit der Problemgröße schneller anwachsender numerischer Aufwand.

abhängige Zeitkomplexität [24, 159]. Nachdem beim Wellenverfahren die Matrixoperation (6.50) in Summe insgesamt n_t -mal durchgeführt (Anhang E) wird, gilt

$$\mathcal{O}(n_t n_q^2). \quad (6.55)$$

Die Zeitkomplexität nach der \mathcal{O} -Notation ist hier geringer als bei den beiden anderen Verfahren [67, 166]. Um die Größenordnung der voraussichtlichen Rechenzeit besser abschätzen zu können, werden verschiedene Vernetzungsvarianten an einer modellierten Fahrzeugstruktur erprobt (s. Abb. 6.21). Unter der Annahme einer gesamten Verbindungsanzahl von 2000 und 10

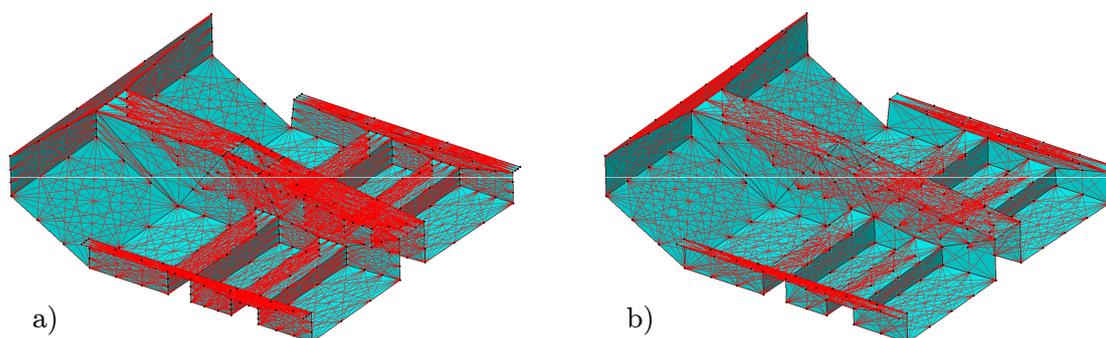


Abbildung 6.21.: Ermittlung der Verbindungsanzahl verschiedener Vernetzungsvarianten.
 a) je Elementkante 4 Knoten äquidistant verteilt \Rightarrow 2703 Verbindungen,
 b) Knotenabstand auf den Elementkanten max. 200 mm \Rightarrow 1688 Verbindungen

unbekannten Quellen je Verbindung (Absatz 6.3.5) ergibt sich ein zu lösendes Gleichungssystem der Ordnung 20000^2 . Die prototypische Umsetzung des Wellenverfahrens für das eindimensionale Beispiel eines Kragbalkens aus Abb. 6.12 ist in Anhang E hergeleitet. Das aus zwei Elementen bestehende Modell besitzt ein Gleichungssystem der Ordnung 8^2 und benötigt auf einer handelsüblichen Workstation¹ für eine Simulationszeit von 10 ms bei einer Abtastrate von 204800 Hz eine Rechenzeit von ca. 2 s. Für das Fahrzeugmodell lässt sich damit eine gesamte Rechenzeit von ca. 3500 h prognostizieren. Praktikable Lösungen in dieser Größenordnung sind gegenwärtig mit dem Wellenverfahren demnach nicht durchführbar (die Möglichkeiten der Optimierung aus Absatz 6.3.5.3 sind nicht berücksichtigt).

Der Speicherbedarf einer rechnerischen Umsetzung ist bei der Bewertung des Ressourcenverbrauchs ebenfalls zu berücksichtigen. Die gesamte physikalische Beschreibung des Ausbreitungsbereichs wird im Modell gespeichert. Es enthält Informationen zur Geometrie, Materialeigenschaften, Reflexions- und Transmissionsfaktoren, Quell- und Zielpunkt sowie das Eingangssignal. Diese Daten muss jedes Verfahren speichern. Folglich ergibt sich daraus kein Unterschied zwischen den Methoden. Das Strahlenverfahren liefert als Ergebnis eine Abfolge von Strahlen, deren Verlauf im Raum über x - y - z -Koordinaten beschrieben werden. Der Speicheraufwand ist hierfür gering. Gleiches gilt auch für das Pfadverfahren, das die gefundenen Pfade abspeichern muss. Das Pfadverfahren muss zusätzlich das Netz verwalten, womit ein Mehraufwand entsteht.

Für das Wellenverfahren gilt dies in gleicher Weise. Hinzu kommt die Aufgabe, alle Quellen und g -Funktionen für eine schnelle Berechnung im Speicher zu halten. Erneut ist mit

¹Verwendetes System: DELL[®] PRECISION[™]T3500, ein Intel[®] Xeon[®] W3520 (2,67 GHz) Prozessor, 6,0 GB Arbeitsspeicher und Microsoft[®] Windows[®] 7 Enterprise 64 Bit Betriebssystem. Implementierung mit: MathWorks[®] MATLAB[®] Version 7.10.0.499 (R2010a).

der Annahme von 20000 Quellen, 2048 Rechenschritten (Simulationsdauer von 10 ms bei 204800 Hz Abtastfrequenz) und der Verwendung von Fließkommazahlen mit 8 byte Speicherbelegung (oftmals Standard bei numerischen Berechnungen [147, 148, 173]) ein Speicherbedarf von $328 \cdot 10^6$ byte notwendig. Zusätzlich müssen die g -Funktionen berücksichtigt werden. Je Verbindung ergeben sich fünf Vektoren ($2 \times B$ -Welle, $1 \times L$ -Welle, $1 \times T$ -Welle und $1 \times$ Torsionswelle), womit der Speicherbedarf um weitere $164 \cdot 10^6$ byte ansteigt (die Möglichkeiten der Optimierung aus Absatz 6.3.5.3 sind nicht berücksichtigt). Im Vergleich zu den anderen Methoden ist damit für das Wellenverfahren erheblich mehr Speicher notwendig.

Um die Modellgröße zu reduzieren werden z. B. bei der FEM [82, 131, 204] ein- mit zweidimensionalen Tragwerkselementen gekoppelt. Das Wellenverfahren ist aufgrund der diskreten Verbindungen in der Lage, eine solche Kopplung der Elemente zuzulassen. Die Koppelbedingungen ergeben sich aus der Gleichheit der kinematischen und kinetischen Feldgrößen.

Auch das Pfadverfahren hat prinzipiell die Möglichkeit, die Körperschallausbreitung auf Elementen unterschiedlicher Dimension zu erfassen. Die Elemente sind alle Teil des gesamten Netzes. Für den Suchalgorithmus ergibt sich dadurch kein Unterschied. Einzig die Welleneffekte müssen je Element separat betrachtet werden.

Für das Strahlenverfahren ist eine Kopplung unterschiedlicher Elemente nicht ohne Modifikation der Strahlenverfolgung möglich. Für die Simulation des Frontalcrashs ergibt sich i. d. R. der Sonderfall, dass die Wellenausbreitung zunächst über die balkenähnlichen Längsträger zur Unterbodenstruktur des Fahrzeugs geleitet wird. Der Längsträger muss in der Strahlverfolgung nicht beachtet werden. Bei der Berechnung des Zeitsignals mithilfe der TLM wird er über eine entsprechende Übertragungsfunktion für Balkenelemente berücksichtigt. Bei einem Seitencrash breiten sich die B-Wellen ausschließlich auf Elementen aus, die als Platten modelliert werden können. Für die gegebene Anwendung ist eine universelle Kopplung von Elementen für das Strahlenverfahren nicht notwendig.

In Tabelle 6.5 sind die Bewertungen der Verfahren hinsichtlich diverser Kriterien zusammen-

Tabelle 6.5.: Gegenüberstellung der Berechnungsverfahren

Bewertungskriterium	Strahlenverfahren	Pfadverfahren	Wellenverfahren
Dispersion	●	●	●
Materialdämpfung	●	●	●
Reflexion und Transmission	●	●	○ ¹
Amplitudenabnahme	●	● ²	● ²
Beugung*	○	● ³	● ³
Rechenzeit	neutral	hoch	hoch ⁴
Speicherbedarf	gering	neutral	hoch
Kopplung 1-D mit 2-D	● ⁵	●	●

Anforderungen werden erfüllt ●, mit Einschränkungen erfüllt ○, nicht erfüllt ○

* Für die Anwendung kein wesentlicher Welleneffekt

¹ Mehraufwand bei der Bestimmung der Faktoren

² Welleneffekt prinzipiell darstellbar, Genauigkeit hängt von der Vernetzung ab

³ Welleneffekt prinzipiell darstellbar, Richtungsfaktor für B-Welle nicht bekannt

⁴ Im Vergleich geringe Zeitkomplexität, praktischer Aufwand jedoch extrem hoch

⁵ Kopplung ein- mit zweidimensionalen Tragwerkselementen in Sonderfällen möglich

mengefasst. Nachteilig beim Wellenverfahren ist der erhöhte Aufwand in der Integration der Reflexions- und Transmissionsfaktoren. Die Genauigkeit der Amplitudenabnahme und Beugung hängt von der Vernetzung ab und kann aus diesem Grund schwer abgeschätzt werden. Sie ist in jedem Fall aber ungenauer als beim Strahlen- oder Pfadverfahren. Weiterhin ist für die B-Welle der Richtungsfaktor noch ungeklärt (Abschnitt 3.7). Obwohl die Zeitkomplexität beim Wellenverfahren gering ist, ergibt sich aufgrund der berechnungsintensiven Operationen ein hoher numerischer Aufwand sowie ein großer Speicherbedarf.

Für das Pfadverfahren sind hinsichtlich der Amplitudenabnahme und der Beugung dieselben Unsicherheiten wie beim Wellenverfahren zu erwarten. Der Rechenaufwand ist aufgrund der „aggressiven“ Zeitkomplexität nachteiliger als beim Strahlenverfahren.

Für die Simulation auf Basis von Strahlen sind als Nachteile die nicht darstellbare Beugung sowie die schwierige Kopplung von ein- und zweidimensionalen Elementen zu nennen. Für die gegebene Anwendung sind diese Schwächen jedoch nicht relevant und es überwiegen die Vorteile der einfachen Implementierung der restlichen Welleneffekte, die exakte Abbildung der Amplitude sowie die geringen numerischen Kosten.

- Für die Simulation der Körperschallausbreitung in komplexen dünnwandigen Strukturen wird in Kapitel 7 das Strahlenverfahren gewählt.

7. Simulation räumlich dünnwandiger Strukturen

Das in Abschnitt 6.1 vorgestellte Strahlenverfahren bietet die besten Voraussetzungen für eine effektive Modellierung der Körperschallausbreitung in räumlich dünnwandigen Strukturen. Wird die Mantelfläche einfacher Konstruktionen abgewickelt, kann in der Ebene die Strahlverfolgung durchgeführt werden [116,117]. Für die Fahrzeugunterbodenstruktur ist in den Abb. 7.1 a) bis c) diese Möglichkeit dargestellt. Lediglich für Strukturen, die eine geschlossene

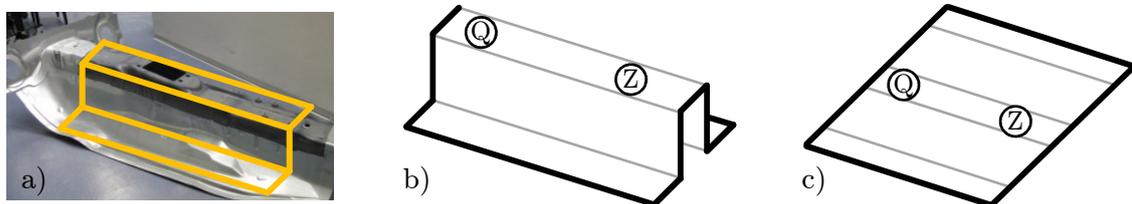


Abbildung 7.1.: Abwicklung einfacher Geometrien für die Strahlverfolgung in der Ebene [116,117].
a) Reale Karosserie, b) Approximierte räumliche Struktur, c) Abwicklung

Abwicklung zulassen, können die Strahlen vom Quell- (Q) zum Zielpunkt (Z) ermittelt werden. Die Anwendung für beliebig komplexe Geometrien ist damit nicht gegeben. Aus diesem Grund wird zunächst eine Erweiterung der Methode vorgestellt, die eine universale Modellierung erlaubt. Die Abhängigkeiten der Ergebnisse aus der Strahlverfolgung am Beispiel einer einfachen, technisch relevanten Geometrie werden im Anschluss untersucht. Sinnvolle Möglichkeiten zur Optimierung des Verfahrens sowie die Gestaltung eines Prozesses für die Berechnung werden dargestellt. Die Anwendbarkeit des Verfahrens wird abschließend für das Gesamtfahrzeug demonstriert.

7.1. Erweiterung

Die Modellierung beliebig geformter, dünnwandiger Strukturen erfordert eine Erweiterung der bestehenden Methode hinsichtlich der Strahlverfolgung in der Ebene. Die Gesamtstruktur wird dazu aus Elementen aufgebaut, die folgende Eigenschaften besitzen:

- Die Elemente sind eben.
- Für die Biegewelle (B-Welle) besitzen die Elemente die Eigenschaften einer Platte.
- Die Elemente dürfen eine beliebige Kontur haben.
- Die Elemente sind untereinander an Kanten verbunden.
- Die Quelle (Q) und das Ziel (Z) liegen auf den Elementen.

Die dreidimensionale Gesamtstruktur wird aus diesen Elementen aufgebaut. Die Wellenausbreitung erfolgt dabei auf den Elementen. Eine beispielhafte Geometrie ist in Abb. 7.2 a) ersichtlich.

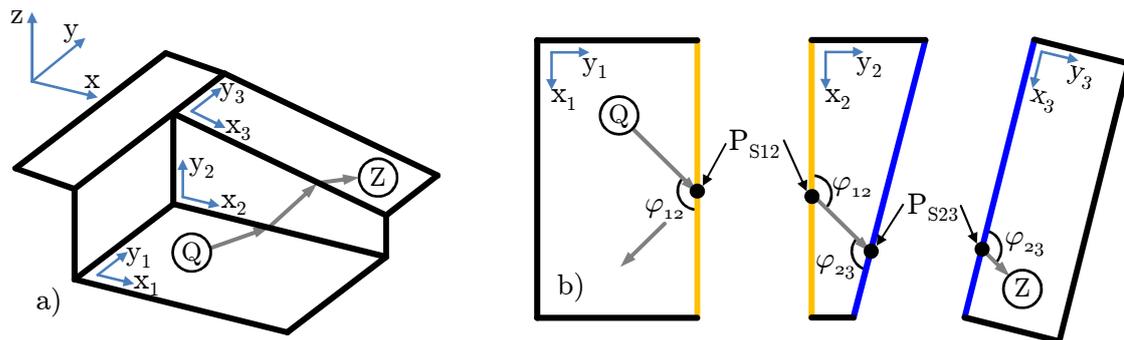


Abbildung 7.2.: 3-D-2-D-Transformation für komplexe dünnwandige Strukturen.
a) Dreidimensionale Ausgangsgeometrie, b) Strahlenverlauf in den Elementen

Um das bestehende Strahlenverfahren anzuwenden, werden alle Elemente der dreidimensionalen Gesamtstruktur durch eine 3-D-2-D-Transformation [120] in ihr jeweiliges zweidimensionales Koordinatensystem überführt (s. Abb. 7.2 b)). Tritt an der Kante eines Elements eine Reflexion auf, wird der Strahl in dasselbe Element zurückreflektiert. Bei Transmission wird der einfallende Strahl von Element 1 über die orange Kante (I) an das Nachbarelement 2 übergeben. Für diese Operation werden der Einfallswinkel φ_{12} und der Schnittpunkt P_{S12} mit der Kante als Parameter benötigt. Durch eine erneute Transmission an der blauen Kante (II) erreicht in diesem Beispiel der Strahl das Ziel.

Die Modellierung der dreidimensionalen Struktur erfolgt über Elemente, Kanten und Punkte. Diese Objekte stehen untereinander in Beziehung. Einem Element können drei bis beliebig viele Kanten zugeordnet werden. Die Kanten selbst sind immer durch zwei Punkte definiert. Diese Abhängigkeiten ändern sich bei einem gegebenen Gesamtmodell nicht und werden in einer Datenbank verwaltet. Dieses Prinzip der Modellstrukturierung wird bspw. auch bei der Finiten-Elemente-Methode (FEM) angewendet [65, 142, 147].

Die Berechnung des Zeitsignals erfordert weitere Informationen, die den Objekten als Eigenschaften zugewiesen werden. Jedes Element besitzt dazu eine Plattendicke (h) und ein Material (E , ρ , ν und η). Die Reflexions- und Transmissionsbedingungen werden den Kanten zugeteilt. Es wird zwischen reiner Reflexion, reiner Transmission und einer Kombination aus Reflexion und Transmission unterschieden. Lediglich im letzteren Fall werden den Kanten zusätzlich die Reflexions- und Transmissionsfaktoren (R und T) übergeben. Außerdem werden die Strahlen für die getrennte Strahlverfolgung dupliziert. Tritt nur Reflexion oder Transmission auf, ist R bzw. T mit 100 % gegeben, und es wird kein zusätzlicher Strahl an dieser Kante erzeugt.

7.2. Analyse

Mit der Umsetzung der dreidimensionalen Strahlenverfolgung, nachfolgend Raytracer genannt, kann das Verfahren an realen Strukturen praktisch bewertet werden. Neben dem Geometriemodell müssen dem Raytracer für den Programmaufruf folgende Parameter übergeben werden:

- Winkeldiskretisierung Λ in $1/^\circ$:
Gibt an wie viele Teststrahlen pro Grad vom Quellpunkt ausgesandt werden.
- Maximal Strahllänge r_{\max} in m:
Maximale Länge des Strahls basierend auf den Abbruchbedingungen aus Absatz 6.1.3.
- Maximale Anzahl duplizierender Kanten Γ (einheitenlos):

Maximale Anzahl an Kanten, an denen für einen Strahl Reflexion und Transmission auftritt. Dieser Wert ist ebenfalls durch die Abbruchbedingungen aus Absatz 6.1.3 gegeben.

- Größe des Zielgebietes A_Z in mm^2 :
Dieser Wert ist durch die Grundfläche des Sensors gegeben.

Nach abgeschlossener Strahlverfolgung liefert der Raytracer die Menge aller gefundenen Strahlen mit ihrem individuellen Verlauf. Aus dieser Strahlenmenge können für die Analyse wichtige Kriterien bestimmt werden:

- Gesamtanzahl der gefundenen Strahlen n_{rays} (einheitenlos).
- Index des jeweiligen Strahls nach der Längensortierung i (einheitenlos).
- Gesamtlänge des jeweiligen Strahls r_i in m.

Die Winkeldiskretisierung Λ der ausgesandten Strahlen kann nicht aus physikalischen Überlegungen gewonnen werden, bestimmt aber wesentlich die Güte der Simulation. Wird der Parameter klein gewählt (wenige ausgesandte Strahlen), werden u. U. nicht alle relevanten Strahlen gefunden und folglich die Wellenausbreitung nur unzureichend abgebildet. Bei einem großen Wert für die maximale Anzahl der duplizierenden Kanten Γ ergibt sich ein zu hoher Aufwand für die Strahlverfolgung und die Rechenzeit steigt.

Die Unterbodenstruktur im Bereich des Tunnels eines Fahrzeugs der Mittelklasse ist bereits aus Abb. 7.1 a) bekannt. Dieses Bauteil wird als Hutprofil, bestehend aus fünf Elementen, modelliert. Die Abmessungen orientieren sich an einer originalen Fahrzeugstruktur und sind in Abb. 7.3 angegeben. Auf Basis dieses Tunnelmodells wird das Strahlenverfahren nachfolgend für eine einfache dreidimensionale Struktur mit realem Bezug erprobt.

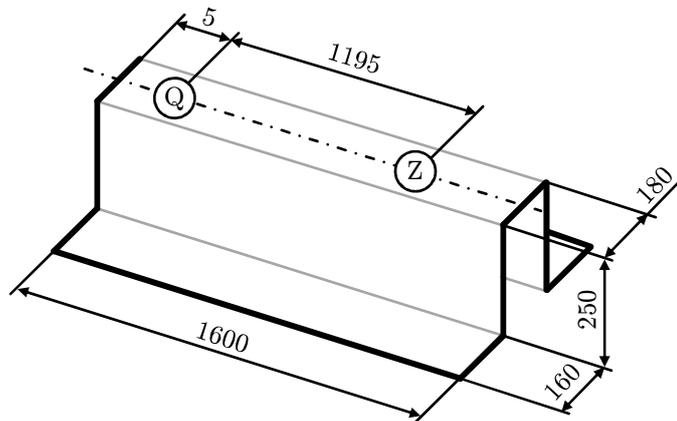


Abbildung 7.3.: Abmessungen Tunnelmodell (Angabe in mm, Wandstärke 1,5 mm, aus Stahl)

Die Abhängigkeit des Verfahrens von der Winkeldiskretisierung Λ wird mithilfe einer Parametervariation untersucht. Das Strahlenverfahren wird mit 360 Teststrahlen ($\Lambda = 1/^\circ$) gestartet. Anschließend wird durch Hinzunahme einzelner Strahlen die Diskretisierung kontinuierlich verfeinert. Alle Strahlen werden immer gleichmäßig für eine ganze Rotation um den Quellpunkt verteilt. Bei einer Gesamtsumme von 36000 Strahlen ($\Lambda = 100/^\circ$) wird die Studie abgebrochen. Bei gegebenen Abbruchbedingungen ($r_{\text{max}} = \text{konst.}$ sowie $\Gamma = \text{konst.}$) und gleichbleibender

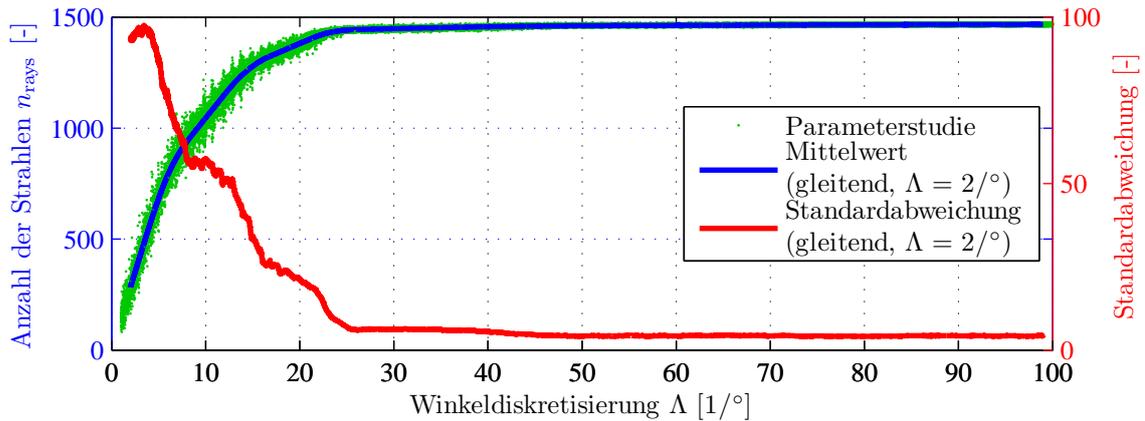


Abbildung 7.4.: Einfluss der Winkeldiskretisierung Λ auf die Anzahl der Strahlen n_{rays} (Parameter: $r_{\text{max}} = 10$ m, $\Gamma = 6$, $A_Z = 6 \times 6$ mm²)

Größe des Zielgebietes ($A_Z = \text{konst.}$) muss die Anzahl der gefundenen Strahlen begrenzt sein. Aus diesem Grund wird als Beurteilungsgröße die gesamte Anzahl an gefundenen Strahlen n_{rays} herangezogen. Das Diagramm in Abb. 7.4 zeigt n_{rays} als Punktwolke über der Winkeldiskretisierung. In einem gleitenden Fenster der Breite $\Lambda = 2/^\circ$ wird der arithmetische Mittelwert und die Standardabweichung hiervon berechnet. Mit zunehmender Verfeinerung der Winkeldiskretisierung werden mehr Strahlen gefunden. Im Fall des Tunnelmodells tritt eine Sättigung der maximalen Strahlenanzahl ab ca. $\Lambda = 25/^\circ$ auf. Ab diesem Punkt werden im Mittel 1442 Strahlen mit einer Standardabweichung von 6,9 Strahlen ermittelt. Die Grenze, ab der die Sättigung auftritt, hängt vom Modell selbst und von den Parametern r_{max} , Γ und A_Z ab. In diesem Beispiel ist die maximale Länge auf 10 m und die Anzahl der duplizierenden Kanten auf 6 begrenzt. Die Größe des Zielgebietes ist mit 6×6 mm² entsprechend der Sensorgrundfläche festgelegt.

Die Verteilung der Strahllängen gibt Aufschluss über das Verhalten der Lösungen vor der Sättigung. Für fünf ausgewählte Diskretisierungen ($\Lambda = 1/^\circ$, $5/^\circ$, $10/^\circ$, $20/^\circ$ und $50/^\circ$) sind in Abb. 7.5 die Strahllängen r_i der jeweiligen Strahlen i der Länge nach sortiert dargestellt. Der kürzeste und somit erste Strahl ist für jede Λ -Stufe identisch. Die jeweiligen letzten Strahlen haben immer eine Länge von ca. 9 m, sind aber nicht exakt gleich. Im Bereich von ca. 2 bis

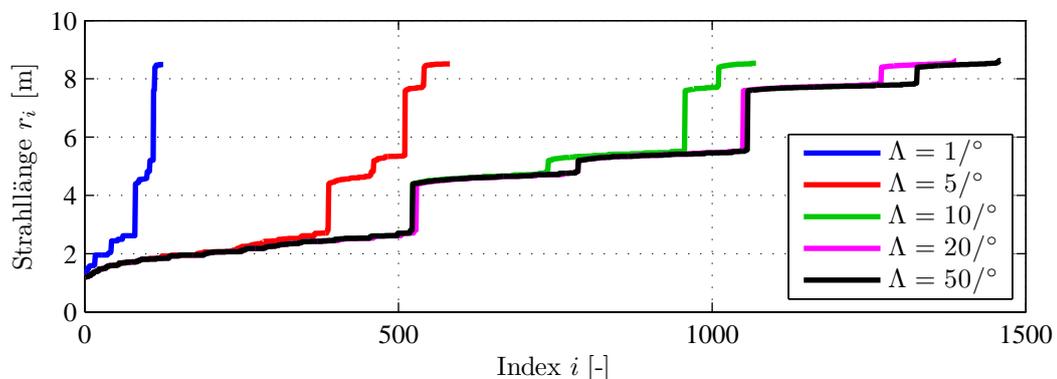


Abbildung 7.5.: Einfluss der Winkeldiskretisierung Λ auf die Strahllängenverteilung r_i (Parameter: $r_{\text{max}} = 10$ m, $\Gamma = 6$, $A_Z = 6 \times 6$ mm²)

4 m und 6 bis 8 m weisen alle Diskretisierungen größere Sprünge auf. Diese Ähnlichkeit lässt auf eine Abhängigkeit des Modells schließen. Außerhalb dieser Bereiche sind die fehlenden Strahlen der kleinen Winkeldiskretisierungen in etwa gleich verteilt. Die Länge des Strahls hängt direkt damit zusammen, zu welchem Zeitpunkt der jeweilige Strahl Einfluss auf das Sensorsignal durch die Berechnung nimmt. Da es bereits bei kurzen Strahllängen Unterschiede gibt, ist für den frühen Signalverlauf ($t < 10$ ms) im Sensorsignal bei geringen Werten von Λ mit Unterschieden im Vergleich zu $\Lambda \geq 25^\circ$ zu rechnen. Winkeldiskretisierungen, die nicht in der Sättigung liegen, können für alle Strahlenlängen Fehler¹ ergeben.

Um den Einfluss der Zielkoordinaten zu untersuchen, wird ausgehend von der exakten Zielposition eine Variation auf einem Kreis mit dem Radius r durchgeführt (s. Abb. 7.6 links). Für die Untersuchung werden Radien mit $r = 10$ mm, $r = 15$ mm, $r = 20$ mm und $r = 30$ mm gewählt. Eine maßstabsgetreue Darstellung der Variationen um die originale Zielposition ist in Abb. 7.6 (rechts) gegeben. Die Parameter dieser Studie sind $r_{\max} = 10$ m, $\Lambda = 100^\circ$, $\Gamma = 6$ und $A_Z = 6 \times 6$ mm².

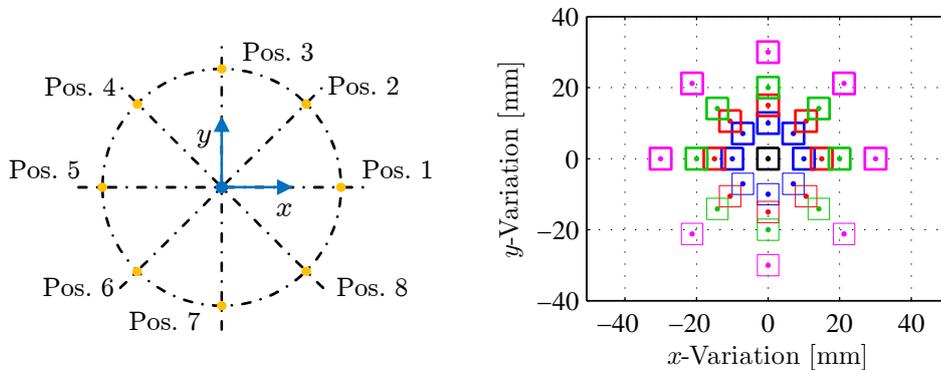


Abbildung 7.6.: Variation der Zielposition für das Tunnelmodell (links), maßstabsgetreue Darstellung der Zielflächen mit $A_Z = 6 \times 6$ mm² (rechts) (Legende: — Original, — $r = 10$ mm, — $r = 15$ mm, — $r = 20$ mm, — $r = 30$ mm)

Da das Tunnelmodell mit Berücksichtigung des Anregungspunktes symmetrisch aufgebaut ist, ergeben sich für die Paare Pos. 2/Pos. 8, Pos. 3/Pos. 7 und Pos. 4/Pos. 6 identische Lösungen. Folglich wird nur der obere Halbkreis betrachtet. In Abb. 7.7 sind für einen Kreisradius von $r = 10$ mm die simulierten Signale in Form der Einhüllende mit der Messung an der Originalposition verglichen. Die Positionierungen 1, 2 und 5 zeigen geringfügige Änderungen der Signalform am Maximum des ersten Signalanstiegs im Gegensatz zu den Positionen 3 und 4 die in ihrer Maximalamplitude unter der Messung bleiben. Anders als bei den übrigen Platzierungen ergibt sich für Pos. 3 ein leicht überhöhter zweiter Signalanstieg. Die Vergleiche für $r = 15$ mm, $r = 20$ mm und $r = 30$ mm sind dem Anhang F zu entnehmen. Diese größeren Radien lassen ein vergleichbares Verhalten erkennen. Bei Pos. 4 und $r = 20$ mm zeigt die Simulation die geringste Amplitude aller Variationen. Für den Kreisradius $r = 30$ mm bei Pos. 1 ergibt sich eine leichte Überbewertung der Amplitude und eine minimale Abweichung in der Signalform bei geringer Amplitude kann bei Pos. 2 und 3 beobachtet werden. Das Strahlenverfahren ist in der Zielpositionierung bis zu ± 30 mm damit ausreichend robust.

¹Mit dem Beamtracing-Verfahren können prinzipiell diese Fehler ausgeschlossen werden [40, 41]. Die Wellenausbreitung wird dazu nicht mit einzelnen Strahlen sondern mit Korridoren repräsentiert. Allerdings ist dieses Verfahren genau wie die Methode der Spiegelquellen (Absatz 6.1.1) schwierig auf komplexe Strukturen anwendbar und numerisch sehr aufwändig [201]. Das reine Raytracing ist daher oftmals die bessere Wahl [201].

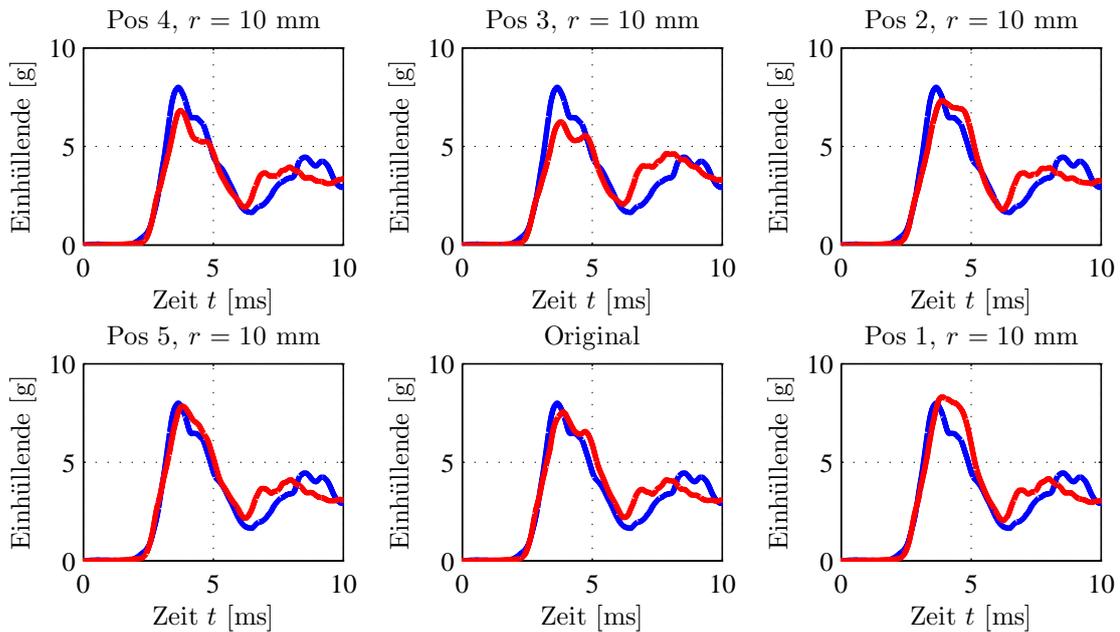


Abbildung 7.7.: Vergleich zwischen Messung und Simulation für Kreisradius $r = 10$ mm
(Legende: — Messung Originalpositon, - Variation der Simulation)

7.3. Optimierung

Die Abbruchbedingungen aus Absatz 6.1.3 stellen die Grundlage für eine rechnerische Umsetzung dar. Mit ihnen ist es möglich nach einer endlichen Zeit die Strahlverfolgung terminieren zu lassen. Die Abschätzung der Rechenzeit aus Abschnitt 6.4 ergibt für das Strahlenverfahren eine Zeitkomplexität von $\mathcal{O}(\Lambda^2 \Gamma)$. Je kleiner der Wert für Γ gewählt wird, desto geringer ist der numerische Aufwand. Aus diesem Grund ist es sinnvoll zwischen Kanten, an denen Reflexion und Transmission, und Kanten an denen entweder Reflexion oder Transmission auftritt, zu unterscheiden. Im ersten Fall muss der Strahl dupliziert und der Zähler für Γ um Eins nach oben gesetzt werden. Im letzten Fall ist keine Duplikation erforderlich und ein exponentieller Anstieg der Rechenzeit wird vermieden.

Unter bestimmten Voraussetzungen kann der Aufwand der Strahlverfolgung unter Beachtung der Symmetrieeigenschaften des Modells reduziert werden. Ist das Modell absolut symmetrisch zu einer Spiegelebene (Geometrie- und Elementeeigenschaften) und liegen der Quell- und Zielpunkt auf dieser Ebene, kann die Strahlverfolgung auf einen Halbkreis reduziert werden (s. Abb. 7.8 a)) [116, 117]. Es ist zu beachten, dass der 0° - und 180° -Strahl verfolgt werden muss. In der anschließenden Berechnung des Zeitsignals (Absatz 6.1.4) sind die Amplituden aller Strahlen mit dem Faktor 2 zu multiplizieren. Davon ausgenommen ist nur der 0° - und 180° -Strahl.

Eine weitere Möglichkeit zur Optimierung des Verfahrens stellt der Einsatz von Parallelrechnern dar. Dadurch kann eine wesentlich höhere Rechenleistung ausgenutzt werden als dies durch sequenzielle Rechner möglich wäre [160]. Seit dem Jahr 2007 werden bereits herkömmliche Desktop-PCs mit Prozessoren ausgestattet, auf denen sich zwei oder vier Prozessorkerne befinden [161]. Zukünftige Hardware-Entwicklungen werden diesen Trend nach mehr paralleler Rechenkapazität fortsetzen, sodass für das Jahr 2015 von 128 integrierten Prozessorkernen auf einem Prozessor ausgegangen wird [17, 161]. Für eine rechnerische Umsetzung müssen die zu

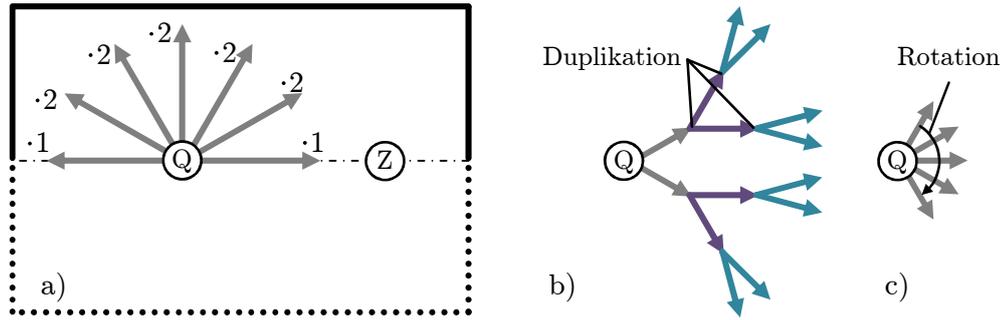


Abbildung 7.8.: Optimierung der Strahlverfolgung: a) Ausnutzen von Symmetrieeigenschaften, b) Duplikation der Strahlen, c) Rotation der Strahlen (parallelisierbar)

parallelisierenden Anweisungen kausal von einander unabhängig sein [11]. Diese Unabhängigkeit ist für die Duplikation der Strahlen (s. Abb. 7.8 b)) nicht gegeben, da die nachfolgenden Strahlen vom Ergebnis des vorangegangenen Verlaufs abhängen [120]. Die in Abb. 7.8 c) dargestellte Rotation der Strahlen ist hingegen vollständig parallelisierbar, da zwei benachbarte Teststrahlen nicht voneinander abhängen [120]. Mit OpenMP ist ein offener Programmierstandard verfügbar, um für die sehr hardwarenahen Programmiersprachen C/C++ parallelisierte Programme zu erstellen [17, 68, 80, 120, 199]. Aus diesem Grund wird für die Umsetzung des Raytracers diese Kombination aus C++ und OpenMP gewählt.

Die notwendigen Rechenzeiten der Strahlverfolgung für das Tunnelmodell ohne Ausnutzung der Symmetrie sind in Abhängigkeit der Parameter Winkeldiskretisierung Λ und Anzahl der duplizierenden Kanten Γ in Abb. 7.9 dargestellt. Die Werte für die maximale Strahlenlänge und

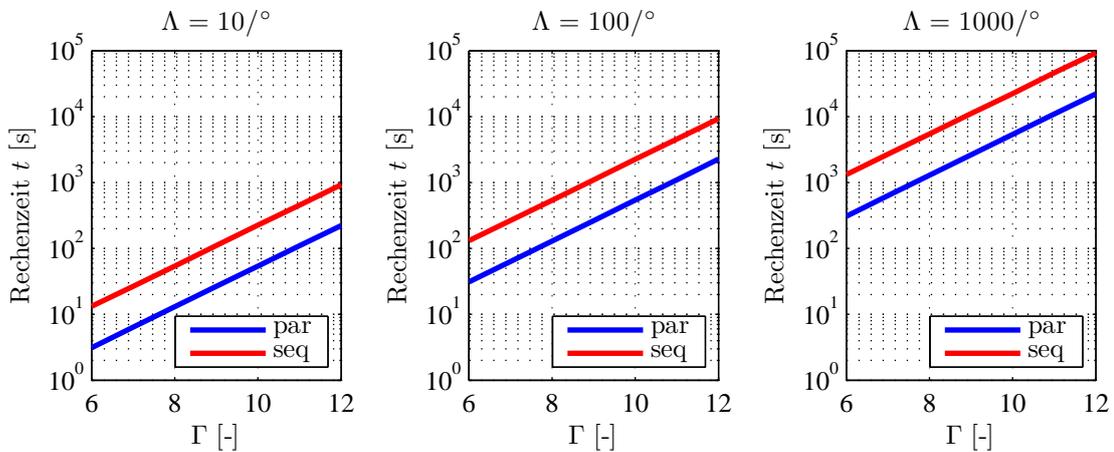


Abbildung 7.9.: Rechenzeiten der Strahlverfolgung bei paralleler (par) und sequenzieller (seq) Programmierung für das Tunnelmodell (Verwendetes System: DELL® PRECISION™T3500, ein Intel® Xeon® W3520 (2,67 GHz), 6,0 GB Arbeitsspeicher und Microsoft® Windows® 7 Enterprise 64 Bit Betriebssystem)

die Größe des Zielgebiets sind mit $r_{\max} = 10$ m und $A_Z = 6 \times 6$ mm² fest vorgegeben. Die Angabe der Rechenzeiten beziehen sich auf ein DELL® PRECISION™T3500 System, ausgestattet mit einem Intel® Xeon® W3520 Prozessor (Taktrate 2,67 GHz), 6,0 GB Arbeitsspeicher und einem Microsoft® Windows® 7 Enterprise Betriebssystem (64 Bit). Die unter Ausnutzung der parallelen Programmierung („par“) erreichbaren Zeiten sind in Abb. 7.9 in blauer Farbe darge-

stellt. Im Vergleich zu einer sequenziellen Abarbeitung („seq“, rote Farbe) der Strahlverfolgung ist mit dem verwendeten System¹ eine Zeitersparnis von etwa 75 % zu erreichen. Unabhängig von der verwendeten Programmierung steigt die Rechenzeit mit der Anzahl an duplizierenden Kanten exponentiell an. Dieser Parameter sollte daher nicht größer als unbedingt nötig gewählt werden (Absatz 6.1.3). Im Gegensatz dazu weist die Winkeldiskretisierung lediglich einen linearen Einfluss auf die Rechenzeit auf.

Auch eine Parallelisierung der Signalberechnung nach Absatz 6.1.4 ist möglich. Auf Basis des Eingangssignals erfolgt die Berechnung je Strahl separat. Die Prozessorkerne arbeiten dazu unabhängig von einander die Strahlen ab. Die Superposition erfolgt je Kern getrennt und wird in einer temporären Variable abgelegt. Nachdem jeder Strahl simuliert ist, werden die temporären Variablen addiert und in den Zeitbereich zurücktransformiert (Anhang D). Lediglich die letzten beiden Operationen sind nicht parallelisierbar.

7.4. Simulationsprozess

Die Berechnung der Körperschallausbreitung unterteilt sich in verschiedene Arbeitsschritte, deren Abfolge in einem Berechnungsprozess definiert ist. Dieser Prozess ist im nachfolgenden Ablaufschema in Abb. 7.10 dargestellt.

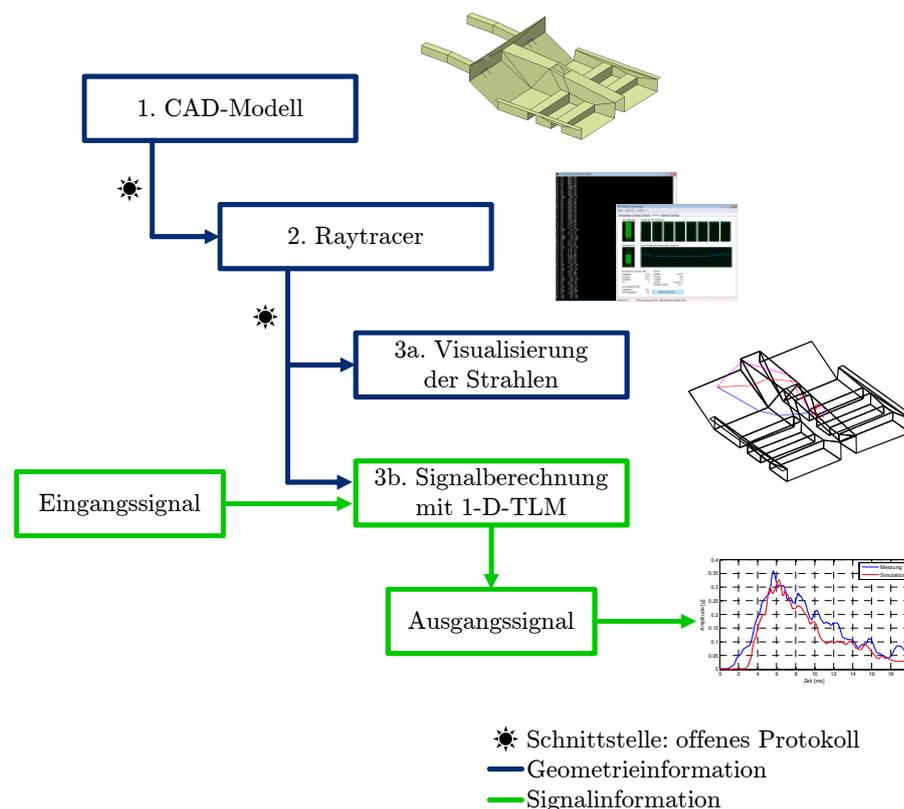


Abbildung 7.10.: Simulationsprozess zur Berechnung der Körperschallausbreitung

Die Konstruktion von Bauteilen erfolgt im modernen Produktentstehungsprozess mithilfe von Computer-Aided-Design (CAD) Programmen [135]. Dadurch können beliebig geformte

¹Der Prozessor Intel® Xeon® W3520 besitzt vier unabhängige Prozessorkerne. Details sind der Produktspezifikation zu entnehmen: <http://ark.intel.com/products/39718/>. Letzter Zugriff: 30.12.2011

Strukturen modelliert werden. Oftmals sind die CAD-Modelle bereits verfügbar und müssen für die Simulation lediglich geometrisch aufbereitet und mit physikalischen Eigenschaften versehen werden [135]. Für die Körperschallausbreitung ist ein geometrisch grob aufgelöstes Modell notwendig. Aufgrund des auf geraden Strahlen basierenden Verfahrens und des Beugungseffektes dürfen kleine Störungen nicht modelliert werden (Blockadewirkung, Abschnitt 7.5).

Aus diesem CAD-Modell wird im weiteren Verlauf das Modell der Strahlverfolgung abgeleitet, das dem Raytracer mithilfe eines offenen Protokolls zur Verfügung gestellt wird. Hier sind sämtliche Informationen zur Geometrie des Bauteils mit den Quell- und Zielpunkten der Strahlverfolgung sowie den Reflexions- und Transmissionsbedingungen an den Kanten enthalten. Anschließend werden die Parameter (Λ , r_{\max} , Γ und A_Z) für den Raytracer festgelegt, womit dieser gestartet werden kann.

Ist die Strahlverfolgung abgeschlossen, stellt der Raytracer erneut über das offene Protokoll die gefundenen Strahlen bereit. Zur Überprüfung der Ergebnisse können diese zunächst grafisch dargestellt werden. Zusammen mit dem Eingangssignal am Quellpunkt und den Strahlen erfolgt die Berechnung des Sensorsignals am Zielpunkt.

Dieser Ablauf kann in den bestehenden Entwicklungsprozess integriert werden. Aufgrund der Tatsache, dass nur die wesentlichen Bauteile modelliert werden müssen, kann die Simulation der Körperschallausbreitung bereits in der frühen Phase der Produktentwicklung erfolgen.

7.5. Anwendung

Die Simulation der Körperschallausbreitung eines breitbandigen Impulssignals durch die Karosserie eines Fahrzeugs der Mittelklasse wird nach dem oben beschriebenen Prozess durchgeführt. Aufgrund fehlender CAD-Daten wird die Geometrie des realen Fahrzeugs messtechnisch erfasst und anschließend virtuell nachgebildet (s. Abb. 7.11). Bei der Modellierung dürfen

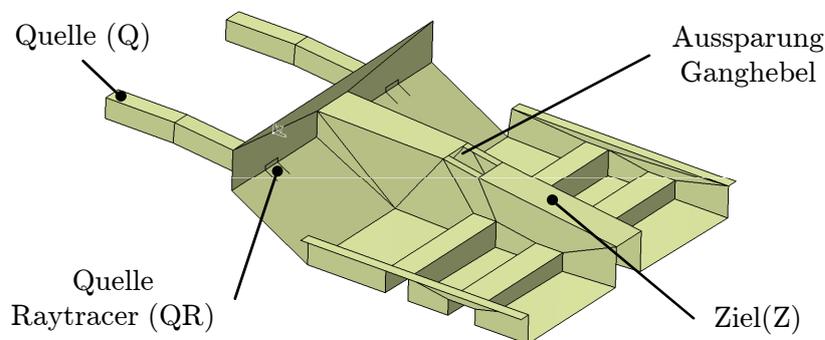


Abbildung 7.11.: Gesamtfahrzeugmodell für ein Automobil der Mittelklasse zur Simulation der Körperschallausbreitung

kleine Diskontinuitäten (Bohrungen, Stanzungen, Schweißbolzen, u. s. w.) nicht berücksichtigt werden. Sie würden den Strahl reflektieren und ein unüberwindbares Hindernis für die Welle in der Simulation bedeuten (Blockadewirkung). In der Realität beugt sich die Welle jedoch um diese Barrieren und setzt ihre Ausbreitung nahezu ungehindert fort. Als Anhaltswert für die Entstehung nennenswerter Schattenräume (Abschnitt 3.6) muss die Wellenlänge kleiner als das Objekt sein [44]. Im Wesentlichen besteht die modellierte Struktur aus Stahlblech mit einer Dicke von 1,0 mm. Für einen Frequenzbereich von 5 bis 20 kHz ergeben sich damit Wellenlängen von 22 bis 44 mm (Tabelle 6.1). Fast alle Aussparungen der Fahrzeugkarosserie sind von ihren Abmessungen kleiner als 22 mm und dürfen folglich nicht modelliert werden.

Einzig die Öffnung für den Ganghebel ist viel größer als die größte Wellenlänge und wird in das Modell mit aufgenommen.

Die Anregung des Gesamtfahrzeugs im Frontalcrash erfolgt am Längsträger an der Quelle Q (s. Abb. 7.10). Die Ausbreitung über die Balkenstruktur bis zum Punkt QR wird mithilfe der eindimensionalen Transmission-Line-Methode (TLM) berechnet. Der Raytracer ermittelt anschließend von diesem Punkt den zweidimensionalen Strahlverlauf bis zum Ziel Z. Dieses Modell ist wesentlich komplexer als das Tunnelmodell aus Abschnitt 7.2. In einer weiteren Parameterstudie wird überprüft, ob die Anzahl der Strahlen hier ebenfalls nach oben begrenzt ist. Abbildung 7.12 zeigt die Anzahl der gefundenen Strahlen n_{rays} in Abhängigkeit

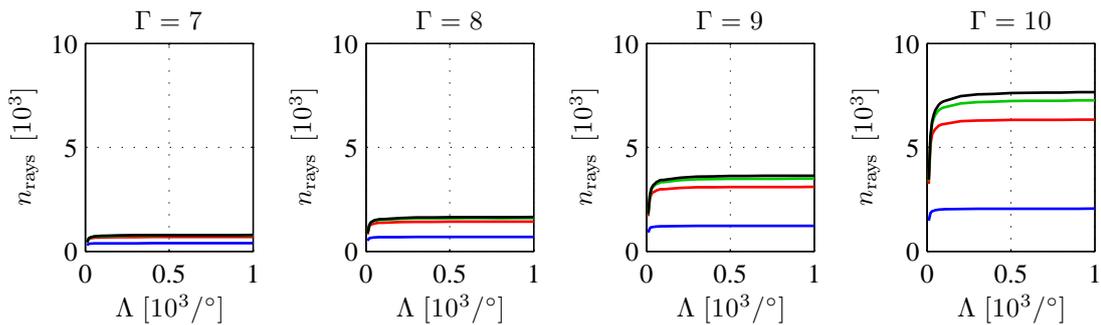


Abbildung 7.12.: Parameterstudie für das Gesamtfahrzeugmodell ($A_Z = 6 \times 6 \text{ mm}^2$)
(Legende: — $r_{\text{max}} = 5 \text{ m}$, — $r_{\text{max}} = 10 \text{ m}$, — $r_{\text{max}} = 15 \text{ m}$, — $r_{\text{max}} = 20 \text{ m}$)

der Winkeldiskretisierung Λ , der maximalen Anzahl an duplizierenden Kanten Γ und der maximalen Strahlänge r_{max} . Für eine Winkeldiskretisierung $\Lambda \geq 500^\circ$ ist bei den gegebenen Parametern in jedem Fall die Sättigung erreicht. Dadurch ist sichergestellt, dass alle relevanten Strahlen ermittelt werden. Die Verläufe durch die Struktur einiger exemplarischer Strahlen der Studie mit den Übergabewerten $\Lambda = 500^\circ$, $\Gamma = 9$, $r_{\text{max}} = 10 \text{ m}$ sowie $A_Z = 6 \times 6 \text{ mm}^2$ sind in Abb. 7.13 dargestellt. Dieser Datensatz (alle Strahlen) wird für die Berechnung der Körperschallausbreitung nach Absatz 6.1.4 verwendet.

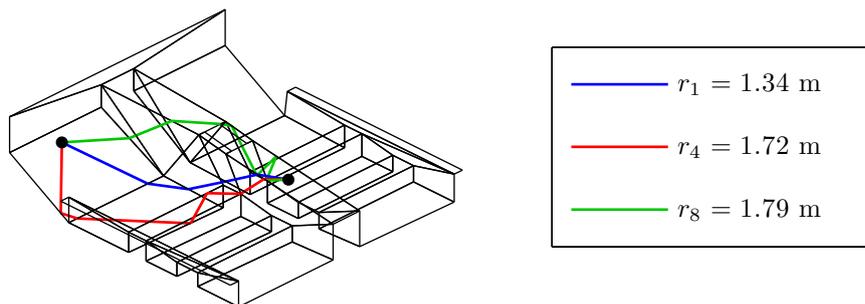


Abbildung 7.13.: Exemplarischer Verlauf für drei Strahlen durch die Gesamtfahrzeugstruktur
(Parameter: $\Lambda = 500^\circ$, $\Gamma = 9$, $r_{\text{max}} = 10 \text{ m}$ und $A_Z = 6 \times 6 \text{ mm}^2$)

Die Plattenelemente sind aus Stahl mit einer mittleren Dicke von 1,0 mm. Für die Übergänge müssen die Reflexions- bzw. Transmissionsfaktoren berücksichtigt werden. Die Bewertung der Relevanz von Biegeradius und -winkel erfolgt nach Abschnitt 4.5. Viele Verbindungen, bspw. vom Unterboden zum Schweller oder zu den Sitzquerträgern, besitzen einen sehr kleinen Biegeradius und werden deshalb als eine rechtwinklige Plattenverbindung nach (3.13) bzw.

(3.14) modelliert. Die restlichen Übergänge werden aufgrund ihrer großen Biegeradien mit einer hundertprozentigen Transmission angenommen. Freie Kanten, wie die Modellgrenzen oder die Aussparung für den Ganghebel, gestatten ausschließlich eine Reflexion der Welle.

Verwölbte Elemente dürfen bei der Modellerstellung nicht verwendet werden. Bereiche die aus windschiefen Kanten bestehen würden, müssen aus diesem Grund in mehrere Elemente unterteilt werden. Die dadurch zusätzlich entstehenden Kanten sind in der Realität nicht vorhanden und folglich reflektieren sie die Strahlen nicht. Der Raytracer berücksichtigt dies, indem an diesen Kanten der Transmissionsfaktor $T = 1$ gesetzt wird. Es wird kein duplizierter Strahl für die Reflexion erzeugt.

Als Eingangsdaten für die Berechnung wird ein real gemessener Schlag mit einem Modalhammer verwendet. Der aufgezeichnete Kraftverlauf ist in Abb. 7.14 dargestellt. Um ein

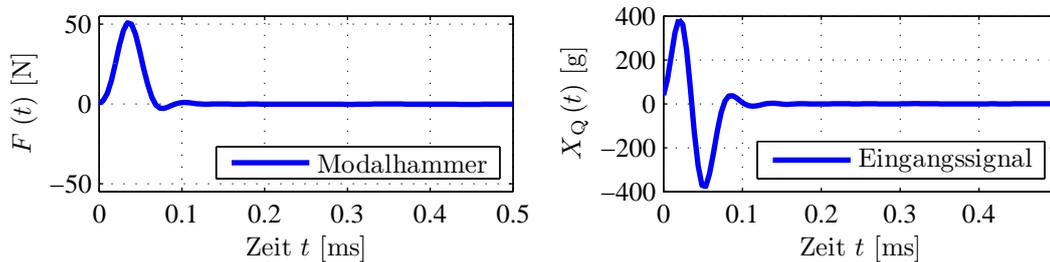


Abbildung 7.14.: Gemessener Kraftverlauf eines Modalhammerschlages (links) und das daraus berechnete Eingangssignal für die Ausbreitungssimulation (rechts)

entsprechendes Eingangssignal der Beschleunigung für die Berechnung zu erhalten, wird das Signal anschließend nach der Zeitvariablen abgeleitet und durch die Impedanz des Quellpunktes Q geteilt. Die Bestimmung der Impedanz erfolgt durch die messtechnische Erfassung der Beschleunigung in der Nähe der Anregestelle. Ist die Messposition direkt gegenüber der Hammeranregung nicht zugänglich, kann auch an etwas entfernten Orten der Sensor platziert werden. Die ermittelte Amplitude ist in diesem Fall aufgrund der Amplitudenabnahme mit der entwickelten Näherung (4.3) zu korrigieren. Da die Entfernungen i. d. R. sehr kurz sind, kann die asymptotische Approximation nicht verwendet werden. Weiterhin ist zu beachten, dass im Beschleunigungssignal keine Reflexionen von den Rändern enthalten sein dürfen. Die Impedanz wird mithilfe von (2.1) und (2.2) bestimmt.

Auf Basis der ermittelten Strahlen, der Modellparameter und des Eingangssignals erfolgt die Berechnung des Ausgangssignals für das Ziel (Absatz 6.1.4). Die Ergebnisse sind in Abb. 7.15 für das Rohsignal (Tiefpassfilterung bei 20 kHz) der Körperschallschwingung dargestellt und

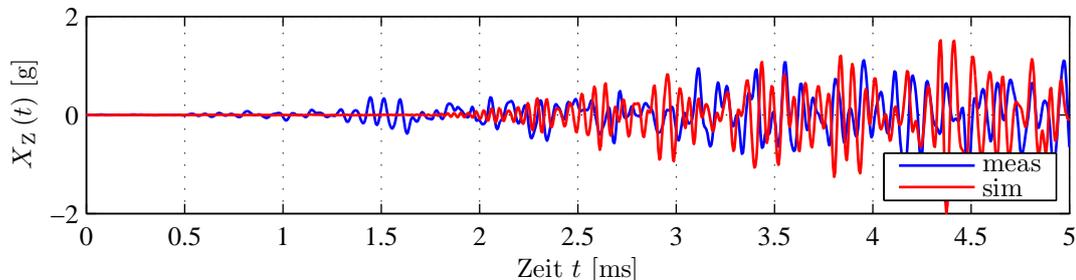


Abbildung 7.15.: Vergleich der Rohsignale (Tiefpassfilterung bei 20 kHz) aus Messung (meas) und Simulation (sim) für das in Abb. 7.11 dargestellte Modell

jeweils mit real gemessenen Daten verglichen. Es zeigt sich für das Zielsignal eine prinzipielle Übereinstimmung der Signalverläufe. Einzig das erste Körperschallsignal bei 1,5 ms der Messung kann die Simulation nicht nachbilden. Dies ist auf die Modellierung der Struktur zurückzuführen. Das Messsignal kann hier nicht als Longitudinalwelle (L-Welle) interpretiert werden, da diese Wellenart aufgrund ihrer hohen Ausbreitungsgeschwindigkeit für den kürzesten Strahl im Zeitbereich bis 0,5 ms zu suchen ist. Ein entsprechendes Signal der L-Welle ist in der Messung nicht zu erkennen.

In Abb. 7.16 sind die beiden Signale im Frequenzbereich dargestellt. Analysiert wird jeweils

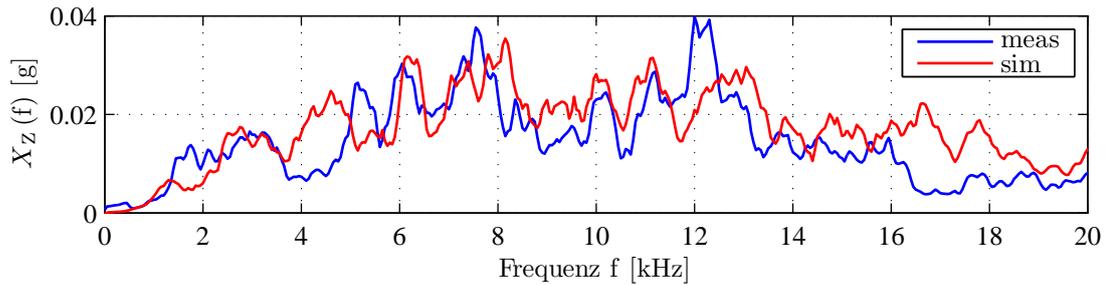


Abbildung 7.16.: Vergleich der Signale im Frequenzbereich aus Messung (meas) und Simulation (sim) für das in Abb. 7.11 dargestellte Modell

der mit einem Hanning-Fenster [148, 151] aufbereitete Zeitbereich von $0 \leq t \leq 20$ ms. Die Kurvenverläufe sind mit einem gleitenden Mittelwert, Fensterbreite 0,5 kHz, geglättet. Der spektrale Charakter der Messung wird sehr gut durch die Simulation abgebildet. Einzig die Überhöhung bei ca. 12 kHz wird unterschätzt. Im Bereich von ca. 16,5 bis 17,5 kHz liefert die Berechnung eine höhere Amplitude. Diese geringen Abweichungen können durch die Tatsache erklärt werden, dass während der Messung in der Nähe der Sensorposition das Airbag-Steuergerät (ECU) montiert ist. Dieses wird im Modell jedoch nicht berücksichtigt.

Für die endgültige Bewertung der Simulation wird die Einhüllende des Körperschallsignals aus Abschnitt 1.3 herangezogen (s. Abb. 7.17). Die beiden dünn gezeichneten Kurvenverläufe im Diagramm der Einhüllenden repräsentieren für das Messsignal ein Streuband von $\pm 15\%$ basierend auf dem aktuellen Messwert. Die Simulationsergebnisse liegen fast immer innerhalb

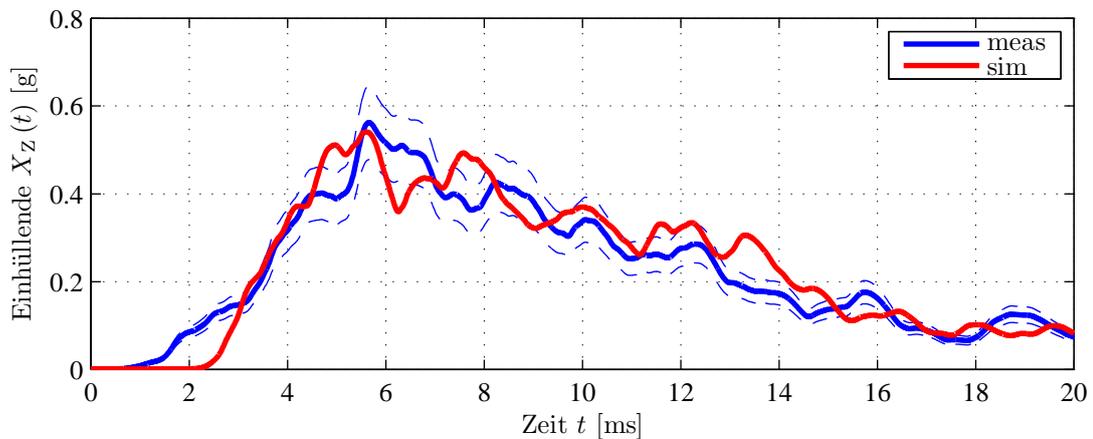


Abbildung 7.17.: Vergleich der Einhüllenden aus Messung (meas) und Simulation (sim) für das in Abb. 7.11 dargestellte Modell (— Streuband $\pm 15\%$)

dieses Fensters. Nur vereinzelt wird dieses Band für kurze Zeit leicht über- bzw. unterschritten. Vor allem der erste Signalanstieg bei 3 bis 6 ms wird gut nachgebildet. Ebenfalls wird das Abklingen des Signals bis 20 ms ausreichend genau approximiert. Bei detaillierter Betrachtung ist generell eine leichte Überhöhung der Simulation im Vergleich zur Messung im Bereich von 7 bis 16 ms festzustellen. Dies kann aus der Tatsache resultieren, dass im Simulationsmodell angrenzende Bauteile, wie z. B. die Rückbank, nicht berücksichtigt sind. In der Realität wird sich die Welle mit fortschreitender Zeit darin ausbreiten, während sie in der Berechnung am Rand reflektiert und damit wieder in Richtung des Ziels gelenkt wird.

Die Rechenzeit auf dem verwendeten System¹ beträgt mit den Parametern $\Lambda = 500/^\circ$, $\Gamma = 9$, $r_{\max} = 10$ m und $A_Z = 6 \times 6$ mm² für die Strahlverfolgung ca. 41 Minuten². Die anschließende TLM-Simulation zur Bestimmung des Zielsignals auf der Basis aller ermittelten Strahlen, in diesem Fall 3090 Strahlen, benötigt auf dem selben System ca. 29 s. Das berechnete Signal besteht dabei aus 32768 diskreten Zeitpunkten mit einer Abtastfrequenz von 204800 Hz.

- Die Simulation der hochfrequenten Körperschallausbreitung für transiente Zeitereignisse in komplexen Strukturen bzw. Fahrzeugkarossen ist durch die Anwendung des Strahlenverfahrens damit in effektiver Weise möglich.
- Die gute Übereinstimmung der Simulation mit am Fahrzeug gemessenen Signalen wird ausschließlich durch die Modellierung der B-Welle auf Balken und Platten erreicht. An die Struktur angebundene Bauteile, wie Motor, Getriebe, Fahrwerk, Bestuhlung, Innenraumverkleidung oder Dämmmatten sind nicht in der Simulation berücksichtigt.
- Weiterhin ist die Tatsache zu erwähnen, dass unter Vernachlässigung aller Details, die kleiner als die Wellenlänge sind, der Aufwand in der Modellerstellung extrem reduziert wird. Die Berechnung kann dadurch bereits in der Konzeptphase angewendet werden und folglich ist eine Bewertung der Struktur früh im Entwicklungsprozess möglich.

¹DELL® PRECISION™ T3500, ein Intel® Xeon® W3520 (2,67 GHz) Prozessor, 6,0 GB Arbeitsspeicher und Microsoft® Windows® 7 Enterprise 64 Bit Betriebssystem

²Die Sättigung tritt bei den gewählten Werten der Parameter Γ , r_{\max} und A_Z bereits für Winkeldiskretisierungen $\Lambda \geq 100/^\circ$ auf. Damit wäre eine Rechenzeit von ca. 8 Minuten bereits ausreichend.

8. Schlussbetrachtung

Im ersten Teil dieses Kapitels werden die Forschungsergebnisse zusammengefasst. Dabei sind die mit dieser Arbeit neu hergeleitete Theorien, durchgeführte Analysen und entwickelte bzw. ergänzte Methoden durch Punkte (●) markiert. Die dadurch gewonnenen Erkenntnisse sind mithilfe der Pfeil-Markierung (→) hervorgehoben.

Anschließend werden weitere Einsatzmöglichkeiten des Strahlenverfahrens diskutiert. Obwohl das Pfad- und Wellenverfahren letztlich nicht für die Simulation der Fahrzeugstruktur verwendet werden, haben sie dennoch ihre Berechtigung. Entsprechende Einsatzgebiete werden genannt.

Das Strahlenverfahren kann prinzipiell auch dazu verwendet werden, auf die Anregung zurückzurechnen. Eine mögliche Vorgehensweise wird im Ausblick dargestellt.

8.1. Zusammenfassung

Mit der Strategie, das Fahrzeug bis zur geforderten Zündzeit (RTTF) in eine Entstehungs- und Ausbreitungszone zu unterteilen (Abschnitt 1.2), kann für letztere eine Ausbreitungssimulation der dünnwandigen Struktur auf Basis der Elastizitätstheorie (Abschnitt 2.2) durchgeführt werden. Die Wellenausbreitung erfolgt in Bauteilen die als ein- oder zweidimensionale Tragwerkselemente beschrieben werden können. Die dazu notwendigen Modelle für die Elemente Stab, Scheibe, Balken und Platte sind in Abschnitt 2.3 mit einheitlicher Nomenklatur zusammengefasst.

- Für das Scheibenelement wird ein allgemeiner Ansatz verwendet, welcher auf die Wellengleichung der Scheibe (2.59) aus Absatz 2.3.2 bzw. Anhang A führt.
- Damit ergeben sich aus einem Ansatz die beiden Lösungen der Longitudinalwelle (L-Welle) und Transversalwelle (T-Welle).

Die Modellierung des Balkens erfolgt mit den Theorien nach Euler-Bernoulli, Bresse-Timoshenko und Levinson. Aus der Literatur ist ein weiteres Balkenmodell nach Rayleigh bekannt, das zusätzlich zu Euler-Bernoulli die Rotationsträgheit berücksichtigt. Dieses Modell ergibt sich auch, wenn bei Bresse-Timoshenko der Schubeinfluss vernachlässigt wird. Der Rayleigh-Balken liegt in seinem Modellierungsgrad demnach zwischen Euler-Bernoulli und Bresse-Timoshenko.

- In Analogie zu Rayleigh kann die Bresse-Timoshenko-Theorie derart abgewandelt werden, dass der Rotationseinfluss nicht berücksichtigt wird. Die erhaltene Schub-Lösung (2.106) aus Absatz 2.3.3.4 bzw. Anhang B.3.1 kann damit auch als eine um den Schubeinfluss erweiterte Euler-Bernoulli-Theorie gelten.
- Ein anschließender Vergleich mit der Rayleigh- und Bresse-Timoshenko-Theorie in Absatz 2.3.3.4 bzw. Anhang B.3.2 zeigt, dass der Fehler der Wellenzahl¹ der Schub-Lösung gegenüber der Bresse-Timoshenko-Theorie für höhere Frequenzen² um ein Vielfaches

¹Die aus der Wellengleichung (2.106) erhaltene Wellenzahl (2.107) ist bereits aus [110] bekannt.

²In Anhang B.3.2 wird ein Frequenzbereich von 0 bis 2 MHz betrachtet. Für kleine Frequenzen unterscheiden sich die Modelle nach Bresse-Timoshenko, Rayleigh, Euler-Bernoulli sowie die Schub-Lösung kaum.

kleiner als der Fehler zwischen Rayleigh und Bresse-Timoshenko ist. Für herkömmliche Materialien und Querschnitte kann nachgewiesen werden, dass die Schub-Lösung immer näher am Bresse-Timoshenko-Modell als am Rayleigh-Modell liegt und somit die bessere Approximation für Bresse-Timoshenko darstellt.

Die Simulation kann vereinfacht werden, wenn sich für die Körperschallausbreitung eine Wellenart als dominant herausstellt. Unter diesen Umständen können die restlichen Wellentypen vernachlässigt werden. In Abschnitt 4.1 wird anhand

- der Rayleigh-Lamb-Theorie zur Beschreibung von Plattenwellen (Absatz 4.1.1),
 - einer Differenzmessung an Platten- und Fahrzeugstrukturen (Absatz 4.1.2) sowie
 - einer Fourieranalyse der Dispersionseigenschaft (Absatz 4.1.3) die
- Dominanz der Biegewelle (B-Welle) für die Ausbreitung in Fahrzeugstrukturen bestätigt.

Bezogen auf die relevanten Strukturen im Fahrzeugbau werden die aus Abschnitt 2.3

- verfügbaren Modellierungen der B-Welle in Abschnitt 4.2 verglichen.
- Es zeigt sich, dass für eine maximale Frequenz von 20 kHz die Beschreibung durch die Euler-Bernoulli- bzw. Kirchhoff-Theorie ausreichend genau ist.

Vor allem im Bereich des Fahrzeugtunnels und -unterbodens besteht die Struktur aus zweidimensionalen Elementen.

- Aus diesem Grund wird in Abschnitt 4.3 der Einfluss einer flächigen Ausbreitung der B-Welle auf Platten mithilfe der Finite-Differenzen-Methode (FDM) diskutiert.
- Dieser kann nicht vernachlässigt werden, da bei eindimensionaler Modellierung flächiger Bauteile die seitlichen Reflexionen nicht zu erfassen sind und damit Fehler entstehen.

Durch die flächige Ausbreitung ist auch der Effekt der Amplitudenabnahme zu berücksichtigen. Die asymptotische Näherung (3.35) strebt für kleine Entfernungen gegen Unendlich. Um die aufwändige Lösung auf Basis der Hankelfunktionen zu vermeiden, erfolgt in Abschnitt 4.4

- eine Erweiterung der asymptotischen Näherung mit einer angelegten Tangente (4.3).
- Die Beschreibung kurzer Verbindungslängen im Wellenverfahren oder eine evtl. Anpassung der Impedanz für das Eingangssignal beim Strahlenverfahren sind damit einfach möglich.

Die aus der Literatur bekannten Reflexions- und Transmissionsfaktoren für Balken- und Plattenverbindungen müssen erweitert werden. Auf Basis bekannter Beziehungen wird für

- einen gekrümmten Balken eine analytische Parameterstudie durchgeführt (Absatz 4.5.1).
 - Weiterhin wird mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) eine Methode beschrieben, die für beliebige Übergänge die Faktoren bestimmen kann (Absatz 4.5.2).
- Damit können die für Fahrzeugstrukturen relevanten Reflexions- und Transmissionsfaktoren abgeschätzt werden. Demnach wird für große Biegeradien ($\mathcal{R} > 40$ mm) ein Transmissionsfaktor von $T = 1$ angesetzt. Für kleine Radien ($\mathcal{R} < 4$ mm) nähern sich die Faktoren jenen der scharfkantigen Ecke an.

In Kapitel 5 erfolgt eine Bewertung bestehender Verfahren auf ihre Anwendbarkeit zur Simulation hochfrequenter Körperschallausbreitung. Neben den beschriebenen Verfahren FEM, Statistische-Energie-Analyse (SEA) und Spektrale-Elemente-Methode (SEM) zeigen auch

- die Finite-Differenzen-Methode (FDM) (Abschnitt 5.1) sowie die Rand-Elemente-Methode (BEM) (Abschnitt 5.3) Schwächen.

In Abschnitt 5.4 wird die Transmission-Line-Methode (TLM) beschrieben, da die Berechnung des Sensorsignals beim Strahlen- und Pfadverfahren auf dieser aufbauen.

- Weiterhin wird die aus der Luftschallakustik bekannte Äquivalente-Quellen-Methode (ESM) eingeführt (Abschnitt 5.5).
 - Der abschließende Vergleich aller Verfahren in Abschnitt 5.6 zeigt, dass
- eine effektive Simulation der hochfrequenten Körperschallausbreitung gegenwärtig nicht möglich ist und folglich andere Lösungsansätze notwendig sind.
- Aufgrund der geringen Rechenzeit bietet dafür die TLM und ESM das größte Potential.

In Kapitel 6 werden grundlegende Verfahren mit dem Ziel einer effizienten Berechnung der Körperschallausbreitung entwickelt. Neben der

- detaillierten Darstellung und Weiterentwicklung des Strahlenverfahrens (Abschnitt 6.1)
 - wird das Pfadverfahren (Abschnitt 6.2)
 - sowie das Wellenverfahren (Abschnitt 6.3) vorgestellt.
 - Die ESM wird für Letzteres auf die B-Welle erweitert (Absatz 6.3.1 bis 6.3.4) und ein Vorschlag zur Modellierung zweidimensionaler Elemente erarbeitet (Absatz 6.3.5).
- Der Vergleich dieser drei Methoden in Abschnitt 6.4 zeigt, dass aus Gründen der Genauigkeit und Rechenzeit das Strahlenverfahren die beste Wahl darstellt¹.

Die Anwendung des Strahlenverfahrens auf Fahrzeugstrukturen erfolgt in Kapitel 7.

- Zunächst wird das Verfahren für den dreidimensionalen Einsatzzweck mithilfe einer Transformationsvorschrift angepasst (Abschnitt 7.1).
- Nach einer umfassenden Analyse des Verfahrens auf Basis einer einfachen Struktur (Abschnitt 7.2) werden
- Möglichkeiten zur Optimierung gegeben (Abschnitt 7.3) und
- ein Prozess zur Simulation der Sensorsignale vorgeschlagen (Abschnitt 7.4).
- Die Simulation einer realen Fahrzeugstruktur sowie der Vergleich mit gemessenen Signalen demonstrieren die praktikable Anwendbarkeit dieser Methode (Abschnitt 7.5).

¹Im Ausblick in Abschnitt 8.2 wird darauf hingewiesen, dass die beiden anderen Verfahren durchaus interessante Eigenschaften besitzen, die bei anderen Anforderungen vorteilhafter sind.

Die Ergebnisse und Erkenntnisse aus dem Kapitel 7 lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Die hochfrequente Schwingung wird direkt berechnet. Damit ist die Methode unabhängig von der eingesetzten Signalverarbeitung¹ im Sensor oder Airbag-Steuergerät (ECU).
- Die Methode liefert auf Basis eines stark vereinfachten Fahrzeugmodells gute Übereinstimmung mit den real im Fahrzeug gemessenen Signalen.
 - Für die hochfrequenten Signale im Zeitbereich.
 - Für die Transformation in den Frequenzbereich.
 - Aus Sicht der ECU für die Einhüllenden im Zeitbereich.
- Dabei wird einzig die Ausbreitung der B-Welle auf Balken- und Plattenstrukturen modelliert. Weiter sind die Welleneffekte der Dispersion, Reflexion und Transmission, Amplitudenabnahme auf der Platte und die Materialdämpfung berücksichtigt. Angebundene Bauteile wie Motor, Getriebe, Fahrwerk, Bestuhlung, Innenraumverkleidungen oder Dämmmatten sind nicht beachtet.
- Details geringer Größe beeinflussen in der Realität aufgrund der Beugung die Welle kaum. Sie werden beim Strahlenverfahren nicht modelliert (Blockadewirkung).
- Dadurch sinkt der Aufwand in der Modellerstellung stark und das Verfahren kann bereits in der frühen Entwicklungsphase eingesetzt werden.
- Auf handelsüblichen Workstations ist durch die parallelisierte Strahlenverfolgung eine effektive Berechnung (Lösung innerhalb von ca. 10 Minuten) möglich.
- Sowohl für einfache wie auch komplizierte Modelle ist die maximale Anzahl an gefundenen Strahlen begrenzt. Für Winkeldiskretisierungen $> 200^\circ$ tritt immer die Sättigung ein.
- Da bei einer Variation der Zielposition die simulierten Signale immer noch mit der originalen Messung übereinstimmen, ist das Verfahren ausreichend robust.
- Die an das Verfahren gestellten Anforderungen aus Abschnitt 1.3 werden erfüllt.

Mit dem Strahlenverfahren lässt sich die Ausbreitung hochfrequenter Körperschallwellen in herkömmlichen Fahrzeugstrukturen effizient berechnen.

8.2. Weitere Einsatzmöglichkeiten

Neben der hier gezeigten Anwendung auf transiente Körperschallsignale in Fahrzeugstrukturen zur Detektion von Crashsituationen, kann das Strahlenverfahren auch noch anderweitig eingesetzt werden. Eine Virtualisierung der experimentellen Modalanalyse², bekannt aus der Maschinendynamik- bzw. akustik zur Bestimmung des Schwingverhaltens von Bauteilen [91], ist denkbar. Bei diesen Versuchen wird eine mit Messaufnehmern bestückte Struktur bspw. durch

¹In dieser Arbeit wird stets die Einhüllende (Abschnitt 1.1) zur Filterung verwendet. Eine Anwendung des Strahlenverfahrens auf modulierte Körperschallsignale ist in [172] gegeben.

²Auch mithilfe der FEM ist eine Modalanalyse durchführbar [84,91]. Hier hat der Berechner sogar den Vorteil, das gesamte Schwingungsbild des Bauteils zu untersuchen und nicht nur an einzelnen Stellen die Beschleunigungen zu erfassen wie dies bei der experimentellen Methode bzw. dem Strahlenverfahren der Fall ist. Vor allem im hochfrequenten Bereich nimmt der Aufwand der FEM jedoch drastisch zu. Für diesen Anwendungsfall liefert die dargestellte Methode einen wertvollen Beitrag.

einen Impuls angeregt und das Antwortsignal je Messkanal aufgezeichnet. Durch die Anregung werden Wellen erzeugt, die sich durch Reflexionen überlagern und als stehende Wellen [116] schwingen. Die Modalanalyse ergibt sich durch die Fourieranalyse der Antwortsignale.

Wird die maximale Simulationszeit bzw. die maximal zulässige Strahlänge beim Strahlenverfahren erhöht, kann nicht nur die transiente Wellenausbreitung simuliert werden, sondern auch die sich im weiteren Verlauf einstellenden stehenden Wellen. Mehrere virtuelle Sensoren werden als Ziele vorgegeben, die vom Raytracer nacheinander abgearbeitet werden. Nachdem die Berechnung der TLM im Frequenzbereich erfolgt, ist eine Fouriertransformation nicht mehr notwendig.

Das Pfadverfahren bietet sich vor allem dann an, wenn nur die direkte Verbindung zwischen Quelle und Ziel von Interesse ist. Für diesen Anwendungsfall kann auf andere Suchalgorithmen (z. B. Dijkstra) zurückgegriffen werden, die wesentlich schneller zum Ziel führen. Ist zusätzlich die Struktur noch komplexer gestaltet (z. B. im Schiffsbau), ist das Strahlenverfahren aufgrund der Vielzahl an Übergangsstellen (Reflexion und Transmission) nicht mehr praktikabel (hoher Wert für Γ wäre notwendig). Es muss darauf hingewiesen werden, dass für die Modellierung zweidimensionaler Bauteile ein geeigneter Richtungsfaktor notwendig ist. Schließlich ist das Pfadverfahren auch für kombinierte Modelle aus ein- und zweidimensionalen Elementen, mit entsprechenden Reflexions- und Transmissionsfaktoren aus Abschnitt 3.2, anwendbar.

Der Einsatzbereich des Pfadverfahrens ist nicht auf die Beschreibung der Körperschallausbreitung festgelegt. Durch die Modellierung der Wellenausbreitung auf geraden Pfaden und der Wahl eines geeigneten Pfadnetzes kann unter Berücksichtigung des Richtungsfaktors die Beugung nachgebildet werden (Absatz 6.2.5). Dieser Effekt ist vor allem in der Luftschallakustik, aufgrund der größeren Wellenlängen, von Bedeutung und folglich bietet das Pfadverfahren auch in dieser Disziplin die Möglichkeit, eine transiente Schallausbreitung effizient zu simulieren.

Das Wellenverfahren besitzt den Vorteil, dass für jeden Zeitschritt das Gleichgewicht im System berechnet wird. Aus diesem Grund ist auch eine Kopplung des Verfahrens mit der FDM [85] oder FEM möglich. Hier kann die Tatsache ausgenutzt werden, dass eindimensionale Bauteile unabhängig von der Wellenlänge in ihrer Formulierung nur ein Element beim Wellenverfahren benötigen (Absatz 6.3.4). Auch ist es nicht zwangsläufig auf ein Kraftsignal (vgl. Anhang E) als anregende Größe angewiesen, sondern kann z. B. auch die Schwingschnelle verarbeiten.

Ist die Konversion der Moden von Interesse, kann diese Methode ebenfalls sinnvoll angewendet werden. Voraussetzung ist jedoch, dass je nach räumlicher Dimension des Problems weitere Wellenarten¹ hinzugenommen werden. Abschließend ist auch hier noch zu ergänzen, dass der Fehler in der Beschreibung der Amplitudenabnahme bei zweidimensionalen Elementen je nach Anwendungsfall nicht vernachlässigbar ist.

8.3. Ausblick

Das Strahlenverfahren kann auch dazu benutzt werden, um aus einem gemessenen Signal an der Zielposition auf die Anregung zurückzurechnen. Der mögliche Ablauf soll nachfolgend an einem generischen Beispiel dargestellt werden.

Eine zufällig erzeugte Menge an Strahlen mit den Längen r_i (s. Abb. 8.1 links) sowie ein numerisch idealer Dirac-Impuls mit anschließender Tiefpassfilterung bei einer Grenzfrequenz von 20 kHz und zeitlicher Ableitung (s. Abb. 8.1 Mitte) dienen als Grundlage für die Simulation.

¹Für eindimensionale Tragwerkselemente im dreidimensionalen Raum muss die L-Welle, 2×B-Welle und die Torsionswelle berücksichtigt werden.

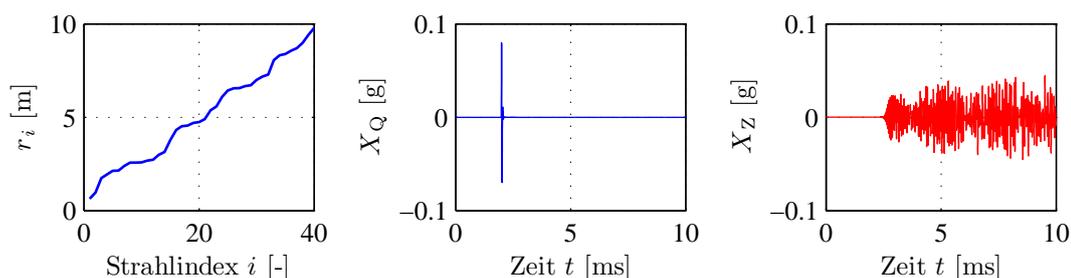


Abbildung 8.1.: Simulation. Zufällige Verteilung der Strahllängen (links), Eingangssignal (Mitte), Simulation (rechts)

Das Ergebnis dieser „Vorwärts“-Rechnung ist in Abb. 8.1 (rechts) dargestellt. Es enthält als Überlagerung aller Strahlen das durch die Welleneffekte veränderte Eingangssignal.

Dieses Summensignal (s. Abb. 8.1 rechts) kann für jeden Strahl rückwärts gerechnet werden, indem die jeweilige Umkehroperation des relevanten Welleneffektes angewendet wird. Pro Strahl ergibt sich damit ein Quellsignal, das neben den Signalanteilen der anderen (vorwärts gerechneten) Strahlen auch das eigentliche Eingangssignal enthält (s. Abb. 8.2 links). Der Signalanteil, der allen Rückrechnungen gemeinsam ist, kann durch eine Mittelwertbildung (mean) je Zeitpunkt gewonnen werden. Das Ergebnis dieser Operation ist in Abb. 8.2 (Mitte) dargestellt. Das ursprüngliche Signal kann bis auf einen zusätzlichen Rauschanteil zurückgewonnen werden. In der detaillierten Betrachtung in Abb. 8.2 (rechts) ist zu erkennen, dass die Rückrechnung des ersten Strahls keinen Signalanteil vor dem Eingangssignal bei 2 ms aufweist. Für den letzten Strahl ist kein Signal nach der Erregung zu beobachten. Alle anderen Strahlen, bspw. der vierte Strahl, enthalten vor und nach der Anregung Schwingungsanteile.

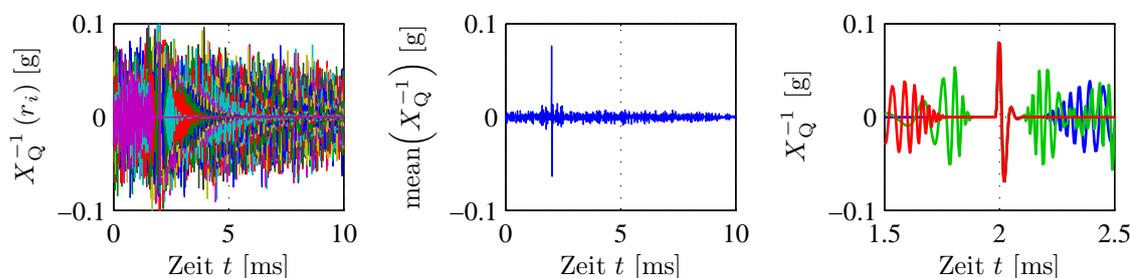


Abbildung 8.2.: Rückrechnung. Inverses Signal je Strahl (links), Mittelwertbildung aller Strahlen (Mitte), Detailansicht bestimmter Strahlen (rechts, Legende: – erster Strahl $i = 1$, – vierter Strahl $i = 4$, – letzter Strahl $i = 40$)

Bei einer Vielzahl an Strahlen und Reflexions- sowie Transmissionsbedingungen ergeben sich für den Gleichanteil der Verfahren Fehler in der Phase. Damit liefert die Mittelwertbildung keine optimalen Ergebnisse. Zur Anwendung dieses Verfahrens auf real gemessenen Signalen sind demnach leistungsfähigere Signalverarbeitungsmethoden notwendig, um den Gleichanteil je Signal zu ermitteln.

Der in Abschnitt 3.7 eingeführte Richtungsfaktor ist für die freie Wellenausbreitung der B-Welle auf Platten noch nicht aus der Literatur bekannt. In Analogie zur Beugungstheorie der Lichtwelle aus [20, 64, 157] erscheinen deshalb weitere Untersuchungen als sinnvoll.

A. Herleitungen zur Scheibentheorie

Dieser Teil der Arbeit enthält sämtliche Herleitungen zur Theorie der Scheibe aus Absatz 2.3.2 in detaillierter Ausarbeitung. Im ersten Abschnitt A.1 wird die Wellengleichung (2.59) hergeleitet und damit anschließend in Anhang A.2 die Wellenzahlen (2.60) sowie die Phasengeschwindigkeiten (2.61) bestimmt.

A.1. Wellengleichung für die Scheibe

Herleitung der Wellengleichung für die Scheibe (2.59) aus Absatz 2.3.2. Ausgegangen wird von den Gleichungen (2.56) und (2.57) die nochmals angegeben werden:

$$D \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + D \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + D \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + p_x h = \rho h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (\text{A.1})$$

und

$$D \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + D \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + D \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + p_y h = \rho h \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}. \quad (\text{A.2})$$

Substituieren, wobei die Abkürzungen a , b , c und d nur in diesem Anhangskapitel A.1 gelten sollen:

$$a = D, \quad b = D \frac{1+\nu}{2}, \quad c = D \frac{1-\nu}{2}, \quad d = \rho h. \quad (\text{A.3})$$

Einführung einer Kurzschreibweise: Die partiellen Ableitungen werden im Index durch Kommatarennung angegeben.

Für (A.1) gilt:

$$a u_{x,xx} + b u_{y,xy} + c u_{x,yy} + p_x h = d u_{x,tt}. \quad (\text{A.4})$$

Für (A.2) gilt:

$$a u_{y,yy} + b u_{x,xy} + c u_{y,xx} + p_y h = d u_{y,tt}. \quad (\text{A.5})$$

Die freie Wellenausbreitung (2.29) wird vorausgesetzt:

$$p_x = p_y = 0. \quad (\text{A.6})$$

Es folgt für (A.4):

$$a u_{x,xx} + b u_{y,xy} + c u_{x,yy} = d u_{x,tt}. \quad (\text{A.7})$$

Es folgt für (A.5):

$$a u_{y,yy} + b u_{x,xy} + c u_{y,xx} = d u_{y,tt}. \quad (\text{A.8})$$

Ableiten von (A.7) in y -Richtung:

$$a u_{x,xyy} + b u_{y,xyy} + c u_{x,yyy} = d u_{x,tty}. \quad (\text{A.9})$$

Ableiten von (A.8) in x -Richtung:

$$a u_{y,xyx} + b u_{x,xyx} + c u_{y,xxx} = d u_{y,ttx}. \quad (\text{A.10})$$

Nachfolgender Rechengang ergibt die Wellengleichung für die Verschiebung in x -Richtung. Sortieren von (A.10):

$$u_{y,xyy} = \frac{d}{a}u_{y,ttx} - \frac{b}{a}u_{x,xyx} - \frac{c}{a}u_{y,xxx}. \quad (\text{A.11})$$

Einsetzen von (A.11) in (A.9):

$$au_{x,xyx} + \frac{bd}{a}u_{y,ttx} - \frac{b^2}{a}u_{x,xyx} - \frac{bc}{a}u_{y,xxx} + cu_{x,yyy} = du_{x,ttx}. \quad (\text{A.12})$$

Zweimaliges Ableiten von (A.7) in x -Richtung:

$$au_{x,xxxx} + bu_{y,xxxy} + cu_{x,xyxy} = du_{x,ttxx}. \quad (\text{A.13})$$

Ableiten von (A.12) in y -Richtung:

$$\left(a - \frac{b^2}{a}\right)u_{x,xyyy} + \frac{bd}{a}u_{y,ttxy} - \frac{bc}{a}u_{y,xxxy} + cu_{x,yyyy} = du_{x,ttyy}. \quad (\text{A.14})$$

Sortieren von (A.13):

$$u_{y,xxxy} = \frac{d}{b}u_{x,ttxx} - \frac{a}{b}u_{x,xxxx} - \frac{c}{b}u_{x,xyxy}. \quad (\text{A.15})$$

Einsetzen von (A.15) in (A.14):

$$\begin{aligned} \left(a - \frac{b^2}{a}\right)u_{x,xyyy} + \frac{bd}{a}u_{y,ttxy} - \frac{bc}{a}\left(\frac{d}{b}u_{x,ttxx} - \frac{a}{b}u_{x,xxxx} - \frac{c}{b}u_{x,xyxy}\right) \\ + cu_{x,yyyy} = du_{x,ttyy}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Vereinfachen von (A.16):

$$\left(a - \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a}\right)u_{x,xyyy} + \frac{bd}{a}u_{y,ttxy} - \frac{cd}{a}u_{x,ttxx} + cu_{x,xxxx} + cu_{x,yyyy} = du_{x,ttyy}. \quad (\text{A.17})$$

Umstellen von (A.7):

$$u_{y,xy} = \frac{d}{b}u_{x,tt} - \frac{a}{b}u_{x,xx} - \frac{c}{b}u_{x,yy}. \quad (\text{A.18})$$

Zweimaliges Ableiten von (A.18) nach der Zeit:

$$u_{y,ttxy} = \frac{d}{b}u_{x,tttt} - \frac{a}{b}u_{x,ttxx} - \frac{c}{b}u_{x,ttyy}. \quad (\text{A.19})$$

Einsetzen von (A.19) in (A.17):

$$\begin{aligned} \left(a - \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a}\right)u_{x,xyyy} + \frac{bd}{a}\left(\frac{d}{b}u_{x,tttt} - \frac{a}{b}u_{x,ttxx} - \frac{c}{b}u_{x,ttyy}\right) \\ - \frac{cd}{a}u_{x,ttxx} + cu_{x,xxxx} + cu_{x,yyyy} = du_{x,ttyy}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Vereinfachen von (A.20):

$$\begin{aligned} \left(a - \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a}\right)u_{x,xyyy} + \frac{d^2}{a}u_{x,tttt} - du_{x,ttxx} - \frac{cd}{a}u_{x,ttyy} - \frac{cd}{a}u_{x,ttxx} \\ + cu_{x,xxxx} + cu_{x,yyyy} = du_{x,ttyy}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Sortieren von (A.21) und durch c teilen:

$$u_{x,xxxx} + u_{x,yyyy} + \left(\frac{a}{c} - \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ac} \right) u_{x,xyxy} + \frac{d^2}{ac} u_{x,tttt} - \left(\frac{dc}{ac} + \frac{d}{c} \right) u_{x,ttxx} - \left(\frac{d}{c} + \frac{cd}{ac} \right) u_{x,ttyy} = 0. \quad (\text{A.22})$$

Nebenrechnung zur Vereinfachung des ersten Klammerausdrucks in (A.22):

$$\left(\frac{a}{c} - \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ac} \right) = \frac{2D}{D(1-\nu)} - \frac{D^2(1+\nu)^2 2}{4DD(1-\nu)} + \frac{D(1-\nu)}{2D}, \quad (\text{A.23})$$

$$= \frac{4}{2(1-\nu)} - \frac{(1+\nu)^2}{2(1-\nu)} + \frac{(1-\nu)}{2(1-\nu)}, \quad (\text{A.24})$$

$$= \frac{4 - (1+2\nu+\nu^2) + (1-2\nu+\nu^2)}{2(1-\nu)}, \quad (\text{A.25})$$

$$= \frac{4-4\nu}{2-2\nu}, \quad (\text{A.26})$$

$$= 2. \quad (\text{A.27})$$

Nebenrechnung zur Vereinfachung des zweiten Klammerausdrucks in (A.22):

$$\left(\frac{d^2}{ac} \right) = \frac{2(\rho h)^2}{DD(1-\nu)}, \quad (\text{A.28})$$

$$= \frac{2\rho^2 h^2}{D^2(1-\nu)}. \quad (\text{A.29})$$

Zusammenfassen der letzten beiden Terme in (A.22)¹:

$$- \left(\frac{dc}{ac} + \frac{d}{c} \right) u_{x,ttxx} - \left(\frac{d}{c} + \frac{cd}{ac} \right) u_{x,ttyy} = - \left(\frac{dc}{ac} + \frac{d}{c} \right) (u_{x,ttxx} + u_{x,ttyy}), \quad (\text{A.30})$$

$$= - \left(\frac{dc}{ac} + \frac{d}{c} \right) \Delta \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}. \quad (\text{A.31})$$

Nebenrechnung zur Vereinfachung des Klammerausdrucks in (A.31):

$$\left(\frac{dc}{ac} + \frac{d}{c} \right) = \frac{d}{a} + \frac{d}{c}, \quad (\text{A.32})$$

$$= \frac{\rho h}{D} + \frac{2\rho h}{D(1-\nu)}, \quad (\text{A.33})$$

$$= \frac{\rho h(1-\nu) + 2\rho h}{D(1-\nu)}, \quad (\text{A.34})$$

$$= \frac{\rho h(3-\nu)}{D(1-\nu)}. \quad (\text{A.35})$$

Einsetzen von (A.27), (A.29) und (A.35) in (A.22) ergibt für die Verschiebung u_x die Wellengleichung der Scheibe:

$$\Delta \Delta u_x + \frac{2\rho^2 h^2}{D^2(1-\nu)} \frac{\partial^4 u_x}{\partial t^4} - \frac{\rho h(3-\nu)}{D(1-\nu)} \Delta \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{A.36})$$

¹Das in Beziehung (A.31) verwendete Symbol Δ bezeichnet den Laplace-Operator aus Definition (2.58).

Nachfolgender Rechengang ergibt die Wellengleichung für die Verschiebung in y -Richtung. Sortieren von (A.9):

$$u_{x,xy} = \frac{d}{a}u_{x,ty} - \frac{b}{a}u_{y,xy} - \frac{c}{a}u_{x,yyy}. \quad (\text{A.37})$$

Einsetzen von (A.37) in (A.10):

$$au_{y,xy} + \frac{bd}{a}u_{x,ty} - \frac{b^2}{a}u_{y,xy} - \frac{bc}{a}u_{x,yyy} + cu_{y,xx} = du_{y,tx}. \quad (\text{A.38})$$

Zweimaliges Ableiten von (A.8) in y -Richtung:

$$au_{y,yyyy} + bu_{x,yyy} + cu_{y,xyy} = du_{y,tyy}. \quad (\text{A.39})$$

Ableiten von (A.38) in x -Richtung:

$$\left(a - \frac{b^2}{a}\right)u_{y,xyy} + \frac{bd}{a}u_{x,tty} - \frac{bc}{a}u_{x,yyy} + cu_{y,xxx} = du_{y,txx}. \quad (\text{A.40})$$

Sortieren von (A.39):

$$u_{x,yyy} = \frac{d}{b}u_{y,tyy} - \frac{a}{b}u_{y,yyy} - \frac{c}{b}u_{y,xyy}. \quad (\text{A.41})$$

Einsetzen von (A.41) in (A.40):

$$\begin{aligned} \left(a - \frac{b^2}{a}\right)u_{y,xyy} + \frac{bd}{a}u_{x,tty} - \frac{bc}{a}\left(\frac{d}{b}u_{y,tyy} - \frac{a}{b}u_{y,yyy} - \frac{c}{b}u_{y,xyy}\right) \\ + cu_{y,xxx} = du_{y,txx}. \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Vereinfachen von (A.42):

$$\left(a - \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a}\right)u_{y,xyy} + \frac{bd}{a}u_{x,tty} - \frac{cd}{a}u_{y,tyy} + cu_{y,yyy} + cu_{y,xxx} = du_{y,txx}. \quad (\text{A.43})$$

Umstellen von (A.8):

$$u_{x,xy} = \frac{d}{b}u_{y,tt} - \frac{a}{b}u_{y,yy} - \frac{c}{b}u_{y,xx}. \quad (\text{A.44})$$

Zweimaliges Ableiten von (A.44) nach der Zeit:

$$u_{x,tty} = \frac{d}{b}u_{y,ttt} - \frac{a}{b}u_{y,tyy} - \frac{c}{b}u_{y,ttx}. \quad (\text{A.45})$$

Einsetzen von (A.45) in (A.43):

$$\begin{aligned} \left(a - \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a}\right)u_{y,xyy} + \frac{bd}{a}\left(\frac{d}{b}u_{y,ttt} - \frac{a}{b}u_{y,tyy} - \frac{c}{b}u_{y,ttx}\right) \\ - \frac{cd}{a}u_{y,tyy} + cu_{y,yyy} + cu_{y,xxx} = du_{y,txx}. \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Vereinfachen von (A.46):

$$\begin{aligned} \left(a - \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a}\right)u_{y,xyy} + \frac{d^2}{a}u_{y,ttt} - du_{y,tyy} - \frac{cd}{a}u_{y,ttx} - \frac{cd}{a}u_{y,tyy} \\ + cu_{y,yyy} + cu_{y,xxx} = du_{y,txx}. \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Sortieren von (A.47) und durch c teilen:

$$u_{y,xxxx} + u_{y,yyyy} + \left(\frac{a}{c} - \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ac}\right) u_{y,xyxy} + \frac{d^2}{ac} u_{y,tttt} - \left(\frac{dc}{ac} + \frac{d}{c}\right) u_{y,ttxx} - \left(\frac{d}{c} + \frac{cd}{ac}\right) u_{y,ttyy} = 0. \quad (\text{A.48})$$

Einsetzen von (A.27), (A.29) und (A.35)¹ in (A.48) ergibt für die Verschiebung u_y die Wellengleichung der Scheibe:

$$\Delta\Delta u_y + \frac{2\rho^2 h^2}{D^2(1-\nu)} \frac{\partial^4 u_y}{\partial t^4} - \frac{\rho h(3-\nu)}{D(1-\nu)} \Delta \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{A.49})$$

A.2. Wellenzahl und Phasengeschwindigkeit für die Scheibe

Herleitung der Wellenzahl und Phasengeschwindigkeit aus der Wellengleichung der Scheibe. Ausgegangen wird von Gleichung (2.59) bzw. (A.36), die hier nochmals angegeben wird:

$$\Delta\Delta u_x + \frac{2\rho^2 h^2}{D^2(1-\nu)} \frac{\partial^4 u_x}{\partial t^4} - \frac{\rho h(3-\nu)}{D(1-\nu)} \Delta \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{A.50})$$

Substituieren, wobei die Abkürzungen α und β nur in diesem Anhangskapitel A.2 gelten sollen:

$$\alpha = \frac{2\rho^2 h^2}{D^2(1-\nu)}, \quad \beta = \frac{\rho h(3-\nu)}{D(1-\nu)}. \quad (\text{A.51})$$

Einsetzen der Abkürzungen (A.51) in (A.50):

$$\Delta\Delta u_x + \alpha \frac{\partial^4 u_x}{\partial t^4} - \beta \Delta \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{A.52})$$

Verwendung des eindimensionalen Lösungsansatzes (2.34):

$$u_x = u_{x0} e^{-j(kx-\omega t)}. \quad (\text{A.53})$$

Viermalige Ortsableitung von (A.53) in x -Richtung. Aufgrund der eindimensionalen Betrachtung entsprechend dem Lösungsansatz (A.53) werden die Ableitungen in y -Richtung zu Null:

$$\Delta\Delta u_x = k^4 u_{x0} e^{-j(kx-\omega t)}. \quad (\text{A.54})$$

Zweimalige Ortsableitung in x -Richtung und zweimalige Zeitableitung von (A.53). Aufgrund der eindimensionalen Betrachtung entsprechend dem Lösungsansatz (A.53) werden die Ableitungen in y -Richtung zu Null:

$$\Delta \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = k^2 \omega^2 u_{x0} e^{-j(kx-\omega t)}. \quad (\text{A.55})$$

Viermalige Zeitableitung von (A.53):

$$\frac{\partial^4 u_x}{\partial t^4} = \omega^4 u_{x0} e^{-j(kx-\omega t)}. \quad (\text{A.56})$$

¹Die Berechnungen in Gleichung (A.30) und (A.31) sind für die Verschiebung in y -Richtung analog durchzuführen.

Einsetzen von (A.54), (A.55) und (A.56) in (A.52) und Vereinfachen:

$$k^4 - \beta\omega^2 k^2 + \alpha\omega^4 = 0. \quad (\text{A.57})$$

Auflösen nach der Wellenzahl¹:

$$k_{12}^2 = \frac{\omega^2}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha} \right). \quad (\text{A.58})$$

Verwendung der Dehnsteifigkeit der Scheibe aus (2.55):

$$D = \frac{Eh}{1 - \nu^2}. \quad (\text{A.59})$$

Einsetzen von (A.59) in (A.51) und Vereinfachen ergibt für α :

$$\alpha = \frac{2\rho^2 (1 + \nu)^2 (1 - \nu)}{E^2}. \quad (\text{A.60})$$

Einsetzen von (A.59) in (A.51) und Vereinfachen ergibt für β :

$$\beta = \frac{\rho(1 + \nu)(3 - \nu)}{E}. \quad (\text{A.61})$$

Einsetzen von (A.60) und (A.61) in den Wurzelausdruck der Beziehung (A.58):

$$\sqrt{\beta^2 - 4\alpha} = \sqrt{\frac{\rho^2 (1 + \nu)^2 (3 - \nu)^2}{E^2} - 4 \frac{2\rho^2 (1 + \nu)^2 (1 - \nu)}{E^2}}, \quad (\text{A.62})$$

$$= \frac{\rho(1 + \nu)}{E} \sqrt{(3 - \nu)^2 - 8(1 - \nu)}. \quad (\text{A.63})$$

Vereinfachen des Wurzelausdrucks in (A.63):

$$(3 - \nu)^2 - 8(1 - \nu) = 9 - 6\nu + \nu^2 - 8 + 8\nu, \quad (\text{A.64})$$

$$= 1 + 2\nu + \nu^2, \quad (\text{A.65})$$

$$= (1 + \nu)^2. \quad (\text{A.66})$$

Einsetzen von (A.66) in (A.63):

$$\sqrt{\beta^2 - 4\alpha} = \frac{\rho(1 + \nu)}{E} \sqrt{(1 + \nu)^2}, \quad (\text{A.67})$$

$$= \frac{\rho(1 + \nu)^2}{E}. \quad (\text{A.68})$$

Fallunterscheidung zur Vereinfachung des Klammerausdrucks in (A.58):

$$\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha} = \frac{\rho}{E} \left[(1 + \nu)(3 - \nu) \pm (1 + \nu)^2 \right], \quad (\text{A.69})$$

$$= \frac{\rho}{E} \begin{cases} 4(1 + \nu) & \text{für } \beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha} \\ 2(1 - \nu^2) & \text{für } \beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha} \end{cases}. \quad (\text{A.70})$$

¹Die Lösung der allgemeinen quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ ist gegeben mit

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Einsetzen des ersten Falls von (A.70) in (A.58), wobei sich der Index T auf die Transversalwelle (T-Welle) in der Scheibenebene bezieht:

$$k_T^2 = 2 \frac{\rho}{E} (1 + \nu) \omega^2. \quad (\text{A.71})$$

Einsetzen des zweiten Falls von (A.70) in (A.58), wobei sich der Index L auf die Longitudinalwelle (L-Welle) in der Scheibenebene bezieht:

$$k_L^2 = \frac{\rho}{E} (1 - \nu^2) \omega^2. \quad (\text{A.72})$$

Zusammenhang zwischen Phasengeschwindigkeit, Kreisfrequenz und Wellenzahl aus (2.38):

$$c = \frac{\omega}{k}. \quad (\text{A.73})$$

Einsetzen von (A.71) in (A.73) ergibt unter Verwendung des Schubmoduls aus (2.17) die Phasengeschwindigkeit der Transversalwelle in der Scheibenebene:

$$c_T = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}, \quad (\text{A.74})$$

$$= \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (\text{A.75})$$

Einsetzen von (A.72) in (A.73) ergibt die Phasengeschwindigkeit der Longitudinalwelle in der Scheibenebene:

$$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}. \quad (\text{A.76})$$

B. Herleitungen zu den Balkentheorien

Dieser Anhangsteil enthält eine Vielzahl an Herleitungen zu den in Absatz 2.3.3 beschriebenen Balkentheorien. Für die Modelle mit linearem Verschiebungsansatz ($u_x = \psi z$) wird das Massenträgheitsmoment eines infinitesimalen Balkensegments im ersten Abschnitt B.1 hergeleitet. Danach werden in Anhang B.2 die verschiedenen Größen der Levinson-Balkentheorie detailliert dargestellt. Dabei wird auf die Formfunktion, das Biegemoment, die Querkraft und das Massenträgheitsmoment eingegangen. Im Unterschied zu Anhang B.1 ist hier der Verschiebungsansatz nicht linear sondern eine Funktion höherer Ordnung von der z -Koordinate ($u_x = \psi z + z^3 \chi$). Anschließend wird die in Absatz 2.3.3.4 vorgestellte Schub-Lösung, die zusammen mit dem Rayleigh-Balkenmodell in ihrer Komplexität zwischen der Euler-Bernoulli- und Bresse-Timoshenko-Balkentheorie zu sehen ist, in Absatz B.3.1 ermittelt. In Anhang B.3.2 werden die Wellenzahlen der Schub- und der Bresse-Timoshenko-Lösung miteinander verglichen.

B.1. Massenträgheitsmoment für lineare Verschiebungsansätze

Herleitung des infinitesimal kleinen Massenträgheitsmoments (2.70) zur Beschreibung der Rotationsträgheit des Balkens um die y -Achse. Die allgemeine Definition des Massenträgheitsmoments ist gegeben mit [49, 52, 128]:

$$j = \int_m r^2 dm = \int_m (x^2 + z^2) dm. \quad (\text{B.1})$$

Die Bestimmung erfolgt für ein infinitesimal kleines Segment des Balkens (s. Abb. B.1). Die Abmessungen dieses Balkenelements sind mit dem Querschnitt $A = bh$ und der Länge dx bekannt. Auf Grund der differentiellen Ausdehnung wird für das Massenelement dm nur der Abstand entlang der z -Komponente zur Drehachse betrachtet [5]. Damit wird der Term x^2 in (B.1) vernachlässigt¹.

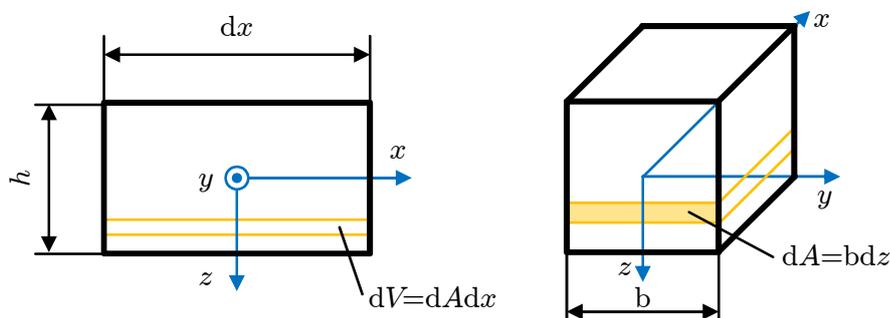


Abbildung B.1.: Massenträgheitsmoment eines infinitesimal kleinen Balkensegmentes

¹Wird für den Term x^2 in (B.1) die dargestellte Herleitung durchgeführt, ergibt sich für das infinitesimal kleine Massenträgheitsmoment ein weiterer Term $\rho A dx^3 / 12$. Dieser wird aufgrund der Tatsache, dass er von höherer Ordnung klein ist, vernachlässigt.

Für das infinitesimal kleine Massenträgheitsmoment ergibt sich damit:

$$dj = \int_m z^2 dm. \quad (\text{B.2})$$

Die infinitesimal kleine Masse eines homogenen Körpers aus Abb. B.1 ist:

$$dm = \rho dAdx. \quad (\text{B.3})$$

Einsetzen von (B.3) in (B.2):

$$dj = \rho \int_x \int_A z^2 dAdx. \quad (\text{B.4})$$

Das innere Integral über die Querschnittsfläche entspricht dem Flächenmoment 2. Ordnung aus Beziehung (2.71) [48, 52, 128]:

$$\int_A z^2 dA = I. \quad (\text{B.5})$$

Einsetzen von (B.5) in (B.4) und Integration von $-dx/2$ bis $dx/2$ ergibt:

$$dj = \rho I \int_{-dx/2}^{dx/2} dx = \rho I dx. \quad (\text{B.6})$$

B.2. Levinson-Theorie

In diesem Abschnitt werden die beschreibenden Größen der Levinson-Balkentheorie [109] detailliert hergeleitet. Diese sind die Formfunktion χ , das Biegemoment M , die Querkraft Q und das Massenträgheitsmoment $\partial M_d / \partial x$.

B.2.1. Formfunktion

Ausgangspunkt ist der Ansatz für die Verschiebung in x -Richtung (2.95) nach Levinson [109]:

$$u_x = \psi z + z^3 \chi. \quad (\text{B.7})$$

Die Gleitungen $\gamma_{xz} = \gamma$ am oberen und unteren Rand des Balkens werden Null:

$$\gamma(z = \pm h/2) = 0. \quad (\text{B.8})$$

Einsetzen von (B.8) und (2.66) in (2.11):

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \Big|_{z=\pm h/2} = 0. \quad (\text{B.9})$$

Einsetzen von (B.7) in (B.9):

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} (\psi z + z^3 \chi) \right] \Big|_{z=\pm h/2} = 0. \quad (\text{B.10})$$

Zweiten Term in (B.10) Ableiten und Vereinfachen:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi + 3z^2 \chi \right) \Big|_{z=\pm h/2} = 0. \quad (\text{B.11})$$

Einsetzen der Randbedingungen in (B.11) und Auflösen:

$$\chi(x) = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right). \quad (\text{B.12})$$

B.2.2. Biegemoment

Einsetzen von (B.12) in (B.7):

$$u_x = \psi z - z^3 \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right). \quad (\text{B.13})$$

Ableiten von (B.13) entlang der x -Koordinate:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} z - z^3 \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right). \quad (\text{B.14})$$

Aus Beziehung (2.65) und (2.74) folgt:

$$M = \int_A z E \frac{\partial u_x}{\partial x} dA. \quad (\text{B.15})$$

Einsetzen von (B.14) in (B.15):

$$M = \int_A z E \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} z - z^3 \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] dA. \quad (\text{B.16})$$

Das infinitesimal kleine Querschnittselement dA ergibt sich bei rechteckiger Form (Vollmaterial) mit der konstanten Breite b zu:

$$dA = b dz. \quad (\text{B.17})$$

Einsetzen von (B.17) in (B.16) und Integration entlang der Balkenhöhe z mit den Grenzen $-h/2$ bis $h/2$ unter der Voraussetzung, dass E konstant über den Querschnitt ist:

$$M = Eb \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} dz - Eb \int_{-h/2}^{h/2} z^4 \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dz. \quad (\text{B.18})$$

Ermittlung der Stammfunktionen in (B.18):

$$M = Eb \left[\frac{z^3}{3} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{-h/2}^{h/2} - Eb \left[\frac{4z^5}{15h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right]_{-h/2}^{h/2}. \quad (\text{B.19})$$

Einsetzen der Integrationsgrenzen und Auflösen von (B.19):

$$M = \frac{Eb h^3}{12} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{Eb h^3}{60} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right). \quad (\text{B.20})$$

Flächenmoment 2. Ordnung für den rechteckigen Querschnitt (Vollmaterial) [52, 128]:

$$I = \frac{bh^3}{12}. \quad (\text{B.21})$$

Einsetzen von (B.21) in (B.20) und Vereinfachen:

$$M = \frac{EI}{5} \left(4 \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (\text{B.22})$$

B.2.3. Querkraft

Aus (2.11), (2.16) und (2.73) folgt:

$$Q = \int_A G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) dA. \quad (\text{B.23})$$

Ableiten von (B.13) entlang der z -Koordinate:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \psi - \frac{4z^2}{h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right). \quad (\text{B.24})$$

Einsetzen von (B.17) und (B.24) in (B.23) und Integration entlang der Balkenhöhe z mit den Grenzen $-h/2$ bis $h/2$ unter der Voraussetzung, dass G konstant über den Querschnitt ist:

$$Q = Gb \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \psi - \frac{4z^2}{h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) \right] dz. \quad (\text{B.25})$$

Ermittlung der Stammfunktionen in (B.25):

$$Q = G \left[\frac{\partial w}{\partial x} z + \psi z - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) \right]_{-h/2}^{h/2}. \quad (\text{B.26})$$

Sortieren von (B.26):

$$Q = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) \left[z - \frac{4z^3}{3h^2} \right]_{-h/2}^{h/2}. \quad (\text{B.27})$$

Einsetzen der Integrationsgrenzen und Vereinfachen von (B.27):

$$Q = \frac{2}{3} Gh \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right). \quad (\text{B.28})$$

B.2.4. Massenträgheitsmoment für Verschiebungsansätze höherer Ordnung

Das Moment, das ein infinitesimal kleiner Massenpunkt eines Körpers aufgrund der Trägheit der Drehung um den Schwerpunkt entgegengesetzt (s. Abb. B.2 links), ist durch die infinitesimal kleine Trägheitskraft dF und dem dazu senkrecht stehenden Hebelarm bis zum Schwerpunkt gegeben mit:

$$dM_d = z dF_d. \quad (\text{B.29})$$

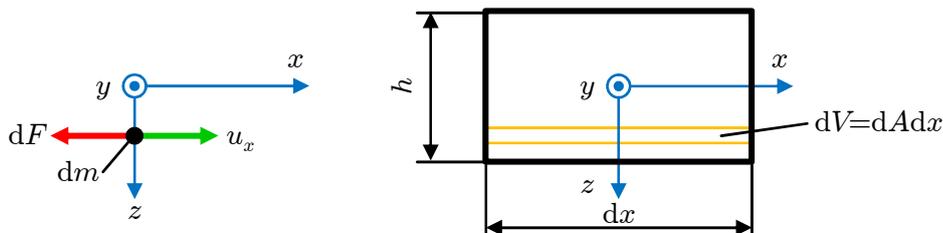


Abbildung B.2.: Kräfte und Verschiebungen am infinitesimal kleinen Massenpunkt (links), infinitesimal kleines Balkensegment (rechts)

Wie auch in Anhang B.1 wird aufgrund der differentiellen Ausdehnung dx für den Hebelarm nur der Bezug zur z -Achse betrachtet. Aus dem zweiten Newtonschen Gesetz folgt für die Kraft:

$$dF_d = \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} dm. \quad (\text{B.30})$$

Für die infinitesimal kleine Masse aus Abb. B.2 (rechts) gilt:

$$dm = \rho dA dx. \quad (\text{B.31})$$

Einsetzen von (B.30) und (B.31) in (B.29):

$$dM_d = z \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \rho dA dx. \quad (\text{B.32})$$

Das Trägheitsmoment nach dem Prinzip von d'Alembert soll auf die Länge des infinitesimalen Balkensegments angegeben werden. Zu diesem Zweck wird über die Querschnittsfläche integriert mit der Voraussetzung, dass ρ über den Querschnitt konstant ist:

$$\frac{\partial M_d}{\partial x} = \rho \int_A z \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} dA. \quad (\text{B.33})$$

Zweimaliges Ableiten von (B.13) nach der Zeit:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = z \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - z^3 \frac{4}{3h^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right). \quad (\text{B.34})$$

Einsetzen von (B.17) und (B.34) in (B.33) und Integration entlang der Balkenhöhe z mit den Grenzen $-h/2$ bis $h/2$:

$$\frac{\partial M_d}{\partial x} = \rho b \int_{-h/2}^{h/2} \left[z^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - z^4 \frac{4}{3h^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) \right] dz. \quad (\text{B.35})$$

Bestimmung der Stammfunktionen in (B.35):

$$\frac{\partial M_d}{\partial x} = \rho b \left[\frac{z^3}{3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{4z^5}{15h^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) \right]_{-h/2}^{h/2}. \quad (\text{B.36})$$

Sortieren von (B.36):

$$\frac{\partial M_d}{\partial x} = \rho b \left[\left(\frac{z^3}{3} - \frac{4z^5}{15h^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{4z^5}{15h^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right]_{-h/2}^{h/2}. \quad (\text{B.37})$$

Einsetzen der Integrationsgrenzen in (B.37) und teilweise Vereinfachen:

$$\frac{\partial M_d}{\partial x} = \rho b \left[\left(\frac{h^3}{24} - \frac{h^3}{120} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{h^3}{120} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right] - \rho b \left[\left(-\frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{120} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{h^3}{120} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right]. \quad (\text{B.38})$$

Zusammenfassen von (B.38):

$$\frac{\partial M_d}{\partial x} = \rho b \left(\frac{h^3}{15} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{h^3}{60} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} \right). \quad (\text{B.39})$$

Einsetzen von (B.21) in (B.39):

$$\frac{\partial M_d}{\partial x} = \frac{\rho I}{5} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(4\psi - \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (\text{B.40})$$

B.3. Schub-Lösung

In diesem Abschnitt wird zunächst die Wellengleichung der Schub-Lösung (2.106) aus Absatz 2.3.3.4 hergeleitet. Daraus ergibt sich die Wellenzahl der Schub-Lösung (2.107), die anschließend mit der Wellenzahl aus der Bresse-Timoshenko-Theorie (2.93) verglichen wird.

B.3.1. Wellengleichung

Ausgangspunkt sind die Differentialgleichungen aus dem Kräftegleichgewicht (2.68) und dem Momentengleichgewicht (2.72):

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + f_z = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (\text{B.41})$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - Q = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (\text{B.42})$$

Die Querkraft aus (2.87) ist:

$$Q = \kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right). \quad (\text{B.43})$$

Einsetzen von (B.43) in (B.41) unter der Voraussetzung, dass G und A in Richtung der Balkenlängsachse (x -Achse) konstant sind:

$$\kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) + f_z = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (\text{B.44})$$

Das Biegemoment aus (2.84) ist:

$$M = EI \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (\text{B.45})$$

Für die Schub-Lösung in (B.42) den Trägheitsterm $\rho I \partial^2 \psi / \partial t^2$ vernachlässigen:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q. \quad (\text{B.46})$$

Einsetzen von (B.43) und (B.45) in (B.46) unter der Voraussetzung, dass E und I in Richtung der Balkenlängsachse (x -Achse) konstant sind:

$$EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \kappa GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right). \quad (\text{B.47})$$

Ableitung von (B.47) entlang der x -Koordinate:

$$EI \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = \kappa GA \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right). \quad (\text{B.48})$$

Umformen von (B.44):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) = \frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{\kappa GA} f_z. \quad (\text{B.49})$$

Umformen von (B.49) und zweimaliges Ableiten entlang der x -Koordinate:

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = \frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{1}{\kappa GA} \frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}. \quad (\text{B.50})$$

Einsetzen von (B.49) und (B.50) in (B.48):

$$EI \left(\frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{1}{\kappa G A} \frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) = \kappa G A \left(\frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{\kappa G A} f_z \right). \quad (\text{B.51})$$

Vereinfachen von (B.51):

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{EI \rho}{\kappa G} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f_z - \frac{EI}{\kappa G A} \frac{\partial^2 f_z}{\partial x^2} \quad (\text{B.52})$$

Die Wellengleichung (B.52) ist bis auf den Term $-(EI \partial^2 f_z) / (\kappa G A \partial x^2)$ mit der Lösung in [110] identisch.

B.3.2. Vergleich der Wellenzahlen von Bresse-Timoshenko- und Schub-Lösung

Im Folgenden wird die Bresse-Timoshenko-Theorie und die Euler-Bernoulli-Lösung mit berücksichtigtem Schubeffekt (Schub-Lösung) verglichen. Es wird gezeigt, dass die Ungleichung aus (2.114)

$$k_{\text{B,Ba,EB}+\tau} < k_{\text{B,Ba,BT},1} \quad (\text{B.53})$$

wahr ist. Vorausgesetzt wird:

$$\rho > 0, \quad E > 0, \quad \nu \geq 0, \quad A > 0, \quad I > 0, \quad \kappa > 0 \quad \text{und} \quad \omega > 0. \quad (\text{B.54})$$

Die Abkürzung aus (2.111) lautet:

$$C = \frac{2(1+\nu)}{\kappa}. \quad (\text{B.55})$$

Mit den Voraussetzungen (B.54) gilt für (B.55):

$$C > 0. \quad (\text{B.56})$$

Die Beziehungen für die Wellenzahlen nach (2.112) und (2.113) sind:

$$k_{\text{B,Ba,BT},1} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{2E}} \sqrt{C + 1 + \sqrt{(C-1)^2 + 4 \frac{AE}{\rho I} \frac{1}{\omega^2}}}, \quad (\text{B.57})$$

$$k_{\text{B,Ba,EB}+\tau} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{2E}} \sqrt{C + \sqrt{C^2 + 4 \frac{AE}{\rho I} \frac{1}{\omega^2}}}. \quad (\text{B.58})$$

Erweitern von (B.53):

$$\frac{k_{\text{B,Ba,EB}+\tau}^2}{\omega^2} \frac{2E}{\rho} < \frac{2E}{\rho} \frac{k_{\text{B,Ba,BT},1}^2}{\omega^2}. \quad (\text{B.59})$$

Einsetzen von (B.57) und (B.58) in (B.59):

$$C + \sqrt{C^2 + 4 \frac{AE}{\rho I} \frac{1}{\omega^2}} < C + 1 + \sqrt{(C-1)^2 + 4 \frac{AE}{\rho I} \frac{1}{\omega^2}}. \quad (\text{B.60})$$

Substituieren, wobei die Abkürzung α nur in diesem Anhangskapitel B.3.2 gelten soll:

$$\alpha = 4 \frac{AE}{\rho I} \frac{1}{\omega^2}. \quad (\text{B.61})$$

Mit den Voraussetzungen (B.54) gilt für (B.61):

$$\alpha > 0. \quad (\text{B.62})$$

Vereinfachen und Quadrieren von (B.60):

$$\mathcal{C}^2 + \alpha < 1 + 2\sqrt{(\mathcal{C} - 1)^2 + \alpha} + (\mathcal{C} - 1)^2 + \alpha. \quad (\text{B.63})$$

Vereinfachen und Umstellen von (B.63):

$$\mathcal{C}^2 < 1 + 2\sqrt{(\mathcal{C} - 1)^2 + \alpha} + \mathcal{C}^2 - 2\mathcal{C} + 1. \quad (\text{B.64})$$

Vereinfachen und Quadrieren von (B.63):

$$(\mathcal{C} - 1)^2 < (\mathcal{C} - 1)^2 + \alpha. \quad (\text{B.65})$$

Vereinfachen von (B.65):

$$0 < \alpha. \quad (\text{B.66})$$

Die Gleichung (B.66) entspricht der Voraussetzung (B.61). Die Ungleichung (B.56) ist damit unter den gegebenen Annahmen (B.53) wahrheitsgemäß. Übertragen auf den Vergleich der Wellenzahlen bedeutet dies, dass die Lösung nach Bresse-Timoshenko ($k_{\text{B,Ba,BT},1}$) immer größer als die Euler-Bernoulli-Theorie mit Berücksichtigung der Schubverformung ($k_{\text{B,Ba,EB}+\tau}$) ist.

Für einen dünnen, rechteckigen Balken mit der Höhe $h = 3 \text{ mm}$ aus Stahl ($E = 210 \text{ GPa}$, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0,3$ und $\kappa = 5/6$) sind in Abb. B.3 die Wellenzahlen der Biegewelle

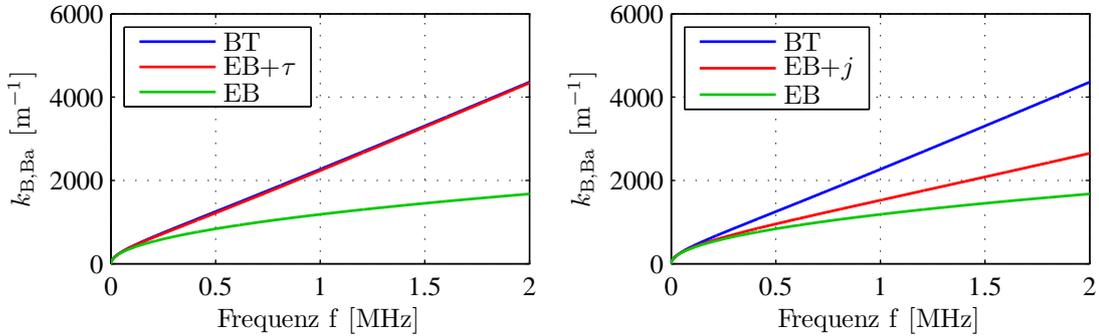


Abbildung B.3.: Vergleich der Wellenzahlen. Bresse-Timoshenko (BT) und Euler-Bernoulli (EB) mit Schub-Lösung ($\text{EB}+\tau$) (links) bzw. mit Rayleigh-Lösung ($\text{EB}+j$) (rechts)

(B-Welle) nach den Theorien von Bresse-Timoshenko (BT) und Euler-Bernoulli (EB) mit der Schub-Lösung ($\text{EB}+\tau$) (links) sowie mit der Rayleigh-Lösung ($\text{EB}+j$) (rechts) verglichen. Um den Unterschied der Theorien zu bewerten, wird der absolute Fehler aus (3.22) verwendet:

$$\mathcal{E}_{\text{abs,EB}+\tau} = k_{\text{B,Ba,EB}+\tau} - k_{\text{B,Ba,BT},1} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{E}_{\text{abs,EB}+j} = k_{\text{B,Ba,EB}+j} - k_{\text{B,Ba,BT},1}. \quad (\text{B.67})$$

Dieser Fehler ist als Funktion der Frequenz in Abb. B.4 für verschiedene Werte von \mathcal{C} ersichtlich. Die blaue Kurve mit $\mathcal{C} = 3,12$ entspricht dabei dem oben genannten Beispiel mit $\nu = 0,3$ und $\kappa = 5/6$. Die beiden anderen Kurven repräsentieren Variationen von \mathcal{C} . Während für die Rayleigh-Lösung die Fehler bei höheren Frequenzen immer größer werden, nähern sich die Schub-Lösungen der Bresse-Timoshenko-Theorie an. Diese Tatsache ist auch aus den Beziehungen

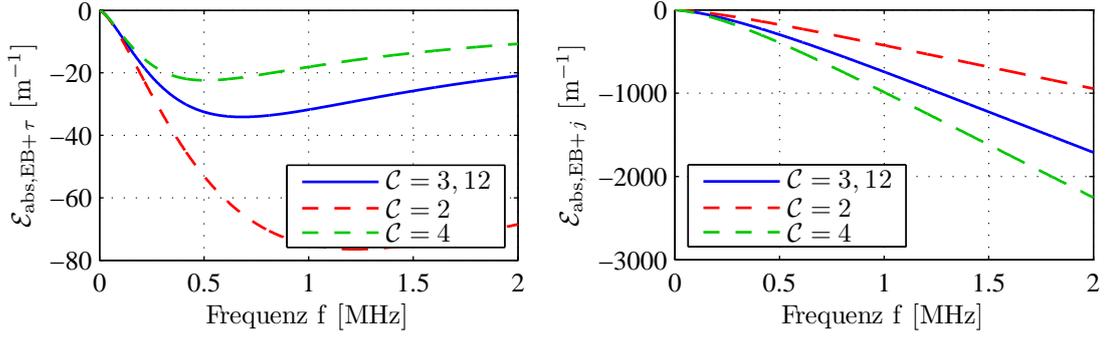


Abbildung B.4.: Absoluter Fehler bezogen auf die Bresse-Timoshenko-Theorie. Schub-Lösung ($EB+\tau$) (links) und Rayleigh-Lösung ($EB+j$) (rechts)

(B.57) und (B.58) ersichtlich. Da \mathcal{C} für sinnvolle Werte der Querkontraktionszahl und des Schubkorrekturfaktors nach unten begrenzt ist ($\mathcal{C} > 2$, Absatz 2.3.3.4), ist der maximale Fehler endlich. Für höhere Werte von \mathcal{C} verringert sich die Abweichung zur Bresse-Timoshenko-Theorie. Die Betrachtung des relativen Fehlers aus (3.22)

$$\mathcal{E}_{\text{rel},EB+\tau} = \frac{k_{B,Ba,EB+\tau} - k_{B,Ba,BT,1}}{k_{B,Ba,BT,1}} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{E}_{\text{rel},EB+j} = \frac{k_{B,Ba,EB+j} - k_{B,Ba,BT,1}}{k_{B,Ba,BT,1}} \quad (\text{B.68})$$

ergibt für die Schub-Lösung mit $\mathcal{C} = 3,12$ eine maximale Abweichung von ca. -3 % bei 300 kHz im Bezug auf die Wellenzahl nach der Bresse-Timoshenko-Theorie (s. Abb. B.5).

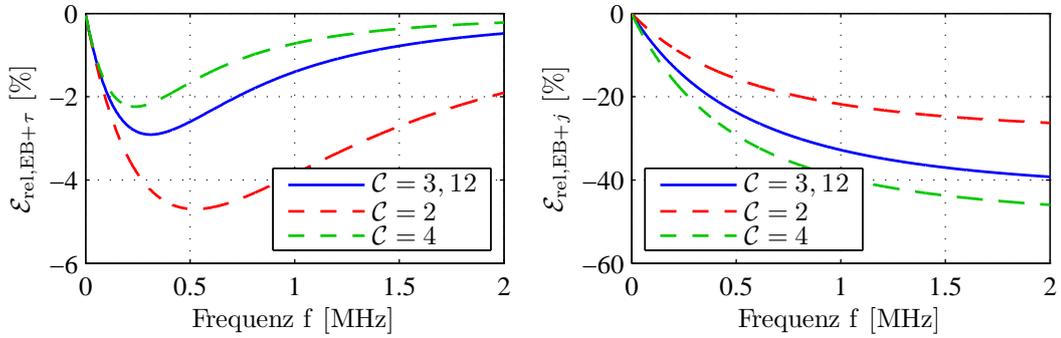


Abbildung B.5.: Relativer Fehler bezogen auf die Bresse-Timoshenko-Theorie. Schub-Lösung ($EB+\tau$) (links) und Rayleigh-Lösung ($EB+j$) (rechts)

C. Herleitung der Frequenzgleichung nach Rayleigh-Lamb

In diesem Anhangsteil wird für den symmetrischen Schwingmode der Plattenwelle nach Rayleigh-Lamb ausgehend vom Gleichungssystem (2.173) und (2.174)

$$\sigma_y = -2\mu [\mathcal{P}^2 \mathcal{A}_2 \cos(\mathcal{P}y) + jk\mathcal{Q}\mathcal{B}_1 \cos(\mathcal{Q}y)] - \lambda(k^2 + \mathcal{P}^2) \mathcal{A}_2 \cos(\mathcal{P}y) \quad (\text{C.1})$$

$$\tau_{xy} = \mu [-j2k\mathcal{P}\mathcal{A}_2 \sin(\mathcal{P}y) + (k^2 - \mathcal{Q}^2) \mathcal{B}_1 \sin(\mathcal{Q}y)] \quad (\text{C.2})$$

aus Absatz 2.3.4.2 die Frequenzgleichung (2.178) hergeleitet. Diese Herleitung erscheint sinnvoll, da dieser Rechenschritt in der Literatur nur wenig beschrieben ist. Zusammenfassen von (C.1) führt auf:

$$\sigma_y = -2\mu\mathcal{P}^2 \mathcal{A}_2 \cos(\mathcal{P}y) - j2\mu k\mathcal{Q}\mathcal{B}_1 \cos(\mathcal{Q}y) - \lambda(k^2 + \mathcal{P}^2) \mathcal{A}_2 \cos(\mathcal{P}y), \quad (\text{C.3})$$

$$= [-2\mu\mathcal{P}^2 - \lambda(k^2 + \mathcal{P}^2)] \mathcal{A}_2 \cos(\mathcal{P}y) - j2\mu k\mathcal{Q}\mathcal{B}_1 \cos(\mathcal{Q}y). \quad (\text{C.4})$$

Ausmultiplizieren von (C.2) führt auf:

$$\tau_{xy} = -j2\mu k\mathcal{P}\mathcal{A}_2 \sin(\mathcal{P}y) + \mu(k^2 - \mathcal{Q}^2) \mathcal{B}_1 \sin(\mathcal{Q}y). \quad (\text{C.5})$$

Es gelten die Randbedingungen (2.165) an der Oberfläche der Platte bei $y = \pm h/2$:

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0. \quad (\text{C.6})$$

Lösungen existieren, wenn die Determinante aus (C.4) und (C.5) verschwindet [1, 46]:

$$\det \begin{bmatrix} [-2\mu\mathcal{P}^2 - \lambda(k^2 + \mathcal{P}^2)] \cos(\mathcal{P} h/2) & -j2\mu k\mathcal{Q} \cos(\mathcal{Q} h/2) \\ -j2\mu k\mathcal{P} \sin(\mathcal{P} h/2) & \mu(k^2 - \mathcal{Q}^2) \sin(\mathcal{Q} h/2) \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{C.7})$$

Aus (C.7) folgt:

$$[-2\mu\mathcal{P}^2 - \lambda(k^2 + \mathcal{P}^2)] \cos(\mathcal{P} h/2) (k^2 - \mathcal{Q}^2) \sin(\mathcal{Q} h/2) = -4\mu k^2 \mathcal{P} \sin(\mathcal{P} h/2) \mathcal{Q} \cos(\mathcal{Q} h/2). \quad (\text{C.8})$$

Umschreiben von (C.8):

$$\frac{\cos(\mathcal{P} h/2) \sin(\mathcal{Q} h/2)}{\sin(\mathcal{P} h/2) \cos(\mathcal{Q} h/2)} = \frac{4\mu k^2 \mathcal{P} \mathcal{Q}}{[2\mu\mathcal{P}^2 + \lambda(k^2 + \mathcal{P}^2)] (k^2 - \mathcal{Q}^2)}. \quad (\text{C.9})$$

Substituieren, wobei die Abkürzung N nur für diesen Anhangsteil gelten soll:

$$N = [2\mu\mathcal{P}^2 + \lambda(k^2 + \mathcal{P}^2)] (k^2 - \mathcal{Q}^2). \quad (\text{C.10})$$

Es gelten die Beziehungen aus (2.155) sowie (2.169):

$$\frac{1}{c_L^2} = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \quad \text{und} \quad \frac{1}{c_T^2} = \frac{\rho}{\mu} \quad \text{sowie} \quad \mathcal{P}^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2 \quad \text{und} \quad \mathcal{Q}^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2. \quad (\text{C.11})$$

Aus (C.11) ergibt sich:

$$(\mathcal{P}^2 + k^2) (\lambda + 2\mu) = \omega^2 \rho \quad \text{sowie} \quad (\mathcal{Q}^2 + k^2) \mu = \omega^2 \rho. \quad (\text{C.12})$$

Aus (C.12) folgt:

$$(\mathcal{P}^2 + k^2) (\lambda + 2\mu) = (\mathcal{Q}^2 + k^2) \mu. \quad (\text{C.13})$$

Aus (C.13) folgt:

$$\lambda = \frac{\mathcal{Q}^2 + k^2}{\mathcal{P}^2 + k^2} \mu - 2\mu. \quad (\text{C.14})$$

Substituieren, wobei die Abkürzungen α und β nur für diesen Anhangsteil gelten sollen [10]:

$$\alpha = \beta - 2 \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\mathcal{Q}^2 + k^2}{\mathcal{P}^2 + k^2}. \quad (\text{C.15})$$

Aus (C.13) und (C.15) folgt:

$$\lambda = \alpha\mu. \quad (\text{C.16})$$

Einsetzen von (C.16) in (C.10):

$$N = 2\mu k^2 \mathcal{P}^2 + \alpha\mu k^4 + \alpha\mu k^2 \mathcal{P}^2 - 2\mu \mathcal{P}^2 \mathcal{Q}^2 - \alpha\mu k^2 \mathcal{Q}^2 - \alpha\mu \mathcal{P}^2 \mathcal{Q}^2. \quad (\text{C.17})$$

Sortieren von (C.17):

$$N = -\mu (-2k^2 \mathcal{P}^2 - \alpha k^4 - \alpha k^2 \mathcal{P}^2 + 2\mathcal{P}^2 \mathcal{Q}^2 + \alpha k^2 \mathcal{Q}^2 + \alpha \mathcal{P}^2 \mathcal{Q}^2). \quad (\text{C.18})$$

Einsetzen von (C.15) in (C.18):

$$N = -\mu [-2k^2 \mathcal{P}^2 - (\beta - 2) k^4 - (\beta - 2) k^2 \mathcal{P}^2 + 2\mathcal{P}^2 \mathcal{Q}^2 + (\beta - 2) k^2 \mathcal{Q}^2 + (\beta - 2) \mathcal{P}^2 \mathcal{Q}^2]. \quad (\text{C.19})$$

Auflösen von (C.19):

$$N = -\mu (-2k^2 \mathcal{P}^2 - \beta k^4 + 2k^4 - \beta k^2 \mathcal{P}^2 + 2k^2 \mathcal{P}^2 + 2\mathcal{P}^2 \mathcal{Q}^2 + \beta k^2 \mathcal{Q}^2 - 2k^2 \mathcal{Q}^2 + \beta \mathcal{P}^2 \mathcal{Q}^2 - 2\mathcal{P}^2 \mathcal{Q}^2). \quad (\text{C.20})$$

Zusammenfassen von (C.20):

$$N = -\mu [2k^4 - 2k^2 \mathcal{Q}^2 - \beta (k^4 + k^2 \mathcal{P}^2 - k^2 \mathcal{Q}^2 - \mathcal{P}^2 \mathcal{Q}^2)]. \quad (\text{C.21})$$

Einsetzen von (C.15) in (C.21) und Zusammenfassen:

$$N = -\mu \left[2k^4 - 2k^2 \mathcal{Q}^2 - \frac{\mathcal{Q}^2 + k^2}{\mathcal{P}^2 + k^2} (k^2 + \mathcal{P}^2) (k^2 - \mathcal{Q}^2) \right]. \quad (\text{C.22})$$

Vereinfachen von (C.22):

$$N = -\mu [2k^4 - 2k^2 \mathcal{Q}^2 - (k^2 + \mathcal{Q}^2) (k^2 - \mathcal{Q}^2)]. \quad (\text{C.23})$$

Vereinfachen von (C.23):

$$N = -\mu (k^2 - \mathcal{Q}^2)^2. \quad (\text{C.24})$$

Einsetzen von (C.24) in (C.10) und anschließend in (C.9) sowie Vereinfachen führt auf die Frequenzgleichung nach Rayleigh-Lamb für den symmetrischen Schwingmode:

$$\frac{\tan(\mathcal{Q} h/2)}{\tan(\mathcal{P} h/2)} = -\frac{4k^2 \mathcal{P} \mathcal{Q}}{(\mathcal{Q}^2 - k^2)^2}. \quad (\text{C.25})$$

D. Inverse Fouriertransformation

In diesem Anhangsteil wird die Fouriertransformation sowie ihre Rücktransformation (inverse Fouriertransformation) beschrieben. Ist die Zeitfunktion $f(t)$ bekannt, kann sie mithilfe von

$$f(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{D.1})$$

in den Frequenzbereich transformiert werden [39, 134, 151, 179]. Die Rücktransformation in den Zeitbereich erfolgt mit [39, 134, 151, 179]

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{f(\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (\text{D.2})$$

Je nach Definition sind in der Literatur auch andere Vorfaktoren für die Integrale zu finden. Die Kurzschreibweise dieser Transformationen erfolgt mit den Operatoren $\mathcal{F}\{\}$ bzw. $\mathcal{F}^{-1}\{\}$.

Die Transformation bzw. Rücktransformation einer analytischen Funktion erfordert deren absolute Integrierbarkeit [116, 134, 179]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(\omega)| d\omega < \infty \quad (\text{D.3})$$

Für eine Funktion im Frequenzbereich der Form

$$f(\omega) = e^{-k|\omega|} \quad \text{mit} \quad k = f(\omega) \quad (\text{D.4})$$

konvergiert das Integral aus (D.3) nicht, wenn für die Wellenzahl k eine der Beziehungen aus Abschnitt 2.3 verwendet wird (vgl. (2.49), (2.60), (2.81), (2.93), (2.104), (2.107), (2.140) oder (2.143)). Eine inverse Fouriertransformation für den komplexen Wellenansatz (2.34) oder für die g -Funktionen aus Abschnitt 6.3 bzw. Anhang E ist dadurch analytisch nicht möglich. Die Verwendung des Residuensatzes oder eine Näherung der e -Funktion als Reihe führen nach [116] ebenfalls auf keine Lösung.

Die inverse Fouriertransformation wird deshalb numerisch berechnet. Anstatt (D.2) gilt für diskrete Signale damit [116, 134, 148, 151, 171]

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X[m]\} = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{m=0}^{\mathcal{N}-1} X[m] e^{j2\pi \frac{mn}{\mathcal{N}}}. \quad (\text{D.5})$$

Die Folge im Zeitbereich wird mit $x[n]$ bzw. die der komplexwertigen Amplituden des Frequenzbereichs mit $X[m]$ bezeichnet. Für die Anzahl der Abtastwerte wird die Größe \mathcal{N} eingeführt. Die Abtastwerte werden im Zeitbereich mit n bzw. im Frequenzbereich mit m gekennzeichnet. Mithilfe der Routine `x = ifft(X, 'symmetric')` des Softwarepaktes MathWorks[®] MATLAB[®] Version 7.10.0.499 (R2010a) erfolgt die direkte Berechnung der inversen Fouriertransformation analog zu (D.5) [148]. Die Option `'symmetric'` bewirkt dabei, dass der Vektor \mathbf{X} auf eine konjugiert symmetrische Form gebracht wird [148].

E. Beispiel zum Wellenverfahren

In diesem Anhangsteil wird für das Beispiel des Kragbalkens aus Absatz 6.3.3 die Formulierung in Matrixschreibweise entsprechend dem Wellenverfahren hergeleitet. Der Balken besteht dabei aus zwei Elementen die in Abb. E.1 dargestellt sind. An der Koppelstelle $x_1 = l_1$ sowie $x_2 = 0$

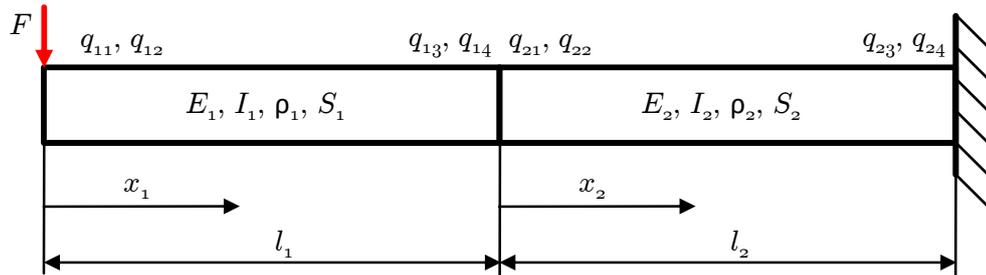


Abbildung E.1.: Modellierung eines Balkens auf Basis des Wellenverfahrens. Der Balken besteht aus zwei Segmenten mit einem freien Rand ($x_1 = 0$) und einer festen Einspannung ($x_2 = l_2$)

gelten die aus (6.41), (6.42), (6.43) und (6.44) bekannten Beziehungen

$$v_1(\omega, x_1 = L_1) = v_2(\omega, x_2 = 0), \quad (\text{E.1})$$

$$\Omega_1(\omega, x_1 = L_1) = \Omega_2(\omega, x_2 = 0), \quad (\text{E.2})$$

$$M_1(\omega, x_1 = L_1) = M_2(\omega, x_2 = 0), \quad (\text{E.3})$$

$$Q_1(\omega, x_1 = L_1) = Q_2(\omega, x_2 = 0). \quad (\text{E.4})$$

An der Stelle $x_1 = 0$ verschwinden aufgrund des freien Randes zunächst sämtliche Schnittgrößen. Allerdings muss die erregende Kraft $F(\omega)$ berücksichtigt werden. Diese wird als gegeben vorausgesetzt, z. B. durch eine Messung ermittelt, und ist ebenfalls im Frequenzbereich angegeben. Mit Verweis auf (6.45) und (6.46) lauten die Randbedingungen:

$$M_1(\omega, x_1 = 0) = 0, \quad (\text{E.5})$$

$$Q_1(\omega, x_1 = 0) = -F(\omega). \quad (\text{E.6})$$

Die feste Einspannung bei $x_2 = l_2$ ergibt nach (6.47) und (6.48) folgende Zusammenhänge:

$$v_2(\omega, x_2 = L_2) = 0, \quad (\text{E.7})$$

$$\Omega_2(\omega, x_2 = L_2) = 0. \quad (\text{E.8})$$

E. Beispiel zum Wellenverfahren

Die in Absatz 6.3.1.3 eingeführten Formulierungen für die Größen v_i , Ω_i , M_i und Q_i nach (6.33), (6.35), (6.36) und (6.37) sind:

$$v_i(\omega, x_i) = q_{i1}e^{-jk_i x} + q_{i2}e^{-k_i x_i} + q_{i3}e^{jk_i(x_i-l_i)} + q_{i4}e^{k_i(x_i-l_i)} \quad (\text{E.9})$$

$$\Omega_i(\omega, x_i) = - \left[-jk_i q_{i1}e^{-jk_i x_i} - k_i q_{i2}e^{-k_i x_i} + jk_i q_{i3}e^{jk_i(x_i-l_i)} + k_i q_{i4}e^{k_i(x_i-l_i)} \right] \quad (\text{E.10})$$

$$M_i(\omega, x_i) = - \frac{E_i I_i}{j\omega} \left[-k_i^2 q_{i1}e^{-jk_i x_i} + k_i^2 q_{i2}e^{-k_i x_i} - k_i^2 q_{i3}e^{jk_i(x_i-l_i)} + k_i^2 q_{i4}e^{k_i(x_i-l_i)} \right] \quad (\text{E.11})$$

$$Q_i(\omega, x_i) = - \frac{E_i I_i}{j\omega} \left[jk_i^3 q_{i1}e^{-jk_i x_i} - k_i^3 q_{i2}e^{-k_i x_i} - jk_i^3 q_{i3}e^{jk_i(x_i-l_i)} + k_i^3 q_{i4}e^{k_i(x_i-l_i)} \right] \quad (\text{E.12})$$

Die Wellenzahl k_i bezieht sich auf die Biegewelle (B-Welle) nach der Euler-Bernoulli-Theorie (2.81). Der Index i bezeichnet die verschiedenen Balkensegmente, wobei in diesem Beispiel $i = 1, 2$ gilt. Mit den unbekanntenen Quellen q_{i1} bis q_{i4} nach Abb. E.1 ergibt sich aus den Bedingungen (E.1) bis (E.8), den Ansatzfunktionen (E.9) bis (E.12) und der Biegesteifigkeit

$$B_i = E_i I_i \quad (\text{E.13})$$

das Gleichungssystem im Frequenzbereich:

$$\begin{bmatrix} e^{-jk_1 l_1} & e^{-k_1 l_1} & 1 & 1 \\ jk_1 e^{-jk_1 l_1} & k_1 e^{-k_1 l_1} & -jk_1 & -k_1 \\ B_1 k_1^2 e^{-jk_1 l_1} & -B_1 k_1^2 e^{-k_1 l_1} & B_1 k_1^2 & -B_1 k_1^2 \\ -jB_1 k_1^3 e^{-jk_1 l_1} & B_1 k_1^3 e^{-k_1 l_1} & jB_1 k_1^3 & -B_1 k_1^3 \\ B_1 k_1^2 & -B_1 k_1^2 & B_1 k_1^2 e^{-jk_1 l_1} & -B_1 k_1^2 e^{-k_1 l_1} \\ -jB_1 k_1^3 & B_1 k_1^3 & jB_1 k_1^3 e^{-jk_1 l_1} & -B_1 k_1^3 e^{-k_1 l_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -e^{-jk_2 l_2} & -e^{-k_2 l_2} \\ -jk_2 & -k_2 & jk_2 e^{-jk_2 l_2} & k_2 e^{-k_2 l_2} \\ -B_2 k_2^2 & B_2 k_2^2 & -B_2 k_2^2 e^{-jk_2 l_2} & B_2 k_2^2 e^{-k_2 l_2} \\ jB_2 k_2^3 & -B_2 k_2^3 & -jB_2 k_2^3 e^{-jk_2 l_2} & B_2 k_2^3 e^{-k_2 l_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-jk_2 l_2} & e^{-k_2 l_2} & 1 & 1 \\ je^{-jk_2 l_2} & e^{-k_2 l_2} & -j & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{13} \\ q_{14} \\ q_{21} \\ q_{22} \\ q_{23} \\ q_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -j\omega F(\omega) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.14})$$

Vereinfachen von (E.14):

$$\begin{bmatrix}
 e^{-jk_1 l_1} & e^{-k_1 l_1} & 1 & 1 \\
 j\alpha e^{-jk_1 l_1} & \alpha e^{-k_1 l_1} & -j\alpha & -\alpha \\
 B_1 \alpha^2 e^{-jk_1 l_1} & -B_1 \alpha^2 e^{-k_1 l_1} & B_1 \alpha^2 & -B_1 \alpha^2 \\
 -jB_1 \alpha^3 e^{-jk_1 l_1} & B_1 \alpha^3 e^{-k_1 l_1} & jB_1 \alpha^3 & -B_1 \alpha^3 \\
 1 & -1 & e^{-jk_1 l_1} & -e^{-k_1 l_1} \\
 -j & 1 & je^{-jk_1 l_1} & -e^{-k_1 l_1} \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 -1 & -1 & -e^{-jk_2 l_2} & -e^{-k_2 l_2} \\
 -j & -1 & je^{-jk_2 l_2} & e^{-k_2 l_2} \\
 -B_2 & B_2 & -B_2 e^{-jk_2 l_2} & B_2 e^{-k_2 l_2} \\
 jB_2 & -B_2 & -jB_2 e^{-jk_2 l_2} & B_2 e^{-k_1 l_2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 e^{-jk_2 l_2} & e^{-k_2 l_2} & 1 & 1 \\
 je^{-jk_2 l_2} & e^{-k_2 l_2} & -j & -1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 q_{11} \\
 q_{12} \\
 q_{13} \\
 q_{14} \\
 q_{21} \\
 q_{22} \\
 q_{23} \\
 q_{24}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -\beta F(\omega) \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.15})$$

Einzeln betrachtet sind die Wellenzahlen jeweils Funktionen in Abhängigkeit der Frequenz. Werden sie aufeinander bezogen, verschwindet diese Abhängigkeit und für das Verhältnis wird die Abkürzung

$$\alpha = \frac{k_1}{k_2} = \sqrt[4]{\frac{\rho_1 A_1 E_2 I_2}{\rho_2 A_2 E_1 I_1}} \quad (\text{E.16})$$

eingeführt. Eine weitere Substitution ist mit

$$\beta = \frac{j\omega}{B_1 k_1^3} \quad (\text{E.17})$$

gegeben. Diese Definitionen α und β sollen nur in diesem Anhangskapitel E gelten. Die g_k -Funktionen im Frequenzbereich sind:

$$g_1(\omega) = e^{-jk_1 l_1}, \quad g_2(\omega) = e^{-k_1 l_1}, \quad g_3(\omega) = e^{-jk_2 l_2} \quad \text{und} \quad g_4(\omega) = e^{-k_2 l_2}. \quad (\text{E.18})$$

Mithilfe der inversen Fouriertransformation (s. Anhang D) ergeben sich die g_k -Funktionen im Zeitbereich. Das Gleichungssystem aus (E.15) wird in den Zeitbereich anhand des in Absatz 6.3.2 dargestellten Verfahren überführt. Nach [85, 134] entspricht eine Multiplikation im Frequenzbereich einer Faltung im Zeitbereich. Für diskrete Signale kann die Faltung nach (5.17) mit

$$q_{ij}(n\Delta t) * g_k(n\Delta t) = q_{ij}(n\Delta t) g_k(0) + \sum_{k=0}^{n-1} q_{ij}(k\Delta t) g_k((n-k)\Delta t) \quad (\text{E.19})$$

berechnet werden. Das Gleichungssystem (E.15) wird auf die Form

$$\mathbf{MV}(n\Delta t) = \mathbf{R}(n\Delta t) \quad (\text{E.20})$$

gebracht. Für die Matrix gilt damit

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} g_1(0) & g_2(0) & 1 & 1 \\ j\alpha g_1(0) & \alpha g_2(0) & -j\alpha & -\alpha \\ B_1\alpha^2 g_1(0) & -B_1\alpha^2 g_2(0) & B_1\alpha^2 & -B_1\alpha^2 \\ -jB_1\alpha^3 g_1(0) & B_1\alpha^3 g_2(0) & jB_1\alpha^3 & -B_1\alpha^3 \\ 1 & -1 & g_1(0) & -g_2(0) \\ -j & 1 & jg_1(0) & -g_2(0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -g_3(0) & -g_4(0) \\ -j & -1 & jg_3(0) & g_4(0) \\ -B_2 & B_2 & -B_2g_3(0) & B_2g_4(0) \\ jB_2 & -B_2 & -jB_2g_3(0) & B_2g_4(0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_3(0) & g_4(0) & 1 & 1 \\ jg_3(0) & g_4(0) & -j & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.21})$$

Die Lösungen der Quellen zum aktuellen Zeitschritt ($n\Delta t$) beinhaltet der Vektor

$$\mathbf{V}^T(n\Delta t) = [q_{11}(n\Delta t) \quad q_{12}(n\Delta t) \quad q_{13}(n\Delta t) \quad q_{14}(n\Delta t) \\ q_{21}(n\Delta t) \quad q_{22}(n\Delta t) \quad q_{23}(n\Delta t) \quad q_{24}(n\Delta t)]. \quad (\text{E.22})$$

Die Summe, die alle Multiplikationspaare der Faltung bis auf $q_{ij}(n\Delta t)g_k(0)$ enthält wird mit

$$\mathcal{G}_{ijk}(n\Delta t) = \sum_{k=0}^{n-1} q_{ij}(k\Delta t) g_k((n-k)\Delta t) \quad (\text{E.23})$$

abgekürzt. Da diese Summen nicht vom Wert des aktuellen Zeitschritts abhängig sind, können sie im Vektor

$$\mathbf{R}(n\Delta t) = \begin{bmatrix} -\mathcal{G}_{111}(n\Delta t) - \mathcal{G}_{122}(n\Delta t) + \mathcal{G}_{233}(n\Delta t) + \mathcal{G}_{244}(n\Delta t) \\ -j\alpha\mathcal{G}_{111}(n\Delta t) - \alpha\mathcal{G}_{122}(n\Delta t) - j\mathcal{G}_{233}(n\Delta t) - \mathcal{G}_{244}(n\Delta t) \\ -B_1\alpha^2\mathcal{G}_{111}(n\Delta t) + B_1\alpha^2\mathcal{G}_{122}(n\Delta t) + B_2\mathcal{G}_{233}(n\Delta t) - B_2\mathcal{G}_{244}(n\Delta t) \\ jB_1\alpha^3\mathcal{G}_{111}(n\Delta t) - B_1\alpha^3\mathcal{G}_{122}(n\Delta t) + jB_2\mathcal{G}_{233}(n\Delta t) - B_2\mathcal{G}_{244}(n\Delta t) \\ -\mathcal{G}_{131}(n\Delta t) + \mathcal{G}_{142}(n\Delta t) \\ F(n\Delta t) - j\mathcal{G}_{131}(n\Delta t) + \mathcal{G}_{142}(n\Delta t) \\ -\mathcal{G}_{213}(n\Delta t) - \mathcal{G}_{224}(n\Delta t) \\ j\mathcal{G}_{213}(n\Delta t) - \mathcal{G}_{224}(n\Delta t) \end{bmatrix} \quad (\text{E.24})$$

zusammengefasst werden. Das Gleichungssystem (E.20) muss für jeden Zeitschritt gelöst werden. Um den Vektor $\mathbf{R}(n\Delta t)$ zu bestimmen, sind zunächst die Summen $\mathcal{G}_{ijk}(n\Delta t)$ zu berechnen. Die Kraft $F(n\Delta t)$ ist dabei die inverse Fouriertransformation (s. Anhang D) in diskreter Form aus

$$F(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ \beta F(\omega) \}. \quad (\text{E.25})$$

Wird die Matrix \mathbf{M} vorab invertiert, beschränkt sich die Operation zur Ermittlung der Quellwerte auf

$$\mathbf{V}(n\Delta t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{R}(n\Delta t). \quad (\text{E.26})$$

Die Implementierung des Wellenverfahrens erfolgt mithilfe der numerischen Simulationsumgebung MathWorks[®] MATLAB[®] Version 7.10.0.499 (R2010a). Dieses Softwarepaket bietet mit den Funktionen $\mathbf{V} = \text{inv}(\mathbf{M}) * \mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{V} = \mathbf{M} \setminus \mathbf{R}$ zwei Möglichkeiten¹ lineare Gleichungssysteme in Matrizenform zu lösen. Damit ergeben sich zwei sinnvolle Implementierungsvarianten die in den Listings E.1 und E.2 ersichtlich sind.

Listing E.1: Implementierung der Lösungsroutine, Variante 1

```

1  % Matrix M aufstellen
2  ...
3  % Matrix invertieren
4  Minv = inv(M);
5  for n = 1:length(t)
6      % Faltungssummen G_ijk berechnen
7      ...
8      % Vektor R aufstellen
9      ...
10     % Gleichungssystem lösen
11     V = Minv * R;
12 end

```

Listing E.2: Implementierung der Lösungsroutine, Variante 2

```

1  % Matrix M aufstellen
2  ...
3  for n = 1:length(t)
4      % Faltungssummen G_ijk berechnen
5      ...
6      % Vektor R aufstellen
7      ...
8      % Gleichungssystem lösen
9      V = M \ R;
10 end

```

In Tabelle E.1 sind in Abhängigkeit der maximalen Simulationszeit t_{\max} die notwendigen Rechenzeiten bei einer Abtastrate von 204800 Hz angegeben. Hinsichtlich der notwendigen Rechenzeit ergibt sich kein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Implementierungen. Die überproportional steigende Rechenzeit bei längerer Simulationsdauer ergibt sich aus den länger werdenden Faltungssummen.

Tabelle E.1.: Rechenzeiten des Wellenverfahrens für das Beispiel aus Abb. E.1. Verwendetes System: DELL[®] PRECISION[™]T3500, ein Intel[®] Xeon[®] W3520 (2,67 GHz), 6,0 GB Arbeitsspeicher und Microsoft[®] Windows[®] 7 Enterprise 64 Bit Betriebssystem.

Implementierung	Simulationszeit* t_{\max}				
	10 ms	20 ms	30 ms	40 ms	50 ms
Variante 1	1.99 s	7.12 s	15.76 s	27.18 s	41.99 s
Variante 2	2.02 s	7.23 s	15.69 s	27.41 s	42.32 s

* Die Abtastrate beträgt 204800 Hz.

¹Hinsichtlich Rechenzeit und numerischer Genauigkeit wird der Operator \setminus empfohlen [148].

F. Einfluss der Zielposition beim Strahlenverfahren

In diesem Anhangteil sind die Vergleiche zwischen der Messung an der Originalposition und der Simulation bei Variation der Zielpositionierung dargestellt. Die Signale beziehen sich auf das Tunnelmodell aus Abschnitt 7.2. Die Positionierungen sind aus Abb. 7.6 zu entnehmen. Die virtuellen Sensorpositionen werden dabei auf einem Kreis mit dem Radius r um das exakte Ziel platziert. Die Unterschiede sind für $r = 15$ mm in Abb. F.1, für $r = 20$ mm in Abb. F.2 und für $r = 30$ mm in Abb. F.3 dargestellt.

Aus Abschnitt 7.2 sind die Vergleiche für $r = 10$ mm sowie die Diskussion der Ergebnisse bekannt.

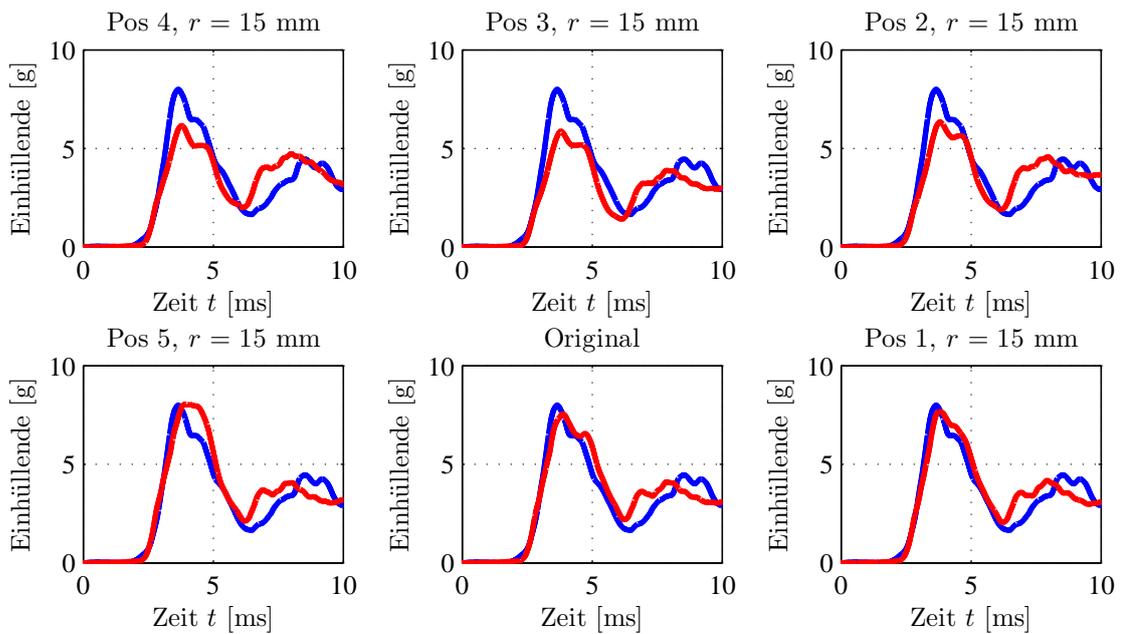


Abbildung F.1.: Vergleich zwischen Messung und Simulation für Kreisradius $r = 15$ mm
(Legende: — Messung Originalpositon, — Simulation Variation)

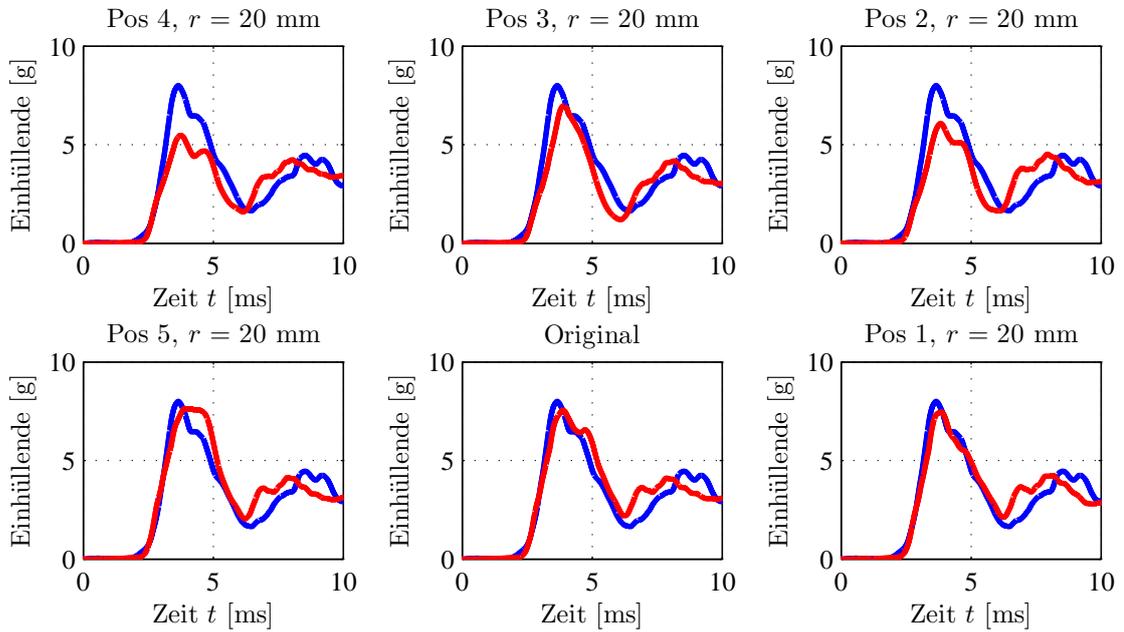


Abbildung F.2.: Vergleich zwischen Messung und Simulation für Kreisradius $r = 20$ mm
(Legende: — Messung Originalpositon, — Simulation Variation)

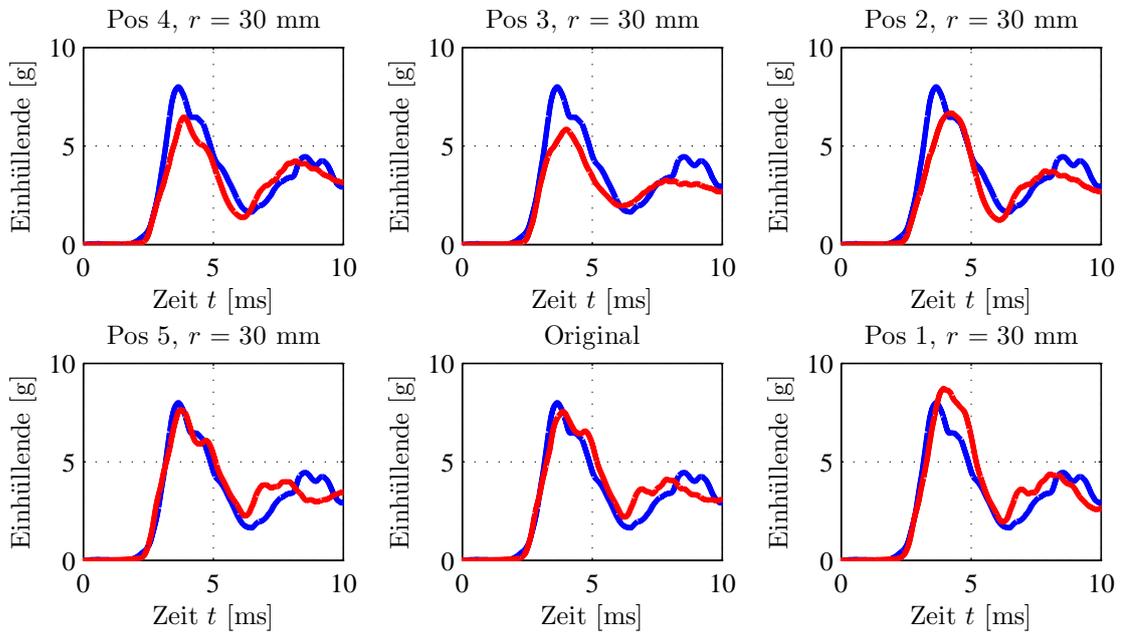


Abbildung F.3.: Vergleich zwischen Messung und Simulation für Kreisradius $r = 30$ mm
(Legende: — Messung Originalpositon, — Simulation Variation)

Abbildungsverzeichnis

1.1. Anregung und Ausbreitung der Körperschallschwingung in der Fahrzeugkarosserie	16
1.2. Körperschallentstehung und -ausbreitung in der Fahrzeugkarosserie	17
2.1. Schwinggrößen am Messaufnehmer und Ausbreitungsgeschwindigkeit	22
2.2. Bezugssysteme	24
2.3. Normal- und Schubspannung in einem beliebigen Schnitt	24
2.4. Verzerrungen in der Ebene	25
2.5. Relevante Wellenarten in einem Festkörper	28
2.6. Räumliche Ausdehnung und Schnittgrößen eines Stabs	31
2.7. Räumliche Ausdehnung und Schnittgrößen einer Scheibe	33
2.8. Balkenverformung	35
2.9. Schnittgrößen an einem infinitesimal kleinen Balkensegment	35
2.10. Deformationen am infinitesimal kleinen Element	38
2.11. Dispersionsdiagramm für Balkenmodelle	45
2.12. Plattenverformung	46
2.13. Schnittgrößen an einem infinitesimal kleinen Plattensegment	47
2.14. Schwingformen des symmetrischen und antisymmetrischen Modes	49
2.15. Dispersionsdiagramm für Plattenmodelle	53
3.1. Anregung eines unendlich langen Balkens	54
3.2. Darstellung des Dispersionseffektes	55
3.3. Reflexion und Transmission von Wellen	56
3.4. Änderung der Wellenform bei dispersiver Wellenausbreitung und Reflexion . . .	57
3.5. Reflexion und Transmission bei schiefem Einfall	58
3.6. Reflexions- und Transmissionsfaktor einer rechtwinkligen Plattenverbindung . .	59
3.7. Wellenzahlen einer gedämpften B-Wellenausbreitung auf einem Stahlbalken . .	60
3.8. Absoluter Fehler einer gedämpften B-Wellenausbreitung auf einem Stahlbalken	61
3.9. Relativer Fehler einer gedämpften B-Wellenausbreitung auf einem Stahlbalken .	61
3.10. Superposition zweier Wellen an verschiedenen Zeiten	62
3.11. Wellenausbreitung auf einer Platte durch punktförmige Anregung	62
3.12. Ausbreitung einer Welle in den Schattenraum	64
3.13. Prinzip von Fresnel und Huygens	65
3.14. Richtungsfaktor	66
4.1. Relevante Struktur einer Fahrzeugkarosserie	67
4.2. Schwingformen des symmetrischen und antisymmetrischen Modes	69
4.3. Verschiebungen der L- und B-Welle im Plattenquerschnitt	69
4.4. Differenzmessung an einer einfachen Platte	70
4.5. Schwingformen des symmetrischen und antisymmetrischen Modes	70
4.6. Verschiebungen gegenläufig angebrachter Sensoren	71

4.7.	Dispersionsanalyse gemessener Signale	72
4.8.	Fehlervergleich der Phasengeschwindigkeit für Balken- und Plattenmodelle	73
4.9.	Vergleich der Impulsantwort für Balkenmodelle	74
4.10.	Punktförmig angeregte B-Welle auf einer Platte	75
4.11.	Exakte Lösung und Näherungen der Ausbreitungsfunktion	76
4.12.	Verschiedene Verbindungsarten zwischen zwei Segmenten	77
4.13.	Frequenzverlauf der Reflexions- und Transmissionsfaktoren	78
4.14.	Reflexions- und Transmissionsfaktoren runder Balkenverbindungen	78
4.15.	FEM-Modell zur Bestimmung der Reflexions- und Transmissionsfaktoren	79
4.16.	Auswertung der FEM-Analyse zur Ermittlung der Faktoren	80
4.17.	Reflexions- und Transmissionsfaktoren mithilfe FEM-Analyse bestimmt	81
4.18.	Reflexions- und Transmissionsfaktoren mithilfe FEM-Analyse bestimmt	81
5.1.	Diskretisierung der Struktur bei FEM und BEM	86
5.2.	Darstellung verschiedener Transmission-Lines	88
6.1.	Einführung von Spiegelquellen und Beschreibung mithilfe von Strahlen	92
6.2.	Diskretes Aussenden von Strahlen und Ermittlung des Strahlenverlaufs	93
6.3.	Definition des Zielgebietes	94
6.4.	Aufspaltung der Strahlen in einen reflektierten und einen transmittierten Strahl	95
6.5.	Berechnung der Strahlverfolgung	95
6.6.	Übertragungssystem der Ausbreitungsmechanismen	99
6.7.	Übertragungssystem der Randmechanismen	100
6.8.	Unterteilung der Struktur und Netzerstellung	101
6.9.	Mögliche Pfadverbindungen von der Quelle zum Ziel	102
6.10.	Modellierung des Beugungseffekts beim Strahlen- und Pfadverfahren	104
6.11.	Wellenansatz und Balkenelement für die Biegewelle	105
6.12.	Kopplung zweier Balkenelemente	108
6.13.	Messung zur Validierung des Wellenverfahrens	109
6.14.	Vergleich von Signalen aus Messung und Simulation.	110
6.15.	Wellenausbreitung von der Anregestelle zu den Randpunkten	111
6.16.	Randpunkte wirken als Quellen von Elementarwellen	111
6.17.	Struktur zweidimensionaler Elemente und Vernetzung gesamter Strukturen	112
6.18.	Einfluss der Vernetzung auf die Amplitudenabnahme	113
6.19.	Modellierung des Beugungseffektes beim Strahlen- und Wellenverfahren	113
6.20.	Verbindungsängen eines quadratischen Elements	114
6.21.	Ermittlung der Verbindungsanzahl verschiedener Vernetzungsvarianten	117
7.1.	Abwicklung einfacher Geometrien für die Strahlverfolgung in der Ebene	120
7.2.	3-D-2-D-Transformation für komplexe dünnwandige Strukturen	121
7.3.	Abmessungen Tunnelmodell	122
7.4.	Einfluss der Winkeldiskretisierung auf die Anzahl der Strahlen	123
7.5.	Einfluss der Winkeldiskretisierung auf die Strahlängenverteilung	123
7.6.	Variation der Zielposition für das Tunnelmodell	124
7.7.	Vergleich zwischen Messung und Simulation bei Variation der Zielposition	125
7.8.	Optimierung der Strahlverfolgung	126
7.9.	Rechenzeiten der Strahlverfolgung bei unterschiedlichen Programmierungen	126
7.10.	Simulationsprozess	127

7.11. Gesamtfahrzeugmodell zur Simulation der Körperschallausbreitung	128
7.12. Parameterstudie für das Gesamtfahrzeugmodell	129
7.13. Exemplarischer Strahlverlauf durch die Gesamtfahrzeugstruktur	129
7.14. Gemessener Kraftverlauf und Eingangssignal	130
7.15. Vergleich der Rohsignale aus Messung und Simulation	130
7.16. Vergleich der Signale im Frequenzbereich aus Messung und Simulation	131
7.17. Vergleich der Einhüllenden aus Messung und Simulation	131
8.1. Generische Simulation	138
8.2. Rückrechnung	138
B.1. Massenträgheitsmoment eines infinitesimal kleinen Balkensegmentes	146
B.2. Kräfte und Verschiebungen am infinitesimal kleinen Massenpunkt	149
B.3. Vergleich der Wellenzahlen	153
B.4. Absoluter Fehler bezogen auf die Bresse-Timoshenko-Theorie	154
B.5. Relativer Fehler bezogen auf die Bresse-Timoshenko-Theorie	154
E.1. Modellierung eines Balkens auf Basis des Wellenverfahrens	158
F.1. Vergleich zwischen Messung und Simulation bei Variation der Zielposition	163
F.2. Vergleich zwischen Messung und Simulation bei Variation der Zielposition	164
F.3. Vergleich zwischen Messung und Simulation bei Variation der Zielposition	164

Tabellenverzeichnis

2.1. Zusammenfassung der Balkentheorien	42
3.1. Materialwerte wichtiger Werkstoffe	59
4.1. Verfügbare Tragwerksmodelle für die Biegewelle	73
4.2. Wellenzahlen der Biegewelle auf unterschiedlichen Platten	75
5.1. Lagerungsarten einer Platte	84
5.2. Gegenüberstellung bekannter Verfahren	90
6.1. Biegewellenlängen auf unterschiedlichen Platten	91
6.2. Identifikatoren einzelner Strahlen	94
6.3. Amplitudenverhältnis bei mehrfacher Reflexion bzw. Transmission	98
6.4. Randbedingungen an einem Balken	108
6.5. Gegenüberstellung der Berechnungsverfahren	118
E.1. Rechenzeiten des Wellenverfahrens	162

Literaturverzeichnis

- [1] ACHENBACH, J.D. ; LAUWERIER, H. A. (Hrsg.) ; KOITER, W. T. (Hrsg.): *Wave Propagation in Elastic Solids*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam u. a., 1976
- [2] ACHENBACH, J.D.: *Ray Methods for Waves in Elastic Solids*. Pitman Advanced Publishing Program, 1982
- [3] AGRICOLA, I. ; FRIEDRICH, T.: *Vektoranalysis*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2010
- [4] ALT, M.: *Verbesserung des Entwicklungsprozesses für die Steuerung von Rückhaltesystemen*, Technische Universität Braunschweig, Diss., 2005
- [5] ALTENBACH, H.: *Persönliche Mitteilung vom 11.10.2011*
- [6] ALTENBACH, H.: Analysis of Homogeneous and Non-homogeneous Plates. In: BORST, R. de (Hrsg.) ; SADOWSKI, T. (Hrsg.): *Lecture Notes on Composite Materials - Current Topics and Achievements*, Springer, Berlin u.a., 2008, S. 1 – 36
- [7] ALTENBACH, H. ; ALTENBACH, J. ; NAUMENKO, K.: *Ebene Flächentragwerke*. Springer, Berlin u. a., 2002
- [8] ALTENBACH, H. ; NAUMENKO, K.: Shear Correction Factors in Creep-Damage Analysis of Beams, Plates and Shells. In: *Japan Society of Mechanical Engineers International Journal, Series A* 45 (2002), S. 77 – 83
- [9] ALTENBACH, J. ; ALTENBACH, H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1994
- [10] APPEL, M.: *Persönliche Mitteilung vom 06.06.2011*
- [11] ARINIR, P.Z.D.: *Java: Nebenläufige & verteilte Programmierung*. 2. Auflage. W3I GmbH, Herdeck u. a., 2010
- [12] AYDOGDU, M.: Comparison of Various Shear Deformation Theories for Bending, Buckling, and Vibration of Rectangular Symmetric Cross-ply Plate with Simply Supported Edges. In: *Journal of Composite Materials* 40 (2006), S. 2143 – 2155
- [13] BAŞAR, Y. ; KRÄTZIG, W.B.: *Mechanik der Flächentragwerke*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1985
- [14] BATHE, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, Berlin u. a., 2007
- [15] BAUER, H.: *Kraftfahrtechnisches Taschenbuch*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2003
- [16] BECCU, R. ; WU, C.M. ; LUNDBERG, B.: Reflection and Transmission of the Energy of Transient Elastic Extensional Waves in a Bent Bar. In: *Journal of Sound and Vibration* 191 (1996), S. 261 – 272

- [17] BENDEL, G. ; BAUN, C. ; KUNZE, M. ; STUCKY, K.-U.: *Masterkurs Parallele und Verteilte Systeme*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008
- [18] BERGMANN, L.: *Der Ultraschall*. S. Hirzel Verlag, 1954
- [19] BETTEN, J.: *Kontinuumsmechanik*. 2. Auflage. Springer, Berlin u. a., 2001
- [20] BORN, M. ; WOLF, E.: *Principles of Optics*. 6. Auflage. Cambridge University Press, 1998
- [21] BRANDMEIER, T. ; LAUERER, C. ; SPANNAUS, P. ; FESER, M.: Crashererkennung durch Körperschallmessung. In: *Haus der Technik - Sensoren im Automobil*, 2006, S. 187 – 203
- [22] BRESSE, J.A.C.: *Résistance des Matériaux et Stabilité des Constructions*. 2. Auflage. Gauthier-Villars, Paris, 1866
- [23] CALOMFIRESCU, M. ; HERRMANN, A.S. ; KÖNIG, C. ; MÜLLER, J.: Numerische und experimentelle Untersuchung der Wellenausbreitung in Faserverbundstrukturen. In: *MP Materialprüfung; Carl Hanser Verlag, München* 48 (2006), S. 2 – 10
- [24] CORMEN, T.H. ; LEISERSON, C.E. ; RIVEST, R.L. ; STEIN, C.: *Algorithmen - Eine Einführung*. Oldenbourg, München u. a., 2004
- [25] COURANT, R. ; HILBERT, D. ; LAX, P.D.: *Methoden der mathematischen Physik*. Springer-Verlag, Berlin u. a., 1993
- [26] CREMER, L. ; HECKL, M.: *Körperschall*. 2. Auflage. Springer, Berlin u. a., 1996
- [27] CZICHOS, H. ; HENNECKE, M.: *Hütte - Das Ingenieurwissen*. 33. Auflage. Springer, Berlin u. a., 2008
- [28] DOEGE, E. ; BEHRENS, B.-A.: *Handbuch Umformtechnik*. 2. Auflage. Springer, Berlin u. a., 2010
- [29] DONG, S.B. ; ALPDOGAN, C. ; TACIROGLU, E.: Much Ado about Shear Correction Factors in Timoshenko Beam Theory. In: *International Journal of Solids and Structures* 47 (2010), S. 1651 – 1665
- [30] DOYLE, J.F.: *Wave Propagation in Structures*. 2. Auflage. Springer, Berlin u. a., 1997
- [31] DRESIG, H. ; HOLZWEISSIG, F.: *Maschinendynamik*. Springer, Berlin u. a., 2009
- [32] ENDE, S. von: *Transient angeregte LAMB-Wellen in elastischen und viskoelastischen Platten*, Helmut-Schmidt-Universität / Universität der Bundeswehr Hamburg, Diss., 2008
- [33] ERTLMEIER, R.: Expanding Design Process of the Airbag Control Unit ACU - Connection of Active and Passive Safety by Using Vehicles Dynamics for Rollover and Side Crash Detection. In: *Intelligent Solutions in Embedded Systems*. Regensburg, 2008
- [34] EVANS, K.E.: Auxetic Polymers: A New Range of Material. In: *Endeavour* 15 (1991), S. 170 – 174

- [35] FAHNLIN, J.B. ; KOOPMANN, G.H.: A Numerical Solution for the General Radiation Problem Based on the Combined Methods of Superposition and Singular-Value Decomposition. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 90 (1991), S. 2433 – 2428
- [36] FAHY, F. ; GARDONIO, P.: *Sound and Structural Vibration*. 2. Auflage. Elsevier, Amsterdam u.a., 2007
- [37] FESER, M. ; GEIGENFEIND, M. ; NIESSE, M. ; ANDRES, T. ; GRÖNING, T. ; KOHLHUBER, M. ; MATLOK, D. ; KÖSTNER, J. ; BRANDMEIER, T. ; SPANNAUS, P.: *Vorrichtung zur Erzeugung einer Körperschallschwingung im Falle eines Zusammenstoßes eines Kollisionsobjekts mit einem Fahrzeug*. Internationales Patent, veröffentlicht unter WO 2011/035750 A1, 2011
- [38] FISCHER, U. ; HEINZLER, M. ; KILGUS, R. ; NÄHER, F. ; PAETZOLD, H. ; RÖHRER, W. ; SCHILLING, K. ; STEPHAN, A.: *Tabellenbuch Metall*. 41. Auflage. Europa-Lehrmittel, Haan-Gruiten, 1999
- [39] FÖLLINGER, O.: *Laplace-, Fourier- und z-Transformation*. Hüthig Verlag, Heidelberg, 2000
- [40] FORTUNE, S.: A Beam-Tracing Algorithm for Prediction of Indoor Radio Propagation. In: LIN, M. (Hrsg.) ; MANOCHA, D. (Hrsg.): *Applied Computational Geometry Towards Geometric Engineering* Bd. 1148. Springer, Berlin u. a., 1996, S. 157–166
- [41] FUNKHOUSER, T. ; CARLBOM, I. ; ELKO, G. ; PINGALI, G. ; SONDHI, M. ; WEST, J.: A Beam Tracing Approach to Acoustic Modeling for Interactive Virtual Environments. In: *Computer Graphics Proceedings*, 1998
- [42] GAUL, L. ; KÖGL, M. ; WAGNER, M.: *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists*. Springer, Berlin u. a., 2003
- [43] GHUGAL, Y.M. ; ATTESHAMUDDIN, S.S.: A Static Flexure of Thick Isotropic Plates Using Trigonometric Shear Deformation Theory. In: *Journal of Solid Mechanics* 2 (2010), S. 79 – 90
- [44] GIANCOLI, D.C.: *Physik*. Bd. 3. Pearson Studium, München, 2006
- [45] GIRKMANN, K.: *Flächentragwerke*. Springer, Wien u. a., 1986
- [46] GRAFF, K.F.: *Wave Motion in Elastic Solids*. Clarendon Press, Oxford, 1975
- [47] GROCHLA, J. ; KÖPPE, H. ; GABBERT, U.: Lösung komplexer dynamischer Aufgabenstellungen mit expliziten Verfahren auf Parallelrechnern. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 2 (2003), S. 232 – 233
- [48] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHÖDER, J. ; WALL, W.A.: *Technische Mechanik 2: Elastostatik*. Springer, Berlin u. a., 2009
- [49] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHÖDER, J. ; WALL, W.A.: *Technische Mechanik 3: Kinetik*. Springer, Berlin u. a., 2010

- [50] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHRÖDER, J. ; WALL, W.: *Technische Mechanik 1: Statik*. 10. Auflage. Springer, Berlin u. a., 2009
- [51] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; WRIGGERS, P.: *Technische Mechanik 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. Springer, Berlin u. a., 2009
- [52] GROTE, K.-H. ; FELDHUSEN, J.: *Dubbel - Taschenbuch für den Maschinenbau*. 22. Auflage. Springer, Berlin u. a., 2007
- [53] GROTH, C. ; MÜLLER, G.: *FEM für Praktiker: Grundlagen*. Expert-Verlag, Renningen, 2007
- [54] GRUBER, K. ; REICHENEDER, J. ; BAUER, S. ; KEUL, M.: CAE-Prozess- und Datenmanagement bei Audi. In: *NAFEMS 3* (2009), Nr. 14, S. 21 – 32
- [55] GRUTTMANN, F ; WAGNER, W: Shear Correction Factors in Timoshenko's Beam Theory for Arbitrary Shaped Cross-Sections. In: *Computational Mechanics 27* (2001), S. 199 – 207
- [56] GÖRZ, G.: *Handbuch der künstlichen Intelligenz*. Oldenbourg, München, 2003
- [57] GUTIÉRREZ, J.A. ; MORENO, P. ; NAREDO, L.J. ; GUTIÉRREZ, J.C.: Fast Transients Analysis of Nonuniform Transmission Lines through the Method of Characteristics. In: *International Journal of Electrical Power & Energy Systems 24* (2002), S. 781 – 788
- [58] HAGEDORN, P.: *Technische Schwingungslehre Band 2: Lineare Schwingungen kontinuierlicher Systeme*. Springer, Berlin u. a., 1989
- [59] HAHN, H.G.: *Elastizitätstheorie*. Teubner, Stuttgart, 1985
- [60] HALLIDAY, D. ; RESNICK, R.: *Physik*. "de" Gruyter, New York, 1994
- [61] HALLIDAY, D. ; RESNICK, R. ; WALKER, J. ; KOCH, Stephan W. (Hrsg.): *Physik*. WILEY-VCH GmbH & KGaA, Weinheim, 2003
- [62] HARGREAVES, J.A. ; COX, T.: A Transient Boundary Element Method for Acoustic Scattering from Mixed Regular and Thin Rigid Bodies. In: *Acta Acustica united with Acustica 95* (2009), S. 678 – 689
- [63] HAUPT, H.: *Ein auf der Schallemissionsanalyse basierendes Verfahren zur Risserkennung in Umformprozessen*, Universität Paderborn, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik, Diss., 2003
- [64] HECHT, E. ; SCHLEITZER, Anna (Hrsg.): *Optik*. Oldenbourg Verlag, München u. a., 2001
- [65] HEIM, R.: *FEM mit NASTRAN: Einstieg und Umsetzung mit Lernprogramm UNA*. Carl Hanser Verlag, München u. a., 2005
- [66] HEYLIGER, P.R. ; REDDY, J.N.: A Higher Order Beam Finite Element For Bending and Vibration Problems. In: *Journal of Sound and Vibration 126* (1988), S. 309 – 326
- [67] HOFFMANN, D.W.: *Theoretische Informatik*. Carl Hanser Verlag, München, 2009

- [68] HOFFMANN, S. ; LIENHART, S.: *OpenMP: Eine Einführung in die parallele Programmierung mit C/C++*. Springer, Berlin u. a., 2009
- [69] HOFMANN, T.J.: *Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie*, Universität Stuttgart, Institut für Bruchstatik, Diss., 1992
- [70] HORNIKX, M. ; FROSSÉN, J.: The 2.5-Dimensional Equivalent Sources Method for Directly Exposed and Shielded Urban Canyons. In: *Acoustical Society of America* 122 (2007), S. 2532 – 2541
- [71] HUCKLE, T. ; SCHNEIDER, S.: *Numerische Methoden*. Springer, Berlin u. a., 2006
- [72] HUGHES, T.J.R.: *The Finite Element Method*. Dover Publications, Inc., Mineola u. a., 2000
- [73] HUTCHINSON, J.R.: Shear Coefficients for Timoshenko Beam Theory. In: *Journal of Applied Mechanics* 68 (2001), S. 87 – 92
- [74] JENSEN, J.J.: On the Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory. In: *Journal of Sound and Vibration* 87 (1983), S. 621 – 635
- [75] JUN, Li ; XIAOBIN, L. ; HONGXING, H.: Free Vibration Analysis of Third-Order Shear Deformable Composite Beams Using Dynamic Stiffness Method. In: *Archive of Applied Mechanics* 79 (2008), S. 1083 – 1098
- [76] KAEHLERT, H. ; ADLER, M.: *Vision Zero - Null Verkehrstote*. Verkehrsclub Deutschland (VCD) e.V., Bonn, 2004
- [77] KAGAWA, Y. ; FUJITANI, T. ; FUJITA, Y. ; CHAI, L. ; WAKATSUKI, N. ; TSUCHIYA, T.: Discrete Huygens' Modelling Approach to Wave Propagations in a Homogeneous Elastic Field. In: *Journal of Sound and Vibration* 255 (2002), S. 323 – 335
- [78] KAGAWA, Y. ; TSUCHIYA, T. ; FUJII, B. ; FOJIOKA, K.: Discrete Huygens' Model Approach to Sound Wave Propagation. In: *Journal of Sound and Vibration* 218 (1998), S. 419 – 444
- [79] KAGAWA, Y. ; TSUCHIYA, T. ; HARA, T. ; TSUJI, T.: Discrete Huygens' Modelling Simulation of Sound Wave Propagation in Velocity Varying Environments. In: *Journal of Sound and Vibration* 246 (2001), S. 419 – 439
- [80] KAISER, R.: *C++ mit Microsoft Visual C++: Eine Einführung in den ANSI/ISO C++ Standard und in die objektorientierte Windows-Programmierung*. Springer, Berlin u. a., 2008
- [81] KATSIKADELIS, J.T.: A Boundary Element Solution to the Vibration Problem of Plates. In: *Journal of Sound and Vibration* 141 (1990), S. 313 – 322
- [82] KATZENSCHWANZ, C.: Strukturoptimierung in der industriellen Praxis. In: *NAFEMS* 2 (2005), S. 22 – 26
- [83] KENNEDY, G.J. ; HANSEN, J.S. ; MARTINS, J.R.R.A.: A Timoshenko Beam Theory with Pressure Corrections for Layered Orthotropic Beams. In: *International Journal of Solids and Structures* 48 (2011), S. 2373 – 2382

- [84] KLEIN, B.: *FEM*. Vieweg, Wiesbaden, 2007
- [85] KLEIVEN, S. ; LARSSON, K. ; KROPP, W.: Time-Domain Modelling: Combining ESM and FDTM Methods for Acoustic Wave Propagation. In: *Acta Acustica united with Acustica* 95 (2009), S. 118 – 127
- [86] KNÖFEL, B.: An Alternative Method to Compute High Frequency Structure Borne Sound in Automotive Structures. In: *Eleventh International Congress on Sound and Vibration*. St. Petersburg, Juli 2004, S. 3257 – 3264
- [87] KNÖFEL, B. ; SARRADJ, E.: Structure-borne Sound in Automotive Structures: High Frequency Boundary Element Method (HFBEM) vs. Statistical Energy Analysis (SEA). In: *Proceedings of the Joint Congress CFA/DAGA 2004*. Strasbourg, 2004, S. 13 – 14
- [88] KOHLER, J. ; FRANK, T. ; FEUCHT, M. ; KOLLING, S.: Methodenentwicklung in der Crashesimulation zur Absicherung des Fahrzeugentwicklungsprozesses. In: *5. LS-DYNA Anwenderforum*. Ulm, 2006
- [89] KOHLHUBER, M. ; WÖCKEL, S. ; BRANDMEIER, T. ; AUGE, J. ; GEIGENFEIND, M.: Körperschallbasierte Seitencrasherennung - Chancen und Herausforderungen der Modellbildung. In: GERLACH, G. (Hrsg.) ; HAUPTMANN, P. (Hrsg.): *9. Dresdner Sensor Symposium*. Dresden : TUDpress, Dresden, 2009, S. 53 – 57
- [90] KOLLMANN, F.G.: *Maschinenakustik*. Springer, Berlin u. a., 2000
- [91] KOLLMANN, F.G. ; SCHÖSSER, T.F. ; ANGERT, R.: *Praktische Maschinenakustik*. Springer, Berlin u. a., 2006
- [92] KOOPMANN, G.H. ; SONG, L. ; FAHNLIN, J.B.: A Method for Computing Acoustic Fields Based on the Principle of Wave Superposition. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 86 (1989), S. 2433 – 2428
- [93] KRAMER, F.: *Passive Sicherheit von Kraftfahrzeugen*. 3. Auflage. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009
- [94] KRAUTKRÄMER, J. ; KRAUTKRÄMER, H.: *Ultrasonic Testing of Materials*. Springer, Berlin u. a., 1990
- [95] KRAWCZUK, M. ; PALACZ, M. ; OSTACHOWICZ, W.: The Dynamic Analysis of a Cracked Timoshenko Beam by the Spectral Element Method. In: *Journal of Sound and Vibration* 264 (2003), S. 1139 – 1153
- [96] KREISSIG, R. ; BENEDIX, U.: *Höhere technische Mechanik: Lehr- und Übungsbuch*. Springer, Wien u.a., 2002
- [97] KROPP, W. ; SVENSSON, P.U.: Application of the Time Domain Formulation of the Method of Equivalent Sources to Radiation and Scattering Problems. In: *Acustica* 81 (1995), S. 528 – 543
- [98] KROPP, W. ; SVENSSON, U.P.: Time Domain Formulation of the Method of Equivalent Sources. In: *Acta Acustica* 3 (1995), S. 67 – 73

- [99] LAKES, R.: Deformation Mechanisms in Negative Poisson's Ratio Materials: Structural Aspects. In: *Journal of Materials Science* 26 (1991), S. 2287 – 2297
- [100] LANDAU, L.D. ; LIFSCHITZ, E.M.: *Lehrbuch der Theoretischen Physik - Elastizitätstheorie - Band 7*. Akademie Verlag, Berlin, 1991
- [101] LANDE, R.H. ; LANGLEY, R.S.: The Energetics of Cylindrical Bending Waves in a Thin Plate. In: *Journal of Sound and Vibration* 279 (2005), S. 513 – 518
- [102] LAUERER, C.: *Ein Beitrag zur Erhöhung des Insassenschutzes durch Körperschallmessung in der Crasherkenung*, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Diss., 2009
- [103] LE BOT, A.: A Vibroacoustic Model for High Frequency Analysis. In: *Journal of Sound and Vibration* 211 (1998), S. 537 – 554
- [104] LEBLANC, A. ; ING, R.K. ; LAVIE, A.: A Wave Superposition Method Bases on Monopole Sources with Unique Solution for All Wave Numbers. In: *Acta Acustica united with Acustica* 96 (2010), S. 125 – 130
- [105] LEE, J.P. ; KOLSKY, H.: The Generation of Stress Pulses at the Junction of Two Noncollinear Rods. In: *Journal of Applied Mechanics* 39 (1972), S. 809 – 813
- [106] LEHNER, G.: *Elektromagnetische Feldtheorie*. 6. Auflage. Springer, Berlin u. a., 2009
- [107] LEHNERT, H.: Systematic Errors of the Ray-Tracing Algorithm. In: *Applied Acoustics* 38 (1993), S. 207 – 221
- [108] LERCH, R. ; SESSLER, G.M. ; WOLF, D.: *Technische Akustik*. Springer, Berlin u. a., 2009
- [109] LEVINSON, M.: A New Rectangular Beam Theory. In: *Journal of Sound and Vibration* 74 (1980), S. 81 – 87
- [110] LI, X.F.: A Unified Approach for Analyzing Static and Dynamic Behaviors of Functionally Graded Timoshenko and Euler-Bernoulli Beams. In: *Journal of Sound and Vibration* 318 (2008), S. 1210 – 1229
- [111] LINDNER, H. ; SIEBKE, Wolfgang (Hrsg.) ; SIMON, Günter (Hrsg.) ; WUTTKE, Werner (Hrsg.): *Physik für Ingenieure*. 18. Auflage. Carl Hanser Verlag, München, 2010
- [112] LINDSTRÖM, G. ; LANGKAU, R. ; SCOBEL, W.: *Physik kompakt 3. Quantenphysik und Statistische Physik*. Springer, Berlin u. a., 2002
- [113] LUCKLUM, R. ; HAUPTMANN, P.: Transduction Mechanism of Acoustic-Wave Based Chemical and Biochemical Sensors. In: *Measurement Science and Technology* 14 (2003), S. 1854 – 1864
- [114] LUEGMAIR, M.: Randbedingungen der Körperschallausbreitung im Fahrzeug zur Crasherkenung. In: *Fortschritte der Akustik - DAGA 2008*, 2008, S. 121 – 122
- [115] LUEGMAIR, M.: Unzulänglichkeiten von Balkentheorien und -elementen für die Beschreibung hochfrequenter BiegeWellenausbreitung in Fahrzeugstrukturen. In: *NAFEMS* 12 (2009), S. 53 – 63

- [116] LUEGM AIR, M.: *Erweiterung der Transmission-Line-Methode auf die Biegewelle zur Simulation von Crashesensoren*, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Diss., 2011
- [117] LUEGM AIR, M. ; KOHLHUBER, M.: *Transient Ray Tracing Method*. Deutsches Patent, angemeldet unter DE 10 2010 034 926.7, 2010
- [118] LUEGM AIR, M. ; OESTREICHER, L.: Körperschallausbreitung als wichtiger Einfluss auf die Crasherennung. In: *ATZ* 110 (2008), Nr. 2, S. 160 – 165
- [119] LUEGM AIR, M. ; WÖCKEL, S.: Precise Characterization of Structure-Borne Sound Transmission Applied on Crash Sensing Technologies. In: *SENSOR+TEST Conference*, 2009
- [120] LUJA, M.: *Konzeptionierung und Implementierung spezieller Simulationsverfahren zur hochfrequenten Wellenausbreitung in komplexen Automobilstrukturen unter Verwendung parallelisierter Algorithmen in C++ zur Weiterentwicklung der Fahrzeugsicherheit*, Hochschule für angewandte Wissenschaften Fachhochschule Ingolstadt, Diplomarbeit, 2011
- [121] LURIE, A.I.: *Theory of Elasticity*. Springer, Berlin u. a., 2005
- [122] LYON, R.H. ; DEJONG, R.G.: *Theory and Application of Statistical Energy Analysis*. 2. Auflage. Butterworth-Heinemann, 1997
- [123] MACE, B.R. ; HALKYARD, C.R.: Time Domain Estimation of Response and Intensity in Beams Using Wave Decomposition and Reconstruction. In: *Journal of Sound and Vibration* 230 (2000), S. 561 – 589
- [124] MACE, B.R. ; HALKYARD, C.R. ; EL-KHATIB, H.M.: Real-Time Measurement of Wave Components and Intensity in a Beam in the Presence of a Near Field. In: *Journal of Sound and Vibration* 286 (2005), S. 507 – 527
- [125] MAGRAB, E.B.: *Vibrations of Elastic Structural Members*. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn u. a., 1979
- [126] MASON, S.J.: Feedback Theory - Some Properties of Signal Flow Graphs. In: *Proceedings of the Institute of Radio Engineers* 41 (1953), S. 1144 – 1156
- [127] MASON, S.J.: Feedback Theory - Further Properties of Signal Flow Graphs. In: *Proceedings of the Institute of Radio Engineers* 44 (1956), S. 920 – 926
- [128] MAYR, M.: *Technische Mechanik*. 3. Auflage. Carl Hanser Verlag, München u. a., 2002
- [129] MAYR, M. ; THALHOFER, U.: *Numerische Lösungsverfahren in der Praxis*. Carl Hanser Verlag, München, 1993
- [130] MAYSENHÖLDER, W.: *Körperschallenergie*. Hirzel Verlag, Stuttgart/Leipzig, 1994
- [131] MCCUNE, R.W. ; ARMSTRONG, C.G. ; ROBINSON, D.J.: Mixed-Dimensional Coupling in Finite Element Models. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 49 (2000), S. 725 – 750
- [132] MECHEL, F.P.: *Formulas of Acoustics*. Springer, Berlin u. a., 2004

- [133] MESCHÉDE, D.: *Gerthsen Physik*. Springer, Berlin u. a., 2006
- [134] MEYER, M.: *Signalverarbeitung*. Springer, Berlin u. a., 2006
- [135] MEYWERK, M.: *CAE-Methoden in der Fahrzeugtechnik*. Springer, Berlin u. a., 2007
- [136] MÜLLER, G. ; MÖSER, M.: *Taschenbuch der Technischen Akustik*. Springer, Berlin u. a., 2004
- [137] MÖSER, M.: *Technische Akustik*. Springer, Berlin u. a., 2009
- [138] MÖSER, M. ; KROPP, W.: *Körperschall*. 3. Auflage. Springer, Berlin u. a., 2010
- [139] NOLD, M.L.: *Anwendung von mehreren Empfangsantennen in drahtlosen Kommunikationssystemen*, Universität Ulm, Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Diss., 2002
- [140] o.A.: *DIN 1320 Akustik; Begriffe*. Deutsches Institut für Normung, Berlin, 1997
- [141] o.A.: *Specifications Model 5800SL Miniature Impulse Hammer*. Chatsworth: Dytran Instruments, Inc., 1997
- [142] o.A.: *LS-DYNA[®] Keyword User's Manual*. 971. Livermore Software Technology Corporation, Mai 2007
- [143] o.A.: *Datenblatt Picotron[®] Beschleunigungssensor Typ 8614A...* Winterthur: Kistler Gruppe, 2008
- [144] o.A.: 95% der Pkw-Fahrer finden Airbags im Auto wichtig. In: *ADAC Motorwelt* 5 (2009), S. 10
- [145] o.A.: *Unfallentwicklung auf deutschen Straßen 2010*. Statistisches Bundesamt, Wiesbaden, 2010
- [146] o.A.: *Vision Zero: Im Zweifel für Verkehrssicherheit*. Deutscher Verkehrssicherheitsrat (DVR) e.V., 2010
- [147] o.A.: *ANSYS[®] Help*. Canonsburg: ANSYS[®], Inc., 2011
- [148] o.A.: *MATLAB[®] Help*. Natick: The MathWorks[®], 2011
- [149] OCHMANN, M.: The Source Simulation Technique for Acoustic Radiation Problems. In: *Acustica* 81 (1995), S. 512 – 527
- [150] OEGREN, M. ; KROPP, W.: Road Traffic Noise Propagation between Two Dimensional City Canyonys using Equivalent Sources Approach. In: *Acta Acustica united with Acustica* 90 (2004), S. 293 – 300
- [151] OPPENHEIM, A.V. ; SCHAFER, R.W. ; BUCK, J.R.: *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*. Pearson Studium, München, 2004
- [152] OSTERMANN, F.: *Aluminium - Werkstofftechnik für den Automobilbau*. Expert Verlag, Ehningen, 1992
- [153] PAIN, H.J.: *The Physics of Vibrations and Waves*. Wiley, Chichester, 2005

- [154] PALACZ, M. ; KRAWCZUK, M.: Analysis of Longitudinal Wave Propagation in a Cracked Rod by the Spectral Element Method. In: *Computers and Structures* 80 (2002), S. 1809 – 1816
- [155] PAPULA, L.: *Mathematische Formelsammlung*. 8. Auflage. Vieweg, Wiesbaden, 2003
- [156] PÁVÓ, I.: The Analysis of Signal Flow Graph Containing Sampled-Data Elements. In: *Acta Cybernetica* 7 (1985), S. 217 – 223
- [157] PEDROTTI, F.L. ; PEDROTTI, L.S. ; BAUSCH, W. ; SCHMIDT, H.: *Optik für Ingenieure*. Springer, Berlin u. a., 2005
- [158] POMBERGER, G. ; DOBLER, H.: *Algorithmen und Datenstrukturen*. Pearson Studium, München, 2008
- [159] QUARTERONI, A. ; SALERI, F. ; SAPELZA, K.: *Wissenschaftliches Rechnen mit MATLAB®*. Springer, Berlin u. a., 2005
- [160] RAUBER, T. ; RÜNGER, G.: *Parallele Programmierung*. 2. Auflage. Springer, Berlin u. a., 2007
- [161] RAUBER, T. ; RÜNGER, G.: *Multicore: Parallele Programmierung*. Springer, Berlin u. a., 2008
- [162] RAYLEIGH, J.W.S.: *The Theorie of Sound*. 2. Auflage. Dover, New York, 1945
- [163] REBEL, J.N.: *On the Formulation of the Transmission Line Matrix Method*, Technische Universität München, Lehrstuhl für Hochfrequenztechnik, Diss., 2000
- [164] REDDY, J.N.: Nonlocal Theories for Bending, Buckling and Vibration of Beams. In: *International Journal of Engineering Science* 45 (2007), S. 288 – 307
- [165] REDDY, J.N. ; WANG, C.M. ; LIM, G.T. ; HG, K.H.: Bending Solution of Levinson Beams and Plates in Terms of Classical Theories. In: *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001), S. 4701 – 4720
- [166] RIMSCHA, M. von: *Algorithmen kompakt und verständlich*. 2. Auflage. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2010
- [167] ROSE, J.L.: *Ultrasonic Waves in Solid Media*. Cambridge University Press, 1999
- [168] RUSSELL, S. ; NORVIG, P.: *Künstliche Intelligenz - Ein moderner Ansatz*. Pearson Studium, München, 2004
- [169] SARRADJ, E.: *Hochfrequenter Körperschall in Strukturen*, Technische Universität Dresden, Fakultät für Elektrotechnik, Diss., 1998
- [170] SARRADJ, E.: Energy-based Vibroacoustics: SEA and Beyond. In: *Proceedings of the Joint Congress CFA/DAGA 2004, Strasbourg*, 2004
- [171] SCHEITHAUER, R.: *Signale und Systeme - Grundlagen für die Mess- und Regelungstechnik und Nachrichtentechnik*. 2. Auflage. Teubner Verlag, Wiesbaden, 2005

- [172] SCHERRMANN, P. ; KOHLHUBER, M. ; BRANDMEIER, T.: Auswertung aktiv erzeugter Körperschallsignale im Fahrzeug. In: GERLACH, G. (Hrsg.) ; SCHÜTZE, A. (Hrsg.): *10. Dresdner Sensor Symposium*. Dresden : TUDpress, Dresden, 2011, S. 219 – 223
- [173] SCHWEIZER, W.: *MATLAB® kompakt*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2009
- [174] SIMSEK, M.: Free Vibration Analysis of Beams by Using a Third-Order Shear Deformation Theory. In: *Sadhana* 32 (2007), S. 167 – 179
- [175] SPANNAUS, P.: Entstehung von Körperschall im Fahrzeugcrash. In: *Fortschritte der Akustik - DAGA 2008*, 2008, S. 111 – 112
- [176] SPANNAUS, P.: *Körperschallentstehung im Fahrzeugcrash: Ein Beitrag zur Verbesserung der Unfallerkennung*, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Zentrum für Ingenieurwissenschaften, Diss., 2009
- [177] SPANNAUS, P. ; BRANDMEIER, T. ; KOHLHUBER, M.: CISS.S - Seitencrashererkennung mit Crash Impact Sound Sensing. In: SCHWEIGER, G. (Hrsg.): *Forschungsbericht 2010*, 2010, S. 24 – 25. – ISSN 1867-9625
- [178] STÖCKER, H.: *Taschenbuch der Physik*. 3. Auflage. Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1998
- [179] STÖCKER, H.: *Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren*. Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2003
- [180] STUDER, J.A. ; LAUE, J. ; KOLLER, M.G.: *Bodendynamik*. 3. Auflage. Springer, Berlin u. a., 2007
- [181] SZABÓ, I.: *Höhere Technische Mechanik*. 6. Auflage. Springer, Berlin u. a., 2001
- [182] SZABÓ, I.: *Einführung in die Technische Mechanik*. 8. Auflage. Springer, Berlin u. a., 2003
- [183] TIMOSHENKO, S.P.: On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars. In: *Philosophical Magazine* 6 (1921), S. 744 – 746
- [184] TIMOSHENKO, S.P. ; GERE, J.M.: *Mechanics of Materials*. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1972
- [185] TIMOSHENKO, S.P. ; GOODIER, J.N.: *Theory of Elasticity*. 3. Auflage. McGraw-Hill, New York, 1970
- [186] TIMOSHENKO, S.P. ; WOINOWSKY-KRIEGER, S.: *Theory of Plates and Shells*. 2. Auflage. McGraw-Hill, New York, 1959
- [187] TIMOSHENKO, S.P. ; YOUNG, D.H.: *Vibration Problems in Engineering*. D. Van Nostrand Company, Inc., Toronto u. a., 1955
- [188] TIPLER, P.A. ; LLEWELLYN, R.A.: *Moderne Physik*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2009

- [189] TIPLER, P.A. ; MOSCA, G. ; PELTE, Dietrich (Hrsg.): *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. 2. Auflage. Elsevier GmbH, München, 2004
- [190] TVEITO, A. ; WINTHER, R. ; KIANI, H.P.: *Einführung in partielle Differentialgleichungen: Ein numerischer Zugang*. Springer, Berlin u. a., 2002
- [191] UNBEHAUEN, R.: *Systemtheorie 1*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München u. a., 2002
- [192] VÖCKING, B. ; ALT, H. ; DIETZFELBINGER, M. ; REISCHUK, R. ; SCHEIDELER, C. ; VOLLMER, H. ; WAGNER, D.: *Taschenbuch der Algorithmen*. Springer, Berlin u. a., 2008
- [193] VIKTOROV, I.A.: *Rayleigh and Lamb Waves*. Plenum Press, New York, 1967
- [194] VINSON, J.R.: *The Behavior of Thin Walled Structures*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht u. a., 1989
- [195] WAUER, J.: *Kontinuumsschwingungen*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008
- [196] WESTKÄMPER, E. ; WARNECKE, H.J.: *Einführung in die Fertigungstechnik*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2010
- [197] WILLNER, K.: *Kontinuums- und Kontaktmechanik*. Springer, Berlin u. a., 2003
- [198] WITTEL, H. ; MUHS, D. ; JANNASCH, D. ; VOSSIEK, J.: *Roloff/Matek Maschinenelemente*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009
- [199] WOLF, J.: *C mit einfachen Beispielen programmieren*. Markt+Technik Verlag, München, 2006
- [200] WU, C.M. ; LUNDBERG, B.: Reflection and Transmission of the Energy of Harmonic Elastic Waves in a Bent Bar. In: *Journal of Sound and Vibration* 190 (1996), S. 645 – 659
- [201] XIANGYANG, Z. ; KE'AN, C. ; JINCAI, S: On the Accuracy of the Ray-Tracing Algorithms Based on Various Sound Receiver Models. In: *Applied Acoustics* 64 (2003), S. 433 – 441
- [202] YAMASHITA, E.: *Analysis Methods for Electromagnetic Wave Problems*. Artech House, Boston, 1990
- [203] YONG, K.H. ; ATKINS, K.J.: Generation of Elastic Stress Waves at a Corner Junction of Square Rods. In: *Journal of Sound and Vibration* 84 (1982), S. 431 – 441
- [204] ZELLER, P.: *Handbuch Fahrzeugakustik*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name **Markus Michael Kohlhuber**
Akad. Grad **Dipl.-Ing.(FH)**
Geburt **14.07.1982** in Schrobenhausen/Bayern

Werdegang

09/1989 – 07/1993 **Grundschule**
Volksschule Schweitenkirchen-Paunzhausen

09/1993 – 07/1995 **Hauptschule**
Volksschule Schweitenkirchen-Paunzhausen

09/1995 – 07/1999 **Realschule**
Pfaffenhofen, Mittlere Reife

09/1999 – 06/2002 **Ausbildung zum Technischen Zeichner**
MAN Nutzfahrzeuge AG, München, Facharbeiter

09/2002 – 07/2003 **Berufsoberschule**
Scheyern, Fachhochschulreife

10/2003 – 09/2007 **Studium des Maschinenbaus**
Hochschule Ingolstadt, Dipl.-Ing.(FH)

02/2006 – 07/2006 **Praxissemester**
BMW Group, München

03/2007 – 09/2007 **Diplomarbeit**
BMW Group, München

11/2007 – 12/2008 **Versuchingenieur**
MAN Nutzfahrzeuge AG, München

01/2009 – 12/2011 **Wissenschaftlicher Mitarbeiter**
Hochschule Ingolstadt

seit 09/2009 **Externer Doktorand**
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

seit 01/2012 **Entwicklungsingenieur**
BMW Group, München

Schweitenkirchen, den 2. Januar 2012

Markus Kohlhuber

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und die den benutzten Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Schweitenkirchen, den 2. Januar 2012

Markus Kohlhuber