Gruppen lokaler Charakteristik
Eine Kennzeichnung von Gruppen vom Lie-Typ in Charakteristik 2

Dissertation

zur Erlangung des
Doktorgrades der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät II
Chemie, Physik und Mathematik
der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
vorgelegt

von Herrn Gerald Pientka

geb. am 13.10.1980 in Halle

Gutachter: Prof. Dr. Gernot Stroth (Halle)
Prof. Dr. Kay Magaard (Birmingham)

Tag der Verteidigung: 10. April 2014

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Es sei G eine endliche Gruppe. Ein elementarer Bestandteil der Struktur dieser Gruppe sind die Normalteiler von G, d.h. Untergruppen $N \leq G$, für die auch die Menge der Nebenklassen von N in G wieder auf natürliche Art eine Gruppenstruktur aufweist, die sogenannte Faktorgruppe G/N. Wir schreiben in diesem Fall $N \trianglelefteq G$. Nun lassen sich in N und G/N wiederum Normalteiler finden, welche schließlich in einer Verfeinerung

$$1 = N_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq N_k = G$$

münden, wobei die Faktoren N_i/N_{i-1} jeweils einfache Gruppen sind, d.h. keine weiteren als die trivialen Normalteiler 1 und N_i/N_{i-1} besitzen. Der grundlegende Satz von Jordan und Hölder zeigt, dass die einfachen Gruppen, die hier als Faktoren auftreten, bis auf Reihenfolge bereits eindeutig bestimmt sind. Es ist also legitim, in den auftretenden einfachen Faktoren eine Analogie zu den Primfaktoren der ganzen Zahlen zu sehen – mit dem Unterschied, dass sich aus gegebenen einfachen Gruppen keine eindeutig bestimmte Gruppe G mit diesen Faktoren zusammensetzen lässt.
Da diese einfachen Faktoren die Struktur einer Gruppe allerdings sehr stark prägen, ist es nur natürlich, nach einer Klassifikation aller endlichen einfachen Gruppen zu suchen – eine Fragestellung, die bereits im neunzehnten Jahrhundert auftrat. Erfolgversprechend konnte man die Lösung dieses Problems aber erst in der zweiten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts in Angriff nehmen. Das Startsignal gaben Brauer und Fowler 1955 als sie zeigten, dass für eine fest vorgegebene Gruppe H nur endlich viele einfache Gruppen G existieren können, in denen H der Zentralisator einer Involution ist. Kurze Zeit später bewiesen Feit und Thompson, dass Gruppen ungerader Ordnung auflösbar sind und einfache Gruppen somit immer Involutionen beinhalten müssen. Der Ansatz, Gruppen anhand der Zentralisatoren von Involutionen zu identifizieren, führte dann zunächst zur Entdeckung neuer einfacher Gruppen und mündete schließlich Anfang der achtziger Jahre in der Klassifikation aller endlichen einfachen Gruppen.

Satz 1.1 (Klassifikationssatz). *Jede endliche einfache Gruppe ist zu einer der folgenden Gruppen isomorph:*

- *Einer zyklischen Gruppe von Primzahlordnung*
- *Einer alternierenden Gruppe vom Grad mindestens* 5
- *Einer einfachen Gruppe vom Lie-Typ*
- *Einer der 26 sporadischen Gruppen*

Auch wenn dieser Satz als bewiesen gilt, so ist der Beweis dennoch nicht in lesbarer Form verfügbar, sondern stellt letztlich nur eine Zusammenfassung von hunderten Artikel einer

langen Reihe von Autoren dar. Die Arbeit an der Klassifikation ist also bei weitem nicht abgeschlossen, sondern lebt in verschiedenen Projekten fort. Das zentrale Vorhaben ist dabei das GLS-Projekt von Gorenstein, Lyons und Solomon, in welchem das Ziel verfolgt wird, den Originalbeweis des Klassifikationssatzes einer Revision zu unterziehen und in lesbarer Form zu veröffentlichen. Teil 3 dieser auf ein Dutzend Bände ausgelegten Buchreihe ([GLS98]) bildet die Standardreferenz dieser Arbeit für Hintergrundwissen zu einfachen Gruppen.
Im Zuge dieser Revision traten auch Lücken im Originalbeweis zutage, deren größte und letzte mittels der Klassifikation der quasidünnen Gruppen durch Aschbacher und Smith erst im Jahre 2004 geschlossen werden konnte.
Für die weiteren Ausführungen zur Klassifikation benötigen wir zunächst weitere Begriffe:

Definition 1.2. *Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl.*

- *Die **p-lokalen Untergruppen** von G sind genau die Normalisatoren von nicht trivialen p-Untergruppen von G.*
- *Eine Untergruppe $L \leq G$ hat **Charakteristik p**, falls $C_L(O_p(L)) \leq O_p(L)$ gilt. Dies ist äquivalent zu $F^*(L) = O_p(L)$.*
- *Eine Untergruppe heißt **parabolische Untergruppe**, falls sie eine volle p-Sylowgruppe S enthält. (Die zugehörige Primzahl wird in der Bezeichnung weggelassen, da sie zumeist aus dem Zusammenhang klar ist. Wir sagen dazu auch kurz „Parabolische".)*
  *Eine Parabolische P heißt **p-minimal**, falls $P = \langle S^P \rangle$ gilt und S in genau einer maximalen Untergruppe von P enthalten ist.*
- *Die Gruppe G hat **lokale Charakteristik p**, wenn alle p-lokalen Untergruppen Charakteristik p haben und **parabolische Charakteristik p**, wenn alle p-lokalen, parabolischen Untergruppen Charakteristik p haben.*
- *G ist eine **$\mathcal{K}_p$-Gruppe**, falls sämtliche einfachen Gruppen, die als Sektion einer p-lokalen Untergruppe von G auftreten, zyklisch, alternierend, vom Lie-Typ oder sporadisch sind.*

Die letzte Definition ist natürlich nur dann von Bedeutung, wenn man die Klassifikation nicht voraussetzt. Wählt man für den Beweis des Klassifikationssatzes aber ein minimales Gegenbeispiel, so besitzt dieses allerdings die $\mathcal{K}_p$-Eigenschaft.

Wie oben erwähnt sind im Beweis des Klassifikationssatzes die Zentralisatoren von Involutionen, bzw. deren Verallgemeinerung – die 2-lokalen Untergruppen – von besonderer Bedeutung. Dabei können für eine unbekannte endliche einfache Gruppe sehr grob drei Fälle auftreten:

(1) Der 2-Rang von G ist klein
(2) Es existiert eine Involution $x \in G$, für die $C_G(x)$ eine Komponente besitzt
(3) G hat lokale Charakteristik 2

Der erste Fall wurde bereits in den 1970ern durch eine Reihe von Arbeiten beendet. Für den zweiten Fall (”component type”) kann man durch eine $\mathcal{K}_2$-Annahme voraussetzen, dass die Komponente eine bekannte quasieinfache Gruppe ist und sukzessive sämtliche Möglichkeiten untersuchen.
Im dritten Fall traten im Verlauf des Beweises die meisten Probleme auf (unter anderem gehören auch die quasidünnen Gruppen dazu) und es wurde vor allem versucht, geeignete p-lokale Untergruppen für ungerade Primzahlen zu finden, die mit ähnlichen Methoden wie in Fall (2) behandelt werden konnten.

In einem von Meierfrankenfeld, Stellmacher und Stroth (MSS) lancierten Projekt wird nun nach alternativen Wegen gesucht, Gruppen in lokaler Charakteristik 2 zu klassifizieren. Dabei wird der allgemeinere Fall von Gruppen in lokaler Charakteristik p für sämtliche Primzahlen betrachtet und es wird versucht, diese anhand ihrer p-lokalen Struktur zu klassifizieren. Hier liegt das Hauptaugenmerk zunächst darauf, für p-lokale Untergruppen M die Struktur von $M/O_p(M)$ anhand der Operation auf den in $O_p(M)$ auftretenden Moduln zu bestimmen. Anschließend soll mit diesen Informationen die gesamte Gruppe konstruiert werden. Von besonderer Wichtigkeit ist dabei der Fall $p = 2$, da dieser eine kürzere und natürlichere Behandlung von Teilen des Fall (3) im Beweis des Klassifikationssatzes ermöglicht. Zudem ist eine vollständige Klassifikation der Gruppen in lokaler Charakteristik p für ungerade Primzahlen eher unwahrscheinlich. Eine direkte Einbindung des Falls $p = 2$ in das GLS-Projekt wird dabei durch eine Arbeit von Magaard und Stroth ([MS]) ermöglicht.
Die vorliegende Arbeit ist Teil des MSS-Projekts und im Folgenden soll eine kurze Einordnung und ein Überblick zu einigen Bezeichnungen gegeben werden. Zunächst rückt der Fokus von lokaler Charakteristik p zur schwächeren Voraussetzung der parabolischen Charakteristik p – einer Eigenschaft, die sich im Allgemeinen leichter nachweisen lässt. Dabei zeigt sich, dass es in den meisten der bekannten Beispiele auch eine sogenannte große Untergruppe gibt und die Existenz einer solchen wieder parabolische Charakteristik impliziert. Ein zentraler Bestandteil des MSS-Projekts ist deshalb die Untersuchung von Gruppen mit großen Untergruppen.

Definition 1.3. *Sei G eine endliche Gruppe. Eine p-Untergruppe Q heißt* ***groß****, wenn $C_G(Q) = Z(Q)$ ist und für alle $1 \neq A \leq Z(Q)$ immer $N_G(A) \leq N_G(Q)$ gilt.*

Lemma 1.4. *[MSS, 1.13] Sei G eine endliche Gruppe und $Q \leq G$ eine große p-Untergruppe, dann hat G parabolische Charakteristik p.*

Durch die Existenz einer großen Untergruppe Q wird mit $N_G(Q)$ eine Parabolische in G ausgezeichnet. Insbesondere enthält diese immer den Normalisator des Zentrums einer p-Sylowgruppe, welcher im kanonischen Beispiel, den Gruppen vom Lie-Typ, sehr häufig schon eine maximale p-lokale Untergruppe ist. Eines der wichtigsten Resultate des Projekts, der Struktursatz, beschreibt in diesem Fall die parabolischen Untergruppen, welche nicht im Normalisator einer großen Untergruppe liegen. Für die Darstellung dieses fundamentalen Resultats benötigen wir einige weitere Definitionen.

Definition 1.5. *Sei G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl und $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Weiter sei $Q \leq S$ eine große p-Untergruppe.*

- $\mathcal{L}(S) := \{X \leq G | O_p(X) \neq 1, C_G(O_p(X)) \leq O_p(X), S \leq X\}$
- *Für $M \in \mathcal{L}(S)$ sei Y_M die größte elementar abelsche, normale p-Untergruppe von M, die $O_p(M/C_M(Y_M)) = 1$ erfüllt. Diese Untergruppe existiert immer und ist eindeutig bestimmt (siehe [MSS03, 2.0.1]).*
- *Ist $M \in \mathcal{L}(S)$ so setzen wir $M^\circ := \langle Q^M \rangle$.*

Besitzt G eine große p-Untergruppe Q, so hat G nach Lemma 1.4 parabolische Charakteristik p und $\mathcal{L}(S)$ beinhaltet damit alle p-lokalen Parabolischen von G. Der Struktursatz beschreibt nun die Struktur der Parabolischen $L \in \mathcal{L}(S)$, welche nicht in $N_G(Q)$ liegen, d.h. er gibt für diese Untergruppen an, wie L auf Y_L operiert. Wir verwenden hier eine vereinfachte Fassung des Struktursatzes, die unseren Erfordernissen angepasst ist. Insbesondere wird in der vollständigen Fassung die Voraussetzung der lokalen Charakteristik nicht in voller Stärke benötigt und es wird vielmehr daran gearbeitet, selbst die dort angegebene, etwas schwächere, technische Bedingung noch aus den Voraussetzungen zu streichen, um allein von der Existenz einer großen Untergruppe, d.h. parabolischer Charakteristik p auszugehen.

Satz 1.6 (Struktursatz)**.** *[MSS, Theorem 1] Sei G eine endliche $\mathcal{K}_p$-Gruppe von lokaler Charakteristik p und $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Weiter sei S in mindestens zwei maximal p-lokalen Untergruppen enthalten und G enthalte eine große Untergruppe $Q \leq S$.*
Sei $L \in \mathcal{L}(S)$ mit $L \not\leq N_G(Q)$, dann gilt einer der folgenden Fälle, wobei $\overline{L} := L/C_L(Y_L)$ und q eine p-Potenz sei.

1. ***Der natürliche Fall:*** *$\overline{L^\circ} \cong \mathrm{SL}_n(q)$ $(n \geq 3)$, $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ $(n \geq 2)$, $\mathrm{Sp}_4(2)'$ (für $p = 2$) und $[Y_L, L^\circ]$ ist jeweils der natürliche Modul für $\overline{L^\circ}$.*

2. ***Das direkte Produkt:*** *$P := L^\circ S$ ist p-minimal, $Y_P = Y_L$ und es existiert eine Untergruppe $P^* \trianglelefteq P$ mit $O_p(P) \leq P^*$, wobei gilt:*
   a) *$\overline{P^*} = K_1 \times ... \times K_r$, $K_i \cong \mathrm{SL}_2(q)$, $Y_P = V_1 \times ... \times V_r$, wobei $V_i := [Y_P, K_i]$ jeweils ein natürlicher K_i-Modul ist.*
   b) *Q operiert transitiv auf $\{K_1, ..., K_r\}$.*

3. ***Das schwache direkte Produkt:*** *Es existiert eine Untergruppe $M \in \mathcal{L}(S)$ mit $L^\circ \leq M$ und M ist wie in Fall 2.*

4. ***Der orthogonale Fall:*** *$\overline{L^\circ} \cong \Omega^\pm_{2n}(q)$ $(n \geq 2)$ oder $L \cong \Omega_{2n+1}(q)$ $(n \geq 1)$ für ungerade p, wobei Y_L jeweils der natürliche Modul ist.*

5. ***Der Tensorprodukt-Fall:*** *Es existieren Untergruppen $\overline{K}_1, \overline{K}_2 \leq \overline{L}$ mit:*
   a) *$\overline{K}_i \cong \mathrm{SL}_{m_i}(q)$, $m_i \geq 2$, $[\overline{K}_1, \overline{K}_2] = 1$ und $\overline{K}_1\overline{K}_2 \trianglelefteq \overline{L}$.*
   b) *Y_L ist das Tensorprodukt der beiden natürlichen Moduln.*
   c) *$\overline{L} = \overline{L^\circ} \cong \mathrm{SL}_2(2) \wr \mathbb{Z}_2$ oder $\overline{L^\circ} \in \left\{\overline{K}_1, \overline{K}_2, \overline{K}_1\overline{K}_2\right\}$.*

6. ***Der nicht natürliche $SL_n(q)$-Fall:*** *Es tritt einer der folgenden Fälle auf:*
   1. $\overline{L^\circ} \cong \mathrm{SL}_n(q)/\langle(-id)^{n-1}\rangle$, *$n \geq 5$ und Y_L ist das äußere Quadrat des natürlichen Moduls.*
   2. *p ist ungerade,* $\overline{L^\circ} \cong \mathrm{SL}_n(q)/\langle(-id)^{n-1}\rangle$, *$n \geq 3$ und Y_L ist das symmetrische Quadrat des natürlichen Moduls.*
   3. $\overline{L^\circ} \cong \mathrm{SL}_n(q^2)/\langle(\lambda \cdot id)|\lambda \in \mathbb{F}_{q^2}, \lambda^n = \lambda^{q+1} = 1\rangle$, *$n \geq 3$ und Y_L ist isomorph zu einem irreduziblen $\mathbb{F}_q$-Untermodul von $V \otimes V^{(q)}$, wobei V der natürliche Modul für $\overline{L^\circ}$ ist.*
7. ***Der Ausnahmefall:*** *Es tritt einer der folgenden Fälle auf:*
   1. $\overline{L^\circ} \cong \mathrm{Spin}_{10}^+(q)$ *und Y_L ist der Halb-Spin-Modul.*
   2. $\overline{L^\circ} \cong \mathrm{E}_6(q)$ *und Y_L ist ein 27-dimensionaler, irreduzibler Modul.*
8. ***Der sporadische Fall:*** *Es tritt einer der folgenden Fälle auf:*
   1. *$p = 2$, $\overline{L} \cong \Gamma\mathrm{SL}_2(4)$, $\overline{L^\circ} \cong \mathrm{SL}_2(4)$, $\Gamma\mathrm{SL}_2(4)$ und $[Y_L, L]$ ist der natürliche Modul.*
   2. *$p = 2$, $\overline{L} \cong 3{\cdot}\Sigma_6$, $\overline{L^\circ} \cong 3{\cdot}A_6$, $3{\cdot}\Sigma_6$ und Y_L ist ein irreduzibler 6-dimensionaler $\mathbb{F}_2$-Modul.*
   3. *$p = 2$, $\overline{L^\circ} \cong \mathrm{Mat}_{22}$ und Y_L ist der Golay-Code-Modul der $\mathbb{F}_2$-Dimension 10.*
   4. *$p = 2$, $\overline{L^\circ} \cong \mathrm{Mat}_{24}$ und Y_L ist der Todd oder Golay-Code-Modul der $\mathbb{F}_2$-Dimension 11.*
   5. *$p = 3$, $\overline{L^\circ} \cong \mathrm{Mat}_{11}$ und Y_L ist der Golay-Code-Modul der $\mathbb{F}_3$-Dimension 5.*
   6. *$p = 3$, $\overline{L^\circ} \cong A_6$ und $[Y_L, L^\circ]$ ist der natürliche $\Omega_4^-(3)$-Modul.*

Anhand der Informationen aus dem Struktursatz ist es nun im Allgemeinen möglich, mit einer der beschriebenen Parabolischen eine Untergruppe H in G zu konstruieren, die sich mit einer bekannten einfachen Gruppe identifizieren lässt. Dies soll im sogenannten H-Struktursatz geschehen, welcher derzeit noch in Arbeit ist und den wir deshalb ohne Zitat als Entwurfsfassung angeben:

***H*-Struktursatz:** *Sei G eine endliche $\mathcal{K}_p$-Gruppe, $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ und $Q \leq S$ eine große Untergruppe. Weiter sei M eine p-lokale Untergruppe mit $S \leq M$ und $Y_M \not\leq Q$. Dann existiert ein $H \leq G$ mit $M^\circ S \leq H$, $O_p(H) = 1$ und $F^*(H)$ ist:*

- *Eine Gruppe vom Lie-Typ in definierender Charakteristik p und Lie-Rang mindestens 2 oder*
- *Eine sporadische Gruppe für $p = 2$ oder 3.*

Das Ziel ist nun, die Gruppe G mit der bekannten Gruppe H zu identifizieren, bzw. die möglichen Ausnahmen, in denen $H \neq G$ ist, zu klassifizieren. Dies geschieht, indem die einzelnen Möglichkeiten für H separat untersucht werden – so wurde der Fall, dass $F^*(H)$

vom Lie-Typ in ungerader Charakteristik ist, in [Sei09] behandelt. In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir nun die Situation, dass $F^*(H)$ vom Lie-Typ in definierender Charakteristik 2 ist. Dabei ergeben sich im Vergleich zu ungerader Charakteristik einige Schwierigkeiten, die eine analoge Behandlung ausschließen. Zum einen ist quadratische Operation im Fall $p = 2$ eine deutlich schwächere Aussage und es stehen weniger Resultate zur Identifizierung zur Verfügung, zum anderen können Graphautomorphismen in S auftreten, welche eine Vielzahl von Fallunterscheidungen erfordern.
In unseren Betrachtungen wollen wir die Ausgangssituation möglichst allgemein halten, d.h. wir zitieren den H-Struktursatz nicht, sondern gehen nur von der Existenz einer solchen Gruppe H aus, ohne deren Konstruktion oder die Existenz einer 2-lokalen M mit $Y_M \not\leq Q$ zu verwenden. Dies führt zwar dazu, dass wir auch Gruppen betrachten, die im H-Struktursatz gar nicht auftreten werden, garantiert uns aber eine unabhängige Ausgangssituation. Darüber hinaus verwenden wir nur die generischen Voraussetzungen aus dem Projekt, d.h. wir betrachten eine $\mathcal{K}_2$-Gruppe mit einer großen Untergruppe. Unsere Generalvoraussetzung in dieser Arbeit ergibt sich damit wie folgt:

Setup 1.7. *Sei G eine $\mathcal{K}_2$-Gruppe mit $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ und $Q \leq S$ sei eine große 2-Untergruppe von G mit $Q = O_2(N_G(Q))$. Wir verwenden die Bezeichnung $C := N_G(Q)$. In G existiere eine Untergruppe H mit $S \leq H$ und $N_G(F^*(H)) = H$. Dabei sei $K := F^*(H)$ eine einfache Gruppe vom Lie-Typ in definierender Charakteristik 2 vom Lie-Rang mindestens 2.*
Zudem nehmen wir an, dass $C_H(z)$ für alle $1 \neq z \in Z(S)$ nicht auflösbar ist.

Die Annahme $Q = O_2(N_G(Q))$ stellt keine Einschränkung dar, da für eine große Untergruppe Q auch $O_2(N_G(Q))$ immer eine große Untergruppe von G ist. Dass $C_H(z)$ für $z \in Z(S)^\#$ nicht auflösbar ist, ist in der Tat eine Einschränkung, um zu gewährleisten, dass wir in C/Q Komponenten finden können. Die Herangehensweise im auflösbaren Fall unterscheidet sich stark und wird innerhalb des Projekts an anderer Stelle behandelt (siehe 2.12). Insbesondere treten die Ausnahmefälle $H < G$ nur für den auflösbaren Fall auf.
In dieser Arbeit wollen wir nun die beiden folgenden Resultate beweisen, wobei wir für den zweiten Hauptsatz den Struktursatz zitieren, weshalb wir an dieser Stelle auch lokale Charakteristik 2 voraussetzen müssen. Darüber hinaus werden wir diese Eigenschaft aber nicht verwenden und wenn der Struktursatz ohne Zuhilfenahme lokaler Charakteristik bewiesen werden kann, so können wir diese Voraussetzung auch aus Hauptsatz 2 entfernen.

Hauptsatz 1. *Es gelte das Setup 1.7, dann gilt $C \leq H$.*

Hauptsatz 2. *Es gelte das Setup 1.7 und zudem habe G lokale Charakteristik 2, dann gilt $\langle \mathcal{L}(S) \rangle \leq H$.*

Mit diesen beiden Sätzen zeigen wir also, dass H sämtliche 2-lokalen parabolischen Untergruppen und somit einen großen Teil der 2-lokalen Struktur von G enthält. Über ein weiteres Resultat (2.14) aus dem Projekt lässt sich damit folgern, dass H stark 2-eingebettet in G ist, was schließlich die finale Identifizierung mit Hilfe eines Satzes von Bender (2.15) ermöglicht.

Satz 1.8. *Es gelte das Setup 1.7 und zudem habe G lokale Charakteristik 2, dann gilt* $H = G$.

Wie beim Struktursatz wird auch für Lemma 2.14 an einer Version ohne Verwendung lokaler Charakteristik 2 gearbeitet, wodurch die komplette Identifizierung von G mit H ohne diese Voraussetzung möglich wäre.

2. Bekannte Resultate

In diesem Kapitel werden wir die verwendeten Zitate aus der Literatur zusammenfassen und eine kurze Einführung zu Gruppen vom Lie-Typ geben. Zunächst führen wir eine Übersicht der in dieser Arbeit verwendeten Symbole und Bezeichnungen an. Dabei sei X eine endliche Gruppe und V ein treuer X-Modul.

$p(X)$	Minimaler Grad einer treuen Permutationsdarstellung von X
$m_p(X)$	Der p-Rang von X, d.h. die Ordnung einer maximal elementar abelschen p-Untergruppe
$\mathbb{F}_q$	Der Körper mit q Elementen
$\overline{\mathbb{F}}$	Der algebraische Abschluss des Körpers $\mathbb{F}$
$\mathbb{F}^+, \mathbb{F}^*$	Die additive, bzw. multiplikative Gruppe des Körpers $\mathbb{F}$
$V(\lambda)$	Der irreduzible Modul zum höchsten Gewicht λ (vgl. [MT11, §15.2])
V^*	Der zu V duale Modul
$V^{(q)}$	Modul der durch Verknüpfung der Darstellung von X mit dem Frobenius-endomorphismus zum Exponenten q entsteht (vgl. [GLS98, 2.8.4])
$Y \lesssim X$	Y ist isomorph zu einer Untergruppe von X
$X \sim A.B$	X ist isomorph zu einer Erweiterung der Gruppe A mit der Gruppe B. Ist die Erweiterung zerfallend schreiben wir $X \sim A{:}B$, ist sie nicht zerfallend schreiben wir $X \sim A{\cdot}B$. Falls bis auf Isomorphie nur eine Erweiterung von A mit B existiert schreiben wir auch $X \cong A{:}B$ bzw. $X \cong A{\cdot}B$.
$\mathbb{Z}_{(n,m)}$	Zyklische Gruppe der Ordnung $\mathrm{ggT}(n,m)$
$\lvert X\rvert_p$	Der p-Anteil der Ordnung von X

Wir beginnen mit einem Kapitel zur Theorie der Gruppen vom Lie-Typ, welches uns auch dazu dienen soll, die verwendeten Bezeichnungen einzuführen. Dabei wählen wir den Zugang über algebraische Gruppen, wie er in unserer Standardreferenz zu diesem Thema [GLS98] verfolgt wird. Weitere Referenzen sind der Klassiker von Carter ([Car89]), wo zudem ein Zugang über endlichdimensionale einfache Lie-Algebren beschrieben wird, sowie das Buch von Malle und Testerman ([MT11]), welches auch eine gute Einleitung zu algebraischen Gruppen bietet.

2.1. Wurzelsysteme

Definition 2.1. *Eine Menge $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt* ***Wurzelsystem****, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

(i) Σ *ist endlich und enthält nicht den Nullvektor.*

(ii) $\langle \Sigma \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$.

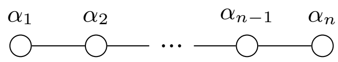
(iii) Für $\alpha, \beta \in \Sigma$ *ist immer* $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}$ *und* $s - \frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} r \in \Sigma$.

(iv) Sind $\alpha, \beta \in \Sigma$ *linear abhängig, so ist* $\alpha = \beta$ *oder* $\alpha = -\beta$.

Dabei nennen wir n den ***Rang*** *von* Σ. *Wenn eine nicht triviale Zerlegung* $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ *mit* $(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ *für alle* $\alpha_i \in \Sigma_i$ *existiert, so nenne* Σ ***reduzibel****. Für eine Basis* $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subseteq \Sigma$ *von* $\mathbb{R}^n$ *setzen wir* $\Sigma^+ := \{\sum a_i \alpha_i | a_i \in \mathbb{R}, a_i \geq 0\} \cap \Sigma$ *sowie* $\Sigma^- := \{\sum a_i \alpha_i | a_i \in \mathbb{R}, a_i \leq 0\} \cap \Sigma$. *Ist* $\Sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$, *so heißt* Π ***Fundamentalsystem*** *von* Σ.

Man kann nun zeigen, dass jedes Wurzelsystem auch ein Fundamentalsystem besitzt und somit lässt sich jedes Element $\gamma \in \Sigma$ als $\gamma = \sum_{\alpha \in \Pi} a_\alpha \alpha$ schreiben und entweder sind alle Koeffizienten a_α nicht negativ oder alle Koeffizienten sind nicht positiv. Wir bezeichnen mit $h(\gamma) := \sum_{\alpha \in \Pi} a_\alpha$ die **Höhe** von γ und für $J \subseteq \Pi$ sei $h_J(\gamma) := \sum_{\alpha \in J} a_\alpha$ die Höhe von γ bezüglich J. In Σ existiert nun eine eindeutig bestimmte **Wurzel maximaler Höhe**, die wir mit α^* bezeichnen. Es gilt zudem $h_J(\gamma) \leq h_J(\alpha^*)$ für alle $\gamma \in \Sigma$ und $J \subseteq \Pi$.
Wurzelsysteme lassen sich bis auf Isomorphie eindeutig durch ihr Dynkin-Diagramm beschreiben, d.h. durch einen Graph, dessen Knoten für die Wurzeln eines Fundamentalsystems stehen und in dem zwei Knoten α_i, α_j mit genau $-\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$ Kanten verbunden werden. Wurzeln, die durch eine einzelne Kante verbunden sind, sind gleich lang (als Vektoren des $\mathbb{R}^n$). Bei durch Mehrfachkanten verbundenen Wurzeln weist ein Pfeil in Richtung der kürzeren Wurzel.
Wir geben auf der folgenden Seite eine Übersicht über alle irreduziblen Wurzelsysteme mit ihren Dynkin-Diagrammen, der Nummerierung der Fundamentalwurzeln und der höchsten Wurzel. Für die Fälle A_n bis D_n ist jeweils eine Beschreibung der Menge aller positiven Wurzeln als Linearkombination der Fundamentalwurzeln aufgeführt. Für die übrigen Wurzelsysteme geben wir eine kompakte Darstellung in Anhang A an. Dabei werden die Wurzeln mit den Koeffizienten vor den Fundamentalwurzeln identifiziert – zum Beispiel entspricht der Eintrag 2342 der Wurzel $2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$. Für ausführlichere Informationen zu den Wurzelsystemen verweisen wir auf [GLS98, 1.8.8] und den Online-Generator unter [Sph].

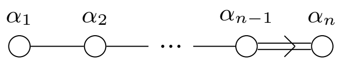
<u>A_n $(n \geq 1)$:</u>



$\Sigma^+ :\ \alpha_i + ... + \alpha_j\ (1 \leq i \leq j \leq n)$

$\alpha^* = \alpha_1 + ... + \alpha_n$

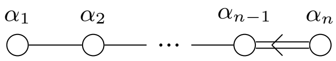
<u>B_n $(n \geq 2)$:</u>



$\Sigma^+ :\ \alpha_i + ... + \alpha_j\ (1 \leq i \leq j \leq n)$
$\quad\ \alpha_i + ... + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + ... + 2\alpha_n\ (1 \leq i < j \leq n)$

$\alpha^* = \alpha_1 + 2\alpha_2 + ... + 2\alpha_n$

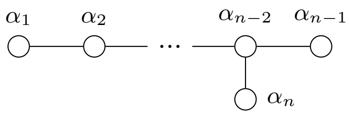
<u>C_n $(n \geq 3)$:</u>



$\Sigma^+ :\ \alpha_i + ... + \alpha_j\ (1 \leq i < j \leq n)$
$\quad\ \alpha_i + ... + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + ... + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n\ (1 \leq i \leq j \leq n-1)$

$\alpha^* = 2\alpha_1 + ... + 2\alpha_{n-1} + \alpha_n$

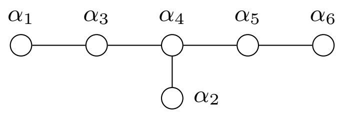
<u>D_n $(n \geq 4)$:</u>



$\Sigma^+ :\ \alpha_i + ... + \alpha_j\ (1 \leq i \leq j \leq n-1)$
$\quad\ \alpha_i + ... + \alpha_{n-2} + \alpha_n\ (1 \leq i \leq n-1)$
$\quad\ \alpha_i + ... + \alpha_{j-1} + 2\alpha_j + ... + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n\ (1 \leq i < j \leq n-1)$

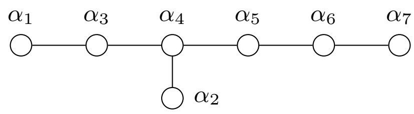
$\alpha^* = \alpha_1 + 2\alpha_2 + ... + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n$

<u>E_6:</u>



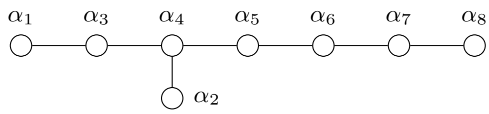
$\alpha^* = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6$

<u>E_7:</u>



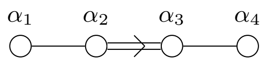
$\alpha^* = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7$

<u>E_8:</u>



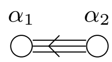
$\alpha^* = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8$

<u>F_4:</u>



$\alpha^* = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$

<u>G_2:</u>



$\alpha^* = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$

2.2. Gruppen vom Lie-Typ

In dieser Arbeit werden fast ausschließlich Gruppen vom Lie-Typ über Körpern gerader Charakteristik betrachtet, weshalb wir in diesem Paragraphen auch nur Gruppen in definierender Charakteristik 2 behandeln werden.
Wir betrachten zunächst eine einfache algebraische Gruppe $\overline{K}$ über $\overline{\mathbb{F}}_2$ mit einem maximalen Torus $\overline{T}$ (für algebraische Gruppen und ihre Eigenschaften verweisen wir auf unsere Referenz [MT11]). Dann gibt es ein zugehöriges Wurzelsystem Σ vom Rang n und Wurzeluntergruppen $\{\overline{X}_\alpha|\alpha \in \Sigma\}$ in $\overline{K}$. Dabei sind die Wurzeluntergruppen $\overline{T}$-invariante 1-Parameter-Untergruppen, d.h. es existiert eine Parametrisierung $\overline{X}_\alpha = \{x_\alpha(t)|t \in \overline{\mathbb{F}}_2\}$ mit $x_\alpha(t_1)x_\alpha(t_2) = x_\alpha(t_1+t_2)$ für alle $t_i \in \overline{\mathbb{F}}_2$ und somit $\overline{X}_\alpha \cong \overline{\mathbb{F}}_2^+$. Das Wurzelsystem Σ beschreibt die algebraische Gruppe $\overline{K}$ und es ist $\overline{K} = \langle \overline{X}_\alpha|\alpha \in \Sigma\rangle$. Zum Wurzelsystem Σ wählen wir ein Fundamentalsystem $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subseteq \Sigma$, durch welches auch die Menge der positiven Wurzeln Σ^+ festgelegt wird.

Die **endlichen Gruppen vom Lie-Typ** entstehen nun als Fixgruppen von sogenannten Steinberg-Endomorphismen von $\overline{K}$. Dabei wird für jedes $q = 2^f$ ein Körperautomorphismus φ_q auf $\overline{K}$ induziert, für den $x_\alpha(t)^\varphi = x_\alpha(t^q)$ für alle $\alpha \in \Sigma$, $t \in \overline{\mathbb{F}}_2$ gilt. Mit $K := O^{2'}(C_{\overline{K}}(\varphi_q))$ erhalten wir die ungetwisteten Gruppen vom Lie-Typ, die sogenannten **Chevalley-Gruppen**:

$$\mathrm{A}_n(q), \mathrm{B}_n(q), \mathrm{C}_n(q), \mathrm{D}_n(q), \mathrm{E}_6(q), \mathrm{E}_7(q), \mathrm{E}_8(q), \mathrm{F}_4(q), \mathrm{G}_2(q)$$

Dabei sind die Gruppen $\mathrm{B}_n(q)$ und $\mathrm{C}_n(q)$ in gerader Charakteristik nach [GLS98, 2.2.10] zueinander isomorph, weshalb wir $\mathrm{C}_n(q)$ im Folgenden nicht weiter betrachten.
Weiterhin existieren in den Fällen A_n $(n \geq 2)$, B_2, D_n, E_6, F_4, G_2 nicht triviale Symmetrien des Dynkin-Diagramms, welche jeweils zu einer eindeutigen winkelerhaltenden Bijektion auf Σ fortgesetzt werden können. Eine solche Bijektion τ induziert einen sogenannten Graphautomorphismus γ auf $\overline{K}$, der durch $\overline{X}_\alpha{}^\gamma = \overline{X}_{\alpha^\tau}$ auf der Menge der Wurzelgruppen operiert und der zusammen mit einem Körperautomorphismus einen Steinberg-Endomorphismus bildet. Auf diese Weise erhalten wir die **getwisteten Gruppen** vom Lie-Typ. Setzen wir für Wurzelsysteme mit nur einer Wurzellänge $K := O^{2'}(C_{\overline{K}}(\gamma\varphi_q))$, so entstehen die **Steinberg-Gruppen**:

$${}^2\mathrm{A}_n(q)\ (n \geq 2), {}^2\mathrm{D}_n(q)\ (n \geq 4), {}^3\mathrm{D}_4(q), {}^2\mathrm{E}_6(q)$$

Für Wurzelsysteme mit zwei Wurzellängen setzen wir $K := O^{2'}(C_{\overline{K}}(\gamma\varphi_{2^a}))$ und erhalten die **Suzuki-Ree-Gruppen**:

$${}^2\mathrm{B}_2(q), {}^2\mathrm{F}_4(q),\ \text{wobei } q = 2^f = 2^{2a+1}$$

Für Körper der Charakteristik 3 existieren noch die Gruppen ${}^2\mathrm{G}_2(3^{2a+1})$, welche uns aber hier nicht weiter interessieren. Der **Lie-Rang** von K ist im ungetwisteten Fall definiert als der Rang von Σ (also n) und im getwisteten Fall sei der Lie-Rang gleich der Anzahl der Bahnen von τ auf Π.

Die so konstruierten Gruppen sind, bis auf wenige Ausnahmen, quasieinfach, d.h. $K' = K$ und $K/Z(K)$ ist einfach. Davon abweichend sind $\mathrm{A}_1(2), {}^2\mathrm{A}_2(2), {}^2\mathrm{B}_2(2)$ auflösbar und $\mathrm{B}_2(2), \mathrm{G}_2(2), {}^2\mathrm{F}_4(2)$ besitzen eine quasieinfache Kommutatorgruppe vom Index 2. Allerdings wird durch Σ, τ und q nur der Isomorphietyp von $K/Z(K)$ bestimmt, wohingegen es für K verschiedene Versionen mit unterschiedlichen Zentren geben kann. In jedem Fall existiert eine universelle Version K_u, in welcher alle anderen Versionen als Faktor K_u/Z mit $Z \leq Z(K_u)$ auftreten. Dabei ist $Z(K_u)$ nach [GLS98, Tabelle 2.2] wie folgt:

K_u	$\mathrm{A}_n(q)$	${}^2\mathrm{A}_n(q)$	$\mathrm{E}_6(q)$	${}^2\mathrm{E}_6(q)$	sonst
$Z(K_u)$	$\mathbb{Z}_{(n+1,q-1)}$	$\mathbb{Z}_{(n+1,q+1)}$	$\mathbb{Z}_{(3,q-1)}$	$\mathbb{Z}_{(3,q+1)}$	1

In den meisten Fällen ist K also eindeutig. Soweit nicht anders erwähnt, werden die Bezeichnungen $\mathrm{E}_6(q)$ und ${}^2\mathrm{E}_6(q)$ in den späteren Kapiteln immer für die einfache Version stehen. Für $\mathrm{A}_n(q)$ und ${}^2\mathrm{A}_n(q)$ sowie einige andere Gruppen werden wir später nur noch die Bezeichnung der dazu isomorphen klassischen Gruppen verwenden, womit auch die Version von K deutlich wird. Es treten die folgenden Isomorphien für die universelle Version K_u auf:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{A}_n(q) & \cong & \mathrm{SL}_{n+1}(q) \\ {}^2\mathrm{A}_n(q) & \cong & \mathrm{SU}_{n+1}(q) \\ \mathrm{B}_n(q) & \cong & \mathrm{Sp}_{2n}(q) \cong \Omega_{2n+1}(q) \\ \mathrm{D}_n(q) & \cong & \Omega^+_{2n}(q) \\ {}^2\mathrm{D}_n(q) & \cong & \Omega^-_{2n}(q) \end{array}$$

Außerdem geben wir im Folgenden die Isomorphien von einfachen Gruppen vom Lie-Typ in gerader Charakteristik zu anderen einfachen Gruppen an:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{L}_2(q) & \cong & \mathrm{S}_2(q) \cong \mathrm{U}_2(q) \\ \Omega^+_4(q) & \cong & \mathrm{L}_2(q) \times \mathrm{L}_2(q) \\ \Omega^-_4(q) & \cong & \mathrm{L}_2(q^2) \\ \Omega^+_6(q) & \cong & \mathrm{L}_4(q) \\ \Omega^-_6(q) & \cong & \mathrm{U}_4(q) \\ \mathrm{L}_2(4) & \cong & \mathrm{L}_2(5) \cong A_5 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathrm{L}_4(2) & \cong & A_8 \\ \mathrm{L}_3(2) & \cong & \mathrm{L}_2(7) \\ \mathrm{U}_4(2) & \cong & \mathrm{S}_4(3) \\ \mathrm{S}_4(2)' & \cong & A_6 \cong \mathrm{L}_2(9) \\ \mathrm{G}_2(2)' & \cong & \mathrm{U}_3(3) \end{array}$$

Wir wollen nun auch für die Gruppen vom Lie-Typ Wurzeluntergruppen definieren. Im ungetwisteten Fall setzen wir

$$X_\alpha := \overline{X}_\alpha \cap K \text{ für } \alpha \in \Sigma.$$

Ist K getwistet, so existiert eine Symmetrie das Dynkin-Diagramms, welche eine Isometrie τ_0 auf $\mathbb{R}^n = \langle \Pi \rangle_{\mathbb{R}}$ induziert. (Haben alle Wurzeln in Σ die gleiche Länge, so stimmt τ_0 auf Σ mit der oben erwähnten Bijektion τ überein.) Für $\alpha \in \Sigma$ bezeichnen wir die Projektion auf $C_V(\tau_0)$ mit $\tilde{\alpha}$. Auf Σ lässt sich nun eine Äquivalenzrelation definieren, unter der zwei Wurzeln α, β genau dann äquivalent sind, wenn $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ linear abhängig sind. Die Äquivalenzklasse zu α bezeichnen wir mit $\hat{\alpha}$ und setzen

$$X_\alpha := \langle \overline{X}_\gamma | \gamma \in \Sigma, \hat{\gamma} = \hat{\alpha} \rangle \cap K.$$

Für die Chevalley-Gruppen ist die Struktur der Wurzeluntergruppen recht einfach – es ist $X_\alpha = \{x_\alpha(t) | t \in \mathbb{F}_q\}$ und somit $X_\alpha \cong \mathbb{F}_q^+$. Für die getwisteten Gruppen existieren Wurzeln mit $\hat{\alpha} = \{\alpha\}$ für welche ebenfalls $X_\alpha \cong \mathbb{F}_q^+$ ist – diese nennen wir **lange Wurzeluntergruppen**. Andernfalls sprechen wir von kurzen Wurzeluntergruppen und es ist $|X_\alpha| = q^{|\hat{\alpha}|}$. Wir geben hier eine Übersicht der auftretenden Wurzeluntergruppen. Dabei sei auch weiterhin $q = 2^f$ und τ die durch eine Diagrammsymmetrie induzierte Bijektion auf Σ.

Lemma 2.2. *[GLS98, 2.4.1] Die Struktur der Wurzeluntergruppen ist wie folgt:*

a) Im ungetwisteten Fall oder für lange Wurzeluntergruppen ist:
$X_\alpha = \{x_\alpha(t) | t \in \mathbb{F}_q\} \cong \mathbb{F}_q^+$

b) In Steinberg-Gruppen mit $\hat{\alpha} = \{\alpha, \alpha^\tau\}$ *ist:*
$X_\alpha = \{x_\alpha(t)x_{\alpha^\tau}(t^q) | t \in \mathbb{F}_{q^2}\} \cong \mathbb{F}_{q^2}^+$

c) In ${}^3\mathrm{D}_4(q)$ *mit* $\hat{\alpha} = \{\alpha, \alpha^\tau, \alpha^{\tau^2}\}$ *ist:*
$X_\alpha = \{x_\alpha(t)x_{\alpha^\tau}(t^q)x_{\alpha^{\tau^2}}(t^{q^2}) | t \in \mathbb{F}_{q^3}\} \cong \mathbb{F}_{q^3}^+$

d) In ${}^2\mathrm{A}_{2n}(q)$ *mit* $\hat{\alpha} = \{\alpha, \alpha^\tau, \alpha + \alpha^\tau\}$ *ist:*
$X_\alpha = \{x_\alpha(t)x_{\alpha^\tau}(t^q)x_{\alpha+\alpha^\tau}(u) | t, u \in \mathbb{F}_{q^2}, t^{1+q} = u + u^q\}$,
$|X_\alpha| = q^3$, $t = 0$ *definiert:* $Z(X_\alpha) = X'_\alpha = \Phi(X_\alpha) \cong \mathbb{F}_q^+$

e) In ${}^2\mathrm{F}_4(q)$, $f = 2a+1$ *mit* $\hat{\alpha} = \{\alpha, \alpha^\tau\}$ *ist:*
$X_\alpha = \{x_\alpha(t)x_{\alpha^\tau}(t^{2^a}) | t \in \mathbb{F}_q\} \cong \mathbb{F}_q^+$

f) In ${}^2\mathrm{B}_2(q)$, ${}^2\mathrm{F}_4(q)$, $f = 2a+1$ *mit* $\hat{\alpha} = \{\alpha, \alpha^\tau, \alpha + \alpha^\tau, \alpha + 2\alpha^\tau\}$ *ist:*
$X_\alpha = \{x_\alpha(t)x_{\alpha^\tau}(t^{2^a})x_{\alpha+2\alpha^\tau}(u)x_{\alpha+\alpha^\tau}(t^{1+2^a} + u^{2^a}) | t, u \in \mathbb{F}_q\}$, $|X_\alpha| = q^2$,
für $q = 2$ *ist* $X_\alpha \cong \mathbb{Z}_4$, *für* $q > 2$ *definiert* $t = 0$: $Z(X_\alpha) = X'_\alpha = \Phi(X_\alpha) \cong \mathbb{F}_q^+$

Die Struktur von $\overline{K}$ bzw. K wird nun durch die **Chevalley-Kommutatorformeln** bestimmt:

Lemma 2.3. *[GLS98, 1.12.1,2.4.5] Seien* $\alpha, \beta \in \Sigma$ *und* $s, t \in \overline{\mathbb{F}}_2$, *dann ist*

$$[x_\alpha(s), x_\beta(t)] = \prod_{\substack{i,j>0 \\ i\alpha+j\beta\in\Sigma}} x_{i\alpha+j\beta}(c_{ij\alpha\beta}s^i t^j).$$

Dabei gilt:

- *Ist* $\Sigma = \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{F}_4$, α, β *kurz und* $\alpha + \beta$ *lang, so ist* $c_{11\alpha\beta} = 0$.
- *Ist* $\Sigma = \mathrm{G}_2$ *und* $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ *kurz, so ist* $c_{11\alpha\beta} = 0$.
- *in allen anderen Fällen ist* $c_{ij\alpha\beta} = 1$.

Insbesondere gilt für alle endlichen Gruppen vom Lie-Typ:

$$[X_\alpha, X_\beta] \leq \prod_{\substack{i,j>0 \\ \alpha' \in \hat{\alpha}, \beta' \in \hat{\beta} \\ i\alpha' + j\beta' \in \Sigma}} X_{i\alpha' + j\beta'}$$

Die Sonderfälle der Kommutatorformeln sind für uns vor allem im Fall ${}^2\mathrm{F}_4$ interessant und wir fassen in folgendem Lemma die Resultate aus [GLS98, 2.3.3, 2.4.6] zusammen.

Lemma 2.4. *Sei $K \cong {}^2\mathrm{F}_4(q)$, d.h. $\Sigma = \mathrm{F}_4$ und $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_4\}$. Dann sind $\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1$ Vertreter für die Klassen in $\hat{\Sigma}^+$ und wir bezeichnen die zugehörigen Wurzeluntergruppen mit $X_1, ..., X_8$. Ist $\alpha \in \Sigma^+$ ein Vertreter zur Wurzelgruppe X_i, so bezeichnen wir die Wurzelgruppe zu $-\alpha$ mit X_{8+i}. Dabei sind die Wurzeluntergruppen X_i für gerades i vom Typ 2.2e) und für ungerades i vom Typ 2.2f), wobei wir in letzterem Fall $Y_i := Z(X_i)$ setzen.*
Es gilt für $i \not\equiv j + 8 \pmod{16}$:

$$[X_i, X_j] \leq \prod_{i<k<j} X_k$$

Weiterhin gelten die folgenden exakteren Kommutatorformeln (Indizes modulo 16):

a) $[X_i, X_{i\pm2}] = X_{i\pm1}$, $[Y_i, X_{i\pm2}] = 1$ *(i ungerade)*
$[X_i, X_{i\pm2}] = 1$ *(i gerade)*

b) $[X_i, X_{i\pm3}] = Y_{i\pm2}$, $[Y_i, X_{i\pm3}] = 1$ *(i ungerade)*

c) $[X_i, X_{i\pm4}] = 1$

d) $[X_i, X_{i\pm5}] \leq Y_{i\pm2}X_{i\pm3}Y_{i\pm4}$, $[Y_i, X_{i\pm5}] = Y_{i\pm2}$ *(i ungerade)*

e) $[X_i, X_{i\pm6}] \leq X_{i\pm2}X_{i\pm4}$ *(i gerade)*
$[Y_i, X_{i\pm6}] \leq X_{i\pm1}Y_{i\pm2}X_{i\pm3}Y_{i\pm4}$, $[Y_i, Y_{i\pm6}] \leq Y_{i\pm2}X_{i\pm3}Y_{i\pm4}$ *(i ungerade)*

f) $[Y_i, X_{i\pm7}] \leq X_{i\pm2}X_{i\pm3}X_{i\pm4}X_{i\pm5}Y_{i\pm6}$ *(i ungerade)*

Besonders aufschlussreich sind die Kommutatorformeln, wenn man sich auf die positiven Wurzeln beschränkt, da sich die Höhenfunktion dann mit der Addition der Wurzeln verträgt, das heißt für alle $\alpha, \beta \in \Sigma^+, i, j \in \mathbb{N}$ gilt $h(i\alpha + j\beta) \geq h(\alpha) + h(\beta)$.
Wir setzen nun $\overline{U} := \langle \overline{X}_\alpha | \alpha \in \Sigma^+ \rangle$, dann ist $N_{\overline{K}}(\overline{U}) = \overline{UT} =: \overline{B}$ eine sogenannte Borel-Untergruppe von $\overline{K}$. Betrachten wir nun $S_0 := \overline{U} \cap K$, so ist nach [GLS98, 2.3.4]

$$S_0 \in \mathrm{Syl}_2(K) \text{ und } S_0 = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} X_\alpha.$$

Insbesondere wird also durch die Wahl von $\overline{T}$ und Π eine 2-Sylowgruppe von K festgelegt. Das Pendant zu einem maximalen Torus $T := \overline{T} \cap K$ bezeichnen wir als **Cartan-Untergruppe** und $B := \overline{B} \cap K = S_0T$ nennen wir eine **Borel-Untergruppe** von K. Für eine (im getwisteten Fall τ-invariante) Teilmenge $J \subseteq \Pi$ und $J' := \Pi \setminus J$ setzen wir

$$Q_J := \langle X_\alpha | \alpha \in \Sigma^+, h_{J'}(\alpha) > 0 \rangle$$
$$L_J := \langle X_\alpha | \alpha \in \Sigma, h_{J'}(\alpha) = 0 \rangle = \langle X_\alpha, X_{-\alpha} | \alpha \in J \rangle$$

Dann ist $P_J := Q_J L_J H$ eine Untergruppe von K die B enthält und wir nennen P_J eine **Lie-parabolische Untergruppe** von K.

Lemma 2.5. *[GLS98, 2.6.5] Es ist $B = N_K(S_0)$ und die Untergruppen von K welche B enthalten sind genau die Lie-parabolischen Untergruppen von K. Zudem ist $Q_J = O_2(P_J)$ und $P_J = N_K(Q_J)$. Ist $Z(K) = 1$, so haben die nicht trivialen Lie-Parabolischen Charakteristik 2. Es gilt:*

- $Q_J \cap L_J T = 1$
- $Q_J L_J = O^{2'}(P_J)$
- *L_J ist ein zentrales Produkt von Gruppen vom Lie-Typ und korrespondiert zum von J aufgespannten (möglicherweise reduziblen) Wurzelsystem $\langle J \rangle_{\mathbb{R}} \cap \Sigma$.*

Wir sehen durch die trivialen Fälle $J = \emptyset$ und $J = \Pi$, dass auch B und K Lie-parabolische Untergruppen sind. Wenn wir allerdings von maximalen bzw. minimalen Lie-Parabolischen sprechen, so sind immer die nicht trivialen gemeint. Zudem wird K von seinen nicht trivialen Lie-Parabolischen erzeugt, falls der Lie-Rang größer als 1 ist. Normalerweise werden die Lie-Parabolischen auch einfach parabolische Untergruppen genannt, aber diese Bezeichnung steht in unserem Kontext bereits für Gruppen, die eine 2-Sylowgruppe enthalten. Der Zusammenhang zwischen den beiden Begriffen ergibt sich mit folgendem Resultat:

Lemma 2.6 ([GLS98, 2.6.7])**.** *Sei $X \leq K$ mit $S_0 \leq X$, dann gilt $T \leq N_K(X)$ und TX ist eine Lie-Parabolische in K.*

Wir wollen uns genauer mit der Struktur der Parabolischen von K beschäftigen und definieren für $J \subseteq \Pi$:
$$Q_J^i := K \cap \langle \overline{X}_\alpha | \alpha \in \Sigma^+, h_{J'}(\alpha) \geq i \rangle$$

Dabei ist Q_J^i nicht unbedingt ein Produkt von Wurzeluntergruppen aus K, da im getwisteten Fall auch Wurzeln von bezüglich J verschiedener Höhe zur gleichen Wurzeluntergruppe gehören können.

Lemma 2.7. *[GLS98, 3.2.2] Für eine (τ-invariante) Teilmenge $J \subseteq \Pi$ setzen wir $a := h_{J'}(\alpha^*)$. Dann ist $Q_J = Q_J^1 > Q_J^2 > \ldots > Q_J^{a+1} = 1$ eine Zentralreihe von Q_J. Ist Σ nicht vom Typ B_n, G_2 oder F_4, so ist dies sowohl die auf- als auch die absteigende Zentralreihe, d.h. $Q_J^2 = Q_J'$ und $Q_J^a = Z(Q_J)$.*

Eine für uns besonders interessante parabolische Untergruppe ist der Normalisator des Zentrums einer Sylowgruppe, da diese im Allgemeinen auch der Normalisator einer großen Untergruppe ist.

Lemma 2.8. *Ist K einfach und der Lie-Rang mindestens 2, dann ist $N_K(Z(S_0))$ eine Lie-Parabolische Untergruppe, die zur folgenden Fundamentalwurzelmenge J korrespondiert:*

Σ	A_n	B_n	D_n	E_6	E_7	E_8	G_2	F_4
$J' = \Pi \setminus J$	$\{\alpha_1, \alpha_n\}$	$\{\alpha_1, \alpha_2\}$	$\{\alpha_2\}$	$\{\alpha_2\}$	$\{\alpha_1\}$	$\{\alpha_8\}$	$\{\alpha_2\}$	$\{\alpha_1, \alpha_4\}$

Es gilt $L_JQ_J \leq C_K(Z(S_0))$ und ist Σ nicht vom Typ B_n oder F_4, so ist Q_J speziell, $Z(Q_J) = Z(S_0)$ und $V := Q_J/Z(Q_J)$ ist ein treuer $\mathbb{F}L_J$-Modul, wobei $\mathbb{F}$ und der Isomorphietyp von V in Tabelle 2.1 angegeben ist. Im Fall $K \cong \mathrm{L}_n(q)$ ist V Summe zweier irreduzibler $\mathbb{F}L_J$- Modul, in allen anderen Fällen ist V irreduzibel über $\mathbb{F}$. Bis auf den Fall $K \cong \mathrm{G}_2(4)$ ist V über keinem echten Teilkörper von $\mathbb{F}$ darstellbar und V, bzw. die irreduziblen Untermoduln im Fall $K \cong \mathrm{L}_n(q)$, sind absolut irreduzibel.

Beweis: Zunächst sei $K \ncong {}^2\mathrm{F}_4(q)$. Mit Lemma 2.7 ist immer $X_{\alpha^*} \leq Z(S_0)$ und im Fall, dass die Kommutatorformeln keine Ausnahmen aufweisen, gilt sogar Gleichheit. Auch für $K \cong \mathrm{G}_2(q)$ berechnen wir $Z(S_0) = X_{\alpha^*}$. In den Fällen $K \cong \mathrm{S}_n(q)$ oder $\mathrm{F}_4(q)$ gibt es eine zweite Wurzeluntergruppe X_{α^+}, welche ebenfalls mit allen anderen positiven Wurzeluntergruppen vertauscht, d.h. $Z(S_0) = X_{\alpha^*}X_{\alpha^+}$. Dabei ist $\alpha^+ = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ im Fall B_n und $\alpha^+ = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4$ im Fall F_4. Nun ist $S_0 \leq N_K(Z(S_0))$ und da die Cartan-Untergruppe T alle Wurzeluntergruppen normalisiert, ist $N_K(Z(S_0))$ eine Lie-Parabolische und korrespondiert zu einer Teilmenge $J \subseteq \Pi$, d.h. $N_K(Z(S_0)) = L_JQ_JT$. Die Identifizierung von J geschieht anhand der Wurzelsysteme, wobei bestimmt wird, für welche Wurzeln $\alpha \in -\Pi$ auch $[Z(S_0), X_\alpha] \leq Z(S_0)$ gilt. Insbesondere gilt in diesen Fällen sogar $[Z(S_0), X_\alpha] = 1$ und es folgt $Q_JL_J \leq C_K(Z(S_0))$.
Die Struktur von L_J und Q_J ergibt sich aus 2.5 und 2.7. Der Isomorphietyp von V bestimmen wir anhand der Informationen aus [GLS98, 1.14.9, 3.2.4, 3.2.5]. Mittels [GLS98, 2.8.8] erkennen wir, dass dieser Modul einzig im Fall $K \cong \mathrm{G}_2(4)$ auch über einem kleineren als dem angegebenen Körper darstellbar ist, da hier $V^{(2)} \cong (V(\lambda_1) \otimes V(\lambda_1)^{(2)})^{(2)} \cong V(\lambda_1)^{(2)} \otimes V(\lambda_1) \cong V$ ist, d.h. der Modul lässt sich auch über $\mathbb{F}_2$ darstellen. Zudem folgt damit in den übrigen Fällen, dass V absolut irreduzibel ist.
Im Fall $K \cong {}^2\mathrm{F}_4(q)$ können wir mittels 2.4 berechnen, dass $Z(S_0) = Z(Q_J) = Y_5$ ist und J der angegebenen Wurzelmenge entspricht. Zudem ist $Q_JL_J \leq C_K(Z(S_0))$ und wir gehen im Beweis von Lemma 3.4 genauer auf die Struktur von Q_J ein. Die Gruppen $\mathrm{S}_{2n}(q)$ und $\mathrm{F}_4(q)$ werden wir im weiteren Verlauf ausschließen, weshalb eine genauere Identifizierung des Normalisators in diesen Fällen nicht nötig ist.

□

Lemma 2.9. *Sei Σ nicht vom Typ $\mathrm{B}_n, \mathrm{G}_2, \mathrm{F}_4$ und X sei eine Wurzeluntergruppe vom Typ 2.2 a) oder d), oder $K \cong {}^2\mathrm{F}_4(q)$ und X eine Wurzeluntergruppe vom Typ f), dann ist $Z(X)$ eine TI-Menge in K, d.h. $Z(X)^g \cap Z(X) \in \{1, Z(X)\}$ für alle $g \in K$.*

Beweis: Ist X eine lange Wurzeluntergruppe, d.h. vom Typ 2.2 a), so ist $X = \overline{X} \cap K$ für eine Wurzeluntergruppe $\overline{X} \leq \overline{K}$. Falls X dagegen vom Typ d) ist, so ist $Z(X) = \overline{X} \cap K$ für eine Wurzeluntergruppe $\overline{X} \leq \overline{K}$. Für den Fall $\Sigma \neq \mathrm{B}_n, \mathrm{G}_2, \mathrm{F}_4$ (d.h. alle Wurzeln in

K	L_J	$Q_J/Z(S_0)$ als L_J-Modul	über
$\mathrm{L}_n(q)$, $n \geq 3$	$\mathrm{SL}_{n-2}(q)$	$V_{\mathrm{nat}} \oplus V_{\mathrm{nat}}^*$	$\mathbb{F}_q$
$\mathrm{U}_n(q)$, $n \geq 4$	$\mathrm{SU}_{n-2}(q)$	V_{nat}	$\mathbb{F}_{q^2}$
$\Omega_{2n}^+(q)$, $n \geq 4$	$\mathrm{SL}_2(q) \times \Omega_{2n-4}^+(q)$	$V_{\mathrm{nat(L_2)}} \otimes V_{\mathrm{nat}(\Omega_{2n-4})}$	$\mathbb{F}_q$
$\Omega_{2n}^-(q)$, $n \geq 4$	$\mathrm{SL}_2(q) \times \Omega_{2n-4}^-(q)$	$V_{\mathrm{nat(L_2)}} \otimes V_{\mathrm{nat}(\Omega_{2n-4})}$	"
$\mathrm{E}_6(q)$	$\mathrm{SL}_6(q)$	$\Lambda^2(V_{\mathrm{nat}})$	"
$\mathrm{E}_7(q)$	$\Omega_{12}^+(q)$	$V_{\mathrm{halb-spin}}$	"
$\mathrm{E}_8(q)$	$\mathrm{E}_7(q)$	$V(\lambda_1)$	"
${}^2\mathrm{E}_6(q)$	$\mathrm{SU}_6(q)$	$\Lambda^2(V_{\mathrm{nat}})$	"
$\mathrm{G}_2(q)$	$\mathrm{SL}_2(q)$	$V_{\mathrm{nat}} \otimes V_{\mathrm{nat}}^{(2)}$	"
${}^3\mathrm{D}_4(q)$	$\mathrm{SL}_2(q^3)$	$V_{\mathrm{nat}} \otimes V_{\mathrm{nat}}^{(q)} \otimes V_{\mathrm{nat}}^{(q^2)}$	"
${}^2\mathrm{F}_4(q)$	${}^2\mathrm{B}_2(q)$	$c(Q_0) = 3$	
$\mathrm{S}_{2n}(q)$, $n \geq 3$	$\mathrm{S}_{2n-4}(q)$	$c(Q_0) = 3$	
$\mathrm{F}_4(q)$	$\mathrm{S}_4(q)$	$c(Q_0) = 3$	

Tabelle 2.1.: Übersicht über die Struktur von $N_K(R)$

Σ haben die gleiche Länge) genügt es also zu zeigen, dass eine Wurzeluntergruppe $\overline{X}$ eine TI-Menge in $\overline{K}$ ist. Nach [GLS98, 1.8.9,1.12.1 h)] sind alle Wurzeluntergruppen von Wurzeln gleicher Länge unter $\overline{K}$ konjugiert und wir können annehmen, dass $\overline{X} = \overline{X}_{\alpha*}$ ist. Mit [GLS98, 1.12.9] gilt $\overline{X} = Z(\overline{U})$ und insbesondere ist $\overline{X}$ invariant unter $\overline{B}$. Dann ist aber $\overline{X} \cap \overline{X}^g$ auch $\overline{B} \cap \overline{B}^g$-invariant für alle $g \in \overline{K}$ und nach [GLS98, 1.11.4] enthält der Schnitt zweier Borel-Untergruppen von $\overline{K}$ einen maximalen Torus. Da $\overline{T}$ aber transitiv auf $\overline{X}^\#$ ist, ist $\overline{X} \cap \overline{X}^g = 1$ oder $\overline{X}$.
Es bleibt der Fall $K \cong {}^2\mathrm{F}_4(q)$. Nach [GLS98, 2.4.9] sind die Wurzeluntergruppen vom Typ f) in K zueinander konjugiert und mit den Bezeichnungen aus 2.4 können wir annehmen, dass $Z(X) = Y_5 = Z(S_0)$ ist, d.h. $Z(X) = Z(\overline{U}) \cap K$. Wir sehen wie oben, dass $Z(\overline{U}) \cap Z(\overline{U})^g$ für alle $g \in \overline{K}$ invariant unter einem maximalen Torus in $\overline{B}$ ist. Zudem kann man mittels [GLS98, 2.4.7,1.12.1] nachrechnen, dass T transitiv auf Y_5 operiert und so folgt auch hier die Behauptung.

□

Wir geben nun noch einen Überblick über die äußeren Automorphismen der endlichen Gruppen vom Lie-Typ.

Lemma 2.10. *[GLS98, 2.5.1,2.5.12] Jeder Automorphismus von K lässt sich als Produkt $y\delta\varphi\varrho$ schreiben, wobei gilt:*

- $y \in \mathrm{Inn}(K)$.
- *δ ist ein **Diagonalautomorphismus**, d.h. δ wird durch die Operation von $N_{\overline{T}}(K)$ auf K induziert. Insbesondere hat δ ungerade Ordnung und normalisiert alle Wurzeluntergruppen.*

- *φ ist ein **Körperautomorphismus**, d.h. φ ist die Einschränkung eines Automorphismus φ_r von $\overline{K}$ und es gilt $x_\alpha(t)^\varphi = x_\alpha(t^r)$ für eine 2-Potenz $r \in \mathbb{N}$.*
- *ϱ ist ein **Graphautomorphismus**. Dies tritt nur auf, wenn K ungetwistet ist und eine Symmetrie auf dem Dynkin-Diagramm sowie eine entsprechende Bijektion τ auf Σ existiert. Für $\Sigma = \mathrm{A}_n, \mathrm{D}_n, \mathrm{E}_6$ gilt $x_\alpha(t)^\varrho = x_{\alpha^\tau}(t)$ und für $\Sigma = \mathrm{B}_2, \mathrm{F}_4$ ist $x_\alpha(t)^\varrho = x_{\alpha^\tau}(t^d)$, wobei $d = 1$ für α lang und $d = 2$ für α kurz ist.*

Die Gruppe $\mathrm{Out}(K)$ *ist eine zerfallende Erweiterung der Gruppe der äußeren Diagonalautomorphismen* $\mathrm{Outdiag} \cong N_{\overline{T}}(K)/T$ *mit $\Phi_K\Gamma_K$, wobei Φ_K die Gruppe der Körperautomorphismen und $\Gamma_K = \langle\varrho\rangle$ die Gruppe der Graphautomorphismen ist. Dabei ist $\Phi_K\Gamma_K$ abelsch und* Outdiag *ist wie folgt:*

K	$\mathrm{A}_n(q)$	${}^2\mathrm{A}_n(q)$	$\mathrm{E}_6(q)$	${}^2\mathrm{E}_6(q)$	sonst
Outdiag	$\mathbb{Z}_{(n+1,q-1)}$	$\mathbb{Z}_{(n+1,q+1)}$	$\mathbb{Z}_{(3,q-1)}$	$\mathbb{Z}_{(3,q-1)}$	*1*

Zu guter Letzt können wir mit den bisherigen Resultaten auch eine große Untergruppe in K identifizieren.

Lemma 2.11. *Ist K einfach und nicht isomorph zu $\mathrm{S}_{2n}(q)$ oder $\mathrm{F}_4(q)$, so ist die Untergruppe $O_2(N_K(Z(S_0)))$ eine große Untergruppe von $H := \mathrm{Aut}(K)$.*

Beweis: Wie in Lemma 2.8 sei J die zu $N_K(Z(S_0))$ korrespondierende Wurzelmenge und $Q_J = O_2(N_K(Z(S_0)))$. Nach 2.5 hat P_J Charakteristik 2 und es ist $C_K(Q_J) \leq Q_J$. Ein Element aus $N_H(Q_J) \setminus K$ induziert einen äußeren Automorphismus und wir sehen, dass ein solcher in allen Fällen nicht trivial auf Q_J ist, d.h. $C_H(Q_J) \leq Q_J$.
Sei $1 \neq A \leq Z(Q_J) = Z(S_0)$ und $x \in N_H(A)$, dann normalisiert x auch $N_K(A)$ und permutiert die Parabolischen Untergruppen von K, die $N_K(A)$ enthalten. Nun ist $Q_J L_J \leq C_H(Z(S_0)) \leq C_H(A)$, weshalb $N_K(A)$ in keiner kleineren Lie-Parabolischen Untergruppe von K als P_J enthalten sein kann. Ist $K \not\cong \mathrm{L}_n(q)$, so ist P_J maximal und somit die einzige Lie-Parabolische, die $N_K(A)$ enthalten kann. In $K \cong \mathrm{L}_n(q)$ existiert nur eine einzige zu $N_K(Q_J)$ isomorphe Lie-Parabolische. Also normalisiert x auch $N_K(Q_J)$ und somit ist $x \in N_H(Q_J)$.

□

2.3. Weitere verwendete Resultate

In diesem Abschnitt wollen wir Zitate aus der Literatur zusammentragen, die im weiteren Verlauf der Arbeit verwendet werden. Dabei sind die ersten beiden Resultate Teil des MSS-Projekts, wobei Satz 2.12 die Fälle behandelt, welche wir in unserem Setup durch die Voraussetzung, dass $C_H(z)$ nicht auflösbar ist, ausgeschlossen haben. Satz 2.14 gibt uns dann zusammen mit dem Satz von Bender die Möglichkeit, zum Abschluss der Arbeit die Gruppe G mit H zu identifizieren.
Die weiteren Zitate behandeln vor allem Untergruppenstruktur und Darstellungen endlicher einfacher Gruppen aus der gängigen Literatur.

Satz 2.12. *[PS11] Sei G eine endliche Gruppe, $H \leq G$ ein Untergruppe, die eine p-Sylowgruppe $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ enthält. Es sei $H = N_G(F^*(H))$ und $F^*(H)$ sei eine einfache Gruppe vom Lie-Typ in definierender Charakteristik p vom Lie-Rang mindestens 2, aber $F^*(H) \ncong \mathrm{L}_3(p^a)$ für ungerades p. Zudem enthalte G eine große Untergruppe $Q \leq S$ und wir nehmen an, dass $C_H(z)$ für ein $z \in Z(S)$ auflösbar sei. Dann gilt einer der folgenden Fälle:*

(i) $N_G(Q) \leq H$

(ii) $p = 2$ *und* $F^*(G) \cong M_{11}$, M_{23}, $\mathrm{G}_2(3)$ *oder* $P\Omega_8^+(3)$

(iii) $p = 3$ *und* $F^*(G) \cong \mathrm{U}_6(2)$, $\mathrm{F}_4(2)$, ${}^2\mathrm{E}_6(2)$, McL, Co_2, $M(22)$, $M(23)$ *oder* F_2.

Definition 2.13. *Sei G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe von G. Dann heißt H* ***stark 2-eingebettet****, falls H gerade Ordnung hat und $|H \cap H^g|$ für alle $g \in G \backslash H$ ungerade ist.*

Satz 2.14. *[SS] Sei G eine endliche Gruppe von lokaler Charakteristik 2 und $H \leq G$ mit $F^*(H)$ vom Lie-Typ in definierender Charakteristik 2 und Lie-Rang mindestens 2. Weiter sei $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ und $N_G(X) \leq H$ für alle $1 \neq X \trianglelefteq S$. Dann ist H stark 2-eingebettet in G.*

Satz 2.15. *[Ben71] Sei G eine endliche Gruppe, die eine stark 2-eingebettete Untergruppe besitzt. Dann gilt einer der folgenden Fälle:*

- *Eine 2-Sylowgruppe von G ist zyklisch oder eine Quaternionengruppe*
- *G besitzt eine Reihe von Normalteilern*

$$1 \trianglelefteq M \triangleleft L \trianglelefteq G,$$

wobei M und G/L ungerade Ordnung haben und L/M isomorph zu $\mathrm{L}_2(q)$, $\mathrm{U}_3(q)$ oder ${}^2\mathrm{B}_2(q)$ für eine 2-Potenz $q \geq 4$ ist.

Lemma 2.16. *Sei P eine elementar abelsche p-Gruppe, die auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{F}_r$-Vektorraum V teilerfremd operiere und zudem sei $C_V(P) = \{0\}$. Wir bezeichnen mit Γ die Menge aller maximalen Untergruppen von P. Dann ist:*

$$V = \bigoplus_{E \in \Gamma} C_V(E).$$

Beweis: Sei $\Gamma = \{E_1, ..., E_n\}$ und setze $V_i := C_V(E_i)$ für $i \in \{1, ..., n\}$. Nach Erzeugungssatz [GLS94, 11.13] gilt

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

Für $i \neq j$ ist $V_i \cap V_j \leq C_V(\langle E_i, E_j \rangle) = C_V(P) = \{0\}$ und wir nehmen nun an, dass $V_1, ..., V_m$ für ein $m \geq 2$ eine direkte Summe bilden und ein $0 \neq v \in (\bigoplus_{i=1}^{m} V_i) \cap V_{m+1}$ existiert. Nun lässt sich v eindeutig als $v = v_1 + ... + v_m$ für $v_i \in V_i$ schreiben und wir wählen $e \in E_{m+1}$ beliebig. Da $v \in V_{m+1}$ ist, ist $v^e = v$ und da e auch auf den restlichen V_i operiert, ist $v_i = {v_i}^e$ für alle $i \in \{1, ..., m\}$. Dann ist aber $v_i \in C_V(E_{m+1}) = V_{m+1}$ und es folgt $v_i \in V_i \cap V_{m+1} = \{0\}$. Ein Widerspruch.

$\square$

Lemma 2.17. *[Asc93, 26.5] Sei G eine endliche Gruppe, $\mathbb{F}$ ein Körper und V ein irreduzibler $\mathbb{F}G$-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) V kann über keinem echten Teilkörper von $\mathbb{F}$ geschrieben werden

(ii) Für jeden Teilkörper $\mathbb{L} \subset \mathbb{F}$ ist V auch als $\mathbb{L}G$-Modul irreduzibel.

Lemma 2.18. *[GLS94, 9.4(iii)] Sei G eine endliche Gruppe, $\mathbb{F}$ ein Körper und V ein halbeinfacher $\mathbb{F}G$-Modul. $V_1, ..., V_s$ seien Repräsentanten der Isomorphietypen von absolut irreduziblen $\mathbb{F}G$-Untermoduln und r_i sei die Vielfachheit von V_i in V.*
Dann ist $\mathrm{End}_{\mathbb{F}G}(V) \cong \bigoplus_{i=1}^{s} M_{r_i}(\mathbb{F})$, wobei $M_n(X)$ den Ring der $n \times n$-Matrizen über X bezeichnet.

Lemma 2.19. *Sei G eine endliche Gruppe und V ein k-dimensionaler $\mathbb{F}_qG$-Modul, für $q = p^e$, mit $V = V_1 \oplus ... \oplus V_s$, wobei die V_i zueinander isomorphe, absolut irreduzible $\mathbb{F}_qG$-Moduln sind, die sich über keinem echten Teilkörper von $\mathbb{F}_q$ darstellen lassen.*
Dann ist $C_{\mathrm{Aut}(V)}(G) \cong \mathrm{GL}_s(q)$.

Beweis: Sei zunächst $s = 1$, also V irreduzibel. Wir können V als $k \cdot e$-dimensionalen $\mathbb{F}_pG$-Modul schreiben und nach Lemma 2.17 ist diese Darstellung irreduzibel. Nach Schur ist damit $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_pG}(V)$ ein Körper und insbesondere abelsch. Sei nun $x \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}_pG}(V)$ und $\lambda \in \mathbb{F}_q$. Dann vertauscht x auch mit $\lambda \cdot id \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}_pG}(V)$ und insofern ist $\lambda(v^x) = (\lambda v)^x$

für alle $v \in V$, d.h. $x \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}_q G}(V)$. Damit ist $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_p G}(V) = \mathrm{End}_{\mathbb{F}_q G}(V) = \{\lambda E | \lambda \in \mathbb{F}_q\}$ und $C_{\mathrm{Aut}(V)}(G) \cong \mathbb{F}_q^*$.
Für $s > 1$ zerfällt V dagegen in s isomorphe, absolut irreduzible $\mathbb{F}_q G$-Untermoduln V_i, $i \in \{1, ..., s\}$, die auch als $\mathbb{F}_p G$-Moduln irreduzibel sind. Wie oben ist $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_p G}(V_i) \cong \mathbb{F}_q$. Nach Lemma 2.18 ist dann $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_p G}(V)$ die Algebra der $s \times s$-Matrizen mit Einträgen aus dem Körper $\mathbb{F}_q$. Es folgt $C_{\mathrm{Aut}(V)}(G) \cong \mathrm{GL}_s(q)$.

□

Lemma 2.20. *[KL90, 5.5.2] Für teilerfremde Primzahlen p und r sowie $n, l \in \mathbb{N}$ ist*

$$m_r(\mathrm{PGL}_n(p^l)) \leq n.$$

Lemma 2.21. *Sei K eine klassische einfache Gruppe über $\mathbb{F}_q$, $q = 2^f$. Mit $p(K)$ bezeichnen wir den minimalen Grad einer nicht trivialen Permutationsdarstellung von K. Dann gilt:*

i) Ist $K \cong \mathrm{L}_n(q)$, so ist $p(K) \geq q^{n-1}$

ii) Ist $K \cong \mathrm{U}_n(q)$, $n \geq 3$, so ist $p(K) \geq q^n$

iii) Ist $K \cong \mathrm{Sp}_{2n}(q)$, $n \geq 2$, so ist $p(K) \geq q^{2n-2}$

iv) Ist $K \cong \Omega^{\pm}_{2n}(q)$, $n \geq 4$, so ist $p(K) \geq q^{2n-2}$

Ist K_1 eine zentrale Erweiterung von K, so ist $p(K_1) \geq p(K)$.

Beweis: Dies sind grobe Abschätzungen der Werte für $p(K)$ aus [KL90, 5.2.2]. Der Nachsatz folgt aus [KL90, 5.2.1].

□

Lemma 2.22. *Sei K eine klassische Gruppe mit einer m-dimensionalen, treuen Darstellung über $\mathbb{F}_3$. Dann gilt:*

Ist $K \cong \Omega^-_4(2) \cong A_5$, so ist $m \geq 4$

Ist $K \cong \Omega^+_6(2) \cong A_8$, so ist $m \geq 7$

Ist $K \cong \Omega^-_6(2)$, so ist $m \geq 4$

Ist $K \cong \Omega^{\pm}_{2n}(2)$, $n \geq 4$, so ist $m \geq 2^{2n-5}$

Ist $K \cong \mathrm{SU}_n(2)$, $n \geq 4$, so ist $m \geq 2^{n-2}$

Sei $K \cong \mathrm{SL}_2(2^f)$ so besitzt eine treue Darstellung in ungerader Charakteristik mindestens den Grad $2^f - 2$, für $f \geq 3$ sogar $2^f - 1$.

Beweis: Für $K \cong A_5$ oder A_8 suchen wir m minimal so, dass $|K|$ die Ordnung von $\mathrm{GL}_m(3)$ teilt. Im dritten Fall ergibt sich die Aussage durch die Isomorphie $\Omega_6^-(2) \cong \mathrm{S}_4(3)$. In den Fällen $\Omega_{2n}^{\pm}(2), \mathrm{U}_n(2), \mathrm{SL}_2(2^f)$ verwenden wir die minimalen Grade von projektiven Darstellungen in teilerfremder Charakteristik, wie sie in [KL90, 5.3.9] gegeben sind. □

Lemma 2.23. *Sei p eine ungerade Primzahl. Dann ist $|\mathrm{GL}_n(2)|_p < p^{3n/4}$.*

Beweis: Sei d die Ordnung von 2 in $\mathbb{Z}_p$. In [AHN05, 2.3][1] wird eine allgemeine Formel für den p-Anteil in der Ordnung der linearen Gruppe angegeben:

$$|\mathrm{GL}_n(2)|_p = (2^d - 1)_p^{[\frac{n}{d}]} \left(\left[\frac{n}{d}\right]!\right)_p$$

Da $p \geq 3$ ist, gilt die Abschätzung $1/p + 1/p^2 + 1/p^3 + ... < 1/2$. Sei zunächst $p = 3$. Dann ist $d = 2$ und wir erhalten

$$|\mathrm{GL}_n(2)|_3 = 3^{[\frac{n}{2}]} \left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)_3 \leq 3^{\frac{n}{2}} \cdot 3^{\frac{n}{2}(1/3+1/9+1/27+...)} < 3^{\frac{3n}{4}}$$

Sei nun $p \geq 5$. Dann ist $d \geq 3$ und es gilt $2^2 < p$, womit wir auch hier erhalten:

$$|\mathrm{GL}_n(2)|_p = (2^d - 1)_p^{[\frac{n}{d}]} \left(\left[\frac{n}{d}\right]!\right)_p < 2^n \cdot p^{\frac{n}{3}(1/p+1/p^2+1/p^3+...)} < p^{\frac{n}{2}} \cdot p^{\frac{n}{6}} < p^{\frac{3n}{4}}$$

□

Lemma 2.24. *[GLS98, 2.2.9,3.3.3] Sei K eine Gruppe vom Lie-Typ über einem Körper mit $q = 2^f$ Elementen. Dann sind der 2-Anteil der Ordnung sowie der 2-Rang von K wie folgt.*

K	$\lvert K\rvert_2$	$m_2(K)$	K	$\lvert K\rvert_2$	$m_2(K)$
$\mathrm{L}_n(q)$	$q^{n(n-1)/2}$	$[(\frac{n}{2})^2]f$	$\mathrm{G}_2(q)$	q^6	$3f$
$\mathrm{U}_n(q)$	$q^{n(n-1)/2}$	$[\frac{n}{2}]^2 f$	${}^2\mathrm{E}_6(q)$	q^{36}	$13f$
$\mathrm{S}_{2n}(q)$	q^{n^2}	$\binom{n+1}{2} f$	${}^3\mathrm{D}_4(q)$	q^{12}	$5f$
$\Omega_{2n}^{\pm}(q)$, $n \geq 4$	$q^{n(n-1)}$	$\binom{n}{2} f$	${}^2\mathrm{B}_2(q)$	q^2	f
$\mathrm{E}_6(q)$	q^{36}	$16f$	${}^2\mathrm{F}_4(q)$	q^{12}	$5f$
$\mathrm{E}_7(q)$	q^{63}	$27f$	$\mathrm{B}_2(2)'$	2^3	2
$\mathrm{E}_8(q)$	q^{120}	$36f$	$\mathrm{G}_2(2)'$	2^5	2
$\mathrm{F}_4(q)$	q^{24}	$11f$	${}^2\mathrm{F}_4(2)'$	2^{11}	5

[1] Im zitierten Artikel enthält Lemma 2.3 einen Tippfehler. Wir verwenden hier die korrekte Version der Formel, wie sie auch im Beweis des zitierten Lemmas zu finden ist.

Lemma 2.25. *[GLS98, 5.3+5.6.1] Sei K eine sporadische Gruppe. Dann sind der 2-Anteil der Ordnung und der 2-Rang wie folgt:*

K	$\lvert K\rvert_2$	$m_2(K)$
M_{11}	2^4	2
M_{12}	2^6	3
M_{22}	2^7	4
M_{23}	2^7	4
M_{24}	2^{10}	6
J_1	2^3	3
J_2	2^7	4
J_3	2^7	4
J_4	2^{21}	11

K	$\lvert K\rvert_2$	$m_2(K)$
Co_3	2^{10}	4
Co_2	2^{18}	10
Co_1	2^{21}	11
HS	2^9	4
McL	2^7	4
Suz	2^{13}	6
He	2^{10}	6
Ly	2^8	4
Ru	2^{14}	6

K	$\lvert K\rvert$	$m_2(K)$
$O'N$	2^9	3
Fi_{22}	2^{17}	10
Fi_{23}	2^{18}	11
Fi'_{24}	2^{21}	11
HN	2^{14}	6
Th	2^{15}	5
B	2^{41}	$12-18$
M	2^{46}	$13-22$

Lemma 2.26. *[GLS98, 5.2.3, 5.2.10] Sei F quasieinfach mit $F/Z(F) \cong A_n$. Dann ist $Z(F) \lesssim \mathbb{Z}_2$ für $n = 5$ oder $n \geq 8$ und $Z(F) \lesssim \mathbb{Z}_6$ für $n \in \{6, 7\}$.*

- *Ist $Z(F) = 1$, so ist $m_2(F) = 2\left[\frac{n}{4}\right]$.*
- *Ist $|Z(F)|$ gerade, so ist $m_2(F) = \left[\frac{n}{8}\right] + 1$.*

Lemma 2.27. *[Tho69, 3.10, 3.11] Sei $K \cong \mathrm{G}_2(q)$, q gerade, $S_0 \in \mathrm{Syl}_2(K)$ und $1 \neq z \in Z(S_0)$, dann gibt es in $O_2(C_K(z))$ genau vier S_0-Konjugiertenklassen elementar abelscher Untergruppen der Ordnung q^3, von denen je zwei unter $C_K(z)$ zueinander konjugiert sind.*

Lemma 2.28. *[Eno70, 2.5] Sei $K \cong \mathrm{G}_2(4)$, $S_0 \in \mathrm{Syl}_2(K)$ und $P := N_K(Z(S_0))$. Dann haben die P-Konjugiertenklassen in $O_2(P)$ genau die Längen $1, 3, 60, 240,\ 120, 360, 240$ und deren entsprechende Vertreter haben die Ordnung $1, 2, 2, 2, 4, 4, 4$.*

Lemma 2.29. *[AS76, 18.2, 18.4, 18.6] Sei $K \cong \mathrm{G}_2(q)$, q gerade und $S_0 \in \mathrm{Syl}_2(K)$. Dann existieren in S_0 genau zwei K-Konjugiertenklassen von Involutionen mit Vertretern z, t. Dabei ist $z \in Z(S_0)$ und $C_K(t)$ ist eine zerfallende Erweiterung einer elementar abelschen Gruppe der Ordnung q^3 mit einer $\mathrm{SL}_2(q)$.*
Sei $K \cong {}^2\mathrm{F}_4(q)$ und $S_0 \in \mathrm{Syl}_2(K)$. Dann existieren in S_0 genau zwei K-Konjugiertenklassen von Involutionen mit Vertretern z, t. Dabei ist $z \in Z(S_0)$ und $C_K(t)/O_2(C_K(t)) \cong \mathrm{SL}_2(q)$.

Lemma 2.30. *[AS76, 19.8, 19.9] Sei $K \cong \mathrm{L}_{2n}(q)$ oder $\mathrm{U}_{2n}(q)$ und σ ein äußerer Automorphismus der Ordnung 2. Dann ist für alle Involutionen $x \in \sigma K$ der Zentralisator $C_K(x)$ isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{S}_{2n}(q)$*

Lemma 2.31. *[GLS98, 4.10.6] Sei K vom Lie-Typ über $\mathbb{F}_r$, r ungerade, und K sei nicht vom Typ $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, {}^2\mathrm{A}_2, {}^3\mathrm{D}_4, \mathrm{G}_2$ oder ${}^2\mathrm{G}_2$. Weiter sei $S_0 \in \mathrm{Syl}_2(K)$. Dann existiert ein $k > 1$ und zu $\mathrm{SL}_2(r)$ isomorphe Untergruppen $A_1, ..., A_k \leq K$, für die gilt:*

- $[A_i, A_j] = 1$ *für* $i \neq j$
- $S_0 \cap A_i \in \mathrm{Syl}_2(A_i)$
- *Es existiert ein $t \in S_0$, welches zwei der A_i miteinander vertauscht*

Lemma 2.32. *[GLS98, 4.10.5] Es sei r eine ungerade Primzahlpotenz. Ist $K \cong \mathrm{L}_2(r)$, $\mathrm{L}_3(r)$, $\mathrm{U}_3(r)$, so ist $m_2(K) = 2$; ist $K \cong \mathrm{G}_2(r), {}^3\mathrm{D}_4(r), {}^2\mathrm{G}_2(r)$, so ist $m_2(K) = 3$.*

3. Identifizierung der großen Untergruppen

Wir setzen von nun an das Setup 1.7 voraus. Es ist K also eine Gruppe vom Lie-Typ über dem Körper $\mathbb{F}_q$, wobei $q = 2^f$ für ein $f \in \mathbb{N}$ ist. Wir setzen $S_0 := S \cap K \in \mathrm{Syl}_2(K)$ und wählen ein Wurzelsystem Σ mit Fundamentalsystem Π für K, das zu dieser Sylowuntergruppe wie im vorherigen Paragraphen beschrieben korrespondiert.
Wir wollen die Gruppe C, also den Normalisator der großen Untergruppe Q, identifizieren. Um Informationen über die Struktur von C zu gewinnen, ist es sinnvoll, zunächst den Teil von C zu identifizieren, der in der uns bekannten Gruppe H liegt. Da $Z(S) \leq C_G(Q) = Z(Q)$ ist, folgt $N_G(Z(S)) \leq C$ und somit ist C eine Parabolische Untergruppe von G. Wir wollen nun zeigen, dass $C \cap K$ auch eine Lie-Parabolische in K ist und auf diesem Wege die Gruppe Q identifizieren.

Zunächst ist es von Interesse, welche Gruppen überhaupt für K in Frage kommen. Nach Voraussetzung hat K mindestens den Lie-Rang 2 und zudem ist $C_K(z)$ für kein $z \in Z(S)^\#$ auflösbar. Folgende Fälle müssen damit nicht betrachtet werden:

Lemma 3.1. *K ist nicht isomorph zu einer der folgenden Gruppen:*

$$\mathrm{L}_2(q),\ \mathrm{L}_3(q),\ \mathrm{U}_3(q),\ {}^2\mathrm{B}_2(q),\ {}^2\mathrm{F}_4(2)',\ \mathrm{S}_4(q)',\ \mathrm{G}_2(2)',\ \mathrm{L}_4(2),\ \mathrm{U}_4(2),\ \mathrm{U}_5(2),\ \Omega_8^+(2).$$

Beweis: Die Gruppen $\mathrm{L}_2(q)$, $\mathrm{U}_3(q)$ und ${}^2\mathrm{B}_2(q)$ haben Lie-Rang 1 und werden nach unserem Setup nicht betrachtet. Für $K \cong {}^2\mathrm{F}_4(2)', \mathrm{G}_2(2)', \mathrm{S}_4(2)'$ sind nach [CCN+85] alle Parabolischen von K auflösbar. In den verbliebenen Gruppen $\mathrm{L}_3(q)$, $\mathrm{S}_4(q)$, $\mathrm{L}_4(2)$, $\mathrm{U}_4(2)$, $\mathrm{U}_5(2)$ und $\Omega_8^+(2)$ existiert ein $x \in Z(S_0)^\#$, das unter allen äußeren Automorphismen von K invariant ist. Damit ist $x \in Z(S)$ und $C_K(x)$ muss in einer Lie-parabolischen Untergruppe liegen, welche unter allen Graphautomorphismen invariant ist und zudem $N_K(Z(S_0))$ enthält. Allerdings ist eine solche Parabolische nach Lemma 2.8 in allen Fällen auflösbar.

□

Wie wir in 2.11 gesehen haben, ist $O_2(N_K(Z(S_0)))$ ein Beispiel für eine große Untergruppe in H und es wird sich zeigen, dass dies zumeist die einzige große Untergruppe in H ist. Dazu setzen wir $R := Z(S_0)$ und es sei $N_K(R) = Q_0 L_0 T$ mit $Q_0 = O_2(N_K(R))$, wobei Q_0 und L_0 wie in Tabelle 2.1 sind und $T \leq N_K(S_0)$ eine Cartan-Untergruppe ist.

Lemma 3.2. *Es ist $Q \leq K$*

Beweis: Sei $g \in Q \backslash K$, dann lässt sich g schreiben als $g = y\delta\varphi\varrho$, wobei $y \in K$ ist und δ ein Diagonal-, φ ein Körper- und ϱ ein Graphautomorphismus. Da gK in H/K gerade

Ordnung hat, ist $\varphi\varrho \neq 1$. Dabei normalisieren δ und φ alle Wurzeluntergruppen von K und ϱ permutiert zwar die Wurzeluntergruppen, lässt dabei aber in jedem Fall R und L_0 fest. Da auch $g \in N_G(R)$ ist, folgt $y \in N_K(R) = Q_0L_0T$ und somit kann y nur innere oder Diagonalautomorphismen auf L_0Q_0/Q_0 induzieren.
In allen Fällen gilt $Z(S) \leq Z(S_0)$ und so folgt $Q_0L_0 \leq C_K(R) \leq C_G(Z(S)) \leq C$, d.h. Q_0L_0 operiert auf Q. Somit ist $N_K(R) \cap Q \leq Q_0$ und es ergibt sich

$$[g, L_0Q_0] \leq Q \cap L_0Q_0 \leq Q_0.$$

Also operiert g trivial auf L_0Q_0/Q_0.
Ist $\varphi \neq 1$, so kann φ nur dann trivial auf L_0 sein, wenn φ die Ordnung 2 hat, K eine getwistete Gruppe ist und L_0 nur von langen Wurzeluntergruppen erzeugt wird – dies tritt im Fall $K \cong \mathrm{U}_4(q)$ auf.
Ist $\varrho \neq 1$, so ist ϱ nur im Fall $K \cong \mathrm{L}_4(q)$ trivial auf L_0 – in allen anderen Fällen operiert ϱ als Graphautomorphismus auf L_0 bzw. einer Komponente von L_0.
Für $K \ncong \mathrm{L}_4(q), \mathrm{U}_4(q)$ operiert also $\delta\varphi\varrho$ nicht trivial als äußerer Automorphismus gerader Ordnung auf L_0Q_0/Q_0. Dann kann aber y nicht nur innere und Diagonalautomorphismen induzieren, ein Widerspruch.
Sei also $K \cong \mathrm{L}_4(q)$ mit $q > 2$ und $\varrho \neq 1$. Zudem können wir $\varphi = 1$ annehmen, d.h. Q induziert keine Körperautomorphismen und somit $Z(Q) = Z(S_0)$, bzw. $N_K(R) \leq C \cap K$. Weiterhin gibt es nach 2.10 keine äußeren Diagonalautomorphismen auf $\mathrm{L}_4(q)$ und es folgt $\delta = 1$. Da $q > 2$ ist, ist die Cartan-Untergruppe nicht trivial, und ϱ operiert nicht trivial auf $N_K(R)/Q_0L_0 \cong \mathbb{F}_q^* \times \mathbb{F}_q^*$. Allerdings ist $[g, N_K(R)] \leq Q \cap N_K(R) \leq Q_0$; ein Widerspruch
Nun sei $K \cong \mathrm{U}_4(q)$, dann gibt es keine äußeren Diagonal- oder Graphautomorphismen und $g = y\varphi$. Da $\varphi^2 = 1$ und R eine lange Wurzeluntergruppe ist, ist $\varphi \in C_G(R)$. Weiter ist $N_K(R)/Q_0L_0 \cong \mathbb{F}_{q^2}^*$ und φ operiert nicht trivial auf dieser Gruppe. Andererseits ist $[N_K(R), g] \leq [N_K(R), y][N_K(R), \varphi]^y \leq C_K(R)$ und da $C_K(R) \leq C_G(Z(Q)) \leq C$ ist, folgt $[C_K(R), g] \leq C_K(R) \cap Q \leq Q_0$. Weil g teilerfremd auf $N_K(R)/L_0Q_0$ operiert, ergibt sich auch hier ein Widerspruch.

□

Damit ist Q auch eine große Untergruppe in K. Das heißt, wir können die Gruppen vom Lie-Typ ausschließen, welche keine große Untergruppen besitzen.

Lemma 3.3. *K ist nicht isomorph zu $\mathrm{S}_{2n}(q)$ oder $\mathrm{F}_4(q)$.*

Beweis: In beiden Fällen besteht das Zentrum einer 2-Sylowgruppe von K aus zwei Wurzeluntergruppen, d.h. $Z(S_0) = \langle X_1, X_2 \rangle$. Da Q groß ist, folgt $N_K(X_i) \leq C \cap K$ für $i \in \{1, 2\}$. Die Normalisatoren dieser beiden Wurzeluntergruppen sind aber jeweils verschiedene maximal Lie-Parabolische in K, mit $\langle N_K(X_1), N_K(X_2) \rangle = K$. Widerspruch.

□

Lemma 3.4. *$C \cap K$ ist eine Lie-Parabolische in K mit $O_2(C \cap K) = Q$. Dabei ist entweder $C \cap K = N_K(R)$ oder $K \cong \mathrm{L}_n(q)$ und $C \cap K$ ist eine maximal Lie-Parabolische. Wohlgemerkt kann auch für $K \cong \mathrm{L}_n(q)$ der erste Fall auftreten.*

Beweis: Es ist $Q \leq K$, d.h. $R = Z(S_0) \leq C_G(Q) = Z(Q)$ und somit $N_K(R) \leq C \cap K$. Also enthält $C \cap K$ eine Borel-Untergruppe von K und ist demnach auch eine Lie-Parabolische. Zunächst sei $K \ncong \mathrm{L}_n(q), {}^2\mathrm{F}_4(q)$, dann ist $N_K(R)$ eine maximal Lie-Parabolische und es folgt $C \cap K = N_K(R)$ sowie $Q \leq Q_0$. Nun ist $R < Q \leq Q_0$ und nach Lemma 2.8 ist Q_0/R ein irreduzibler $\mathbb{F}_q L_0$- bzw. $\mathbb{F}_{q^2} L_0$-Modul. Zudem kann der Modul Q_0/R nur für den Fall $K \cong \mathrm{G}_2(4)$ auch über einem kleineren Körper als in Tabelle 2.1 angegeben geschrieben werden kann. Ist also $K \ncong \mathrm{G}_2(4)$, so existieren nach Lemma 2.17 keine echten L_0-invarianten Untergruppen von Q_0/R und es folgt $Q_0 = Q$.
Sei $K \cong \mathrm{G}_2(4)$ und $R < Q < Q_0$, dann ist $|Q| = 64$. In 2.28 werden die Konjugiertenklassen von 2-Elementen in $N_K(R)$ beschrieben und es zeigt sich, dass $Q^\#$ nur aus Involutionen bestehen kann, weshalb Q elementar abelsch ist. Nach 2.27 kann Q dann aber nicht normal in $N_K(R)$ sein und deshalb muss auch in diesem Fall $Q = Q_0$ gelten
Für $K \cong {}^2\mathrm{F}_4(q)$ verwenden wir die Bezeichnungen und Kommutatorformeln aus 2.4 sowie die Beschreibung aus [GLS98, Example 3.2.5]. Hier korrespondiert $C \cap K$ zur Wurzelmenge $\{\alpha_2, \alpha_3\}$, d.h. $L_0 \cong {}^2\mathrm{B}_2(q)$ und $Q_0 = \langle X_2, ..., X_8 \rangle$. Dabei hat $Z(Q_0) = Y_5$ die Ordnung q und ist ein trivialer L_0-Modul. Weiterhin ist $Z_2(Q_0) = Q_0{}' = Y_3 X_4 Y_5 X_6 Y_7$ elementar abelsch, hat die Ordnung q^5 und $Z_2(Q_0)/Z(Q_0)$ ein vierdimensionaler, irreduzibler L_0-Modul. Schließlich ist $Q_0/Z_2(Q_0)$ ist eine nicht zerfallende Erweiterung eines eindimensionalen trivialen L_0-Moduls mit einem vierdimensionalen, irreduziblen L_0-Modul; dabei ist das volle Urbild des 1-dimensionalen Moduls gerade $C_{Q_0}(Q_0{}') = Q_0{}' X_5$. Zudem existiert eine zweite Lie-Parabolische P_2 in K die zu $\{\alpha_1, \alpha_4\}$ korrespondiert und für welche $Z(O_2(P_2)) = Y_3 Y_5 \leq Q_0{}'$ gilt. Da $P_2 \nleq C \cap K$ ist, muss auch $Z(O_2(P_2)) \nleq Z(Q)$ gelten und es bleibt $Q_0 = Q$ als einzige Möglichkeit.
Sei nun $K \cong \mathrm{L}_n(q)$. Es ist $N_K(R) \leq C \cap K$ und somit gilt wieder $R < Q \leq Q_0$. Allerdings ist hier $Q_0 = Q_1 Q_2$ und $L_0 \cong \mathrm{SL}_{n-2}(q)$, wobei die Q_i, $i \in \{1, 2\}$, elementar abelsch sind und Q_1/R ein natürlicher L_0-Modul sowie Q_2/R der dazu duale Modul ist. Wir können die Berechnungen dabei mit Matrizen der folgenden Form veranschaulichen:

$$\begin{pmatrix} 1 & Q_1 & R \\ & \boxed{L_0} & Q_2 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Ist $Q = Q_0$, so folgt $C \cap K = N_K(R)$. Wenn Q mit Q_1 oder Q_2 übereinstimmt, so ist $C \cap K = N_K(Q_i)$ eine maximale Lie-Parabolische und die Behauptung folgt. Sei also $Q < Q_0$ ein weiterer Normalteiler von $N_K(R)$ und $W := Q/R$. Für $i \in \{1, 2\}$ setzen wir $V_i := Q_i/R$ und wählen $0 \neq v_i \in V_i$ mit $v_1 + v_2 \in W$. Nun ist $C_{L_0}(v_1)$ ein Punktstabilisator auf V_1 und für $n \geq 5$ kann dies kein Punktstabilisator auf V_2 sein, weshalb ein $g \in L_0$ mit $v_1^g = v_1$ und $v_2^g \neq v_2$ existiert. Dann ist aber $0 \neq [v_2, g] = [v_1 + v_2, g] \in W \cap V_2 = \{0\}$, ein Widerspruch. Für $n = 4$ ist $q \geq 4$ und sehen, dass das

Element $g = \text{diag}(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha^{-3}) \in T$ mit $1 \neq \alpha \in \mathbb{F}_q^*$ trivial auf V_1 und nicht trivial auf V_2 operiert, was ebenfalls einen Widerspruch erzeugt.

□

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir die Wurzelmenge zur Parabolischen $C \cap K$ mit J bezeichnen. Mit unseren bisherigen Bezeichnungen ist also $Q = Q_J$, $L = L_J$ und $C \cap K = QLT$.

Lemma 3.5. *$\overline{C}$ ist treu auf $V := Q/Q'$.*

Beweis: Sei $x \in C_C(V)$ ein $2'$-Element. Dann operiert x auch trivial auf einem geeigneten Nebenklassenvertretersystem von Q' in Q. Weil $Q' = \Phi(Q)$ ist, muss x dann auch trivial auf Q sein, aber $C_G(Q) \leq Q$, ein Widerspruch. Also ist $C_C(V)$ eine 2-Gruppe, und da $Q = O_2(C)$ ist, folgt $C_{\overline{C}}(V) = 1$.

□

Damit ist V also ein treuer $\overline{C}$-Modul. In den folgenden Kapiteln wird es für uns von Interesse sein, in welchen Fällen es in $\overline{C}$ eine Vierergruppe gibt, die quadratisch auf V operiert, d.h. wann eine elementar abelsche Gruppe X mit $|X| = 4$ existiert, für die $[V, X, X] = 1$ gilt.

Lemma 3.6. *Ist $K \ncong \Omega_8^-(q)$, ${}^3\mathrm{D}_4(q)$ oder $\mathrm{G}_2(q)$, so existiert in L eine Vierergruppe, die quadratisch auf V operiert. Ist $K \cong \Omega_{2n}^{\pm}(q)$ mit $n \geq 5$, so kann diese Gruppe aus der zu $\Omega_{2n-4}^{\pm}(q)$ isomorphen Komponente gewählt werden.*

Beweis: Wir betrachten zunächst den ungetwisteten Fall und es seien $I \subseteq J$ sowie $\beta_1, \beta_2 \in \Sigma^+$ mit $h_{J'}(\beta_i) = 0$ und $h_I(\beta_i) > h_I(\alpha^*)/2$ für $i \in \{1, 2\}$. Wählen wir $X \leq \langle X_{\beta_1}, X_{\beta_2} \rangle$, so ist $X \leq L$ und mit den Kommutatorformeln gilt:

$$[Q, X] \leq \langle X_\alpha | h_I(\alpha) > h_I(\alpha^*)/2 \rangle \text{ und } [Q, X, X] \leq \langle X_\alpha | h_I(\alpha) > h_I(\alpha^*) \rangle = 1.$$

Es genügt also, in den einzelnen Fallen I, β_1, β_2 anzugeben. Da wir $|X| \geq 4$ benötigen, muss für $q = 2$ immer $\beta_1 \neq \beta_2$ gelten, für $q > 2$ genügt $\beta_1 = \beta_2$.

- Für $K \cong \mathrm{L}_n(q)$ ist $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}\}$ und $J = \Pi \setminus \{\alpha_1\}$ oder $J = \Pi \setminus \{\alpha_1, \alpha_{n-1}\}$.
  - Für $n \geq 5$ setzen wir $I = \{\alpha_2\}$, d.h. $h_I(\alpha^*) = 1$ und wählen $\beta_1 = \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3$.
  - Ist $n = 4$, so ist $q > 2$ und wir setzen $I = \{\alpha_2\}$ und $\beta_1 = \beta_2 = \alpha_2$.
- Für $K \cong \Omega_{2n}^+(2)$ ist $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ mit $J = \Pi \setminus \{\alpha_2\}$.
  - Für $n \geq 5$ setzen wir $I = \{\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}\}$, d.h. $h_I(\alpha^*) = 3$ und wählen $\beta_1 = \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}$, $\beta_2 = \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n$.
  - Ist $n = 4$, so ist $q > 2$ und wir setzen $I = \{\alpha_3\}$ und $\beta_1 = \beta_2 = \alpha_3$.

  Insbesondere liegt X jeweils in der zu $\Omega_{2n-4}^+(q)$ isomorphen Komponente von L.

- Für $K \cong \mathrm{E}_6(q)$ ist $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_6\}$ und $J = \Pi \setminus \{\alpha_2\}$. Wir setzen $I = \{\alpha_1\}$, d.h. $h_I(\alpha^*) = 1$ und wählen $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_3 + ... + \alpha_6$, $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + ... + \alpha_5$
- Für $K \cong \mathrm{E}_7(q)$ ist $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_7\}$ und $J = \Pi \setminus \{\alpha_1\}$. Wir setzen $I = \{\alpha_7\}$, d.h. $h_I(\alpha^*) = 1$, und wählen $\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7$, $\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7$.
- Für $K \cong \mathrm{E}_8(q)$ ist $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_8\}$ und $J = \Pi \setminus \{\alpha_8\}$. Wir setzen $I = \{\alpha_2\}$, d.h. $h_I(\alpha^*) = 3$, und wählen $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7$, $\beta_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7$.

Sei K also getwistet und wir bezeichnen mit τ die entsprechende Symmetrie von Σ. Ähnlich wie oben wählen wir $I \subseteq J$ und $X \leq \langle \overline{X}_\alpha | h_I(\alpha) > h_I(\alpha^*)/2\rangle \cap L$, womit sich $[Q, X, X] = 1$ ergibt.

- Sei $K \cong \mathrm{U}_n(q)$, d.h. $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}\}$ und $J = \{\alpha_2, ..., \alpha_{n-2}\}$.
  - Für $K \cong \mathrm{U}_4(q)$ ist $q \geq 4$ und wir wählen $I = J$ und $X \leq X_{\alpha_2} = \overline{X}_{\alpha_2} \cap K$.
  - Für $K \cong \mathrm{U}_5(q)$ ist $q \geq 4$ und die einzige Wurzelgruppe von L hat Typ 2.2d). Wir wählen $I = J$ und $X \leq Z(X_{\alpha_2+\alpha_3}) = \overline{X}_{\alpha_2+\alpha_3} \cap K$.
  - Für $K \cong \mathrm{U}_n(q)$ mit $n \geq 6$ wählen wir $I = J$ und $\beta = \alpha_2 + ... + \alpha_{n-3}$, dann ist $X_\beta = \overline{X}_\beta \overline{X}_{\beta^\tau} \cap K$ vom Typ 2.2b). Wir sehen $h_J(\beta) = h_J(\beta^\tau) = n - 4$ und $h_J(\alpha^*) = n - 3 < 2 \cdot h_J(\beta)$, weshalb wir $X \leq X_\beta$ geeignet wählen können.
- Für $K \cong \Omega^-_{2n}(q)$, $n \geq 5$, ist $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ und $J = \Pi \setminus \{\alpha_2\}$.
  - Ist $K \cong \Omega^-_{10}(q)$, so enthält L eine zu $\mathrm{U}_4(q)$ isomorphe Untergruppe und V ist Summe zweier zugehöriger natürlicher Moduln. Allerdings haben wir schon im Fall $K \cong \mathrm{U}_6(q)$ gesehen, dass $\mathrm{U}_4(q)$ eine auf dem natürlichen Modul quadratisch operierende Vierergruppe enthält.
  - Für $K \cong \Omega^-_{2n}(q)$ mit $n \geq 6$ wählen wir $I = \{\alpha_3, ..., \alpha_n\}$ sowie $\beta_1 = \alpha_3 + 2\alpha_4 + ... + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n$, $\beta_2 = \alpha_3 + \alpha_4 + 2\alpha_5 ... + 2\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} + \alpha_n$. Dann sind $X_{\beta_i} = \overline{X}_{\beta_i} \cap K$ vom Typ 2.2a) und $h_I(\beta_i) \geq 2n - 8$ sowie $h_I(\alpha^*) = 2n - 6 < 2h_I(\beta_i)$. Die Behauptung ist also für eine beliebige Vierergruppe in $X_{\beta_1} X_{\beta_2}$ erfüllt.

  Insbesondere liegt X jeweils in der zu $\Omega^-_{2n-4}(q)$ isomorphen Komponente von L.
- Im Fall $K \cong {}^2\mathrm{E}_6(q)$ ist $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_6\}$ und $J = \Pi \setminus \{\alpha_2\}$. Sei $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_3 + ... + \alpha_6$ und $\beta_2 = \alpha_3 + ... + \alpha_6$, dann ist X_{β_1} vom Typ 2.2a), X_{β_2} vom Typ 2.2b) und $h_J(\beta_1) = 5$, $h_J(\beta_2) = 4$. Wir wählen nun $1 \neq x_i \in X_{\beta_i}$ für $i \in \{1, 2\}$. Da Involutionen quadratisch operieren, gilt $[V, x_i, x_i] = 1$ und zudem ist $[Q, x_i, x_{2-i}] \leq \langle X_\alpha | h_J(\alpha) \geq 9\rangle$. Aber $h_J(\alpha^*) = 7$ und somit ist $[Q, x_i, x_{2-i}] = 1$, d.h. $X := \langle x_1, x_2\rangle$ ist quadratisch auf V.
- Für $K \cong {}^2\mathrm{F}_4(q)$ verwenden wir die Kommutatorformeln aus 2.4 und die Informationen aus dem Beweis von 3.4. Dabei ist $Y_1 \leq X_1 \in \mathrm{Syl}_2(L)$ und $Q = X_2 ... X_8$. Wir sehen nun $[Q, Y_1] \leq X_3 X_4 X_5 X_6 Y_7$ und $[Q, Y_1, Y_1] \leq Y_3 X_4 Y_5 \leq Q'$, weshalb Y_1 quadratisch auf V operiert.

$\square$

4. Einbettungen

In den folgenden Kapiteln wird der Fall auftreten, dass das Levi-Komplement LQ/Q in einer Komponente von C/Q liegt. Wir werden nun untersuchen, wann LQ/Q überhaupt in einer größeren quasieinfachen Gruppe liegen kann. Dazu nutzen wir insbesondere die $\mathcal{K}_2$-Eigenschaft von G – dass also eine Komponente von C/Q eine bekannte quasieinfache Gruppe sein muss.
Aus Gründen der Lesbarkeit verwenden wir in diesem Paragraphen eine eigenständige Notation, die zwar an die Bezeichnungen aus der Generalvoraussetzung erinnert, aber trotzdem davon unabhängig sein soll.

Setup 4.1. *Sei F eine bekannte quasieinfache Gruppe und $L \leq F$ sei isomorph zu*

$$\mathrm{SL}_n(q),\ \mathrm{SU}_n(q),\ \mathrm{SL}_2(q) \times \Omega^{\pm}_{2n}(q),\ \Omega^{\pm}_{2n}(q),\ \mathrm{E}_7(q) \ \textit{oder}\ {}^2\mathrm{B}_2(q)$$

mit $n \geq 2$ und $q = 2^f$ für ein $f \in \mathbb{N}$. Zudem nehmen wir an, dass L nicht auflösbar ist. Weiter seien $S_0 \in \mathrm{Syl}_2(L)$ und $S \in \mathrm{Syl}_2(F)$ mit $S_0 \leq S$ und $S \leq N_F(L)$. Dabei sei S/S_0 abelsch mit $|S : S_0| \leq 2f$, bzw. $S = S_0$ im Fall $L \cong {}^2\mathrm{B}_2(q)$.

Insbesondere gilt in allen Fällen die Abschätzung $|S : S_0| \leq q$.
Für alle Gruppen $X \leq F$ setzen wir $\overline{X} := XZ(F)/Z(F)$.

Lemma 4.2. *Sei $\overline{F}$ vom Lie-Typ in gerader Charakteristik, dann ist $F = L$.*

Beweis: Da $\overline{LS}$ eine 2-Sylowgruppe von $\overline{F}$ enthält, ist $\overline{LS}$ nach Lemma 2.6 normal in einer Lie-Parabolischen $\overline{P} \leq \overline{F}$. Insbesondere muss $\overline{P}$ also eine quasieinfache, normale Untergruppe enthalten. Aber nach Lemma 2.5 haben alle nicht trivialen Lie-Parabolischen von $\overline{F}$ Charakteristik 2 und es folgt $\overline{P} = \overline{F} = \overline{L}$ sowie $L = F$.

□

Lemma 4.3. *Für $f, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $q := 2^f$ und $(n, q) \notin \{(2,2),(3,2),(4,2),(2,4),(2,8)\}$ gilt $q^{\frac{n(n-1)}{2}+1} < 2^{q^{n-1}-2}$.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass $2^{f(n-1)} - 2 > f\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right)$ ist. Wir verwenden, dass für $x \geq 4$ immer $2^x \geq x^2$ gilt.
Zunächst sei $f = 1$, d.h. wir können $n \geq 5$ annehmen und es ist:

$$2^{n-1} - 2 \geq (n-1)^2 - 2 = \frac{n}{2}(n-1) + \left(\frac{n}{2} - 1\right)(n-1) - 2 > \frac{n}{2}(n-1) + 1.$$

Für $n = 2$ können wir $f \geq 4$ voraussetzen und die Behauptung reduziert sich zu $2^f - 2 > 2f$, was aber offensichtlich korrekt ist. Schlussendlich reicht es also anzunehmen, dass $f \geq 2$ und $n \geq 3$ ist, womit insbesondere $f(n-1) \geq 4$ folgt. Dann ist

$$2^{f(n-1)} - 2 \geq f^2(n-1)^2 - 2 \geq f(n-1)^2 + f(n-1)^2 - 2 > f\frac{n}{2}(n-1) + f.$$

□

Lemma 4.4. *Ist* $\overline{F} \cong A_m$, $m \in \mathbb{N}$, *dann ist* $F = L$ *oder* $(\overline{L}, \overline{F})$ *ist eines der Paare* $(\mathrm{L}_3(2), A_7)$, $(\mathrm{L}_2(4), A_7)$, $(\mathrm{L}_4(2), A_9)$, $(\mathrm{L}_4(2), A_{10})$, $(\mathrm{L}_4(2), A_{11})$.

Beweis: Mit Lemma 2.21 gilt für den minimalen Grad einer Permutationsdarstellung von $\overline{L}$ immer $m \geq p(L/Z(L))$ und wir erhalten einige Abschätzungen für m, die wir im weiteren Verlauf ohne Zitat verwenden werden. Weiterhin benutzen wir 2.24 für den 2-Anteil der Ordnung von Gruppen vom Lie-Typ sowie die Formel $|A_{2^n}|_2 = 2^{2^n-2}$ für die alternierenden Gruppen.
Sei $L \cong \mathrm{SL}_n(q)$ oder $\mathrm{SU}_n(q)$, dann ist $m \geq q^{n-1}$. Nun ist aber $|S| \leq q^{n(n-1)/2} \cdot f \cdot 2 \leq q^{1+n(n-1)/2}$. Andererseits ist $|S| \geq |A_m|_2 \geq |A_{(q^{n-1})}|_2 = 2^{q^{n-1}-2}$ und wir erhalten mit 4.3 einen Widerspruch bis auf die dort angeführten Ausnahmen.

- Die Fälle $L \cong \mathrm{SL}_2(2)$ oder $\mathrm{SU}_3(2)$ treten nicht auf, da L nicht auflösbar sein soll.
- Für $L \cong \mathrm{SL}_3(2)$ ist $|S_0| = 2^3$ und $|S| \leq 2^4$. Da 7 die Ordnung von L teilt, kommt nur $\overline{F} \cong A_7$ in Frage.
- Für $L \cong \mathrm{SL}_4(2) \cong A_8$ ist $|S| \leq 2^7$ und es kann $\overline{F} \cong A_8, A_9, A_{10}, A_{11}$ sein.
- Für $L \cong \mathrm{SU}_4(2)$ ist ebenfalls $|S| \leq 2^7$, aber $m \geq p(L) \geq 16$; ein Widerspruch.
- Für $L \cong \mathrm{SL}_2(4) \cong A_5$ ist $|S| \leq 2^4$ und somit kommt nur $\overline{F} \cong A_5, A_6, A_7$ in Frage. Aber in A_6 wird eine A_5 nicht von einer 2-Sylowgruppe normalisiert und $\overline{F} \cong A_5, A_7$ liefert jeweils die Behauptung.
- Für $L \cong \mathrm{SL}_2(8)$ ist $|S| \leq 2^4$, d.h. $m \leq 7$. Aber $\mathrm{SL}_2(8)$ kann nicht in einer A_7 enthalten sein und somit tritt auch dieser Fall nicht auf.

Ist $L \cong \mathrm{SL}_2(q) \times \Omega^{\pm}_{2n}(q)$ oder $\Omega^{\pm}_{2n}(q)$, so folgt für $n \geq 4$, dass eine Permutationsdarstellung mindestens den Grad $q^{2n-2} \leq m$ haben muss und wir erhalten wieder den Widerspruch mit 4.3, denn es ist

$$|S| \leq q \cdot q^{n(n-1)} \cdot q = (q^2)^{\frac{n(n-1)}{2}+1} < 2^{(q^2)^{n-1}-2} = |A_{(q^{2n-2})}|_2 \leq |A_m|_2 = |S|.$$

Für $n = 3$ ist $L \cong \mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{SL}_4(q)$ oder $\mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{SU}_4(q)$ und somit hat die Permutationsdarstellung von L mindestens den Grad q^3. Zudem ist $|S| \leq |S_0| \cdot q = q^8$, was uns für $q > 2$ den Widerspruch $|S| \geq |A_m|_2 \geq |A_{(q^3)}|_2 = 2^{q^3-2} > q^8$ bringt. Im Fall $q = 2$

ist $2^7 = |\overline{L}|_2 \leq |\overline{F}|_2$ und $|S| \leq 2^8$, was nur für $m \in \{10, 11\}$ und $\overline{S} = \overline{S}_0$ sein kann. Allerdings ist $|Z(S_0)| = 4$, wohingegen in A_{10} und A_{11} das Zentrum einer 2-Sylowgruppe die Ordnung 2 hat. Ist $n = 2$, so ist $L \cong \mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{SL}_2(q)$, $\mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{SL}_2(q)$ oder $\mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{SL}_2(q^2)$, d.h. S_0 und S/S_0 sind abelsch. Dann hat S eine abelsche Kommutatorgruppe und wir sehen, dass dies nur in A_m mit $m \leq 9$ auftreten kann. Demnach ist $|S| \leq 2^6$ und mit 2.26 gilt $m_2(S) \leq 4$. Für $q = 2$ ist $|S| \leq 2^4$, d.h. $m \leq 7$ und es bleibt nur noch der Fall $L \cong \Sigma_3 \times A_5$ zu betrachten. Eine solche Untergruppe existiert in einer A_7 aber nicht. Ist $q \geq 4$, so gilt $m_2(S_0) \leq 4$ nur für $A_5 \times A_5$ und wir sehen, dass diese Gruppe nicht in A_9 eingebettet werden kann.
Für $L \cong {}^2\mathrm{B}_2(q)$ ist $S = S_0$ von der Nilpotenzklasse 2 (vgl. 2.2) und somit muss $m \leq 7$ sein, d.h. $|S| \leq 2^4$. Andererseits ist L für $q = 2$ auflösbar und für $q \geq 8$ ist $|L|_2 \geq 2^6$.
Für $L \cong \mathrm{E}_7(q)$ ist $|S| \leq q^{64}$, wohingegen eine Permutationsdarstellung mindestens den Grad q^{10} haben muss ($\mathrm{E}_7(q)$ enthält eine $\Omega_{12}^+(q)$). Aber es kann natürlich nie $q^{64} \geq |S| \geq |A_{(q^{10})}|_2 = 2^{q^{10}-2}$ sein.

□

Lemma 4.5. *Sei $L \cong \mathrm{SL}_2(q)$ und S/S_0 sei treu auf L oder $L \cong \mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{SL}_2(q^2)$ und S/S_0 sei treu auf $\mathrm{SL}_2(q^2)$. Dann ist $F = L$ oder einer der folgenden Fälle tritt auf:*

a) $L \cong A_5$ und F ist isomorph zu A_7, $3{\cdot}A_7$ oder $\overline{F} \cong \mathrm{L}_2(r)$ für ein ungerades r. Operiert F treu auf einem 8-dimensionalen $\mathbb{F}_2$-Modul, dann ist $\overline{F} \ncong \mathrm{L}_2(r)$ für $r > 5$ und $F \ncong 3{\cdot}A_7$.

b) $L \cong \mathrm{L}_2(8)$ und $\overline{F} \cong {}^2\mathrm{G}_2(3^{2a+1})$ mit $a \geq 2$.

Beweis: Der Fall dass F vom Lie-Typ in gerader Charakteristik oder alternierend ist, tritt nach den vorangegangenen Lemmas nur für $F = L$ oder $\overline{F} \cong A_7$ auf. Da S/S_0 treu auf L operiert, hat $Z(F)$ ungerade Ordnung und mit 2.26 kann für $\overline{F} \cong A_7$ nur $|Z(F)| = 1$ oder 3 sein. Sei $\overline{F}$ nun sporadisch. Für $L \cong \mathrm{SL}_2(q)$ ist $m_2(S) \geq f$ und $|S| \leq 2^f \cdot f$. Für $L \cong \mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{SL}_2(q^2)$ ist $m_2(S) \geq 3f$ und $|S| \leq 2^{3f} \cdot 2f$. Ein Vergleich mit Lemma 2.25 ergibt, dass nur $F \cong J_1$ sein kann. Dann ist $L \cong \Sigma_3 \times A_5$, $\mathrm{SL}_2(8)$, aber in beiden Fällen teilt 3^2 die Ordnung von L und $Z(L) = 1$, wohingegen $|\overline{F}|_3 = 3$ ist.
Sei $\overline{F}$ nun vom Lie-Typ in ungerader Charakteristik. Wir betrachten dafür zunächst Gruppen mit kleinem Lie-Rang aus Lemma 2.32. Ist $\overline{F} \cong \mathrm{L}_2(r)$, so ist S eine Diedergruppe und hat Rang 2. Nun ist S_0 elementar abelsch von der Ordnung q oder q^3 und somit kann nur $L \cong A_5$ auftreten. Für $\overline{F} \cong \mathrm{L}_3(r)$, $\mathrm{U}_3(r)$ ist $m_2(S) = 2$ und $|S| \geq 2^4$, für $\overline{F} \cong \mathrm{G}_2(r), {}^3\mathrm{D}_4(r)$ ist $m_2(S) = 3$ und $|S| \geq 2^6$. Dies kann mit den gleichen Argumenten wie im sporadischen Fall nicht auftreten. Ist $\overline{F} \cong {}^2\mathrm{G}_2(3^{2a+1})$, so ist $|S| = 2^3$ abelsch, d.h. $L \cong \Sigma_3 \times A_5$, $\mathrm{L}_2(8)$. Allerdings ist $|\overline{F}|$ teilerfremd zu 5 und es ergibt sich $L \cong \mathrm{L}_2(8)$. Für $a = 1$ ist zudem ${}^2\mathrm{G}_2(3)' \cong \mathrm{L}_2(8)$.
In den übrigen Fällen besitzt $\overline{F}$ nach Lemma 2.31 mindestens zwei zu $\mathrm{SL}_2(r)$ isomorphe, kommutierende Untergruppen mit 2-Sylowgruppen $T_1, T_2 \leq S$, sowie ein $t \in S$ mit ${T_1}^t = T_2$. Nun sind die T_i Quaternionengruppen mit $T_1 \cap T_2 \leq Z(T_1)$ und somit ist S' nicht abelsch. Aber S_0 und S/S_0 sind hier immer abelsch; ein Widerspruch.

Sei nun $L \cong A_5$ und $F \cong \mathrm{L}_2(r)$ mit $r > 5$ und $F \lesssim \mathrm{GL}_8(2)$. Es ist $|\mathrm{GL}_8(2)| = 2^{28} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 17 \cdot 31 \cdot 127$ und die Primzahlpotenz r muss in dieser Zerlegung auftreten. Weiterhin ist $|(r-1)r(r+1)/2|_2 = |S| \leq 8$, d.h. $r \not\equiv \pm 1 \pmod{16}$ und außerdem muss 5 die Ordnung von F teilen, also $r \equiv 0, 1, -1 \pmod 5$. Damit kommen nur $r = 9$ oder 25 in Frage, aber $\mathrm{L}_2(9) \cong A_6$ wurde bereits in 4.4 ausgeschlossen und $|\mathrm{L}_2(25)|$ teilt nicht $|\mathrm{GL}_8(2)|$. Auch $3{\cdot}A_7$ kann nach [JLPW95] nicht treu auf einem Modul der Ordnung 2^8 operieren.

□

Lemma 4.6. *Sei nun V ein treuer, irreduzibler F-Modul über $\mathbb{F}_2$ und in S_0 existiere eine Vierergruppe, die quadratisch auf V ist. Dann ist $F = L$ oder (L, F) ist eines der folgenden Paare:*

L	$\mathrm{L}_3(2)$	$\mathrm{L}_3(2)$	A_5	A_5	A_8	A_8	A_8
F	A_7	$3{\cdot}A_7$	A_7	$3{\cdot}A_7$	A_9	A_{10}	A_{11}

Beweis: Ist $\overline{F}$ vom Lie-Typ, so folgt $F = L$ mit 4.2. Falls $\overline{F}$ eine alternierende Gruppe ist, so erhalten wir die Fälle aus 4.4. Dabei liefert ein Vergleich des jeweiligen 2-Rangs, dass $Z(F)$ ungerade Ordnung haben muss und es ergeben sich die Fälle aus der Behauptung. Wir verwenden im Folgenden Informationen über maximale Untergruppen aus [CCN+85]. Da F quadratisch auf V operiert, können wir die Klassifikation der quadratischen Moduln für sporadische Gruppen und Gruppen vom Lie-Typ in ungerader Charakteristik aus [MS90a] und [MS90b] zitieren. Demnach ist $\overline{F}$ entweder isomorph zu $\mathrm{L}_2(9) \cong A_6$, was wir in 4.4 bereits ausgeschlossen haben, oder zu einer der folgenden Gruppen:

$\overline{F}$	$\lvert\overline{F}\rvert$	$m_2(\overline{F})$	$\overline{F}$	$\lvert\overline{F}\rvert$	$m_2(\overline{F})$
M_{12}	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$	3	Co_2	$2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	10
M_{22}	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	4	Co_1	$2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$	11
M_{24}	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	6	$\mathrm{U}_3(3)$	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$	2
J_2	$2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$	4	$\mathrm{U}_4(3)$	$2^7 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7$	4
Suz	$2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	6			

Dabei hat $Z(F)$ in allen Fällen ungerade Ordnung. Die 2-Ränge der sporadischen Gruppen stammen aus 2.25, für $\mathrm{U}_3(3) \cong \mathrm{G}_2(2)'$ folgt der 2-Rang mit 2.24 und $\mathrm{U}_4(3)$ hat eine $\mathrm{U}_4(2)$ als Untergruppe, womit der 2-Rang mindestens 4 ist, andererseits ist er nach Lemma 2.20 auch höchstens 4.
Sei $\overline{L} \cong \mathrm{L}_n(q)$. Wir finden zunächst in folgenden Gruppen Primteiler, die bei keiner der für $\overline{F}$ möglichen Gruppen auftreten:

$$31 \big| |\mathrm{L}_5(2)|,\ 17 \big| |\mathrm{L}_4(4)|,\ 73 \big| |\mathrm{L}_3(8)|,\ 17 \big| |\mathrm{L}_3(2^4)|,\ 31 \big| |\mathrm{L}_3(2^5)|,\ 19 \big| |\mathrm{L}_3(2^6)|,\ 127 \big| |\mathrm{L}_3(2^7)|$$

Für $q > 2^7$ ist $|S| > 2^{21}$ und somit bleiben für $\overline{L}$ nur noch die Möglichkeiten $\mathrm{L}_3(2)$, $\mathrm{L}_3(4)$ und $\mathrm{L}_4(2)$ übrig. Dabei scheidet $\mathrm{L}_3(2)$ aus, da dann $|S| \leq 2^4$ gelten müsste, aber in allen Fällen ist $|F|_2 \geq 2^5$. Sei also $\overline{L} \cong \mathrm{L}_3(4)$ oder $\mathrm{L}_4(2)$, d.h. $|\overline{L}| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Dann ist $|S| \leq 2^8$ und somit $\overline{F} \cong M_{12}$, M_{22}, J_2, $\mathrm{U}_4(3)$. Dabei kann M_{12} aus Ordnungsgründen $\overline{L}$

nicht enthalten und die maximalen Untergruppen von J_2 sind allesamt kleiner als 20160. Die Gruppen M_{22} und $\mathrm{U}_4(3)$ enthalten keine $\mathrm{L}_4(2)$ aber jeweils eine $\mathrm{L}_3(4)$ als maximale Untergruppe – allerdings wird diese dann nicht mehr von einer vollen 2-Sylowgruppe normalisiert.
Sei nun $\overline{L} \cong \mathrm{U}_n(q)$. Dann schließen wir analog zu oben folgende Gruppen aus:

$$43\big||\mathrm{U}_7(2)|,\ 17\big||\mathrm{U}_4(4)|,\ 19\big||\mathrm{U}_3(8)|,\ 17\big||\mathrm{U}_3(2^4)|,\ 31\big||\mathrm{U}_3(2^5)|,\ 37\big||\mathrm{U}_3(2^6)|,\ 127\big||\mathrm{U}_3(2^7)|$$

Da $\mathrm{U}_3(2)$ auflösbar ist, bleiben noch vier Fälle zu betrachten. Für $\overline{L} \cong \mathrm{U}_3(4)$ oder $\mathrm{U}_4(2)$ kommt angesichts der Ordnung von S wieder $\overline{F} \cong M_{12}, M_{22}, J_2$ $\mathrm{U}_4(3)$ in Frage. Aus Ordnungsgründen ist die einzig mögliche Kombination, dass $\mathrm{U}_4(2)$ in einer $\mathrm{U}_4(3)$ enthalten ist, aber diese Untergruppe wird dann wieder nicht von einer vollen 2-Sylowgruppe normalisiert. Im Fall $L \cong \mathrm{U}_5(2)$ ist $|S_0| = 2^{10}$ und es kommt nur $\overline{F} \cong M_{24}$ in Frage.Aber dann teilt 3^4 die Ordnung von L, nicht aber die von M_{24}. Für $\overline{L} \cong \mathrm{U}_6(2)$ ist $2^{15} \leq |S| \leq 2^{16}$, was für F nicht auftreten kann.
Sei $L \cong \Omega^{\pm}_{2n}(q)$ oder $\mathrm{SL}_2(q) \times \Omega^{\pm}_{2n}(q)$ mit $n \geq 2$. Den Fall $n \geq 5$ schließen wir durch den Primfaktor 17 in der Ordnung von $\Omega^{\pm}_{10}(2)$ aus. Für $n = 4$ und $q = 2$ ist $2^{13} \leq |S| \leq 2^{14}$, d.h. $\overline{F} \cong Suz$, aber nach [CCN+85] kann Suz keine $\Omega^{\pm}_8(2)$ enthalten. Ist dagegen $q > 2$, so ist $|S_0| \geq 2^{26} > |F|_2$. Im Fall $n = 3$ müssen wir nur noch $L \cong \mathrm{SL}_2(q) \times \Omega^{\pm}_6(q)$ betrachten. Für $q = 2$ kann nur $|S| = |S_0| = 2^7$ sein, weshalb auch $m_2(S) = m_2(S_0) = 3$ sein muss, was aber in der Tabelle nicht auftritt. Für $q \geq 4$ enthält L eine der Gruppen $\mathrm{L}_4(q)$, $\mathrm{U}_4(q)$ die wir oben aufgrund der Primteiler bereits ausgeschlossen hatten. Ist schließlich $n = 2$, so ist S_0 elementar abelsch mit $|S_0| \geq q^2$. Da $|S : S_0| \leq q$ ist, d.h. $|S_0|^{3/2} \geq |S|$, folgt $2^{3m_2(S)/2} \geq |S|$. Dies tritt aber bei keiner der Gruppen in der Tabelle auf.
Sei zuletzt $L \cong {}^2\mathrm{B}_2(q)$. Für $q = 8$ ist $|S| = |S_0| = 2^6$ und es kommt nur $\overline{F} \cong M_{12}$ in Frage, aber dann teilt 13 die Ordnung von L, nicht aber die von F. Für $q = 2^5$, 2^7, 2^9 erhalten wir durch die Primteiler 31, 127 bzw. 73 einen Widerspruch. Ist $q > 2^9$, so wird die Ordnung von S_0 zu groß für $\overline{F}$.

□

5. Operation auf nilpotenten Normalteilern

Wir schließen hier an die Bezeichnungen aus Paragraph 3 an. Insbesondere gelte das Setup 1.7. Wie wir in 3.5 gesehen haben, ist C/Q immer treu auf dem Modul $V := Q/Q'$, wodurch die Größe von C/Q nach oben beschränkt ist. In diesem Paragraphen schreiben wir für alle Untergruppen $X \leq C$ immer $\overline{X} := XQ/Q$.
Im Folgenden wollen wir zeigen, dass $\overline{C}$ Komponenten hat. Das ist gleichbedeutend damit, dass $C_{\overline{C}}(F(\overline{C}))$ nicht nilpotent ist, weshalb wir zeigen werden, dass die Komponenten von L auf $F(\overline{C})$ trivial sind. In Tabelle 5.1 geben wir dazu eine Übersicht der zu untersuchenden Fälle und der jeweiligen Operation von L auf V.

Lemma 5.1. *Sei $q > 2$ und $K \ncong \Omega_8^-(q), \mathrm{G}_2(q), {}^3\mathrm{D}_4(q)$. Dann ist $[E(\overline{L}), F(\overline{C})] = 1$.*

Beweis: Es sei $O_p(\overline{C}) \neq 1$ für eine ungerade Primzahl p und L_1 sei eine Komponente von L mit $[O_p(\overline{C}), \overline{L}_1] \neq 1$. Insbesondere liegt der Kern der Operation von $\overline{L}_1$ auf $O_p(\overline{C})$ in $Z(\overline{L}_1)$, hat also ungerade Ordnung. Nach Voraussetzung ist K ungetwistet oder $K \cong \Omega_{2n}^-(q)$ $(n \geq 5), \mathrm{U}_n(q)$ $(n \geq 4), {}^2\mathrm{E}_6(q), {}^2\mathrm{F}_4(q)$ und wir sehen, dass L_1 in allen Fällen eine Wurzeluntergruppe vom Typ 2.2a), d) oder f) enthält. Sei X das Zentrum einer solchen Wurzelgruppe. Dann ist X abelsch von der Ordnung q, operiert treu auf $O_p(\overline{C})$ und ist nach 2.9 eine TI-Menge in K. Wir wählen nun $x \in X^\#$. Dann operiert X auf $C_Q(x)$. Da $C_Q(x)$ ein Element in X festlässt, gilt $C_Q(x) \leq N_G(X)$. Dann ist $[C_Q(x), X] \leq Q \cap X = 1$ und wir sehen $C_Q(x_1) = C_Q(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X^\#$.
Nach Thompsons Diedergruppenlemma (siehe [GLS94, 24.1]) existiert eine Untergruppe $\overline{P} \leq O_p(\overline{C})$ derart, dass $\overline{X} \cdot \overline{P} \cong \langle x_1, r_1\rangle \times \ldots \times \langle x_f, r_f\rangle$ ist, wobei $x_1, ..., x_f$ Erzeuger von $\overline{X}$ sowie $r_1, ..., r_f \in \overline{P}$ Elemente der Ordnung p sind und $\langle x_i, r_i\rangle$ jeweils eine Diedergruppe der Ordnung $2p$ ist.
Es ist $[r_1, x_2] = 1$ und somit operiert r_1 auf $C_Q(x_2) = C_Q(x_1)$. Sei nun $g \in C_Q(x_1)$. Dann ist $g^{r_1^{-1}} = g^{x_1 r_1 x_1} = (g^{r_1})^{x_1} = g^{r_1}$ und da die Ordnung von r_1 ungerade ist, ist $[r_1, C_Q(x_2)] = 1$. Nach Thompsons $P \times Q$-Lemma (siehe [GLS94, 11.7]) folgt $[r_1, Q] = 1$, was aber im Widerspruch zu $C_G(Q) \leq Q$ steht.

□

Lemma 5.2. *Ist $q = 2$, so ist $[E(\overline{L}), F(\overline{C})] = 1$.*

Beweis: Setze $L_1 := E(L)$. Dann ist $L_1 \cong \Omega_{2n-4}^\pm(2)$ für $K \cong \Omega_{2n}^\pm(2)$ und $L_1 = L$ in allen anderen Fällen. Für eine Primzahl $p > 2$ sei $\overline{P}$ eine $\overline{L}_1$-invariante, elementar abelsche

K	L	$\lvert V\rvert$	$V = Q/Q'$ als L-Modul
$\mathrm{L}_n(q)$, $n \geq 4$	$\mathrm{SL}_{n-1}(q)$	$q^{(n-1)}$	V_{nat}
” , $n \geq 4$	$\mathrm{SL}_{n-2}(q)$	$q^{2(n-2)}$	$V_{\mathrm{nat}} \oplus V_{\mathrm{nat}}^*$
$\mathrm{U}_n(q)$, $n \geq 4$	$\mathrm{SU}_{n-2}(q)$	$q^{2(n-2)}$	V_{nat}
$\Omega_{2n}^+(q)$, $n \geq 5$	$\mathrm{SL}_2(q) \times \Omega_{2(n-2)}^+(q)$	$q^{4(n-2)}$	$V_{\mathrm{nat}} \otimes V_{\mathrm{nat}}$
$\Omega_{2n}^-(q)$, $n \geq 4$	$\mathrm{SL}_2(q) \times \Omega_{2(n-2)}^-(q)$	$q^{4(n-2)}$	$V_{\mathrm{nat}} \otimes V_{\mathrm{nat}}$
$\Omega_8^+(q)$, $q > 2$	$\mathrm{L}_2(q) \times \mathrm{L}_2(q) \times \mathrm{L}_2(q)$	q^8	$V_{\mathrm{nat}} \otimes V_{\mathrm{nat}} \otimes V_{\mathrm{nat}}$
$\mathrm{E}_6(q)$	$\mathrm{SL}_6(q)$	q^{20}	$\Lambda^3(V_{\mathrm{nat}})$
$\mathrm{E}_7(q)$	$\Omega_{12}^+(q)$	q^{32}	halb-spin
$\mathrm{E}_8(q)$	$\mathrm{E}_7(q)$	q^{56}	$V(\lambda_1)$
$\mathrm{G}_2(q)$, $q > 2$	$\mathrm{SL}_2(q)$	q^4	$V_{\mathrm{nat}} \otimes V_{\mathrm{nat}}^{(2)}$
${}^2\mathrm{E}_6(q)$	$\mathrm{SU}_6(q)$	q^{20}	$\Lambda^3(V_{\mathrm{nat}})$
${}^3\mathrm{D}_4(q)$	$\mathrm{SL}_2(q^3)$	q^8	$V_{\mathrm{nat}} \otimes V_{\mathrm{nat}}^{(q)} \otimes V_{\mathrm{nat}}^{(q^2)}$
${}^2\mathrm{F}_4(q)$, $q > 2$	${}^2\mathrm{B}_2(q)$	q^5	$V_{\mathrm{triv}} \cdot V_{\mathrm{nat}}$

Tabelle 5.1.: Struktur des Levi-Komplements und des 2-Radikals von $C \cap K$

p-Untergruppe von $\overline{C}$ mit $[\overline{P}, \overline{L}_1] \neq 1$ und wir nehmen an, dass $\overline{P}$ minimal bezüglich dieser Eigenschaft ist. Setzen wir $V_1 := [V, \overline{P},]$, so ist $C_{V_1}(\overline{P}) = 1$ und $\overline{P}$ ist treu auf V_1. Nach Lemma 2.16 existiert eine Hyperebene $1 \neq \overline{E}_0 < \overline{P}$ mit $1 \neq C_{V_1}(\overline{E}_0) \neq V_1$. Dabei kann $\overline{L}_1$ nicht trivial auf $\overline{E}_0$ sein und aufgrund der Minimalität von $\overline{P}$ ist $\overline{E}_0$ auch nicht $\overline{L}_1$-invariant. Wir setzen $\Gamma = \{\overline{E_0}^g | g \in L_1\}$. Dann ist $|\Gamma| > 1$ und mit 2.16 folgt $|V| \geq |V_1| \geq |\Gamma| \cdot |C_{V_1}(\overline{E_0})|$. Da $\overline{P}$ nicht trivial auf $C_{V_1}(\overline{E}_0)$ ist, ist $|C_{V_1}(\overline{E}_0)| \geq 4$ und somit $|\Gamma| \leq \dim_{\mathbb{F}_2}(V)/2$. Nun operiert $\overline{L}_1$ als nicht triviale Permutationsgruppe auf Γ, d.h. $p(\overline{L}_1/Z(\overline{L}_1)) \leq |\Gamma|$, was mit Lemma 2.21 die folgenden Widersprüche erzeugt:

- Für $K \cong {}^3\mathrm{D}_4(2)$ ist $p(\mathrm{L}_2(8)) \geq 8 > 4 = \dim_{\mathbb{F}_2}(V)/2$
- Für $K \cong \mathrm{E}_6(2), {}^2\mathrm{E}_6(2)$ ist $p(\mathrm{L}_6(2)) \geq 2^5 > 10$ bzw. $p(\mathrm{U}_6(2)) \geq 2^6 > 10$
- Für $K \cong \mathrm{E}_7(2)$ ist $p(\Omega_{12}^+(2)) \geq 2^8 > 16$
- Für $K \cong \mathrm{E}_8(2)$ ist $p(\mathrm{E}_7(2)) \geq p(\mathrm{L}_7(2)) \geq 2^6 > 28$
- Im linearen Fall ist $L_1 \cong \mathrm{SL}_m(2)$ mit $m \geq 3$ und V hat höchstens Dimension $2m$, womit sich der Widerspruch $p(\mathrm{L}_m(2)) \geq 2^{m-1} > m \geq \dim_{\mathbb{F}_2}(V)/2$ ergibt
- Ist $K \cong \mathrm{U}_n(2)$, so ist $n \geq 6$ und $p(\mathrm{U}_{n-2}(2)) \geq 2^{n-2} > n-2 = \dim_{\mathbb{F}_2}(V)/2$
- Für $K \cong \Omega_8^-(2)$ ist $p(\mathrm{L}_2(4)) = 5 > 4 = \dim_{\mathbb{F}_2}(V)/2$
- Für $K \cong \Omega_{10}^\pm(2)$ ist $p(\Omega_6^\pm(2)) \geq 8 > 6 = \dim_{\mathbb{F}_2} V/2$
- Für $K \cong \Omega_{2n}^\pm(2)$ mit $n > 5$ ist $p(\Omega_{2n-4}^\pm(2)) \geq 2^{2n-6} > 2n-4 = \dim V/2$

Insbesondere ist $\overline{L}_1$ also trivial auf den minimalen p-Normalteilern in $\overline{C}$. In den Fällen $K \cong {}^3\mathrm{D}_4(2)$, $\mathrm{E}_6(2)$, ${}^2\mathrm{E}_6(2)$, $\mathrm{E}_7(2)$, $\mathrm{E}_8(2)$ ist V nach 2.8 ein absolut irreduzibler $\mathbb{F}_2L_1$-Modul und mit 2.19 folgt $C_{\overline{C}}(L_1) = 1$. Auch für $K \cong \mathrm{L}_n(2)$ mit $n \geq 5$ ist V entweder absolut irreduzibel oder Summe zweier nicht isomorpher, absolut irreduzibler $\mathbb{F}_2L_1$-Moduln

und wieder ist $C_{\overline{C}}(L_1) = 1$. In diesen Fällen ist demnach $O_p(\overline{C}) = 1$ für alle $p > 2$ und es folgt die Behauptung.
Ist $K \cong \mathrm{U}_n(2)$, so ist V ein absolut irreduzibler $\mathbb{F}_4 L_1$-Modul und somit ist $C_{\overline{C}}(L_1) \lesssim \mathbb{Z}_3$. Für $K \cong \Omega_{2n}^{\pm}(2)$ ist V die Summe zweier isomorpher $\mathbb{F}_2 L_1$-Moduln und es folgt $C_{\overline{C}}(L_1) \lesssim \Sigma_3$. In diesen beiden Fällen ist also $O_p(\overline{C}) = 1$ für alle $p > 3$. Angenommen $[O_3(\overline{C}), \overline{L}_1] \neq 1$, dann ist $|C_{O_3(\overline{P})}(\overline{L}_1)| = 3$ und $|O_3(\overline{C})| > 3$. Wir wählen $\overline{P_1}$ als volles Urbild einer minimalen L_1-invarianten Untergruppe in $O_3(\overline{C})/C_{O_3(\overline{P})}(\overline{L}_1)$. Dann ist $[\overline{P_1}, \overline{L}_1] \neq 1$ und da $\overline{P_1}$ nach obiger Argumentation nicht elementar abelsch sein kann, muss $\overline{P_1}$ extraspeziell der Ordnung 3^{1+2k} für ein $k \in \mathbb{N}$ sein. Weil eine treue Darstellung von $\overline{P_1}$ in teilerfremder Charakteristik mindestens den Grad 3^k hat (vgl. [Asc93, 34.9]), ist $3^k \leq \dim_{\mathbb{F}_2}(V)$. Wir bezeichnen den minimalen Grad einer treuen projektiven Darstellung von L_1 in Charakteristik 3 mit $R_3(L_1)$. Da $L_1/Z(L_1)$ treu auf $\overline{P_1}/Z(\overline{P_1})$ operiert gilt $R_3(L_1) \leq 2k$ und mit Lemma 2.22 ergeben sich die folgenden Widersprüche:

- Im unitären Fall ist $L_1 \cong \mathrm{U}_m(2)$, $m \geq 4$ und $R_3(L_1) \geq 2^{m-2}$, d.h. $k \geq 2^{m-3}$. Es ergibt sich $2m = \dim_{\mathbb{F}_2}(V) \geq 3^k \geq 3^{2^{m-3}}$, was nicht sein kann.
- Für $K \cong \Omega_8^-(2)$ ist $L_1 \cong A_5$ und $4 = R_3(A_5) \leq 2k$. Es folgt der Widerspruch $8 = \dim(V) \geq 3^k \geq 9$.
- Für $K \cong \Omega_{10}^+(2)$ ist $R_3(\Omega_6^+(2)) = 7$, also $k \geq 4$ und $3^k \not\leq \dim V = 12$.
- Für $K \cong \Omega_{10}^-(2)$ ist $L_1 \cong \Omega_6^-(2) \cong \mathrm{S}_4(3)$, d.h. $R_3(L_1) = 4$, aber eine $3^{1+4}.\mathrm{S}_4(3)$ kann nicht treu auf V operieren, da $|\mathrm{GL}_{12}(2)|_3 = 3^8 < 3^5 \cdot |\mathrm{S}_4(3)|_3$ ist.
- Für $K \cong \Omega_{2n}^{\pm}(2)$ mit $n > 5$ ist $R_3(L_1) \geq 2^{2n-9}$ und der Widerspruch erfolgt mit $4n - 8 = \dim(V) \geq 3^k \geq 3^{2^{2n-10}}$.

□

Lemma 5.3. *Sei $q > 2$ und $K \cong \Omega_8^-(q), \mathrm{G}_2(q), {}^3\mathrm{D}_4(q)$. Dann ist $[E(\overline{L}), F(\overline{C})] = 1$.*

Beweis: Sei p eine ungerade Primzahl, $\overline{P} := O_p(\overline{C}) \neq 1$ und L_1 eine Komponente von L mit $[\overline{P}, \overline{L}] \neq 1$. Dann muss $\overline{P}$ eine elementar abelsche Sektion haben, auf der $\overline{L}$ nicht trivial operiert.
Für $K \cong {}^3\mathrm{D}_4(q)$ ist $L \cong \mathrm{SL}_2(2^{3f})$ und nach 2.22 ist $|\overline{P}| \geq p^{2^{3f}-1}$. Andererseits ist $|V| = 2^{8f}$ und mit 2.23 folgt $|\overline{P}| < p^{6f}$. Aber dann muss $2^{3f} - 1 < 6f$ sein; ein Widerspruch.
Im Fall $K \cong \Omega_8^-(q)$ ist $|V| = 2^{8f}$ und $L \cong \mathrm{SL}_2(2^f) \times \mathrm{SL}_2(2^{2f})$. Dabei beinhaltet die zu $\mathrm{SL}_2(2^f)$ isomorphe Komponente eine Wurzeluntergruppe vom Typ 2.2a) und wir sehen mit derselben Argumentation wie in 5.1, dass diese Komponente trivial auf $\overline{P}$ ist. Die Betrachtung der zu $\mathrm{SL}_2(q^2)$ isomorphen Komponente verbinden wir mit dem Fall $K \cong \mathrm{G}_2(q)$. In beiden Fällen können wir von der Konstellation $L \cong \mathrm{SL}_2(2^f)$ und $|V| = 2^{4f}$ ausgehen. Mit 2.22 gilt $|\overline{P}| > p^{2^f-2}$ und nach 2.23 ist $|\overline{P}| \leq p^{3f}$. Damit folgt $2^f - 2 < 3f$, was nur für $f \leq 3$ erfüllt sein kann. Für $f = 2$ ist $|V| = 2^8$ und $L_1 \cong A_5$ sowie $|\mathrm{GL}_8(2)| = 2^{28} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 17 \cdot 31 \cdot 127$. In beiden Fällen existiert in $\overline{C \cap K}$ eine zu $\mathbb{Z}_3$ isomorphe Untergruppe, die mit $\overline{L}$ vertauscht, d.h. $3^2 \cdot 5$ teilt die Ordnung von $\overline{L}C_{\overline{C}}(\overline{L})$. Da $\overline{P}$ nicht zyklisch sein kann, muss $\overline{L}$ treu auf einer Gruppe der Ordnung 3^3

oder 7^2 operieren, was nicht sein kann. Für $f = 3$ ist $|V| = 2^{12}$ und $L \cong \mathrm{SL}_2(8)$. Mit 2.22 folgt $|\overline{P}| \geq p^7$. Nun ist $|\mathrm{GL}_{12}(2)|_3 = 3^8$ und $|\mathrm{GL}_8(2)|_p \leq p^4$ für Primzahlen $p > 3$, d.h. $\overline{P}$ muss eine 3-Gruppe sein. Aber $|L|_3 = 3^2$ und somit ist $|\overline{P}|_3 \leq 3^8/3^2$; ein Widerspruch.

$\square$

Lemma 5.4. *Es ist* $[E(\overline{L}), F(\overline{C})] = 1$ *und* $\overline{C}$ *hat Komponenten.*

Beweis: Besitzt $\overline{C}$ keine Komponenten, so ist $F^*(\overline{C}) = F(\overline{C})$. Mit den vorhergegangenen Resultaten folgt $E(\overline{L}) \leq C_{\overline{C}}(F(\overline{C})) \leq F(\overline{C})$; ein Widerspruch.

$\square$

6. Identifizierung der Komponenten

In diesem Paragraphen wollen wir das folgende Resultat beweisen.

Lemma 6.1. *Es seien die Voraussetzungen aus Setup 1.7 erfüllt. Dann ist* $\overline{L} \trianglelefteq \overline{C}$.

Aus dem vorherigen Paragraphen wissen wir, dass $\overline{C}$ Komponenten besitzt. Wir werden zunächst zeigen, dass $\overline{L}$ im Allgemeinen in einer oder mehrerer dieser Komponenten liegt und mit den Ergebnissen aus Paragraph 4 können wir dann $\overline{L}$ mit diesen Komponenten identifizieren.
Im Folgenden bezeichnen wir mit Λ die Menge der Komponenten von $\overline{C} = C/Q$. Soweit nicht anders erwähnt, meint "irreduzibel" hier immer die Irreduzibilität als $\mathbb{F}_2$-Modul.

Lemma 6.2. *Ist* L_1 *eine Komponente von* L *und* $\overline{L}_1 \leq E(\overline{C})$*, so ist* $\overline{L}_1$ *bereits in einer Komponente von* $\overline{C}$ *enthalten.*

Beweis: Sei $\Lambda_1 = \{\overline{F}_1, ..., \overline{F}_k\} \subseteq \Lambda$ eine $\overline{L}$-invariante Menge von Komponenten mit $\overline{F}_i \cap \overline{L}_1 \leq Z(\overline{L}_1)$ für alle $i \in \{1, ..., k\}$. Setze $\overline{X} := \langle \overline{F}_1, ..., \overline{F}_k \rangle$ und $\overline{T}_i := \overline{F}_i \cap \overline{S} \in \mathrm{Syl}_2(\overline{F}_i)$ für $i \in \{1, ..., k\}$, sowie $\overline{T} := \overline{X} \cap \overline{S} = \overline{T}_1 \cdot ... \cdot \overline{T}_k \in \mathrm{Syl}_2(\overline{X})$.
Angenommen $\overline{L}_1 \leq \overline{X}$, dann normalisiert $\overline{L}_1$ alle $\overline{F}_i$. Weil zudem $\overline{S}$ auf $\overline{L}$ operiert, ist $[\overline{T}_i, \overline{L}_1] \leq \overline{F}_i \cap \overline{L}$, was in einer Komponente von $\overline{L}$ enthalten sein muss. Da $\overline{L}_1 \not\leq \overline{F}_i$ ist, kommutiert diese Komponente mit $\overline{L}_1$ und es folgt $[\overline{T}_i, \overline{L}_1, \overline{L}_1] = 1$. Allerdings ist $\overline{L}_1' = \overline{L}_1$ und mit dem 3-Untergruppen-Lemma erhalten wir $[\overline{T}_i, \overline{L}_1] = 1$. Nun ergibt sich mit $\overline{L}_1 \cap \overline{S} \leq \overline{X} \cap \overline{S} = \overline{T} \leq C_{\overline{C}}(\overline{L}_1)$ ein Widerspruch, denn in einer quasieinfachen Gruppe kann eine 2-Sylowgruppe nicht zentral sein. Für $\Lambda_1 := \Lambda$ und somit $\overline{X} = E(\overline{C})$ ergibt sich die Behauptung.

□

Lemma 6.3. *Es ist immer* $E(\overline{L}) \leq E(\overline{C})$

Beweis: Sei $\overline{L}_1$ eine Komponenten von $\overline{L}$ mit $\overline{L}_1 \not\leq E(\overline{C})$. Dann ist auch $\overline{L}_1 \not\leq F^*(\overline{C})$ und nach 5.4 operiert $\overline{L}_1$ nicht trivial auf $E(\overline{C})$. Da die Komponenten von $\overline{C}$ aber bekannte einfache Gruppen sind und somit eine auflösbare äußere Automorphismengruppe haben, muss $\overline{L}_1/Z(\overline{L}_1)$ als treue Permutationsgruppe auf der Menge Λ operieren. Ist $\overline{F}$ eine Komponente von $\overline{C}$, die eine weitere Komponente von $\overline{L}$ enthält, so wird $\overline{F}$ von $\overline{L}_1$ festgelassen und damit operiert $\overline{L}_1$ auch nicht trivial auf der Menge $\Lambda_1 := \{\overline{F} \in \Lambda | \overline{F} \cap E(\overline{L}) \leq Z(\overline{L})\}$. Mit Lemma 2.21 ergibt sich in allen Fällen die Abschätzung $|\Lambda_1| \geq p(\overline{L}_1) \geq q$.
Setzen wir $\overline{X} := \langle \overline{F} | \overline{F} \in \Lambda_1 \rangle$, so ist wie im Beweis des vorangegangenen Lemmas $\overline{X} \cap E(\overline{L}) \leq Z(\overline{L})$, d.h. $\overline{X} \cap E(\overline{L})$ hat ungerade Ordnung und es ist $|\overline{X}|_2 |E(\overline{L})|_2 \leq |\overline{S}|$. Nun

ist entweder $|E(\overline{L})|_2 = |\overline{S}_0|$ oder $K \cong \Omega_{2n}^{\pm}(2)$ und $|\overline{S} : (\overline{S} \cap E(\overline{L}))| \leq 4$. In jedem Fall gilt also $|\overline{X}|_2 \leq 2q$, was in einer Gruppe mit mindestens q Komponenten nicht sein kann.

□

Wir wollen im weiteren Verlauf die Ergebnisse von Paragraph 4 verwenden, weshalb wir zunächst unsere Situation mit Setup 4.1 vergleichen. Im Allgemeinen ist $\overline{L}$ eine quasieinfache Gruppe und demnach in einer Komponente $\overline{F}$ von $\overline{C}$ enthalten. Dabei ist $\overline{L}$ wie in 4.1 und $\overline{F}$ ist aufgrund der $\mathcal{K}_2$-Annahme eine bekannte quasieinfache Gruppe. Zudem ist $\overline{S}_0 \in \mathrm{Syl}_2(\overline{L})$, wobei S/S_0 als Gruppe äußerer Automorphismen auf K operiert, und es folgt $|S/S_0| \leq 2f$. Im Fall $K \cong {}^2\mathrm{F}_4(q)$ besitzt K keine äußeren Automorphismen gerader Ordnung.
Ist dagegen $K \cong \Omega_{2n}^{\pm}(q)$, so ist $\overline{L}$ nicht quasieinfach. Wählen wir eine Untergruppe $\overline{L}_1 \leq \overline{L}$ wie in 4.1, welche in einer Komponente $\overline{F}$ von $\overline{C}$ enthalten ist, so müssen wir zusätzlich $\overline{S}_0 \cap \overline{F} \leq \overline{L}_1$ gewährleisten, damit die Forderung $|\overline{F} : \overline{L}_1|_2 \leq 2f$ erfüllt ist.

Lemma 6.4. *Ist $K \cong \mathrm{L}_n(q)$, so ist $\overline{L} \trianglelefteq \overline{C}$.*

Beweis: Nach Lemma 3.6 ist L quadratisch auf V. Nach 6.2 und 6.3 ist $\overline{L}$ zudem in einer Komponente $\overline{F} \in \Lambda$ enthalten. Für eine weitere Komponente $\overline{F}_1 \in \Lambda \setminus \{\overline{F}\}$ ist $|\overline{F}_1|_2 \leq |S : S_0| \leq q \leq |\overline{L}|_2 \leq |\overline{F}|_2$ und somit kann es höchstens eine weitere zu $\overline{F}$ isomorphe Komponente in $\overline{C}$ geben. Aber da dann $|\overline{C} : \overline{F}\overline{F}_1|$ ungerade ist, können diese beiden Komponenten nicht zueinander konjugiert sein und es ergibt sich $\overline{F} \trianglelefteq \overline{C}$.
Zunächst sei $C \cap K$ maximal parabolisch, d.h. $L \cong \mathrm{SL}_{n-1}(q)$ und V ist der natürliche Modul. Nach 4.6 kann $\overline{F} \neq \overline{L}$ nur für $\overline{L} \cong \mathrm{SL}_2(4), \mathrm{SL}_3(2), \mathrm{SL}_4(2)$, d.h. $K \cong \mathrm{L}_3(4), \mathrm{L}_4(2), \mathrm{L}_5(2)$ gelten. Die ersten beiden Fälle schließen wir mit 3.1 aus und im dritten Fall ist $\overline{L}$ schon die volle Automorphismengruppe von V, d.h. $\overline{L} = \overline{C}$, woraus die Behauptung folgt.
Sei also $C \cap K$ nicht maximal, d.h. $L \cong \mathrm{SL}_{n-2}(q)$ mit $n \geq 4$. Dabei operiert L auf jedem irreduziblen Untermodul quadratisch. Angenommen $\overline{L} < \overline{F}$, so gibt es mit Lemma 4.6 drei Möglichkeiten für L.
Sei $\overline{L} \cong \mathrm{L}_3(2)$ und $\overline{F} \cong A_7$ oder $3 \cdot A_7$. Dann zeigen Berechnungen mit Matrizen in $K \cong \mathrm{L}_5(2)$, dass L auf V Bahnen der Länge $7, 7, 21$ und 28 hat. Unter $\overline{F}$ vervielfacht sich die Länge einer Bahn jeweils um einen Teiler von $|\overline{F} : \overline{L}| \in \{15, 45\}$ und es zeigt sich, dass alle vier Bahnen unter $\overline{F}$ invariant sein müssen. Somit operiert $\overline{F}$ auch auf den 3-dimensionalen Untermoduln von V, ein Widerspruch.
Sei $\overline{L} \cong \mathrm{L}_4(2) \cong A_8$ und $\overline{F} \cong A_9, A_{10}$ oder A_{11}. Dann hat L auf V Bahnen der Länge $15, 15, 105$ und 120. In $\overline{F}$ existiert eine Untergruppe $A \cong A_9$ und unter A vervielfacht sich die Länge jeder Bahn um den Faktor 1, 3 oder 9. Wir sehen wieder, dass A alle Bahnen festlässt und erhalten einen Widerspruch, da A_9 keine 4-dimensionale Darstellung über $\mathbb{F}_2$ besitzt.
Sei $\overline{L} \cong A_5$ und $\overline{F} \cong A_7$ oder $3 \cdot A_7$. Dies tritt für $K \cong \mathrm{L}_4(4)$ auf und es ist $N_K(Q)/Q \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times A_5$. Nun existiert eine Involution $\overline{x} \in (\overline{S} \cap \overline{F}) \setminus \overline{L}$, welche einen nicht trivialen äußeren Automorphismus auf $\overline{L}$ induziert. Schreiben wir $x = y\delta\varphi\varrho$ wie in 2.10, dann ist $y \in S_0$ und kann nur innere Automorphismen auf $\overline{L}$ induzieren. Weiterhin ist $\delta = 1$

und weil ein Graphautomorphismus von K trivial auf L operiert, folgt $\varphi \neq 1$. Nun ist $N_K(Q)/LQ \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ und φ operiert fixpunktfrei auf dieser Gruppe, wohingegen ϱ Fixpunkte besitzt. Es existiert also eine 3-Gruppe $\overline{R} \leq \overline{N_K(Q)}$, mit $[\overline{R}, \overline{x}] \neq 1$ und $[\overline{R}, \overline{L}] = 1$. Da $\overline{R}$ aber auf $\overline{F}/Z(\overline{F}) \cong A_7$ operiert und darin eine A_5 festlässt, muss $[\overline{R}, \overline{F}] = 1$ gelten – ein Widerspruch.

□

Lemma 6.5. *Ist $K \cong \mathrm{U}_n(q), \mathrm{E}_6(q), \mathrm{E}_7(q), \mathrm{E}_8(q), {}^2\mathrm{E}_6(q)$ oder ${}^2\mathrm{F}_4(q)$, so ist $\overline{L} \trianglelefteq \overline{C}$.*

Beweis: Auch hier existiert in jedem Fall eine Komponente $\overline{F}$, die $\overline{L}$ enthält. Weiter gilt jeweils $|S : S_0| \leq q \leq |\overline{L}|_2$ und es ergibt sich analog zum vorherigen Lemma $\overline{F} \trianglelefteq \overline{C}$. Nach Lemma 3.6 ist $\overline{L}$ quadratisch auf V und mit 4.6 folgt $\overline{F} = \overline{L}$.

□

Lemma 6.6. *Ist $K \cong \Omega^{\pm}_{2n}(q)$ mit $n \geq 5$, so ist $\overline{L} \trianglelefteq \overline{C}$.*

Beweis: Es ist $L = L_1 \times L_2$, mit $L_1 \cong \mathrm{SL}_2(q)$, $L_2 \cong \Omega^{\pm}_{2n-4}(q)$ und $V \cong V_1 \otimes V_2$, wobei V_1 ein natürlicher 2-dimensionaler Modul für L_1 und V_2 ein natürlicher $(2n-4)$-dimensionaler Modul für L_2 ist. Nach Lemma 6.3 ist $\overline{L}_2 \leq \overline{F}$ für eine Komponente $\overline{F} \in \Lambda$ und nun ist entweder $\overline{L}_1 \leq \overline{F}$ oder $|\overline{L}_1 \cap \overline{F}|_2 = 1$. In jedem Fall sind die Voraussetzungen aus 4.1 erfüllt und da $\overline{L}_2$ quadratisch auf V ist, folgt mit 4.6 entweder $\overline{F} = \overline{L}_2$ oder $\overline{L}_2 \cong \Omega^+_6(2) \cong \mathrm{SL}_4(2)$ und $\overline{F} \cong A_9, A_{10}$ oder A_{11}. Aber nach [JLPW95] hat A_9 keine 6- oder 12-dimensionale irreduzible Darstellung über $\mathbb{F}_2$ und somit ist $\overline{L}_2 = \overline{F}$. Da es aus Ordnungsgründen keine weitere zu $\overline{L}_2$ isomorphe Komponente mehr geben kann, ist $\overline{L}_2 \trianglelefteq \overline{C}$. Nun ist $\overline{L}_1 \leq C_{\overline{C}}(\overline{L}_2)$ und mit Lemma 2.19 gilt $C_{\overline{C}}(\overline{L}_2) \lesssim \mathrm{GL}_2(q)$. Insbesondere ist $\overline{L}_1$ also charakteristisch in $C_{\overline{C}}(\overline{L}_2) \trianglelefteq \overline{C}$ und es folgt die Behauptung.

□

Lemma 6.7. *Ist $K \cong \Omega^+_8(q)$ mit $q > 2$, so ist $E(\overline{C}) = \overline{L}$.*

Beweis: Es ist $L = L_1 \times L_2 \times L_3$ und $V = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$, mit $L_i \cong \mathrm{SL}_2(q)$ und V_i jeweils ein zugehöriger natürlicher 2-dimensionaler Modul für $i \in \{1, 2, 3\}$. Da eine 2-Sylowgruppe einer $\mathrm{SL}_2(q)$ quadratisch auf dem natürlichen Modul operiert, enthalten alle Komponenten von $\overline{L}$ eine auf V quadratische Vierergruppe.
Sei $\Lambda = \{\overline{F}_1, ..., \overline{F}_k\}$ mit $k \in \mathbb{N}$. Dann können nach Lemma 6.2 und Lemma 6.3 folgende Fälle auftreten:
a) $\overline{L}_1, \overline{L}_2, \overline{L}_3 \leq \overline{F}_1$
Dieser Fall lässt sich mit 4.6 ausschließen.
b) $\overline{L}_1, \overline{L}_2 \leq \overline{F}_1$, $\overline{L}_3 \leq \overline{F}_2$
Dann ist $|\overline{F}_1 : \overline{L}_1\overline{L}_2|_2 \leq 2f$ und wir erhalten erneut mit Lemma 4.6 einen Widerspruch.
c) $\overline{L}_1 \leq \overline{F}_1$, $\overline{L}_2 \leq \overline{F}_2$, $\overline{L}_3 \leq \overline{F}_3$
Es ist $\overline{F}_1 \leq C_{\overline{C}}(\overline{L}_2\overline{L}_3)$ und nach Lemma 2.19 ist somit $\overline{F}_1 \lesssim \mathrm{GL}_2(q)$, d.h. $\overline{F}_1 = \overline{L}_1$. Analog folgt $\overline{L}_2 = \overline{F}_2$ sowie $\overline{L}_3 = \overline{F}_3$. Da $\overline{L}$ irreduzibel auf V operiert, ist $C_{\overline{C}}(\overline{L}) = 1$ und es kann keine weiteren Komponenten geben, womit die Behauptung folgt.

□

Lemma 6.8. *Ist* $K \cong \Omega_8^-(q)$*, so ist* $\overline{L} \trianglelefteq \overline{C}$.

Beweis: Es ist $L = L_1 \times L_2$, mit $L_1 \cong \mathrm{L}_2(q)$, $L_2 \cong \Omega_4^-(q) \cong \mathrm{SL}_2(q^2)$ und $V = V_1 \otimes V_2$, wobei V_1 der natürliche 2-dimensionale Modul für L_1 und V_2 der 4-dimensionale orthogonale $\mathbb{F}_q$-Modul für L_2 ist. Die Gruppe S/S_0 operiert dabei treu auf $\overline{L}_2$. Da $\overline{L}_2$ nicht auflösbar ist, gilt $\overline{L}_2 \leq \overline{F}$ für eine Komponente $\overline{F} \in \Lambda$. Ist $\overline{L}_1 \leq \overline{F}$, so ergibt sich ein Widerspruch mit 4.5. Da $\overline{L}_1$ keine echten Normalteiler gerader Ordnung besitzt, ist $|\overline{L}_1 \cap \overline{F}|_2 = 1$, d.h. $|\overline{F} : \overline{L}_2| \leq 2f$ und wir können erneut 4.5 anwenden.
Sei $\overline{L}_2 \neq \overline{F}$. Da $\overline{L}_2 \not\cong \mathrm{SL}_2(8)$ ist, folgt $\overline{L}_2 \cong A_5$ und weil V die Ordnung 2^8 hat, muss $F \cong A_7$ sein. Nach [JLPW95] besitzt A_7 keine 8-dimensionale irreduzible Darstellung über $\mathbb{F}_2$ und somit operiert $\overline{F}$ auf einem 4-dimensionalen $\mathbb{F}_2\overline{L}_2$-Modul V_1. Insbesondere lässt sich $\overline{F}$ in $X := \mathrm{Aut}(V_1) \cong A_8$ einbetten. Nun besitzt X eine natürliche Permutationsdarstellung auf 8 Punkten und $\overline{L}_2$ hat auf diesen Punkten eine Bahn der Länge 5 oder 6. Da $\overline{L}_2$ absolut irreduzibel auf V_1 operiert, ist $C_X(\overline{L}_2) = 1$ und somit muss $\overline{L}_2$ eine Bahn der Länge 6 haben. Eine solche A_5 kann aber nicht von einer 2-Sylowgruppe einer A_7 in X normalisiert werden – ein Widerspruch.
Es folgt also $\overline{L}_2 = \overline{F}$. Dann ist $|\overline{S} : (\overline{S} \cap \overline{F})| \leq q^2 = |L_2|_2$ und es kann höchstens noch eine weitere zu L_2 isomorphe Komponente geben. Diese beiden Komponenten können aber unter $\overline{C}$ nicht mehr vertauscht werden und es folgt $\overline{L}_2 \trianglelefteq \overline{C}$. Mit Lemma 2.19 ist $\overline{L}_1 \leq C_{\overline{C}}(\overline{L}_2) \lesssim \mathrm{GL}_2(q)$ und somit $\overline{L}_1 \trianglelefteq \overline{C}$.

□

Lemma 6.9. *Sei* $K \cong \mathrm{G}_2(q)$ *oder* $K \cong {}^3\mathrm{D}_4(q)$*. Dann ist* $\overline{L} \trianglelefteq \overline{C}$.

Beweis: Hier ist $L \cong \mathrm{SL}_2(q)$ bzw. $\mathrm{SL}_2(q^3)$ und S/S_0 induziert nur Körperautomorphismen, ist also treu auf $\overline{L}$. Nach 6.2 ist $\overline{L} \leq \overline{F}$ für eine Komponente $\overline{F}$ in $\overline{C}$. In beiden Fällen ist $|S : S_0| \leq f < |L|_2$, weshalb es keine weitere zu $\overline{L}$ isomorphe Komponente geben kann. Es folgt jeweils $\overline{F} \trianglelefteq \overline{C}$.
Angenommen $\overline{L} \neq \overline{F}$. Nach 4.5 können nun zwei Fälle auftreten und zunächst sei $\overline{L} \cong \mathrm{L}_2(8)$ und $\overline{F} \cong {}^2\mathrm{G}_2(r)$ mit $r \geq 27$. Dies kann für $K \cong {}^3\mathrm{D}_4(2)$ oder $K \cong \mathrm{G}_2(8)$ auftreten und somit ist $|V| \leq 2^{12}$. Allerdings hat eine minimale Darstellung von ${}^2\mathrm{G}_2(r)$ in Charakteristik 2 nach [KL90, 5.3.9] mindestens den Grad $r(r-1)$, ein Widerspruch.
Sei nun $K \cong \mathrm{G}_2(4)$, $\overline{L} \cong \mathrm{SL}_2(4)$ und $\overline{F} \cong A_7$. In diesem Fall ist aber $N_K(Q)/QL \cong \mathbb{Z}_3$ und ein Körperautomorphismus von K operiert treu auf dieser Gruppe. Damit erhalten wir den Widerspruch analog zum letzten Absatz des Beweises von Lemma 6.4.

□

Das Lemma 6.1 folgt nun als Zusammenfassung der vorangegangenen Lemmas.

7. Der Normalisator einer großen Untergruppe

Wir wollen nun den ersten Teil des Beweises abschließen und zeigen, dass C in H enthalten ist. Aus dem vorherigen Paragraphen wissen wir, dass QL normal in C ist. Da $S_0 \in \mathrm{Syl}_2(QL)$ ist, folgt mit Frattini $C = N_C(S_0)QL$. Wenn nun ein Element $x \in C \setminus H$ existiert, so können wir annehmen, dass dieses in $N_C(S_0)$ enthalten ist. Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass H die G-Fusion einer in S_0 charakteristischen Untergruppe Y kontrolliert – ein Resultat, das uns im letzten Paragraphen dieser Arbeit ebenfalls von Nutzen sein wird.
Wir werden in diesem und dem folgenden Paragraphen die zu $C \cap K$ korrespondierende Menge von Fundamentalwurzeln mit J bezeichnen.

Lemma 7.1. *Sei Q speziell und $g \in Q \setminus Z(Q)$. Dann ist $[g,Q] = Z(Q)$.*

Beweis: Es ist $Q = \langle X_\alpha | \alpha \in \Sigma^+, h_{J'}(\alpha) > 0\rangle$ und $Z(Q) = \overline{X}_{\alpha^*} \cap K$. Wir können g schreiben als $g = x_{\beta_1}(t_1) \cdot ... \cdot x_{\beta_k}(t_k)$ für geeignete $\beta_i \in \Sigma^+$ mit $h_{J'}(\beta_i) > 0$ und $t_i \in \overline{\mathbb{F}}_2$. Da $g \in Q \setminus Z(Q)$ ist, existiert ein $h \in Q$ mit $[g,h] \neq 1$, d.h. $[g,h] = x_{\alpha^*}(r)$ für ein $1 \neq r \in \mathbb{F}_q$. Wir schreiben $h = x_{\gamma_1}(s_1) \cdot ... \cdot x_{\gamma_k}(s_k)$ und sehen anhand der Multiplikativität der Kommutatorformeln aus 2.3:

$$[g, x_{\gamma_1}(u \cdot s_1) \cdot ... \cdot x_{\gamma_k}(u \cdot s_k)] = x_{\alpha^*}(u \cdot r) \text{ für alle } u \in \mathbb{F}_q.$$

Da angesichts der Struktur der Wurzeluntergruppen (vgl. 2.2) auch $x_{\gamma_1}(u{\cdot}s_1){\cdot}...{\cdot}x_{\gamma_k}(u{\cdot}s_k)$ immer in Q liegt, ist $[g,Q] \geq \{x_{\alpha^*}(t) | t \in \mathbb{F}_q\} = Z(Q)$.

□

Lemma 7.2. *Sei $K \cong \mathrm{L}_n(q)$ oder $\mathrm{U}_n(q)$ und Q speziell. Dann hat eine maximal abelsche Untergruppe von Q höchstens die Ordnung q^{n-1}.*

Beweis: Sei T eine maximale Untergruppe von $Z(Q)$. Dann ist $\phi(Q/T) = (Q/T)' = Z(Q)/T$ von der Ordnung 2. Ist $x \in Q \setminus Z(Q)$, so ist nach 7.1 $[x,Q] = Z(Q)$ und es folgt $xT \notin Z(Q/T)$. Damit ist $Z(Q/T) = Z(Q)/T$ und Q/T ist extraspeziell von der Ordnung $2^{1+2f(n-2)}$. Nun haben die maximal abelschen Untergruppen von Q/T die Ordnung $2^{1+f(n-2)}$ (vgl. [Hup67, III 13.7e)]) und es folgt die Behauptung.

□

Lemma 7.3. *Sei $K \cong \mathrm{L}_n(q)$ oder $\mathrm{U}_n(q)$ und Q speziell. Dann wird Q von zwei abelschen Untergruppen der Ordnung q^{n-1} erzeugt.*

Beweis: Da $Z(\mathrm{SL}_n(q))$ und $Z(\mathrm{SU}_n(q))$ ungerade Ordnung haben, können wir die Elemente von Q direkt mit den Matrizen aus $\mathrm{SL}_n(q)$ bzw. $\mathrm{SU}_n(q)$ identifizieren.
Wir nehmen an, dass S_0 mit der Gruppe der strikten oberen Dreiecksmatrizen korrespondiert und bezeichnen mit E_n die n-dimensionale Einheitsmatrix sowie mit e_{ij} eine $(n \times n)$-Matrix, deren einziger Eintrag eine 1 an der Stelle (i,j) ist. Für $z(\alpha) := E_n + \alpha \cdot e_{1n}$ ist dann $\langle z(\alpha) | \alpha \in \mathbb{F}_q \rangle = Z(S_0) = Z(Q)$. Weiter korrespondiert Q zu den Matrizen in K von der Form:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & ... & * & * \\ & 1 & 0 & ... & 0 & * \\ & & 1 & & & * \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 & * \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Für $K \cong \mathrm{L}_n(q)$ wählen wir $Q_1 := \langle E_n + \alpha \cdot e_{1i} | i \in \{2, ..., n\}, \alpha \in \mathbb{F}_q \rangle$ sowie $Q_2 := \langle E_n + \alpha \cdot e_{in} | i \in \{1, ..., n-1\}, \alpha \in \mathbb{F}_q \rangle$, mit welchen die Behauptung erfüllt wird.
Sei nun $K \cong \mathrm{U}_n(q)$. Setze $d_i(\alpha) := E_n + \alpha \cdot e_{1i} + \alpha \cdot e_{(n+1-i)n} + \delta_{i,n+1-i} \cdot \tau \cdot e_{1n}$ für $\tau \in \mathbb{F}_{q^2}$ mit $\tau^q + \tau = \alpha^2$ und $i \in \{2, .., n-1\}$. Wir rechnen nach, dass für $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_q$ und $i, j \in \{2, ..., n-1\}$ stets $d_i(\alpha) \in \mathrm{SU}_n(q)$ sowie $[d_i(\alpha), d_j(\beta)] = 1$ ist. Setzen wir $Q_1 := \langle d_2(\alpha), ..., d_{n-1}(\alpha), z(\alpha) | \alpha \in \mathbb{F}_q \rangle$, so ist $Q_1 \leq Q$ abelsch und von der Ordnung q^{n-1}. Für ein $\gamma \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$ und $h := \mathrm{diag}(\gamma, 1, ..., 1, \gamma^{-q}) \in \mathrm{GU}_n(q)$ setzen wir $Q_2 := {Q_1}^h$. Dann erfüllen Q_1 und Q_2 die Behauptung.

□

Lemma 7.4. *Sei $K \cong \mathrm{L}_n(q)$ oder $\mathrm{U}_n(q)$ mit $n \geq 4$ und $Y := Z(C_{S_0}(Z_2(S_0)))$. Dann kontrolliert K die G-Fusion in Y und es ist $N_G(Y)^\circ = N_K(Y)^\circ$ und $\langle N_K(Y)^\circ, LQ \rangle = K$.*

Beweis: Die Elemente von K identifizieren wir mit geeigneten Vertretern der Nebenklassen des Zentrums in $\mathrm{SL}_n(q)$, bzw. $\mathrm{SU}_n(q)$. So können wir S_0 mit strikten oberen Dreiecksmatrizen identifizieren. Nach 2.7 ist $Z_2(S_0) = \langle \overline{X}_\alpha | \alpha \in \{\alpha^*, \alpha^* - \alpha_1, \alpha_* - \alpha_{n-1}\} \rangle \cap K$ und die Kommutatorformeln zeigen, dass $N_K(Z_2(S_0))$ zur Fundamentalwurzelmenge $\Pi \setminus \{\alpha_2, \alpha_{n-2}\}$ korrespondiert. Wieder mit 2.7 ergibt sich, dass $Y = \langle \overline{X}_\alpha | \alpha \in \{\alpha^*, \alpha^* - \alpha_1, \alpha_* - \alpha_{n-1}, \alpha^* - \alpha_1 - \alpha_{n-1}\} \rangle \cap K$ ist und somit besteht Y aus denjenigen Matrizen in K, welche die folgende Form aufweisen:

$$\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & * & * \\ & 1 & ... & * & * \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}$$

Wir wählen daraus nun die Involutionen

$$z := \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 1 \\ & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}} \text{ und } x := \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 1 & 0 \\ & 1 & ... & 0 & 1 \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}$$

Um die Operation von $N_K(Y)$ auf Y zu beschreiben, wählen wir für $A, B \in \mathrm{GL}_2(q^2)$, $D \in \mathrm{GL}_{n-4}(q^2)$ die folgende Bezeichnung:

$$M_n(A, D, B) := \begin{pmatrix} \boxed{A} & & \\ & \boxed{D} & \\ & & \boxed{B} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(q^2)$$

Im linearen Fall setzen wir

$$U_1 := \{\overline{M_n(A, E_{n-4}, B)} | A, B \in \mathrm{SL}_2(q)\} \text{ und}$$

$$U_2 := \{\overline{\mathrm{diag}(1, a, 1, ..., 1, a^{-1}, 1)} | a \in \mathbb{F}_q^*\}.$$

Dann ist $U := U_1U_2 \leq K$ treu auf Y und $U \cong (\mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{SL}_2(q)) \rtimes \mathbb{Z}_{q-1}$. Es ist $C_U(x) = C_{U_1}(x)$ und eine Matrix $\overline{M_n(A, E_{n-4}, B)} \in U_1$ vertauscht genau dann mit x, wenn $A = B$ ist. Also folgt $C_U(x) \cong \mathrm{SL}_2(q)$ und $|x^U| = q^4 - q^3 - q^2 + q$. Nun ist U_2 trivial auf z und $|C_{U_1}(z)| = q^2(q-1)$, womit sich $|z^U| = q^3 + q^2 - q - 1$ ergibt.
Im unitären Fall setzen wir

$$U_1 := \{\overline{M_n(A, E_{n-4}, B)} | A \in \mathrm{SL}_2(q^2), B = A^q\} \text{ und}$$

$$U_2 := \{\overline{\mathrm{diag}(1, a, 1, ..., 1, a^{-1}, 1)} | a \in \mathbb{F}_q^*\}.$$

Dann ist $U := U_1U_2 \leq K$ treu auf Y und $U \cong \mathrm{SL}_2(q^2) \rtimes \mathbb{Z}_{q-1}$. Wir sehen $C_U(x) = C_{U_1}(x) = \{\overline{M_n(A, E_{n-4}, B)} | A \in \mathrm{SL}_2(q^2), B = A^q, A = B\} \cong \mathrm{SL}_2(q)$, womit $|x^U| = q^4 - q^3 + q^2 - q$ folgt. Die Gruppe U_2 ist trivial auf z und $|C_{U_1}(z)| = q^2(q+1)$, so dass sich $|z^U| = q^3 - q^2 + q - 1$ ergibt.
In beiden Fällen gibt es in Y also genau zwei U-Konjugiertenklassen von Involutionen mit Vertretern x und z. Wir wollen zu zeigen, dass x und z nicht in G konjugiert sein können.

Wir nehmen also an, dass ein $g \in G$ existiert, mit $z^g = x$. Zunächst untersuchen wir den Zentralisator $C_K(x)$. Es ist $T := O_2(C_K(x))$ eine spezielle Gruppe der Ordnung $q^{4+4(n-4)}$ mit $Z(T) = Y$. Wir setzen $M_1 := \{\overline{M_n(A, E_{n-4}, A)} | A \in \mathrm{SL}_2(q)\}$. Im linearen Fall sei $M_2 := \{\overline{M_n(E_2, A, E_2)} | A \in \mathrm{SL}_{n-4}(q)\}$ und im unitären Fall $M_2 := \{\overline{M_n(E_2, A, E_2)} | A \in \mathrm{SU}_{n-4}(q)\}$.

$$\begin{pmatrix} M_1 & T & Z(T) \\ & M_2 & T \\ & & M_1 \end{pmatrix}$$

Für beide Fälle ist $M := M_1 \times M_2$ eine Untergruppe von $C_K(x)$, die treu auf $T/Z(T)$ operiert. Im linearen Fall ist $T/Z(T)$ Summe zweier irreduzibler $\mathbb{F}_q M$-Moduln (das Tensorprodukt des natürlichen $\mathrm{SL}_2(q)$-Moduls mit dem natürlichen, bzw. dualen $\mathrm{SL}_{n-4}(q)$-Modul). Im unitären Fall ist $T/Z(T)$ das Tensorprodukt der beiden natürlichen Moduln. Da sich die natürlichen Moduln nie über einem Teilkörper von $\mathbb{F}_q$ bzw. $\mathbb{F}_{q^2}$ darstellen lassen, kann eine M-invariante Untergruppe von $T/Z(T)$ nur die Ordnung 1, $q^{2(n-4)}$ oder $q^{4(n-4)}$ haben.
Wir setzen nun $Q_x := O_2(N_K(Z(S_0)))^g$. Ist Q speziell, so ist $Q_x = Q^g$ und damit $Q_x \trianglelefteq C_G(x)$. Falls Q dagegen abelsch ist, so ist $Q_x = O_2(C_{QL}(z))^g$ und aus $QL \trianglelefteq C$ folgt ebenfalls $Q_x \trianglelefteq C_G(x)$. Insbesondere ist Q_x speziell von der Ordnung $q^{1+2(n-2)}$. Wir wollen im Weiteren $T_0 := T \cap Q_x \trianglelefteq C_K(x)$ untersuchen.

Zunächst sei $n \geq 5$.
Es ist $|S_0 : C_{S_0}(x)| = q$ sowie $|S : S_0| \leq q$ und es folgt

$$|Q_x : T_0| = |Q_x : (Q_x \cap C_{S_0}(x))| = |Q_x C_{S_0}(x) : C_{S_0}(x)| \leq |S : C_{S_0}(x)| \leq q^2.$$

Es ergibt sich also $|T_0| \geq q^{2n-5}$ und somit ist $T_0 Z(T)/Z(T) \neq 1$. Angenommen $T_0 Z(T) = T$, dann ist $T_0' = T' = Z(T)$ und somit $T_0 = T$, was aber $|T_0| \leq |Q_x| < |T|$ widerspricht. Also ist $T_0 Z(T)/Z(T)$ eine nicht triviale, M-invariante Untergruppe von $T/Z(T)$.
Zunächst untersuchen wir den unitären Fall. Ist $n \geq 7$, so ist $T/Z(T)$ ein irreduzibler $\mathbb{F}_{q^2} M$-Modul der sich über keinem Teilkörper darstellen lässt und wir erhalten einen Widerspruch. Für $n \in \{5, 6\}$ dagegen ist M_2 trivial bzw. isomorph zu $\mathrm{SL}_2(q)$ und $T/Z(T)$ ist als $\mathbb{F}_q M$-Modul nicht irreduzibel, sondern besitzt irreduzible Untermoduln der Ordnung $q^{2(n-4)}$. Sei T_0 also Urbild eines dieser Moduln. Nun existiert ein $t \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$ mit $t^{q+1} = 1$ und wir betrachten $d := \mathrm{diag}(t, t, 1, .., 1, t, t) \in \mathrm{PGU}_n(q)$. Da d auf $T/Z(T)$ eine Skalarmultiplikation mit t induziert, ist $T/Z(T)$ als $\mathbb{F}_q M\langle d\rangle$-Modul irreduzibel und insbesondere ist $T_0^d \neq T_0$, d.h. $T_0^d T_0 = T$. Weil d trivial auf $Z(T) = T'$ ist, folgt $T_0{}' = (T_0^d)'$ und damit $T' \leq T_0{}'(T_0^d)'[T_0, T_0^d] \leq T_0$. So ergibt sich in diesem Fall als Zwischenergebnis $|T_0| = q^{2n-4}$.
Im linearen Fall wird T von zwei abelschen M-invarianten Untergruppen der Ordnung q^{2n-4} erzeugt und insbesondere gilt für mindestens eine solche Untergruppe T_1 auch $T_0 T_1 = T$. Dann ist aber $Z(T) = [T, T] \leq [T_0, T_0][T_0, T_1] \leq T_0$ und somit ebenfalls $|T_0| = q^{2n-4}$.
Nun besitzt Q_x nach Lemma 7.3 in beiden Fällen zwei elementar abelsche Untergruppen R_1 und R_2 der Ordnung q^{n-1}, welche nach Lemma 7.2 maximal abelsch in Q_x sind. Demnach ist $|(R_i \cap T_0)Z(T)| \leq q^{n-1}$ und da $|Q_x : T_0| = q$ ist, folgt $|R_i \cap T_0| \geq q^{n-2}$.

Also ist $|R_i \cap Z(T)| \geq q^3$ und somit $|R_1 \cap R_2| \geq q^2$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $R_1 \cap R_2 = Z(Q_x)$ die Ordnung q hat.

Sei nun $n = 4$.
Hier ist Q_x speziell mit Ordnung q^5 und nach 3.1 muss $q > 2$ sein. Es ist $T = Y$ elementar abelsch von der Ordnung q^4 und $T \cap Q_x$ hat nach 7.2 höchstens die Ordnung q^3, d.h. $|TQ_x| \geq q^6$. Andererseits ist $TQ_x/Q_x \cap MQ_x/Q_x = 1$ und da $|S| \leq q^6 \cdot 2 \cdot f \leq q^7$ ist, folgt $|TQ_x| = q^6$. Zudem muss dann $|S| = q^7$ sein, also $2 \cdot f = q$, was nur für $q = 4$ auftreten kann. Da M nur trivial auf TQ_x/Q_x operieren kann, muss S/Q elementar abelsch sein. Aber das ist falsch, da durch S/S_0 ein Körperautomorphismus induziert wird, der nicht trivial auf S_0/Q operiert (vgl. Beweis zu Lemma 3.2) – ein Widerspruch.

Damit kontrolliert K die G-Fusion in Y, d.h. $N_K(Y)$ ist transitiv auf $z^{N_G(Y)}$ und somit ist $N_G(Y) \leq C_G(z)N_K(Y)$. Nun ist $z \in Z(S_0) \leq Z(Q)$ und Q ist groß, d.h. $C_G(z) \leq N_G(Q)$. Damit folgt $N_G(Y)^\circ = \langle Q^{N_G(Y)} \rangle = \langle Q^{N_K(Y)} \rangle = N_K(Y)^\circ$.
Ist Q speziell, so korrespondiert $C \cap K$ zur Wurzelmenge $\Pi \setminus \{\alpha_1, \alpha_{n-1}\}$ und es ist $X_{\alpha_1}, X_{\alpha_{n-1}} \leq Q$. Setzen wir nun $L_1 := \langle X_\alpha | \alpha \in \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_{n-1}\}\rangle$, dann ist $L_1 \leq N_K(Y)^\circ$ und $\langle L, L_1 \rangle \geq \langle X_{\pm\alpha_i} | \alpha_i \in \Pi \rangle = K$. Ist Q dagegen abelsch, so korrespondiert $C \cap K$ o.B.d.A. zu $\Pi \setminus \{\alpha_1\}$ und $X_{\alpha_1} \leq Q$. Wir setzen $L_1 = \langle X_{\alpha_1}, X_{-\alpha_1} \rangle$ und erhalten analog $L_1 \leq N_K(Y)^\circ$ und $\langle L, L_1 \rangle = K$.

□

Lemma 7.5. *Sei $K \cong \Omega^{\pm}_{2n}(q)$, $\mathrm{E}_6(q)$, $\mathrm{E}_7(q)$, $\mathrm{E}_8(q)$, ${}^2\mathrm{E}_6(q)$, $\mathrm{G}_2(q)$, ${}^3\mathrm{D}_4(q)$ oder ${}^2\mathrm{F}_4(q)$ und setze $Y := Z_2(S_0)$. Dann existiert eine Untergruppe $L_1 \leq N_K(Y)^\circ$, mit $L_1 \cong \mathrm{SL}_2(q)$, für die Y ein natürlicher Modul ist. Insbesondere kontrolliert K die G-Fusion in Y. Weiterhin gilt $K = \langle L, L_1 \rangle$ und $N_K(Y)^\circ = N_G(Y)^\circ$.*

Beweis: Ist K wie nach Voraussetzung, aber nicht isomorph zu ${}^2\mathrm{F}_4(q)$, so zeigen die Kommutatorformeln und Lemma 2.7, dass Y von zwei Wurzeluntergruppen erzeugt wird. Es ist $Y = \langle X_{\alpha^*}, X_{\alpha^*-\alpha_i} \rangle$, wobei α_i wie folgt ist:

$\Omega^{\pm}_{2n}(q)$	$\mathrm{E}_6(q)$, ${}^2\mathrm{E}_6(q)$	$\mathrm{E}_7(q)$	$\mathrm{E}_8(q)$	$\mathrm{G}_2(q)$	${}^3\mathrm{D}_4(q)$
α_2	α_2	α_1	α_8	α_2	α_2

Da α_i invariant unter etwaigen Symmetrien des Dynkin-Diagramms ist, sind die Wurzelgruppen lang und es ist jeweils $|Y| = q^2$. Somit lässt sich $L_1 := \langle X_{\alpha_i}, X_{-\alpha_i} \rangle \cong \mathrm{SL}_2(q)$ wählen und es gilt $L_1 \leq N_K(Y)$. Zudem ist Y ein natürlicher L_1-Modul. Dann ist L_1 aber transitiv auf $Y^\#$, d.h. K kontrolliert die G-Fusion in Y und wie im vorherigen Lemma sehen wir $N_K(Y)^\circ = N_G(Y)^\circ$. Weiterhin korrespondiert die Parabolische $C \cap K$ in allen Fällen zur Wurzelmenge $\Pi \setminus \{\alpha_i\}$, womit $\langle L, L_1 \rangle \geq \langle X_{\pm\alpha_i} | \alpha_i \in \Pi \rangle = K$ folgt. Da $Q \cap L_1 \neq 1$ ist, ist $L_1 \leq N_K(Y)^\circ$.
Für $K \cong {}^2\mathrm{F}_4(q)$ zeigen die Kommutatorformeln aus 2.4, dass $Z_2(S_0) = \langle Y_5, Y_3 \rangle$ ist und wir können $L := \langle X_8, X_{16} \rangle \cong \mathrm{SL}_2(q)$ setzen, um analog die Behauptung zu erhalten.

□

Beweis von Hauptsatz 1: Es ist $S_0 \in \mathrm{Syl}_2(LQ)$ und $LQ \trianglelefteq C$, womit nach Frattini $C = N_G(S_0)LQ$ folgt. Sei $x \in C \setminus H$. Dann können wir annehmen, dass $x \in N_G(S_0)$ ist. Wir setzen nun im linearen und im unitären Fall $Y := Z(C_{S_0}(Z_2(S_0)))$ sowie in allen anderen Fällen $Y := Z_2(S_0)$ und wenden die beiden vorhergehenden Lemmas an. Dabei ist jeweils $x \in N_G(Y)$ und somit operiert x auf $N_G(Y)^\circ = N_K(Y)^\circ$, d.h. x normalisiert $\langle N_K(Y)^\circ, LQ\rangle = K$. Aber es ist $N_G(K) = H$, ein Widerspruch.

$\square$

8. Parabolische Untergruppen

Wir wollen schlussendlich auch den zweiten Hauptsatz beweisen, d.h. $H = \langle \mathcal{L}(S) \rangle$. Dafür benötigen wir aber den Struktursatz, welcher zu unserem Setup 1.7 noch eine zusätzliche Voraussetzung verlangt und für den wir später annehmen werden, dass G lokale Charakteristik 2 besitzt. Abgesehen von der Verwendung des Struktursatzes kommen wir aber komplett ohne diese stärkere Voraussetzung aus – das heißt, wenn der Struktursatz ohne die Verwendung lokaler Charakteristik bewiesen werden kann, so wird diese Annahme auch in der vorliegenden Arbeit obsolet.
Zunächst behalten wir aber unser bisheriges Setup 1.7 bei und verwenden zusätzlich, dass $N_G(Q) \leq H$ gilt.

Mit den bereits bewiesenen Resultaten können wir uns der Betrachtung eines Sonderfalls entledigen:

Lemma 8.1. *Sei $K \cong \mathrm{L}_n(q)$ und Q abelsch. Dann ist auch $Q_0 := O_2(N_K(Z(S_0)))$ eine große Untergruppe von G.*

Beweis: Es ist $Q \leq Q_0$ und daher $C_G(Q_0) \leq C_G(Q) \leq Q \leq Q_0$. Sei nun $1 \neq A \leq Z(Q_0)$. Dann ist auch $A \leq Q$ und somit $N_G(A) \leq N_G(Q) \leq H$. Allerdings ist Q_0 nach Lemma 2.11 groß in H, d.h. es gilt $N_G(A) = N_H(A) \leq N_H(Q_0) \leq N_G(Q_0)$ und so folgt die Behauptung.

□

Für den weiteren Verlauf können wir daher annehmen, dass im linearen Fall $Q = O_2(N_K(Z(S_0)))$ gilt und Q somit bis auf den Fall $K \cong {}^2\mathrm{F}_4(q)$ immer speziell ist.

Lemma 8.2. *Sei $P \in \mathcal{L}(S)$ und $V \leq S$ mit $1 \neq V \trianglelefteq P$. Wenn K die G-Fusion in V kontrolliert, dann ist $P \leq H$.*

Beweis: Sei $g \in P$ und wähle $1 \neq v \in Z(S) \cap V$. Dann ist $v^g = v^k$ für ein $k \in K$. Weiter ist $gk^{-1} \in C_G(v)$ und da $v \in Z(S) \leq Z(Q)$ und Q groß ist, folgt $gk^{-1} \in C_G(v) \leq N_G(Q) \leq H$.

□

Lemma 8.3. *Sei $K \cong \mathrm{L}_n(q)$ oder $\mathrm{U}_n(q)$ und bezeichne mit Z_1 das volle Urbild von $Z(S_0/Q)$. Dann gilt ${Z_1}' = Z_2(S_0)$.*

Beweis: Die Gruppe K korrespondiert zum Wurzelsystem $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}\}$. Das Levi-Komplement in $N_K(Q) = N_K(Z(S_0))$ korrespondiert zum Wurzelsystem $J =$

$\{\alpha_2, ..., \alpha_{n-2}\}$ dessen Wurzel mit maximaler Höhe $\alpha^+ := \alpha_2 + ... + \alpha_{n-2}$ ist. Das volle Urbild zu $Z(S_0/Q)$ besteht also aus den Wurzeluntergruppen in Q sowie $\overline{X}_{\alpha^+} \cap K$. Die Kommutatorformeln zeigen nun $Z_1{}' = \langle \overline{X}_\beta | \beta \in \{\alpha^*, \alpha_1 + ... + \alpha_{n-2}, \alpha_2 + ... + \alpha_{n-1}\}\rangle \cap K$ und mit 2.7 folgt die Behauptung.

□

Lemma 8.4. *Sei $K \cong \Omega^\pm_{2n}(q)$, $\mathrm{E}_6(q)$, ${}^2\mathrm{E}_6(q)$, $\mathrm{E}_7(q)$, $\mathrm{E}_8(q)$ oder ${}^3\mathrm{D}_4(q)$. Dann ist $Z_4(S_0) \leq Q$.*

Beweis: Wir setzen $l := h(\alpha^*)$. Dann wird $Z_4(S_0)$ nach 2.7 von den Wurzelgruppen X_γ mit $l \geq h(\gamma) \geq l - 3$ erzeugt. In allen Fällen ist $J = \Pi \setminus \{\alpha_i\}$ für ein geeignetes α_i und $Q = \langle X_\beta | \beta \in \Sigma^+, h_{\{\alpha_i\}}(\beta) > 0\rangle$. Wir listen nun in der folgenden Tabelle jeweils die zu $Z_4(S_0)$ gehörenden Wurzeln in einer verkürzten Schreibweise auf. (Zum Beispiel entspricht 12311 hier der Wurzel $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$, etc.)

K	i	$h(\gamma) = l$	$h(\gamma) = l-1$	$h(\gamma) = l-2$	$h(\gamma) = l-3$
$\Omega^\pm_8(q)$,${}^3\mathrm{D}_4(q)$	2	1211	1111	0111, 1101, 1110	1100, 0110, 0101
$\Omega^\pm_{10}(q)$	3	12211	11211	11111, 01211	11110, 11101, 01111
$\Omega^\pm_{12}(q)$	4	122211	112211	111211, 012211	111111, 0112211
$\Omega^\pm_{2n}(q)$, $n \geq 7$	n-2	12..211	1122..211	1112..211, 0122..211	11112..211, 0112..211
$\mathrm{E}_6(q)$, ${}^2\mathrm{E}_6(q)$	2	122321	112321	112221	111221, 112211
$\mathrm{E}_7(q)$	1	2234321	1234321	1224321	1223321
$\mathrm{E}_8(q)$	8	23465432	23465431	23465421	23465321

Wir sehen, dass für alle angegebenen Wurzeln immer $h_{\{\alpha_i\}}(\gamma) > 0$ gilt, das heißt $Z_4(S_0) \leq Q$.

□

Lemma 8.5. *Es sei $Y \leq S$ und Q operiere nicht trivial auf Y. Zudem sei $N_G(Y) \not\leq N_G(Q)$. Dann ist $Z(Q) \leq Y$.*

Beweis: Angenommen $Y \cap Q \leq Z(Q)$. Dann ist $[Y, Q] \leq Z(Q)$ und Y operiert trivial auf $Q/Z(Q)$. Aber S/Q ist treu auf $Q/Z(Q)$ und somit ist $Y \leq Q$. Dann ist $Y = Y \cap Q \leq Z(Q)$ und $N_G(Y) \leq N_G(Q)$, ein Widerspruch.
Also existiert ein $x \in (Y \cap Q) \setminus Z(Q)$ und mit 7.1 folgt $Z(Q) = [x, Q] \leq [Y, Q] \leq Y$.

□

Wir haben nun die Vorbetrachtungen abgeschlossen und wollen zunächst zwei Fälle bearbeiten, für welche wir eine andere Herangehensweise wählen müssen. Insbesondere wird hier der Struktursatz nicht verwendet und die Voraussetzung der lokalen Charakteristik ist somit nicht nötig.

Lemma 8.6. *Sei $K \cong \mathrm{G}_2(q)$ oder ${}^2\mathrm{F}_4(q)$. Dann kontrolliert K die G-Fusion in S_0.*

Beweis: Wir verwenden hier die Informationen aus 2.29 und demnach gibt es in K jeweils nur zwei Konjugiertenklassen von Involutionen. Seien also $z, t \in S_0$ Involutionen

mit $z \in Z(S_0)$ und $z^g = t$ für ein $g \in G$, wobei wir annehmen, dass z und t nicht in K konjugiert sind. Nun ist $C_G(t) \cong C_G(z)$ und wir setzen $Q_t := Q^g$ sowie $L_t := L^g$. Nach 6.1 ist $Q_t L_t \trianglelefteq C_G(t)$.
Zunächst sei $K \cong \mathrm{G}_2(q)$. Dann ist $L_t \cong \mathrm{SL}_2(q)$ und $q \geq 4$. Weiterhin ist $C_K(t) = L_0 Q_0$ mit $L_0 \cong \mathrm{SL}_2(q)$ und $Q_0 = O_2(C_K(t))$ elementar abelsch von der Ordnung q^3. Da $|S/Q| < q^2$ ist, kann es in $C_G(t)/Q_t$ keine zwei disjunkten $\mathrm{SL}_2(q)$ geben und somit ist $L_0 Q_t = L_t Q_t$. Angenommen $Q_0 \not\leq L_t Q_t$, dann induziert Q_0 analog zum Beweis von Lemma 3.2 einen nicht trivialen Körperautomorphismus auf $L_t Q_t / Q_t$. Dies kann aber nicht auftreten, da $[Q_0, L_t Q_t] \leq Q_0 \cap L_0 Q_t \leq Q_t$ ist und so muss $Q_0 \leq Q_t$ sein. Damit ist ${Q_0}^{L_t} \subseteq Q_0^{L_0 Q_t} = {Q_0}^{Q_t}$, was im Widerspruch zu Lemma 2.27 steht.
Sei $K \cong {}^2\mathrm{F}_4(q)$, dann ist $L_t \cong {}^2\mathrm{B}_2(q)$ und $C_K(t)/O_2(C_K(t)) \cong \mathrm{SL}_2(q)$. Allerdings enthält ${}^2\mathrm{B}_2(q)$ keine zu $\mathrm{SL}_2(q)$ isomorphe Untergruppe und da $|S : Q| = |{}^2\mathrm{B}_2(q)|_2$ ist, ergibt sich auch hier ein Widerspruch.

$\square$

Lemma 8.7. *Sei $K \cong \mathrm{G}_2(q)$ oder ${}^2\mathrm{F}_4(q)$. Dann ist $\langle \mathcal{L}(S) \rangle \leq H$.*

Beweis: Es sei $P \in \mathcal{L}(S)$ mit $P \not\leq H$ und demnach $N_G(Y_P) \not\leq N_G(Q)$. Wir betrachten zunächst $K \cong \mathrm{G}_2(q)$, das heißt Q ist speziell. Da Q groß ist und $N_G(Y_P) \not\leq N_G(Q)$, folgt $Y_P \not\leq C_G(Q)$ und somit operiert Q nicht trivial auf Y_P. Nach 8.5 gilt also $Z(Q) \leq Y_P$. Nun induzieren die Elemente von $S \setminus S_0$ Körperautomorphismen auf K, welche nicht trivial auf der Wurzelgruppe $Z(Q)$ sind, d.h. $Y_P \leq C_S(Z(S_0)) = S_0$. Ist $K \cong {}^2\mathrm{F}_4(q)$, so haben alle äußeren Automorphismen ungerade Ordnung, d.h. $S = S_0$ und es folgt ebenfalls $Y_P \leq S_0$.
Also kontrolliert K nach 8.6 in beiden Fällen die G-Fusion in Y_P und mit Lemma 8.2 ergibt sich $P \leq H$; ein Widerspruch.

$\square$

Für die verbliebenen Fälle benötigen wir den Struktursatz, weshalb wir im weiteren Verlauf für G lokale Charakteristik 2 voraussetzen müssen. Diese Eigenschaft werden wir aber nicht direkt, sondern nur zum Zitieren verwenden. Weiterhin haben wir im vorhergehenden Lemma bereits zwei Fälle bearbeitet und durch 8.1 wurde der Fall, dass Q abelsch ist, ausgeschlossen. Dies alles fassen wir in einer aktualisierten Voraussetzung zusammen, die fortan gelten soll.

Setup 8.8. *Es gelte Setup 1.7 und zudem habe G lokale Charakteristik 2. Weiterhin sei K nicht isomorph zu $\mathrm{G}_2(q)$ oder ${}^2\mathrm{F}_4(q)$ und Q sei speziell.*

Lemma 8.9. *Sei $N \in \mathcal{L}(S)$ mit $N \not\leq H$. Dann existiert auch ein $P \in \mathcal{L}(S)$ mit $P \not\leq H$, wobei $\overline{P^\circ} := P^\circ / C_{P^\circ}(Y_P)$ und $V := [Y_P, P^\circ]$ wie in einem der folgenden Fälle sind:*

a) $\overline{P^\circ} \cong \mathrm{SL}_2(r)$ *und V ist der natürliche Modul.*

b) Es existieren Untergruppen $L_1, L_2 \leq P^\circ$ mit $\overline{L}_1 \times \overline{L}_2 \trianglelefteq \overline{P^\circ}$ und $\overline{L}_i \cong \mathrm{SL}_2(r)$ sowie $V = V_1 \times V_2$, wobei $V_i := [V, L_i]$ jeweils ein natürlicher L_i-Modul ist. Weiterhin existiert ein $d \in Q$ mit ${L_1}^d = L_2$.

c) Es existieren Untergruppen $L_1, L_2 \leq P^\circ$ *mit* $\overline{P^\circ} = \overline{L}_1 \times \overline{L}_2$ *und* $\overline{L}_i \cong \mathrm{SL}_2(r)$. *Weiter ist* $V \cong V_1 \otimes V_2$*, wobei* V_i *jeweils ein natürlicher* L_i*-Modul ist.*

d) $\overline{P^\circ} \cong \mathrm{SL}_2(r^2) \cong \Omega_4^-(r)$ *und* V *ist der natürliche* $\Omega_4^-(r)$*-Modul.*

e) $\overline{P^\circ} \cong \mathrm{SL}_2(r^2).2 \lesssim \Gamma\mathrm{GL}_2(r^2)$ *und* V *ist der natürliche Modul.*

Beweis: Sei $N \in \mathcal{L}(S)$ mit $N \not\leq H$. Es ist $N^\circ \trianglelefteq N$ und $Z(S \cap N^\circ) \leq Z(Q)$, womit auch $N_G(S \cap N^\circ) \leq N_G(Q) \leq H$ folgt. Nach Frattini ist $N = N^\circ(N \cap H)$ und somit $N^\circ \not\leq H$. Da $O_2(N) \neq 1$ ist und G parabolische Charakteristik 2 besitzt, liegt auch jede parabolische Untergruppe von N in $\mathcal{L}(S)$. Wir wollen eine 2-minimale Untergruppe $P \leq N$ mit $P \not\leq H$ finden. Sei $N^\circ S$ zunächst nicht 2-minimal. Da $N^\circ S = \langle Q^{N^\circ}, S\rangle = \langle S^{N^\circ S}\rangle$ ist, muss es nach Definition 1.2 zwei maximale Untergruppen $N_1, N_2 \leq N^\circ S$ geben, die beide S enthalten. Weil N_1 und N_2 zusammen $N^\circ S$ erzeugen, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $N_1 \not\leq H$ gilt. Dann erfüllt N_1 aber die gleichen Voraussetzungen wie N und ist echt kleiner. Per Induktion müssen wir also nur noch den Fall betrachten, dass $N^\circ S$ bereits 2-minimal ist. Wir setzen $P := N^\circ S$. Dann ist $P \in \mathcal{L}(S)$ und $P \not\leq H$. Nun ist $P \not\leq N_G(Q)$ und somit ist P wie im Struktursatz 1.6 beschrieben. Wir können also die einzelnen Fälle (1)-(9) sukzessive untersuchen. Dabei nutzen wir die Bezeichnung $T := S \cap P^\circ$ und $V = [Y_P, P^\circ]$, wobei nach Lemma 8.5 $Z(Q) \leq V$ gilt.
Für den Fall dass $\overline{P^\circ}$ eine Gruppe vom Lie-Typ in definierender Charakteristik 2 ist, sei Γ die Menge der maximal Parabolischen in $\overline{P^\circ}$. Dann ist $|\Gamma|$ gleich dem Lie-Rang von $\overline{P^\circ}$. Da S auf Γ als Permutationsgruppe der Ordnung höchstens zwei operiert und es in P höchstens eine maximal parabolische Untergruppe geben kann, hat $\overline{P^\circ}$ entweder Lie-Rang 1 oder der Lie-Rang ist 2 und S induziert einen Graphautomorphismus auf $\overline{P^\circ}$. Insbesondere kann damit **Fall (7)** nicht auftreten.
Fall (1) und (6): Es ist $\overline{P^\circ} \cong \mathrm{SL}_3(r), \mathrm{Sp}_4(r)'$ und V ist ein natürlicher Modul, oder $\overline{P^\circ} \cong \mathrm{SL}_3(r^2)/\langle \lambda \cdot id | \lambda^3 = \lambda^{r+1} = 1\rangle$ und V ist ein irreduzibler $\mathbb{F}_r$-Untermodul von $W \otimes W^{(r)}$, wobei W ein natürlicher Modul ist. Zudem induziert S einen Graphautomorphismus auf $\overline{P^\circ}$ und vertauscht die maximal Parabolischen. Nun ist $V_0 := C_V(S \cap P^\circ)$ in allen Fällen ein 1-dimensionaler Unterraum von V und der Stabilisator $N_{\overline{P^\circ}}(V_0)$ ist eine maximal Parabolische in $\overline{P^\circ}$. Da V_0 aber S-invariant ist, muss auch $N_{\overline{P^\circ}}(V_0)$ invariant unter S sein – ein Widerspruch.
Fall (2): Es existieren Untergruppen $L_1, ..., L_t \leq P^\circ$ mit $\overline{L}_1 \times ... \times \overline{L}_t \trianglelefteq \overline{P^\circ}$, $\overline{L}_i \cong \mathrm{SL}_2(r)$ sowie $V = V_1 \times ... \times V_t$ wobei $V_i = [V, L_i]$ jeweils ein natürlicher $\overline{L}_i$-Modul ist. Die Gruppe Q ist dabei transitiv auf den $\overline{L}_i$ und da $Z(Q) \leq V$ ist, ist $\overline{Q}$ abelsch.
Ist $t = 1$, so muss $\overline{P^\circ}$ nach Lemma 2.19 treu auf $\overline{L}_1$ operieren, d.h. $\overline{P^\circ}/\overline{L}_1$ induziert Körperautomorphismen auf $\overline{L}_1$ und ist somit zyklisch. Insbesondere ist $\overline{QL_1}$ normal in $\overline{P^\circ}$, d.h. $\overline{P^\circ} = \overline{QL_1}$ und da $\overline{Q}$ elementar abelsch ist, folgt $|\overline{P^\circ} : \overline{L}_1| \leq 2$. Es können hier also nur die Fälle a) und e) auftreten.
Ist $t = 2$, so befinden wir uns im Fall b).
Für $t > 2$ setzen wir $\overline{T}_i := \overline{L}_i \cap \overline{T}$. Da Q auch transitiv auf den $\overline{T}_i$ sein muss, existieren $g, h \in Q$ mit $\overline{T}_1^g = \overline{T}_2$ und $\overline{T}_2^h = \overline{T}_3$, insbesondere folgt $[\overline{T}_1, \overline{Q}, \overline{Q}] \neq 1$. Andererseits ist $\overline{Q} \trianglelefteq \overline{T}$, d.h. $[\overline{T}, \overline{Q}] \leq \overline{Q}$ und somit $[\overline{T}, \overline{Q}, \overline{Q}] = 1$; ein Widerspruch.

Fall (3): Es existiert eine weitere Parabolische $P_1 \in \mathcal{L}(S)$, welche wie in Fall 2 ist. Da $P^\circ \leq P_1{}^\circ$ ist, kann auch P_1 nicht in H liegen und weil $P_1{}^\circ$ zudem 2-minimal ist, ist hier die Aussage das Satzes erfüllt, wenn wir P_1 an Stelle von P betrachten.
Fall (4): Hier ist $\overline{P^\circ} \cong \Omega_4^{\pm}(r)$ und V ist der natürliche Modul. In [KL90, 2.9.1] werden die folgenden Isomorphien beschrieben: Zum einen ist $\Omega_4^{+}(r) \cong \mathrm{SL}_2(r) \times \mathrm{SL}_2(r)$ und der natürliche $\Omega_4^{+}(r)$-Modul ist isomorph zum Tensorprodukt zweier natürlicher $\mathrm{SL}_2(r)$-Moduln, dies ist die Konstellation in c). Zum anderen ist $\Omega_4^{-}(r) \cong \mathrm{SL}_2(r^2)$ und V ist wie in d).
Fall (5): Es existieren Untergruppen $L_1, L_2 \leq P^\circ$ mit $\overline{L}_i \cong \mathrm{SL}_{m_i}(r)$ für $m_i \geq 2$, $[\overline{L}_1, \overline{L}_2] = 1$, $\overline{L}_1 \times \overline{L}_2 \trianglelefteq \overline{P^\circ}$ und $V \cong V_1 \otimes V_2$, wobei V_i jeweils ein natürlicher L_i-Modul ist. Es tritt einer der folgenden Fälle auf:

- $\overline{P^\circ} \cong \mathrm{SL}_2(2) \wr \mathbb{Z}_2$, d.h $\overline{L}_1 \cong \overline{L}_2 \cong \mathrm{SL}_2(2)$ und es existiert ein $d \in \overline{Q}$ mit $\overline{L}_1^d = \overline{L}_2$. Sei $u \neq 1$ ein 3-Element in $\overline{L}_1$. Dann ist $\langle u, u^d \rangle \in \mathrm{Syl}_3(\overline{P^\circ})$. Nach Erzeugungssatz (vgl.[GLS94, 11.13]) wird V von den Fixgruppen der maximalen Untergruppen von $\langle u, u^d \rangle$ erzeugt. Da u und u^d fixpunktfrei sind, ist $V = C_V(uu^d) \oplus C_V(u^{-1}u^d)$ eine Zerlegung in zwei 2-dimensionale Unterräume. In $\overline{L}_1 \times \overline{L}_2$ existiert eine Involution t, welche sowohl uu^d als auch $u^{-1}u^d$ invertiert. Zudem wird $u^{-1}u^d$ von d invertiert während uu^d festgelassen wird. Also ist $\langle u, d, t \rangle$ eine zu $\mathrm{SL}_2(2) \times \mathrm{SL}_2(2)$ isomorphe normale Untergruppe von $\overline{P^\circ}$, welche obige Zerlegung von V in eine direkte Summe invariant lässt und demzufolge ist $\overline{P^\circ}$ wie in b).

- Ist $\overline{P^\circ} = \overline{L}_1$, so ist $V \cong W_1 \oplus ... \oplus W_{m_2}$ die Summe von natürlichen $\overline{P^\circ}$-Moduln. Dann ist aber auch Q nicht trivial auf allen diesen Moduln und somit nach 8.5 auch $Z(Q) \leq W_1 \cap ... \cap W_{m_2} = 1$; ein Widerspruch. Der Fall $\overline{P^\circ} = \overline{L}_2$ folgt analog.

- Sei $\overline{P^\circ} = \overline{L}_1 \times \overline{L}_2$. Dann hat $\overline{P^\circ}$ genau $(m_1 - 1) + (m_2 - 1)$ maximal Parabolische. Ist $m_i > 2$, so finden wir analog zum Fall (1) einen 1-dimensionalen Unterraum von V, dessen Stabilisator in $\overline{L}_i$ eine S-invariante maximal Parabolische ist. Damit kann S keinen Graphautomorphismus auf $\overline{L}_i$ induzieren und es folgt $m_1 = m_2 = 2$. Zudem müssen $\overline{L}_1$ und $\overline{L}_2$ von S vertauscht werden und somit ist P° wie in c).

Fall (8): Sei $\overline{P^\circ} \cong \mathrm{SL}_2(4)$ oder $\Gamma\mathrm{SL}_2(4)$ und V der natürliche Modul. Dann ist P° wie in Fall a) oder e).
Ist $\overline{P^\circ} \cong M_{22}$ oder M_{24}, so existieren nach [CCN+85] zwei maximal parabolische Untergruppen in $\overline{P^\circ}$, die nicht isomorph sind und demnach S-invariant sein müssen. Dann kann P aber nicht 2-minimal sein.
Es bleibt der Fall $\overline{P} \cong 3 \cdot \Sigma_6$. Hier gibt es nach [CCN+85] zwei verschiedene parabolische Untergruppen in $\overline{P^\circ}$, die zwar isomorph, aber in $\overline{P}$ nicht zueinander konjugiert sind.

□

Lemma 8.10. *Seien P und V wie in 8.9. Dann ist V ein 4-dimensionaler $\mathbb{F}_q$-Modul für $\overline{P^\circ S_0}$, $[V, Q] = [V, S_0]$ ist 3-dimensional und $C_{S_0}(V) = C_{S_0}([V, Q])$.*

Beweis: Sei P wie im vorherigen Lemma. Wir untersuchen nun die dort angegebenen Fälle. Dabei sei erneut $T := S \cap P^\circ$. Nach Lemma 8.5 ist $Z(Q) \leq V$ und somit ist $\overline{Q}' = 1$.

a): Der natürliche Fall

Es ist $\overline{P^\circ} \cong \mathrm{SL}_2(r)$ und V ist ein natürlicher Modul. Da Q groß ist, ist $Z(T) \leq Z(Q)$ und somit $N_{\overline{P^\circ}}(\overline{T}) \leq N_{\overline{P^\circ}}(\overline{Q})$. Aber in $\mathrm{SL}_2(r)$ operiert der Normalisator transitiv auf der 2-Sylowgruppe und es folgt $\overline{T} = \overline{Q}$. Damit ist $[V, Q] = C_V(Q) = Z(Q)$ ein 1-dimensionaler Unterraum und wir erhalten $q = r$.
Angenommen $V \not\leq Q$. Dann so existiert ein $x \in V \setminus Q$ und da S/Q nach 3.5 treu auf $Q/Z(Q)$ operiert, folgt $[x, Q] \not\leq Z(Q)$, ein Widerspruch. Also ist $V \leq Q$.
Sei $x \in S_0 \setminus T$. Dann operiert x auf $\overline{P^\circ}$ und da $\mathrm{SL}_2(q)$ absolut irreduzibel auf dem natürlichen Modul ist, muss x nach 2.19 treu operieren, d.h. x induziert einen Körperautomorphismus. Aber dann ist x nicht trivial auf dem 1-dimensionalen Unterraum $Z(Q) = Z(S_0)$; ein Widerspruch. Damit ist $S_0 \leq T$ und somit $[V, S_0] \leq [V, T] = Z(Q)$, d.h. $V \leq Z_2(S_0)$.
Nun folgt mit 7.4 und 7.5, dass K die G-Fusion in V kontrolliert und mit 8.2 ergibt sich $P \leq H$; ein Widerspruch.

b): Das direkte Produkt

Es existieren $L_1, L_2 \leq P^\circ$, mit $\overline{L}_1 \times \overline{L}_2 \trianglelefteq \overline{P^\circ}$, $\overline{L}_i \cong \mathrm{SL}_2(r)$ und $V = V_1 \times V_2$, wobei $V_i := [V, L_i]$ jeweils ein natürlicher Modul ist. Wir setzen $T_0 := S \cap L_1L_2$. Nach Voraussetzung existiert ein $d \in Q$ mit $\overline{L}_1^{\,d} = \overline{L}_2$, es gilt also $V_1^d = V_2$.
Es sei $x \in Q \setminus T_0\langle d \rangle$, wobei wir x so wählen können, dass L_1 und L_2 von x normalisiert werden. Nun ist $\langle \overline{L}_1, \overline{L}_2, \overline{d} \rangle$ absolut irreduzibel auf V und somit ist x nach Lemma 2.19 treu auf $\langle \overline{L}_1, \overline{L}_2, \overline{d} \rangle$, d.h. wir können annehmen, dass x nicht trivial auf $\overline{L}_1$ ist. Dann muss x aber einen Körperautomorphismus auf $\overline{L}_1$ induzieren, d.h. $[\overline{T_0} \cap \overline{L}_1, \overline{x}] \neq 1$ und somit $[\overline{T_0}, \overline{x}, \overline{d}] \neq 1$. Andererseits ist $[\overline{T_0}, \overline{x}] \leq \overline{Q}$ und $[\overline{Q}, \overline{d}] \leq \overline{Q}' = 1$; ein Widerspruch. Damit folgt $T_0\langle d \rangle = T_0 Q$.
Wir setzen $W := [V, T_0] = C_V(T_0)$ und $W_i := W \cap V_i$. Dann ist W zweidimensional und $W_i = [V_i, T_0]$ eindimensional mit $W = W_1 \oplus W_2$. Ein nicht triviales Element aus $[\overline{T_0}, \overline{d}] \leq \overline{Q} \cap \overline{T_0}$ induziert Transvektionen sowohl auf V_1 als auch auf V_2 und somit folgt $W = C_V(Q \cap T_0) = [V, Q \cap T_0]$. Weiter ist $[V, d] = C_V(d) = \{vv^d | v \in V_1\}$. Damit folgt $Z(Q) = C_V(Q) = C_W(d) = \{ww^d | w \in W_1\}$ und es ergibt sich $q = r$. Also ist $|V| = q^4$ und $[V, Q] = [V, T_0][V, d]$ ist eine Untergruppe der Ordnung q^3.
Sei nun $x \in S_0 \setminus T_0 Q$ und wir können wieder annehmen, dass x einen nicht trivialen Körperautomorphismus auf $\overline{L}_1$ induziert. Dann ist x aber auch nicht trivial auf dem 1-dimensionalen Unterraum W_1 und somit $[Z(Q), x] \neq 1$, was im Widerspruch zu $Z(Q) = Z(S_0)$ steht. Also ist $S_0 \leq T_0 Q$ und $\overline{P^\circ}$ operiert linear auf V. Zudem folgt $[V, S_0] = [V, Q]$. Da $\overline{T_0}$ treu auf $[V, d]$ operiert und $\overline{d}$ treu auf $[V, T_0]$ ist, ist auch $C_{S_0}(V) = C_{S_0}([V, Q])$.

c): Das Tensorprodukt

Es ist $P^\circ = L_1 L_2$ mit $\overline{L}_i \cong \mathrm{SL}_2(r)$ und wir setzen $T_i := S \cap L_i$. Dann ist $V_i := [V, T_{3-i}] = C_V(T_{3-i})$ jeweils ein natürlicher Modul für $\overline{L}_i$. Weil P nach Voraussetzung 2-minimal ist, existiert ein $d \in S$, welches $\overline{L}_1$ und $\overline{L}_2$ vertauscht, d.h. $\overline{T_1}^d = \overline{T_2}$. Insbesondere kann $\overline{Q}$ nicht in genau einer der Untergruppen $\overline{T_i}$ liegen. Es ist $Q \leq T$ und wie im Fall a) sehen wir, dass $\overline{Q}$ invariant unter $N_{\overline{P^\circ}}(\overline{T})$ ist. Nun hat $N_{\overline{P^\circ}}(\overline{T})$ auf $\overline{T}$ Bahnen der Länge 1, $q-1$, $q-1$ und $(q-1)^2$, welche $\{1\}$, $\overline{T_1} \setminus \{1\}$, $\overline{T_2} \setminus \{1\}$ und $\overline{T} \setminus (\overline{T_1} \cup \overline{T_2})$ entsprechen und es folgt $\overline{Q} = \overline{T}$. Damit ist $Z(Q) = C_V(T) = V_1 \cap V_2$ ein 1-dimensionaler Unterraum von V und es folgt $q = r$. Wir sehen weiterhin, dass $[V, Q] = V_1 + V_2$ ein 3-dimensionaler Unterraum ist und da jedes Element von $\overline{T} \setminus \{1\}$ auf V_1 oder V_2 nicht trivial operiert, ist $C_T(V) = C_T([V, Q])$.

Ist $x \in S_0 \setminus T$, so operiert x trivial auf dem 1-dimensionalen Unterraum $Z(Q)$ und ist somit linear auf V. Dann ist x aber auch trivial auf $V/[V, Q]$ und somit $[V, S_0] = [V, Q]$. Weiterhin ist $\overline{P^\circ}$ absolut irreduzibel auf V (denn V ist der natürliche Modul für $\overline{P^\circ} \cong \Omega_4^+(q)$), und so muss x nach 2.19 treu auf $\overline{P^\circ}$ operieren. Da x keine Körperautomorphismen auf $\overline{L}_1$ oder $\overline{L}_2$ induzieren kann, muss es die beiden Komponenten vertauschen, vertauscht damit auch V_1 und V_2 und ist somit nicht trivial auf $[V, Q]$. Es folgt $C_{S_0}(V) = C_{S_0}([V, Q])$.

d): Der orthogonale Fall

Hier ist $\overline{P^\circ} \cong \mathrm{SL}_2(r^2)$ und V ist der natürliche $\Omega_4^-(r)$-Modul. Nach [KL90, 2.9.1] lässt sich V wie folgt interpretieren: Sei W ein natürlicher Modul für $\mathrm{SL}_2(r^2)$ und $\{v_1, v_2\}$ eine Basis für W. Dann ist $\mathcal{B} := \{v_1 \otimes v_1, v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1, \alpha v_1 \otimes v_2 + \alpha^r v_2 \otimes v_1, v_2 \otimes v_2\}$ für ein $\alpha \in \mathbb{F}_{r^2} \setminus \mathbb{F}_r$ eine Basis von $W \otimes W^{(r)}$. und $\langle \mathcal{B} \rangle_{\mathbb{F}_r} = V$ ist ein 4-dimensionaler $\mathbb{F}_r$-Modul für $\mathrm{SL}_2(r^2)$. Wir wählen nun eine Parametrisierung $\overline{T} = \{a(t) | t \in \mathbb{F}_{r^2}\}$ und nehmen an, dass $\overline{T}$ durch $v_1.a(t) = v_1$ und $v_2.a(t) = tv_1 + v_2$ auf W operiert.

Analog zum Fall a) ergibt sich hier $\overline{Q} = \overline{T}$. Es ist $Z(Q) = C_V(Q) = \langle v_1 \otimes v_1 \rangle_{\mathbb{F}_r}$ und so folgt $q = r$. Weiterhin sehen wir, dass $[V, Q] = \langle v_1 \otimes v_1, v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1, \alpha v_1 \otimes v_2 + \alpha^r v_2 \otimes v_1 \rangle_{\mathbb{F}_r}$ ein 3-dimensionaler Unterraum ist und $\overline{Q}$ auf diesem treu operiert. Ist $x \in S_0 \setminus Q$, so induziert x einen Körperautomorphismus auf $\overline{P^\circ}$ und ist nicht trivial auf $[V, Q]$, woraus $C_{S_0}(V) = C_{S_0}([V, Q])$ folgt. Zudem ist x trivial auf $Z(Q)$, d.h. $\overline{P^\circ S_0}$ ist linear auf V als $\mathbb{F}_q$-Modul.

e): Der zweite natürliche Fall

Hier ist $\overline{P^\circ} \cong \mathrm{SL}_2(r^2).2$ und V ist der natürliche $\mathrm{SL}_2(r^2)$-Modul. Setze $L := O^2(P^\circ)$ und $T_0 := S \cap L$. Sei $x \in Q \setminus T_0$. Dann induziert x einen involutorischen Körperautomorphismus und es ist $1 \neq [\overline{T_0}, \overline{x}] \leq \overline{Q}$, d.h. $\overline{Q} \cap \overline{L} \neq 1$. Insbesondere ist $[V, T_0] = [V, T_0 \cap Q] = C_V(T_0 \cap Q)$ ein 1-dimensionaler $\mathbb{F}_{r^2}$-Unterraum. Nun operiert x semilinear auf V, d.h. insbesondere nicht trivial auf $C_V(T_0 \cap Q)$ und somit ist $C_V(Q)$ ein 1-dimensionaler $\mathbb{F}_r$-Unterraum. Wir erhalten $r = q$ und $|V| = q^4$. Da x auch nicht trivial auf $V/[V, T_0 \cap Q]$ ist und $\overline{P^\circ}$ auf V zumindest $\mathbb{F}_q$-linear operiert, folgt zudem $|[V, Q]| = q^3$

Ist $x \in S_0 \setminus T$, so muss x auf $\overline{L}$ einen Körperautomorphismus der Ordnung mindestens 4 induzieren und kann dann nicht mehr trivial auf dem 1-dimensionalen $\mathbb{F}_q$-Unterraum $Z(Q)$ sein. Also folgt $S_0 \leq T$, $[V, S_0] = [V, Q]$ und $C_{S_0}(V) = C_{S_0}([V, Q])$.

□

Lemma 8.11. *Es ist* $\langle \mathcal{L}(S) \rangle \leq H$.

Beweis: Angenommen falsch. Dann existiert nach 8.9 und 8.10 ein $P \in \mathcal{S}$ mit $P \leq H$ sowie $V \trianglelefteq P$ mit:

- $|V| = q^4$
- $|[V, S_0]| = |[V, Q]| = q^3$
- $C_{S_0}(V) = C_{S_0}([V, Q])$

Angenommen $x \in V \setminus S_0$. Dann induziert x einen äußeren Automorphismus auf K, der trivial auf S_0/Q ist. Wie in 3.2 kann dies nur für $K \cong \mathrm{L}_4(q)$ oder $\mathrm{U}_4(q)$ geschehen und insbesondere ist $q > 2$. Da V elementar abelsch ist und nur der Graphautomorphismus im linearen Fall, bzw. der involutorische Körperautomorphismus im unitären Fall trivial auf $Z(S_0) \leq V$ sein können, ist $|V : V \cap S_0| = 2$, d.h. $|C_{S_0}(x)| \geq |V \cap S_0| > q^3$. Nach 2.30 ist aber $C_K(x) \lesssim \mathrm{S}_4(q)$ und nach 2.24 ist $m_2(\mathrm{S}_4(q)) = 3f$; ein Widerspruch. Also ist $V \leq S_0$.
Da S_0 linear auf V operiert, ist $[V, S_0, S_0, S_0, S_0] = 1$ und somit $V \leq Z_4(S_0)$. Andererseits ist $|Q'| = q < |[V, Q]|$, d.h. $V \not\leq Q$ und somit ist $Z_4(S_0) \not\leq Q$. Nach 8.4 ist K also linear oder unitär.
Aus dem Beweis von Lemma 7.4 wissen wir, dass $|Z_2(S_0)| = q^3$ und $|Z(C_{S_0}(Z_2(S_0)))| = q^4$ ist. Da $[V, S_0] \leq Q$ ist, folgt $VQ/Q \leq Z(S_0/Q)$ und mit 8.3 ergibt sich daraus $[V, Q] \leq (VQ)' \leq Z_2(S_0)$. Aus Ordnungsgründen ist dann $[V, Q] = Z_2(S_0)$. Da sowohl Körper- als auch Graphautomorphismen von K nicht trivial auf $Z_2(S_0)$ sind, folgt $C_S(V) \leq S_0$. Also ist $C_S(V) = C_{S_0}([V, Q])$ und es folgt $V \leq Z(C_S(V)) = Z(C_{S_0}(Z_2(S_0)))$. Da beide Gruppen die Ordnung q^4 haben, ergibt sich $V = Z(C_{S_0}(Z_2(S_0)))$. Nach 7.4 kontrolliert K die G-Fusion in V und mit 8.2 folgt $P = P^\circ(P \cap C) \leq H$; ein Widerspruch.

□

Beweis zu Hauptsatz 2:
Wir haben gesehen, dass immer $\langle \mathcal{L}(S) \rangle \leq H$ gilt. Nun wird K von seinen parabolischen Untergruppen erzeugt, d.h. $\langle L \cap K | L \in \mathcal{L}(S) \rangle = K$ und da die äußeren Automorphismen einer Gruppe vom Lie-Typ immer S_0 festlassen, gilt $K \cdot N_H(S_0) = H$. Nun ist aber auch $N_G(S_0) \in \mathcal{L}(S)$ und es folgt $H \leq \langle \mathcal{L}(S) \rangle$.

□

Beweis zu 1.8:
Mit Hauptsatz 2 und 2.14 folgt, dass H stark 2-eingebettet in G ist. Sei $H \neq G$. Dann existieren nach 2.15 Normalteiler $1 \trianglelefteq N \triangleleft M \trianglelefteq G$, für die N und G/M ungerade Ordnung haben. Damit ist KS aber isomorph zu einer Untergruppe von M/N und enthält zudem eine volle 2-Sylowgruppe. Allerdings ist M/N eine einfache Gruppe vom Lie-Typ mit Lie-Rang 1, d.h. M/N ist nicht isomorph zu KS und da jede echte parabolische Untergruppe von M/N eine 2-Sylowgruppe normalisiert, ergibt sich ein Widerspruch.

□

A. Wurzelsysteme

E_6
0 1 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0
0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 1 0
0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0
0 1 0 1 0 0
0 0 1 1 0 0
0 0 0 1 1 0
0 0 0 0 1 1
1 0 1 0 0 0
0 1 0 1 1 0
0 0 1 1 1 0
0 1 1 1 0 0
0 0 0 1 1 1
1 0 1 1 0 0
0 1 0 1 1 1
0 0 1 1 1 1
0 1 1 1 1 0
1 0 1 1 1 0
1 1 1 1 0 0
0 1 1 1 1 1
0 1 1 2 1 0
1 1 1 1 1 0
1 0 1 1 1 1
0 1 1 2 1 1
1 1 1 2 1 0
1 1 1 1 1 1
0 1 1 2 2 1
1 1 2 2 1 0
1 1 1 2 1 1
1 1 1 2 2 1
1 1 2 2 1 1
1 1 2 2 2 1
1 1 2 3 2 1
1 2 2 3 2 1

E_7	
0 1 0 0 0 0 0	0 1 1 2 1 1 0
0 0 1 0 0 0 0	1 1 1 1 1 1 0
0 0 0 1 0 0 0	1 1 1 2 1 0 0
0 0 0 0 1 0 0	1 0 1 1 1 1 1
0 0 0 0 0 1 0	0 1 1 2 1 1 1
0 0 0 0 0 0 1	0 1 1 2 2 1 0
1 0 0 0 0 0 0	1 1 1 2 1 1 0
0 1 0 1 0 0 0	1 1 2 2 1 0 0
0 0 1 1 0 0 0	1 1 1 1 1 1 1
0 0 0 1 1 0 0	0 1 1 2 2 1 1
0 0 0 0 1 1 0	1 1 1 2 2 1 0
0 0 0 0 0 1 1	1 1 2 2 1 1 0
1 0 1 0 0 0 0	1 1 1 2 1 1 1
0 1 0 1 1 0 0	0 1 1 2 2 2 1
0 0 1 1 1 0 0	1 1 2 2 2 1 0
0 1 1 1 0 0 0	1 1 1 2 2 1 1
0 0 0 1 1 1 0	1 1 2 2 1 1 1
0 0 0 0 1 1 1	1 1 2 3 2 1 0
1 0 1 1 0 0 0	1 1 1 2 2 2 1
0 1 0 1 1 1 0	1 1 2 2 2 1 1
0 0 1 1 1 1 0	1 1 2 2 2 2 1
0 1 1 1 1 0 0	1 1 2 3 2 1 1
0 0 0 1 1 1 1	1 2 2 3 2 1 0
1 0 1 1 1 0 0	1 1 2 3 2 2 1
1 1 1 1 0 0 0	1 2 2 3 2 1 1
0 1 0 1 1 1 1	1 1 2 3 3 2 1
0 0 1 1 1 1 1	1 2 2 3 2 2 1
0 1 1 1 1 1 0	1 2 2 3 3 2 1
0 1 1 2 1 0 0	1 2 2 4 3 2 1
1 0 1 1 1 1 0	1 2 3 4 3 2 1
1 1 1 1 1 0 0	2 2 3 4 3 2 1
0 1 1 1 1 1 1	

E_8		
0 1 0 0 0 0 0 0	1 0 1 1 1 1 1 0	1 2 2 3 2 2 1 0
0 0 1 0 0 0 0 0	1 1 1 1 1 1 0 0	1 1 2 2 2 2 2 1
0 0 0 1 0 0 0 0	1 1 1 2 1 0 0 0	1 1 2 3 2 2 1 1
0 0 0 0 1 0 0 0	0 1 1 1 1 1 1 1	1 2 2 3 2 1 1 1
0 0 0 0 0 1 0 0	0 1 1 2 1 1 1 0	1 2 2 3 3 2 1 0
0 0 0 0 0 0 1 0	0 1 1 2 2 1 0 0	1 1 2 3 2 2 2 1
0 0 0 0 0 0 0 1	1 1 1 1 1 1 1 0	1 1 2 3 3 2 1 1
1 0 0 0 0 0 0 0	1 1 1 2 1 1 0 0	1 2 2 3 2 2 1 1
0 1 0 1 0 0 0 0	1 1 2 2 1 0 0 0	1 2 2 4 3 2 1 0
0 0 1 1 0 0 0 0	1 0 1 1 1 1 1 1	1 1 2 3 3 2 2 1
0 0 0 1 1 0 0 0	0 1 1 2 1 1 1 1	1 2 2 3 2 2 2 1
0 0 0 0 1 1 0 0	0 1 1 2 2 1 1 0	1 2 2 3 3 2 1 1
0 0 0 0 0 1 1 0	1 1 1 2 1 1 1 0	1 2 3 4 3 2 1 0
0 0 0 0 0 0 1 1	1 1 1 2 2 1 0 0	1 1 2 3 3 3 2 1
1 0 1 0 0 0 0 0	1 1 2 2 1 1 0 0	1 2 2 3 3 2 2 1
0 1 0 1 1 0 0 0	1 1 1 1 1 1 1 1	1 2 2 4 3 2 1 1
0 0 1 1 1 0 0 0	0 1 1 2 2 1 1 1	2 2 3 4 3 2 1 0
0 1 1 1 0 0 0 0	0 1 1 2 2 2 1 0	1 2 2 3 3 3 2 1
0 0 0 1 1 1 0 0	1 1 1 2 2 1 1 0	1 2 2 4 3 2 2 1
0 0 0 0 1 1 1 0	1 1 2 2 1 1 1 0	1 2 3 4 3 2 1 1
0 0 0 0 0 1 1 1	1 1 2 2 2 1 0 0	2 2 3 4 3 2 1 1
1 0 1 1 0 0 0 0	1 1 1 2 1 1 1 1	1 2 2 4 3 3 2 1
0 1 0 1 1 1 0 0	0 1 1 2 2 2 1 1	1 2 3 4 3 2 2 1
0 0 1 1 1 1 0 0	1 1 1 2 2 2 1 0	2 2 3 4 3 2 2 1
0 1 1 1 1 0 0 0	1 1 2 2 2 1 1 0	1 2 2 4 4 3 2 1
0 0 0 1 1 1 1 0	1 1 2 3 2 1 0 0	1 2 3 4 3 3 2 1
0 0 0 0 1 1 1 1	1 1 1 2 2 1 1 1	2 2 3 4 3 3 2 1
1 0 1 1 1 0 0 0	1 1 2 2 1 1 1 1	1 2 3 4 4 3 2 1
1 1 1 1 0 0 0 0	0 1 1 2 2 2 2 1	2 2 3 4 4 3 2 1
0 1 0 1 1 1 1 0	1 1 2 2 2 2 1 0	1 2 3 5 4 3 2 1
0 0 1 1 1 1 1 0	1 1 2 3 2 1 1 0	2 2 3 5 4 3 2 1
0 1 1 1 1 1 0 0	1 2 2 3 2 1 0 0	1 3 3 5 4 3 2 1
0 0 0 1 1 1 1 1	1 1 1 2 2 2 1 1	2 3 3 5 4 3 2 1
0 1 1 2 1 0 0 0	1 1 2 2 2 1 1 1	2 2 4 5 4 3 2 1
1 0 1 1 1 1 0 0	1 1 2 3 2 2 1 0	2 3 4 5 4 3 2 1
1 1 1 1 1 0 0 0	1 2 2 3 2 1 1 0	2 3 4 6 4 3 2 1
0 1 0 1 1 1 1 1	1 1 1 2 2 2 2 1	2 3 4 6 5 3 2 1
0 0 1 1 1 1 1 1	1 1 2 2 2 2 1 1	2 3 4 6 5 4 2 1
0 1 1 1 1 1 1 0	1 1 2 3 2 1 1 1	2 3 4 6 5 4 3 1
0 1 1 2 1 1 0 0	1 1 2 3 3 2 1 0	2 3 4 6 5 4 3 2

F_4	
1 0 0 0	1 1 1 1
0 1 0 0	0 1 2 2
0 0 1 0	1 2 2 0
0 0 0 1	1 1 2 1
1 1 0 0	1 1 2 2
0 1 1 0	1 2 2 1
0 0 1 1	1 2 2 2
0 1 2 0	1 2 3 1
1 1 1 0	1 2 3 2
0 1 1 1	1 2 4 2
1 1 2 0	1 3 4 2
0 1 2 1	2 3 4 2

G_2
1 0
0 1
1 1
2 1
3 1
3 2

Literaturverzeichnis

[AHN05] Mashhour I. Alali, Christoph Hering und Anni Neumann, *A Number Theoretic Approach to Sylow r-Subgroups of Classical Groups*, Revista Matemática Complutense **18** (2005), Nr. 2, 329–338.

[AS76] Michael Aschbacher und Gary M. Seitz, *Involutions in Chevalley groups over fields of even order*, Nagoya Mathematical Journal (1976), 1–91.

[Asc93] Michael Aschbacher, *Finite group theory*, Cambride University Press, 1993.

[Ben71] Helmut Bender, *Transitive Gruppen gerader Ordnung, in denen jede Involution genau einen Punkt festläßt*, Journal of Algebra **17** (1971), 527–554.

[Car89] Roger W. Carter, *Simple Groups of Lie Type*, Wiley Classics Library, Wiley, 1989.

[CCN+85] John H. Conway, Robert T. Curtis, Simon P. Norton, Richard A. Parker und Robert A. Wilson, *ATLAS of Finite Groups: Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups*, Clarendon Press, 1985.

[Eno70] Hikoe Enomoto, *The conjugacy classes of Chevalley groups of type G_2 over finite fields of characteristic 2 or 3*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **16** (1970), 497–512.

[GLS94] Daniel Gorenstein, Richard Lyons und Ron Solomon, *The Classification of the Finite Simple Groups: General Group Theory. Part 1, Chapter G*, Mathematical Surveys and Monographs Series, American Math. Soc., 1994.

[GLS98] ———, *The Classification of the Finite Simple Groups: Almost Simple K-groups. Part I, Chapter A*, Mathematical Surveys and Monographs Series, Amer Mathematical Society, 1998.

[Hup67] Bertram Huppert, *Endliche Gruppen 1*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, Berlin, 1967.

[JLPW95] Christoph Jansen, Klaus Lux, Richard Parker und Robert Wilson, *An atlas of Brauer characters*, London Mathematical Society monographs, Clarendon Press, 1995.

[KL90] Peter Kleidman und Martin Liebeck, *The Subgroup Structure of the Finite Classical Groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 1990.

[MS] Kay Magaard und Gernot Stroth, *Groups of even type which are not of even characteristic*, eingereicht in Israel Journalof Mathematics.

[MS90a] Ulrich Meierfrankenfeld und Gernot Stroth, *On quadratic GF(2)-modules for Chevalley groups over fields of odd order*, Archiv der Mathematik **55** (1990), Nr. 2, 105–110.

[MS90b] ______, *Quadratic GF(2)-modules for sporadic simple groups and alternating groups*, Communications in Algebra **18** (1990), Nr. 7, 2099–2139.

[MSS] Ulrich Meierfrankenfeld, Bernd Stellmacher und Gernot Stroth, *The Structure Theorem For Finite Groups With A Large p-Subgroup*, eingereicht in Memoirs of AMS.

[MSS03] ______, *Finite groups of local characteristic p: An Overview*, Groups, combinatorics & geometry (Durham, 2001), Cambridge University Press, 2003, pp. 155–192.

[MT11] Gunter Malle und Donna Testerman, *Linear algebraic groups and finite groups of lie type*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2011.

[PS11] Chris Parker und Gernot Stroth, *Groups which are almost goups of Lie type in Characteristic p*, arXiv:1110.1308, 2011.

[Sei09] Andreas Seidel, *Gruppen lokaler Charakteristik - eine Kennzeichnung von Gruppen vom Lie-Typ in ungerader Charakteristik*, Dissertation, Universität Halle-Wittenberg, `http://digital.bibliothek.uni-halle.de/hs/content/titleinfo/397705`, 2009.

[Sph] *Atlas of Lie Groups and Representations, Spherical explorer*, `http://www.liegroups.org/dissemination/spherical/explorer/rootSystem.cgi`.

[SS] M. Reza Salarian und Gernot Stroth, *Existence of Strongly p-embedded subgroups*, erscheint in Communications in Algebra.

[Tho69] Gomer Thomas, *A characterization of the groups $G_2(2^n)$*, Journal of Algebra **13** (1969), Nr. 1, 87 – 118.

Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig, ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Daten, Fakten und Konzepte sind unter Angabe der entprechenden Quelle als solche gekennzeichnet.

Diese Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form in einem anderen Prüfungsverfahren vorgelegt.

Halle (Saale), 18. Dezember 2013.

Gerald Pientka

Angaben zur Person:

Name:	Gerald Pientka
Geburtsdatum:	13.10.1980
Geburtsort:	Halle
Nationalität:	Deutsch
Adresse:	Eichendorffstraße 29a, 06114 Halle (Saale)

Ausbildung:

1999	Abitur am Thomas-Müntzer-Gymnasium in Halle (Saale)
2000 - 2006	Mathematikstudium an der Universität Halle-Wittenberg Abschluss als Diplom-Mathematiker
seit 2007	Promotionsstudium an der Universität Halle-Wittenberg Fachgebiet der Promotion: Gruppentheorie
2007-2012	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mathematik der Universität Halle-Wittenberg

Veröffentlichungen:

- Gerald Pientka, *A characterization of the alternating group A_{10} by its conjugacy class lengths*, Beiträge zur Algebra und Geometrie **53** (2012), 273-280

Halle (Saale), 18. Dezember 2013.