3

ARTIFICIORVM ALGEBRAICORVM

ELEMENTIS

ANALYSEOS FINITORVM WOLFFIANIS

COMPREHENSORVM

DILVCIDATIO

E LECTIONIBVS PRIVATISSIMIS HAVSTA

ET SPECIMINIS ACADEMICI LOCO

PRAESIDE

IOH. NICOLAO FROBESIO

PHILOS. D. ET P. P. O.

IN ILLVSTRI ACADEMIA IVLIA

AD D. IX. NOVEMBR. ANNI CIↃIↃCCXXXVII.

AD DISPVTANDVM

PVBLICE PROPOSITA

AB

HENRICO THEODORO REIBENSTEIN

CELLENSI,

IVRIS AC PHILOSOPHIAE CVLTORE.

HELMSTADII

TYPIS PAVLI DIETERICI SCHNORRII

ACAD. TYPOGR.

A
SON EXCELLENCE ILLVSTRISSIME
MONSEIGNEVR
LE BARON
GERLAC ADOLPHE DE MVNCHHAVSEN
SEIGNEVR DE STRAVSFORT
MINISTRE D' ETAT ET CONSEILLER INTIME
DV TRES PVISSANT ROI DE LA GRANDE BRETAGNE
GRAND CAPITAINE DV DVCHE DE CELLE ET
DIRECTEVR DE L' ACADEMIE ROYALE
DE GöTTINGEN
MON TRES RESPECTE ET TRES ILLVSTRE PATRON
A
QVI CET ECLAIRCISSEMENT SVR L' ALGEBRE
DE MONSIEVR WOLFF EST OFFERT
ET CONSACRE
PAR
SON TRES RESPECTVEVX ET TRES DEVOÜE
SERVITEVR

HENRI THEODORE REIBENSTEIN.

MONSEIGNEUR

Ce n'est pas la coûtume ordinaire de mettre le nom de grands Patrons devant les livres et les dissertations, ni une trop grande hardiesse, mais l'admirable soin, avec le quel VOTRE EXCELLENCE cherche l'avancement des sciences et des beaux arts, qui me fait prendre la liberté de LVI dedier cet échantillon de mes études academiques, avec une tres profonde soûmission. Il m'est à la verité fort connu, que ceux, qui ont côutume d'estimer les études mathematiques ou l'Algebre non pas selon leur prix et leur noblesse, mais selon la mode et le prejugé du public, les decrient avec une trop grande critique, et par des subtilités inutiles, je sai bien aussi, que les plus grands et les plus savants personnages en font un tres grand cas, et que pour obtenir une plus grande elevation d'esprit, et pour la montrer dans leurs affaires, ils les ont cultivées avec une extraordinaire diligence.

L'approbation gracieuse de VOTRE EXCELLENCE, touchant l'eclaircissement de l'Algebre de Monsieur Wolff; qui ne peut pas me manquer, selon mon esperance; ne fera pas seulement honte à ces speculatif, qui meprisent ces études, mais qu'elle pourra servir de temoignage à la noblesse et à l'utilité des sublimes mathematiques. Je suis avec un tres profond respect et une veneration sans bornes

MONSEIGNEUR
DE VOTRE EXCELLENCE

le tres soumis, tres obeissant, et tres devoué serviteur
HENRI THEODORE REIBENSTEIN.

LECTORI CANDIDO ATQVE HVMANISSIMO
S. P. D
PRAESES.

En tibi, Candide Humanissimeque Lector, subtilioris speculationis, sed et generositatis litterariae vereque philosophicae specimen aliquod rarum, et, nisi me omnia fallunt, eximium. Neque enim dissimulandum hic est, id ante omnia Praenobilissimo REIBENSTEINIO *nostro, iuris ac matheseos cultori strenuo et perspicaci, in evulgandis* matheseos sublimioris sive analyseos Wolffianae (*) dilucidationibus *propositum fuisse, ut publice is demonstraret, firmiter sese de matheseos atque artis analyticae usu ac necessitate in adhibenda ad rem et salutem publicam iurisprudentia persuasum esse; quidvis autem potius, quam eorum consilium sibi placere, qui disciplinarum atque artium dignitatem lucro tantum metiuntur, ideoque, religiose admodum spretis sublimioribus studiis, non nisi eas in academia et vita denique omni doctrinas tractant et commendant*, quae ad lucrandum panem *facere vulgo existimantur. Quae ipsa equidem ipsius sententia tantum abest, ut veritati aut prudentiae contraria existat, ut potius summorum virorum testimoniis atque exemplis, iustissimisque rationibus comprobari posset, nisi praefaminis angustia praesentisque instituti ratio idem prohiberet. Lectu interim haud indigna hic sunt, quae copiose ac graviter partim de matheseos in negotiis civilibus utilitate, partim etiam de analysis mathematicae summa dignitate viri excellentissimi* I. B. WIDEBVRGIVS a), I. F. POLACCIVS, b) *quique ab his suo merito laudantur,* IOS. BLANCANVS c), F. E. *Comes de* HERBERSTEIN d), I. B. *de* ROHR e),

IAC.

Christoph Polhem. v. Act. lit. Suec. Tom. II. 1725. pag. 108. sq. Comment. de mathes. [illegible] constit. ubi [illegible] exstat gravissimum huius iudicium de [illegible] mathes. usu.

(*) eius nemqe, quae anno 1730. auctior et correctior in lucem prodiit.

a) in praef. der Einleit. zur höhern Mathesi. Jen. 1726. 8.

b) in mathesi forensi, oder Entwurff derj. Mathem. Wissenschafften, die ein Rechtsgelehrter unentbehrlich nöthig hat. Leipz. 1734. 8.

...ilh. Petty arithme-o ...ica politica

IAC. et NIC. BERNAVLLI f), OETTINGERVS *et* BECKIVS, g) RIGGERVS, h) VOGTIVS i) L. C. STVRMIVS, k) *et fortasſis alii*, l) *diſputarunt. Vt ne quis vero tandem ignoret, quid circa illuſtris* WOLFFII inſtituta algebraica *praeſtitum hic ſit; ita velim habeatur. Primo* 1) exemplis aque obſervationibus ſingularibus ea paſſim illuſtrantur, *quae obſcura atque impedita videri minus exercitatis poterant. Deinde* 2) *quam ſit* in rebus ac veritatibus novis foecunda mathematicorum analyſis, *quam item facile amplificari, huius admimiculo, vel ab ipſis quoque tironibus diſciplina mathematica queat, uno atque altero exemplo commonſtratur. Tum* 3) errata varia, *quorum aliqua in ſpeciem leviſſima, ſed ita tamen comparata ſunt, ut mirifice perplexum reddere calculum poſſint, quanta fieri potuit ſollicitudine atque adcuratione, ſtellula indice*, corriguntur. *Porro* 4) quomodo paullatim intelligere atque interpretari linguam algebraicam, *ſive characteres analyticos, deceat, hinc inde oſtenditur. Namque obſervatione dignum hic eſt, prope ſingulas iſtas, quae in analyſi mathematica occurrunt*, aequationes *quaſi totidem vel* definitiones *vel* theoremata *exhibere. Denique* 5) *circa geometriam ſublimiorem, ſeu de curvis doctrinam*, libri memorialis algebraici *ſpecimen aliquod ſubminiſtratur; quo nempe ſtrictim atque ordine recenſentur, quae prolixioris calculi ſubſidio pedetentim explorata ſunt, dogmata; quique per univerſam analyſin, nec ſine maximo repetitionis promtaeque recordationis compendio, extendi potuiſſet, ſiquidem per temporis ac diſſertationis anguſtiam licuiſſet. Vela etenim contrahenda, quaeque reſtant, in aliud tempus differenda ſunt. Vale.*

---

c) in Diſſ. de natura diſciplin. mathem. ARISTOTELIS locis mathem. ſubnexa. Bonon. 1615. 4.

d) in der Schutzſchrifft der Mathem. Wiſſenſch. Prag. 1709.

e) in comment. von der Math. Wiſſenſch. Beſchaffenheit u. Nutzen. Halle. 1713 8.

f) in lib. de arte coniect. Baſ. 1713. it. in diſſ. de uſu artis coniectandi in iure.

g. h. i. k) Vid. POLACCII praefat.

l) Vid. WIDEBVRG. c. l

ELEM. ANALYS. FINITORVM DILVCIDATIO

SECT. I.

DE ARITHMETICA SPECIOSA

CAP. I.

DE ARITHMETICA RATIONALIVM

ad §. 1 - 27.

ARithmeticam ſive *logiſticam*, generatim conſideratam, *ex numeris quibusdam datis vel cognitis alios, eosdemque antea incognitos, inveſtigandi artem* vel *ſcientiam* mathematicis adpellari, exploratum omnibus eſt, qui non ſunt in mathematicorum ſcholis hoſpites. Quae circa *numeros vulgares* ſeu *determinatos* verſatur, *arithmetica communis* ſeu *numeroſa;* quae vero de *numerorum indeterminatorum*, ſive *quantitatum*, (*elem. arithm.* §. 13.) inveſtigatione tractat, *arithmetica univerſalis* ſive *algebra;* a ſingularibus, quibus ipſa utitur, ſignis ſecundum veteres, *arithmetica coſſica*; ſecundum recentiores *arithmetica litteralis* vel *ſpecioſa* nuncupatur. *Operationes* ſive operationum *ſpecies*, quibus ad perveſtigandas quantitates incognitas in inſtitutis arithmeticis utimur, *algorithmi* ſeu *calculi* titulo communiter ſignificantur. Qui proinde vel *numeroſus* eſt, vel *ſpecioſus* ſive literalis. Debent autem, propter mutuam datorum et quaeſitorum relationem, duplicis admodum generis *characteres* vel *ſigna*, ſi praeſertim ad calculum ſpecioſum reſpexeris, adhiberi: aliis *quantitates*, *quantitatum conditiones* ſive *relationes* aliis deſignantur.

Sunt vero apud recentiores praesertim mathematicos

Signa

1) QVANTITATVM

a) *Simplicium* vel absolutarum; et quidem cognitarum vel *datarum* a, b, c, d. &c. incognitarum vero seu *quaesitarum*, x, y, z.

b) Potentialium h. e. *potentiarum* seu *dignitatum* a^1, a^2, a^3, &c. x^1, x^2, x^3 &c. item, si gradus dignitatis indeterminate vel generatim significandus est, a^m, a^n, x^n, x^r &c.

c) radicalium sive *radicum*: $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, &c. e. g. $\sqrt{a}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\sqrt{a^2}$, $\sqrt{x}$ &c. item $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{a^3}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, $\sqrt[4]{a}$ $\sqrt[4]{a^4}$, &c. Ubi radix quaedam indeterminata significari debet, sequens signandi ratio adhibetur $\sqrt[m]{a^n}$, $\sqrt[m]{b^m}$, $\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[m]{a^m b^n}$, $\sqrt[r]{x^s}$ &c.

d) *irrationalium.* $\sqrt{a}$, siquidem a non est quantitas quadratica; $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[4]{x^3}$, vel indeterminate $\sqrt[m]{a^n}$, $\sqrt[n]{x^r}$ &c.

2) RELATIONVM atque OPERATIONVM. et quidem

α) *aequalitatis* $=$ id quod sine dubio ex *librae* signo astronomico est pronatum. Igitur $a = b$ significat, quantitatem a esse aequalem quantitati b. item $x = \sqrt{ab}$, hoc est, x aequale radici quadratae ex facto ab.

β) *inaequalitatis* $>$ vel $<$ Sic, ubi significandum est, quantitatem a maiorem esse quantitate vel quadrato x^2, sequens designatio adhibetur $a > x^2$. et vice versa $x^2 < a$, hoc est, x^2 minus est quam a. &c.

γ) Ad-γ) *Additionis* vel *summationis* +, quod significat *plus*, germanice und. e. g. $a^2 + b = x$ hoc est, a^2 plus (und) b aequalia sunt x.

δ) *Subtractionis* — quod significat *minus*. germ. weniger. sic $a^2 - b^2 = x^2$ significat a^2 minus (weniger) b^2 aequale est x^2.

ε) *multiplicationis* (·) sive punctum unicum. Vbi tamen observandum, fere nunquam apud recentiores in calculo litterali signum hocce usurpari; sed *simplicem potius quantitatum combinationem* multiplicationis ipsarum signum existere. Igitur ubi multiplum seu factum ex quantitate a in quantitatem aliam b vel x designandum est, sequens signandi ratio adhibetur ab, ax. Similiter procedendum est, ubi quantitas quaedam in semetipsam ducitur, ex. gr. a multipl. per $a = aa = a^2$ item ab multipl. per $a = aab = a^2b$. Id quod observasse, tironum inprimis interst; ne qua forte additionis ac multiplicationis signa circa earundem quantitatum computum temere confundant. Sic enim

$$\begin{array}{ll} \quad a & \quad a \\ \quad a & \quad a \\ \text{——— add.} & \text{——— multipl.} \\ a + a \text{ sive } 2a & aa = a^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{item} \quad a & \quad a \\ \text{——— add.} & \text{——— multipl.} \\ a + a + a = 3a & aaa = a^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{sed} \quad a \\ \text{——————— multipl.} \\ a^2 + a^2 + a^2 = 3aa \\ \qquad\qquad\quad = 3a^2 \end{array}$$

ζ) Di-

5) *Divisionis* (:) sive bina puncta situ perpendiculari, veluti *colon*, disposita, sic $a:d$ denotat a divisum per d, seu quotientem ex a per d diviso. Item $a^2:b$ quadratum quantitatis a per b divisum. Sed solet tamen divisio quoque ea ratione designari, quae in arithmetica vulgari circa minutias seu fractiones obtinet. Perinde igitur est, sive $a:d$ sive $\frac{a}{d}$, $a^2:b$, sive $\frac{a^2}{b}$, $(a^2+b^2):d$ sive $\frac{a^2+b^2}{d}$ scripseris. Prior signandi ratio typographis, posterior intellectui atque imaginationi solet esse commodior: si praesertim formulae seu aequationes ex variis partibus sunt coagmentatae. Sic e. c. progressionis geometricae summa (vid. *infra* §. 121.)

$$m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a) : m-1$$

pro luculento eiusdem conceptu, longe aptius sic describitur:

$$\frac{m^{n-1}a + m^{n-1}a - a}{m-1}$$

similiter, facta eius reductione,

$$(m^n a - m^{n-1}a + m^{n-1}a - a) : (m-1)$$

aptius sic exhibetur

$$\frac{m^n a - m^{n-1}a + m^{n-1}a - a}{m-1}$$

similiter (vid. §. 356.)

$$x \propto V(r:p + q^2:4p^2) - q:2p.$$

aptius sic repraesentatur

$$x \propto V\left(\frac{r}{p} + \frac{q^2}{4p^2}\right) - \frac{q}{2p}$$

complura signaturae huius exempla dabimus deinceps passim.

6) Ana-

ζ) *Analogiae* seu *proportionis* ($: = :$) Sic

$ma : a = mb : b$] proportionem discretam designant
vel $a : ma = b : mb$]

similiter

$a : ma = ma : m^2 a$] proportionem continuam repraesentant.
vel $\div\!\div\; a,\ ma,\ m^2 a.$]

Haec summatim ac breviter de calculi literalis characteribus hodiernis dicta sunto. Reliqua enim partim ex auctoris nostri praeceptis, partim ex ipsius calculi exercitio, secundum regulas deinceps positas instituto, patescent. Ceterum obiter hic notamus, *cossistas* sive *arithmeticae cossicae doctores*, quum algebram non nisi ad numeros determinatos adplicuere, pro *a*, *b*, *c*, utpote quantitatum datarum signis, numeros vulgares, nunc simpliciter, nunc subnexa littera N. quae ipsis *drachma* vocatur, *numerumque vulgarem* significat; pro *x*, *y*, *z*. autem communiter 1.R. hoc est 1 *radix*, velut quantitatis desideratae signum, posuisse. Conferfis MICH. STIEFELIVM in libro egregio, nec ubivis obvio, quem *arithmeticam integram* inscripsit, cum PHILIP. MELANCHTHONIS *praefatione Norimbergae* 1544. 4. edito (lib. III. pag. 227. sqq.) Add. FRANC. BRASSERI arithmetica ab OTTONE WESELLOW ex germ. in lat. serm. versa & Bremae 1619. 8. in lucem exposita.

ad §. 27.

Quas excellentissimus Auctor, non sine prudenti consilio, ad simplices tantummodo quantitates hic adplicuit, summationis vel additionis regulas, easdem adhiberi quoque pro colligendis in summam *quantitatibus* complexis sive *multiplis*, *dignitatibus* item, ac *minutiis* seu fractionibus, nec non *quantitatibus surdis* seu *irrationalibus* posse atque

 opor-

oportere, quivis iam per se intelligit. Spectant huc artificia atque exempla inferius proposita (§. 40. 41. & 67.) Enimvero

1) QVANTITATES *heterogeneae seu diversis characteribus expressae, sicubi monomiae sunt, servatis signis, quae ipsis sunt praefixa, invicem iunguntur.*

$+ ab$ & $+ bcd$ efficiunt $ab + bcd$

$+ a^2$ & $+ \frac{b^2}{d}$ efficiunt $a^2 + \frac{b^2}{d}$

$+ ab$ & $- Va$ efficiunt $ab - Va$: siquidem *negativum* seu *privativum*, positivo additum, non potest non huic *defectum* aliquem, et privativo quidem aequalem, conciliare.

2) QVANTITATES *homogeneae seu iisdem characteribus expressae, cuiuscunque tandem generis eaedem sint, ubi eadem signa habent, perinde ut numeri, in summam colliguntur.* e. g.

$$a^2 + ab - d + \frac{3b}{c} + 2Ve$$

$$3a^2 + 2ab - d + \frac{2b}{c} + 3Ve$$

$$\overline{4a^2 + 3ab - 2d + \frac{5b}{c} + 5Ve}$$

3) *Vbi vero quantitatibus homogeneis signa diversa extant praefixa, additio mutatur in subtractionem, & residuo praefigitur signum maioris.* e. g.

$$3x^2 - bx + Vab - \frac{c}{d}$$

$$x^2 + 5bx - 3Vab + \frac{4c}{d}$$

$$\overline{4x^2 + 4bx - 2Vab + \frac{3c}{d}}$$

Quae

ad §. 30.

Quae circa additionem, illuſtrationis ergo, nunc admonuimus, ea facili negotio ad ſubtractionis quoque regulas adcommodari poſſe, res ipſa loquitur.

ad §. 38.

Sumere equidem nobis hic, pro inſtituti praeſentis ratione, licet, verum eſſe, quod prolixe ſatis ab auctore demonſtratum eſt, *in quantitatum multiplicatione ac diviſione eadem ſigna* († & † item -- & -- in factoribus nempe) *facere plus* (†) ſeu producere quantitatem poſitivam; *diverſa vero* († & --, ſeu -- & †) *facere minus* (--) hoc eſt factum aliquod defectivum ſeu privativum gignere. Interim haud omnino abs re fuerit, adductis ab auctore quantitatum ſimpliciorum ſeu abſolutarum exemplis, *quantitatum complexarum*, nec non *potentiarum* exempla quaedam adiunxiſſe. De *fractarum* etenim atque *irrationalium quantitatum* multiplicatione deinceps (§. 42. 68.) eſt expoſitum.

a † *b*
a -- *b*
————— multiplic.
-- *ab* -- *bb*
aa † *ab*
—————————
aa † *ab* -- *ab* -- *bb* = *aa* -- *bb* = a^2 -- b^2

Praeſens haec formula, quod obiter hic ad calculi ſpecioſi commendationem notamus, ſignificat, *binarum quantitatum* (a & b) *ſummam* (a † b) *cum ipſarum differentia* (a -- b) *multiplicatam, efficere quadratorum ex ipſis differentiam.*

Facia-

Faciamus $aa -- bb$ denuo multiplicari per $a -- b$

$$
\begin{array}{r}
aa -- bb \\
a -- b \\
\hline
-- aab \dagger bbb \\
aaa -- abb \\
\hline
aaa -- aab -- abb \dagger bbb
\end{array}
$$

hoc est $a^3 -- a^2b -- ab^2 \dagger b^3$

vel $a^3 \dagger b^3 -- a^2b -- ab^2$

Iterum hic, quod supra iam nos facere meminimus, admonemus, cavendum sollicite algorithmi speciosi tironibus esse, ne aa idem esse ac $a \dagger a$ seu $2a$; item aaa idem ac $a \dagger a \dagger a$ vel $3a$; aut bbb idem cum $3b$ esse existiment: quantitatum enim homogenearum a & a additio signi $\dagger$ interpositionem; multiplicatio vero simplicem ipsarum coagmentationem postulat. Quamobrem contra etiam simplex characterum similium combinatio multiplicationem; signi vero $\dagger$ interpositio vel & numerus praefixus quantitatis eiusdem additionem indicat. Sic enim $3a = a \dagger a \dagger a$; neutiquam vero aaa sive a^3 significat.

Ceterum ex modo instituta multiplicatione denuo, quam eximius calculi literalis usus sit, intelligitur. Siquidem luculenter exinde patescit: *binarum quantitatum differentiam* ($a -- b$) *cum differentia quadratorum ex ipsis* ($a^2 -- b^2$) *multiplicatam, efficere differentiam facti quantitatis utriusque in alterius quadratum* (a^2b & ab^2) *a cuborum utriusque aggregato* ($a^3 \dagger b^3$)

Simi-

Similiter

$$\begin{array}{r} aa - bb \\ a + b \\ \hline +\, aab - bbb \\ aaa - abb \qquad \\ \hline aaa + aab - abb - bbb \end{array} \text{ multipl.}$$

hoc est $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$

item

$$\begin{array}{r} aa + bb \\ a - b \\ \hline -\, aab - bbb \\ aaa + abb \qquad \\ \hline aaa - aab + abb - bbb \end{array}$$

hoc est $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$

item

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline +\, ab + bb \\ aa + ab \qquad \\ \hline aa + 2ab + bb \\ a - b \\ \hline -\, aab - 2abb - bbb \\ aaa + 2aab + abb \qquad \\ \hline aaa + aab - abb - bbb \end{array}$$

hoc est $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$

$$\begin{array}{r} aa + 2ab + bb \\ c - d \\ \hline -\, aad - 2abd - bbd \\ aac + 2abc + bbc \qquad\qquad \\ \hline aac - aad + 2abc - 2abd + bbc - bbd \end{array}$$

hoc est $a^2c - a^2d + 2abc - 2abd + b^2c - b^2d$

Vbi litteris, ceu quantitatum multiplicandarum signis, utrisque numeri sunt praefixi, tum hi perinde, ut litterae, invicem multiplicantur. Vbi vero alterutri solum factori praefixus est numerus, tum alteri praefixa esse unitas fingitur: ideoque tunc facto litterali quantitatis seu factoris istius numerus simpliciter praefigitur. Cetera fiunt, quemadmodum supra diximus.

$$\begin{array}{r}
2a + 3b \\
3a - d \\
\hline
-2ad - 3bd \\
6aa + 9ab \\
\hline
6aa + 9ab - 2ad - 3bd
\end{array}
\qquad \text{hoc est} \qquad
\begin{array}{r}
2a + 3b \\
3a - 1d \\
\hline
-1.2ad - 1.3bd \\
2.3aa + 3.3ab \\
\hline
2.3aa + 3.3ab - 1.2ad - 1.3bd
\end{array}$$

Quae, pro illustranda *digitorum arithmetica* seu mutua numerorum monadicorum aliquanto maiorum, 6, 7, 8, 9, per digitos multiplicatione, proposita hic sunt, adhibito multiplicationis signo, facilioris et luculentioris demonstrationis ergo, sic etiam haud incommode possunt repraesentari.

$$\begin{array}{rcl}
\text{multiplic. } 8 & = & 10 - 2 \\
\text{per } 7 & = & 10 - 3 \\
\hline
& & -2.10 + 2.3 \\
& & +10.10 - 3.10 \\
\hline
\end{array}$$

Hinc summa factorum $10.10 - 5.10 + 2.3 = 50 + 6 = 56$
hoc est 10 mahl 10, weniger 5 mahl 10, plus 2 mahl 3.
sive 10 Decades, weniger 5 Decades, und noch 2mahl 3

ad §. 40.

Divisionem equidem, quum multiplicationi velut adversa operatio eadem sit, rursum ea, quae multiplicando vel coagmentata sunt; vel coagmentari saltem poterant, resolvere ac dissipare, arithmeticae communis instituta docent. (*arith. elem.* §. 69.) Resolvi igitur in numeros integros, tanquam factores, vel sic dividi per numerum aliquem integrum, ut quotus sit numerus integer sine fractione, *numerus* aliquis haud potest, nisi idem fuerit

erit *compositus*. (*ibid.* §. 74. *sqq.*) Sic enim e. g. 12. dividi exacte vel sine fractione per 2, 3, 4, 6. potest; 13. vero non item: namque $12 = 2.\ 6 = 3.\ 4.$ igitur $\frac{2.\ \cancel{6}}{\cancel{6}} = 2.$ & $\frac{\cancel{2}.\ 6}{\cancel{2}} = 6.$ item $\frac{\cancel{3}.\ 4.}{\cancel{3}} = 4;$ & $\frac{3.\ \cancel{4}}{\cancel{4}} = 3.$ Sed $13 = 1.\ 13.$ proinde nec $\frac{13}{2}$ nec $\frac{13}{3}$ etc. quotum aliquem integrum efficit. Similiter in arithmetica speciosa, sive cum litteris, quantitatum ideas exhibentibus, rem se se habere, rerum utrobique tractandarum, *numerorum* scilicet *determinatorum* atque *indeterminatorum*, seu quantitatum, similitudo dubitare haudquaquam sinit. Quocirca

a) *Vbi quantitas dividenda*, sive simplex ea fuerit, sive ex compluribus partibus composita, *non est eiusmodi, ut divisor datus inter eiusdem factores reperiatur, tum non tam perfici, quam potius significari et sub fractionis schemate repraesentari eiusdem divisio et quotus debebit.*

Sic a divisum per b est $\frac{a}{b}$

item ab divisum per d est $\frac{ab}{d}$

item $a^2 + b^2$ divisum per c est $\frac{a^2 + b^2}{c}$

item abc divisum per d est $\frac{abc}{d}$

item $\sqrt{a^2} + b$ divisum per d est $\frac{\sqrt{(a^2+b)}}{d}$

item $2n^3 + 3n^2 + n$ divisum per 6 est $\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$ (§. 205.)

item $1 + \sqrt{(24p+1)}$ divisum per 6 est $\frac{1 + \sqrt{(24p+1)}}{6}$ (§. 213.)

etc.

Sed ſciendum tamen hic eſt, pro vario quantitatum dividendarum, ſiquidem per numeros ſingulares ipſae determinantur, valore, omnino perfici interdum diviſionem atque exhiberi quotum aliquem integrum, ſecundum algorithmum numeroſum poſſe, qui ſecundum algorithmum ſpecioſum atque univerſalem, numeri fracti ſpeciem prae ſe ferebat. Faciamus etenim

$a = 18$
$b = 3$

Erit $\frac{a}{b} = \frac{18}{3} = 6$

item

$a = 8$
$b = 3$

Erit $ab = 24$
ſit $d = 6$

Erit $\frac{ab}{d} = \frac{24}{6} = 4$

Sit $a^2 = 4$
$b^2 = 36$

Erit $a^2 + b^2 = 4 + 36$
$= 40$

ſit $c = 5$

Erit $\frac{a^2 + b^2}{c} = \frac{40}{5} = 8$

item

$a = 6$
$b = 4$
$c = 3$

Erit $abc = 6.4.3 = 72$
ſit $d = 8$

Erit $\frac{abc}{d} = \frac{72}{8} = 9$

et ſic porro.

b) *Vbi vero diviſor propoſitus in quantitate ad dividendum propoſita ineſſe deprehenditur, tum, velut extincto*, qui diviſori aequivalet, *quantitatis dividendae factore, id, quod remanet, quotus eſt habendus.* Atque id ipſum de numeris, qui litteris nonnunquam praefixi ſunt, pariter, ac de litteris ipſis valet. Sic ubi

ab dividendum per a, erit $\frac{ab}{a} = b$ quotus

Sin $-ab$ dividendum per a; erit $\frac{-ab}{a} = -b$

Si ab dividendum per $-a$; erit $\frac{ab}{-a} = -b$

Sin $-ab$ dividendum per $-a$, erit $\frac{-ab}{-a} = b$

Similiter $\frac{2ab}{b} = 2a$. item $\frac{2ab}{2b} = a$

item $\frac{4abd}{2b} = \frac{2.\ 2abd}{2b} = 2ad$

item $\frac{8abc}{2ab} = \frac{4.\ 2abc}{2ab} = 4c$

item $\frac{6bd}{2bd} = \frac{6}{2} = 3$. item $\frac{9x^2}{x2} = 9$

Porro $\frac{a^2x + bx}{x} = \frac{(a^2 + b)\,x}{x} = a^2 + b$

item $\frac{mx + x}{x} = \frac{(m + 1)\,x}{x} = m + 1$

item $\frac{a^2x + ax - x}{x} = \frac{(a^2 + a - 1)\,x}{x} = a^2 + a - 1$

Igitur $\frac{a^2x + bx}{a^2 + b} = x$ item $\frac{mx + x}{m + 1} = x$

denique $\frac{a^2x + ax - x}{a^2 + a - 1} = x$

Quemadmodum ex exemplis poſterioribus haud obſcure liquet, quam ſit in analyſi mathematica utilis ac neceſſarius quantitates complexas in factores, velutique elementa ſua, mente ſtatim reſolvendi habitus, ſic eum in finem eadem proponenda hic atque expedienda cenſuimus, ut exinde, quaſi aliud agendo, derivari artificium aliquod analyticum possit, quod deinceps in aequationum algebraicarum reductione sive earundem in quantitates simpliciores transformatione perquam esse commodum solet ac necessarium. Summa eius haec est

c) *Si quantitas quaedam multinomia, sive ex compluribus partibus composita, quam dividendo reddere simpliciorem suscipimus, ita forte comparata est, ut eandem partes singulae litteram, quasi factorem aliquem communem, in se contineant, tum non modo communem istam, sed ceteras quoque litteras iunctim sumtas, tanquam divisorem adhibere licebit. Si qua vero pars litteram illam communem solam, sine factore alio, exhibuerit; tum fingere utique licebit debebitque, cum unitate eandem esse multiplicatam, quae proinde factoris compositi litteris reliquis erit adiicienda.* Manifestissime id ipsum liquet ex exemplis modo propositis: quibus equidem unum atque alterum adiunxisse, haud omnino abs re fuerit.

Sic quia $ax + bx = (a + b)\,x$

Erit $\dfrac{ax + bx}{x} = a + b$. item $\dfrac{ax + bx}{a + b} = x$

Similiter $\dfrac{a^2x - ax}{x} = \dfrac{(a^2 - a)\,x}{x} = a^2 - a$

item $\dfrac{a^2x - ax}{a^2 - a} = \dfrac{(a^2 - a)\,x}{a^2 - a} - x$

Sic etiam $n^2d - nd = (n^2 - n)\,d$

ideoque $\dfrac{n^2d - nd}{d} = n^2 - n$ et $\dfrac{n^2d - nd}{n^2 - n} = d$

item $\frac{1}{2}n^2d - \frac{1}{2}nd = (n^2 - n)\,\frac{1}{2}d = \frac{1}{2}(n^2 - n)\,d$

$= (\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n)\,d$

ideoque

ideoque $\frac{\frac{1}{2}n^2d - \frac{1}{2}nd}{\frac{1}{2}d} = n^2 - n$ et $\frac{\frac{1}{2}n^2d - \frac{1}{2}nd}{n^2 - n} = \frac{1}{2}d$

item $\frac{\frac{1}{2}n^2d - \frac{1}{2}nd}{\frac{1}{2}(n^2 - n)} = d$

Similiter $a^2 + 3ab = (a + 3b)a$

Ergo $\frac{a^2 + 3ab}{a} = a + 3b$. item $\frac{a^2 + 3ab}{a + 3b} = a$

item $x^2y + 2y = (x^2 + 2)y$

Ergo $\frac{x^2y + 2y}{y} = x^2 + 2$. item $\frac{x^2y + 2y}{x^2 + 2} = y$

item $pcx + 5qx = (pc + 5q)x$

Ergo $\frac{pcx + 5qx}{x} = pc + 5q$. item $\frac{pcx + 5qx}{pc + 5q} = x$

Denique $x^2y + y = (x^2 + 1)y$

Ergo $\frac{x^2y + y}{y} = x^2 + 1$. item $\frac{x^2y + y}{x^2 + 1} = y$

d) In ceteris quantitatibus compoſitis, quae vel exercitationis cauſa, vel et ſerio ad dividendum proponi fortaſſis poterant, ſi non alium in finem, ſaltem in gratiam tironum neceſſaria eſſe regula quaedam videtur, quae docet, poſſitne quantitas quaedam compoſita exacte dividi, nec ne; atque ubi fieri illud ipſum poteſt, quam demum quantitatem quasve litteras diviſoris loco adhibere conveniat. Scilicet 1) *quantitatis propoſitae partes ſive membra ſingula ſic reſolvantur, ut litterae ipſarum anteriores ſuperiori, poſteriores autem inferiori loco, pro conſtituendis factoribus, iuxta ſe invicem collocentur.* Eo facto, 2) *diſpiciendum, poſſintne facta iſta ſingularia, multiplicationis ſubſidio, ex modo* *do constitutis factoribus produci, nec ne.* Vbi enim vel plura, vel et pauciora iis, quae adsunt, facta particularia inde pronascuntur, quantitatem illam compositam ex simplicium quantitatum istarum multiplicatione haud pronatam esse, ideoque, perinde, ac *numeros in se primos*, (*elem. arithm.* §. 15.) divisionem exactam respuere, statuendum est. Vbi vero facta ista, quae in dividendo insunt, singula ex adhibita factorum adsumtorum multiplicatione profluunt, tum 3) *porro disquirendum est, quibusnam signis multiplicantium partes istae cohaerere debeant, ut secundum tritum illud mathematicorum, in multiplicatione ac divisione quantitatum eadem signa* (+ *et* +, item -- et --) *faciunt plus* (+); *diversa minus* (--) *quantitatis propositae signa per adhibitam multiplicationem pronasci potuerint.*

Faciamus ad dividendum propositam esse quantitatem,

$$aa + ba + ac + bc$$

Quaeritur, utrum exacte dividi ea possit, quemque divisorem exigat? Scilicet, facta multiplorum particularium *aa*, *ab* etc. separatione,

litterae anteriores	*a*	*b*	factori primo
posteriores	*a*	*c*	factori alteri tribuantur

quo equidem facto, sequentia nascuntur facta litteralia: *aa* *ba* *ac* *bc*

Patet igitur, quantitatem propositam ex hisce litteris, tanquam factoribus suis, multiplicando produci potuisse. Signa si respexeris, sane quia non nisi signa positiva adsunt, statuendum omnino est, multiplicantium partes singulas

gulas ſignum + praefixum habuiſſe: quo equidem adhibito $(a + b)(a + c) = a^2 + ba + ac + bc$

$$\begin{array}{l} \text{hoc eſt } a + b \\ \qquad\quad a + c \\ \hline \end{array} \text{ multiplic.}$$

prodit $a^2 + ba + ac + bc$. I. Q. E. P.

Quibus ita ſeſe habentibus, $a + b$ pariter, ac $a \dagger c$ tanquam diviſores adhiberi hic poterunt.

$$\begin{array}{l} a \dagger b \,]\; aa \dagger ba \dagger ac \dagger bc \;(\; a \dagger c \\ \qquad\;\; aa \dagger ba \\ \hline \qquad\qquad\quad ac \dagger bc \\ \qquad\qquad\quad ac \dagger bc \\ \hline \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} \dagger aa & \dagger a \text{ quoti P. I.} \\ \dagger a & a \dagger b \text{ Diviſor} \\ & \overline{\qquad\quad} \text{ mult.} \\ & aa \dagger ab \\ \dagger ac & \dagger c \text{ quoti P. II.} \\ \dagger a & a \dagger b \text{ Diviſor} \\ \hline & \dagger ac \dagger bc \end{array}$$

Nempe prima diviſoris pars communiter cum dividendi parte prima comparatur: eoque facto, deprehenditur, *aa* diviſum per *a* gignere quotum *a*. Quotus ille *a* in diviſorem $a \dagger b$ ductus efficit $aa \dagger ba$. quibus a dividendo ſubtractis, remanet $ac \dagger bc$. cuius equidem pars prima *ac* denuo per primam diviſoris partem (*a*) diviſa gignit quotum *c*. quo itidem in diviſorem $a \dagger b$ ducto, provenit $ac \dagger bc$, id quod ſubtractum ab eo, quod antea erat reſiduum, nihil omnino relinquit. Neutiquam vero exiſtimandum hic eſt, primam diviſoris partem neceſſario cum prima dividendi parte, quemadmodum fieri in numerorum diviſione ſolet, conferri oportere. Quum enim nec facta litteralia, (*aa*, *ab* etc.) nec ipſorum elementa ſeu factores (*a*, *b* etc.) valorem quendam localem habent, ſane quodlibet factum litterale ſeu quamlibet dividendi partem cum qualibet dividentis parte conferre licebit; dummodo haec illius menſura ſive elementum extiterit. (*arithm. elem.* §.77.)

 Ne-

Neque enim quotientis valor immutatur, quocunque tandem ordine partes eius disponantur. Sic e. g.

$a + b]\ aa + ba + ac + bc$	$\big(c + a$	$+ ac$	$+ c$ quoti P. I.
$ac + cb$		$+ a$	$a + b$ Divisor
———			——— mult.
$aa + ba$			$+ ac + bc$
$aa + ba$		$+ aa$	$+ a$ quoti P. II.
———		$+ a$	$a + b$ Divisor
0			——— mult.
			$+ aa + ab$

Nimirum *ac* divisum per *a*, quotum gignit *c*. qui cum divisore $(a + b)$ multiplicatus, $ac + bc$ efficit. Facta horum a dividendo subtractione, $aa + ba$ remanet. Cui si denuo divisor adplicatur, tum vel *a* per *a*, vel *ba* per *b* divisum, quotum *a* suppeditat. Hic per divisorem $a + b$ multiplicatus, $aa + ba$ seu bina multipla producit, quibus, quae residuae erant, dividendi partes penitus extinguuntur: adinvento sic quoto $c + a$, vel, quod perinde est, $a + c$. Si $aa + ba + ac + bc$ per $a + c$ dividitur, similem operandi rationem adhibere decebit. Quotus erit $a + b$.

Sit porro dividenda seu resolvenda sequens quantitas

$$ac - ad + bc - bd,$$

quaeritur, an exacte dividi illa possit? quis item sit eiusdem divisor? nempe

multiplorum litterae *anteriores*, *a*, *b* *factorum uni*
posteriores, *c*, *d* *alteri*
tribuantur.

namque hoc facto, patebit, multipla singula *ac*, *ad*, *bc*, *bd* multiplicando exoriri exinde posse. Ad signa quod adtinet, sane multipla negativa $- ad$ et $- bd$, haud obscure ostendunt, ipsorum factores signis diversis adfectos esse; ideoque vel *a*, vel *b*, vel *d* signum $-$ habere. Fingamus, lit-

litteram *a* illud habuisse; certe litterae *d* signum †; ideoque porro, ad producendum $-bd$, litterae *b*. signum $-$ erit praefigendum; ut sit $(-a-b) + d = -ad - bd$. qua equidem admissa hypothesi, signoque † litterae *c* interim adtributo, multipli partes reliquae cum dividendi partibus neutiquam conveniunt.

$$\begin{array}{r}
-a-b \\
\underline{+c+d} \\
-ad-bd \\
\underline{-ac-bc} \\
-ac-ad-bc-bd
\end{array}$$

Consequentis falsitas, falsam esse hypothesin ostendit. Fingamus igitur, litteram *c* signum $-$ habuisse: erit

$$\begin{array}{r}
-a-b \\
\underline{-c+d} \\
-ad-bd \\
\underline{+ac+bc} \\
ac-ad+bc-bd
\end{array}$$

En tibi multiplum aliquod prorsus consentaneum cum eo, quod ad dividendum proposuimus. At enimvero quia vix probabile, quin et absurdum quodammodo videtur, *ex binis defectibus coagmentatam quantitatem* aliquam *defectivam, seu nihilo minorem* $(-a-b)$ simpliciter, seu nulla quantitate positiva praevia, factoris loco constitutam hic esse; haud abs re fuerit, mutata sententia pristina, fingere, $-ad-bd$ produci ex $(+a+b)-d$. Qua equidem hypothesi adsumta, litteraque *c* signo † instructa, dividendi partes singulas, debitis signis suis insignitas, producere licebit. Computi modus hic est

$$\begin{array}{r} a + b \\ c - d \\ \hline -ad - bd \\ ac + bc \\ \hline ac - ad + bc - bd \end{array}$$

Quae quum ita sint, paradoxum equidem, sed verissimum tamen atque ex ipso rerum usu manifestum videtur, *posse omnino ex quantitatibus, sive litteris quibusdam, utpote quantitatum characteribus, signis licet pristinis in contraria* (in −, et − in +) *mutatis, tamen eadem plane, ut antea, multipla seu facta litteralia produci.* Sic enim e.g.

$$\begin{array}{r} +a \\ +b \\ \hline +ab \end{array} \qquad \begin{array}{r} -a \\ -b \\ \hline +ab \end{array} \qquad \text{item} \qquad \begin{array}{r} a + b \\ a + c \\ \hline +ac + bc \\ aa + ab \\ \hline aa + ab + ac + bc \end{array} \qquad \begin{array}{r} -a - b \\ -a - c \\ \hline +ac + bc \\ aa + ab \\ \hline aa + ab + ac + bc. \end{array}$$

Similiter
$$\begin{array}{r} a + b \\ c - x \\ \hline -ax - bx \\ ac \quad bc \\ \hline ac - ax + bc - bx \end{array} \qquad \text{hoc est} \qquad \begin{array}{r} 2 + 3 \\ 5 - 4 \\ \hline -8 - 12 \\ 10 + 15 \\ \hline 10 + 15 - 8 - 12 = 25 - 20 \\ = 5. \end{array}$$

Signis in contraria mutatis,

$$\begin{array}{lcl}
-a-b & \text{hoc est} & -2-3 \\
-c+x & & -5+4 \\
\hline
-ax-bx & & -8-12 \\
+ac+bc & & 10+15 \\
\hline
ac-ax+bc-bx & & 10+-a+15-12=25-20 \\
 & & =5.
\end{array}$$

Abstrusa equidem videri primo intuitu insolentis seu paradoxi phaenomeni huius ratio poterat: sed facilis tamen ipsa est et luculenta, simulatque paullo curatius rem expenderis. Vbi enim eadem signa factoribus sunt praefixa, *defectus* sane *per defectum alium multiplicatus*, hoc est, *aliquoties sublatus* vel *remotus*, *non potest non quantitatem aliquam positivam progignere.* Perinde igitur est, sive a in b, sive $-a$ in $-b$ duxeris. Vbi factoris vel utriusque, vel et alterutrius partes signis variis sunt adfectae, tum itidem, signis in contraria mutatis, perinde est, sive $+a$ cum $-x$; sive $-a$ cum $+x$, fuerit multiplicatum; utrobique enim defectus aliquis, et modo quidem simili adaugetur. His, pro divisore debito reperiendo, sic expositis, citra difficultatem omnem institui divisio ipsa sequentem in modum poterit.

$$\begin{array}{l}
a+b]\; ac-ad+bc-bd\,(c-d \\
\quad\quad ac+bc \\
\hline
\quad\quad -ad-bd \\
\quad\quad -ad-bd \\
\hline
\quad\quad\quad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
c-d]\; ac-ad+bc-bd\,(a+b \\
\quad\quad ac-ad \\
\hline
\quad\quad +bc-bd \\
\quad\quad +bc-bd \\
\hline
\quad\quad\quad 0
\end{array}$$

Haud abſimilis adhiberi in exemplis ſubſequentibus ratiocinatio poterit debebitque.

$$\begin{array}{rl} a-b\,] & a^2-b^2\,\big(\,a+b \\ & a^2-ab \\ \hline & +ab-b^2 \\ & +ab-b^2 \\ \hline & \quad 0 \end{array} \quad \text{vel} \quad \begin{array}{rl} a+b\,] & a^2-b^2\,\big(\,-b+a=a-b \\ & -ab-b^2 \\ \hline & +ab+a^2 \\ & +ab+a^2 \\ \hline & \quad 0 \end{array}$$

Theorema: *Si differentia binorum quadratorum per differentiam radicum dividitur, tum harum ſumma eſt quotus.* et contra. *Si binorum quadratorum differentia per radicum ſummam dividitur, tum harum differentia eſt quotus.*

Sit porro dividendum $3a^2-5ax+2x.^2$ hic certe facta litteralia a^2, ax, x^2 ſignificant, eſſe a et x, et quidem $(a-x)$ in ſemet ipſa multiplicata. Multiplis equidem partialibus praefixi ſunt numeri; ſed quia ipſi ſimplices vel *in ſe primi* ſunt, dubitari vix poteſt, quin ipſi ab alterutro ſolum factore ſint exorti. Sumere igitur $a-x$ tanquam diviſorem omnino licebit.

$$\begin{array}{rl} a-x\,] & 3aa-5ax+2xx\,\big(\,3a-2x \\ & 3aa-3ax+ \\ \hline & \quad -2ax+2xx \\ & \quad -2ax+2xx \\ \hline & \qquad 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3aa & 3a \text{ quoti P. I.} \\ a & a-x \text{ Diviſor} \\ & \text{—— mult.} \\ & 3aa-3ax \\ -2ax & -2x \text{ quoti P. II.} \\ +a & a-x \text{ Diviſor} \\ \hline & -2ax+2xx \end{array}$$

Difficilius equidem reperiri ex facti propoſiti conſideratione factor alter $3a-2x$; ſed tamen, ubi repertus idem eſt, itidem pro diviſore adhiberi poterit.

$3a-2x$

$3a - 2x]\ 3aa - 5ax \dagger 2xx\ (a - x$
$3aa - 2ax$
$-3ax \dagger 2xx$
$-3ax \dagger 2xx$
0

$3aa$	a quoti P. I.
$3a$	$3a - 2x$ Divisor
	——— mult.
	$3aa - 2ax$
$-3ax$	$-x$ quoti P. II.
$\dagger 3a$	$\dagger 3a - 2x$ Divisor
	——— mult.
	$-3ax \dagger 2xx$

Simili fere modo res se se habet, si $6a^2 - 7ax \dagger 2x^2$ ad dividendum proponitur: nisi quod ex numeris multiplorum partialium compositis verosimile hic fiat, factoribus utrisque numeros quosdam determinatos fuisse praefixos; ex quorum multiplicatione mutua ipsi provenerunt. Sic enim $6a^2$ indicio est, litteram a in factore altero fortassis numerum binarium, terniarium in altero praefixum habuisse. Multipli medii, utpote ex binorum aliorum multiplorum additione pronati, numerum (7) in binos alios (4 & 3) fortassis dispergendum esse, itidem haud improbabile videtur. et sic porro in ceteris. Videamus igitur, num, adsumtis pro divisore, $2a - x$, divisio procedat.

$2a - x]\ 6a^2 - 7ax \dagger 2x^2\ (3a - 2x$
$6a^2 - 3ax$
$- 4ax \dagger 2x^2$
$- 4ax \dagger 2x^2$
0

$6a^2$	$3a$ quoti P. I.
$2a$	$2a - x$ Divisor
	——— multipl.
	$6a^2 - 3ax$
$-4ax$	$-2x$ quoti P. II.
$\dagger 2a$	$\dagger 2a - x$ Divisor
	——— mult.
	$- 4ax \dagger 2x^2$

Sit denique ad dividendum proposita quantitas

$aab - aac \dagger abb - abc - bdb \dagger bdc$

Cuius equidem multipla singularia quum triplicem singula litteram, ideoque duplicem multiplicationem prae se se ferunt, pro faciliori divisoris desiderati investigatione, haud abs re fuerit coniectasse, postremam quamque multiplorum istorum partialium litteram factori ceu divisori alteri esse adiudicandam. Extat vero in singulis loco dextro seu ultimo partim *b*, partim *c*. Experiundum igitur, an, sumtis pro divisore *b* et *c*, et quidem, propter signorum in multiplis diversitatem, *b* - *c*, dividi exacte id, quod propositum est, queat.

$$
\begin{array}{rl}
b - c \,] & aab - aac + abb - abc - bdb + bdc \;\big(\, aa + ab - bd \\
& \underline{aab - aac \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad} \\
& \qquad\qquad + abb - abc - bdb + bdc \\
& \qquad\qquad \underline{+ abb - abc \qquad\qquad\quad} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - bdb + bdc \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{- bdb + bdc} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Non usque adeo difficilia vel ardua sunt, fateor, quae hactenus in medium adduximus, *divisionis analyticae exempla*, sed ita tamen, nisi fallor, comparata, ut quantitates compositas resolvendi, et divisores huic negotio accommodatos investigandi habitum aliquem conciliare tironibus valeant. Neque vero nullius aut exigui usus esse quantitates quascunque compositas scite decenterque resolvendi habitum, artis analyticae finis pariter, ac singula fere ipsius problemata ostendunt. Sciendum autem hic est, utrum quantitas quaedam composita dividi exacte possit; atque ubi potest, qualem divisorem adhibere deceat, tum demum facillime coniectari posse, ubi varias ac multiplices variarum quantitatum multiplicationes institueris. Neque enim dividendo separari aut resolvi possunt, nisi quae multiplicationis adiumento sunt composita.

posita. Perpendisse hoc acutissimus ille Cartesianae geometriae logisticaeque speciosae interpres, ERASMVS BARTHOLINVS, CASPARIS filius, videtur, dum is in libro, RENATI DES CARTES *principia matheseos universalis*, seu *introductio ad geometriae methodum*, inscripto, et REN. DES CARTES *geometriae* subnexo, copiosissima cum multiplicationis, tum et divisionis exempla proposuit. digna certe, quae studii algebraici cultoribus non ad *exercitationem* modo, sed et vel maxime ad *imitationem*, commendentur. Neque vero inconsultum neve ab instituti nostri praesentis scopo alienum videbitur, si, exemplo quodam singulari in medium adducto, utriusque negotii specimen aliquod luculentum exhibuerimus.

$$
\begin{array}{l}
a+b\,]\; a^3+b^3\,(\,a^2-ab+b^2 \\
\qquad\quad \underline{a^3+a^2b} \\
\qquad\quad -a^2b+b^3 \\
\qquad\quad \underline{-a^2b-ab^2} \\
\qquad\quad +ab^2+b^3 \\
\qquad\quad \underline{+ab^2+b^3} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

aaa	$aa = a^2$ quoti P. I.
a	$a+b$ Divisor
	——— multipl.
	a^3+a^2b
$-aab$	$-ab$. quoti P. II.
$+a$	$a+b$ Divisor
	——— multipl.
	$-aab-abb$
$+ab^2$	$+b^2$ quoti P. III.
a	$a+b$
	——— multipl.
	ab^2+b^3

Computi modus hic eſt. Dividendi pars prima a^3 cum diviſoris parte prima a comparata dat quotum a^2. quo in diviſorem integrum $a + b$ ducto, naſcitur factum $a^3 + a^2 b$. Quod ubi a dividendo $a^3 + b^3$ ſubtrahitur, a^3 evaneſcit; ſed $a^2 b$ ſubtrahendum quia in dividendo haud ineſt, adinſtar *defectus* cum quantitate poſitiva ſeu altera dividendi parte b^3 remanet. Quodſi porro prima diviſoris pars $+ a$ cum $- aab$ confertur, quoti pars altera $- ab$ hinc exoritur. Facta huius per diviſorem $a + b$ multiplicatione, $- aab - abb$ producitur. Cuius a dividendi reſiduo $- a^2 b + b^3$ facta ſubtractione, $- a^2 b$ perit; ſed defectus $- ab^2$ ſubducendus in quantitatem poſitivam degenerat, ideoque remanet $+ ab^2 + b^3$. Huic denique ſi denuo primam diviſoris partem a adhibueris, quoti pars tertia b^2 exinde reſultat. Qua in diviſorem $a + b$ ducta, $abb + bbb$ producitur. Facta huius a dividendi reliquiis ſubtractione, nihil remanet.

Nec aliter ſe res habet, quemadmodum recte BARTHOLINVS obſervavit ipſoque opere oſtendit, ſi dividatur $a^3 + b^3$ per $a + b$, et incipiatur ab ultimo (dividendi ac diviſoris) termino.

$$\begin{array}{l|l}
a+b]\; a^3+b^3\,(b^2-ab+a^2 & bbb\;\; bb \text{ quoti P. I.} \\
\quad ab^2+b^3 & \quad b \\
\quad -ab^2+a^3 & -abb\;\; -ab \text{ quoti P. II.} \\
\quad -ab^2-a^2b & \quad b \\
\quad +a^2b+a^3 & +aab\;\; aa \text{ quoti P. III.} \\
\quad +a^2b+a^3 & \quad b \\
\quad\quad 0 &
\end{array}$$

vel, quod perinde est,

$$\begin{array}{l}
b+a]\; bbb+aaa\,(bb-ab+aa \\
\quad bbb+abb \\
\quad -abb+aaa \\
\quad -abb-aab \\
\quad aab+aaa \\
\quad aab+aaa \\
\quad\quad 0
\end{array}$$

Examen 1) *speciosum*

$$\begin{array}{ll}
\text{quotus} & a^2-ab+b^2 \\
\text{Divisor} & \quad a+b \\
\hline
 & a^2b-ab^2+b^3 \\
 & a^3-a^2b+ab^2 \\
\hline
 & a^3+b^3
\end{array}$$

Examen 2) *arithmeticum, sive in numeris determinatis.*

Sit	$a = 3$	$b = 4$		
Erit	$a^3 = 27$	$b^3 = 64$		
Ideoque	$a^3 + b^3$	$= 27 + 64$	$= 91$	
Proinde	$\frac{a^3+b^3}{a+b}$	$= \frac{27+64}{3+4}$	$= \frac{91}{7}$	$= 13$

Pro-

Probe circumſpectis, quae in praemiſſa diviſione obvia ſunt, ſingulis, non meditationis modo artificium, quo fortaſſis uſus eſt BARTHOLINVS in excogitando exemplo iſto eleganti, perſpicitur; (ſiquidem is in $(a-b)^2$ ſive $a^2 - 2ab + b^2$, hoc eſt quantitatis $a - b$ quadrato, partis primae in alteram ductae factum duplum $-2ab$ in ſimplum $-ab$ commutavit, eoque facto, mutilatum illud quantitatis binomiae $a - b$ quadratum per $a + b$, ſive earundem radicum ſummam, multiplicavit.) ſed ſequens etiam *theorema* exinde naſcitur: *Summa duorum cuborum quorumcunque* $(a^3 + b^3)$ *aequalis eſt facto ex differentia facti radicum* (ab) *a ſumma quadratorum ex ipſis,* $(a^2 + b^2)$ *cum radicum aggregato* $(a + b)$ *multiplicata. hoc eſt* $(a^2 + b^2 - ab)\,(a + b)$. vel:

Si binorum quorumcunque cuborum ſumma per ſummam radicum dividitur, tum quotiens ſummae quadratorum ex iisdem radicibus progenitorum, ſed radicum multiplo minutae, aequalis eſt.

vel denique

$$((a-b)^2 + ab)\,(a+b) = a^3 + b^3$$

hoc eſt $$\begin{pmatrix} a^2 - & 2ab + b^2 \\ + & ab \end{pmatrix}(a+b) = a^3 + b^3$$

vel $$(a^2 - \quad ab + b^2)\,(a+b) = a^3 + b^3$$

Si quadratum ex binarum quantitatum differentia $(a - b)^2$ *facto ex radicibus* (ab) *adaugetur, itaque factum illud radicum in ſe invicem defectivum duplum* $(-2ab)$ *in ſimplum* $(-ab)$ *transmutatur, tum facta eius per radicum ſummam multiplicatione, factum erit ſumma cuborum ex ipſis illis radicibus.*

Haec circa BARTHOLINVM, pro exercitatione ſufficiant. reliquum eſt, ut, quid *imitatio* ſeu *fictio ingenioſa* prae-

praestare hic valeat, dispiciamus. Juvabit igitur tentasse, annon circa *binorum quadratorum quoque summam* ($a^2 + b^2$) similis adhiberi divisio, per radicum nempe summam, eademque exacta, seu a fractionibus libera queat. Neque vero inconsultum videtur, tironum in gratiam, a numeris determinatis sive singularibus tentaminis huius primordia capere, factaque deinceps exemplorum singularium comparatione, pedetentim ad designationem ac regulam quandam universalem progredi.

(A)

Sit $a = 6$, $b = 2$ ideoque $a + b = 6 + 2$

Erit $a^2 = 36$, $b^2 = 4$

Adeoque $a^2 + b^2 = 36 + 4 = 40$

Proinde $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{36 + 4}{6 + 2} = \frac{40}{8} = 5$

(B)

Sit $a = 6$, $b = 3$, ideoque $a + b = 6 + 3$

Erit $a^2 = 36$, $b^2 = 9$

Ideoque $a^2 + b^2 = 36 + 9 = 45$

Proinde $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{36 + 9}{6 + 3} = \frac{45}{9} = 5$

(C)

Sit $a = 4$, $b = 12$, ideoque $a + b = 4 + 12 = 16$

Erit $a^2 = 16$, $b^2 = 144$

Ideoque $a^2 + b^2 = 16 + 144 = 160$

Proinde $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{16 + 144}{4 + 12} = \frac{160}{16} = 10$

(D)

Sit $a = 12$, $b = 24$, ideoque $a + b = 12 + 24 = 36$

Erit $a^2 = 144$, $b^2 = 576$

Ideoque $a^2 + b^2 = 144 + 576 = 720$

Proinde $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{144 + 576}{12 + 24} = \frac{720}{36} = 20$

Hactenus equidem feliciter divisionis negotium processit: dum per radicum summam, citra fractionem omnem, dividi binorum quadratorum summa potuit. Sed minus tamen perpetuum illud esse, mutatis radicum valoribus, statim adparebit.

(α)

Sit nempe $a = 4$, $b = 5$, ideoque $a + b = 4 + 5$

Erit $a^2 = 16$, $b^2 = 25$

Ideoque $a^2 + b^2 = 16 + 25 = 41$

Proinde $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{16 + 25}{4 + 5} = \frac{41}{9} = 4\frac{5}{9}$

(β)

Sit $a = 5$, $b = 7$, ideoque $a + b = 5 + 7$

Erit $a^2 = 25$, $b^2 = 49$

Ideoque $a^2 + b^2 = 25 + 49 = 74$

Proinde $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{25 + 49}{5 + 7} = \frac{74}{12} = 6\frac{2}{12}$

(γ)

Sit $a = 2$, $b = 8$, ideoque $a + b = 2 + 8$

Erit $a^2 = 4$, $b^2 = 64$

Ideoque $a^2 + b^2 = 4 + 64 = 68$

Proinde $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{4 + 64}{2 + 8} = \frac{68}{10} = 6\frac{8}{10}$

(δ)

Sit denique $a = 2$, $b = 14$, Ideoque $a \dagger b = 2 \dagger 14$

Erit $a^2 = 4$, $b^2 = 196$

Ideoque $a^2 \dagger b^2 = 4 \dagger 196 = 200$

Proinde $\frac{a^2 \dagger b^2}{a \dagger b} = \frac{4 \dagger 196}{2 \dagger 14} = \frac{200}{16} = 12 \frac{8}{16}$

et ſic porro.

En tibi exempla quaedam, ubi quadratorum duorum ſumma neutiquam dividi exacte ſeu citra fractionem per radicum ſummam poteſt! quae rei huius ratio ſit, quidque tandem diſcriminis haec inter et ſuperiora exempla intercedat, haud immerito quaeſiveris. Sic ergo velim habeas: *binorum quadratorum ſummam dividi exacte vel citra fractionem haud poſſe, ſiquidem binae radices vel ſunt incommenſurabiles* (e.g. Si a = 4, b = 5. a = 5, b = 7. etc.) *vel commenſurabiles quidem ſunt, ſed* (2) *pars tamen aliquota communis, ſive radix minor, non denuo commenſurabilis eſt multiplicatori alteri unitate aucto*, (e.g. a = 2, b = 8. *hic* $\frac{8}{2} = 4$, *ſed* $\frac{2}{4 \dagger 1}$ vel $\frac{4 \dagger 1}{2}$ *quotum integrum neutiquam efficit;* vel *denique ſi radices quidem inter ſe, nec non pars ipſarum aliquota communis et factor alter commenſurabiles ſunt; ſed* (3) *illa tamen hoc unitate aucto minor exiſtit.* e. g. *Si* a = 2, b = 14, *erit factor unitate auctus* $\frac{14}{2} + 1 = 7 + 1 = 8$; *adeoque cum parte aliquota communi ſeu radice minore* 2. *commenſurabilis quidem, ſed tamen ipſa maior. Quod ſi vero binae quantitates vel radices et* 1) *inuicem commenſurabiles ſunt, et* 2) *ipſarum pars aliquota communis cum multiplicatore altero* (qui nempe in partem aliquotam ductus radicem maiorem producit) *unitate aucto*

cto itidem commensurabilis, et denique 3) eo maior est, tum per ipsarum summam exacte dividi aggregatum ex ipsarum quadratis potest.

Sic, ubi $a = 4$, $b = 12$

Erit $\frac{b}{a} = \frac{12}{4} = 3$ partis aliquotae multiplicator

Quia $12 = 4 \cdot 3$

Erit pars aliquota communis $= 4$
Multiplicator unitate auctus $= 3 + 1 = 4$

Ideoque pars aliquota com. per multiplic. $+ 1$ divisa $= \frac{4}{4} = 1$

Similiter ubi $a = 12$, $b = 24$

Erit $\frac{b}{a} = \frac{24}{12} = 2$ partis aliquotae multiplicator

Iam quia $24 = 12 \cdot 2$

Erit pars aliquota communis 12
Multiplicator unitate auctus $= 2 + 1 = 3$

Ideoque P. A. C. per multiplicatorem $+ 1$ divisa $= \frac{12}{3} = 4$

Veritati neutiquam contraria esse, quae *inductione* sive curiosa exemplorum singularium consideratione adhibita, stabilivimus, theoremata, ipse rerum usus atque experimenta comprobant. Quo autem planius, quibus modis reperiri haec ipsa dogmata potuerint, quam item eximium in explorandis veritatibus usum praestare logistica speciosa possit, intelligatur, pretium operae, nisi me omnia fallunt, fecerimus; ubi litteris, ceu quantitatum signis universalibus, *radices* pariter atque ipsarum *quadrata* rite nunc designaverimus.

Sit

Sit igitur Radix I. $= a$. Radix II. $= b = am$ [hoc est a multiplic. per aliud quid.

Erit quadr. I. $= a^2$. quadr. II. $= b^2 = a^2 m^2$

Ideoque summa binorum quadr. $= a^2 + b^2 = a^2 + a^2 m^2$

$$= a^2 m^2 + a^2$$

$$= (m^2 + 1) a^2$$

Proinde summa bin. quadr. per summam radd. divisa $= \frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{a^2 m^2 + a^2}{am + a}$

$$= \frac{(m^2 + 1) a^2}{(m + 1) a}$$

$$= \frac{(m^2 + 1) a}{m + 1}$$

Quocirca verum est, quod paullo ante pronuntiavimus. Nempe *si, binorum quadratorum quorundam* (a^2 *et* $a^2 m^2$) *radicibus* (a *et* b, *seu* a *et* am) *invicem commensurabilibus existentibus, exacte vel citra fractionem dividi illorum summa per radicum summam debet, necessarium omnino est, ut radicum pars aliquota communis* (a) *radicis maioris* (am) *factori alteri, unitate aucto,* (m + 1) *vel aequalis vel commensurabilis existat.*

Sit ex. gr. $a = 4$, $m = 3$

item $a = m + 1 = 4$

denique $b = am = 4 \cdot 3 = 12$ [ex hypothesi

Erit $a^2 + b^2 = a^2 + a^2 m^2 = 16 + 144 = 160$

Ideoque $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{a^2 + a^2 m^2}{a + am} = \frac{160}{16} = 10$

vel

vel

Sit $a = 4, \quad m = 3$

Erit $m + 1 = 3 + 1 = 4 = a$

item $m^2 + 1 = 9 + 1 = 10$

et $am = 4.3 = 12$

Ideoque $\frac{(m^2 + 1)\,a^2}{(m + 1)\,a} = \frac{10.\ \cancel{1}\cancel{6}}{\cancel{4}.\ \cancel{4}.} = 10$

vel $\frac{(m^2 + 1)\,a}{m + 1} = \frac{10.\ \cancel{4}.}{\cancel{4}} = 10$

item

Sit $a = 6, \quad m = 2$

item $a = (m + 1)\,n = (2 + 1)\,n = 3n = 3.2$

hoc eſt a commenſurabile cum $m + 1$

denique $b = am = 6.2 = 12$

Erit $a^2 + b^2 = a^2 + a^2 m^2 = 36 + 144 = 180$

Ideoque $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{a^2 + a^2 m^2}{a + am} = \frac{\cancel{1}80}{\cancel{1}8} = 10$

vel

Sit $a = 6 \quad m = 2$

Erit $m + 1 = 3 = \frac{a}{n}$

et $(m + 1)\,n = a,$

Item $m^2 + 1 = 4 + 1$

denique $am = 6.2 = 12$

Ideoque $\frac{(m^2 + 1)\,a^2}{(m + 1)\,a} = \frac{5.\ \cancel{3}\cancel{6}}{\cancel{3}.\ \cancel{6}} = \frac{5.\ \cancel{3}\cancel{6}}{\cancel{1}8} = \frac{5.\ 2.\ \cancel{1}8}{\cancel{1}8} = 10$

vel $\frac{(m^2 + 1)\,a}{(m + 1)} = \frac{5.\ 6}{3} = \frac{5.\ 2.\ \cancel{3}}{\cancel{3}.} = 10$

Sed,

Sed, versa vice, propter rationem supra memoratam, numerus mixtus per divisionem exoritur.

Sit enim $a = 2, \quad m = 9$
item $an = 2.5 = m + 1 = 9 + 1 = 10$
vel $a = \frac{m+1}{n} = \frac{9+1}{5} = 2$
denique $b = am = 2.9 = 18$

hoc est a commensurabile cum $m+1$, sed tamen ipso minor.

Erit $a^2 + b^2 = a^2 + a^2 m^2 = 4 + 324 = 328$

Ideoque $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{a^2 + a^2 m^2}{a + am} = \frac{328}{20} = 16\frac{8}{20}$

Sit $a = 2$, vel $m = 9$

Erit $m + 1 = 10$, item $\frac{m+1}{n} = \frac{10}{5} = 2 = a$

item $(m^2+1) = 81+1$ item $\frac{m^2+1}{n} = \frac{82}{5} = 16\frac{2}{5}$

Ideoque $\frac{(m^2+1)a^2}{(m+1)a} = \frac{82.\,2.\,2}{10.\,2} = \frac{82.\,\cancel{2}.\,\cancel{2}}{5.\,\cancel{2}.\,\cancel{2}} = \frac{82}{5}$

vel $\frac{(m^2+1)a}{m+1} = \frac{82.\,2.}{10} = \frac{82.\,\cancel{2}}{5.\,\cancel{2}} = \frac{82}{5} = 16\frac{2}{5}$

Scholion.

Quoniam $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{(m^2+1)a}{m+1}$

Sane si $a = m+1$; erit $\frac{(m^2+1)a}{m+1} = m^2 + 1$.

hoc est: *si summa duorum quadratorum, quorum radices ita invicem commensurabiles sunt, ut altera* (a) *alterius* (am) *pars aliquota, alterique factori unitate aucto* (m+1) *aequalis existat,*

existat, per summam radicum $(a + ma)$ *dividitur, tum quotus factoris quadrato, unitate aucto,* $(m^2 + 1)$ *aequalis est.* Quodsi vero $\frac{a}{n} = m + 1$, vel $a = (m + 1)\, n$, erit $\frac{(m^2 + 1)\, a}{m + 1} = (m^2 + 1)\, n$ hoc est: *si summa duorum quadratorum, quorum radices ita invicem commensurabiles sunt, ut altera alterius pars aliquota, alteriusque factoris unitate aucti* $(m + 1)$ *multiplum existat,* ($\frac{a}{n} = m + 1$, *vel* $a = (m + 1)\, n$) *per summam radicum dividitur; tum quotus factoris quadrato, unitate aucto et per* n *multiplicato,* ($(m^2 + 1)\, n$) *aequalis est.*

His, pro demonstranda calculi analytici in explorandis veritatibus abstrusis foecunditate sive utilitate, tironum in gratiam, aliquanto prolixius expositis, e diverticulo nunc in viam redeundum est, summatimque observandum, *earum quantitatum compositarum, quae sine fractione vel exacte dividi in arithmetica speciosa nequeunt, signa contraria esse illis, quae quantitatibus exacte divisibilius supra tribuimus.* hoc est; *quantitatem compositam pro minus exacte divisibili reputandam esse, si* 1) *multipla eius particularia vel plura sunt vel et pauciora iis, quae ex ipsorum factoribus dispersis multiplicando nasci poterant;* vel et 2) *totidem quidem multipla partialia adsunt, quot confici ex litterarum, tanquam factorum seu elementorum, dispersione possunt; sed eiusmodi tamen signis instructa, quae ex factorum signis, quomodocunque etiam constitutis, provenire haudquaquam possunt.* Pro exemplis esse poterunt sequentia

$a^2 + 2ab + 3ac + b^2$

$a^2 + 3ab - abd$

item $a^2 + 2ab - b^2$

vel $a^2 - 2ab - b^2$

vel et interdum $a^2 + b^2$

namque $(a+b)(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)(a-b) = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Sed $a^2 + b^2$ dividi nonnunquam exacte, et per radicum quidem ſummam $(a+b)$ poſſe, ex hactenus propoſitis liquet. Similiter $a^2 - ab - ac - bc$ exacte dividi nequit. nam

$(a+b)(a+c) = a^2 + ab + ac + bc$

$(a-b)(a-c) = a^2 - ab - ac + bc$

$(a+b)(a-c) = a^2 + ab - ac - bc$

$(a-b)(a+c) = a^2 - ab + ac - bc$

ad §. 43. 44.

Equidem, ſi, ordine inverſo, *quantitas integra per fractam multiplicanda* eſt, eandem plane regulam obtinere, quae in fractionis per quantitatem integram multiplicatione adhibetur, exinde manifeſtum eſt, quia a multiplicatum per $\frac{c}{d}$ idem eſt ac $\frac{c}{d}$ multiplicatum per a. Contra vero ſi *quantitas quaedam integra per fractam dividenda* proponitur, ſequens operandi modus adhibendus eſt.

Sit a dividendum per $\frac{c}{d}$

Quia $a = \frac{a}{1}$ [*ſec. reductionis artificium.*

Erit $a : \frac{c}{d} = \frac{a}{1} : \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{c}$

hinc

hinc theorema: *factum ex integro in fractionis denominatorem dividi per numeratorem debet, si integrum per fractionem dividendum.*

ad §. 45. *sqq.*

Quoniam $\frac{b}{a + c} = \frac{b}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{bc^2}{a^3} - \frac{bc^3}{a^4} + \frac{bc^4}{a^5}$ et sic porro in infinitum;

vel, quod perinde est, $\frac{a}{b + c} = \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4}$ etc.

consequens hinc est, quantitatis simplicioris sive minoris (b), per maiorem seu compositam ($a + c$) divisae, quotientem esse seriem infinitam particularum seu fractionum, quae 1) *alternatim positivae sunt et defectivae;* et 2) quarum *numeratores* exhibent progressionem aliquam geometricam, cuius terminus primus quantitati dividendae, rationis autem exponens divisoris parti alterutri aequatur ($b - bc + bc^2 - bc^3$. etc.) 3) *denominatores* vero progressionem quandam geometricam aliam continent, cuius terminus primus, idemque exponens, alteri divisoris parti aequales existunt. ($a, a^2, a^3, a^4,$) Quibus equidem rite observatis singulis, non plenius tantum comprehendi pronuntiata Wolffiana, sed facili quoque negotio suppleri (quod obiter hic notandum duximus) ea poterunt, quae in *institutis algebraicis Wideburgianis* (Einleitung zu der höhern Mathesi Cap. V. §. 39. p. 40.) typothetae fortassis culpa, videntur praetermissa. De cetero quum α) non modo unaquaevis *quantitas minor per maiorem divisa fractionem* aliquam efficit; sed β) *quantitas* etiam *integra* nulla non, fictionis mathematicae subsidio, *transformari in fractionem* aliquam, spuriam nempe, seu integro maiorem; et γ) *fractionis* denique cuiusvis *denominator* in varias resolvi partes; harundemque

demque δ) modo *maior*, modo *minor* numeratoris exponens existere in fractionum serie ista potest; sane haud difficulter exinde intelligitur, *posse non solum fractionem, sed quantitatem quoque integram quamcunque in infinitas easdemque varias nunc fractionum, nunc numerorum integrorum, secundum eandem rationem vel crescentium, vel decrescentium, series resolvi.*

Sit enim

a) Dividendus $b = 1$

Divisoris pars I. $a = 1$

- - P. II. $c = 1$

Erit $\frac{b}{a+c} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ & sic porro in infinitum

b) Dividendus $b = 1$

Divisoris P. I. $a = 2$

- - $c = 1$

Erit $\frac{b}{a+c} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$ etc.

$= \frac{1}{2} - \frac{1.1}{2.2} + \frac{1.1.1}{2.2.2} - \frac{1.1.1.1}{2.2.2.2}$ — etc.

c) Dividendus $b = 1$

Divisoris P. I. $a = 1$

- - P. II. $c = 2$

Erit

Erit $\frac{b}{a+c} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{1} - \frac{1.2}{1.1} + \frac{1.2.2}{1.1.1} - \frac{1.2.2.2}{1.1.1.1}$ etc.

$= \frac{1}{1} - \frac{2}{1} + \frac{4}{1} - \frac{8}{1} + \frac{16}{1}$ etc.

$= 1 - 2 + 4 - 8 + 16$ etc.

d) Dividendus $b = 1$

Diviſoris P. I. $a = 3$

- - P. II. $c = 1$

Erit $\frac{b}{a+c} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ et ſic in infinitum.

e) Dividendus $b = 1$

Diviſoris P. I. $a = 2$

- - P. II. $c = 2$

Erit $\frac{b}{a+c} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{2} - \frac{1.2}{2.2} + \frac{1.2.2}{2.2.2} - \frac{1.2.2.2}{2.2.2.2}$ etc.

$= \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{4}{8} - \frac{8}{16}$ etc.

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ etc.

f) Divi-

f) Dividendus $b = 1$
Divisoris P. I. $a = 1$
- - P. II. $c = 3$

$$\text{Erit } \frac{b}{a \dagger c} = \frac{1}{1 \dagger 3} = \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1.3}{1.1} + \frac{1.3.3}{1.1.1} - \frac{1.3.3.3}{1.1.1.1} \dagger \frac{1.3.3.3.3}{1.1.1.1.1} \text{ etc.}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{3}{1} + \frac{9}{1} - \frac{27}{1} + \frac{81}{1} - \frac{243}{1} \text{ etc.}$$

$$= 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 \text{ etc.}$$

g) Dividendus $b = 1$
Divisoris P. I. $a = 4$
- - P. II. $c = 1$

$$\text{Erit } \frac{b}{a \dagger c} = \frac{1}{4 \dagger 1} = \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1.1}{4\,4} + \frac{1.1.1}{4.4.4} - \frac{1.1.1.1}{4.4.4.4} \dagger \frac{1.1.1.1.1}{4.4.4.4.4} \text{ etc.}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{1}{256} \dagger \frac{1}{1024} \text{ etc.}$$

h) Dividendus $b = 1$
Divisoris P. I. $a = 1$
- - P. II. $c = 4$

$$\text{Erit } \frac{b}{a \dagger c} = \frac{1}{1 \dagger 4} = \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1.4}{1.1} + \frac{1.4.4}{1.1.1} - \frac{1.4.4.4}{1.1.1.1} \dagger \frac{1.4.4.4.4}{1.1.1.1.1} \text{ etc.}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{4}{1} + \frac{16}{1} - \frac{64}{1} \dagger \frac{256}{1} \text{ etc.}$$

$$= 1 - 4 + 16 - 64 \dagger 256 \text{ etc.}$$

i) Faciamus porro, fractionem $\frac{2}{3}$ per istiusmodi seriem infinitam, quoad signa + et - alternantem, esse repraesentandam: sane quia

hoc in casu $\frac{b}{a+c} = \frac{2}{3} = \frac{2}{2+1}$ adeoque $b = 2, a = 2, c = 1.$

$$\text{Erit } \frac{2}{3} = \frac{2}{2} - \frac{2.1}{2.2} + \frac{2.1.1}{2.2.2} - \frac{2.1.1.1}{2.2.2.2} \text{ etc.}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} \text{ etc.}$$

k) vel ubi $b = 2, a = 1,$ et $c = 2.$

$$\text{Erit } \frac{b}{a+c} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{1} - \frac{2.2}{1.1} + \frac{2.2.2}{1.1.1} - \frac{2.2.2.2}{1.1.1.1} \text{ etc.}$$

$$= 2 - 4 + 8 - 16 + 32 \text{ etc.}$$

l) Sit denique *numerus integer* 3 per similem infinitorum terminorum seriem exprimendus, eumque in finem in fractionem aliquam, cuius denominator itidem est 3, transformatus,

$$\text{erit } \frac{b}{a+c} = 3 = \frac{3.3}{3} = \frac{9}{3} = \frac{9}{2+1} \text{ ideoque}$$

$$\frac{9}{3} = \frac{9}{2} - \frac{9.1}{2.2} + \frac{9.1.1}{2.2.2} - \frac{9.1.1.1}{2.2.2.2} \text{ etc.}$$

$$= \tfrac{9}{2} - \tfrac{9}{4} + \tfrac{9}{8} - \tfrac{9}{16} + \tfrac{9}{32} - \tfrac{9}{64} + \tfrac{9}{128} \text{ etc.}$$

$$= 4\tfrac{1}{2} - 2\tfrac{1}{4} + 1\tfrac{1}{8} - \tfrac{9}{16} + \tfrac{9}{32} - \tfrac{9}{64} + \tfrac{9}{128} \text{ etc.}$$

Ex hactenus propositis exemplis, quae complurium aliorum exhibere normam possunt, fere sequentia profluunt theoremata:

1) *Fractio omnis (adeoque spuria etiam, seu quantitas integra in fractionem transformata,) exprimi potest vel* α) *per* seriem *aliquam* convergentem, h. e. *innumerarum particularum seu fractionum, continue, si valorem spectes, decrescentium, progressionem, quarum* communis numerator *fractionis resolvendae numeratori;* termini *autem* primi aequalis est denominator, idemque exponens rationis, *unitate differt a denominatore fractionis resolvendae, et* signa *denique* + et - invicem alternant. (Vid litter. b. d. g. i. l.) *vel* β) *per* seriem *aliquam* divergentem, *hoc est, infinitam numerorum integrorum progressionem geometricam, cuius* terminus primus *fractionis resolvendae numeratori*, rationis *autem* exponens *fractionis dispergendae denominatori unitate minuto aequalis est; et signa denique + et - itidem alternant.* (Vid. litter. c. f. h. quas enim litterae *a* et *e*. continent, series indifferentes haud incommode adpellaveris.

2) *Summa seriei infinitae fractionum, quoad signa + et - alternantium, et quarum omnium communis vel idem est numerator; denominatores autem secundum rationem aliquam geometricam sic procedunt, ut exponens termini primi denominatori aequalis existat, est fractio quaedam, cuius numerator idem cum terminorum numeratore communi; denominator autem unitate maior est fractionis primae denominatore.* Sic enim

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} - \tfrac{1}{64} \text{ et sic in infin.} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{27} - \tfrac{1}{81} + \tfrac{1}{243} \text{ et sic in infin.} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$$

$$\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} - \tfrac{1}{256} \text{ et sic in infin.} = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5} \text{ etc.}$$

 Si-

Similiter

$\frac{2}{2} - \frac{2}{4} + \frac{2}{8} - \frac{2}{16} + \frac{2}{32}$ et sic in infin. $= \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{2}{27} - \frac{2}{81}$ et sic in infin. $= \frac{2}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{3}{3} - \frac{3}{9} + \frac{3}{27} - \frac{3}{81}$ etc. $= \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$

Sic etiam, quia $1 = \frac{1}{1}$

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ et sic in infin. $= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Vtique vero recte se se habere, quae de fractionum quoad signa + et - alternantium, quoad denominatores autem geometrice progredientium serie infinita in summam colligenda nunc diximus, haud obscure statim perspicitur, si usitatum progressiones geometricas summandi artificium, examinis loco, adhibuerimus.

Sic pro summatione progressionis vel *seriei convergentis* $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ etc.

Term. ult. (quippe infinite parvus) $= 0$
Terminus primus $= \frac{1}{2}$

Ergo differ. T. I. et ultimi $= -\frac{1}{2}$
Expon. rat. unitate minutus $= -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$

Ergo quotus differentiae terminorum extrem. per expon. -1. divisae $= -\frac{1}{2} : -\frac{3}{2}$
$= -\frac{1}{2} \cdot -\frac{2}{3}$
$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Term. ultim. $= 0$

Ergo summa progressionis $= \frac{1}{3}$

Similiter pro summatione seriei convergentis $\frac{3}{3} - \frac{3}{9} + \frac{3}{27} - \frac{3}{81}$ etc.

Term.

Term. ult. (infinite exiguus) $= 0$
Terminus primus $= \frac{3}{3}$

Ergo differ. T. I. et ultimi $= -\frac{3}{3}$
Expon. rat. unitate minutus $= -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$

Ergo quotus differ. term. extremorum per expon. -1 divisae $= -\frac{3}{3} \div -\frac{4}{3} = -\frac{3}{3} \cdot -\frac{3}{4} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$
Terminus ultimus $= 0$

Ergo summa progressionis $= \frac{3}{4}$

Positis numerorum determinatorum loco litteris sive signis quantitatum universalibus, sic, ut numerator communis sit vel 1, vel et numerus quidam constans n; denominator primae fractionis $= a$, idemque exponenti m aequalis; *summa seriei infinitae fractionum, quoad signa † et - alternantium*, *erit* in casu primo $\frac{1}{m \dagger 1} = \frac{1}{a \dagger 1}$ in casu altero $\frac{n}{m \dagger 1} = \frac{n}{a \dagger 1}$. Iam seriei infinitae fractionum mere positivarum, sive quoad signa † et - neutiquam alternantium, ceteroquin autem fractionibus alternantibus modo dictis haud absimilium, summa $= \frac{1}{m-1}$ vel et $\frac{mn}{(m-1)a} = \frac{n}{m-1}$ (Vid. WOLFFII Anfangs-Gründe der Algebra §. 153.) Ideoque *seriei fractionum, numeratorem communem, denominatores geometrice progredientes habentium, infinitae alternantis summa a seriei fractionum similium infinitae minus alternantis, sed partes mere positivas habentis, summa in eo discrepat, quod in hac* termini primi denominator, vel *exponens rationis unitate minutus, in ista vero idem exponens unitate auctus, tanquam denominator adhibeatur.* Sic enim e. c. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \dagger \frac{1}{8}$ etc. $= \frac{1}{2 \dagger 1} = \frac{1}{3}$ Sed $\frac{1}{2} \dagger \frac{1}{4} \dagger \frac{1}{8}$ etc.

=

$= \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1.$ item $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} \dagger \frac{1}{27}$ etc. $= \frac{1}{3 \dagger 1} = \frac{1}{4}.$ Sed $\frac{1}{3} \dagger \frac{1}{9} \dagger \frac{1}{27}$ etc. $= \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}.$ Similiter $\frac{2}{3} - \frac{2}{9} \dagger \frac{2}{27} - \frac{2}{81}$ etc. $= \frac{2}{3 \dagger 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; Sed $\frac{2}{3} \dagger \frac{2}{9} \dagger \frac{2}{27}$ etc. $= \frac{2}{3-1} = \frac{2}{2} = 1.$ Posse igitur seriei fractionum alternantium summam ex minus alternantium seu mere positivarum seriei summa, et vice quoque versa, facili negotio investigari, res ipsa loquitur.

3) Series divergens *ad primum eundemque iustum valorem suum reducitur*, vel, quod perinde est, numerorum integrorum ab unitate incipientium, et quoad signa † et - alternantium seriei geometricae, quoquo tandem libuerit, continuatae, summa habetur, *si termino ultimo, velut numeratori cuidam, exponens rationis unitate auctus, velut denominator, subiicitur, eoque facto termini defectivi in summam collecti a positivis, itidem in summam collectis, subtrahuntur.* Sic enim e. c. $1 - 2 \dagger 4 - 8 \dagger 16 = 1 - 2 \dagger 4 - 8 \dagger \frac{16}{3} \left(\frac{16}{2 \dagger 1}\right) = \frac{1}{3}.$ nam $1 \dagger 4 \dagger \frac{16}{3} = \frac{3}{3} \dagger \frac{12}{3} \dagger \frac{16}{3} = \frac{31}{3}$; sed $- 2 - 8 = - \frac{6}{3} - \frac{24}{3} = - \frac{30}{3}.$ ideoque $\frac{31}{3} - \frac{30}{3} = \frac{1}{3}.$

* *pag.* 309. *columna* 2. *lin.* 3. pro $1 - 2 \dagger 4 - 8 \dagger 16 - 64 \dagger 128.$ etc. *ponatur* $1 - 2 \dagger 4 - 8 \dagger 16 - 32 \dagger 64 - 128.$ etc. *item lin.* 3. *a fine pro* $\frac{c^2}{1 \dagger c}$ *ponatur* $\frac{c^4}{1 \dagger c}$

CAP. II.
DE
ARITHMETICA IRRATIONALIVM.

QVantitas irrationalis, surda, ineffabilis, apud mathematicos vocatur, *quae unitati haud commensurabilis est*, sive quae nec unitatem pro parte aliquota, nec cum unitate partem aliquotam communem habet; (*arithm. elem.* §. 43.) et cuius proinde primum elementum sive unitas adsignari haud omnino potest. Quod ipsum equidem quia usu venire circa istiusmodi numerorum seu quantitatum radices solet, ex quibus radix exacta extrahi nequit; in promtu esse ratio videtur, quare mathematici, pro quantitate irrationali designanda, adhibeant *signum radicale, istiusmodi quantitati vel dignitati praefixum, cuius exponens a signi istius radicalis exponente discrepat.* e. g. $\sqrt{3}$ sive $\sqrt[2]{3^1}$; $\sqrt[3]{4}$ sive $\sqrt[3]{2^2}$; et generatim $\sqrt[n]{x^m}$. Quoniam autem porro ex quantitate vel potentia quadam data, radix desiderata quaevis habetur, si per huius exponentem illius exponens dividitur; sua velut sponte hinc consequitur, *quantitates surdas* sive *irrationales spectari posse tanquam potentias exponentibus fractis insignitas.* Sic enim $\sqrt{3}$ sive $\sqrt[2]{3^1} = 3^{1:2} = 3^{\frac{1}{2}}$ item $\sqrt[3]{4} = 4^{1:3} = 4^{\frac{1}{3}}$; et denique generatim $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n} = x^{\frac{m}{n}}$. neque enim in quantitatibus irrationalibus potentiae propositae exponens dividi exacte per radicis desideratae exponentem potest. Quibus equidem breviter sic praelibatis, non id modo liquet, circa *quantitates surdas*, *sive irrationales*, *similem propemodum tractandi rationem*, ac circa fractiones, *adhiberi posse*

atque

atque oportere; ſed ſingula quoque cum *reductionis*, tum et *algorithmi* ſeu *computi* ipſarum *artificia*, ſatis ceteroquin difficilia atque impedita, mirum quantum plana fiunt ac facilia.

ad §. 59.

Quoniam generatim, facta quantitatum ſurdarum diverſae denominationis ad eandem denominationem reductione, $\sqrt[s]{x^m}$ et $\sqrt[r]{v^n}$, ſive $x^{m:s}$ et $v^{n:r} = x^{(m:s)\,r}$ et $v^{(n:r)\,s}$

$$= x^{mr:sr} \text{ et } v^{ns:sr}$$
$$= \sqrt[rs]{x^{mr}} \text{ et } \sqrt[rs]{v^{ns}}$$

proinde ſpeciatim quoque

$$\begin{array}{llll} \sqrt{3} & = 3^{1:2} & \text{et } \sqrt[3]{4} & = 4^{1:3} \text{ vel } \sqrt[3]{2^2} = 2^{2:3} \\ & = 3^{(1:2)\,3} & & = 4^{(1:3)\,2} \\ & = 3^{3:6} & & = 4^{2:6} \\ & = \sqrt[6]{3^3} & & = \sqrt[6]{4^2} \end{array}$$

haud obſcure patet, *reductionis ad eandem denominationem artificio* in quantitatibus ſurdis ſive irrationalibus *exponentis quidem diverſitatem corrigi*, adeoque *gradum diverſum in eundem transmutari;* ſed quantitates tamen, ſigno radicali ſubiectas, diverſas permanere; ideoque ad perfectam quantitatum irrationalium ſimilitudinem obtinendam, praeter modo dictum reductionis ad eandem denominationem artificium, aliud quoque neceſſarium eſſe, quo quantitatum, ſigno radicali ſuffixarum, identitas ſive aequalitas, niſi forte ipſarum indoles obſtiterit, efficitur. *Quandonam vero et quomodo binae aut com-*

plures

plures quantitates irrationales eiusdem gradus seu denominationis ita transformari possint, ut quantitates, quae signo radicali suffixae extant, diversae in eandem degenerent, id quidem quantitates *surdas* (complexas videlicet) *ad simpliciorem expressionem reducendi artificium*, §. 61. propositum, edocet.

* *pag.* 312. *col.* 2. *lin.* 6. *pro* $a^{n:m}\ x^{m:n}$ *ponatur* $a^{n:m}\ x^{m:m}$, *item lin.* 19. *pro* eooem *ponatur* eodem.

Quoniam $\sqrt[r]{a^m\ b^r} = \sqrt[r]{a^m}\ \sqrt[r]{b^r}$ (h. e. $\sqrt[r]{a^m}$ multipl. per $\sqrt[r]{b^r}$

$$= a^{\frac{m}{r}}\ b^{\frac{r}{r}}$$

Iam autem $\sqrt[r]{b^r} = b^{\frac{r}{r}} = b$

Sane $\sqrt[r]{a^m\ b^r} = b\sqrt[r]{a^m}$

Item $\sqrt[r]{a^m\ x^r} = \sqrt[r]{a^m}\sqrt[r]{x^r}$, et $\sqrt[r]{y^n\ x^r} = \sqrt[r]{y^n}\sqrt[r]{x^r}$

Iam autem $\sqrt[r]{x^r} = x$,

Ergo $\sqrt[r]{a^m\ x^r} = x\sqrt[r]{a^m}$, et $\sqrt[r]{y^n\ x^r} = x\sqrt[r]{y^n}$

Similiter res se se habet in numeris determinatis.

Sic enim. quia $\sqrt{12} = \sqrt{4.3} = \sqrt{4}.\sqrt{3}$, et $\sqrt{32} = \sqrt{16.2} = \sqrt{16}.\sqrt{2}$

Iam autem $\sqrt{4} = 2$, et $\sqrt{16} = 4$

Erit $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, et $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Similiter quia $\sqrt{24} = \sqrt{6.4} = \sqrt{6}.\sqrt{4}$, et $\sqrt{54} = \sqrt{9.6} = \sqrt{9}.\sqrt{6}$

Iam autem $\sqrt{4} = 2$, et $\sqrt{9} = 3$

G

Erit

Erit $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. et $\sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

Porro quia $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8.4} = \sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{4}$. et $\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{27.4} = \sqrt[3]{27}.\sqrt[3]{4}$

Iam autem $\sqrt[3]{8} = 2$, et $\sqrt[3]{27} = 3$

Erit $\sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4}$, et $\sqrt[3]{108} = 3\sqrt[3]{4}$.

Item quia $2\sqrt[3]{40} = 2\sqrt[3]{8.5} = 2\sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{5}$

Iam autem $\sqrt[3]{8} = 2$ et $2\sqrt[3]{8} = 2.2 = 4$

Erit $2\sqrt[3]{40} = 4\sqrt[3]{5}$

Ex his $b\sqrt[r]{a^m}$ et $x\sqrt[r]{a^m}$, item $2\sqrt{6}$ et $3\sqrt{6}$, nec non $2\sqrt[3]{4}$ et $3\sqrt[3]{4}$ quantitates irrationales *commensurabiles* sive *communicantes*; sed $b\sqrt[r]{a^m}$ et $x\sqrt[r]{y^n}$, item $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{2}$, et $2\sqrt{6}$; nec non $2\sqrt[3]{4}$ et $4\sqrt[3]{5}$. eiusdem quidem denominationis, sed *incommensurabiles* tamen sive *minus communicantes* existunt.

ad §. 68.

Ad *quantitatum irrationalium additionem* equidem et *subtractionem* ita perficiendam, ut exinde numerus aliquis novus idemque datis homogeneus prodeat, necessarium est, ut *penitus similes*, hoc est, *commensurabiles* sive *communicantes* eaedem vel per se existant, vel reductione adhibita, fiant; ad ipsarum autem *multiplicationem* ac *divisionem* sufficit, si eandem denominationem, seu, quod idem est, *eundem gradum* vel *exponentem* ipsae habuerint.

Sic $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ item $x\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{\frac{b}{a}} = x\sqrt[3]{\frac{ab}{a}}$ item $a\sqrt[m]{b^n}$

mul-

multiplic. per $x\sqrt[m]{v^r} = ax\sqrt[m]{b^n v^r}$. item $a\sqrt[m]{b}$ multiplic. per $3\sqrt[m]{x^n} = 3a\sqrt[m]{bx^n}$.

Similiter $\sqrt{5}.\sqrt{6} = \sqrt{5.6} = \sqrt{30}$.
item $3\sqrt{8}.\sqrt{7} = 3\sqrt{8.7} = 3\sqrt{56}$
item $5\sqrt{3}.2\sqrt{12} = 5.2\sqrt{3.12} = 10\sqrt{36}$
$= 10.6 = 60$
item $-5\sqrt{2}$ multipl. per $5\sqrt{8} = -25\sqrt{16}$
$= -25.4 = -100$.
Similiter $\sqrt{12}$ multipl. per $\sqrt{12} = \sqrt{12.12} = 12$
item $3\sqrt{12}$ multipl. per $\sqrt{12} = 3\sqrt{12.12} = 3.12 = 36$
denique $3\sqrt{12}$ multipl. per $4\sqrt{12} = 12\sqrt{12.12} = 12.12 = 144$.

Manifestum ex his atque obſervatione, imo vero admiratione dignum videtur, *quantitates irrationales, ſive iam commenſurabiles eaedem ſint, ſive minus commenſurabiles, multiplicando degenerare in rationales poſſe.* Et 1) *quantitas* quidem *irrationalis ſimplex*, (ſive cuius ſigno radicali nulla praefixa eſt quantitas,) ſi toties poſita, quot ſigni radicalis exponens unitates habet, *in ſemetipſam multiplicatur, in eam quantitatem rationalem, quae ſigno radicali ſuffixa eſt, degenerat.* Sic enim

$$\sqrt{a}.\sqrt{a} = \sqrt{aa} = a. \text{ item } \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{aaa} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

$$\text{item } \sqrt{ab}.\sqrt{ab} = \sqrt{ab.ab} = ab. \text{ item } \sqrt[3]{ab}.\sqrt[3]{ab}.\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a^3\ b^3} = ab.$$

$$\text{item } \sqrt{\tfrac{a}{d}}\cdot\sqrt{\tfrac{a}{d}} = \sqrt{\tfrac{a^2}{d^2}} = \tfrac{a}{d} \quad \text{item } \sqrt[3]{\tfrac{a}{d}}.\sqrt[3]{\tfrac{a}{d}}.\sqrt[3]{\tfrac{a}{d}} = \sqrt[3]{\tfrac{a^3}{d^3}} = \tfrac{a}{d}.$$

 Simi-

Similiter $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 5} = \sqrt{25} = 5$

item $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{16 \cdot 16 \cdot 16} = \sqrt[3]{16^3} = 16$

item $\sqrt{\tfrac{2}{3}} \cdot \sqrt{\tfrac{2}{3}} = \tfrac{2}{3}$. et $\sqrt[3]{\tfrac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\tfrac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\tfrac{2}{3}} = \tfrac{2}{3}$

et ſic porro.

2) Si quantitatibus irrationalibus eiusdem denominationis et complexis (ſive quarum ſigno radicali praefixa eſt quantitas aliqua) in ſe invicem multiplicatis, quantitatum ſigno radicali ſuffixarum multiplum ſit potentia quaedam eiusdem cum ſigni radicalis exponente gradus, tum ipſae degenerant in quantitatem rationalem, quae quantitatum ſigno radicali praefixarum facto, in novam radicem multiplicato, aequalis exiſtit. Sic enim

$$2\sqrt{12} \cdot 3\sqrt{3} = 2 \cdot 3\sqrt{12 \cdot 3} = 6\sqrt{36} = 6 \cdot 6 = 36$$

namque $\sqrt{36} = 6$

item $\sqrt[3]{32} \cdot 3\sqrt[3]{2} = 1 \cdot 3\sqrt[3]{32 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{64} = 3 \cdot 4 = 12$

namque $\sqrt[3]{64} = 4$

Haud abſimiliter cum irrationalium quantitatum diviſione, ſiquidem ad ipſarum in rationales metamorphoſin reſpexeris, comparatum eſſe, ipſa rerum indoles loquitur. Sic enim e. c.

$$\sqrt{24} : \sqrt{6} = \sqrt{\tfrac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2$$

item $3\sqrt{20} : \sqrt{5} = 3\sqrt{\tfrac{20}{5}} = 3\sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$

item $5\sqrt{18} : 3\sqrt{2} = \tfrac{5}{3}\sqrt{\tfrac{18}{2}} = \tfrac{5}{3}\sqrt{9} = \tfrac{5}{3} \cdot 3 = \tfrac{15}{3} = 5$

Similiter $\sqrt[3]{16} : 2\sqrt[3]{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{16}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{8} = \tfrac{1}{2} \cdot 2 = \tfrac{2}{2} = 1$

Quibus aliquanto planius ſic expoſitis, nihil quidquam difficultatis, arbitror, reliquum erit in expediendis exemplis

emplis iſtis, quae ad multiplicandum ac dividendum ab illuſtri WOLFFIO hic ſunt propoſita. Sic enim

$$\begin{array}{l} \sqrt{8} + \sqrt{2} \ + \sqrt{32} \\ \sqrt{8} + \sqrt{2} \ + \sqrt{32} \\ \hline \sqrt{8.32} + \sqrt{2.32} + \sqrt{32.32}.\ \text{h. e.}\ \sqrt{256} + \sqrt{64} + 32 = 16 + 8 + 32 \\ \sqrt{8.2} + \sqrt{2.2} + \sqrt{2.32} \ \text{- -}\ \sqrt{16} + \sqrt{4} + \sqrt{64} = + 4 + 2 + 8 \\ \sqrt{8.8} + \sqrt{8.2} + \sqrt{8.32} \ \text{- -}\ + \sqrt{64} + \sqrt{16} + \sqrt{256} = + 8 + 4 + 16 \end{array}$$

Adeoque multiplorum ſingularium ſumma, ſive multiplum integrum $= 98$

ad §. 71.

Atque haec ad *irrationalium reductionem* et *calculum* dicta ſufficiant. Sed ante tamen, quam ad alia progredimur, haud abs re fuerit, calculi analytici atque ingenii exercendi gratia, de *radicibus*, quarum hic mentio facta eſt, *imaginariis*, aliquanto explanatius diſſeruiſſe. Scilicet

Scholion I.

Si facta multiplicatione radicum imaginariarum, *prodit potentia quaedam eiusdem cum ſigno radicali praefixo gradus vel exponentis.* h. e. *eiusmodi quantitas, ex qua extrahi radix deſiderata exacte poteſt, tum ex* quantitatibus *iſtiusmodi* irrationalibus *naſcitur quantitas* rationalis, ſed *ea tamen* negativa *ſeu* defectiva. Sic e. g.

$3\sqrt{-3}$ multiplic. per $2\sqrt{-12} = 6\sqrt{-36} = -36$

nam $3\sqrt{-3}$

multipl. per $2\sqrt{-12}$

$$\overline{3 \cdot 2\sqrt{-3 \cdot 12} = 6\sqrt{-36}}$$

 Iam

Iam $\sqrt{-36} = -6$ vel $\sqrt{-36} = \sqrt{-9.4} = -3\sqrt{4} = -2\sqrt{9}$
$= -2.3 = -6$

Ideoque $(3\sqrt{-3})(2\sqrt{-12}) = 6\sqrt{-36} = 6.-6 = -36$

Similiter
$$\begin{array}{l} 4\sqrt{-8} \\ 3\sqrt{-8} \\ \hline 12\sqrt{-64} \end{array}$$

Iam quia $\sqrt{-64} = \sqrt{-16.4} = 2\sqrt{-16} = 4\sqrt{-4}$
$= -2.4 = 8$

Erit $(4\sqrt{-8})(3\sqrt{-8}) = 12\sqrt{-64} = 12.-8 = -96$

Scholion 2.

Cetera, quae de *radicum imaginariarium in quantitates rationales privativas seu defectivas metamorphosi* valent, citra difficultatem derivari ex iis poterunt, quae de quantitatum irrationalium in rationales metamorphosi generatim paulo ante (*pag.* 51 & 52.) disseruimus.

Scholion 3.

Quoniam $\sqrt{-36} = \sqrt{-9.4} = \sqrt{-4.9}$; vel et $\sqrt{36} = \sqrt{9.4}$; item $\sqrt{64} = \sqrt{16.4}$. et sic porro; obiter hic observamus, *numerum quadratum unumquemvis, siquidem is par est*, (e. c. 4, 16, 36, 64, 100. etc.) *resolvi posse in binos numeros quadratos alios simpliciores, quorum vel uterque, vel saltem alteruter numerus par est*, tanquam factores suos. Sic enim $4=1.4$, $16=4.4$, $36=4.9$, $64=4.16$, $100=4.25$ etc. Quam equidem ob rem contra etiam, et generatim quidem, *factum ex duobus numeris quadratis quibuscunque semper est quadratum*; vel, quemadmoadmodum illustris Auctor noster infra (§. 239.) idem pronuntiavit, *numerus quadratus efficit quadratum, si in quadratum ducitur.*

Scholion 4.

Quia $-5 = \sqrt{-5}.\sqrt{-5}$ (*vi hactenus demonstratorum*) item $-27 = -3.9 = -9.3 = 9\sqrt{-3.3} = 3\sqrt{-9.9} = 9\sqrt{-9} = 3\sqrt{-81}$.
adeoque generatim $-n = \sqrt{-n}.\sqrt{-n}$

item $-nr = n\sqrt{-r^2} = -n\sqrt{r^2}$

$= n\sqrt[3]{-r^3} = -n\sqrt[3]{r^3}$ etc.

ideoque universe $= n\sqrt[m]{-r^m} = -n\sqrt[m]{r^m}$

quoniam autem n quantitatem simplicem aut *numerum in se primum*; nr autem quantitatem complexam et *numerum compositum* repraesentat; consequens hinc est, *posse quantitatem quamcunque nihilo minorem seu negativam in radicem imaginariam transformari.* Et quantitas quidem negativa simplex sive numerus negativus in se primus radicis imaginariae in semetipsam ductae factum evadit; quantitas autem complexa sive numerus compositus, facta transformatione ista, in quantitatem ex rationali et radice imaginaria, seu quantitate in speciem irrationali, mixtam degenerat. Vnde sequens problema enascitur.

PROBLEMA

Quantitatem negativam seu nihilo minorem quamcunque in radicem aliquam imaginariam h. e. quantitatem irrationalem, cui sub signo radicali signum − praefixum est, transformare.

RESO-

RESOLVTIO.

α) 1. Si quantitas negativa propoſita eſt numerus aliquis compoſitus, tum idem reſolvatur in binos factores poſſibiles. (ex $-nr$ fiat $-n$ & r, vel n & $-r$)

2 Factor negativus in potentiam aliquam convertatur, eidemque potentiae, praeter ſignum $-$, ſignum quoque radicale eiusdem cum potentia hac gradus vel exponentis praefigatur. ($\sqrt[m]{-r^m}$)

β) Quodſi vero quantitas negativa propoſita fuerit quantitas ſimplex ſive numerus in ſe primus, tum eadem, ſigno radicali præfixo, tanquam in ſemetipſam multiplicanda repraeſentetur. ($-n = \sqrt{-n}. \sqrt{-n}$)

COROLLARIVM.

Sic e. c. $-7 = \sqrt{-7}. \sqrt{-7}$. item $-6 = -2. 3 = 3\sqrt{-2. 2} = 3\sqrt{-4}$ vel $2\sqrt{-3. 3} = 2\sqrt{-9}$. item $-15 = -5. 3 = 3\sqrt{-5. 5} = 3\sqrt{-25}. = 5\sqrt{-3. 3} = 5\sqrt{-9}$. item $3\sqrt[3]{-125} = 5\sqrt[3]{-27}$. etc. Quibus autem modis *radicis* cuiusdam *prope verae extractio* inſtitui, adeoque quantitatis ſeu numeri irrationalis *valor prope verus* approximando inveſtigari queat, id quidem ex arithmeticorum inſtitutis manifeſtum eſt. (vid. *elem. arithm.* §. 282. ſqq. item §. 285. 286.)

* *pag.* 316. *col.* 2. *lin.* 3. *ponatur* $-6\sqrt{-10} - 4\sqrt{-6}$ *item lin.* 5, *pro* $-4\sqrt{} = 6$. *ponatur* $-4\sqrt{-6}$

CAP. III.
DE VSV CALCVLI LITTERALIS IN INVENIENDIS THEOREMATIS.

REferri huc iure merito ſingula poſſunt, quae paſſim hactenus, calculi ſpecioſi adiumento, exploravimus, dogmata. Sic enim exempli cauſa

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. (*vid. ſupra pag.* 7.) it. Aut. §. 236. et 25

Proinde contra etiam

$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$. item $\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$ (*pag.* 22.)

$(a^2 - b^2)(a - b) = a^3 + b^3 - a^2 b - ab^2$ (*pag.* 8.)

$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 + b^2 - ab$. ſive $a^2 - ab + b^2$ (*pag.* 28.)

Si $b = am$, adeoque $b^2 = a^2 m^2$, et $m + 1 = a$; erit $\frac{a^2 + b^2}{a + b}$

$= \frac{a^2 + a^2 m^2}{a + am} = m^2 + 1$. Vbi vero

$m + 1 = \frac{a}{n}$, vel $(m + 1) n = a$; erit $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = (m^2 + 1) n$

(*pag.* 35. *ſqq.*)

$\frac{b}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{bc^2}{a^3} - \frac{bc^3}{a^4} + \frac{bc^4}{a^5} - \frac{bc^5}{a^6}$ et ſic in infin. $= \frac{b}{a + c}$ (*p.*38.*ſqq.*)

ad §. 72 - 85.

Quum ſatis iam per ſe plana ſunt ac facilia, quae hisce paragraphis continentur, artificia, id reliquum nobis eſſe negotii videtur, ut, quam inſigniter amplificari imitationis ingenioſae adminiculo eadem poſſint, uno atque altero ſpecimine oſtendamus.

PROBLEMA

Invenire, qualis numerus prodeat, si trium numerorum summa per tertii a duorum priorum aggregato differentiam multiplicetur.

$$\begin{array}{lr}
\alpha) \text{ Sit trium numerorum summa} & = a + b + c \\
\text{Tertii a duor. priorum aggreg. differentia} & = a + b - c \\
\hline
 & - ac - bc - c^2 \\
 & + ab + b^2 + bc \\
 & a^2 + ab + ac \\
\hline
 & a^2 + 2ab + b^2 \quad - c^2
\end{array}$$

Theorema: *Si trium numerorum summa in tertii a duorum priorum summa differentiam ducitur; factum est differentia quadrati numeri tertii a quadrato summae duorum priorum.*

Similiter

$$\begin{array}{ll}
\beta) & (a + b - c)(a + b - c) = a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2 \\
\gamma) & (a + b - c)(a - b + c) = a^2 - b^2 + 2bc - c^2 \\
\delta) & (a + b + c)(a - b - c) = a^2 - b^2 - 2bc - c^2 \\
\varepsilon) & (a + b)\,a + (b - a)\,b = a^2 + ab + b^2 - ab = a^2 + b^2
\end{array}$$

et sic porro.

Quibus autem modis per adhibitum *calculum* litteralem confici, quas modo proposuimus, formulae; quaenam item exinde confici *theoremata* queant, id quidem artis analyticae tironibus, exercitationis ergo, expediendum relinquimus.

ad §. 86. sqq.

Evidentissime, atque, ut aiunt, ad oculum demonstrare proposita hoc loco theoremata, eoque facto simul, quam propinqua geometriae atque arithmetices necessitudo vel cognatio sit, ostendere licebit, si litteras, quique his designantur, numeros lineis et figuris geometricis decenter exhibuerimus.

(FIG. I.)

1) Fiat linea $AB = Q$, $BC = q$

Erit $AB + BC = AC = \qquad Q + q$

Fiat porro $AL = AB = \qquad Q$

Ducta LN parallela cum AC, erit rectang. $ACNL = (Q + q)\, Q$
$= Q^2 + Qq$

Namque $ABML = Q^2$. et $BCNM = Qq$

Porro

2) Fiat perpendic. $AH = AC = Q + q$

hoc est $AL = AB = Q$. et $LH = BC = q$

Ductis HI et $LN = AC = Q + q$, cum AC parallelis.

Erit rectang. $HINL = (Q + q)\, q = Qq + q^2$

Nam $KINM = q^2$ et $HKML = Qq$

Denique

3) Sit $AB + BC = Q + q$

Fiat $BD = BC = \qquad q$

Erit $AD = AB - \begin{bmatrix} BD \\ BC \end{bmatrix} = Q - q$

Fiat $AE = AD \qquad = Q - q$

Erit rectangulum $ACFE = (Q + q)(Q - q) = Q^2 - q^2$

 Quum

Quum enim $AL = AB$
et $AE = AD$

Erit $EL = BD = BC = q$
Iam $LO = AD = AE = CF = Q - q$

Ideoque rectangulum $LOPE$ = rectangulo $BCFG$
quia $ABGE = ABGE$

Erit spatium angulare $LOPGBAL$ = rectangulo $ACFE$
Iam $ABML = Q^2$
Sed $OMGP = q^2$

Ergo $ABML - OMGP = Q^2 - q^2$
Sed $ABML - OMGP$ = spatio angulari $LOPGBAL$

Ideoque rectang. $ACFE = LOPGBAL = Q^2 - q^2$

ad §. 88. (FIG. II.)

Sit $AC = CB = a$. item $CD = b$

Erit $AD = \begin{bmatrix} AC \\ CB \end{bmatrix} + CD = a + b$. item $BD = BC - CD = a - b$
Fiat $AF = BD = a - b$

Erit $AD . AF = ADEF = (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Nam

Si perpendic. $BK = CL = \begin{bmatrix} AC \\ CB \end{bmatrix} = a$
item $NK = DB = AF = a - b$

Erit $ACIF = DBKN$
Iam $CDEI = CDEI$

Ergo $\begin{bmatrix} ACIF + CDEI \\ ADEF \end{bmatrix} = DBKN + CDEI$

Quum

Quum autem $CL = BK = CB = a$
et $IC = ED = DB = a - b$

Erit $LI = NE = CD = b$
Ideoque $LIEN = b^2$
Iam $CBKL = a^2$

Ergo $CBKL - LIEN = a^2 - b^2$
Sed $CBKL - LIEN = ADEF$

Ideoque $ADEF = a^2 - b^2$
Consequenter $ADEF + LIEN = a^2 - b^2 + b^2 = a^2$

ad §. 89. (FIG. III.)

1. Fiat $AC = CB = a.$ et $CD = b$

Erit $AD = AC + CD = a + b$
Si $AF = AE + EF = AC + CD = a + b$
ductis FG cum AD, et GD cum AF parallelis,

Erit $ADGF = (a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Enimvero

$ACHE = a^2.$ et $HIGK = b^2$
item $CDIH + EHKF = ab + ab = 2ab$
Sed $ACHE + CDIH + EHKF + HIGK = ADGF$

Ergo $ADGF = a^2 + 2ab + b^2$
quod erat primum.

2. quia $CB = a$ $CD = b$

Erit $DB = CB - CD = a - b$
Si $BL = DB = a - b.$ et LN cum BC, item BL cum NC et KD. parallela.

Erit $DBLK = (a - b)(a - b) = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Nam

$CBMH = a^2$ $HIKN = b^2$

$CDIH + NLMH = ab + ab = 2ab$

Ideoque $CBMH - CDIH - NLMH = a^2 - 2ab + DBLK$

quoniam vero per $-2ab$ quadratum $HIKN$ (b^2) bis demitur; quod non nisi ſemel erat demendum; ſemel utique idem reſtituendum eſt.

Scilicet $a^2 - 2ab = -b^2 + DBLK$

Addatur utrobique $b^2 = b^2$

Erit $a^2 - 2ab + b^2 = DBLK.$

quod erat alterum.

3. quoniam $ADGF = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

item $EHKF = ab$

Si fiat $FO = OP = FE = CD = b$

Erit $FEPO = b^2$

Conſeq. $EHKF - FEPO = OPHK = (a - b)\,b = ab - b^2$

Iam $HIGK = b^2$

Ergo $FEIG = 2b^2 + OPHK\,(ab - b^2)$

Iam $BM = BC = a$, $ML = CD = b$, $KL = DB = a - b$

Proinde $IKLM = (a - b)\,b = ab - b^2$

Iam porro $ADIE + DBLK = ABME - IKLM$

$= 2a^2 - (a - b)\,b$

Rectangulo $OPHK$ pro $IKLM$, id quod alienum eſt, ſubſtituto;

Erit

Erit $ADGF + DBLK = FEIG + ABME - IKLM$
hoc est $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2b^2 + (a-b)\,b + 2a^2 - (a-b)\,b$
$= 2a^2 + 2b^2$. *I. Q. E. D.*

ad §. 90. (FIG. IV.)

α) Sit $AB = Q$, $BC = q$
Erit $AC = AB + BC = Q + q$
Fiat $AE = AD + DE = Q + q$

Erit $ACFE\ (AC.\ AE) = (Q+q)^2 = Q^2 + 2Qq + q^2$
Fiat porro $AK = KL = AB = Q$

Erit $AKLD\ (AK.\ KL) = Q^2$
Consequ. $ACFE + AKLD = 2Q^2 + 2Qq + q^2$
$= 2Q\,(Q+q) + q^2$

Namque

$BK = BA + AK = 2Q$
$KM = KL + LM = AB + BC = Q + q$

Ergo $BKMI\ (BK.\ KM) = 2Q\,(Q+q) = 2Q^2 + 2Qq$
Iam $BCGH = LDEM = Qq$

Ergo $BKMI = CKLG + EDHI = 2Q^2 + 2Qq$
Sed $FGHI = FGHI = q^2$

Ideoque $BKMI + FGHI = ACFE + AKLD$
hoc est $2Q\,(Q+q) + q^2 = (Q+q)^2 + Q^2$
quod erat primum.

FIG. V.

FIG. V.

β) Sit $AD = AB + BC + CD = Q + Q + q = 2Q + q$
Fiat perpendic. $AE = AD = 2Q + q$. hoc est $AG = GH = Q$, et $HE = q$.

Erit $ADFE = (AD.\ AE) = (2Q + q)^2 = 4Q^2 + 4Qq + q^2$

Etenim

Ductis GI, HK, et EF cum AD; item BL, CM et DF cum AE parallelis;

Erit $(AB + BC)(AG + GH) = ACOH = 2Q . 2Q = 4Q^2$
item $(DI + IK)\ CD = CDKO = (Q + Q)\ q = 2Qq$
Similiter $(HN + NO)\ HE = HOME = (Q + Q)\ q = 2Qq$
Denique $OKFM = q^2$

Ergo $ACOH + CDKO + HOME + OKFM = 4Q^2 + 4Qq + q^2$
Iam $ACOH + CDKO + HOME + OKFM = ADFE$

Ideoque $ADFE = 4Q^2 + 4Qq + q^2$

* *pag.* 320. *col.* 1. *lin.* 7. *a fine, deleatur*, quadruplo.

ad §. 91. (FIG. VI.)

1. Fiat $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$

Erit $AD = AB + BC + CD = a + b + c$
Fiat perpend. $AE = BF = CG = DH = AB = a$

Erit rectangulum $ADHE\ (AD.AE) = (a+b+c)\ a = a^2 + ab + ac$
Namque $ABFE\ (AB.\ AE) = a^2$, $BCGF\ (BC.\ BF) = ab$
et $CDHG\ (CD.\ CG) = ac$

(FIG. VII.)

FIG. VII.

2. Sit, ut antea, $AD = a + b + c$
Fiat Perpend. $AE = BC = b$

Erit Rectang. $ADHE$ $(AD.\ AE) = (a + b + c)\ b = ab + b^2 + bc$

Nam $ABFE = ab$, $BCGF = b^2$, $CDHG = bc$

(FIG. VIII.)

3. Sit denuo $AD = a + b + c$.
Fiat perpend. $AE = BF = CG = DH = c$

Erit Rectang. $ADHE$ $(AD.\ AE) = (a + b + c)\ c = ac + bc + c^2$

Nam $ABFE = AB.\ AE = ac$
$BCGF = BC.\ BF = bc$
$CDHG = CD.\ CG = c^2$

ad §. 92. (FIG. IX.)

Sit $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$

Erit $AD = AB + BC + CD = a + b + c$
Fiat perpend. $AE = d$

Erit Rectang. $ADHE$ $(AD.\ AE) = (a + b + c)\ d = ad + db + cd$

ad §. 93. (FIG. X.)

Sit $AB = AH + HB = a + b$
Fiat perpendic. $AE = HG = BF = AH = a$

Erit rectang. $ABFE = (AH + HB)\ AE = (a + b)\ a = a^2 + ab$
Nam $AHGE = a^2$, $HBFG = ab$

 Fiat

Fiat porro $ED = IG = CF = HB = b$

Ducta $DC = AH + HB = AB = a + b$, cum AB parallela,

Erit rectang. $DEFC = (DI + IC)\ DE = (a + b)\ b = ab + b^2$

Nam $DEGI\ (DE.\ EG) = ab, \quad GFCI = b^2$

Iam rectang. $ABFE = (a + b)\ a = a^2 + ab$

Ideoque $ABFE + DEFC = (a + b)\ a + (a + b)\ b = a^2 + 2ab + b^2$

Iam vero $AB\ (AH + HB).\ AD\ (AE + ED) = (a + b)(a + b)$

$= (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Ergo $ABFE + DEFC = AB.\ AD = AB^2$

hoc est $(AH + HB)\ AH + \begin{bmatrix} DI + IC \\ AH + HB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DE \\ HB \end{bmatrix} = (AH + HB)^2 = AB^2$

ad §. 94. (FIG. XI.)

Sit $AB = BC = a \qquad CD = c$

Erit $AC = AB + BC = 2a. \qquad AD = AC + CD = 2a + c$

Fiat perpend. $DE = CD = c$

Erit rectang. $ADEH = (2a + c)\ c = 2ac + c^2$

Fiat porro $EI = GL = AB = a$

Erit $DI\ (DE + EI) = BL\ (BG + GL) = BD = a + c$

Ideoque $BDIL = (a + c)^2 = a^2 + 2ac + c^2$

Iam $ADEH = 2ac + c^2$

Ergo $BDIL - ADEH = a^2$

Namque *FEIK* (*ac*) pro *ABGH* (*ac*) substituto

Erit $ADEH = BDEG + FEIK$

Ideoque $BDIL - ADEH = BDIL - BDEG - FEIK$
$$= GFKL = a^2$$

item $ADEH + GFKL = BDIL$

hoc est $(2a + c)\, c \dagger a^2 \quad = (a \dagger c)^2$

ad §. 95.

Quo plenius intelligatur, quomodo singulae istae, ex quibus praesens tabula coagmentata est, *potentiarum binomii formulae* confectae sint vel adinventae, haud omnino abs re fuerit, calculum in hocce negotio adhibitum, quadantenus hic exhibere.

1) Sit Pot. I. seu Radix binomia $=$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & & a & \dagger\ b \\
 & & & a & \dagger\ b \\
\hline
 & & \dagger & ab & \dagger\ b^2 \\
 & a^2 & \dagger & ab & \\
\hline
\end{array}$$

2) Quadratum seu Pot. II. $= a^2 \dagger 2ab \dagger b^2$

Radix $= a \dagger b$

$$\begin{array}{rrrr}
 & a^2b & \dagger\ 2ab^2 & \dagger\ b^3 \\
a^3 \dagger & 2a^2b \dagger & ab^2 & \\
\hline
\end{array}$$

3) Potentia III. $= a^3 \dagger 3a^2b \dagger 3ab^2 \dagger b^3$

Radix $= a \dagger b$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & a^3b \dagger & 3a^2b^2 \dagger & 3ab^3 \dagger & b^4 \\
a^4 \dagger & 3a^3b \dagger & 3a^2b^2 \dagger & ab^3 & \\
\hline
\end{array}$$

3) Po-

4) Potentia IV. =	a^4	† $4a^3b$	† $6a^2b^2$	† $4ab^3$	† b^4	
Radix =					a	† b
		a^4b †	$4a^3b^2$	† $6a^2b^3$	† $4ab^4$	† b^5
	a^5	† $4a^4b$	† $6a^3b^2$	† $4a^2b^3$	† ab^4	
5) Potent. V. =	a^5	† $5a^4b$	† $10a^3b^2$	† $10a^2b^3$	† $5ab^4$	† b^5

et sic porro in infin.

Tabulam equidem hic propositam constare ex formulis, per numeros 1, 2, 3 etc. designatis; harum autem partes singulas partim *factum* aliquod *litterale*, partim numerum quendam, qui *uncia* vocatur, continere; et denique a, b, a^2, b^2, a^3, b^3 et sic porro, idem esse, ac $1a$, $1b$, $1a^2$, $1b^2$, $1a^3$, $1b^3$ etc. ipsa rerum obviarum contemplatio edocet.

* *pag.* 321. *in tabula lin.* 5. *intervallo* 3. *pro* $10a^3b^3$ *ponatur* $10a^3b^2$. *item intervallo* 4. *pro* $10a^2b^2$ *ponatur.* $10a^2b^3$.

* *pag.* 326. *col.* 1. *lin. penult. et ult. ponatur:* Est adeo

$$V(a^2 - x^2) = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9}$$

$$- \frac{21x^{12}}{1024a^{11}} \text{ etc. in infin.}$$

Scholion.

Equidem 1) haud omnino exactam, sed tantum *prope veram*, eandemque vera paullo maiorem existere, quam praesens artificium investigare docet, *radicem;* 2) cuius *excessus* per infinitam particularum seu fractionum continuo decrescentium seriem subinde magis atque magis *imminuitur;* et 3) cuius denique *denominatores* pariter ac *numeratores*, nec non utriusque *unciae* seu numeri

prae-

praefixi *constanti ratione* atque ordine *progrediuntur*, ipsa terminorum contemplatio edocet. De cetero, illustrationis ergo, faciamus, esse

$$a^2 = 25 \qquad x^2 = 9$$

Erit $a^2 - x^2 = 25 - 9$, et $\sqrt{(a^2 - x^2)} = \sqrt{(25-9)} = \sqrt{16} = 4$

hoc est $a = 5$, $\quad -\frac{x^2}{2a} = -\frac{9}{2.5}$, $\quad -\frac{x^4}{8a^3} = -\frac{81}{8.125}$,

$$-\frac{x^6}{16a^5} = -\frac{729}{16.3125} \text{ etc.}$$

Ideoque $\sqrt{(25-9)} = 4 = 5 - \frac{9}{10} - \frac{81}{1000} - \frac{729}{50000}$ etc. in infin.

ad §. 100.

Radicem aliquam superiorem, quartanam v. c. quintanam, sextanam etc. ex numero quodam proposito extracturus nosse vel investigare ante omnia debet, quae ratio sit et constitutio potentiae vel dignitatis eiusmodi quartanae, quintanae, etc. cuius nempe radicem investigare vel extrahere suscipit. Spectant huc analytica ista, quae partim in *elementis arithmeticae*, (cap. V.) partim etiam *supra* (§. 95.) de *binomio ad quamcunque dignitatem evehendo* proposita sunt, artificia. Communis etenim potentias formandi methodus compendiosa magis est, quam ad cognoscendam ipsarum indolem atque investigandas radicis extrahendae regulas adcommodata. Exemplo res fiet clarior. Faciamus, numerum 12. primo ad dignitatem quartam evehi, deinde vero ex ipsa illa potentia quarta radicem quartanam extrahi oportere

A) *Evectio communis et compendiosa*

Radix =	12	
	12	
	24	
	12	
Ergo Potentia II. =	144.	$= 12^2$
Radix =	12	
	288	
	144	
Ergo Potentia III. =	1728	$= 12^3$
Radix =	12	
	3456	
	1728	
Ergo Potentia IV. =	20736	$= 12^4$

B) Evectio analytica vel α) secundum *formulam potentiarum universalissimam.* $P^m + \frac{m}{1}AQ + \frac{m-1}{2}BQ$ etc. vel β) secundum *formulam universalem exponentis determinati:* $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$; vel et γ) *numero* 12. *in elementa* vel partes $(10 + 2)$ resoluto, et *multiplorum* singulorum *nominibus* pariter, ac *terminis*, seu locis, in quibus ea desinunt, singulatim *notatis*, peragitur.

α) secundum *formulam universalissimam* (ubi $P = 10$, $Q = \frac{2}{10}$, $m = 4$.)

$$P^m = 10^4 = 10000 = A$$

$$\frac{m}{1}AQ = \frac{4}{1}\cdot 10000.\ \frac{2}{10} = \frac{80000}{10} = 8000 = B$$

$$\frac{m-1}{2}BQ = \frac{3}{2}\cdot 8000.\frac{2}{10} = \frac{48000}{20} = 2400 = C$$

$$\frac{m-2}{3}CQ = \frac{2}{3}\cdot 2400.\frac{2}{10} = \frac{9600}{30} = 320 = D$$

$$\frac{m-3}{4}DQ = \frac{1}{4}\cdot 320.\ \frac{2}{10} = \frac{640}{40} = 16 = E$$

$$\frac{m-4}{5}EQ = \frac{0}{5}\cdot 16.\ \frac{2}{10} = \frac{0.32}{50} = 0.$$

Ergo $(P + P\cdot Q)^m = (10 + 2)^4 = 20736$

β) Secundum *formulam universalem*, seu *exponentis determinati*

$$\begin{array}{lcll}
a^4 & = & 10^4 & = 10000 \\
4a^3b & = & 4.\ 1000.\ 2 & = 8000 \\
6a^2b^2 & = & 6.\ 100.\ 4 & = 2400 \\
4ab^3 & = & 4.\ 10.\ 8 & = 320 \\
b^4 & = & 2^4 & = 16
\end{array}$$

Ergo $(a + b)^4 = (10 + 2)^4 = 20736.$

γ) *Numero binomio* (12) *in partes* (10 + 2) *resoluto.*

$$\begin{array}{llllccc}
 & & & & \text{T.I.} & & \text{T.II.} \\
\text{RADIX} & = & 12 & = & 10 & + & 2 \\
 & & & & 10 & + & 2 \\
\hline
 & & & & & & 4 \quad \text{quadr. T. II.} \\
 & & & & & & 20 \\
 & & & & & & 20 \quad \text{Fact. dupl. T. I. in II.} \\
 & & & & & & 100 \quad \text{quadr. T. I.}
\end{array}$$

QVADRATVM $= 100 + 40 + 4$

POT.

	Q.T.I.	F.dT.I.in II.	Q.T.II.
POT. II (12^2) =	100 †	40 †	4
Radix =		10 †	2

8	Cub. T. II.
80	F. d. I. in Q.II.
200	F. Q. I. in II.
40	F. I. in Q. II.
400	F.d. Q.I. in II.
1000	Cub. T. I.

	Cub. I.	F.3pl.Q.T.I.in II.	F.3.Q.II.in I.	Cub.II.
POT. III. (12^3) =	1000 †	600 †	120 †	8
Radix =			10 †	2

16	Pot. IV. T. II.
240	F. 3pl. Cub. II. in I.
1200	F. 3pl. Q. I. in Q.II.
2000	F. Cub. I. in II.
80	F. Cub. II. in I.
1200	F. 3pl. Q.II. in Q.I.
6000	F. 3pl. Cub. I. in II.
10000	Potent. IV. T.I.

POT. IV. (12^4) = 2 0 7 3 6

2	0	7	3	6
Potent. IV. T. I.	Fact. 4pl. Cub. I. in II.	Fact. 6pl. Q.I. in Q. II.	Fact. 4pl. T.I. in Cub. T. II.	Potent. IV. T. II.

Theo-

Theorema: *Biquadratum siue potentia quarta binomii continet biquadratum partis utriusque* (a^4, b^4); *nec non factum quadruplum e cubo termini utriusque in terminum alterum simplicem* ($4a^3b$, $4ab^3$); *et denique factum sextuplum quadratorum utriusque partis in se invicem.* [$6a^2b^2$]

Quibus ita expositis, haud obscure patet, in quosnam numeros simpliciores, velut partes suas, numerus aliquis biquadratus resolvi, sive, quod eodem recidit, quomodo ex numero quodam proposito biquadrato, vel saltem adinstar biquadrati spectato, extrahi *radix quartana* possit. Age igitur extractionis huius regulas, praemissa tabula, eidem negotio adcommodata, singulari problemate exhibeamus.

Radices	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrati	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubici	1	8	27	64	125	216	343	512	729
Biquadrati	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
Surdesolidi	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049

PROBLEMA

Ex numero quocunque proposito radicem quartanam extrahere.

RESOLVTIO AC DEMONSTRATIO.

1. Numerus propositus distinguatur in classes, quaternas unicuivis classi notas vel partes tribuendo; facto a dextra initio. Tot enim erunt radicis partes, quot numeri dati classes existunt.
2. Numerus in classe prima sive sinistima obvius cum radicum et potentiarum tabula conferatur, eoque facto, numerus biquadratus, eidem vel aequalis, vel et proxime minor, ipsi subscribatur; radix autem biquadrata post lunulam scribatur.

3. Facta numeri ſubſcripti a claſſis primae numero ſubtractione, quoti inventi cubus quadruplus ſub nota proxima vel ſiniſtima claſſis proxime ſequentis, ſiniſtrorſum progrediendo, ſi ex compluribus partibus vel notis idem conſtiterit, diviſoris loco ponatur, factaque diviſione, quotus radici pone lunulam tanquam pars altera radicis adiungatur.
4. Novus quotus in diviſorem ducatur, quodque hinc naſcitur, productum diviſori extincto ſubſcribatur, ſub nota claſſis huius altera terminetur factum ſextuplum quadratorum utriusque radicis in ſe invicem ductorum; ſub nota tertia factum ex quadruplo cubo partis ſecundae radicis in partem primam; et denique ſub quarta vel dextima biquadratum novi quoti ſeu partis ſecundae radicis. Quatuor haec multipla in ſummam collecta ex notis numeri biquadrati ſupra ſcriptis ſubtrahantur.

Reliqua ſatis dilucide expoſita ſunt ab auctore (§. 100.) Conf. *arithm. elem.* §. 269. ſqq. Expediet igitur, quomodo porro *radix quintana* extrahi debeat, exemplo quodam commonſtrare.

		2	4	8	8	3	2	12 Rad. quint.
a^5	=	1						
		$\cancel{1}$	$\cancel{4}$	$\cancel{8}$	$\cancel{8}$	$\cancel{3}$	$\cancel{2}$	
$5a^4$	=		($\cancel{5}$)	.	.	.	.	
$5a^4b$	=	1	0	.	.	.	.	
$10a^3b^2$	=		4	0	.	.	.	
$10a^2b^3$	=			8	0	.	.	
$5ab^4$	=				8	0	.	
b^5	=					3	2	
		$\cancel{1}$	$\cancel{4}$	$\cancel{8}$	$\cancel{8}$	$\cancel{3}$	$\cancel{2}$	
					0			

ad

ad §. 101.

Obiter hic obſervandum, paginae anguſtiam, prudenti licet conſilio in inſtitutis hisce mathematicis adhibitam, uti ſaepe alias, ſic etiam hoc loco impedire, quominus explicate ſatis, phantaſiae ſcilicet commodo, proponi ſeries ſeu formulae prolixiores queant. Agedum igitur, paullo explicatius ea repraeſentemus, quae de trinomio, per adhibitum reductionis artificium ad dignitatem quartam evehendo hic praecipiuntur.

(α)

Sit radix trinomia $a + b + c$; in qua $b + c = x$

Erit $(a + b + c)^2 = (a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$

Iam $x = b + c$

Et $x^2 = b^2 + 2bc + c^2$. quibus pro x et x^2 ſubſtitutis.

POT. II. $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$

(β)

Porro $(a + b + c)^3 = (a + x)^3 = (a + x)^2 (a + x) = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$

Iam $x = b + c$

$x^2 = b^2 + 2bc + c^2$

$x^3 = b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$. quibus pro x, x^2, et x^3 ſubſtitutis,

POT. III. $(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$

(γ)

Denique $(a + b + c)^4 = (a + x)^4 = (a + x)^3 (a + x) = a^4 + 4a^3 + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$

Iam $x = b + c$

$x^2 = b^2 + 2bc + c^2$

$x^3 = b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$

$x^4 = b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4$. quibus pro x, x^2, x^3 et x^4 ſubſtitutis,

POT. IV. $(a + b + c)^4 = a^4 + 4a^3b + 4a^3c + 6a^2b^2 + 12a^2bc + 6a^2c^2$
$+ 4ab^3 + 12ab^2c + 12abc^2 + 4ac^3 + b^4 + 4b^3c + 6b^2c^2 + 4bc^3 + c^4$

* *pag.* 330. *col.* 2. *lin.* 11. *pro* PROBLEMA 25 *ponatur* PROBLEMA 30. Sed corrigi tamen ſimul problematum ſequentium omnium numeri debebant.

* *pag.* 334. *col.* 2. *lin.* 17. *pro* $\frac{m^n a - a}{m - 1}$ *ponatur* $\frac{m^n a - ma}{m - 1}$

ad §. 124.

Tametſi haec de *rationum ac proportionum metamorphoſi* dogmata ſingula fere, et ſatis quidem prolixe, additis ubique exemplis ſingularibus, iam tum in elementis arithmeticis (§. 167. ſqq.) extant propoſita; eximius tamen, quem cum in omni matheſi reliqua, tum et inprimis in inſtitutis algebraicis ipſa praeſtant, uſus flagitat, ut, quibus artificiis analyticis et inveſtigari et examinari ſingula queant, ſingulatim exponatur. Defecere adhuc, niſi fallor, aliquibus *rationum* ac *proportionum variationibus nomina;* mirifice tamen, ſi quid ego intelligo, ad promtam et commodam ipſarum tum diſcriminationem, tum comprehenſionem, tum et adplicationem neceſſaria. Speramus igitur, fore, ut mathematicorum filiis haud omnino diſpliceat, qua partim in mutandis denominationibus quibusdam priſtinis, partim quoque in conficiendis novis uſi hoc loco ſumus, licentia.

I. Sit ratio $a : ma$
Factor communis $c \quad c$
——————————————— multiplic.
Erit $ac : mac = a : ma$ hinc

Theo-

Theorema: *Binarum quantitatum, per eandem tertiam multiplicatarum, facta binis illis factoribus sunt proportionalia.* vel brevius: *Aeque multiplicia simplicibus suis proportionalia existunt.*

Examen

$$\frac{ac}{mac} = \frac{1}{m} \quad \text{item} \ \frac{a}{ma} = \frac{1}{m} \quad \text{Ergo} \ \frac{ac}{mac} = \frac{a}{ma}$$

vel

$$\frac{mac}{ac} = \frac{m}{1} = m. \ \text{item} \ \frac{ma}{a} = \frac{m}{1} = m. \ \text{Ergo} \ \frac{mac}{ac} = \frac{ma}{a}$$

II. Sit ratio $a : ma$

Divisor communis $c \quad c$

——————————————— divid.

Erit $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = a : ma.$ hinc

Theorema: *Binarum quantitatum, per eandem quantitatem tertiam divisarum, quotientes, dividendis proportionales existunt.* vel brevius: *Aeque submultiplicia multiplicibus suis proportionalia existunt.*

$$\textit{Examen} \ \frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{ma} = \frac{ac}{mac} = \frac{1}{m} \ \text{item} \ \frac{a}{ma} = \frac{1}{m}.$$

$$\text{Ergo} \ \frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = a : ma$$

III. Sit ratio prima $a : ma$

\- \- altera $b : mb$

subtrah.

Erit $a - b : ma - mb = a : ma$

$= b : mb$ hinc

Theorema: *In binis vel compluribus rationibus similibus differentiae antecedentium et consequentium utriusque rationis terminis proportionales existunt.*

Examen

$$\frac{a-b}{ma-mb} = \frac{(a-b)\,1}{(a-b)m} = \frac{1}{m}. \quad \text{item} \frac{a}{ma} = \frac{1}{m} \quad \text{Ergo} \frac{a-b}{ma-mb} = \frac{a}{ma}$$

vel

$$\frac{ma-mb}{a-b} = \frac{(a-b)m}{(a-b)1} = \frac{m}{1} = m. \ \text{item} \frac{ma}{a} = \frac{m}{1} = m. \ \text{Ergo} \frac{ma-mb}{a-b} = \frac{ma}{a}$$

IV. Sit ratio prima $a : ma$

\- \- altera $b : mb$

add.

Erit $a + b : ma + mb = a : ma$

$= b : mb.$ hinc

Theorema: *In binis vel compluribus rationibus similibus summae antecedentium et consequentium singularibus sive simplicibus utriusque rationis terminis proportionales existunt.*

Examen

$$\frac{a+b}{ma+mb} = \frac{(a+b)\,1}{(a+b)\,m} = \frac{1}{m}. \quad \text{item} \frac{a}{ma} = \frac{1}{m}. \quad \text{Ergo} \frac{a+b}{ma+mb} = \frac{a}{ma}$$

vel

vel

$\frac{ma+mb}{a+b} = \frac{(a+b)m}{(a+b)1} = \frac{m}{1} = m.$ item $\frac{ma}{a} = \frac{m}{1} = m.$ Ergo $\frac{ma+mb}{a+b} = \frac{ma}{a}$

Haec de rationis mutatione varia, ut et proportionis, quae exinde naſcitur, examine dicta ſufficiant. Reliquum eſt, ut de *proportionis* quoque *transformatione*, ut et novarum, quae exinde proveniunt, proportionis formarum *examine* ſimiliter exponamus.

1) Sit igitur $a : ma = b : mb$

Erit quoque *alternatim* $a : b = ma : mb.$ hinc

Theorema: *Si quatuor ſunt proportionalia, erunt ipſa* alternatim *quoque proportionalia. h. e.* antecedens primae erit ad antecedentem ſecundae, uti conſequens primae ad conſequentem ſecundae rationis

Eſt enim ALTERNATIO RATIONVM *ſumtio antecedentis primae rationis ad antecedentem ſecundae rationis tanquam conſequentem; nec non conſequentis primae rationis tanquam antecedentis ad ſecundae rationis conſequentem, ut conſequentem.*

Examen $\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}.$ quia $\frac{m}{m} = 1$

2) Sit porro $a : ma = b : mb.$

Erit quoque *inverſe* $ma : a = mb : b.$ hinc

Theorema: *Si quatuor ſunt proportionalia, erunt etiam* inverſe *proportionalia.*

Eſt

Est enim INVERSIO RATIONUM *sumtio consequentium tanquam antecedentium, ad antecedentes tanquam consequentes.*

Examen $\frac{ma}{a} = \frac{m}{1}$. item $\frac{mb}{b} = \frac{m}{1}$. Ergo $\frac{ma}{a} = \frac{mb}{b}$

3) Sit $a : ma = b : mb.$

Erit etiam *conversim* $a + ma : a = b + mb : b.$ hinc Theorema: *Si quatuor sunt proportionalia, erunt etiam* conversim *proportionalia.*

Est enim CONVERSIO RATIONUM *sumtio aggregati antecedentis et consequentis utriusque rationis tanquam antecedentis, ad antecedentem utriusque rationis tanquam consequentem*

Examen

$$\left.\begin{array}{c}\frac{a + ma}{a}\\ \text{vel}\\ \frac{a}{a} + \frac{ma}{a}\end{array}\right\} = 1 + \frac{m}{1}. \text{ item } \left.\begin{array}{c}\frac{b + mb}{b}\\ \text{vel}\\ \frac{b}{b} + \frac{mb}{b}\end{array}\right\} = 1 + \frac{m}{1}. \text{ Ergo } \frac{a+ma}{a} = \frac{b+mb}{b}$$

4) Sit $a : ma = b : mb$

Erit etiam *composite* $a + ma : ma = b + mb : mb.$ hinc Theorema: *Si quatuor sunt proportionalia, erunt ipsa* composite *quoque proportionalia.*

COMPOSITIO enim RATIONIS *est sumtio aggregati antecedentis et consequentis utriusque rationis, tanquam antecedentis, ad consequentem, ut consequentem*

Exa-

Examen

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{a + ma}{ma} \\ \text{vel} \\ \dfrac{a}{ma} + \dfrac{ma}{ma} \end{array}\right\} = \frac{1}{m} + 1. \quad \text{item} \quad \left.\begin{array}{c} \dfrac{b + mb}{mb} \\ \text{vel} \\ \dfrac{b}{mb} + \dfrac{mb}{mb} \end{array}\right\} = \frac{1}{m} + 1. \quad \text{Ergo} \; \frac{a+ma}{ma} = \frac{b+mb}{mb}$$

5) Sit $a : ma = b : mb$

Erit *separatim*, $ma - a : a = mb - b : b$. hinc

Theorema: *Si quatuor sunt proportionalia, erunt ipsa* separatim (subtracte) *quoque proportionalia.*

Est enim SEPARATIO (SVBTRACTIO) RATIONVM *sumtio differentiae antecedentis et consequentis utriusque rationis tanquam antecedentis, ad antecedentes velut consequentes.*

Examen

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{ma - a}{a} \\ \text{vel} \\ \dfrac{ma}{a} - \dfrac{a}{a} \end{array}\right\} = \frac{m}{1} - 1. \quad \text{item} \quad \left.\begin{array}{c} \dfrac{mb - b}{b} \\ \text{vel} \\ \dfrac{mb}{b} - \dfrac{b}{b} \end{array}\right\} = \frac{m}{1} - 1. \quad \text{Ergo} \; \frac{ma - mb}{a} = \frac{mb-b.}{b}$$

(6) Sit $a : ma = b : mb.$

Erit *subseparatim*, $ma - a : ma = mb - b : mb$. hinc

Theorema: *Si quatuor sunt proportionalia, erunt ipsa subseparatim (consubtracte) quoque proportionalia.*

Est enim SUBSEPARATIO (CONSUBTRACTIO) RATIONUM *sumtio differentiae terminorum utriusque rationis, tanquam antecedentis, ad consequentem, ut consequentem*

Examen

$$\left.\begin{array}{c}\frac{ma-a}{ma}\\ \text{vel}\\ \frac{ma}{ma}-\frac{a}{ma}\end{array}\right\} = 1-\frac{1}{m}. \text{ item vel } \left.\begin{array}{c}\frac{mb-b}{mb}\\ \\ \frac{mb}{mb}-\frac{b}{mb}\end{array}\right\} = 1-\frac{1}{m}. \text{ Ergo } \frac{ma-a}{ma} = \frac{mb-b}{mb}$$

(7) Sit $a : ma = b : mb.$

Erit quoque *potentialiter*, $a^n : m^n a^n = b^n : m^n b^n$.

Theorema: *Si quatuor sunt proportionalia, erunt quoque* potentialiter *vel* evehendo *proportionalia.*

Est enim RATIONUM POTENTIA vel EVECTIO *potentiarum similium pro radicibus vel terminis simplicibus sumtio*

Examen

$$\frac{a^n}{m^n a^n} = \frac{1}{m^n}. \text{ item } \frac{b^n}{m^n b^n} = \frac{1}{m}. \text{ Ergo } \frac{a^n}{m^n a^n} = \frac{b^n}{m^n b^n}$$

(8) Sit $a : ma = b : mb$

Erit *multiplicate*, $ac : mac = bc : mbc$. hinc

Theo-

Theorema: *Si quatuor sunt proportionalia, erunt quoque* multiplicate *proportionalia.*

Est enim RATIONVM MVLTIPLICATIO *multiplorum similium, seu eundem factorem habentium, pro terminis simplicibus sumtio.*

Examen $\frac{ac}{mac} = \frac{1}{m}$. item $\frac{bc}{mbc} = \frac{1}{m}$. Ergo $\frac{ac}{mac} = \frac{bc}{mbc}$.

(9) Sit $a : ma = b : mb$

Erit *alternatim commultiplicate.* $a : mac = b : mbc$. hinc

Theorema: *Si quatuor sunt proportionalia, erunt quoque* alternatim commultiplicate *proportionalia.*

Est enim ALTERNANS RATIONVM COMMVLTIPLICATIO *antecedentium simplicium ad consequentes aeque multiplices sumtio*

Examen $\frac{a}{mac} = \frac{1}{mc}$. item $\frac{b}{mbc} = \frac{1}{mc}$. Ergo $\frac{a}{mac} = \frac{b}{mbc}$

10) Sit $a : ma = b : mb$.

Erit quoque *divisim*, $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{c} : \frac{mb}{c}$ hinc

Theorema: *Si quatuor sunt proportionalia, erunt quoque* divisim *proportionalia.*

Est enim RATIONVM DIVISIO *submultiplorum seu quotientum similium pro terminis integris sumtio.*

Examen $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{ma} = \frac{ac}{mac} = \frac{1}{m}$ item $\frac{b}{c} : \frac{mb}{c} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{mb} = \frac{bc}{mbc} = \frac{1}{m}$. Ergo $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{c} : \frac{mb}{c}$

11) Sit $a : ma = b : mb$

Erit *alternatim condivisim* $a : \frac{ma}{c} = b : \frac{mb}{c}$ hinc

Theorema: *Si quatuor sunt proportionalia, erunt quoque* alternatim condivisim *proportionalia.*

Est enim ALTERNANS RATIONVM CONDIVISIO *consequentium submultiplicium, seu quotientum similium, pro consequentibus integris seu non - divisis sumtio.*

Examen

$a : \frac{ma}{c} = \frac{ac}{ma} = \frac{c}{m}$. item $b : \frac{mb}{c} = \frac{bc}{mb} = \frac{c}{m}$. Ergo $a : \frac{ma}{c} = b : \frac{mb}{c}$

12) Sit $a : ma = b : mb$

Erit *alternatim multiplicate*, $ac : ma = bc : mb$. hinc

Theorema: *Si quatuor sunt proportionalia, erunt quoque* alternatim multiplicate *proportionalia.*

Est enim ALTERNANS RATIONVM MVLTIPLICATIO *antecedentium aeque multiplicium pro antecedentibus simplicibus sumtio.*

Examen. $\frac{ac}{ma} = \frac{c}{m}$. item $\frac{bc}{mb} = \frac{c}{m}$. Ergo $\frac{ac}{ma} = \frac{bc}{mb}$

13) Sit $a : ma = b : mb$

Erit *alternatim dividendo* $\frac{a}{c} : ma = \frac{b}{c} : mb$. hinc

Theorema: *Si quatuor sunt proportionalia, erunt quoque* alternatim dividendo *proportionalia.*

Est

Est enim ALTERNANS RATIONUM DIVISIO *antecedentium aeque submultiplicium, sive similiter divisorum, pro antecedentibus integris sumtio.*

Examen. $\frac{a}{c} : ma = \frac{a}{mac} = \frac{1}{mc}$. item $\frac{b}{c} : mb = \frac{b}{mbc} = \frac{1}{mc}$.

Ergo $\frac{a}{c} : ma = \frac{b}{c} : mb$.

13) Sit $a : ma = b : mb$

Erit *praemultiplicate*, $ac : mac = b : mb$. hinc

Theorema: *Si quatuor sunt proportionalia, erunt quoque* praemultiplicate *proportionalia.*

Est enim RATIONUM PRAEMULTIPLICATIO *terminorum primae rationis aeque multiplicium, sive similiter multiplicatorum, pro terminis simplicibus sumtio.*

Examen. $\frac{ac}{mac} = \frac{1}{m}$. item $\frac{b}{mb} = \frac{1}{m}$. Ergo $\frac{ac}{mac} = \frac{b}{mb}$.

14) Sit $a : ma = b : mb$

Erit quoque *praedivisim*, $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb$. hinc

Theorema: *Si quatuor sunt proportionalia, erunt quoque* praedivisim *proportionalia.*

Est enim RATIONUM PRAEDIVISIO *terminorum primae rationis aeque submultiplicium, sive similiter divisorum, pro integris sumtio.*

Examen

$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{ac}{mac} = \frac{1}{m}$. item $\frac{b}{mb} = \frac{1}{m}$. Ergo $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{mb}$

 15) Sit

15) Sit $a : ma = b : mb$

Erit *prae- et commultiplicate*, $ac : mac = bd : mbd$. hinc

Theorema: *Si quatuor sunt proportionalia, erunt quoque* prae- et commultiplicate *proportionalia.*

Est enim RATIONUM PRAE- ET COMMULTIPLICATIO *terminorum aeque-sed ita multiplicium, ut peculiarem quaelibet ratio multiplicatorem habeat, pro terminis simplicibus sumtio.*

Examen. $\frac{ac}{mac} = \frac{1}{m}$. item $\frac{bd}{mbd} = \frac{1}{m}$. Ergo $\frac{ac}{mac} = \frac{bd}{mbd}$.

16) Sit $a : ma = b : mb$

Erit *prae- et condivisim*, $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$ hinc

Theorema: *Si quatuor sunt proportionalia, erunt quoque* prae- et condivisim *proportionalia.*

Est enim RATIONUM PRAE- ET CONDIVISIO *terminorum aeque-sed ita submultiplicium, seu divisorum, ut peculiarem ratio quaelibet divisorem habeat, pro terminis integris sumtio.*

Examen. $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{ac}{mac} = \frac{1}{m}$. item $\frac{b}{d} : \frac{mb}{d} = \frac{bd}{mbd} = \frac{1}{m}$.

Ergo $\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$.

17) Sit $a : ma = b : mb$

Erit quoque *alternatim multiplicate et commultiplicate*

$ac : mad = bc : mbd$. hinc

Theo-

Theorema: *Si quatuor sunt proportionalia, erunt quoque* alternatim multiplicate et commultiplicate *proportionalia.*

Est enim ALTERNANS RATIONVM MVLTIPLICATIO ET COMMVLTIPLICATIO *terminorum aeque- sed ita multiplicium, ut alium antecedentes, alium consequentes factorem habeant, pro terminis simplicibus sumtio.*

Examen. $\frac{ac}{mad} = \frac{c}{md}$. item $\frac{bc}{mbd} = \frac{c}{md}$. Ergo $\frac{ac}{mad} = \frac{bc}{mbd}$

18) Sit igitur $a : ma = b : mb$

Erit *alternatim divid. et condivid.* $\frac{a}{c} : \frac{ma}{d} = \frac{b}{c} : \frac{mb}{d}$. hinc

Theorema: *Si quatuor sunt proportionalia, erunt quoque* alternatim dividendo et condividendo *proportionalia.*

Est enim ALTERNANS RATIONVM DIVISIO ET CONDIVISIO *terminorum aeque- sed ita submultiplicium, ut alium antecedentes, alium consequentes divisorem habeant, pro terminis integris sumtio.*

Examen. $\frac{a}{c} : \frac{ma}{d} = \frac{ad}{mac} = \frac{d}{mc}$. item $\frac{b}{c} : \frac{mb}{d} = \frac{bd}{mbc} = \frac{d}{mc}$.

Ergo $\frac{a}{c} : \frac{ma}{d} = \frac{b}{c} : \frac{mb}{d}$.

19) Sit *ordinate* $a : ma = b : mb$

et $ma : mna = mb : mnb$

vel $ma : \frac{ma}{n} = mb : \frac{mb}{n}$

Erit etiam *ex aequo,* $a : mna = b : mnb.$

item $a : \frac{ma}{n} = b : \frac{mb}{n}$. hinc

Theo-

Theorema: *Si fuerint quatuor proportionalia, horumque consequentes* ordinate *tanquam antecedentes binis aliis quantitatibus, velut consequentibus suis, fuerint proportionales, erunt etiam* ex aequo *bini antecedentes priores consequentibus posterioribus proportionales.*

Examen. $\frac{ma}{mna} = \frac{1}{n}$. item $\frac{mb}{mnb} = \frac{1}{n}$. Ergo $\frac{ma}{mna} = \frac{mb}{mnb}$

vel

$a : \frac{ma}{n} = \frac{na}{ma} = \frac{n}{m}$. item $b : \frac{mb}{n} = \frac{nb}{mb} = \frac{n}{m}$. Ergo $a : \frac{ma}{n} = b : \frac{mb}{n}$

20) Sit denique *perturbate*, $a : ma = b : mb$

et . $ma : mna = \frac{b}{n} : b$

vel $ma : \frac{ma}{n} = nb : b$

Erit etiam *ex aequo*, $a : mna = \frac{b}{n} : mb$.

item $a : \frac{ma}{n} = nb : mb$. hinc

Theorema: *Si quatuor sunt proportionalia*, perturbateque *bini ipsorum termini medii, velut extremi binis aliis quantitatibus intermediis proportionales fiunt*, tum ex aequo *etiam bini termini extremi priores terminis intermediis novis proportionales existunt.*

Examen

$\frac{a}{mna} = \frac{1}{mn}$. item $\frac{b}{n} : mb = \frac{b}{mnb} = \frac{1}{mn}$. Ergo $\frac{a}{mna} = \frac{b}{n} : mb$

vel

$a : \frac{ma}{n} = \frac{na}{ma} = \frac{n}{m}$. item $\frac{nb}{mb} = \frac{n}{m}$. Ergo $a : \frac{ma}{n} = \frac{nb}{mb}$

ad §. 129.

ad §. 129.

α) Pro definiendo *numero variationum*, quae institui circa quotlibet vel *litteras*, vel *quantitates*, vel *personas*, vel et quascunque *res alias* invicem coordinandas possunt, sequentem adhibere convenit *formulam*, casuum singularium consideratione analytica investigatam: $n. n\text{-}1. n\text{-}2. n\text{-}3. n\text{-}4$ et sic porro. hinc

Theorema: *Numerus variationum, in coordinandis variis instituendarum sive possibilium, est factum progressionis alicuius arithmeticae, cuius terminus minimus ac differentia unitas, terminus vero maximus ipsi variorum numero aequalis existit.*

Schol. 1. Sic numerus variationum, quae fieri in coordinandis *quatuor* vel personis vel propositionibus possunt, est $4. 3. 2. 1 = 24$.

β) Quodsi *unum ex variis pluries ponitur*, pro definiendo variationum numero sequens valet formula:

$$\frac{n. n-1. n-2. n-3. n-4. \text{ etc.}}{m. m-1. m-2 \text{ etc.}} \quad \text{hinc}$$

Theorema: *Numerus variationum, in coordinandis variis, quorum unum pluries ponitur, possibilium, est fractio, cuius numerator ex facto progressionis arithmeticae, ab unitate incipientis inque variorum numero desinentis; denominator vero ex facto progressionis similis, in iterationis numero desinentis, constat.*

Schol. 2. Sic numerus variationum, in *sex* litteris, quarum tres eaedem existunt, sive quarum una ter occurrit, coordinandis vel transponendis, est

$$\frac{6. 5. 4. 3. 2. 1}{3. 2. 1} = \frac{720}{6} = 120$$

γ) Ubi denique *complura ex variis pluries* ponuntur, variationum numerum sequens formula exhibet.

$$\frac{n.\ n-1.\ n-2.\ n-3.\ n-4.\ \text{etc.}}{m.\ m-1.\ m-2\ \text{etc.}\ l.\ l-1.\ l-2.\ \text{etc.}}\ \text{hinc}$$

Theorema: *Numerus variationum, in coordinandis variis, quorum aliqua pluries occurrunt, possibilium, est fractio, cuius numerator ex facto progressionis arithmeticae naturalis, in variorum numero desinentis; denominator vero itidem ex facto progressionum similium, in iterationum numeris desinentium, constat.*

Schol. 3. Sic numerus variationum in *novem* litteris, quarum *una bis*, *altera ter* occurrit, possibilium, est

$$\frac{9.\ 8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2\ 1}{2.\ 1.\ \cdot\ 3.\ 2.\ 1} = \frac{362880}{12} = 30240$$

Schol. 4. Igitur, quae vulgo, sine mathematicorum artificiis, non imperfecte solum, sed et difficulter admodum, fereque non nisi coeco impetu conficiuntur, ea matheseos adminiculo, quam exactissime sive citra defectum ac difficultatem pervestigari possunt, *anagrammata*. Unde, quam multiplex et varius matheseos usus sit, haud obscure intelligitur.

SECTIO II.

DE ALGEBRA

CAP. I.

DE ALGEBRA AD PROBLEMATA ARITHMETICA EAQVE DETERMINATA ADPLICATA.

ad §. 144.

QVam sit foecundum in explorandis rebus vel doctrinis novis *arbitrariae determinationis* sive *ingeniosae fictio-*

fictionis atque *imitationis* artificium; (Vid. delin. philos. rat. pag. 35. 36.) quam item commoda ac facilia in doctrinis mathematicis extent *artis heuristicae exercitia*; quoque tandem modo *a principiis singularibus ad principia communissima* paullatim adscendere liceat, (vid. §. 145.) ostensuri, haud abs re, arbitror, fecerimus, si, paullulum mutato praesentis problematis, sive quaestionis, habitu, unam atque alteram quaestionem novam exinde confecerimus.

PROBLEMA I.

Invenire numerum cuius pars dimidia cum tertia et quarta numerum integrum binario, seu binis unitatibus superat.

Sit numerus quaesitus $= x$

Erit, per condit. problem. $x + 2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x$

h. e. facta fraction. reduct. $x + 2 = \frac{12}{24}x + \frac{8}{24}x + \frac{6}{24}x$

multipl. per 24)

$$24x + 48 = 12x + 8x + 6x$$
$$= 26x$$

subtr. $24x$

$$48 = 2x$$

divid. per 2

Ergo $24 = x$

Examen. $\frac{1}{2}x = 12$, $\frac{1}{3}x = 8$, $\frac{1}{4}x = 6$. Ergo $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 12 + 8 + 6 = 26 = 24 + 2 = x + 2$.

PROBLEMA II.

Invenire numerum, cuius pars dimidia cum tertia a numero integro unitate deficit.

Sit numerus quaesitus $= x$

Erit, per condit. problem. $x - 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x$

Ergo, facta reductione, $x - 1 = \frac{3}{6}x + \frac{2}{6}x$

hoc est $x - 1 = \frac{5}{6}x$

multipl. per 6

$6x - 6 = 5x$

$5x \quad 5x$

subtrah.

Ergo $x - 6 = 0$

add. 6. seu fiat transpositio.

Erit $x = 6$

Examen. $\frac{1}{2}x = 3$, $\frac{1}{3}x = 2$. Ergo $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 3 + 2 = 5$
$= 6 - 1 = x - 1$. et sic porro.

* *pag.* 345. *col.* 2. *lin.* 7. *a fine, pro* differentiae, *ponatur* semidifferentiae.

ad §. 151.

Duplicem problema praesens observationem suppeditat: quarum neutra temere sperni ab analyticae tironibus debet. Scilicet 1) quum *quantitates simplices* spectari tanquam dignitates primae possunt ac solent; sane quidquid universe de dignitatibus pronuntiatur, idem quoque de quantitatibus simplicibus, si cetera quidem paria sunt, valeat, necesse est. Quodsi ergo, quemadmodum quantitatis simplicis natura flagitat, exponens dignitatis sive m fuerit $= 1$; sane $\overset{m}{V}(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)$ erit $= \overset{1}{V}(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ $= \frac{a-b}{2}$. Tum illud quoque notasse expediet, 2) *totidem*

in

in unaquavis quaestione algebraica confici *definitiones*, vel institui *resolutiones* posse, quot in eadem quantitates incognitae occurrunt. Sunt etenim, quod obiter hic notandum ducimus, *postremae quaeque resolutionum algebraicarum formulae quasi totidem definitiones:* quarum *definitum* sub quantitatis incognitae signo (x vel y) seorsim posito, *notio* autem *definitiva*, sive notarum complexus, sub *quantitatum cognitarum* vel datarum *signis*, ex adverso positis, delitescit. Tametsi autem quaesitorum vel incognitorum unum pervestigasse, quoad praxin, sufficit; operae tamen pretium aliquod tirones faciunt, si, calculi atque ingenii exercendi ergo, quaesitorum nihil non singulatim explorare satagunt. Videamus igitur primo, qualiter in hoc problemate definiri y; tum autem, quomodo ad quantitates simplices adplicari, quae de potentiis proposita hic est, quaestio possit. Scilicet

per condit. problem. $x^m + y^m = a$. $\qquad y^m - x^m = b$

subtrah. y^m — $\qquad -x^m = b - y^m$

$x^m = a - y^m$ $\qquad$ vel $x^m = y^m - b$

Ergo $a - y^m = y^m - b$

add. y^m

$a = 2y^m - b$

add. b

$a + b = 2y^m$

divid. per 2)

$\frac{a+b}{2} = y^m$

extrah. Rad.

$\sqrt[m]{\left(\frac{a+b}{2}\right)} = \sqrt[m]{\left(\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b\right)} = y$. hinc

Theorema: *Si semisummae dignitatum similium duarum quantitatum semidifferentia earundem additur, aggregatum quantitatem sive radicem maiorem exhibebit.*

PROBLEMA

Data summa duarum quantitatum quarumcunque et differentia earundem, invenire quantitatem utramque.

Sit summa $= a$ Quant. mai. $= x$
differentia $= b$ - - min. $= y$

erit, per conditionem problematis,

	$x + y = a$	$x - y = b$	
subtrah. y			add. y
	$x = a - y$	$x = b + y$	
item	$y = a - x$	$y = x - b$	
Ergo	$a - y = b + y$	item $a - x = x - b$	
add. y			add. x
	$a = b + 2y$	$a = 2x - b$	
subtr. b			add. b
	$a - b = 2y$	$a + b = 2x$	
divid. per 2			divid. per 2
	$\frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = y$. hinc	$\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = x$. hinc	

Theorema: *Si a semisumma duarum quantitatum semidifferentia earundem subtrahitur, residuum est quantitas minor.*

Theorema: *Si semisummae duarum quantitatum semidifferentia earundem additur, aggregatum est quantitas maior.*

Sit e.g. $a = 27$, $b = 13$. Erit $\frac{a-b}{2} = \frac{27-13}{2} = \frac{14}{2} = 7 = y$

item $\frac{a+b}{2} = \frac{27+13}{2} = \frac{40}{2} = 20 = x$. hinc $x + y = 20 + 7 = 27$. item $x - y = 20 - 7 = 13$.

ad §. 163.

ad §. 163.

Quo rectius ac tutius emendari, quae perperam hic posita sunt, possint, haud abs re fuerit, resolutioni hic propositae, qua nempe x seu numerorum desideratorum maior investigatur, alteram h. e. eam adiungere, qua, quid y sit, sive numeri minoris valor definitur. Scilicet per cond. probl. $x^2 - y^2 = xy$, item $x + y = xy$

subtr. x

$$y = xy - x$$
$$= (y-1)\, x$$

divid. per $y-1$)

$$\frac{y}{y-1} = x$$

fiat quadr.

$$\frac{y^2}{y^2 - 2y + 1} = x^2$$

Ergo, substitutis, pro x^2 et x, ipsorum valoribus, ex aequatione superiori $x^2 - y^2 = xy$ prodibit alia, nempe haec:

$$x^2 - y^2 = xy$$

$$\text{Iam } x = \frac{y}{y-1}$$

$$\text{Ergo } x^2 - y^2 = \frac{y^2}{y-1}$$

$$\text{Iam porro } x^2 = \frac{y^2}{y^2 - 2y + 1}$$

Ergo

$$\text{Ergo } \frac{y^2}{y^2 - 2y + 1} - y^2 = \frac{y^2}{y-1}$$

multipl. per $y^2 - 2y + 1$)

$$y^2 - y^4 + 2y^3 - y^2 = y^3 - y^2$$

sublato y^2)

$$-y^4 + 2y^3 = y^3 - y^2$$

subtr. y^3

$$-y^4 + y^3 = -y^2$$

divid. per y^2

$$-y^2 + y = -1$$

$$\text{h. e. } y^2 - y = 1$$

add. $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$

$$y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Extrah. Rad.

$$\left.\begin{matrix} y - \frac{1}{2} \\ \text{vel } \frac{1}{2} - y \end{matrix}\right\} = \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

Ergo $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$.* (quae *radix* est *falsa*. nam $\frac{1}{2}\sqrt{5} \rhd \frac{1}{2}$) vel potius $y = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

* Patet igitur, quomodo corrigi debeat lapsus ille, qui *pag. 351. col. 2. circa fin.* est admissus. *Scilicet pro:* Tunc enim reperitur $y = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$, ubi $1 - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ est radix falsa; quia $\frac{1}{2}\sqrt{5} \rhd 1$. *ponatur:* Tunc enim reperitur $y = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$, ubi $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ est radix falsa; quia $\frac{1}{2}\sqrt{5} \rhd \frac{1}{2}$

Exa-

Examen

$$\begin{array}{rl} & y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5} \\ & x = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5} \\ \text{add.} & \overline{} \\ \text{Ergo} & y + x = 2 + \sqrt{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5} \\ & x = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5} \\ \text{multipl.} & \overline{} \\ & \phantom{\tfrac{3}{4}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5} + \tfrac{1}{4}\sqrt{25} \\ & \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4}\sqrt{5} \\ \text{Ergo} & xy = \tfrac{3}{4} + \tfrac{4}{4}\sqrt{5} + \tfrac{1}{4}\sqrt{25} \\ & = \tfrac{3}{4} + \sqrt{5} + \tfrac{1}{4} \cdot 5 \\ & = \tfrac{8}{4} + \sqrt{5} = 2 + \sqrt{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & x^2 = \tfrac{9}{4} + \tfrac{6}{4}\sqrt{5} + \tfrac{5}{4} \\ & y^2 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{4}\sqrt{5} + \tfrac{5}{4} \\ \text{Ergo} & x^2 - y^2 = \tfrac{8}{4} + \tfrac{4}{4}\sqrt{5} \\ & = 2 + \sqrt{5} \end{array}$$

Ideoque $x + y = xy = x^2 - y^2$. I. Q. E. D.

* *pag.* 356. *col.* 2. *lin.* 5. *pro*, tertius $= mx^2$, *ponatur*: tertius $= \frac{m^2x^2}{x} = m^2x$

ad §. 178.

Quidquid impediti inesse in hac formula videtur, id penitus, nisi ego fallor, evanescit, si sequens designandi ratio adhibetur:

$$\frac{\sqrt[m+1]{a^{mn}b^n}}{a^{n-1}} = \frac{a^{\frac{mn}{m+1}}b^{\frac{n}{m+1}}}{a^{n-1}} = \frac{a^{\frac{mn}{m+1}}b^{\frac{n}{m+1}}}{a^{\frac{n-1\,(m+1)}{m+1}}} = \frac{a^{\frac{mn}{m+1}}b^{\frac{n}{m+1}}}{a^{\frac{mn\cdot m+n-1}{m+1}}} = a^{\frac{m-n+1}{m+1}}b^{\frac{n}{m+1}}$$

Namque in formula penultima $a^{\frac{mn}{m+1}}$ dividi per $a^{\frac{mn-m+n-1}{m+1}}$ debet: iam vero si dignitates quaedam homogeneae, cuiusmodi praesentes sunt, per se invicem dividuntur; exponens dignitatis dividentis ab eius, quae dividitur exponente subtrahitur. Patet igitur, si ab $\frac{mn}{m+1}$ subtraxeris $\frac{mn-m+n-1}{m+1}$, remanere $\frac{m-n+1}{m+1}$; ideoque $\frac{a^{\frac{mn}{m+1}}}{a^{\frac{mn\ m+n-1}{m+1}}} = a^{\frac{m-n+1}{m+1}}$

* *pag.* 358. *col.* I. *lin.* 10. *et* II. *pro* $(m+n-1)$ ponatur $(m-n+1)$

ad §. 180. pag. 358. col. 2.

Quodsi, quemadmodum hic pronuntiatum est,

$$m - 1 : m^2 - 1 = x : b - a$$

Esset $m^2 x - x = mb - b - ma + a$
Sed $m^2 x - x = mb - a$. (vi calculi

Rectius igitur $1 : m^2 - 1 = x : mb - a$

Sic enim $(m^2 - 1)\, x = (mb - a)\, 1$
hoc est $m^2 - x = mb - a$.

Quocirca sic enuntiandum est:
Analogia, in quam aequatio penultima resolvitur,
$1 : m^2 - 1 = x : mb - a$ hoc suppeditat
Theorema: *Unitas est ad quadratum denominatoris unitate mulctatum* (m² - 1), *ut terminus primus proportionis sive continuae, sive discretae* (x), *ad differentiam summae primi et ultimi* (a) *a summa secundi et tertii per denominatorem multiplicata* (mb).

ad §. 186. sqq.

Quandoquidem generatim ad PROPORTIONEM similitudo quaedam rationis, seu mutua ternarum vel quaternarum quantitatum relatio requiritur; statui rectissime poterit, PROPORTIONEM HARMONICAM *in similitudine rationis, extrema directe posita inter et binorum priorum ac posteriorum differentias;* CONTRAHARMONICAM vero *in similitudine rationis, extrema retrorsum posita inter et binorum priorum ac posteriorum differentias* consistere. Fluunt hinc, praeter cetera, analyticae istae, quas illustris Auctor hic proposuit, *termini tertii* et *quarti harmonici*, nec non *tertii contraharmonici definitiones.* Quodsi enim

Term.

Term. I $= a$, Term. II. $= b$, Term. III. $= \begin{cases} c \\ x \end{cases}$, Term. IV $= x$

Erit 1) in *proport. harm. contin.* $x = \frac{ab}{2a - b}$

2) in *proport. harm. discr.* $x = \frac{ac}{2a - b}$

3) in *proport. contraharm.* $x = \frac{1}{2}b + V(\frac{1}{4}b^2 + ab - a^2)$. hinc

Theorema s. Definitio realis: 1) *Si binarum quantitatum factum,* (ab) *per secundae* (b) *a primae duplo* (2a) *differentiam* (2a - b) *dividitur, quotus est terminus tertius harmonice proportionalis.*

Theorema s. Defin. realis: 2) *Si factum termini primi in tertium* (ac) *per differentiam secundi a primi duplo* (2a - b) *dividitur, quotus est terminus quartus harmonice proportionalis.*

Theorema s. Defin. realis: 3) *Si ex differentia quadrati termini primi ab aggregato facti terminorum priorum in se invicem et quadrati termini secundi dimidii radix quadrata extrahitur,* $V(\frac{1}{4}b^2 + ab - a^2)$ *eademque dimidio termino secundo* ($\frac{1}{2}b$) *additur, summa est terminus tertius contraharmonicus.*

CONSECTARIVM.

Sit $2a = b + 1$

Erit $2a - b = 1$

Ideoque $\frac{ab}{2a - b} = \frac{ab}{1} = ab.$ item $\frac{ac}{2a - b} = ac$

Proinde si termini primi duplum unitate secundum superat, terminus tertius harmonicus facto primi in secundum; item quartus harmonicus facto primi in tertium aequalis existit.

Scholion 1.

Terminum secundum harmonicum duplo primo haud aequalem, nedum maiorem esse posse, §. 188. *consectar.* 1. Auctor ostendit.

Scho-

Scholion 2.

Quibus rite ſic firmatis atque expoſitis, haud difficulter confici ſingulares *proportionum harmonicarum* et *contraharmonicarum tabulae* poterunt. Ex quarum equidem ſpecimine hic exhibito haud obſcure patebit, *varios eosdemque mirificos in proportionibus harmonicis extare numerorum ordines:* quibus recte comprehenſis, non modo citra difficultatem omnem, quousque tandem libuerit, continuari proportionum harmonicarum et contraharmonicarum tabulae, ſed penitius quoque inveſtigari *harmonicorum et contraharmonicorum numerorum qualitates* poterunt. Sic enim e. c. *proportionum harmonicarum continuarum*, quoad primum et ſecundum terminum a fractione liberarum, ſiquidem in conſtituendo earundem termino primo naturalem numerorum ordinem ſequimur, *certae claſſes* quaedam exiſtunt: quarum unaquaevis eum proportionum ſingularium numerum continet, qui termino primo unitate mulctato aequalis eſt. Sic *binae* ſunt, quae a numero *ternario* incipiunt, *ternae* a numero *quaternario*. et ſic porro.

Scholion 3.

Quam ſit exiguus earum proportionum harmonicarum continuarum numerus, quae continuari atque ſic in *progreſſionem* aliquam *harmonicam* transformari poſſunt; quaenam item ſint proportiones iſtae; et quousque tandem pronatae ex iisdem progreſſiones harmonicae ſingulae procedant, luculenter admodum ac facile ſubſequens tabula demonſtrabit: ſimulatque nimirum proportionis continuandae terminus ſecundus cum ea claſſe componitur, in qua idem termini primi locum ſuſtinet.

TABVLA

TABVLA

I) Proport. harm. contin.		
2,	3,	6
3,	4,	6
3,	5,	15
4,	5,	$6\frac{2}{3}$
4,	6,	12
4,	7,	28
5,	6,	$7\frac{1}{2}$
5,	7,	$11\frac{2}{3}$
5,	8,	20
5,	9,	45
6,	7,	$8\frac{2}{5}$
6,	8,	12
6,	9,	18
6,	10,	30
6,	11,	66
7,	8,	$9\frac{1}{3}$
7,	9,	$12\frac{3}{5}$
7,	10,	$17\frac{1}{2}$
7,	11,	$25\frac{2}{3}$
7,	12,	42
7,	13,	91
8,	9,	$10\frac{2}{7}$
8,	10,	$13\frac{1}{3}$
8,	11,	$17\frac{3}{5}$
8,	12,	24
8,	13,	$34\frac{2}{3}$
8,	14,	56
8,	15,	120.

II) Proport. harm. discr.			
2,	3,	3,	6
2,	3,	4,	8
2,	3,	5,	10
2,	3,	6,	12
2,	3,	7,	14
2,	3,	8,	16
2,	3,	9,	18
2,	3,	10,	20
et sic in infin.			
3,	4,	4,	6
3,	4,	5,	$7\frac{1}{2}$
3,	4,	6,	9
3,	4,	7,	$10\frac{1}{2}$
3,	4,	8,	12
3,	4,	9,	$13\frac{1}{2}$
3,	4,	10,	15
et sic in infin.			
3,	5,	5,	15
3,	5,	6,	18
3,	5,	7,	21
3,	5,	8,	24
3,	5,	9,	27
et sic in infin.			
4,	5,	5,	$6\frac{2}{3}$
4,	5,	6,	8
4,	5,	7,	$9\frac{1}{3}$
4,	5,	8,	$10\frac{2}{3}$
4,	5,	9,	12
et sic in infin.			

III) Prop. contraharm.		
2,	5,	6
4,	10,	12
6,	15,	18
8,	20,	24
10,	25,	30
12,	30,	36
14,	35,	42
16,	40,	48
18,	45,	54
20,	50,	60
22,	55,	66
24,	60,	72
2pla	5pla,	6pla
et sic in infin.		
3,	5,	6
6,	10,	12
9,	15,	18
12,	20,	24
15,	25,	30
18,	30,	36
21,	35,	42
24,	40,	48
27,	45,	54
30,	50,	60
33,	55,	66
36,	60,	72
39,	65,	78
42,	70,	84
3pla	5pla	6pla
et sic in infin.		

Scholion 3.

Utique vero iustas esse ac legitimas, quas praesens tabula continet, proportiones harmonicas et contraharmonicas, statim et quam evidentissime adparebit, sicubi ad ipsarum definitiones, modo propositas, easdem revocaverimus.

T.II. T.I. Diff.I.et II. T.III. T.II. Diff.II.et III.
1) in classe I. quia $3 - 2 = 1$. item $6 - 3 = 3$
Iam vero $1 : 3 = 2 : 6$

Utique 2, 3, 6. sunt in proport. harm. contin.

T.II. T.I. Diff.I.et II. T.IV. T.III. Diff.III.et IV.
2) in classe II. quia $3 - 2 = 1$. item $6 - 3 = 3$
Iam vero $1 : 3 = 2 : 6$

Utique 2, 3, 3, 6 sunt in proport. harm. discr.

T.II. T.I. Diff.I.et II. T.III. T.II. Diff.II. et III.
3) in classe III. quia $5 - 2 = 3$. item $6 - 5 = 1$
Iam vero $1 : 3 = 6 : 2$

Utique 2, 5, 6. sunt in proport. contraharm.

Ex exemplo primo et item altero patet, utique rem ita sese habere, quemadmodum consectario superiori enuntiavimus: siquidem ($2 . 3 = 6$) in casu primo, *factum termini primi in secundum tertio;* item, in casu altero, *factum termini primi in tertium quarto aequale existit.* Ceteras de numeris harmonicis et contraharmonicis observationes, quas tabulae superioris contemplatio suppeditat, tironum industriae committimus.

ad §. 195.

Quia numerus *medius contraharmonicus est* $\frac{a^2 + b^2}{a + b}$; sane, qualiter comparati esse debeant bini termini extremi, mi, ut *medius integer*, vel a fractione immunis exiſtat, haud obſcure ex iis patebit, quae prolixe hanc in rem ſupra (*pag.* 29. *ſqq.*) diſſeruimus.

ad §. 206. *ſqq.*

Quo planius intelligi atque ipſis velut oculis cerni ea poſſint, quae de NVMERIS POLYGONIS, horundemque *latere* atque *angulo* hic proponuntur, neceſſarium videtur, *figuras* illas *geometricas*, unde ipſi nomina ſua ſortiuntur, et per quas ordine diſponi vel diduci eorundem unitates poſſunt, ſingulatim hic repraeſentare. Exhibetur itaque *Figura XII.* litteris *a a a* NVMERVS TRIGONVS ſive TRIANGVLARIS, cuius *latus* eſt 2; quique proinde *tres* unitates complectitur. Addita trium unitatum (b) ſerie, *numerus triangularis* alius hinc enaſcitur, cuius *latus* eſt 3; quique idcirco *ſex* unitates continet. Similiter adiecta quatuor unitatum (c) ſerie, denuo *numerus triangularis* alius hinc provenit; cuius *latus* eſt 4; quique proinde *decem* unitates comprehendit. *Figura XIII.* litt. *a. a. a. a.* NVMERVS QVADRATVS ſive tetragonus deſignatur, cuius *latus* eſt 2; quique idcirco *quatuor* unitates continet. Circumpoſito (5. unit.) *gnomone* (b), *numerus quadratus* alius hinc prodit, cuius *latus* eſt 3; quique proin *novem* unitates continet. Denuo circumpoſito (7. unit.) gnomone (c), *numerus quadratus* novus exinde producitur, cuius *latus* eſt 4, quique proinde *ſedecim* unitates complectitur. *Figura XIV.* litteris *a. a. a. a. a.* NVMERVS PENTAGONVS exhibetur, cuius *latus* eſt 2; quique idcirco *quinque* unitates complectitur. Circumpoſito (7. unit.) gnomone, (b) *numerus pentagonus* alius hinc emergit, cuius *latus* eſt 3; quique *duodecim* unitates continet. Si denuo (10. unit.) gnomon (*c*) circumponitur, nu-

De numeris figura
vid. Cardanus in op
arithm. ibidemq cit
Boëthius.

numerus pentagonus tertius hinc provenit, cuius latus est 4; quique proin *duo et viginti* unitates complectitur. *Fig. XV.* litteris *a. a. a. a. a. a.* NVMERVS HEXAGONVS designatur, cuius *latus* est 2; unitatum numerus 6. Cui si (9. unit.) gnomon (*b*) circumponitur, numerus hexagnus alius, cuius *latus* 3, unitatum numerus 15. existit, pronascitur. et sic porro. Denique *figura XVI.* litteris *A. a. a. a.* NVMERVS PYRAMIDALIS, idemque TRIANGVLARIS delineatur. Adiectis, pro nova basi, sex unitatibus (b), quippe ad numerum triangularem pertinentibus, numerus pyramidalis triangularis alter hinc enascitur. et sic porro. Tandem *figura XVII.* NVMERVS PYRAMIDALIS QVADRANGVLARIS exhibetur. Haud absimiliter cum NVMERIS PYRAMIDALIBVS PENTAGONIS, HEXAGONIS, ac ceteris, comparatum esse, quivis iam per se intelligit. Conferant, quibus volupe est, THEONIS SMYRNAEI *eorum, quae in mathematicis ad* PLATONIS *lectionem utilia sunt, expositionem, e bibliotheca Thuana editam, lat. versione ac notis illustratam ab* ISM. BVLLIALDO. *Lut. Paris.* 1644. 4. item OZANAMI *dictionarium mathemat.* gallice an. 1691. Amstel. 4. editum.

* *pag.* 371. *col.* 1. *lin.* 5. post *ade* adiiciatur *cde. it. lin.* 6. *a fine. pro* tribus quantitatibus, *ponatur:* tribus unitatibus. *Similiter pag.* 372. *col.* 2. *lin.* 14. *a fine pro,* fuerit, *lege,* fuerint. *denique pag.* 373. *col.* 1. *lin.* 4. *pro,* quatuor, *legendum* quinque.

ad §. 222.

Si numerus quantitatum, vel et quarumvis aliarum rerum fuerit *n*, *variationum et combinationum possibilium* omnium numerus erit $\frac{n^{n+1}-n}{n-1}$ hoc est: *Si ab eius numeri,*

qui

qui rerum complurium quomodocunque invicem combinandarum ac variandarum multitudinem denotat, dignitate illa, cuius exponens ipsam radicem unitate auctam adaequat, ipsa illa radix demitur, idemque residuum per modo dictam radicem unitate mulctatam dividitur, quotus variationum et combinationum possibilium omnium numerum indicabit. Sic e. g. variationum, quas 24. *alphabeti litterae*, quomodocunque combinatae ac dispositae suscipiunt, numerus est

$$\frac{24^{25}-24}{23} = 1391724288887252999425128493402200.$$

Sed esse tamen in hisce litterarum combinationibus quamplurimas, quae syllabam aut vocem commodam conficere haudquaquam possint, res ipsa loquitur. (*Vid. supra pag.* 89. 90.)

CAP. II.

DE ALGEBRA AD PROBLEMATA ARITHMETICA INDETERMINATA ADPLICATA.

SUfficiat hic, uno atque altero exemplo commonstrasse, quid, pro calculo atque ingenio exercendo, circa *problematum indeterminatorum resolutionem* facere tirones deceat.

ad §. 224.

per condit. problematis

$$\begin{array}{llll} & \text{N. I. II. III.} & & \text{I. II. IV.} \\ & \underline{x + y = z} & \text{item} & \underline{x - y = t} \\ \text{Ergo} & y = z - x & & -y = t - x \\ & & \text{vel} & y = x - t \text{ (per transposit.} \end{array}$$

Proinde $z - x = x - t$

———————————— add. x

$z = 2x - t$

———————————— add. t

$z + t = 2x$

———————————— divid. per 2.

$$\frac{z + t}{2} = x$$

Similiter $\frac{z - t}{2} = y$ (sec. demonstr. Auctoris) hinc

Theorema: *Si quatuor numeri sic comparati esse concipiuntur, ut primi et secundi summa tertium, ipsorum autem differentia quartum adaequet; tum primus* (x) *invenitur, si quartus dimidius tertio dimidio additur; secundus* (y) *autem, si quartus dimidius a tertio dimidio subtrahitur.*

ad §. 227.

Quoniam hoc loco $x = yV(y-1)$; sane, nisi $y - 1$ numerus quadratus est, vel nisi y unitate numerum quadratum superat; x erit numerus irrationalis. Possunt igitur numeri in duplicem velut classem distribui: namque ipsorum alii pro y adsumti numerum x *rationalem*, *irrationalem* alii efficiunt. *Prioris generis* sunt: 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, 101, 122, 145. et sic porro. *posterioris:* 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30. et sic porro.

ad §. 229.

Misso singulari isto, quod illustris Auctor hic adhibuit, et cuius ratio ex supra (*pag.* 94. *it. Auct.* §. 6. *et* 148.) positis liquet, denominationis artificio, sequentem in modum expediri quaestio proposita poterit. Sit nimirum

Num.

Num. I. $= x$, Num. II. $= y$, Quadrat. $= v^2$

Erit per condit. probl. $x^2 - y^2 = v^2$

add. y^2

$x^2 = v^2 + y^2$

Ideoque $x = \sqrt{(v^2 + y^2)}$. hinc

Theorema: *Radix numeri quadrati, qui numero quadrato minutus numerum quadratum relinquit, aequatur radici ex aggregato quadratorum numeri minuendi et subtrahendi.*

Examen. Sit $v = 4$, $y = 3$

Erit $v^2 = 16$, $y^2 = 9$

Proinde $v^2 + y^2 = 16 + 9 = 25 = x^2$

Ideoque $\sqrt{(v^2 + y^2)} = \sqrt{25} = 5 = x$

Quocirca $x^2 - v^2 = y^2$

h. e. $25 - 16 = 9$

Similiter $x^2 - y^2 = v^2$

h. e. $25 - 9 = 16$

Scholion. *Rite circumspectis atque exploratis, quae vel secundum nostram hanc, vel et secundum illustris Auctoris formulam* ($x = \frac{v^2}{4y}$) *excogitari possunt, determinationibus sive radicum* v *et* y *valoribus singularibus, adparebit, resolvi problema praesens in numeris rationalibus haud posse, nisi radices fuerint* 3, 4, 5, *vel et horum multipla similiter promota*, h. e. ipsorum dupla 6, 8, 10, item tripla 9, 12, 15, item quadrupla 12, 16, 20, et sic porro.

ad §. 230.

Equidem, propter nativam geometriae atque arithmeticae cognationem, haud abs re fuerit, arithmeticae problematis huius resolutioni, illustrationis ergo, geometricam adiungere. Sit igitur (fig. XVIII.) triangulum *ABC* rectangulum; erit, vi theorematis Pythagorici, hypothenusa *BC* latus summae quadratorum; eiusdemque quadratum binorum laterum, *AC* et *AB*, quadratis in summam collectis aequale. Manente igitur angulo recto *A*, hypothenusa vero *BC* quomodocunque dimota in *DE*; utique idem (vel eiusdem hypothenusae) quadratum, velut summa, in duo quadrata alia, novorum nempe laterum *AD* et *AE*, divisum esse deprehenditur. Scilicet

	DE	$=$	BC	[per construct.
Ergo	DE^2	$=$	BC^2	vi theorem. Pythag.
Iam	$AC^2 + AB^2$	$=$	BC^2	vi theorem. Pythag.
Similiter	$AD^2 + AE^2$	$=$	DE^2	vi theorem. Pythag.
Ideoque	$AC^2 + AB^2$	$=$	$AD^2 + AE^2$	

* *pag.* 378. *col.* 1. *lin.* 16. *pro* $-y = 2ax + x^2y$ *ponatur* $-y = -2ax + x^2y$.

* *pag.* 380. *col.* 1. *iuxta lin.* 7. *a fine pro* x^2-1 *ponatur* z^2-1. *item lin.* 3. *a fine pro* $\frac{8}{25}$ *ponatur* $\frac{9}{25}$

ad §. 239.

Duplex notari hoc loco theorema meretur: alterum excellentissimus Auctor proposuit; alterum consectarii loco exinde profluit.

Theorema 1: *Numerus quadratus in quadratum ductus, sive multiplicatus, efficit quadratum.*

Theorema 2: *Numeri quadrati, per quadratum exacte divisibilis vel divisi, quotiens est numerus quadratus.*

CAP. III.

CAP. III.

DE ALGEBRA AD GEOMETRIAM ELEMENTAREM ADPLICATA.

ad §. 252.

Brevitatis atque *elegantiae* maxima in *constructionibus* formularum algebraicarum *geometricis* laus esse atque commendatio solet. Utraque ingenium atque exercitationem flagitat. Exemplis id ipsum demonstraturi instar omnium esse posse reputamus eas constructiones, quae *formulae secundae* et *quartae* per figuras geometricas effigiandis inserviunt. Quodsi enim

2) $x = \frac{abc}{de}$; erit primo $d : a = b : \frac{ab}{d}$

deinde si $\frac{ab}{d} = g$; erit $e : g = c : x$

hoc est, $e : \frac{ab}{d} = c : \frac{abc}{de}$

Constructio. (*Fig. XIX.*) Datis quinque lineis, *a. b. c. d. e.* Fiat in angulo *PAQ* arbitrariae amplitudinis atque indefinitorum crurum, $AB = d$, $AC = a$, $BD = b$. iunctis per lineam rectam punctis *C* et *B*, ductaque eidem linea *ED* parallela, erit $CE = \frac{ab}{d} = g$. siquidem

$$AB : AC = BD : CE$$
$$d : a = b : \frac{ab}{d} (g)$$

dehinc linea *BC* indefinite promota, fiat $FC = e$, $FG = c$; iunctis per lineam rectam punctis *E* et *F*, ductaque cum *FE* parallela *GH*, erit $EH = x$. namque

$FC : CE = FG : EH$

$$e : g = c : x \left(\frac{cg}{e} \text{ vel } \frac{abc}{de}\right)$$

quod si vero

4) $x = \frac{aab - bcc}{ad}$; erit primo $d : a = b : \frac{ab}{d}$

deinde si $\frac{ab}{d} = \left(\frac{aab}{ad}\right) = g$; erit $\frac{a^2b - bc^2}{ad} = g - \frac{bc^2}{ad}$.

Porro quia $\frac{bcc}{ad} = \frac{bc}{d} \cdot \frac{c}{a}$; Sed $\frac{bc}{d} = h$

erit $\frac{bcc}{ad} = \frac{hc}{a} = i$

Iam $\frac{aab}{ad} = g$

Ideoque $\frac{aab - bcc}{ad} = g - i$.

Constructio. (*Fig. XX.*) Datis quatuor lineis *a. b. c. d.* fiat in angulo *RAS* indefinitorum crurum atque arbitrariae amplitudinis, linea $AB = d$, $AC = a$, $BD = b$; iunctis per lineam binis punctis *C* et *B*, ductaque *ED* cum *BC* parallela, erit $CE = \frac{ab}{d} = \frac{aab}{ad} = g$. namque

$AB : AC = BD : CE$

$$d : a = b : \frac{ab}{d} = \left(\frac{aab}{ad} = g\right)$$

Linea *CB* utrinque indefinite producatur, fiatque $BF = AB = d$, $FG = c$. iunctis per lineam intermediam punctis *D* et *F*, ductaque *GH* cum *FD* parallela; erit $DH = h = \frac{bc}{d}$. nam

BF

$$BF : BD = FG : DH$$
$$d : b = c : \frac{bc}{d} \ (h)$$

Linea $DH = b$ in latus adversum ex C ad I translata, radioque $AC = a$ ex puncto I facta intersectione in K, linea vero $FG = c$ ex K in L lata, tandemque linea ML facta cum CK parallela; erit $CM = i = \frac{bc}{a}$. nam

$$IK : IC = KL : CM$$
$$a : b = c : \frac{bc}{a}$$

Iam linea $CE = g = \frac{aab}{ad}$ | per hactenus demonstrata.
Sed linea $CM = i = \frac{bc}{a} = \frac{bcc}{ad}$ |

Ideoque $ME = CE - CM = \frac{aab - bcc}{ad} = x$

* *pag.* 387. *col.* 2. *lin.* 6. *pro* $DE = V(a^2 - cd)$ *ponatur* $DE = V(a^2 + cd)$.

* *pag.* 389. *col.* 1. *lin.* 7. *pro*, $a : \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2}a - b : x$, *ponatur* $a : \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2}a - b : \frac{1}{2}x$. *item lin.* 14. *pro*, ad hypothenusam; *lege*, ad dimidiam hypothenusam.

* *pag.* 390. *col.* 1. *lin.* 4. *a fine pro*, $AC = y^2$, *legatur* $AC = xy^2$.

ad §. 296.

En tibi ex variis, quae fieri poterant, geminam theorematis huius constructionem geometricam.

Constructio 1. (*Fig. XXI.*) Cylindri $ABDE$ basi $AB = 2r$ continuatae iungatur $BE = BD = a$; ex lineae AE puncto intermedio C describatur semicirculus AGE: hoc enim facto, linea BG erit radius eius circuli, qui cylindri propositi superficiei aequalis existit. Nam

$$AB : BG = BG : BE$$

hoc est $2r : BG = BG\ a$

Igitur $BG^2 = 2ar$

Conseq. $BG = \sqrt{2ar}$

Constructio. 2 (*Fig. XXII.*) super cylindri propositi $ABDE$ altitudine $BD = a$ describatur e puncto intermedio C semicirculus. deinde fiat $BF = AB = 2r$. tum ex puncto F erigatur perpendiculum FG. denique ex B radio BG describatur circulus: huius etenim superficies cylindri superficiei aequalis erit. siquidem

$$BD : BG = BG : BF$$

hoc est $a : BG = BG : 2r$

Igitur $2ar = BG^2$

Conseq. $\sqrt{2ar} = BG$.

ad §. 298.

(Fig. XXIII.)

Constructio: Sit sphaerae diameter $AB = d$. ex huius puncto extremo A erigatur perpendiculum $AD = a =$ cylindri altitudini. Fiat porro $AE = \frac{2}{3} AB = \frac{2}{3} d$. ducta EF cum DB parallela, erit $AF = \frac{2d^2}{3a}$. Fiat $AG = AF = \frac{2d^2}{3a}$, item $AH = AB = d$. descripto super GH semicirculo, erit EI diameter baseos cylindri, qui sphaerae datae aequalis existit. Namque

B. AG [illegible]

1) $AD : AB = AE : AF$

hoc est $a : d = \frac{2}{3} d : \frac{2d^2}{3a}$

2) AG

2) $AG : AI = AI : AH$

hoc est $\frac{2d^2}{3a} : AI = AI : d$

Igitur $AI^2 = \frac{2d^3}{3a}$

Conseq. $AI = \sqrt{\frac{2d^3}{3a}}$

CAP. IV.

DE ALGEBRA AD TRIGONOMETRIAM PLANAM ADPLICATA.

CAP. V.

DE EXTRACTIONE RADICUM EX AEQUATIONIBUS ALTIORIBUS.

ad §. 352.

PRO: *ex modo allatis exemplis manifestum est;* satius est sic enuntiare: *ex modo allatis exemplis, nec non ex observationibus de aequationum natura, superius* (§. 329.) *stabilitis, manifestum est.* etc.

* *pag.* 426. *col.* 2. *lin.* 10. *a fine pro* $x = -2$ *ponatur* $x = -1$.

* *pag.* 430. *col.* 1. §. 357. SCHOLION sic enuntietur: *in aequatione* $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, *factores termini ultimi sunt*, 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24. *Limites reperiuntur* $\sqrt{(\frac{24}{3} + \frac{25}{9})} - \frac{5}{3} = \sqrt{\frac{97}{9}} - \frac{5}{3}$. *hoc est*, quoniam $\sqrt{97} = 9\frac{8}{10} = \frac{98}{10}$ fere; $\sqrt{\frac{97}{9}} = \frac{98}{10 \cdot 3} = \frac{98}{30}$. *et* $\frac{5}{3} = \frac{50}{30}$. *ideoque* $\frac{98-50}{30} = \frac{48}{30} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5} = 1\frac{1}{2}$ *fere*: *et* $\sqrt{(10 + \frac{9}{4})} + \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{49}{4}} + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5$. *Maxima igitur radicum non potest esse minor, quam* $1\frac{1}{2}$; *debet tamen esse minor, quam* 5. *Unde apparet, divisionem tentandam esse per* $x-2$. *Quo*

facto reperitur $x = 2$, *et aequatio reducitur ad quadraticam* $x^2 - x - 12 = 0$ (§. 351.) *Unde radix vera altera* $= \frac{1}{2} + \sqrt{(12 + \frac{1}{4})} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4$ (§. 143.) *et radix falsa* $\frac{1}{2} - \sqrt{(12 + \frac{1}{4})} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{6}{2} = -3$. (§. 351.) *Igitur 3 radix aequationis falsa; Sed 2 et 4 radices verae existunt: Namque* $x - 2 = 0$, $x + 3 = 0$, $x - 4 = 0$. *Scilicet, aequatione* $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ *per* $x - 2$ *divisa, quotiens est* $x^2 - x - 12$.

Iam quia $x^2 - x - 12 = 0$

Erit $x^2 - x = 12$

add. $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ (§. 143.

$x^2 - x + \frac{1}{4} = 12 + \frac{1}{4}$

extrah. Rad.

$x - \frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{2} - x \Big] = \sqrt{(12 + \frac{1}{4})}$

Ideoque $x = \frac{1}{2} + \sqrt{(12 + \frac{1}{4})}$ quae est radix vera.

vel $x = \frac{1}{2} - \sqrt{(12 + \frac{1}{4})}$ quae est radix falsa.

nam $\sqrt{(12 + \frac{1}{4})} > \frac{1}{2}$

CAP. VI.

DE ALGEBRA AD GEOMETRIAM SVBLIMIOREM ADPLICATA.

GEOMETRIA SVBLIMIOR *est, quae de lineis curvis et solidis inde genitis tractat.* §. 367.

DIAMETER CVRVAE *est recta, rectas inter se parallelas bifariam secans.* AXIS *vocatur, si rectas aequidistantes ad angulos rectos secat.* §. 368.

VERTEX CVRVAE *est punctum, ex quo ducitur diameter.* §. 369.

ORDI-

ORDINATAE vel ORDINATIM ADPLICATAE *ſunt lineae aequidiſtantes, quae a diametro bifariam ſecantur.* SEMIORDINATAE *ſunt ordinatae dimidiae.* §. 370.

ABSCISSA (SAGITTA) *eſt pars diametri inter verticem, aut aliud punctum fixum, et ſemiordinatam intercepta.* §. 371.

DIAMETER TRANSVERSA *eſt recta, quae utrinque intra curvas continuata rectas intra easdem aequediſtantes bifariam ſecat.* §. 373.

DIAMETER CONIVGATA *eſt recta, quae alteri diametro aequidiſtantes bifariam ſecat.* §. 374.

QVANTITATES VARIABILES *ſunt, quae creſcentibus aliis vel decreſcentibus, aut creſcunt, aut decreſcunt.* CONSTANTES *ſunt, quae creſcentibus aliis vel decreſcentibus eaedem manent.* §. 375. hae primis alphabeti litteris a, b, c; iſtae vero ultimis x, y, z; ſpeciatim abſciſſa x; ſemiordinata y, indigitantur. §. 376.

CVRVA ALGEBRAICA *eſt, in qua relatio abſciſſarum ad ſemiordinatas per aequationem algebraicam explicari poteſt.* §. 377. TRANSCENDENS *eſt, quae per aequationem algebraicam definiri nequit.* §. 380.

CVRVAE ALGEBRAICAE EIVSDEM GENERIS *ſunt, quarum aequationes ad eandem dimenſionem aſſurgunt.* PRIMI GENERIS CVRVA *eſt, cuius aequatio ad duas dimenſiones aſſurgit.* etc. §. 382.

FAMILIA CVRVARVM *vocatur plurium curvarum diverſi generis congeries, quae omnes per eandem aequationem indeterminati gradus, ſed pro diverſitate generis diverſimode explicandi, definiuntur.* §. 383.

SECTIONES CONICAE *ſunt lineae curvae, quae ex coni ſectione oriuntur.* §. 386. nominatim 1) CIRCVLVS, 2) PARABOLA, 3) HYPERBOLA et 4) ELLIPSIS. §. 387.

DE PARABOLA

PARABOLA *est curva, in qua* ($y^2 = ax$) *quadratum semiordinatae aequatur rectangulo ex abscissa in rectam constantem, quae axis* Parameter, *ab aliis* Latus rectum *dicitur.* §. 388.

1. In *parabola* $a : y = y : x.$ item $x : y = y : a$ vel $\div\div\ a,\ y,\ x.$ item $\div\div\ x,\ y,\ a.$ } §. 391.

2. In *parabola* $\sqrt{ax} = y.$ §. 292.

FOCUS *est punctum axis, in quo semiordinata aequatur semiparametro.* §. 395.

3. In *parabola* ($x = \frac{1}{4}a.$) distantia foci a vertice est quarta pars parametri. §. 396.

4. Quia $ax = y^2$, erit quoque $\frac{1}{4}ax = \frac{1}{4}y^2$ h. e. quarta pars quadrati semiordinatae aequatur rectangulo abscissae in distantiam foci a vertice. §. 397.

5. In *parabola* ($FM = x + \frac{1}{4}a.$) recta ex foco ad extremitatem semiordinatae ducta aequatur aggregato ex abscissa et distantia foci a vertice. §. 399.

6. In *parabola* ($y^2 : z^2 = x : v.$ item $y : z = \sqrt{x} : \sqrt{v}.$) quadrata semiordinatarum sunt inter se, ut abscissae. Ipsae autem semiordinatae sunt in ratione subduplicata abscissarum. §. 402.

7. In *parabola* ($PM + pm$) $mR = av - ax = a(v - x) = a.\ Pp.$ hoc est: rectangulum ex summa duarum semiordinatarum in differentiam earundem aequatur rectangulo ex parametro in differentiam abscissarum. §. 403. ideoque etiam $a : PM + pm = mR : v - x.$ §. 404.

8. In *parabola* ($a : PM = PM.\ AP : AP^2$) rectangulum ex semiordinata in abscissam est ad quadratum abscissae, ut parameter ad semiordinatam. §. 405.

9. In

9. In *parabola* ($a^2 : y^2 = z^2 : xv$) quadratum parametri est ad quadratum semiordinatae unius, ut quadratum semiordinatae alterius ad rectangulum abscissarum. §. 406.

10. In *parabola* ($AM^2 = ax + x^2 = (a + AP).AP$) chorda est media proportionalis inter abscissam et compositam ex parametro et abscissa. §. 407.

SVBTANGENS *vocatur recta, tangentem inter et semiordinatam intercepta.* SVBNORMALIS *est recta, inter semiordinatam et lineam, ex axe ad punctum contactus normalem, intercepta.* §. 408.

11. *In omni curva* (ideoque in *parabola* etiam) ($PR : PM = PM : PT$) subnormalis est tertia proportionalis ad subtangentem et semiordinatam. et ($PM : PT = MR : MT$) normalis est ad tangentem, ut semiordinata ad subtangentem. §. 409.

12. In *parabola* ($PT = ax : \frac{1}{4}a = 2x$) subtangens est abscissae dupla; ($PR = \frac{1}{2}a = v - x$) subnormalis vero parametri subdupla, ideoque constans. §. 410.

13. In *parabola* ($FM = TF = \frac{1}{4}a + x$) recta ex foco ad punctum contactus ducta aequatur distantiae foci ab extremo tangentis puncto. §. 411.

14. Si *in parabola* recta quaedam tangenti parallela ducitur, recta ex puncto contactus cum axe parallela eam bifariam secat. §. 414.

15. In *parabola* $a + 4x$ est *parameter diametri*. et ($FN^2 = 4vx + av = (4x + a)\, v$) quadratum etiam ad diametrum adplicatae aequale rectangulo parametri in abscissam. §. 416.

16. In *parabola* parameter diametri ($a + 4x$) est distantiae foci a vertice diametri ($\frac{1}{4}a + x$) quadrupla. §. 417.

 17. In

17. In *parabola* ($OF^2 = (\frac{1}{4}a + x)\frac{1}{4}a$) recta ex foco ad tangentem ducta est media proportionalis inter quartam parametri partem et rectam ex foco ad punctum contactus ductam. §. 418.

18. In *parabola* $MH = \frac{1}{2}a$, et $HF = x - \frac{1}{4}a$. hoc est, si ex axe cum ad punctum contactus, tum et ad rectam illam, (FM) quae focum inter et contactus punctum sita est, ducatur normalis, erit lineae FM segmentum exterius (HM) subnormali (PR), interius autem (HF) portioni axis inter focum et semiordinatam interceptae (PF) aequale. §. 418.

PARABOLA EXTERNA (sive externe spectata, hoc est, si puncta eius ad verticis normalem referuntur, itaque normalis huius abscissa (x) semiordinatae internae, semiordinata vero (y) abscissae internae parallela et aequalis existit) *est curva, in qua* $x^2 = ay$. §. 419.

DE ELLIPSI

ELLIPSIS *est linea curva, in qua* ($ay^2 = abx - bx^2$; ideoque $b : a = y^2 : ax - x^2$.) *quadratum semiordinatae* (y^2) *est ad rectangulum ex segmentis axis* ($ax - x^2$), *ut parameter* (b) *ad axem* (a). §. 420.

1. In *Ellipsi* ($y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$) quadratum semiordinatae aequatur rectangulo ex parametro in abscissam, demto tamen alio rectangulo ex eadem abscissa in quartam proportionalem ad axem, parametrum et abscissam. §. 421.
2. *Ellipsis* est curva in se rediens: namque ubi y, adeoque etiam $y^2 = 0$, $abx = bx^2$, et $a = x$ existit. §. 422.
3. In *ellipsi* ($DE = 2\sqrt{\frac{1}{4}ab} = \sqrt{ab}$) axis minor est medius proportionalis inter maiorem et parametrum; ideoque *parameter* tertia proportionalis ad axem maiorem et minorem. §. 423.

4. In

4. In *ellipsi* $y = V\left(\frac{abx - bx^2}{a}\right) = V\left(\frac{bx\,(a - x)}{a}\right)$ §. 426.

5. In *ellipsi* distantia foci a vertice $= \frac{1}{2}a - V(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)$. item $\frac{1}{4}ab = ax - x^2 = (a - x)\,x$. §. 427. Sed distantia foci a centro est $= V(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab)$. §. 428.

6. In *ellipsi* ($y^2 : v^2 = ax - x^2 : az - z^2$) quadrata semiordinatarum sunt inter se, ut rectangula ex axis segmentis. §. 429.

7. In *ellipsi* ($DC^2 : CB^2 = PM^2 : AP.PB.$) quadratum axis minoris est ad quadratum maioris, ut quadratum semiordinatae ad rectangulum ex axis segmentis. §. 430.

ELLIPSIS *est linea curva, in qua* $y^2 = \frac{1}{4}ab - \frac{bx^2}{a}$; si nempe ($CP = x$) abscissae a centro computantur. §. 431. item ELLIPSIS *est curva, in qua* $y^2 = d^2\left(\frac{r^2 - x^2}{r^2}\right)$ (Vid. §. 430.) si denuo abscissae a centro computantur, et semidiameter minor $= d$, maior $= r$. §. 432.

8. *Ellipsis* est linea curva in se rediens: crescentibus enim abscissis (x), semiordinatae (y) decrescunt, tandemque evanescunt. §. 433.

9. In *ellipsi* ($fM + FM = a = AB$) summa rectarum, ex utroque foco ad idem peripheriae punctum ductarum, aequatur axi maiori. §. 434.

10. In *ellipsi* ($DR.RE : RM^2 = DC^2 : AC^2$) rectangulum ex segmentis axis coniugati est ad quadratum semiordinatae ipsius, ut quadratum axis coniugati ad quadratum axis maioris. §. 437.

11. In *ellipsi* $\left(\frac{4r^2}{2c} = \frac{2r^2}{c} = p\right)$ parameter axis coniugati est tertia proportionalis ad axem coniugatum ($2c$) et axem maiorem ($2r$). §. 439.

12. In

12. In *ellipsi* ($a : b = \frac{1}{2}a - x : PR$) est ut axis primus ad parametrum, ita distantia semiordinatae a centro ad subnormalem. §. 440.

13. In *ellipsi* ($\frac{1}{2}a - x : x = a - x : PT$. ideoque $PB . AP = CP . PT$.) rectangulum ex segmentis axis aequatur rectangulo ex distantia semiordinatae a centro in subtangentem. §. 440.

14. In *ellipsi* ($\frac{1}{2}a - x : \frac{1}{2}a = x : AT$) est ut distantia semiordinatae a centro ad axem dimidium, ita abscissa ad portionem subtangentis inter verticem ellipsis et tangentem interceptam. §. 440.

15. In *ellipsi* ($tx = r^2 - x^2 = AP . PB$) rectangulum ex subtangente in abscissam aequatur rectangulo ex segmentis axis. §. 446.

16. In *ellipsi* ($tv = r^2 - v^2$) rectangulum ex subtangente in distantiam ordinatae a centro aequatur differentiae quadrati huius distantiae a quadrato semiaxis transversi. §. 447.

17. In *ellipsi* subtangentis in axe coniugato similis vel eadem, quae in transverso, ratio est vel expressio. §. 448. *Vid. supra num.* 13.

18. Si in *ellipsi* recta quaedam tangenti parallela ducitur, recta per contactum et centrum ellipsis transiens eam bifariam secat. §. 449.

19. In *ellipsi* omnes rectae per centrum transeuntes et in peripheria utrinque terminatae sunt diametri, ipsisque coordinatae sunt tangentibus parallelae. §. 451.

20. In *ellipsi* ($v^2 = tx$. vel $CR^2 = AP . PB$) linea recta centrum inter et perpendicularem, ex diametri tangenti parallelae extremitate in axem demissam, intercepta, est media proportionalis inter axis segmenta. §. 453. (*Vid. supra num.* 15)

21. In

21. In *ellipsi* ($MG.\ QG : CM^2 = HG^2 : CV^2$) est quadratum semiordinatae ad quadratum semidiametri coniugatae, ut rectangulum ex segmentis diametri ad quadratum semidiametri. §. 454.

22. In *ellipsi*, eadem est relatio semiordinatarum ad diametros, quae ad axem. (§. 420.) et diametri parameter est tertia proportionalis ad diametros (*a* et *c*.) §. 455.

23. In *ellipsi* ($FO.\ RM = PR.\ TF$) rectangulum ex subnormali in differentiam distantiae foci a semiordinata atque subtangentis aequale est rectangulo ex normali et recta ex foco ad tangentem perpendiculari. §. 457.

24. In *ellipsi* ($MH = \frac{1}{2}b$) lineae ex foco ad punctum contactus ductae segmentum illud, quod inter punctum contactus et perpendicularem ex axis puncto illo, in quo normalis ex puncto contactus excitata desinit, interceptum est, dimidiae parametro aequale existit. §. 458.

DE HYPERBOLA

HYPERBOLA *est linea curva, in qua* ($ay^2 = abx + bx^2$ hoc est, $b : a = y^2 : ax + x^2$) *quadratum semiordinatae est ad rectangulum ex abscissa in rectam compositam ex eadem abscissa et recta quadam constante*, (quae axis transversus, vel latus transversum audit,) *ut recta alia constans*, (quae axis parameter dicitur,) *ad axem transversum.* §. 459.

In *hyperbola* AXIS CONIUGATUS *dicitur media proportionalis inter axem transversum et parametrum.* (quia talis est axis coniugatus in ellipsi) §. 461.

Axis transversi (AB), *axi proprio in directum iuncti, punctum medium* CENTRVM (hyperbolae) adpellatur. §. 462.

1. In *hyperbola AF* seu distantia foci a vertice $= V(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab) - \frac{1}{2}a$. (siquidem parameter b, axis transversus a, et denique semiordinata ex foco $\frac{1}{2}b$. vocantur.) §. 463.

2. In *hyperbola* ($AF. FB = \frac{1}{4}ab$) rectangulum ex distantia foci a vertice in compositam ex hac ipsa distantia et axe transverso aequatur quadrato semiaxis coniugati. §. 465.

3. In *hyperbola* ($y^2 : z^2 = (a+x)x : (b+v)v.$) quadrata semiordinatarum sunt inter se, ut rectangula ex abscissa in rectam quandam compositam ex abscissa et axe transverso. §. 466.

4. *Hyperbola* continuo magis magisque ab axe recedit: crescentibus enim abscissis, crescunt quoque semiordinatae. §. 467.

5. In *hyperbola* ($ab : aa = b : a$) quadratum axis coniugati est ad quadratum transversi, ut parameter ad axem transversum. §. 468.

6. In *hyperbola* ($b : a$, vel $ab : a^2 = PM^2 : AP. PB$) quadratum axis coniugati est ad quadratum transversi, ut quadratum semiordinatae ad rectangulum ex abscissa in compositam ex abscissa et axe transverso. §. 469.

7. In *hyperbola* ($fM - FM = AB = a$) differentia rectae, inter focum et curvam interiectae, (FM) ab alia recta, (fM) quae inter hyperbolae alterius aequalis, axemque cum prioris hyperbolae axe in directum iacentem habentis, focum (f) atque idem illud curvae punctum (M) interiecta est, axi transverso aequalis existit. §. 470.

8. Recta, quae per hyperbolae verticem ordinatis parallela ducitur, hyperbolam in vertice tangit. §. 473.

9. HY-

9. HYPERBOLAE ASYMPTOTOS mathematici vocant *binas rectas illas, quae ex hyperbolae centro per extrema axis coniugati, ordinatis paralleli, verticemque puncto suo medio tangentis puncta transeunt.* §. 474.

10. In *hyperbola* ($mr = MR$) intervalla opposita, asymptotos inter et ipsam curvam interiecta, siquidem ipsa cum ordinata quadam in directum iacent, invicem aequalia sunt. §. 475.

11. In *hyperbola*, ($AI = CI$) recta illa (AI), quae ex vertice (A) ad asymptotum (I) asymptoto alteri parallela ducitur, aequalis est illi asymptoti portioni, (CI) quae centrum (C) inter et modo dictam rectam (AI) comprehenditur. §. 476.

HYPERBOLAE POTENTIA *dicitur quadratum rectae illius* (AI), *quae a vertice ad asymptotum, asymptoto alteri parallela, procedit.* §. 477.

12. *Hyperbolae* potentia (AI^2 vel $CI^2 = \frac{a^2 + c^2}{16}$) est decima sexta pars quadratorum axium coniugatorum, vel quarta quadratorum semiaxium coniugatorum. §. 478. vel ($\frac{a^2 + ab}{16} = \frac{1}{4}a(\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b)$) rectangulum ex quarta parte axis transversi in quartam partem aggregati ex axe transverso et parametro. §. 479.

13. In *hyperbola* ($PR^2 - PM^2 = \frac{1}{4}ab = AD^2$) differentia quadrati semiordinatae a quadrato semiordinatae ad usque asymptotum productae, aequalis est semiaxis coniugati quadrato. §. 480.

14. In *hyperbola*, crescentibus semiordinatis, intervalla curvam inter et asymptotos interiecta decrescunt,

ideoque aſymptoti propius ſubinde ad hyperbolam accedunt; ſed nunquam tamen cum eadem concurrunt. §. 481.

15. In *hyperbola* ($MR. Mr = z^2 - y^2 = PR^2 - PM^2$) rectangulum intervalli (MR) aſymptoti a curva vel ordinata in compoſitam (Mr) ex intervallo iſto et ordinata, ſemper aequatur differentiae quadrati ſemiordinatae (PM^2) a quadrato compoſitae ex ſemiordinata et intervallo. §. 483. ideoque etiam quadrato ſemiaxis coniugati. §. 484.

16. In *hyperbola* ($QM. MS = qm. mſ$ item $Cq. qm = CQ. QM$) rectangula ex iis intervallis, quae ex ordinatae alicuius punctis extremis ad aſymptotum aſymptoto adverſae parallela fiunt, vel in ipſam aſymptotum vel et in lineam aſymptoto iſti parallelam, utrinque aequalia exiſtunt. §. 485. 486.

17. In *hyperbola* ($qm. mſ = AI^2$) idem illud intervalli in aſymptotum vel et eidem parallelam rectangulum (*vid. n.* 16.) aequatur potentiae hyperbolae. §. 487.

HYPERBOLA INTRA ASYMPTOTOS *eſt linea curva, in qua* $a^2 = xy$: (ſiquidem latus potentiae hyperbolae (AI vel CI) $= a$; aſymptotum (Cq) $= x$; et intervallum inter curvam et aſymptotum, aſymptoto oppoſitae parallelum (qm) $= y$. vocaveris) §. 488. vel, *in qua* $a^2 = by + xy$. ſi nempe non a centro, ſed ab alio quovis puncto abſciſſae computantur. §. 490.

18. In *hyperbola* $\left(PR = \frac{(\frac{1}{2}a + x)\,b}{a}\right)$ eſt ut axis transverſus (a) ad parametrum (b), ita aggregatum ex ſemiaxe transverſo et abſciſſa ($\frac{1}{2}a + x$) ad ſubnormalem (PR). §. 491.

19. In

19. In *hyperbola* $\left(PT = \frac{ax \dagger x^2}{\frac{1}{2}a \dagger x}\right)$ eſt ut aggregatum ex ſemiaxe transverſo et abſciſſa ($\frac{1}{2}a \dagger x$) ad abſciſſam (x), ita aggregatum ex integro axe transverſo et abſciſſa ($a + x$) ad ſubtangentem (PT) §. 491.

20. In *hyperbola* $\left(AT = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a \dagger x}\right)$ eſt ut aggregatum ex ſemiaxe transverſo et abſciſſa ($\frac{1}{2}a \dagger x$) ad abſciſſam (x), ita ſemiaxis transverſus ad rectam (AT) inter verticem et tangentem interceptam. §. 491.

21. In *hyperbola*, recta ex centro per contactum ducta dividit rectas tangenti parallelas bifariam. §. 492.

22. Si in *hyperbola* intra aſymptotos ex eius puncto quodam (m) ducantur utcunque duae rectae, (Hm et mK) quarum altera ab aſymptoto ad hyperbolae punctum interius ſive adverſum, altera ab eodem puncto ad aſymptotum propinquam, et iis aliae duae parallelae ſimiles (LN et NO); erit ($Hm.\ mK = LN.\ NO$) rectangulum ex binis prioribus rectangulo ex binis poſterioribus aequale. §. 494.

23. Si in *hyperbola* intra aſymptotos recta utrinque ducatur, ſegmenta inter hyperbolam et aſymptotos utrinque intercepta aequalia ſunt. §. 496.

24. In *hyperbola* tangens inter aſymptotos intercepta in contactu bifariam dividitur. §. 497.

25. In *hyperbola* rectangulum ex ſegmentis rectae, tangenti parallelae, aequatur quadrato tangentis dimidiae. §. 498.

26. In *hyperbola* ($PM^2 : AP.\ PB = DA^2 : AC^2$ vel $y^2 : v^2 - r^2 = c^2 : r^2$) quadratum ſemiordinatae eſt ad rectangulum ex abſciſſa et aggregato ex diametro trans-

versa (*AB*) et abscissa (*AP*), ut quadratum semidiametri coniugatae (*AD*) ad quadratum semidiametri transversae (*AC*). §. 499.

27. Si in *hyperbola* ex vertice (*A*) et quocunque hyperbolae puncto (*N*) ad asymptotum iuxta positam ducantur rectae (*AF* et *TN*) cum asymptoto adversa parallelae, erunt ($TN.TC = AF.FC$) rectangula ex intervallis in asymptotos ipsis connexas invicem aequalia. §. 501. Igitur

HYPERBOLA INTRA ASYMPTOTOS *est curva, in qua* $xy = ab$. si nimirum intervallum verticis ab asymptoto $= a$; eidemque connexa asymptotus $= b$; intervallum alterum $= y$; et asymptotus huic connexa $= x$. §. 502.

28. In *hyperbola* ($FO.RM = PR.TF$) rectangulum ex subnormali in differentiam distantiae foci a semiordinata atque subtangentis aequale est rectangulo ex normali et recta ex foco ad tangentem perpendiculari. §. 503.

29. In *hyperbola*, ($MH = \frac{1}{2}b$) si fuerit *MR* ad ipsam normalis, et ex *R* ducatur ad rectam (*FM*) ex foco (*F*) ad punctum contactus (*M*) ductam normalis (*HR*); erit *MH* parametro dimidiae aequalis. §. 504.

HYPERBOLA AEQVILATERA *dicitur, in qua axes coniugati sunt aequales.* §. 505. vel: *in qua* $y^2 = ax + x^2$ (quia $b = a$.)

30. In *hyperbola aequilatera* parameter axibus aequalis est. §. 506.

31. In *hyperbola aequilatera* ($y^2 : z^2 = ax + x^2 : av + v^2$) quadrata ordinatarum sunt inter se, ut rectangula ex abscissis in rectas compositas ex abscissis et axe determinato vel parametro. §. 508.

32. In

32. In *hyperbola aequilatera* $y^2 = r^2 - x^2$. si $CP = x$ $CA = r$. ideoque $AP = x - r$, et $PB = r + x$. §. 509.

33. In *hyperbola aequilatera* angulus asymptotorum est rectus. §. 510.

DE SECTIONIBVS CONICIS.

I. *Si* conus *ita secatur, ut sectionis axis sit alterutri coni lateri parallelus; ipsius vero plani sectionis basis ad basin sectionis triangularis perpendicularis, curva, quae exinde nascitur, est* PARABOLA. §. 511.

II. *Si* conus *ita secatur, ut axis sectionis cum diametro basis continuata concurrat, et plani sectionis continuati diameter vel basis aliqua eam ad angulos rectos secat,* ELLIPSIS *aliqua hinc provenit.* §. 512.

III. *Si* conus *ita secatur, ut axis sectionis continuatus cum latere coni continuato concurrat, planum vero sectionis secat diametrum basis ad angulos rectos,* HYPERBOLA *exinde oritur.* §. 513.

α) Si recta quaedam (BD) *ab alia recta* (AC) *ad normam intersecatur (in* E.*); ex lineae autem secantis* (AC) *puncto extremo* (C) *agantur rectae quotcunque* (CM) *cum perpendiculari* (AC) *angulum acutum facientes, rectamque* BD *secantes (in* Q*); fiantque linearum secantium* (CA et CM) *partes* (QM, QN et AE) *ex intersectionis puncto* (Q) *utrinque aequales; curva, in qua sunt puncta* M, *dicitur a* NICOMEDE inventore CONCHILIS seu CONCHOIS PRIMA; *altera vero, in qua sunt puncta* N, CONCHOIS SECVNDA; *recta* BD regula; *punctum* C. polus adpellatur. §. 535.

CON-

CONCHOIS PRIMA *est curva, in qua* $x^4 + 2bx^3 + y^2x^2 + b^2x^2 = a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2$. (siquidem $QM = AE = a$, $EC = b$, $MR = EP = x$, $ER = PM = y$, $CP = b + x$.) §. 538.

CONCHOIS SECUNDA seu INFERIOR *est curva, in qua* $x^4 - 2bx^3 + x^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2$. (siquidem $CE = b$, $QN = a$, $EG = ON = x$, $GN = EO = y$, $GC = b - x$. §. 538.

β) *Diametro* (AB) *semicirculi* (AOB) *iungatur ad angulos rectos recta indefinita* (BC). *Ducatur ex diametri puncto extremo* (A) *ad perpendicularem oppositam una atque altera hypothenusa* (AH, AF etc.) *quarum segmentis, extra semicirculum positis, intra semicirculum e principio* A. *ad puncta* M. M. *translatis, puncta* M, M, L etc. *erunt in curva, quae* CISSOIS a DIOCLE *inventore dicta est.* §. 544.

CISSOIS DIOCLIS *est curva, in qua* ($x^3 = (a - x) y^2$) *cubus abscissae* (AP) *aequatur solido ex quadrato semiordinatae* (PM) *in complementum diametri circuli genitoris* (PB). §. 548.

Cissois cum perpendiculari (*BC*) nunquam concurrit: ideoque *BC* est Cissoidis asymptotus. §. 549.

γ) 1. LOGISTICA (seu LOGARITHMICA), 2. LOGISTICA SPIRALIS, 3. LINEA SINUUM LEIBNITII, 4. LINEA TANGENTIUM, 5. LINEA SECANTIUM, 6. QUADRATRIX DINOSTRATIS, 7. QUADRATRIX TSCHIRNHUSIANA, 8. SPIRALIS ARCHIMEDEA, 9. CYCLOIS, EPICYCLOIS sunt lineae (curvae) transcendentes. §. 552. sqq.

CAP. VII.

DE LOCIS GEOMETRICIS.

LOCVS GEOMETRICVS *eſt linea, per quam conſtruitur problema indeterminatum.* §. 584. eſtque vel a) *locus ad rectam*, b) *ad circulum* etc. vel a) *planus*, b) *ſolidus* etc. vel *locus primi*, *ſecundi*, *tertii* etc. *generis*. §. 584. ſq.

1. Si $y = \frac{ax}{b}$, $y = \frac{ax}{b+c}$, $y = \frac{ax}{b-c}$, $y = c - \frac{ax}{b}$, locus ſemper eſt ad rectam. §. 586.

2. Theoremata generalia, pro conſtruendis *aequationibus localibus* quibusvis ad *parabolam*, ſunt: (§. 587.)

$$\alpha)\quad y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{tsx}{q} + tp$$

$$\beta)\quad x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2nx + \frac{2nry}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{tsy}{q} + tp$$

3. Theorema generale conſtruendi omnia *loca ſolida ad ellipſin*, eſt:

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$+ \frac{ts^2x^2}{2mq^2} - \frac{2tpsx}{2mq} - \frac{tm^2}{2m}$$
$$+ \frac{tp^2}{2m}.\ \text{§. 588.}$$

4. Theorema generale conſtruendi omnia *loca ſolida ad hyperbolam circa diametrum* deſcriptam, eſt. (§. 590.)

$$\begin{array}{l} y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0 \\ \qquad - \frac{ts^2x^2}{2mq^2} \qquad + \frac{tpsx}{2mq} + \frac{tm^2}{2m} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \frac{tp^2}{2m} \end{array}$$

quoties $t = 2m$ reperitur, *hyperbola* eſt *aequilatera*.

5. Theorema generale conſtruendi omnia *loca ſolida ad hyperbolam intra aſymptotos* eſt: (§. 591.) ſi $QM = y$

$$\text{a)}\ \begin{array}{l} xy - \frac{rx^2}{q} - \frac{pqy}{s} + \frac{prx}{s} + \frac{pnq}{s} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad - nx \quad - mq \end{array}$$

$$\text{b)}\ \begin{array}{l} xy - \frac{ry^2}{q} - \frac{pqx}{s} + \frac{pry}{s} + \frac{pnq}{s} = 0 \ (\text{ſi } QM = x. \\ \qquad\qquad\qquad\quad - ny \quad - mq \end{array}$$

Errata hiſce capitibus paſſim obvia, quum propter ſpatii anguſtiam nunc quidem recenſeri nequeant, alia occaſione erunt corrigenda. Quocirca nihil nunc reliquum eſt, quam ut breviter, quid in hac ipſa dilucidatione noſtra perperam poſitum aut forte praetermiſſum ſit, moneamus. Scilicet praefat. pag. 2. pro BERNAVLLI legatur BERNOVLLI. pag. 45. lin. 9. poſt vocem *numeratori*, addatur: *aequalis eſt.* pag. 61. lin. 8. a fine, pro *HDGK* legatur *HIGK*. pag. 111. lin. 4. poſt verba, *interſectione in K*; inſerantur ſequentia: *linea vero FG* $= c$, *ex K in L tranſlata.* pag. 112. lin. 9. a fine, poſt vocem *Conſtructio*, inſeratur (*Fig. XXIII.*)

) o (

ADDITAMENTA.

1. Vt reliquorum omnium, ſic politices quoque ac iurisprudentiae ſtudiorum primordia a matheſeos ac phyſicae ſtudio capienda ſunt.
2. Minus fructuoſa ſunt, quae ſine examinibus ac diſputationibus tractantur, ſtudia.
3. Citius ſine logica, quam ſine matheſi & mathematicorum analyſi exacte ratiocinandi ac meditandi facultatem conſequi licebit.
4. Falluntur egregie, qui methodum mathematicam adhibitam exiſtimant, ubicunque cogitationes ſingulatim poſitae *definitionum*, *axiomatum*, *theorematum*, *problematum*, *conſectariorum* ac *ſcholiorum* titulis ſuperbiunt.
5. Reipublicae non minus, quam academiarum bono, optandum eſſet, ut nemo ſtudioſus ſine rigoroſo examine ad academiam accederet; nemo etiam ſine diſputatione ac teſtimonio publico ex eadem diſcederet.

6.Quid-

6. Quidlibet in academiis diſcendi vel ſtudendi poteſtas maximum eruditionis impedimentum eſt.

7. Ingeniorum ac ſtudiorum cenſura ſi non magis, aeque tamen in academiis neceſſaria eſt, quam vitae ac morum cenſura.

8. Quaeſtio de academiarum flore & calamitatibus ad doctrinam de occultis qualitatibus pertinet.

9. In hiſtoria litteraria excolenda oleum atque operam perdunt, qui non ſunt polyhiſtores.

10. Hiſtoria philoſophica & mathematica non ab hiſtoricis, ſed a philoſophis & mathematicis expetenda eſt atque exſpectanda.

11. Jureconſultorum excellentium paucitas nimio inter alia iurisprudentiae ſtudio accepta referenda eſt.

12. Minor foret atheorum ac profanorum hominum, ſi minor eſſet theologorum & libellorum theologicorum numerus.

)o(

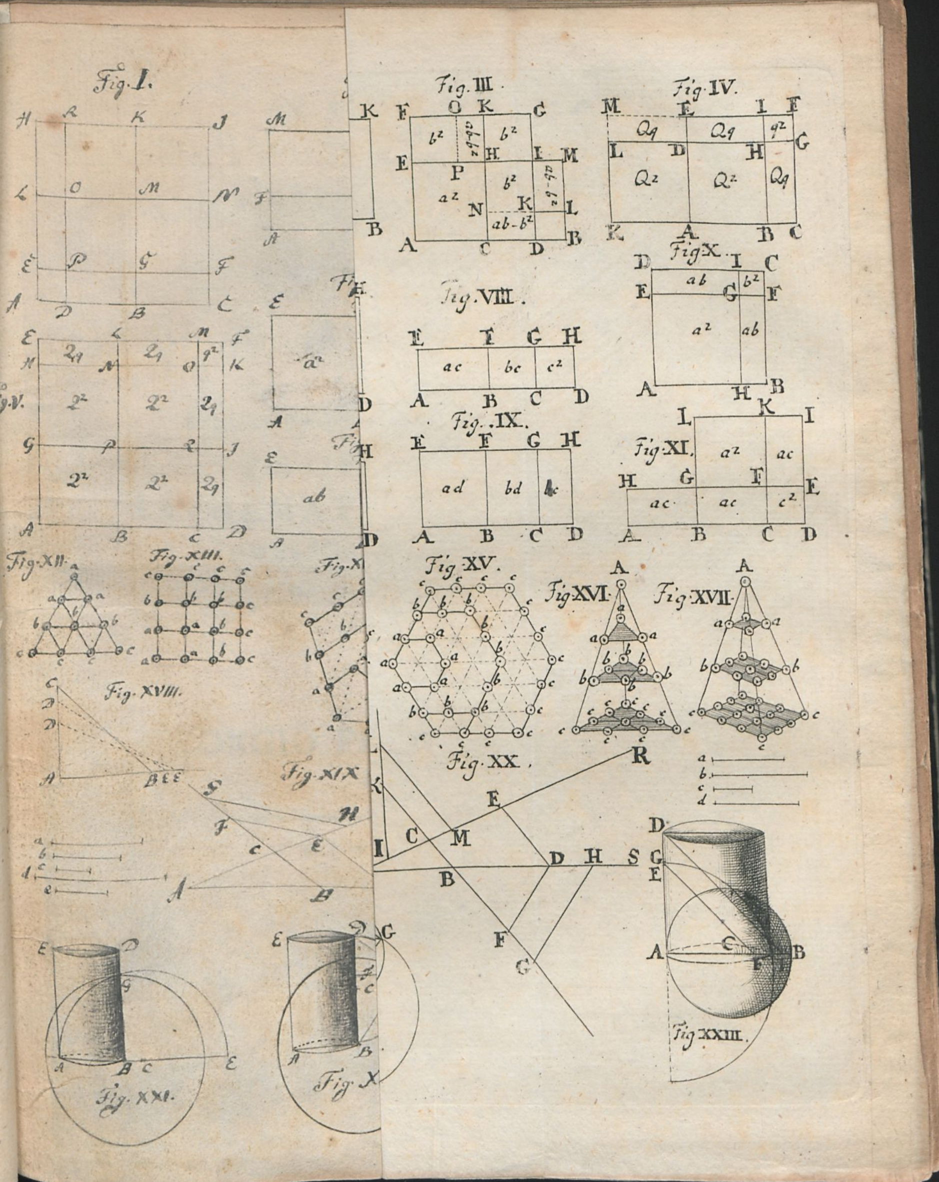
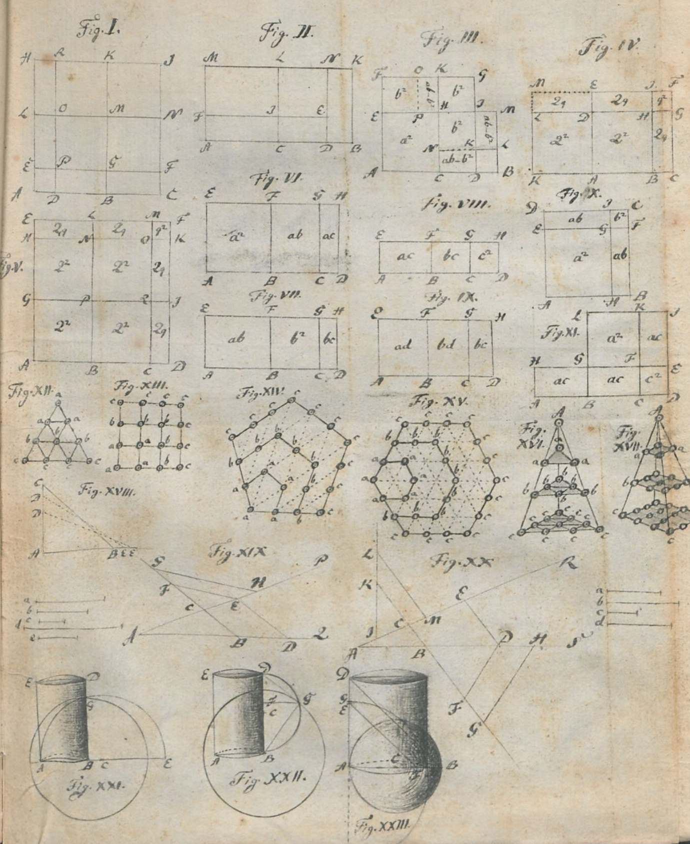
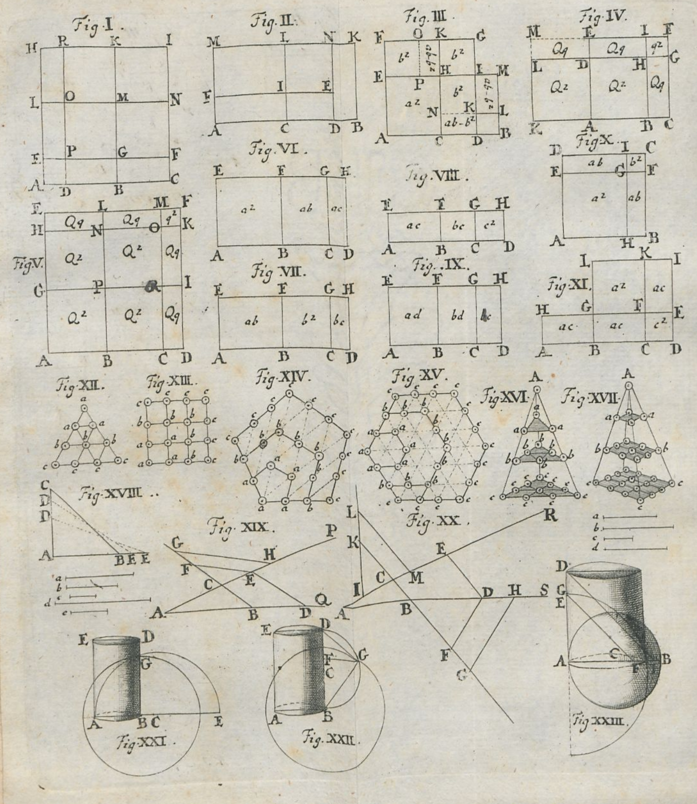
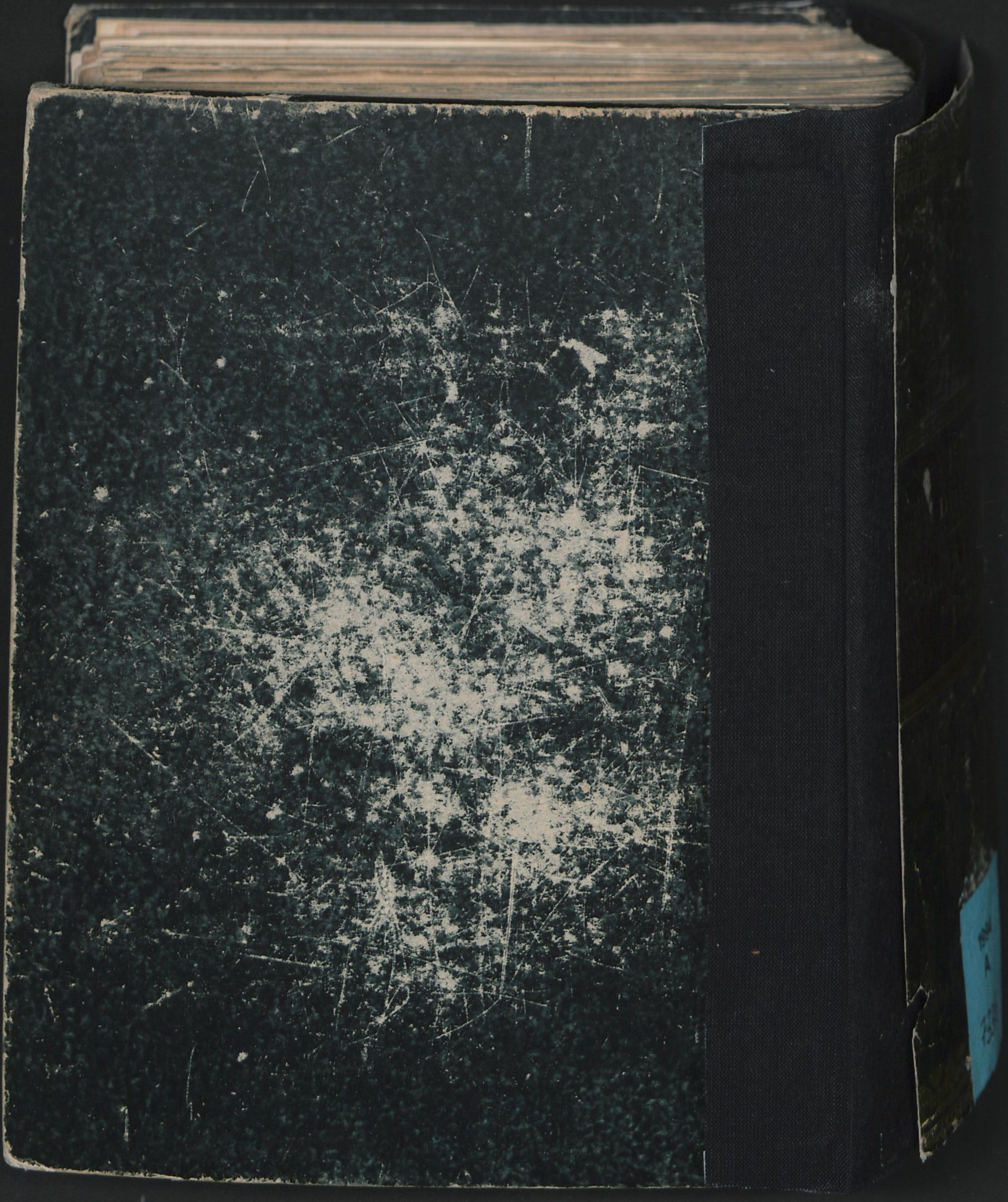


Fig. I.
Fig. V.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. VIII.
Fig. X.
Fig. IX.
Fig. XI.
Fig. XII.
Fig. XIII.
Fig. XV.
Fig. XVI.
Fig. XVII.
Fig. XVIII.
Fig. XIX.
Fig. XX.
Fig. XXI.
Fig. XXIII.







3

ARTIFICIORVM ALGEBRAICORVM

ELEMENTIS

ANALYSEOS FINITORVM WOLFFIANIS

COMPREHENSORVM

DILVCIDATIO

E LECTIONIBVS PRIVATISSIMIS HAVSTA

ET SPECIMINIS ACADEMICI LOCO

PRAESIDE

IOH. NICOLAO FROBESIO

PHILOS. D. ET P. P. O.

IN ILLVSTRI ACADEMIA IVLIA

AD D. IX. NOVEMBR. ANNI CIↃIↃCCXXXVII.

AD DISPVTANDVM

PVBLICE PROPOSITA

AB

HENRICO THEODORO REIBENSTEIN

CELLENSI,

IVRIS AC PHILOSOPHIAE CVLTORE.

HELMSTADII

TYPIS PAVLI DIETERICI SCHNORRII

ACAD. TYPOGR.