

Probabilistische Methode zur Vorhersage des effektiven Materialverhaltens fester Schäume mit ungeordneter Mikrostruktur

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

der

Naturwissenschaftlichen Fakultät II
Chemie, Physik und Mathematik
der Martin-Luther-Universität
Halle-Wittenberg

vorgelegt von

Frau Carla Beckmann
geb. am 21.02.1984 in Bielefeld

Gutachter:

1. Prof. Dr. rer. nat. Ralf B. Wehrspohn, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
2. Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels, Universität des Saarlandes

Tag der öffentlichen Verteidigung: 24. Februar 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	11
1.1	Motivation und Problemstellung	11
1.2	Stand der Forschung	12
1.3	Zielsetzung	17
2	Kontinuumsmechanische und mathematische Grundlagen	19
2.1	Kinematik und Verzerrung	19
2.2	Bilanzgesetze	22
2.3	Spannungsmaße und Verzerrungsenergiedichte	24
2.4	Materialgleichungen	26
2.5	Randwertproblem	33
2.6	Stochastische Grundlagen	36
3	Homogenisierungsverfahren	45
3.1	Repräsentatives Volumenelement	45
3.2	Mittelung der Spannungs- und Dehnungsfelder	47
3.3	Verzerrungsenergiebasiertes Homogenisierungsverfahren	49
4	Numerisches Mikrostrukturmodell	53
4.1	Voronoi-Verfahren in Laguerre-Geometrie	53
4.2	Vernetzung	55
4.3	Validierung	58
5	Bestimmung des effektiven Materialverhaltens	63
5.1	Problematik	63
5.2	Lösungsansätze	64
5.3	Rechentechische Umsetzung	64
5.4	Diskussion	73
6	Vorhersage des effektiven Materialverhaltens von Aluminiumschäumen	75
6.1	Modell-Eingangsgrößen	75
6.2	Mehrfache Testvolumenelemente-Auswertung	76
6.3	Zellbasierte Auswertung	84
6.4	„Moving-Window“-Auswertung	87
6.5	Vergleich der Auswerteverfahren	92

7	Unschärfen im ratenabhängigen Verhalten von Polymerschäumen	97
7.1	Bulkmaterial und Schaummodell	97
7.2	Bestimmung der Materialunschärfen im ratenabhängigen Verhalten	98
8	Ableitung eines probabilistischen Stoffgesetzes	103
8.1	Motivation und Vorgehensweise	103
8.2	Separation der Einflussgrößen	104
8.3	Ergebnisse	107
8.4	Anwendungsbeispiel	110
9	Übertragung auf die strukturmechanische Ebene	113
9.1	Fallbeispiel und Problematik	113
9.2	Mikrostrukturauswertung	114
9.3	Zufallsfelder	118
9.4	Ergebnisse	120
10	Zusammenfassung und Ausblick	125

Formelbezeichnungen

Lateinische Buchstaben

A	Ober- bzw. Querschnittsfläche
a_i	Ellipsoidachsenlängen
a_{ij}	Komponenten der Transformationsmatrix
\mathbf{B}	linker Cauchy-Green-Tensor
\mathbf{C}	rechter Cauchy-Green-Tensor
C_{ij}	Komponenten des Elastizitätstensors in Voigtscher Notation
C_{ijkl}	Komponenten des 4-stufigen Elastizitätstensors
c_0, c_1, c_2	Konstanten
d	Dicke
E	Elastizitätsmodul
E	innere Energie
E_i	richtungsbezogener Elastizitätsmodul
e	Verzerrungsenergiedichte
\mathbf{e}_i	Basisvektoren des globalen Koordinatensystems
\mathbf{e}'_i	Basisvektoren des lokalen Zell-Koordinatensystems
$\tilde{\mathbf{e}}_i$	Basisvektoren des lokalen Element-Koordinatensystems
F	Kraft
\mathbf{F}	Deformationsgradient
\mathbf{F}	Kraftvektor
F_{ij}	Komponenten des Deformationsgradienten
$F(x)$	Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion
$F(x, y)$	zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion
f	Skalierungsfaktor
\mathbf{f}	Volumenkraftvektor
f_i	Komponenten der inneren Kräfte des Volumenkraftvektors
$f(x)$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
$f(x, y)$	zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
G	Fit-Parameter
\mathbf{G}	Green-Lagrange-Tensor
G_R	Relaxationsmodul der Schubspannungen
g_0, g_1, g_2	Fit-Parameter
\bar{g}_i^P	Materialkonstante bei der Prony-Reihenentwicklung

Formelbezeichnungen

$g(x)$	Fit-Funktion
H	Fit-Parameter
\mathbf{h}	Abstandsvektor
J_i	Invariante
L, l, l_i	Länge
\mathbf{L}	Drehmomentvektor
\mathbf{M}	Momentvektor
m	Masse
n, N	Anzahl
\mathbf{n}	Normalenvektor
n_i	Komponenten des Normalenvektors
\mathbf{P}	erster Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
P, p_i	Wahrscheinlichkeit
P_{ij}	Komponenten des ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors
\mathbf{p}	Impulsvektor
P	Raumpunkt
Q	isoperimetrischer Quotient
Q	Raumpunkt
Q	Wärme
\mathbf{R}	Rotationstensor
r_E	Euklid-Abstand
r_L	Lagrange-Abstand
R_m	Zugfestigkeit
R_p	Dehngrenze
r	Radius
s	Simpson-Integrationspunkt
T	Temperatur
T	kinetische Energie
t	Zeit
\mathbf{t}	Spannungsvektor
t_i	Komponenten der Oberflächenkräfte des Spannungsvektors
\mathbf{U}	Rechtsstrecktensor
\mathbf{u}	Verschiebung
\mathbf{u}_i	räumliche Koordinaten
$u_{i,j}$	Komponenten des Verschiebungsgradienten
$u_i(\tilde{x}_\alpha)$	Verschiebungsfeld
V	Volumen
\mathbf{V}	Linksstrecktensor
v	Geschwindigkeit
W	Arbeit
W	Verzerrungsenergiefunktion
w	normierte Nachbarschaftsmatrix
w	Wandanzahl

\tilde{w}	Nachbarschaftsmatrix
$w(r_E)$	Gauß-Gewichtung
X	Zufallsvariable
\mathbf{x}	Ortsvektor
x_i	Stützstelle
Y	Zufallsvariable
Z	Zellwandanteil
$z(\mathbf{u}_i)$	ortsabhängige Variable

Griechische Buchstaben

α	Winkel
α_i	Gewicht
α_i	Ogden-Materialkonstante
$\tilde{\alpha}_{ij}$	Hilfsgröße
$\tilde{\beta}_{ij}$	Hilfsgröße
γ_{ij}	Komponenten des Green-Lagrange-Verzerrungstensors
ε	Dehnung
ε_{ij}	Komponenten des infinitesimalen Verzerrungstensors
ε'_{ij}	Dehnungsdeviator in Indexschreibweise
ε_v	Vergleichsdehnung
η	effektive Struktureigenschaft
θ	Euler-Winkel
Λ	Langrangescher Multiplikator
λ	Längenausmaß der Mikroheterogenitäten
λ_i	Eigenwerte
μ	Lageparameter
μ	Schubmodul
μ_i	Ogden-Materialkonstante
μ_R	dimensionsloser Relaxationsmodul der Schubspannungen
ν	Querkontraktions- bzw. Poissonzahl
ν_i	richtungsbezogene Querkontraktions- bzw. Poissonzahl
Ξ	'finites Element' des Zufallsraums
ξ_i	raumfeste Basisvektoren
ρ	Dichte
σ	Spannung
σ	Streuungsparameter
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchy-Spannungstensor
$\boldsymbol{\sigma}'$	Spannungsdeviator
$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$	Hauptspannungen
σ_h	hydrostatische Spannung
σ_{ij}	Komponenten des Cauchy-Spannungstensors
σ'_{ij}	Spannungsdeviator in Indexschreibweise

Formelbezeichnungen

σ_v	Vergleichsspannung
σ_y	Fließspannung
$\boldsymbol{\tau}$	zweiter Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
τ_{ij}	Komponenten des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors
τ_i^p	Materialkonstante bei der Prony-Reihenentwicklung
Φ	Fließfunktion
ϕ	Euler-Winkel
φ	Verdrehung
χ	Abbildung
ψ	Euler-Winkel
Ω	Körper

Indizes

$(\bullet)^{+}, (\bullet)^{-}$	positiver bzw. negativer Rand
$(\bullet)^*$	bezogen auf homogenes Ersatzmedium
$(\bullet)^{1 \times 256}$	bezogen auf ein Modell mit 256 Zellen
$(\bullet)^{4 \times 64}$	bezogen auf 4 Modelle mit je 64 Zellen
$(\bullet)^{16 \times 16}$	bezogen auf 16 Modelle mit je 16 Zellen
$(\bullet)^{[ij]}$	Kantenbezeichnung
$(\bullet)^{\textcircled{1}}, (\bullet)^{\textcircled{2}}, (\bullet)^{\textcircled{3}}$..	Elementknotenbezeichnungen
$(\bullet)_0$	Ausgangswert
$(\bullet)_{(\bullet)}$	Indizes ohne Anwendung der Einsteinschen Summenkonvention
$(\bullet)^A, (\bullet)^E$	bezogen auf Anfangs- bzw. Endknoten einer Zellkante
$(\bullet)^{\text{Achse}}$	bezogen auf das Achsenverhältnis
$(\bullet)_{\text{Al}}$	Aluminium
$(\bullet)_{\text{Al-Schaum}}$	Aluminiumschaum
$(\bullet)_{\text{Balken}}$	bezogen auf den Sandwichbalken
$(\bullet)_{\text{Bruch}}$	bezogen auf Bruch
$(\bullet)_d$	diskret
$(\bullet)_{\text{Deckschicht}}$	bezogen auf die Sandwichdeckschicht
$(\bullet)_{\text{Dichte}}$	bezogen auf die Dichte
$(\bullet)^e$	bezogen auf Element
$(\bullet)^{\text{el}}$	elastisch
$(\bullet)_{\text{ges}}, (\bullet)^{\text{ges}}$	gesamt
$(\bullet)_{\text{gestreckt}}$	bezogen auf gestreckte Voronoi-Mikrostruktur
$(\bullet)_K$	Koppelkomponenten
$(\bullet)_{\text{Kante}}$	bezogen auf Zellkante
$(\bullet)_{\text{Kel}}$	bezogen auf den Kelvin-Schaum
$(\bullet)_{\text{Kern}}$	bezogen auf den Sandwichkern
$(\bullet)_{\text{Kugel}}$	bezogen auf eine Kugel
$(\bullet)_{\text{Kub}}$	Kubus
$(\bullet)_{\text{max}}, (\bullet)^{\text{max}}$	Maximum

$(\bullet)_{\min}, (\bullet)^{\min}$	Minimum
$(\bullet)^{m-w}$	bezogen auf 'Moving-Window'
$(\bullet)_N$	Normalkomponenten
$(\bullet)^{\text{norm}}$	normiert
$(\bullet)^{\text{pl}}$	plastisch
$(\bullet)^{\text{QP}}$	bezogen auf Quellpunkt
$(\bullet)_{\text{red}}, (\bullet)^{\text{red}}$	reduziert
$(\bullet)^{\text{rund}}$	bezogen auf Voronoï-Mikrostruktur
$(\bullet)^{\text{RVE}}$	bezogen auf das repräsentative Volumenelement
$(\bullet)_S$	Schubkomponenten
$(\bullet)_s$	stetig
$(\bullet)^{\text{Segment}}$	bezogen auf Kugelsegment
$(\bullet)^{\text{Steg}}$	bezogen auf den Zellsteg
$(\bullet)^t$	bezogen auf den Spannungsvektor
$(\bullet)^{\text{TVE}}$	bezogen auf Testvolumenelemente
$(\bullet)^u$	bezogen auf die Verschiebungen
$(\bullet)^{\text{Wand}}$	bezogen auf die Zellwand
$(\bullet)_{\text{w-p}}$	bezogen auf den Weaire-Phelan-Schaum
$(\bullet)^Z$	Zelle
$(\bullet)^{\text{zb}}$	zellbasiert

Mathematische Bezeichnungen

$(\bullet), (\hat{\bullet})$	Referenz- und Momentankonfiguration
$\Delta(\bullet)$	Differenz, Änderung
$\delta(\bullet)$	virtuelle Größe
$(\dot{\bullet}), (\ddot{\bullet})$	erste und zweite zeitliche Ableitung
$d(\bullet)$	totales Differential
$\partial(\bullet)$	partiell Differential
$(\bullet)_{i,j}, (\bullet)_{ij,j}$	partielle Ableitung nach der Komponente j
δ_{ij}	Kronecker-Symbol
ϵ_{ijk}	Levi-Civita-Symbol
$\mathbf{1}$	Einheitstensor
$(\bullet)^{-1}$	Inverse
$(\bullet)^T$	transponiert
$\det(\bullet)$	Determinante
$\text{Sp}(\bullet)$	Spur
(\bullet)	gemittelter Wert
$\text{Cov}(\bullet, \bullet)$	Kovarianz
$\gamma(\mathbf{h})$	Semi-Varianz
$E(\bullet)$	Erwartungswert
$I(\bullet)$	globaler Moran-Index
$I_{(k)}(\bullet)$	lokaler Moran-Index

Formelbezeichnungen

$\text{Med}(\bullet)$	Median
$\rho(\bullet, \bullet)$	Korrelationskoeffizient
$\sigma(\bullet)$	Standardabweichung
$v(\bullet)$	Schiefe
$\text{Var}(\bullet)$	Varianz
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
$[\bullet, \bullet]$	geschlossenes Intervall
$\{\bullet, \dots, \bullet\}$	Menge

1 Einführung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Simulation und Vorhersage des effektiven Materialverhaltens fester Schäume mit ungeordneter Mikrostruktur, wobei durch die Anwendung von probabilistischen Methoden insbesondere die Streuung und Unschärfe analysiert wird. In vielerlei Hinsicht hat das Interesse an dieser Werkstoffgruppe in den vergangenen Jahren stark zugenommen, wie den Darstellungen zur Motivation und Problemstellung (Abschnitt 1.1) sowie zum Stand der Forschung (Abschnitt 1.2) zu entnehmen ist. Nach der stark komprimierten Zusammenfassung der bereits publizierten Forschungsergebnisse auf dem Gebiet der mikroheterogenen Materialien, wird anschließend in Abschnitt 1.3 die Zielsetzung dieser Arbeit formuliert.

1.1 Motivation und Problemstellung

Mikroheterogene Materialien – wie z. B. Festkörperschäume – gewinnen in vielen technischen Anwendungen aufgrund zahlreicher positiver Eigenschaften zunehmend an Bedeutung. Neben der Materialvielfalt (z. B. offen- und geschlossporige Schäume bestehend aus Polymeren, Metallen bzw. Keramiken) überzeugt diese Werkstoffgruppe vor allem durch ihre naturgemäß relativ geringe Dichte. Festkörperschäume, die bezogen auf ihre geringe relative Dichte zudem verhältnismäßig hohe Steifigkeiten aufweisen, sind folglich außerordentlich interessante Konstruktionswerkstoffe im Leichtbau. So ist heutzutage die Gewichts- und Materialreduzierung nicht nur in der Luft- und Raumfahrt, sondern auch in der Automobilindustrie aufgrund begrenzter Ressourcen von großer Bedeutung. Da Festkörperschäume eine hohe Kompressibilität sowie ein hohes Energieabsorptionsvermögen besitzen, können sie z. B. als Materialien in Crash- und Stoßverzeherelementen verwandt werden. Die genannten Eigenschaften legen aber auch einen Einsatz in der Verpackungsindustrie oder eine Verwendung in personenbezogenen Schutzausrüstungen nahe.

Eine weitere Materialreduzierung ermöglichen zelluläre Strukturen durch ihre Multifunktionalität, da sie zugleich mechanische sowie nicht-mechanische Funktionen bereitstellen können. Exemplarisch zu nennen sind in diesem Zusammenhang Sandwichtragwerke, die nicht nur über eine hohe spezifische Festigkeit und Steifigkeit verfügen, sondern zugleich die Funktion der Wärme- und Schallschutzdämmung übernehmen können. Als multifunktionale Elemente mit mechanisch tragender Funktion können offenporige Schäume zudem als Wärmetauscher aufgrund ihrer großen effektiven Oberfläche oder in der Katalysator- und Filtertechnik ihre Anwendung finden.

Im Bezug zu herkömmlichen Materialien unterscheiden sich mikroheterogene Materialien

1 Einführung

durch ihre ungeordnete zufällige Mikrostruktur. So variieren die lokalen Eigenschaften aufgrund der nicht einheitlichen Größe, Form und Orientierung der einzelnen Zellen. Da die Zellgröße als charakteristische Mikrostrukturlänge bezogen auf die übrigen relevanten Strukturabmessungen zwar klein, jedoch nicht vernachlässigbar klein ist, führen bereits geringfügige Variationen im Aufbau der Mikrostruktur zu teilweise erheblichen Streuungen der makroskopischen, effektiven Eigenschaften.

Herkömmliche rein deterministische Bewertungskonzepte können diese Streuung jedoch nicht ausweisen. Als Folge dessen müssen beim Einsatz von mikroheterogenen Materialien als Konstruktionswerkstoffe große Sicherheitsbeiwerte verwendet werden, was wiederum zu einer schlechten Materialausnutzung führt.

Geeignete Bewertungskonzepte werden durch stochastische Ansätze geliefert, wodurch sowohl die explizite Streuung der Strukturantwort als auch die Auftrittswahrscheinlichkeit extremer Fälle explizit ermittelt werden kann.

Die Möglichkeiten der Mikrostrukturmodellentwicklung beschränkten sich in ihren Anfängen allerdings aufgrund der stark begrenzten Rechenkapazitäten auf die Abbildung von zweidimensionalen bzw. periodisch idealisierten dreidimensionalen Mikrostrukturen. Die Mechanismen von zwei- und dreidimensionalen Strukturen sind jedoch grundlegend verschieden und eine periodisch idealisierte Zellstruktur ist zudem nicht in der Lage die Streuung der Mikrostruktureigenschaften abzubilden.

Eng im Zusammenhang stehend mit den gestiegenen Rechenkapazitäten und dem Aufkommen der computertomographischen Charakterisierung realer Festkörperschäume, wodurch auf einfache Weise Mikrostrukturmodelle durch Vernetzung realer Mikrostrukturausschnitte erzeugt werden können, stellen MONTE-CARLO-Simulationen eine deutliche Verbesserung in Bezug auf die Bestimmung der effektiven Materialeigenschaften dar. So fließt die mikrostrukturelle Unordnung in die Bestimmung der effektiven Materialeigenschaften mit ein, wobei deren Streuung allerdings nicht qualifizierbar ist, da bei der Mikrostrukturgenerierung die Eingangsparameter zufällig aus der gesamten Streubandbreite ausgewählt werden und somit als gleichverteilt angenommen werden. Erste probabilistische Homogenisierungsanalysen, die sich jedoch zumeist nicht auf ungeordnete dreidimensionale Zellstrukturen anwenden lassen, setzen genau an dieser Stelle an. So stellen diese Verfahren eine Möglichkeit dar, die individuellen Auftrittswahrscheinlichkeiten der Mikrostruktureigenschaften bei der Bestimmung der effektiven Materialeigenschaften zu berücksichtigen.

1.2 Stand der Forschung

Schäume bzw. zelluläre Strukturen sind seit über 100 Jahren Grundlage der Forschung verschiedener Fachrichtungen. Neben der theoretischen mathematischen Betrachtungsweise, die sich in ihren Anfängen vor allem mit der Auffindung einer zellulären Struktur mit einem optimalen Oberflächen-Volumen-Verhältnis befasste (THOMSON (LORD KELVIN) [91]), sind ebenso erste aus der Mitte des vorherigen Jahrhunderts stammende biologisch motivierte Forschungsarbeiten (z. B. 1945 MATZKE [62]), vorzufinden. Nur wenige Zeit später rückten Fest-

körperschäume auch in das Interesse von Werkstoffwissenschaftlern, dessen Bestreben es bis heute ist, den unbestrittenen Zusammenhang zwischen der zellulären Mikrostruktur und den makroskopischen Materialeigenschaften tiefergehend zu verstehen. Hierzu trägt aufgrund der stark gestiegenen Rechenkapazitäten neben den experimentellen Untersuchungen heutzutage vor allem die numerische Simulation zellulärer Strukturen bei.

Den Anstoß zur Erforschung zellulärer Strukturen lieferte die im Jahre 1887 veröffentlichte Publikation von THOMSON (LORD KELVIN) [91], in der er vermutete, dass eine zelluläre Struktur bestehend aus Tetraikaedern (KELVIN-Schaum) den Raum vollständig bei einem maximalen Zellwand-Zellvolumen-Verhältnis ausfüllt. Erst über 100 Jahre später wurde von WEAIRE und PHELAN [100] jedoch gezeigt, dass sich dieses Verhältnis bei Verwendung zweier verschiedener Polyeder geringfügig (um 0,3 %) steigern lässt, wobei die sich ergebene Zellstruktur aufgrund der unregelmäßig geformten Polyeder und deren Anordnung im Raum deutlich weniger symmetrisch ist.

Während HOOKE [45] bereits 1665 die zelluläre Struktur von Pflanzen unter dem Mikroskop entdeckte und damit den Begriff der Zelle in der Biologie prägte, untersuchte MATZKE [62] 1945 die dreidimensionale Form von Seifenblasen. In seinen Untersuchungen bestimmte er z. B. die durchschnittliche Anzahl an Wänden pro Zelle zu 13,70, dessen Wert nur geringfügig vom vierzehneckigen KELVIN-Schaum abweicht. Im Gegensatz zum Tetraikaeder, welches aus acht hexagonalen und sechs quadratischen Flächen besteht, beobachtete er jedoch, dass die überwiegende Anzahl an Wänden eine pentagonale Form aufwies.

Im Jahr 1963 stellten GENT und THOMAS [25] ein stark vereinfachtes kubusförmiges Schaummodell zur Bestimmung der elastischen Materialeigenschaften offenzelliger Schäume vor, worauf bis auf den heutigen Tag eine Vielzahl weiterer Modelle zur Vorhersage der effektiven Materialeigenschaften zellulärer Strukturen folgten. Zu nennen ist in diesem Zusammenhang die Arbeit von DEMENT'EV und TARAKANOV [14], welche 1970 für ihr Modell zur Bestimmung der elastischen Eigenschaften von Polymerschäumen den KELVIN-Schaum verwendeten und mit ihren Rechnungen eine gute Übereinstimmung zu ihren experimentell ermittelten Daten aufzeigen konnten. MENGES und KNIPSCHILD [64] erkannten bereits 1975, dass die Entwicklung von Materialmodellen erheblich zur Kostenreduzierung beitragen kann, da die ausschließliche experimentelle Charakterisierung von Schäumen sehr aufwendig ist. So beschreiben sie in ihrer Arbeit auf korrekte Weise den Mechanismus der Zellwandbiegung, wie er bei linear-elastischer Deformation auftritt. Zudem kommen sie zu der Erkenntnis, dass offen- und geschlossenzellige Schäume ähnliche Steifigkeitswerte aufweisen, da im Allgemeinen die Zellkanten den überwiegenden Anteil der Last tragen.

In den 1980ern publizierten eine Vielzahl an Forschern Arbeiten mit dem Ziel einen Zusammenhang zwischen der zellulären Struktur und den mechanischen Eigenschaften abzuleiten. Erwähnenswert sind an dieser Stelle in Hinblick auf die Entwicklung von einfachen Mikrostrukturmodellen die folgenden Veröffentlichungen:

GIBSON und ASHBY [26] leiteten aus einem kubusförmigen Schaummodell sowohl für offen- als auch geschlossenzellige Schäume eine Beziehung zwischen dem Elastizitäts- bzw. dem Schubmodul und der relativen Dichte, als wesentliche Einflussgröße, her. Zudem stellten sie fest, dass die Querkontraktionszahl dichteunabhängig ist und nur von der Zellgeometrie be-

1 Einführung

einflusst wird. In der Publikation von ASHBY [2] werden zudem nichtlinear-elastisches Materialverhalten und verschiedene Formen des Materialversagens betrachtet.

Ein weiteres Modell zur Vorhersage der effektiven elastischen Materialeigenschaften wurde von CHRISTENSEN [8] geliefert, wobei er isotropes Materialverhalten betrachtete und sich auf die Herausarbeitung der Unterschiede zwischen offen- und geschlossenzelligen Schäumen konzentrierte. Zudem wurde von WARREN und KRAYNIK [98] ein Modell zur Bestimmung der linear-elastischen Materialeigenschaften offenzelliger Schäume publiziert.

In den 1990ern Jahren veröffentlichten WARREN und KRAYNIK [99], GRENESTEDT [31] und ZHU *et al.* [107] weitere Arbeiten, die auf dem KELVIN-Schaum beruhen. GIBSON und ASHBY [27] sowie SIMONE und GIBSON [83] [84] untersuchten zu dieser Zeit hingegen ausführlich den Einfluss der Materialverteilung. So stellten sie unter anderem fest, dass bei gleicher relativer Dichte offenzellige Schäume im Vergleich zu geschlossenzelligen steifer sind und weniger leicht versagen. WARREN und KRAYNIK hingegen beobachteten, dass die Steifigkeit offenzelliger Zellstrukturen erheblich von der Geometrie des Zellstegquerschnitts beeinflusst wird. So zeigt sich, dass bei einem Übergang von einem kreisförmigen bzw. quadratischen Zellstegquerschnitt auf eine „Plateau border“-Konfiguration (dreiecksförmiger Querschnitt mit zum Zentrum gekrümmtem Verlauf der Kanten) die Steifigkeit um 60 bis 70 % gesteigert werden kann.

Zeitgleich setzten sich VAN DER BURG *et al.* [95] (1997) und auch wenige Jahre später ZHU *et al.* [108] (2000) zum Ziel, den Einfluss der realen ungeordneten Zellstruktur auf die effektiven linear-elastischen Materialeigenschaften des Schaums zu untersuchen, was mit den Einheitszellenmodellen bislang nicht möglich war. So generierten beide mit dem Raumteilungsverfahren von VORONOÏ [97] kubusförmige Mikrostrukturmodelle deren Kantenlängen die durchschnittliche Zellsteglänge um mindestens eine Größenordnung überstiegen.

Die Fragestellung wie groß ein Mikrostrukturmodell gewählt werden muss, so dass es als repräsentatives Volumenelement (RVE) die Inhomogenität des Schaums vollständig abbildet, versuchten bereits 1996 DRUGAN und WILLIS [18] zu beantworten. Eine intuitive Definition hierfür ist in KANIT *et al.* [49] (2003) zu finden. So muss das repräsentative Volumenelement so groß gewählt werden, dass die in diesem Ausschnitt abgebildete heterogene Struktur in Hinblick auf die betrachtete physikalische Eigenschaft statistisch repräsentativ für die gesamte betrachtete Zellstruktur ist. Dabei weisen KANIT *et al.* explizit darauf hin, dass die Größe des repräsentativen Volumenelements sich z. B. für thermische und elastische Eigenschaften erheblich unterscheiden kann. Andererseits sollte nach KANIT *et al.* das repräsentative Volumenelement so klein wie möglich gewählt werden, um es als ein Volumenelement der Kontinuumsmechanik betrachten zu können. Eine ausführliche Darstellung zur Existenz und Größenbestimmung des repräsentativen Volumenelements ist zudem in GITMAN *et al.* [28] zu finden.

HUET [47], sowie HAZANOV und HUET [39] erkannten jedoch, dass Experimente und vor allem auch aufgrund der begrenzten Rechenkapazitäten numerische Simulationen auftreten können, bei denen eine Betrachtung eines statistisch repräsentativen Volumenelements nicht realisiert werden kann. So stellen sie als Ausweg für diese Fälle in ihren Arbeiten verschiedene Konzepte zur Berücksichtigung des Größeneffekts bei elastisch heterogenen Körpern vor.

Ausführlich mit dem Größeneffekt beschäftigten sich zudem DIMITROVOVÁ [17] (1999) und ONCK [71] (2001), da in der Anwendung häufig zelluläre Strukturen auftreten deren Dimension nur wenige Zellen in zumindest einer Richtung aufweisen.

Mit den immer besser werdenden Möglichkeiten zur computertomographischen Untersuchung von realen Schäumen zu Beginn des 21. Jahrhunderts, wurde die Zellmikrostruktur verschiedener Schäume zunehmend charakterisiert. So untersuchten z. B. KENESEI *et al.* [50] und auch KOLLURI *et al.* [51] metallische Schäume, wobei neben der Bestimmung der Zellgrößenverteilung unter anderem auch das Wandstärkenverhältnis sowie Imperfektionen im Zellwandmaterial betrachtet wurden. Eine wesentliche Erkenntnis dieser Mikrostrukturuntersuchungen wurde von MARKAKI und CLYNE [60] festgehalten. So können Mikrostrukturdefekte im Zellwandmaterial das mechanische Verhalten von Schäumen erheblich beeinflussen.

Des Weiteren wurde z. B. von DILLARD *et al.* [16] ein offenzelliger Nickelschaum charakterisiert, wobei unter anderem die Orientierung der Zellen durch Anpassung von Ellipsoiden bestimmt wurde. Exemplarisch für die Untersuchung von realen Polymerschäumen sind zudem die Publikationen von MONTMINY *et al.* [66] und BOUIX *et al.* [6] zu nennen.

Nicht ausschließlich auf die Charakterisierung der Mikrostruktur beschränken sich die Arbeiten von LASCHET *et al.* [54] und PETRASCH *et al.* [73]. Während in erstgenannter Arbeit die Schaumcharakterisierung zur Ableitung eines realistischen dreidimensionalen Mikrostrukturmodells herangezogen wird, um im Anschluss ein Homogenisierungsverfahren anzuwenden, kombinieren PETRASCH *et al.* die experimentelle Untersuchung poröser Keramiken mit der MONTE-CARLO-Simulation zur tiefergehenden numerischen Untersuchung der physikalischen Eigenschaften des Materials.

Dass die computertomographischen Aufnahmen nicht nur zur Modellgenerierung basierend auf statistischen Eingangsgrößen dienen, sondern auch dafür verwendet werden, um Finite-Elemente-Modelle durch Vernetzung der realen Mikrostruktur zu erzeugen, zeigt z. B. die Veröffentlichung von YOUSSEF *et al.* [104].

In HANSSEN *et al.* [34] wird darüber hinaus ein Programm zur Validierung der Modelle basierend auf einer umfangreichen experimentellen Untersuchung in Hinblick auf die numerische Simulation der Eigenschaften von Aluminiumschäumen dargestellt.

Zur Mikrostrukturmodellentwicklung werden zudem aktuell computertomographische Untersuchungen offenzelliger Schäume in der Forschungsgruppe um REDENBACH (LIEBSCHER und REDENBACH [57] (2013), LIEBSCHER *et al.* [58] (2013) und REDENBACH [76] (2009)) durchgeführt mit dem Ziel einer Modellverbesserung durch Berücksichtigung des variierenden Zellstegquerschnitts, wie dies auch weitere neuere Veröffentlichungen zeigen. So wird nicht nur in WEJRZANOWSKI *et al.* [101] (2013) darauf hingewiesen, dass sich durch die stark vereinfachte Annahme von konstanten Zellstegdicken, bei denen es an den Zellstegverzweigungspunkten zudem noch zu einer Materialüberlappung kommt, große Abweichungen in den Simulationsergebnissen gegenüber dem realen Materialverhalten ergeben, sondern auch in MANGIPUDI und ONCK [59] (2012) und HARDERS *et al.* [36] (2005) wird sich ausführlich mit dem Einfluss des real variierenden Zellstegquerschnitts und dessen Berücksichtigung bei der Modellierung beschäftigt.

1 Einführung

In LI *et al.* [56] (2006) wird neben dem Einfluss der variierenden Zellstegdicken auch der Einfluss der Zellform auf die elastischen Materialeigenschaften dreidimensionaler Schäume numerisch untersucht, wobei die Ergebnisse eine deutlich sichtbare Streubandbreite aufweisen.

Da idealisierte Modelle die real auftretenden mechanischen Eigenschaften gewöhnlich überschätzen, wurde der Einfluss der ungeordneten Mikrostruktur von ZHANG *et al.* [106] (2013) untersucht, wobei die Ergebnisse auch mit experimentellen Daten verglichen wurden.

Dass Einheitszellenmodelle auch heutzutage Bestandteil aktueller Forschungsarbeiten sind, zeigt z. B. die Veröffentlichung von FAHLBUSCH und BECKER [20] (2011). So wird in dieser Arbeit der Einfluss von gezielt aufgebrauchten Imperfektionen auf das effektive Materialverhalten eines geschlossenzelligen Schaumes untersucht.

Als Anstoß zur Auffindung einer mathematischen Beschreibung zwischen der Anisotropie der Zellstruktur und den effektiven elastischen Materialeigenschaften kann neben der zahlreich erfolgten experimentellen Charakterisierung von Mikrostrukturen die 1974 veröffentlichte Publikation von WHITEHOUSE [102] auf dem Gebiet der Biomechanik angesehen werden, in welcher eine mathematische Beschreibung der beobachteten Anisotropie von Knochenbälkchen (Trabekeln) abgeleitet wird.

Wenige Jahre später führten HARRIGAN und MANN [37] 1984 einen zweistufigen symmetrischen Tensor als ein Maß für die Orientierung der Mikrostruktur in orthotropen Materialien ein und COWIN [10] stellte 1985 eine Beziehung zwischen dem vierstufigen Elastizitätstensor und dem „Fabric tensor“, der die Anisotropie der Zellstruktur beschreibt, vor. Weitere Ausführungen sind zudem in COWIN [11], TURNER und COWIN [93] und TURNER *et al.* [94] zu finden.

In jüngerer Zeit befasste sich auch eine Forschungsgruppe um ZYSSET mit der Beschreibung der Anisotropie in zellulären Materialien (ZYSSET und CURNIER [109] (1995), ZYSSET [110] (2003) und RINCÓN KOHLI [78] (2003)). Neben der theoretischen Betrachtung wurden hier zudem experimentelle Untersuchungen an Trabekeln vorgenommen.

Dass bei Materialien mit einer ausgeprägten Mikrostruktur eine rein deterministische Betrachtungsweise nicht ausreichend ist, erkannten SCHRAAD und HARLOW [81], SCHUËLLER [82] sowie CHARMPIS *et al.* [7], so dass sie bei ihrer jeweiligen Modellentwicklung zur Beschreibung der Mikrostruktureigenschaften auf Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen übergegangen sind. Wie von CHARMPIS *et al.* richtig erkannt, stellt diese Vorgehensweise jedoch eine große Herausforderung dar, da hierfür eine ausreichend große Datenbasis vorhanden sein muss, die nicht nur Auskunft über die Streuung der einzelnen Eigenschaften liefert, sondern auch Information über auftretende Korrelationen bereitstellt. Für die numerische Simulation bedeutet dieser stochastische Ansatz eine enorme Steigerung der Rechenleistung. Als Lösung hierfür wird von SCHUËLLER sowie CHARMPIS *et al.* die Verwendung von Zufallsfelder vorgeschlagen. Diese besitzen den Vorteil, dass die Streuung der betrachteten Mikrostruktureigenschaften sowie die auftretenden Korrelationen bei der numerischen Vorhersage der effektiven Materialeigenschaften ohne Abbildung der realen Mikrostruktur berücksichtigt werden können.

Die Schwierigkeit der Zufallsfeldgenerierung geht dabei auf das inverse Problem der Stochas-

tik zurück. In zahlreichen Publikationen widmet sich die Forschungsgruppe um SOIZE dieser Problemstellung: z. B. in SOIZE [85] [86] [87], DESCELLIERS *et al.* [15] und GUILLEMINOT *et al.* [32] [33].

Aufgrund des hierarchischen Aufbaus von Schäumen, die nicht nur auf makroskopischer Ebene eine deutlich sichtbare zelluläre Struktur, sondern auch auf der Mikroebene Heterogenitäten im Zellsteg- bzw. Zellwandmaterial aufweisen (LAKES [53]), ist zur Bestimmung der effektiven Materialeigenschaften eine Homogenisierung durchzuführen. Erste analytische Verfahren wurden hierfür bereits 1889 von VOIGT [96] bzw. 1929 von REUSS [77] beschrieben. Heutzutage existiert eine Fülle an analytischen sowie numerischen Homogenisierungsverfahren (z. B. BENSOUSSAN *et al.* [3] (1978), SANCHEZ-PALENCIA und ZAOUÏ [80] (1987), NEMAT-NASSER und HORI [68] (1993), MARKOV und PREZIOSI [61] (2000) und TORQUATO [90] (2002)). Als Erweiterung auf die strukturmechanische Ebene ist zudem die Veröffentlichungen von LEBÉE und SAB [55] (2012) zur Homogenisierung von zellulären Sandwichplatten zu erwähnen.

Die meisten dieser Homogenisierungsverfahren sind jedoch nicht auf zufällig ungeordnete dreidimensionale Zellstrukturen anwendbar, da sie vor allem in Hinblick auf die Geometrie der betrachteten Zellstrukturen strikten Vorgaben unterliegen. Darüber hinaus unterscheiden sich zelluläre Strukturen von anderen mikroheterogenen Materialien durch dünnwandige Zellwände und große Hohlräume, wodurch die Biegedeformation der Zellwände nicht vernachlässigbar ist.

Ein Homogenisierungsverfahren, welches sich zur Bestimmung der effektiven Materialeigenschaften von zwei-, aber auch dreidimensionalen ungeordneten zellulären Strukturen eignet, wurde von HOHE und BECKER [43] entwickelt. Dies fordert die mechanische Äquivalenz eines repräsentativen Volumenelements der betrachteten Mikrostruktur und eines effektiven Mediums gleichen Volumens durch die Forderung, dass die mittlere Verzerrungsenergiedichte beider Volumenelemente äquivalent ist, wobei zudem im Volumenmittel die Äquivalenz der Deformationsgradienten gegeben sein muss.

1.3 Zielsetzung

Da rein deterministische Bewertungskonzepte und erste einfache Homogenisierungsanalysen nicht in der Lage sind die zufällige ungeordnete Mikrostruktur zellulärer Materialien in ausreichender Weise zu berücksichtigen, soll im Rahmen dieser Arbeit ein probabilistisches Homogenisierungsverfahren vorgestellt werden, welches auf der experimentellen Charakterisierung von realen Schäumen beruht. So werden auf der Basis der Wahrscheinlichkeitsverteilungen verschiedener Zufallsvariablen, wie der lokalen relativen Dichte, der Zellgröße und -orientierung, statistisch repräsentative Mikrostrukturmodelle generiert.

Im Gegensatz zu MONTE-CARLO-Analysen erfolgt die Berechnung der effektiven Materialeigenschaften auf einer vordefinierten Diskretisierung des Raums der Zufallsvariablen. Auf diese Weise muss nur eine begrenzte Anzahl ausgewählter Werte für die Zufallsvariablen analysiert werden, was zu einer erheblichen Reduzierung des Rechenaufwands führt. Zur Bestim-

1 Einführung

mung der effektiven Materialeigenschaften werden die Berechnungsergebnisse mit den entsprechenden Auftrittswahrscheinlichkeiten der einzelnen Zufallsvariablen gewichtet. Vor allem in Hinblick auf die Frage des Materialversagens bietet dieses Verfahren gegenüber MONTE-CARLO-Simulationen einen erheblichen Vorteil. So können selten auftretende Extremfälle durch eine entsprechende Diskretisierung des Zufallsraums mittels der probabilistischen Homogenisierungsanalyse gezielt tiefergehend untersucht werden.

Für die Homogenisierungsanalyse wird auf ein verzerrungsenergiebasiertes Verfahren zurückgegriffen, welches insbesondere auf zelluläre Werkstoffe mit geringer Dichte und großem Hohlraumvolumen abgestimmt ist. Zur tiefergehenden Untersuchung der Mikrostruktureigenschaften werden verschiedene lokale Auswerteverfahren aufgezeigt und deren Vor- und Nachteile diskutiert.

Da in der Anwendung vor allem die Bewertung von größeren Bauteilen mit mikrostrukturellen Anteilen von Bedeutung ist, erfolgt zudem eine Übertragung der zuvor auf Mikrostrukturen angewandten probabilistischen Methode auf strukturmechanische Ebene.

Darüber hinaus besteht eine zusätzliche Motivation dieser Arbeit in der Untersuchung des unbestrittenen, aber bis auf den heutigen Tag nicht vollends verstandenen Zusammenhangs zwischen der Anisotropie auf der Mikrostrukturebene und den effektiven Materialeigenschaften.

2 Kontinuumsmechanische und mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden zunächst die für diese Arbeit wesentlichen kontinuumsmechanischen Grundbegriffe erläutert (Abschnitt 2.1 bis 2.5) während eine weitaus umfangreichere Einführung in die Kontinuumsmechanik z. B. in ALTENBACH [1] zu finden ist. In PARISCH [72] wird darüber hinaus die sich aus der Kontinuumsmechanik ergebene Formulierung der Finite-Elemente-Methode (FEM) dargestellt und in JUNG und LANGER [48] wird eine Einführung in die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen mittels der Finite-Elemente-Methode gegeben. In Abschnitt 2.6 werden im Anschluss basierend auf der Darstellung in FAHRMEIR *et al.* [21] die benötigten Definitionen aus der Stochastik angegeben.

2.1 Kinematik und Verzerrung

Die Kinematik ist die Lehre der Bewegung von Punkten und Körpern im Raum. Eine allgemeine Bewegung eines Kontinuums setzt sich aus Anteilen der Starrkörpertranslation, der Starrkörperrotation und der Verzerrung zusammen. Zur Beschreibung der Bewegung des Kontinuums wird hier die LAGRANGESche Betrachtungsweise verwendet, bei der die Eigenschaften eines bestimmten materiellen Teilchens, welches sich zu verschiedenen Zeitpunkten an verschiedenen Orten befinden kann, beobachtet werden. Aus diesem Grund muss im Folgenden zwischen Materialpunkten und Raumpunkten unterschieden werden. In einem raumfesten kartesischen Bezugssystem mit den Basisvektoren ξ_1 , ξ_2 und ξ_3 wird ein Raumpunkt durch einen Ortsvektor \mathbf{x} festgelegt und ändert im Gegensatz zu einem Materialpunkt seine Position bei voranschreitender Zeit nicht. Dies bedeutet, dass die Lage eines Materialpunkts während einer Bewegung mit verschiedenen Raumpunkten übereinstimmt, so dass zu einem bestimmten Zeitpunkt jeder Materialpunkt durch einen Ortsvektor beschrieben werden kann. Durch die Menge aller Ortsvektoren die zum betrachteten Körper gehören, ist somit nicht nur zu einem beliebigen Zeitpunkt t die Lage, sondern auch die geometrische Gestalt des gesamten Körpers bestimmt. Dabei bezieht sich diese Momentankonfiguration immer auf eine im Prinzip beliebig zu wählende Referenzkonfiguration. Diese ist sinnvollerweise durch den Zeitpunkt zu wählen, in dem der betrachtete Körper nicht verformt ist. So wird üblicherweise – bei Erfüllung dieser Bedingung – die Ausgangslage ($t = 0$) des betrachteten Körpers zur Referenzkonfiguration definiert.

Für den gesamten Körper lässt sich die Abbildungsvorschrift $\chi : \Omega \rightarrow \hat{\Omega}$ aufstellen, wobei

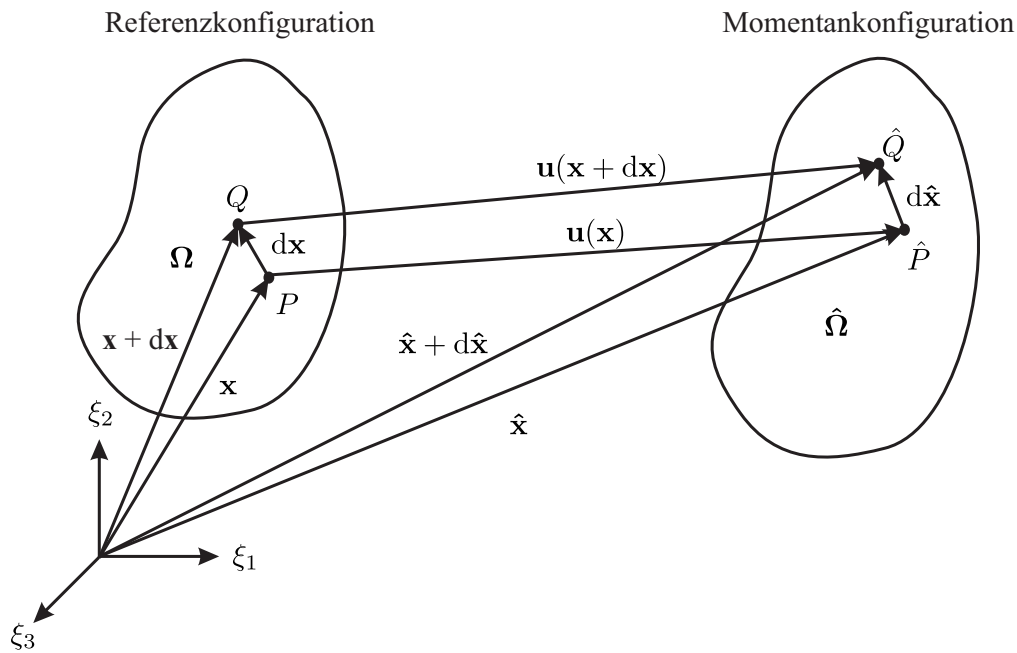


Abb. 2.1: Referenz- und Momentankonfiguration eines materiellen Körpers

wie in Abb. 2.1 mit Ω der Körper in der Referenzkonfiguration und mit $\hat{\Omega}$ der Körper in der Momentankonfiguration bezeichnet ist.

Gemäß der LAGRANGESchen Beschreibung ergibt sich folglich für einen einzelnen Materialpunkt in der Momentankonfiguration der Ortsvektor zu

$$\hat{\mathbf{x}} = \chi(\mathbf{x}, t). \quad (2.1)$$

Zur Beschreibung der lokalen Deformation des materiellen Punktes P , welcher gemäß (2.1) zur jeder Zeit t eindeutig durch den Ortsvektor $\hat{\mathbf{x}}$ identifiziert ist, wird als wichtige Größe der Kontinuumsmechanik der Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.2)$$

eingeführt. Dies ist ein Tensor zweiter Stufe, der im Allgemeinen eine unsymmetrische Koordinatenmatrix aufweist.

Zur Veranschaulichung sind in Abb. 2.1 zwei benachbarte Materialpunkte P und Q eingezeichnet, die durch das Linienelement $d\mathbf{x}$ in der Referenzkonfiguration miteinander verbunden sind. Das entsprechende Linienelement $d\hat{\mathbf{x}}$ in der Momentankonfiguration, welches die Materialpunkte \hat{P} und \hat{Q} verbindet, kann mit Hilfe des Deformationsgradienten \mathbf{F} gemäß

$$d\hat{\mathbf{x}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{x} \quad (2.3)$$

berechnet werden.

Die aus der Deformation resultierende Verschiebung eines einzelnen Materialpunkts wird durch die Differenz

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} \quad (2.4)$$

ausgedrückt.

Für den infinitesimalen Zuwachs $d\mathbf{u}$ entlang des Linienelements gilt zum einen

$$d\mathbf{u} = d\hat{\mathbf{x}} - d\mathbf{x} = (\mathbf{F} - \mathbf{1})d\mathbf{x} \quad (2.5)$$

und zum anderen ergibt sich das totale Differential des Verschiebungsfelds zu

$$d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (2.6)$$

Ein Komponentenvergleich der Gleichungen (2.5) und (2.6) führt zu dem Zusammenhang

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{F} - \mathbf{1}, \quad (2.7)$$

wodurch ersichtlich wird, dass bei der Bildung des Deformationsgradienten \mathbf{F} durch die totale Differentiation des Verschiebungsfelds der Bewegungsanteil der Starrkörpertranslation herausfällt, da dieser als eine Konstante im Verschiebungsfeld \mathbf{u} auftritt.

Die Bewegungsanteile der Starrkörperrotation und der Verzerrung sind hingegen im Deformationsgradienten \mathbf{F} noch enthalten. Mit einer polaren Zerlegung des Deformationsgradienten können diese beiden Anteile getrennt dargestellt werden. Der im Allgemeinen unsymmetrische Deformationsgradient \mathbf{F} spaltet sich somit in einen symmetrischen Strecktensor und einen Rotationstensor \mathbf{R} auf:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}. \quad (2.8)$$

Unterschieden werden muss dabei zwischen dem Rechtsstrecktensor \mathbf{U} und dem Linksstrecktensor \mathbf{V} , die sich in der Ausführungsfolge des Rotations- und des Strecktensors unterscheiden. Falls keine Deformationen oder nur reine Starrkörperbewegungen im Materialpunkt \mathbf{x} auftreten, entsprechen die Deformationstensoren \mathbf{U} und \mathbf{V} dem Einheitstensor $\mathbf{1}$.

Die Definition für den materiellen rechten CAUCHY-GREEN-Tensor ergibt sich bezogen auf die Referenzkonfiguration zu

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}\mathbf{U} \quad (2.9)$$

und entsprechend ist der räumliche linke CAUCHY-GREEN-Tensor bezogen auf die Momentankonfiguration zu

$$\mathbf{B} := \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}\mathbf{V} \quad (2.10)$$

definiert. Für den Fall des nicht deformierten Zustands, ergibt sich für beide CAUCHY-GREEN-Tensoren der Einheitstensor.

Da die Wahl eines Verzerrungsmaßes jedoch im Prinzip beliebig ist, treten in der Kontinuumsmechanik weitere Definitionen auf. Besonders günstig ist es dabei ein Verzerrungsmaß zu wählen, welches nicht nur für die Referenzkonfiguration null ergibt, sondern welches darüber hinaus frei von Starrkörperfreiheitsgraden sowie „materiell objektiv“ ist. So wird bei Erfüllung

dieser Bedingungen das Verzerrungsmaß nicht durch Rotation des betrachteten Körpers oder durch den Standort eines ruhenden bzw. bewegten Beobachters beeinflusst. Diese Forderung erfüllt der GREEN-LAGRANGE-Tensor

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}), \quad (2.11)$$

der sich anschaulich aus der Differenz der Linienelement-Quadrate in der Momentan- und in der Referenzkonfiguration

$$d\hat{\mathbf{x}}^2 - d\mathbf{x}^2 = (\mathbf{F}d\mathbf{x})^T \mathbf{F}d\mathbf{x} - d\mathbf{x}^T \mathbf{1}d\mathbf{x} = d\mathbf{x}^T (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1})d\mathbf{x} \quad (2.12)$$

ergibt. Der Klammerausdruck bildet dabei bis auf den fehlenden Faktor $\frac{1}{2}$ die Komponenten γ_{ij} des GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensors.

In vielen technischen Anwendungen sind die Komponenten $u_{i,j}$ des Verschiebungsgradienten klein, wodurch bei einer kartesischen Basis in den Komponenten des GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensors

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(F_{ki}F_{kj} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \quad (2.13)$$

die quadratischen Terme gegenüber den linearen vernachlässigt werden können. Dabei ist in Gleichung (2.13) zu beachten, dass sowohl das KRONECKER-Delta, das durch

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases} \quad (2.14)$$

definiert ist, als auch die EINSTEINSche Summenkonvention anzuwenden sind, so dass über in einem Produkt doppelt auftretende Indizes zu summieren ist.

Durch die Linearisierung ergibt sich somit für die Komponenten des infinitesimalen Verzerrungstensors

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.15)$$

die den technischen Dehnungen entsprechen.

2.2 Bilanzgesetze

Nachdem im vorherigen Abschnitt die Kinematik des Kontinuums dargestellt worden ist, wird sich an dieser Stelle mit der Ursache für das Auftreten von Bewegungen und Deformationen befasst, welches z. B. äußere Kräfte, Anfangsverschiebungen oder Temperaturdehnungen sein können. Darüber hinaus strebt ein System immer einem Gleichgewichtszustand zu, welcher durch Bilanzgleichungen beschrieben werden kann. Dies sind die mechanischen Massen-, Impuls- und Drehimpulserhaltungssätze und der erste thermodynamische Hauptsatz, welcher auch als Energieerhaltungssatz bezeichnet wird.

Zur Bestimmung des neuen Gleichgewichtszustands sind die Bilanzgleichungen in Form des Impuls-, Drehimpuls- und Massenerhaltungssatzes, die im Folgenden in LAGRANGEScher Beschreibung dargestellt werden, von wesentlicher Bedeutung.

Der Massenerhaltungssatz ist mit der Masse eines Teilchens $d\hat{m}$ durch

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{\Omega}} d\hat{m} = 0 \quad (2.16)$$

gegeben und fordert, dass sich die Masse des Volumens $\hat{\Omega}$ mit der Zeit nicht ändert.

Der Impulserhaltungssatz

$$\sum_n^i \mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{P} \quad (2.17)$$

besagt, dass die Summe aller auf einen Körper angreifenden Kräfte \mathbf{F}_i gleich der zeitlichen Änderung des Impulses $\frac{d}{dt} \mathbf{p}$ sein muss. Damit lässt sich das zweite NEWTONsche Gesetz der Punktmechanik auf Massekontinua in der Form

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho} \hat{u}_i d\hat{V} = \int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho} \hat{f}_i d\hat{V} + \int_{\partial\hat{\Omega}} \hat{t}_i d\hat{A} \quad (2.18)$$

erweitern. Dabei werden mit $\hat{\rho}$ die Dichte des Körpers, mit \hat{u}_i die zeitliche Ableitung der Komponenten der Verschiebungen, mit \hat{f}_i die Komponenten des innerhalb von $\hat{\Omega}$ wirkenden Volumenkraftvektors und mit \hat{t}_i die Komponenten des auf die Oberfläche $\partial\hat{\Omega}$ von $\hat{\Omega}$ wirkenden Spannungsvektors in der Momentankonfiguration bezeichnet.

Der Drehimpulserhaltungssatz

$$\sum_n^i \mathbf{M}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{L} \quad (2.19)$$

liefert dementsprechend den Zusammenhang, dass alle an einen Körper angreifenden Momente \mathbf{M}_i gleich der zeitlichen Änderung des Drehimpulses $\frac{d}{dt} \mathbf{L}$ sein müssen. Somit gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho} \epsilon_{ijk} \hat{h}_i \hat{u}_j d\hat{V} = \int_{\hat{\Omega}} \epsilon_{ijk} \hat{h}_i \hat{f}_j d\hat{V} + \int_{\partial\hat{\Omega}} \epsilon_{ijk} \hat{h}_i \hat{t}_j d\hat{A}, \quad (2.20)$$

wobei $\hat{h}_i = \hat{x}_i - \hat{x}_i^0$ mit dem Ortsvektor $\hat{\mathbf{x}}^0$ und mit ϵ_{ijk} das LEVI-CIVITA-Symbol bezeichnet wird.

Neben diesen drei mechanischen Erhaltungssätzen ist der erste Hauptsatz der Thermodynamik unverzichtbar, welcher durch

$$\partial E + \partial T = \partial Q + \partial W \quad (2.21)$$

mit der inneren Energie E , der kinetischen Energie T , der Wärme Q und der Arbeit W gegeben ist. Auch als Energieerhaltungssatz bezeichnet besagt dieser, dass in einem abgeschlossenen System die Gesamtenergie konstant ist. Dies bedeutet, dass bei einer Bewegung eines Körpers die Änderung der im Körper gespeicherten inneren Energie und die Änderung der

kinetischen Energie der Arbeit der Volumen- und Oberflächenkräfte gleich sein müssen. Mit dem Inkrement der spezifischen inneren Energie $d\hat{e}$ ergibt sich somit

$$\int_{\hat{\Omega}} d\hat{e}d\hat{V} + \int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho}\ddot{u}_i d\hat{u}_i d\hat{V} = \int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho}f_i d\hat{u}_i d\hat{V} + \int_{\partial\hat{\Omega}} \hat{t}_i d\hat{u}_i d\hat{A}. \quad (2.22)$$

Angemerkt sei an dieser Stelle, dass bei dissipativen Prozessen zudem der zweite Hauptsatz der Thermodynamik berücksichtigt werden muss. Auf die zugehörige Entropieungleichung wird jedoch nicht eingegangen, da sie für die Herleitungen in dieser Arbeit nicht benötigt wird.

2.3 Spannungsmaße und Verzerrungsenergiedichte

Spannungen in einen Körper $\hat{\Omega}$, der aufgrund des Einwirkens von äußeren Kräften verformt ist, lassen sich mit dem gedanklichen Aufschneiden dieses Körpers nach dem EULERSchen Schnittprinzip bestimmen. Der Spannungsvektor $\hat{\mathbf{t}}$ ist gegeben durch

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{d\hat{\mathbf{f}}}{d\hat{A}} \quad (2.23)$$

mit der infinitesimalen Schnittkraft $d\hat{\mathbf{f}}$ und dem infinitesimalen Flächenelement $d\hat{A}$, dessen Orientierung durch den Normalenvektor $\hat{\mathbf{n}}$ definiert ist. Um einen von der Schnittrichtung und damit einen vom Normalenvektor $\hat{\mathbf{n}}$ unabhängigen Spannungszustand anzugeben, werden drei unabhängige Spannungsvektoren benötigt, die zu einem Spannungstensor $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ zusammengefasst werden können. So bildet der nach CAUCHY benannte Spannungstensor den Normalenvektor $\hat{\mathbf{n}}$ auf den Spannungsvektor $\hat{\mathbf{t}}$ gemäß

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}\hat{\mathbf{n}} \quad (2.24)$$

ab, wobei sich sowohl die einwirkenden Kräfte als auch die Spannungen auf die Momentan-konfiguration beziehen. Ein Spannungsmaß, welches sich auf die nicht deformierte Schnittfläche $d\hat{A}$ der Referenzkonfiguration bezieht, ist der erste PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor \mathbf{P} . In Analogie zu (2.23) und (2.24) gelten die Beziehungen

$$\mathbf{t} = \frac{d\hat{\mathbf{f}}}{dA} \quad (2.25)$$

und

$$\mathbf{t} = \mathbf{P}\mathbf{n}. \quad (2.26)$$

Da sich bei den ersten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen die momentane Schnittkraft auf die nicht deformierte Fläche bezieht, werden sie auch als nominelle oder Ingenieurspannungen bezeichnet.

Der Zusammenhang zwischen den ersten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen und den CAUCHY-Spannungen ist durch die Transformationsgleichung

$$\mathbf{P} = \det(\mathbf{F})\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{T-1} \quad (2.27)$$

gegeben.

Zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen muss die CAUCHY-Spannungsformel (2.24) in Gleichung (2.18) eingesetzt werden. Dabei muss das Oberflächenintegral mit Hilfe des GAUSS-Schen Satzes in ein Volumenintegral überführt werden, so dass sich

$$\sigma_{ij,j} + \hat{\rho} \hat{f}_i = \hat{\rho} \ddot{u}_i \quad (2.28)$$

ergibt.

Falls die Bewegung hinreichend langsam ist, so dass die Trägheitskräfte vernachlässigt werden können, gehen die Bewegungsgleichungen in die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sigma_{ij,j} + \hat{\rho} \hat{f}_i = 0 \quad (2.29)$$

über. Da in diesem Fall die Bewegungsgleichungen in jedem materiellen Punkt exakt erfüllt werden müssen, wird diese Beziehung auch als starke Form des Gleichgewichts bezeichnet.

Im Gegensatz zum CAUCHY-Spannungstensor, dessen Symmetrie $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ aus dem Drehimpulserhaltungssatz (2.19) folgt, ist der erste PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor unsymmetrisch, was für das Aufstellen von konstitutiven Gleichungen ein erheblicher Nachteil ist. Aus diesem Grund wird der zum GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor energetisch konjugierte symmetrische zweite PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor τ eingeführt. Dieser bildet den normalen Vektor \mathbf{n} der Referenzkonfiguration auf den Spannungsvektor $\hat{\mathbf{t}}$ ab:

$$\hat{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}. \quad (2.30)$$

Dabei ist der Spannungsvektor durch

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{f}}{dA} \quad (2.31)$$

gegeben und die infinitesimale Schnittkraft $d\mathbf{f}$ entsteht durch die Projektion der tatsächlichen infinitesimalen Schnittkraft $d\hat{\mathbf{f}}$ in die Referenzkonfiguration:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{F}^{-1} d\hat{\mathbf{f}}. \quad (2.32)$$

Der Vergleich der Beziehung (2.31) mit (2.23) zeigt, dass der zweite PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor das Pendant der Referenzkonfiguration zum in der Momentankonfiguration formulierten CAUCHY-Spannungstensor ist.

Eine Beziehung zwischen dem ersten und zweiten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor ist durch

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} \quad (2.33)$$

gegeben.

Mit den in Abschnitt 2.1 eingeführten Verzerrungsmaßen kann das Inkrement der Verzerrungsenergiedichte des elastisch verformten Körpers bezogen auf die Referenzkonfiguration zu

$$de = P_{ij} dF_{ij} = \tau_{ij} d\gamma_{ij} \quad (2.34)$$

bestimmt werden, wobei durch

$$\tau_{ij} = \det(\mathbf{F}) F_{ik}^{-1} \sigma_{kl} F_{jl}^{-1} \quad (2.35)$$

die Komponenten des zweiten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors definiert sind.

Für den Fall, dass nur kleine Verschiebungsgradienten $u_{i,j}$ betrachtet werden, können in Gleichung (2.33) Glieder höherer Ordnung gegenüber den linearen Gliedern vernachlässigt werden, so dass für die Komponenten des zweiten PIOLA-KIRCHHOFF- und des CAUCHY-Spannungstensors näherungsweise

$$\tau_{ij} \approx \sigma_{ij} \quad (2.36)$$

gilt.

Für das Inkrement der Verzerrungsenergiedichte folgt damit näherungsweise

$$de \approx \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (2.37)$$

da die Verzerrungsenergiedichten e und \hat{e} , die sich auf die Referenz- bzw. die Momentankonfiguration beziehen, dann ebenfalls gleich sind. Bei irreversiblen Verformungen hingegen ist zu beachten, dass bei Entlastung des Körpers die Energie nicht vollständig zurückgewonnen werden kann, da sie teilweise zuvor in Wärme übergegangen ist.

2.4 Materialgleichungen

Der Zusammenhang zwischen den auftretenden Deformations- und Spannungszuständen wird durch das Materialverhalten definiert. So können für die zugehörigen Größen, die in den Abschnitten 2.1 und 2.3 eingeführt wurden, mittels Materialgleichungen Verknüpfungen hergestellt werden, wobei für verschiedene Materialien verschiedene Stoffgesetze gelten. Da im Rahmen dieser Arbeit das elastische Verhalten und die Plastizität von Metallen sowie das hyperelastische Verhalten von Polymeren von Bedeutung sind, wird sich an dieser Stelle hierauf beschränkt. Eine Definition für hyperelastisches Materialverhalten ist z. B. in STOMMEL *et al.* [88] und PANISCH [72] zu finden, während das elastisch-plastische Materialverhalten sowie eine Vielzahl weiterer Materialgesetze in RÖSLER *et al.* [79] dargestellt sind.

2.4.1 Elastisches Verhalten

Das rein elastische Verhalten zeichnet sich durch ein vollständig reversibles Verformungsverhalten aus. Somit wird keine mechanische Arbeit in nicht-mechanische Energieformen wie z. B. Wärme umgesetzt. Das wichtigste elastische Stoffgesetz ist das HOOKEsche Gesetz, welches allerdings nur für kleine Verformungen gültig ist. Für die Anwendung auf das Deformationsverhalten von Metallen ist dies jedoch keine bedeutende Einschränkung, da der elastische Anteil an der Verformung immer klein ist.

Das HOOKEsche Gesetz der linearen Elastizitätstheorie ist gegeben durch

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (2.38)$$

wobei

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 e}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \text{konst} \quad (2.39)$$

die Komponenten des 4-stufigen Elastizitätstensors sind. Aufgrund von Symmetriebedingungen lassen sich die 81 Komponenten des Elastizitätstensors auf 21 unabhängige Komponenten reduzieren. Eine ausführliche Darstellung hierzu ist in RÖSLER *et al.* [79] zu finden. Für ein isotropes Material, in dem definitionsgemäß die Eigenschaften in allen Raumrichtungen gleich sein müssen, lassen sich die Komponenten des Elastizitätstensors mittels dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktions- bzw. POISSONzahl ν durch

$$C_{ijkl} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2.40)$$

ausdrücken.

2.4.2 Hyperelastisches Verhalten und Relaxation

Als Hyperelastizität wird das nichtlineare Verhalten von hochelastischen Materialien mit Dehnungen von bis zu mehreren hundert Prozent, wie sie z. B. bei Gummi aber auch zahlreichen Polymeren auftreten, bezeichnet, falls die Verzerrungsenergiegedichte ein Potential der Spannung ist.

Zur Beschreibung von hyperelastischen Materialverhalten existiert eine Vielzahl an Materialmodellen, die auf der Reversibilität der elastischen Formänderung basieren. Durch Ableitung des zugehörigen Potentials nach der Deformation kann die entsprechende Spannungs-Dehnungs-Beziehung ermittelt werden, wobei das Potential auch als Verzerrungsenergiefunktion bezeichnet wird und ein Maß für die im Material infolge der Deformation gespeicherten elastischen Energie darstellt.

In Rahmen dieser Arbeit wird das OGDEN-Modell verwendet, bei dem die Verzerrungsenergiefunktion W für ein inkompressibles Material durch einen Polynomansatz der Form

$$W = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{(k)}}{\alpha^{(k)}} (\lambda_1^{\alpha^{(k)}} + \lambda_2^{\alpha^{(k)}} + \lambda_3^{\alpha^{(k)}} - 3) \quad (2.41)$$

bestimmt ist mit den OGDEN-Materialkonstanten μ_i und α_i sowie den Eigenwerten λ_i mit $i = 1, 2, 3$ des rechten CAUCHY-GREEN-Tensors \mathbf{C} (Gleichung (2.9)) für die

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, \quad (2.42)$$

also Inkompressibilität, gelten muss (OGDEN [69]).

Für die praktische Anwendung ist die Summe in Gleichung (2.41) auf eine endliche Anzahl an Termen zu begrenzen. Des Weiteren ist zu beachten, dass das OGDEN-Modell kein physikalisch motiviertes Materialmodell ist. Dies hat zur Folge, dass Parameterkombinationen existieren, die zu physikalisch nicht zulässigen Verläufen der Spannungs-Dehnungs-Kurven führen. So wird von OGDEN für die Materialkonstanten die Bedingung

$$\sum_{i=1}^M \mu_{(i)} \alpha_{(i)} = 2\mu \quad (2.43)$$

mit $M \in \mathbb{N}$ und dem Schubmodul μ in der spannungsfreien Konfiguration gefordert (OGDEN *et al.* [70]), wobei eine Linearisierung das HOOKESche Gesetz (2.38) ergeben muss.

Aufgrund ihrer Mikrostruktur bestehend aus Polymerketten zeigt eine Vielzahl an Kunststoffen ein ausgeprägtes Relaxationsverhalten. Da bei einer plötzlich auftretenden Dehnung die Polymerketten gespannt werden, kommt es zunächst zu einem starken Spannungsanstieg, bei weiter anhaltender Dehnung entschlaufen sich die Polymerketten jedoch mit der Zeit und gleiten aneinander ab, was folglich zu einer Spannungsabnahme führt. Für verschiedene Belastungsgeschwindigkeiten ergeben sich somit auch Spannungs-Dehnungs-Kurven mit signifikanten Unterschieden in den Spannungsplateaus, wobei der charakteristische Verlauf der Kurven erhalten bleibt (z. B. DANIEL *et al.* [12]).

Aufgrund dieser Zeit-, aber auch Temperatur- und Frequenzabhängigkeit der Spannungs-Dehnungs-Beziehung wird dieses Materialverhalten als viskoelastisch bezeichnet. Zu deren Beschreibung wird in Rahmen dieser Arbeit auf die PRONY-Reihenentwicklung des Relaxationsmoduls der Schubspannungen $\mu_r(t)$ zurückgegriffen. Für diesen gilt

$$\mu_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_r(t) \quad (2.44)$$

$$\mu_0 = \mu_r(0), \quad (2.45)$$

so dass sich mit dem Relaxationsmodul der Schubspannungen G_r der dimensionslose Relaxationsmodul der Schubspannungen zu

$$\mu_r(t) = \frac{G_r(t)}{\mu_0} \quad (2.46)$$

ergibt. Der normierte Relaxationsmodul der Schubspannungen ergibt sich schließlich durch eine PRONY-Reihenentwicklung der Form

$$\mu_r(t) = 1 - \sum_{i=1}^N \bar{g}_i^p [1 - \exp(-t/\tau_i^p)] \quad (2.47)$$

mit den Materialkonstanten \bar{g}_i^p und τ_i^p (STOMMEL *et al.* [88]).

2.4.3 Plastisches Verhalten

Im Gegensatz zu den zuvor dargestellten elastischen Verformungen sind plastische Verformungen irreversibel. Dies bedeutet, dass ein Körper, der plastisch verformt wurde, bei Entlas-

des Elastizitätsmoduls näher einzugehen, sei angemerkt, dass bei experimentell gemessenen Spannungs-Dehnungs-Kurven die Steigung aufgrund von z. B. Setzungseffekten zu Beginn zumeist etwas geringer ist.

Ebenso ist es unmöglich eine scharfe Grenze zwischen elastischer und plastischer Verformung zu ziehen. Für die Spannungs-Dehnungs-Kurve bedeutet dies, dass die Steigung sukzessive abnimmt. Um doch einen Grenzwert ermitteln zu können, wird im Ingenieurwesen als Fließgrenze der Spannungswert $R_{p0,2}$ angegeben, bei dem 0,2 % bleibende Dehnung erreicht wird.

Nachdem plastische Verformung eingesetzt hat, steigen die Werte der technischen Spannung zunächst weiter bis zu einem Maximum an, welches als Zugfestigkeit R_m bezeichnet wird. In diesem Bereich kommt es zu einer Einschnürung in der Probe, wodurch sich die plastische Verformung auf diesen Bereich konzentriert. Da sich durch die Einschnürung der Querschnitt der Probe drastisch verringert, fällt die Spannungs-Dehnungs-Kurve in Abb. 2.2(a) ab, obwohl innerhalb der Probe die Spannungen weiterhin bis zum vollständigen Versagen bei der Bruchdehnung $\varepsilon_{\text{Bruch}}$ ansteigen.

Für ein hyperelastisches Material ist in Abb. 2.2(b) eine charakteristische Spannungs-Dehnungs-Kurve, die sich im Allgemeinen durch ihr nichtlineares Verhalten auszeichnet, dargestellt. Da hyperelastische Materialien ein wegunabhängiges, elastisches Verhalten aufweisen, sind der Be- und Entlastungspfad in Abb. 2.2(b) deckungsgleich.

Während zur Bestimmung der Materialparameter bei linear elastischem Materialverhalten die Durchführung von einachsigen Zug- und Druckversuchen in aller Regel ausreichend ist, ist aufgrund komplexer Zusammenhänge die Bestimmung der Materialparameter für hyperelastisches Materialverhalten weitaus aufwändiger.

2.4.5 Plastische Stoffgesetze

Da in Realität und insbesondere in Schäumen mit einer ungeordneten Mikrostruktur immer mehrachsige Spannungszustände auftreten, müssen die Erkenntnisse der an elastisch-plastischen Materialien durchgeführten einachsigen Zugversuche erweitert werden. So wird die Grenze zwischen elastischem und plastischem Verhalten mittels Fließbedingungen definiert und entsprechende Fließgesetze ermöglichen die Bestimmung der plastischen Verformung eines Werkstoffs. Für einen Zugstab mit isotropen Materialverhalten tritt näherungsweise plastische Verformung bei

$$\sigma = \sigma_y \quad (2.50)$$

wobei σ_y als Fließspannung bezeichnet wird, auf. Um diese Fließbedingung auf einen mehrachsigen Spannungszustand übertragen zu können, wird aus den sechs unabhängigen Komponenten eines Spannungstensors eine skalare Vergleichsspannung σ_V berechnet. Damit ergibt sich die Fließbedingung für einen mehrachsigen Spannungszustand zu

$$\sigma_V(\sigma_{ij}) = \sigma_y \quad (2.51)$$

Üblicher ist jedoch die Darstellung als Fließfunktion

$$\Phi(\sigma_{ij}) = \sigma_V(\sigma_{ij}) - \sigma_y, \quad (2.52)$$

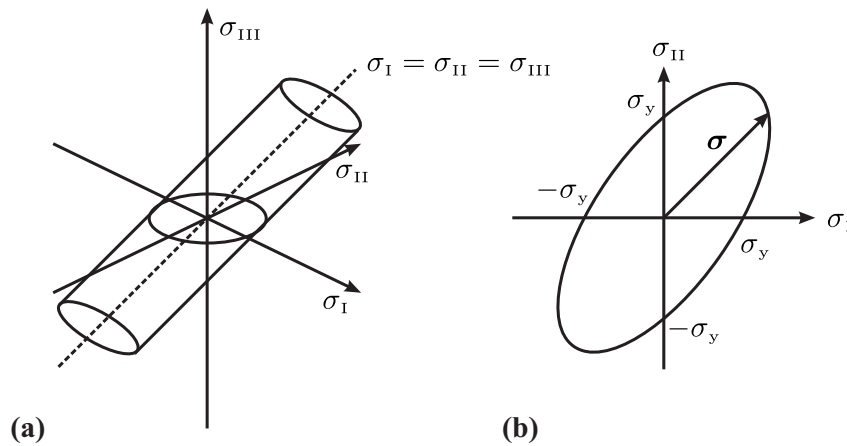


Abb. 2.3: Fließfläche für beliebige Spannungszustände im Hauptspannungsraum (a) und Fließfläche für $\sigma_{III} = 0$ (b)

wobei elastisches Verhalten für

$$\Phi(\sigma_{ij}) < 0 \quad (2.53)$$

und plastisches Verhalten für

$$\Phi(\sigma_{ij}) = 0 \quad (2.54)$$

vorliegt. Der Zustand

$$\Phi(\sigma_{ij}) > 0 \quad (2.55)$$

ist hingegen unzulässig, wofür eine Begründung z. B. in RÖSLER *et al.* [79] zu finden ist.

Bei isotropen Materialverhalten gilt für die Fließfunktion

$$\Phi(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = 0, \quad (2.56)$$

wobei σ_I , σ_{II} und σ_{III} die Hauptspannungen sind, die sich bei einer Hauptachsentransformation als die Eigenwerte der Eigenwertgleichung

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0 \quad (2.57)$$

mit den Invarianten

$$J_1 = \text{Sp}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.58)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} [(\text{Sp } \boldsymbol{\sigma})^2 - \text{Sp}(\boldsymbol{\sigma}^2)] \quad (2.59)$$

$$J_3 = \det(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.60)$$

ergeben.

In Abb. 2.3(b) ist die VON-MISES-Fließfläche, die im Spannungsraum die Grenze zwischen elastischen und plastischen Verformungen definiert, für einen ebenen Spannungszustand im

Hauptspannungsraum dargestellt, wobei der eingezeichnete Spannungszustand die Fließfläche berührt und somit das Material plastiziert.

Für verschiedene Materialien existieren verschiedene Fließbedingungen. Da im Rahmen dieser Arbeit die Fließbedingung nach VON MISES, die auch als Gestaltsänderungshypothese bezeichnet wird, von großer Bedeutung ist, soll auf diese hier näher eingegangen werden. Diese eignet sich vor allem um die plastische Verformung von Metallen zu beschreiben, wobei aufgrund der polykristallinen Struktur Abgleitvorgänge stattfinden. Somit sind Schubspannungen für die plastische Verformung verantwortlich, wobei es zum Wandern von Versetzungen, aber nicht zu einer Änderung des Volumens kommt. Aus diesem Grund wird angenommen, dass nur die Abweichung eines Spannungszustands von einem hydrostatischen Spannungszustand ($\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$) verantwortlich für die plastische Verformung sein kann. Damit lässt sich im Hauptspannungsraum die Fließfläche als ein Zylinder um die hydrostatische Raumdiagonale ($\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$) interpretieren, die für einen beliebigen Spannungszustand in Abb. 2.3(a) dargestellt ist.

Es gilt für den hydrostatischen Spannungsanteil

$$\sigma_h = \frac{1}{3}\sigma_{ii}, \quad (2.61)$$

womit sich der Spannungsdeviator in Indexschreibweise zu

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_h \quad (2.62)$$

ergibt.

Die Berechnung der Hauptspannungen σ'_I , σ'_{II} und σ'_{III} des Spannungsdeviators σ' erfolgt erneut durch die Bestimmung der Eigenwerte der Eigenwertgleichung

$$\sigma'^3 - J'_1\sigma'^2 + J'_2\sigma' - J'_3 = 0. \quad (2.63)$$

Des Weiteren wird isotropes Materialverhalten angenommen, womit die Fließfunktion keine Abhängigkeit von den Hauptspannungsrichtungen, welche die Eigenvektoren der Eigenwertgleichung sind, besitzt und somit nur noch von den drei Hauptspannungen σ'_I , σ'_{II} und σ'_{III} des Spannungsdeviators beschrieben werden kann. In Folge dessen kann die Fließfunktion in Abhängigkeit von den Invarianten J'_1 , J'_2 und J'_3 ausgedrückt werden, die sich aus den Hauptspannungen des Spannungsdeviators analog zu den Gleichungen (2.58) bis (2.60) ergeben. Da für den Spannungsdeviator $J'_1 = 0$ gilt, ist die Fließfunktion nur noch von den Invarianten J'_2 und J'_3 abhängig.

Bei der Fließbedingung nach VON MISES wird die dritte Invariante J'_3 jedoch vernachlässigt, so dass genau dann plastisches Fließen einsetzt, wenn die zweite Invariante J'_2 einen materialspezifischen Schwellenwert erreicht. Die Fließbedingung nach VON MISES, in Invarianten ausgedrückt, ergibt sich somit zu

$$\Phi = \sqrt{3J'_2} - \sigma_y = 0. \quad (2.64)$$

und für die VON-MISES-Vergleichsspannung

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} \quad (2.65)$$

gilt in Hauptspannungen

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2]} \leq \sigma_y. \quad (2.66)$$

Neben der Fließbedingung benötigt ein plastisches Stoffgesetz zudem noch eine Fließ- sowie eine Verfestigungsregel. Dabei wird durch die assoziierte Fließregel

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = \Lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.67)$$

der Zuwachs an plastischen Dehnungen formuliert, wobei ein rein deviatorischer Zustand hervorgerufen wird, da die plastischen Dehnungszinkremente in Richtung der Raumdiagonalen ausgerichtet sind.

Der LANGRANGESche Multiplikator in (2.67) ist durch

$$\Lambda = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon^{pl}}{\sigma_y} \quad (2.68)$$

gegeben und das Inkrement der plastischen VON-MISES-Vergleichsdehnung ist durch

$$d\varepsilon_v^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^{pl'} d\varepsilon_{ij}^{pl'}} \quad (2.69)$$

definiert.

Das zudem benötigte Verfestigungsgesetz legt darüber hinaus fest auf welche Weise die Fließbedingung während des Fließens modifiziert wird. So wird isotrope Verfestigung durch Expansion und kinematische Verfestigung durch Verschiebung der Fließfläche beschrieben.

2.5 Randwertproblem

Die Bestimmung des Verschiebungs- und Spannungsfelds eines Körpers, auf den zu einem von der Referenzzeit verschiedenen Zeitpunkt Kräfte wirken, kann mit dem Lösen des allgemeinen Rand- und Anfangswertproblem unter isothermen Bedingungen, also ohne Berücksichtigung von Temperaturänderungen, erfolgen. Hierzu wird ein Körper Ω betrachtet von dem die Positionen aller materieller Punkte in der Referenzkonfiguration bekannt sind. Die Berandung des Körpers ist gegeben durch $\partial\Omega$ mit $\partial\Omega^u \cup \partial\Omega^t$. Wie in Abb. 2.4(a) dargestellt werden entlang des Teilrands $\partial\Omega^u$ die Verschiebungen u_i und entlang des Teilrands $\partial\Omega^t$ die Komponenten t_i

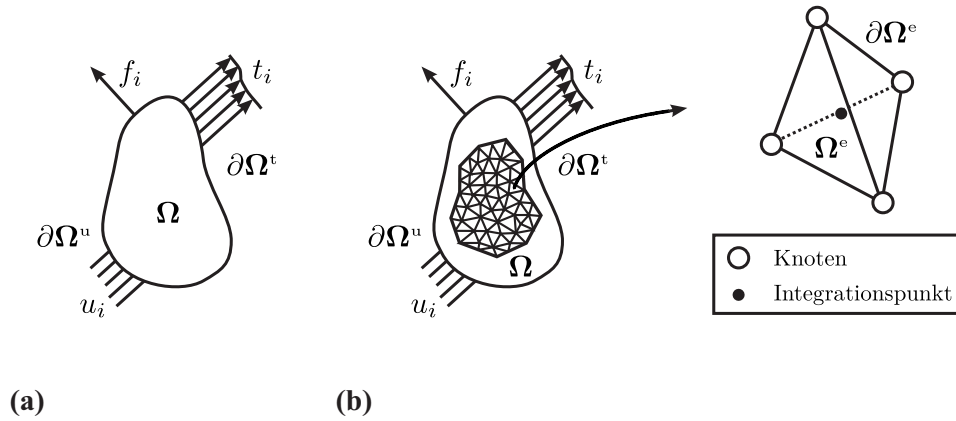


Abb. 2.4: Randwertproblem (a) und Finite-Elemente-Zerlegung (b)

des Spannungsvektors vorgegeben. Darüber hinaus wird der Körper durch im Inneren wirkende Volumenkräfte f_i belastet.

Mit den kinematischen Beziehungen (2.13) oder (2.15), den Bewegungsgleichungen (2.28) oder (2.29) und den gewählten Materialbeziehungen kann ein vollständiges Gleichungssystem aufgestellt werden. Zur Lösung dieses Differentialgleichungssystems, welches die mechanischen Felder in der Momentankonfiguration liefert, müssen die Randbedingungen auf $\partial\Omega^u$ und $\partial\Omega^t$ und die Geschwindigkeit \dot{u}_i zur Referenzzeit als Anfangsbedingung vorgegeben werden. Unterschieden wird hierbei zwischen kinematisch zulässigen Verschiebungs- und Deformationsfeldern, die die kinematischen Beziehungen und die Verschiebungsrandbedingungen erfüllen, und statisch zulässigen Spannungsfeldern, die die Gleichgewichts- und Spannungsrandbedingungen erfüllen.

Zur Lösung dieses mathematischen Problems wird in aller Regel auf numerische Näherungsverfahren zurückgegriffen, da eine analytische Lösung nur selten bestimmt werden kann. Das Prinzip der virtuellen Arbeit ist hierbei ein weit verbreiteter Variationsansatz mit dem auf numerischen Weg eine Lösung bestimmt werden kann.

Zur Herleitung des HAMILTON-Variationsprinzips werden die Bewegungsgleichungen (2.28) skalar mit einer vektorwertigen Testfunktion δu_i multipliziert, die beliebig gewählt werden kann, aber entlang des Teilrands $\partial\Omega^u$ verschwinden muss. Zudem wird über das Volumen des materiellen Körpers integriert, so dass sich

$$\int_{\hat{\Omega}} (\sigma_{ij,j} + \hat{\rho} \hat{f}_i) \delta u_i d\hat{V} = \int_{\hat{\Omega}} \hat{\rho} \hat{\ddot{u}}_i \delta u_i d\hat{V} \quad (2.70)$$

bzw.

$$\int_{\hat{\Omega}} (\sigma_{ij,j} + \hat{\rho} \hat{f}_i) \delta u_i d\hat{V} = 0 \quad (2.71)$$

ergibt. Da nach partieller Integration der Spannungsterme die Beziehungen nur im Integralmittel über den gesamten Körper und nicht punktweise exakt erfüllt sein müssen, wird Gleichung (2.70) als die schwache Form der Bewegungsgleichungen und Gleichung (2.71) als die

schwache Form des Gleichgewichts bezeichnet.

Nach Anwendung des GAUSSSchen Satzes sowie der CAUCHY-Spannungsformel (2.24) auf die zu Gleichung (2.70) äquivalente Beziehung in der Referenzkonfiguration ergibt sich

$$\int_{\Omega} \tau_{ij} \delta \gamma_{ij} dV + \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV = \int_{\Omega} \rho f_i \delta u_i dV + \int_{\partial \Omega} t_i \delta u_i dA \quad (2.72)$$

bzw.

$$\delta E - \delta W + \delta T = 0, \quad (2.73)$$

wobei δE die virtuelle Änderung der Formänderungsarbeit, δW die virtuelle Änderung der Arbeit der äußeren Kräfte, die hier als Totlasten angenommen sind, und δT die virtuelle Änderung der kinetischen Energie ist.

In Worten ausgedrückt besagt das HAMILTON-Variationsprinzip, dass sich ein Körper auf den die äußeren Kräfte f_i und t_i wirken, genau dann im Gleichgewicht oder in einer Lage, die die Bewegungsgleichung (2.28) erfüllt, ist, wenn bei einer virtuellen Auslenkung des Körpers aus dieser Lage die Gleichung (2.73) erfüllt ist.

Eine Anwendung findet das Prinzip der virtuellen Arbeit in numerischen Verfahren, um das mechanische Randwertproblem zu lösen. Insbesondere hat es sich bei der Methode der finiten Elemente durchgesetzt, bei dem es sich um ein numerisches Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen handelt. Den Ausgangspunkt bildet, wie in Abb. 2.4(b) dargestellt, eine Zerlegung des betrachteten Gebiets in eine Vielzahl von finiten, aber nicht infinitesimal kleinen Elementen. Innerhalb der Elemente werden Ansatzfunktionen (z. B. RITZ-Ansätze) definiert, wobei für das Verschiebungsfeld u_i und das Feld der virtuellen Verschiebungen δu_i üblicherweise derselbe Ansatz zu wählen ist. Des Weiteren müssen die Ansatzfunktionen konform in Bezug auf die Nachbarelemente sein, mindestens konstante Verzerrungen liefern und bei Starrkörperverschiebungen dürfen keine Verzerrungen auftreten. Genauso wie die Anfangs- und Randbedingungen werden diese Ansatzfunktionen in die zu lösende Differentialgleichung eingesetzt, so dass ein zumeist numerisch zu lösendes Gleichungssystem entsteht.

In Gleichung (2.72) bedeutet dies eine Zerlegung des Integrationsbereichs in Elemente finiter Größe, wodurch sich die Integrale über das Gesamtgebiet als Summe der Integrale über die einzelnen Elemente berechnen lassen:

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \tau_{ij} \delta \gamma_{ij} dV + \sum_e \int_{\Omega^e} \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV = \sum_e \int_{\Omega^e} \rho f_i \delta u_i dV + \sum_e \int_{\partial \Omega^e} t_i \delta u_i dA. \quad (2.74)$$

Zur Bestimmung des Verschiebungsfelds u_i innerhalb der Elemente erfolgt eine Interpolation aus den Verschiebungen der zum Element gehörenden diskreten Knotenpunkten (Abb. 2.4(b)). Zur numerischen Integration wird die GAUSSSche Quadraturformel

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \alpha_i \quad (2.75)$$

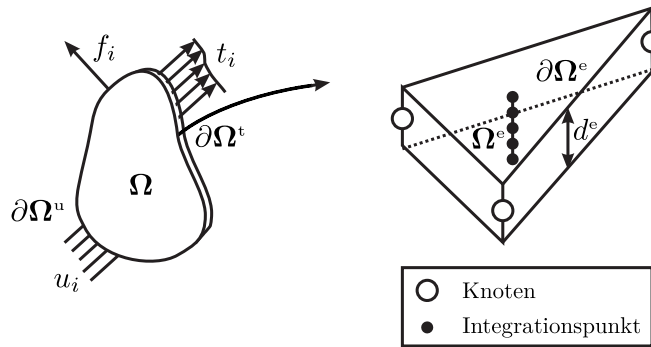


Abb. 2.5: Finite-Elemente-Zerlegung in dreieckige Schalenelemente

mit den Gewichten α_i angewandt, so dass das Integral durch die gewichtete Summe von Funktionswerten an den Stützstellen x_i approximiert werden kann. Auf gleiche Weise werden darüber hinaus die virtuellen Verschiebungen δu_i innerhalb der Elemente durch Interpolation aus den virtuellen Verschiebungen an den Knoten gewonnen.

Für die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten dreidimensionalen Mikrostrukturen erfolgt die Modellierung der Zellwände mittels dreieckigen Schalenelementen, wie sie in Abb. 2.5 dargestellt ist. Die numerische Integration wird hierbei in einen planaren Anteil, für den erneut die GAUSSsche Quadraturformel angewandt wird und eine SIMPSON-Integration in Dickenrichtung aufgeteilt, wobei im Gegensatz zur GAUSSschen Quadratur bei der SIMPSON-Integration die Lage der außenliegenden Integrationspunkte mit den Intervallgrenzen übereinstimmt.

Bei der numerischen Integration mittels der SIMPSON-Regel

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{6}(b-a) \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad (2.76)$$

wird die schwer zu integrierende Funktion $f(x)$ basierend auf den SIMPSON-Integrationspunkten längs der Elementdicke d^e durch eine exakt zu integrierende Parabel angenähert.

Eine ausführliche Darstellung der Finite-Elemente-Methode und der damit verbundenen numerischen Integration mittels Quadraturformeln ist z. B. in GOLUB und WELSCH [29], JUNG und LANGER [48] und PARISCH [72] zu finden.

2.6 Stochastische Grundlagen

Das Ziel dieser Arbeit besteht in der zuverlässigen Vorhersage des effektiven Materialverhaltens fester Schäume mit ungeordneter Mikrostruktur. Zur Bestimmung dieser makroskopischen Materialparameter sind statistische Auswerteverfahren unverzichtbar, wobei neben der Ermittlung der Mittelwerte und Korrelationen insbesondere die Bestimmung der Unschärfen sowie der oberen und unteren Grenzwerte von außerordentlicher Bedeutung ist.

Die hierfür verwandten Größen und Zusammenhänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden im Folgenden dargestellt, wobei sich in Abschnitt 2.6.1 zunächst auf eindimensionale Zufallsvariablen beschränkt wird, ehe in Abschnitt 2.6.2 eine Erweiterung auf mehrdimensionale Zufallsvariablen erfolgt und verschiedene Formen der Korrelation betrachtet werden.

Neben den hier sehr knapp angegebenen Definitionen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, ist eine sehr viel ausführlichere und tiefer gehende Abhandlung zu statistischen Verfahren und Größen der Stochastik z. B. in FAHRMEIR *et al.* [21] zu finden.

2.6.1 Eindimensionale Zufallsvariablen

In der Mathematik werden alle nichtdeterministischen Größen, die also nicht exakt vorhersehbar sind, als stochastische Größen bezeichnet. Beschrieben werden diese Zufallsvariablen durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen, da diese in der Lage sind die Unschärfe dieser Größen korrekt wiederzugeben.

Im Falle einer diskreten Zufallsvariable X_d , die also nur endlich oder abzählbar unendlich viele Werte $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ annehmen kann, ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung durch die Wahrscheinlichkeiten

$$P(X_d = x_i) = p_i \quad (2.77)$$

mit $i = 1, 2, \dots, k, \dots$ gegeben, wobei wegen der Axiome von KOLMOGOROW

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad (2.78)$$

und

$$\sum_{i \geq 1} p_i = 1 \quad (2.79)$$

gelten muss. Des Weiteren ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$ einer diskreten Zufallsvariable X_d für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} P(X_d = x_i) = p_i, & x = x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.80)$$

definiert. Unter der Voraussetzung, dass die Werte x_i der Größe nach geordnet sind, ergibt sich die Verteilungsfunktion $F(x)$ einer diskreten Zufallsvariable X_d zu

$$F(x) = P(X_d \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i), \quad (2.81)$$

wobei der Verlauf immer eine aufsteigende Treppenfunktion darstellt, die an den Stellen x_i um den Wert $p_i = f(x_i)$ nach oben springt und dazwischen konstant verläuft.

Einen Sonderfall bildet die diskrete Gleichverteilung für die

$$P(X_d = x_i) = \frac{1}{k} \quad (2.82)$$

mit $i = 1, \dots, k$ gilt.

Eine Maßzahl für das Zentrum einer diskreten Verteilung bildet der Erwartungswert. Dieser berechnet sich für eine diskrete Zufallsvariable zu

$$E(X_d) = \sum_{i \geq 1} x_i p_i = \sum_{i \geq 1} x_i f(x_i). \quad (2.83)$$

und gibt damit die Lage der Verteilung basierend auf einem Zufallsexperiment an. Das arithmetische Mittel, welches durch

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.84)$$

definiert ist, liefert hingegen den Schwerpunkt der Daten, so dass an dieser Stelle ausdrücklich darauf hingewiesen werden soll, dass beide Maßzahlen deutlich voneinander abweichen können.

Als die wichtigsten Streuungsparameter sind die Varianz einer diskreten Zufallsvariable durch

$$\text{Var}(X_d) = \sum_{i \geq 1} (x_i - E(X_d))^2 f(x_i) \quad (2.85)$$

und die Standardabweichung durch

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X_d)} \quad (2.86)$$

definiert.

Für jede nicht symmetrische Verteilung ist zudem die Schiefe

$$v(X_d) = \frac{E(X_d^3) - 3 \text{Var}(X_d) E(X_d) - E(X_d)^3}{\text{Var}(X_d)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.87)$$

eine wichtige Maßzahl, da sie anzeigt ob und wie stark eine Verteilung nach rechts (positive Schiefe) oder nach links (negative Schiefe) geneigt ist.

Während statistische Auswerteverfahren immer diskrete Verteilungen liefern, treten in der Realität bei der überwiegenden Anzahl an Materialparametern im Intervall $[a, b]$ hingegen nicht das Ereignis a oder b auf, sondern auch alle Zwischenwerte können angenommen werden, so dass für stetige Zufallsgrößen für die möglichen Ergebnisse $a \leq X_s \leq b$ gilt. Aus diesem Grund sind die Definitionen der diskreten Zufallsvariablen X_d auf die für stetige Zufallsvariablen X_s zu übertragen, was letztendlich einer Überführung des Summenzeichens in ein Integral entspricht, womit für stetige Zufallsvariablen für jedes Intervall $[a, b]$

$$P(a \leq X_s \leq b) = \int_a^b f(x) dx \quad (2.88)$$

mit der Bedingung

$$f(x) \geq 0 \quad (2.89)$$

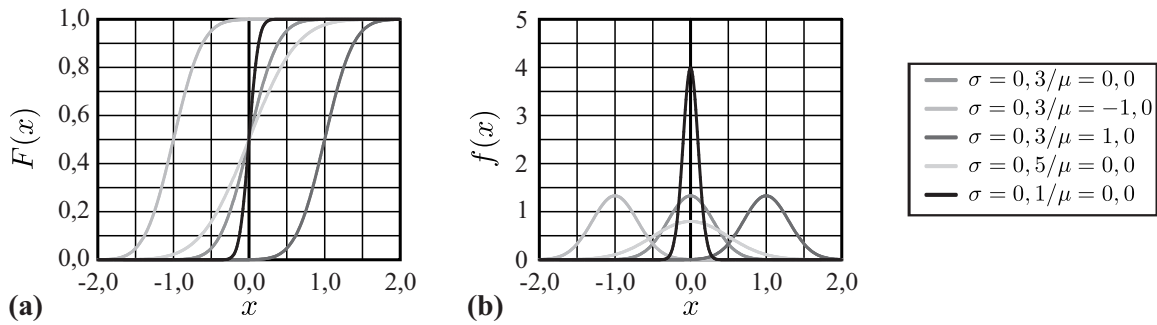


Abb. 2.6: GAUSSsche Normalverteilungen (a) und zugehörige Dichtefunktionen (b)

für die Wahrscheinlichkeitsdichte und der Normierungseigenschaft

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \tag{2.90}$$

gelten muss.

Auf gleiche Weise ergibt sich die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariable X_s zu

$$F(x) = P(X_s \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt. \tag{2.91}$$

Für den besonderen Fall der stetigen Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b]$ ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsdichte zu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.92}$$

Für den Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen gilt

$$E(X_s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx \tag{2.93}$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$.

Ein weiterer Lageparameter für stetige Zufallsvariablen ist durch den Median $Med(x)$ gegeben, der die Fläche unterhalb der Dichtefunktion in zwei gleich große Teile aufteilt. Es gilt also für die Verteilungsfunktion

$$F(Med(x)) = 0,5. \tag{2.94}$$

Für die Streuungsparameter der stetigen Zufallsvariablen ergibt sich die Varianz zu

$$\text{Var}(X_s) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X_s))^2 f(x)dx \tag{2.95}$$

und die Standardabweichung entsprechend zu

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X_s)}. \quad (2.96)$$

Neben der Gleichverteilung existiert bei stetigen Zufallsgrößen eine Vielzahl weiterer spezieller Verteilungsfunktionen. Die Darstellung im Folgenden beschränkt sich allerdings auf die GAUSSsche Normalverteilung und die logarithmische Normalverteilung, da diese beiden Verteilungen für diese Arbeit von großer Bedeutung sind.

Mittels der symmetrischen GAUSSschen Normalverteilung lassen sie sehr viele diskrete Verteilungsfunktionen sehr gut approximieren. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte ist für eine Zufallsvariable X durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.97)$$

mit $x, \mu, \sigma \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ gegeben und wird auch als GAUSS-Kurve bezeichnet.

Für den Lageparameter μ und den Streuungsparameter σ gelten die Zusammenhänge

$$E(X) = \mu \quad (2.98)$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2. \quad (2.99)$$

Die Gestalt der Dichtefunktion ist durch eine Glockenform gegeben, die an der Stelle μ ihr Maximum besitzt und deren Wendepunkte bei $\mu \pm \sigma$ vorzufinden sind.

Die zugehörige Verteilungsfunktion ist durch

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (2.100)$$

definiert und lässt sich nicht analytisch berechnen, jedoch durch spezielle numerische Verfahren sehr gut approximieren.

Die Verteilungs- und Dichtefunktionen GAUSSscher Normalverteilungen sind in Abb. 2.6 exemplarisch für verschiedene Lage- und Streuungsparameter dargestellt.

Eine weitere häufig auftretende Verteilung ist die linksschiefe asymmetrische logarithmische Normalverteilung, deren Wahrscheinlichkeitsdichte für eine Zufallsvariable X durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \quad (2.101)$$

mit $x, \mu, \sigma \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ gegeben ist.

Zudem gilt für den Erwartungswert

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right), \quad (2.102)$$

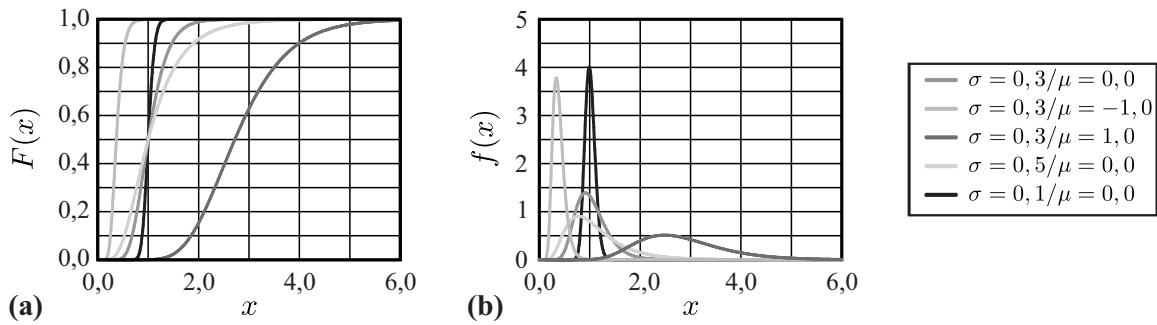


Abb. 2.7: Logarithmische Normalverteilungen (a) und zugehörige Dichtefunktionen (b)

für die Varianz

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \exp(2\mu + \sigma^2) [\exp(\sigma^2) - 1] \quad (2.103)$$

und für die Schiefe

$$v(X) = (\exp(\sigma^2) + 2) \sqrt{\exp(\sigma^2) - 1} > 0. \quad (2.104)$$

Die zugehörige Verteilungsfunktion lässt sich erneut durch Integration wie bereits in Gleichung (2.100) angegeben berechnen.

Verteilungs- und Dichtefunktionen für die logarithmische Normalverteilung sind in Abb. 2.7 für verschiedene Lage- und Streuungsparameter dargestellt, wobei zu beachten ist, dass diese nicht mit den gleichnamigen Parametern der GAUSSschen Normalverteilung übereinstimmen.

2.6.2 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Da die effektiven Materialeigenschaften mikroheterogener Medien immer von mehr als einem Mikrostrukturparameter abhängen, sollen die Ausführungen aus Abschnitt 2.6.1 im Folgenden auf mehrdimensionale Zufallsvariablen erweitert werden. Zur besseren Lesbarkeit der bestehenden Zusammenhänge wird sich auf zweidimensionale Zufallsvariablen beschränkt. Die Definitionen können aber ohne Weiteres auf höher mehrdimensionale Zufallsvariablen übertragen werden.

So ergibt sich die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion für eine diskrete zweidimensionale Zufallsvariable (X_d, Y_d) zu

$$f(x, y) = \begin{cases} P(X_d = x, Y_d = y) & \text{für } (x, y) \in \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), \dots\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.105)$$

und die gemeinsame Verteilungsfunktion lässt sich über

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_i \leq y} f(x_i, y_i) \quad (2.106)$$

berechnen.

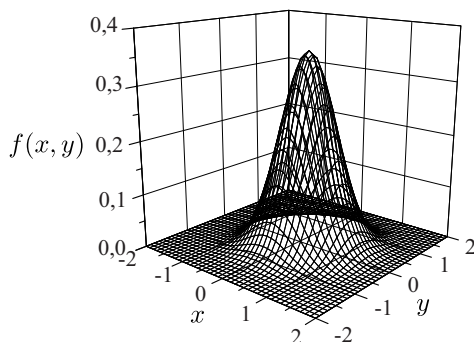


Abb. 2.8: Zweidimensionale Dichtefunktion

Entsprechend gilt, dass zwei Zufallsvariablen X_s und Y_s gemeinsam stetig verteilt sind, wenn eine zweidimensionale Dichtefunktion $f(x, y) \geq 0$ existiert, so dass

$$P(a \leq X_s \leq b, c \leq Y_s \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx . \tag{2.107}$$

Die Form einer zweidimensionalen Dichtefunktion ist exemplarisch für

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right] \tag{2.108}$$

mit den Streuungsparametern $\sigma_1 = 0,5$ und $\sigma_2 = 0,9$, den Lageparametern $\mu_1 = 0,2$ und $\mu_2 = 0,0$ sowie den im Folgenden in Gleichung (2.111) definierten Korrelationskoeffizienten $\rho = 0,2$ in Abb. 2.8 zu sehen.

Die zugehörige gemeinsame Verteilungsfunktion ist durch

$$F(x, y) = P(X_s \leq x, Y_s \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du \tag{2.109}$$

definiert.

Als Kenngrößen gemeinsamer Verteilungsfunktionen dienen zum einen die Erwartungswerte und Varianzen der einzelnen Zufallsvariablen. Zum anderen besteht auch ein Interesse darin den Zusammenhang der einzelnen Variablen zu untersuchen. Ein Maß hierfür stellt die Kovarianz dar. Diese ist für zwei Zufallsvariablen X und Y durch

$$\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) \tag{2.110}$$

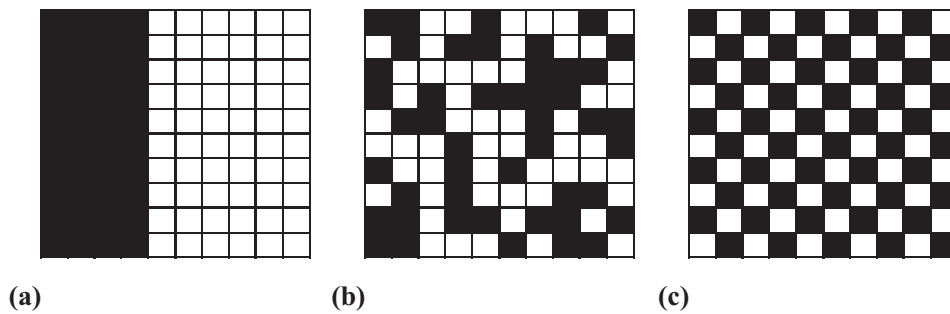


Abb. 2.9: Extrem positive (a), keine (b) und extrem negative räumliche Autokorrelation (c)

bestimmt.

Dabei gilt definitionsgemäß, dass die Kovarianz positiv ist, wenn die Zufallsvariablen X und Y in der Tendenz einen gleichsinnigen linearen Zusammenhang aufweisen. Negative Werte für die Kovarianz treten hingegen bei gegensinnigen linearen Zusammenhängen der beiden Zufallsvariablen auf.

Da die Kovarianz eine maßstabsabhängige Kenngröße ist, bietet sich eine geeignete Normierung an. Diese erfolgt gewöhnlich durch den Korrelationskoeffizienten, der sich über den Zusammenhang

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}} \quad (2.111)$$

berechnen lässt und Werte im Bereich $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$ annehmen kann. Dabei gilt, dass zwei Zufallsvariablen X und Y unkorreliert sind falls $\rho(X, Y) = 0$ und andernfalls korreliert sind.

Bei der Untersuchung ungeordneter Mikrostrukturen ist neben der Korrelation verschiedener Materialparameter zudem auch die räumliche Korrelation von großer Bedeutung. Eine ausführliche Darstellung hierzu ist in GOODCHILD [30] zu finden. Bereits 1948 schrieb MORAN [67], dass die Eigenschaften an einem bestimmten Ort maßgeblich von den Eigenschaften in der Umgebung beeinflusst werden können. Als eine Maßzahl hierfür führte er den nach ihm benannten MORAN-Index ein. Da bei der Auswertung von Mikrostrukturen die Datenwerte der betrachteten Variablen nicht wie bei einem Würfelexperiment rein zufällig zustande kommen, sondern – wenn auch mit zunächst unbekanntem Ausmaß – von der direkten Umgebung beeinflusst werden, scheint es wichtig diesen Einfluss nicht durch die Verwendung der traditionellen Statistik sofort völlig zu vernachlässigen. Auf dem Gebiet der Geostatistik sind hierzu zahlreiche Untersuchungen vorgenommen worden und so stellte z. B. TOBLER [92] 1970 das erste Gesetz der Geographie auf, in dem er festhielt, dass benachbarte Objekte sich oft ähnlicher sind als weit voneinander entfernte.

In Abb. 2.9 sind drei verschiedenstarke Ausmaße von räumlicher Autokorrelation zu sehen. Während in Abb. 2.9(a) eine extreme positive und in Abb. 2.9(c) eine extreme negative räum-

liche Autokorrelation zu beobachten ist, wird in Abb. 2.9(b) keine räumliche Autokorrelation vorgefunden.

Die Berechnung der räumlichen Autokorrelation beruht auf dem Vergleich von Werten unter Berücksichtigung des Abstands der betrachteten Datenpunkte zueinander. Als Maßzahlen haben sich hierbei der GEARY- und der MORAN-Index durchgesetzt. Da in dieser Arbeit nur der MORAN-Index bei der Mikrostrukturanalyse seine Anwendung findet, wird im Folgenden nur dessen Definition angegeben.

Für eine Zufallsvariable X berechnet sich der lokale MORAN-Index $I_{(k)}(X)$ am Ort k zu

$$I_{(k)}(X) = \frac{\left[X^{(k)} - E(X) \right] \sum_{l=1}^n w_{(kl)} \left[X^{(l)} - E(X) \right]}{\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left[X^{(l)} - E(X) \right]^2} \quad (2.112)$$

mit den Komponenten der zeilenweise normierten Nachbarschaftsmatrix

$$w_{(kl)} = \frac{\tilde{w}_{(kl)}}{\sum_{l=1}^n \tilde{w}_{(kl)}}. \quad (2.113)$$

Der globale MORAN-Index ergibt sich hieraus zu

$$I(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_{(k)}(X) \quad (2.114)$$

und nimmt positive Wert für eine positive räumliche Autokorrelation und entsprechend negative Wert für eine negative räumliche Autokorrelation an. Des Weiteren strebt der durch

$$E(I(X)) = -\frac{1}{n-1} \quad (2.115)$$

gegebene Erwartungswert für eine große Datenpunktzahl n gegen null, was zugleich einer unkorrelierten Datenbasis entspricht.

Eine weitere Maßzahl im Zusammenhang mit der räumlichen Korrelation ist die Semi-Varianz, die Auskunft über die Rauheit der Datenbasis liefert und nach YUPENG und CUBA [105] gegeben ist durch

$$\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{i=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h}) - z(\mathbf{u}_i)]^2 \quad (2.116)$$

mit den räumlichen Koordinaten \mathbf{u}_i , den ortsabhängigen Variablen $z(\mathbf{u}_i)$ bzw. $z(\mathbf{u}_i + \mathbf{h})$ und dem Vektor \mathbf{h} , der den Abstand zwischen zwei räumlichen Punkten definiert, wobei die Anzahl der Paare mit einem Abstand von \mathbf{h} durch $N(\mathbf{h})$ definiert ist.

3 Homogenisierungsverfahren

Die Analyse von Bauteilen aus Materialien mit einer ausgeprägten Mikrostruktur – wie sie bei festen Schäumen immer auftritt – erfolgt gewöhnlich nicht durch die Erzeugung von Modellen, die die reale Mikrostruktur vollständig abbilden, sondern aus Gründen der numerischen Effizienz zumeist unter der Verwendung makroskopischer Materialeigenschaften, die durch verschiedene Homogenisierungsverfahren gewonnen werden können. Diese Verfahren basieren auf der Verwendung von repräsentativen Volumenelementen (RVE), die in Abschnitt 3.1 eingeführt werden. Nach der Definition der effektiven Spannungen und Dehnungen und der Beschreibung des allgemeinen Homogenisierungsverfahrens in Abschnitt 3.2 wird anschließend in Abschnitt 3.3 das im Rahmen dieser Arbeit verwandte verzerrungsenergiebasierte Homogenisierungsverfahren näher beschrieben.

3.1 Repräsentatives Volumenelement

Bei der Untersuchung der mechanischen und physikalischen Eigenschaften von heterogenen zellulären Materialien – wie Festkörperschäumen – ist das repräsentative Volumenelement von zentraler Bedeutung, da es einen Mikrostrukturausschnitt beschreibt, welcher statistisch repräsentativ für die Gesamtstruktur ist, so dass die effektiven Materialeigenschaften der komplexen Gesamtstruktur durch Analyse dieses Strukturausschnitts vorhergesagt werden können.

Bei der Analyse von Festkörperschäumen mit ihrer strukturellen Hierarchie sind zwei Fälle zu unterscheiden. Zum einen existieren Größen, die auf der mikrostrukturellen Hierarchieebene definiert sind, zu dessen Bestimmung ein Modell der realen Mikrostruktur erforderlich ist. Zum anderen gibt es eine Vielzahl von Größen bei denen ausschließlich die Auswirkungen der Mikrostruktur auf das Materialverhalten auf der makroskopischen Ebene von Interesse sind. Für die Modellbildung bedeutet dies, dass die numerische Effizienz in diesem Fall vielfach erheblich gesteigert werden kann, da eine Abbildung der realen Mikrostruktur nicht zwingend erforderlich ist. Allerdings müssen die globalen Effekte der Mikrostruktur dann durch die Verwendung gemittelter, effektiver Materialparameter berücksichtigt werden, die durch eine Homogenisierung der Mikrostruktur gewonnen werden können.

Diesem Homogenisierungsverfahren wird die Annahme zu Grunde gelegt, dass der mikroheterogene Körper bezüglich der makroskopischen Ebene statistisch homogen ist, so dass zur Bestimmung der effektiven Materialeigenschaften ein beliebiger materieller Punkt auf der Makroebene gewählt werden kann. Auf der Mikrostrukturebene entsprechen dieser Punkt und seine Umgebung dann einem Strukturausschnitt, der als repräsentatives Volumenelement bezeichnet wird.

3 Homogenisierungsverfahren

Eine Verknüpfung zwischen den Größen der Makro- und Mikroebene erfolgt mittels eines Homogenisierungsverfahrens. Hierbei wird den im Sinne der Kontinuumsmechanik punktweise definierten makroskopischen Größen – wie den Spannungen und Verzerrungen – das entsprechende Mikrofeld zugeordnet, wobei dies aufgrund der Verteilung der Konstituenten über das repräsentative Volumenelement heterogen ist.

Eingeführt wurde der Begriff des repräsentativen Volumenelements 1963 von HILL [41], der dieses als einen Mikrostrukturausschnitt definiert, der eine hinreichend große Anzahl von für das Material charakteristischen Inhomogenitäten enthält und zudem unabhängig von den Randbedingungen die gleichen effektiven Materialeigenschaften liefert.

Aus diesen beiden Forderungen lässt sich in der Anwendung allerdings kein klares Vorgehen zur Wahl der geeigneten Größe des repräsentativen Volumenelements ableiten. Von HASHIN [38] wurde immerhin die Forderung

$$\lambda \ll l \ll L \quad (3.1)$$

aufgestellt, wonach die Länge l des repräsentativen Volumenelements hinreichend klein gegenüber dem Längenausmaß L der betrachteten heterogenen zellulären Struktur ist und zudem wesentlich größer als die Größe λ der Mikroheterogenitäten ist, die bei schaumartigen Strukturen durch den mittleren Zelldurchmesser angenommen werden kann.

Aus diesem Grund findet in der Anwendung bei der Definition der Größe des repräsentativen Volumenelements immer ein Abwägen statt. So sollte zum einen das Volumenelement möglichst klein gewählt werden, da es nur einen materiellen Punkt der makroskopischen Struktur darstellt. Darüber hinaus kann durch die Betrachtung eines kleinen Volumenelements die numerische Effizienz erheblich gesteigert werden. Zum anderen muss sichergestellt werden, dass das Volumenelement immer noch hinreichend groß ist, so dass es tatsächlich statistisch repräsentativ für die gesamte Struktur ist. Wie in KANIT *et al.* [49] und TERADA *et al.* [89] dargestellt, sind hierfür numerische Parameterstudien vielmals unerlässlich. Eine Vorgehensmöglichkeit besteht in der schrittweisen Variation der Volumengröße und der statistischen Auswertung der berechneten makroskopischen Materialeigenschaften bis dessen Streuung einen hinreichenden kritischen Wert unterschritten hat, so dass das Volumenelement als statistisch homogen angesehen werden kann.

Zum allgemeinen Homogenisierungsproblem zurückgekehrt, stellt das repräsentative Volumenelement den Strukturausschnitt der betrachteten Mikrostruktur dar, der durch einen quasi-homogenen Körper ersetzt werden soll, um letztendlich die gesamte betrachtete Mikrostruktur durch einen quasi-homogenen Ersatzkörper darstellen zu können.

Wie in Abb. 3.1 skizziert, wird ein Körper Ω mit einer ausgeprägten Mikrostruktur betrachtet, der durch $\partial\Omega$ mit $\partial\Omega = \partial\Omega^u \cup \partial\Omega^t$ berandet ist und entlang dessen Teilrands $\partial\Omega^u$ die Verschiebungen u_i und entlang des Teilrands $\partial\Omega^t$ die Komponenten $t_i = P_{ij}n_j$ des Spannungsvektors wirken. Wie in Abschnitt 2.3 eingeführt, sind hierbei P_{ij} die Komponenten des ersten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors und n_j die Komponenten des nach außen gerichteten Normaleinheitsvektors auf $\partial\Omega^t$. Darüber hinaus erfährt der Körper Ω durch verteilt im Inneren wirkende Volumenkräfte f_i eine weitere Belastung. Im Zuge der Homogenisierung wird diesem Körper Ω ein Körper Ω^* gegenübergestellt, welcher durch dieselben Ränder $\partial\Omega^u$ und $\partial\Omega^t$

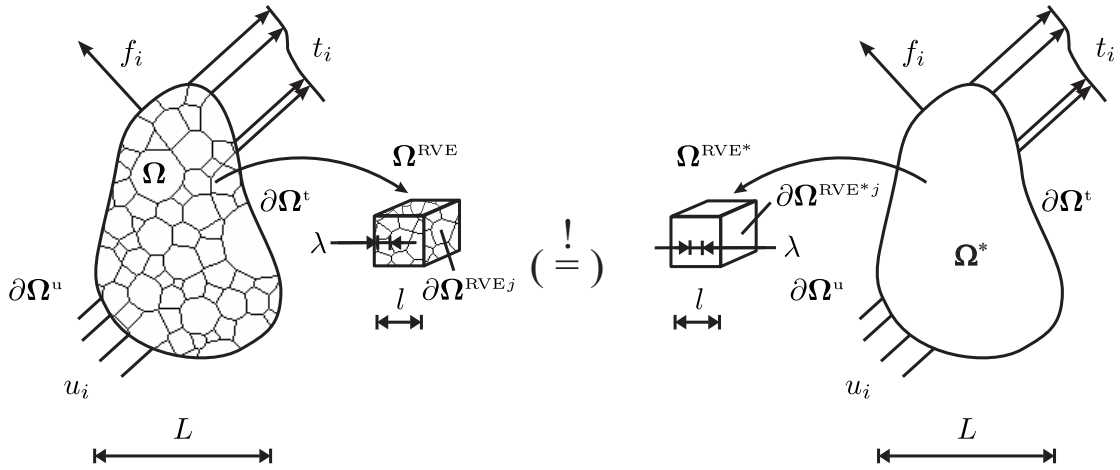


Abb. 3.1: Repräsentatives Volumenelement bei periodischer Mikrostruktur

berandet ist, denselben Belastungen t_i und f_i sowie denselben Verschiebungen u_i unterliegt, jedoch aus einem homogenen Material besteht.

Für das effektive Medium als Ersatzmodell ist das Materialgesetz mit den zugehörigen Materialkonstanten zunächst unbekannt. Mittels der Gegenüberstellung der beiden Volumenelemente RVE und RVE* lassen sich diese allerdings auf der mesoskopischen Ebene bestimmen. Von großer Bedeutung ist hierbei die Wahl der Äquivalenzkriterien, die die mesoskopische Äquivalenz der beiden Strukturausschnitte mittels verschiedener physikalischer Größen definieren. In der Anwendung existieren hierfür verschiedene Ansätze, wovon die für das Verständnis dieser Arbeit relevanten in Abschnitt 3.2 und explizit das verzerrungsenergiebasierte Homogenisierungsverfahren in Abschnitt 3.3 dargestellt werden.

3.2 Mittelung der Spannungs- und Dehnungsfelder

Als einfachstes Mittelungsverfahren zur Definition der in 3.1 erwähnten Äquivalenzkriterien sind in der Literatur oberflächenorientierte Kriterien zu finden. Diese definieren die Äquivalenz der beiden Volumenelemente RVE und RVE* auf der mesoskopischen Ebene durch die Bedingung

$$\int_{\partial\Omega^{\text{RVE}j}} t_i dA = \int_{\partial\Omega^{\text{RVE}j}} t_i^* dA \quad (3.2)$$

mit den Komponenten des Spannungsvektors t_i bzw. t_i^* für das effektive Medium und der Teiloberfläche $\partial\Omega^{\text{RVE}j}$ des repräsentativen Volumenelements. Mit der in Gleichung (3.2) formulierten Äquivalenzbedingung erfolgt die Homogenisierung also durch die Umverteilung der Spannung entlang der Oberfläche des repräsentativen Volumenelements.

Ebenfalls weit verbreitet ist ein volumenorientiertes Kriterium, das in BISHOP und HILL [4] verwandt. Dieses beruht auf der Volumenmittelung der Komponenten des zweiten PIOLA-

3 Homogenisierungsverfahren

KIRCHHOFF-Spannungstensors τ_{ij} . Auf mesoskopischer Ebene wird für die Spannung

$$\bar{\tau}_{ij} = \frac{1}{V^{\text{RVE}}} \int_{\Omega^{\text{RVE}}} \tau_{ij} dV = \frac{1}{V^{\text{RVE}}} \int_{\Omega^{\text{RVE}}} \tau_{ij}^* dV = \bar{\tau}_{ij}^* \quad (3.3)$$

mit dem Volumen V^{RVE} des repräsentativen Volumenelements gefordert, wobei sich das Volumenkriterium in (3.3) durch Anwendung des GAUSSSchen Satzes in das Oberflächenkriterium in (3.2) überführen lässt.

Neben einer Beziehung zwischen den Spannungen beider repräsentativer Volumenelemente, wie in Gleichung (3.2) bzw. (3.3) angegeben, wird zudem eine zweite Äquivalenzbedingung benötigt, die eine Beziehung zwischen den Dehnungszuständen γ_{ij} und γ_{ij}^* (bzw. ε_{ij} und ε_{ij}^*) liefert.

Eine weitverbreitete Definition wird erneut durch BISHOP und HILL [4] aufgezeigt, die einen mittleren Verschiebungsgradient auf der mesoskopischen Ebene definieren, indem sie den Differentialquotient durch den Differenzenquotienten bezüglich der Abmessung des repräsentativen Volumenelements in der entsprechenden Richtungen ersetzen. Mit den Komponenten u_i des Verschiebungsvektors und den Komponenten n_j des nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektors auf den Oberflächen ergibt sich diese zweite Äquivalenzbedingung zu

$$\bar{u}_{i,j} = \frac{1}{V^{\text{RVE}}} \int_{\partial\Omega^{\text{RVE}}} u_i n_j dA \quad (3.4)$$

bzw. bei Überführung des Oberflächenintegrals in (3.4) in ein Volumenintegral durch Anwendung des GAUSSSchen Satzes zu

$$\bar{u}_{i,j} = \frac{1}{V^{\text{RVE}}} \int_{\Omega^{\text{RVE}}} u_{i,j} dV = \frac{1}{V^{\text{RVE}}} \int_{\Omega^{\text{RVE}}} u_{i,j}^* dV = \bar{u}_{i,j}^*, \quad (3.5)$$

wobei die Voraussetzung eines einfach zusammenhängenden Gebiets erfüllt sein muss.

Ein Vergleich der Kriterien (3.4) und (3.5) zeigt, dass die Volumenmittelung des Verschiebungsgradienten der Oberflächenmittelung der durch die entsprechenden Abmessungen des repräsentativen Volumenelements geteilten Verschiebungsdifferenzen entspricht.

Die mesoskopischen Dehnungen $\bar{\gamma}_{ij}$ können durch Einsetzen von Gleichung (3.4) oder (3.5) in die Definition (2.13) des GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensors bzw. in die Definition (2.15) des infinitesimalen Verzerrungstensors zu

$$\bar{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{V^{\text{RVE}}} \int_{\partial\Omega^{\text{RVE}}} (u_i n_j + u_j n_i) dA + \frac{1}{(V^{\text{RVE}})^2} \int_{\partial\Omega^{\text{RVE}}} u_k n_i dA \int_{\partial\Omega^{\text{RVE}}} u_k n_j dA \right) \quad (3.6)$$

für finite Dehnungen bzw. zu

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \frac{1}{V^{\text{RVE}}} \int_{\partial\Omega^{\text{RVE}}} (u_i n_j + u_j n_i) dA \quad (3.7)$$

für infinitesimale Dehnungen bestimmt werden.

Auf die Angabe der analogen Beziehungen für die Dehnungen, die sich für das Volumenelement des effektiven Mediums ableiten lassen, wird verzichtet. Die Äquivalenz beider Volumenelemente wird für den Dehnungszustand erneut durch ein Integralmittel definiert, wonach

$$\bar{\gamma}_{ij} = \bar{\gamma}_{ij}^* \text{ bzw. } \bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij}^* \quad (3.8)$$

gelten muss.

Ein Homogenisierungsverfahren, welches auf den Gleichungen (3.2) bzw. (3.3) und (3.8) mit (3.6) bzw. (3.7) beruht, bestimmt die Materialparameter indem zunächst sowohl das repräsentative Volumenelement der Mikrostruktur als auch des effektiven Mediums in eine Anzahl unabhängiger Referenzdeformationszustände verformt wird, die die Äquivalenz des Dehnungszustands in Gleichung (3.8) erfüllen. Die Art und Anzahl der Referenzdeformationszustände hängt dabei maßgeblich von der Art der postulierten konstitutiven Gleichungen des effektiven Mediums und der Anzahl der hierin auftretenden Materialkonstanten ab. Anschließend ist es möglich die Materialparameter derart zu bestimmen, dass Gleichung (3.2) für alle Komponenten des Spannungsvektors bzw. Gleichung (3.3) für alle Komponenten des Spannungstensors bei allen Referenzdeformationszuständen erfüllt ist.

Eine grundsätzliche Forderung an jedes Homogenisierungsverfahren wird durch das Lemma von HILL

$$\frac{1}{V^{RVE}} \int_{\Omega^{RVE}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{V^{RVE}} \int_{\Omega^{RVE}} \sigma_{ij} dV \frac{1}{V^{RVE}} \int_{\Omega^{RVE}} d\varepsilon_{ij} dV^{RVE} \quad (3.9)$$

gegeben, welches die korrekte Wiedergabe der Verteilung der Verzerrungsenergiegedichte auf der makroskopischen Ebene bei der Verwendung der effektiven mechanischen Feldgrößen sicherstellt. So bringt das Lemma von HILL (3.9) zum Ausdruck, dass die über ein repräsentatives Volumenelement gemittelte Verzerrungsenergiegedichte der aus dem Volumenmittel der Dehnungen und dem Volumenmittel der Spannungen berechneten mesoskopischen Verzerrungsenergiegedichte gleich sein muss, wenn im Rahmen der geometrischen linearen Beschreibung entweder die Spannungen oder die Verschiebungen entlang der äußeren Ränder des repräsentativen Volumenelements homogen verteilt sind, was sowohl durch BISHOP und HILL [4] also auch HILL [40] gezeigt wurde.

3.3 Verzerrungsenergiebasiertes Homogenisierungsverfahren

In Hinblick auf die Homogenisierung von ungeordneten dreidimensionalen Zellstrukturen sind die in Abschnitt 3.2 dargestellten oberflächenorientierten Mittelungsverfahren im Allgemeinen nur schwierig anwendbar. Aus diesem Grund wird im Rahmen dieser Arbeit ein verzerrungsenergiebasiertes Homogenisierungsverfahren, wie es von HOHE und BECKER [42] – basierend auf Ansätzen von HILL [40] und PONTE CASTAÑEDA und SUQUET [74] – entwickelt wurde, angewandt. Ein Vorteil dieses Konzepts besteht darin, dass die kontinuums-

3 Homogenisierungsverfahren

mechanische Äquivalenz von realer Mikrostruktur und effektivem Medium durch die direkte Verwendung des Lemmas von HILL (3.9) sichergestellt wird. Dies hat zur Folge, dass sich bei äquivalenter makroskopischer Deformation eines repräsentativen Volumenelements für die gegebene Mikrostruktur und eines gleichartigen, aus dem effektiven Medium bestehenden Volumenelements, in beiden dieselbe mittlere Verzerrungsenergiedichte ergeben muss.

Die zum jeweiligen effektiven Deformationszustand gehörenden effektiven Spannungen lassen sich dann als Energiekomplemente zum gewählten Verzerrungsmaß bestimmen.

Das Äquivalenzkriterium der beiden repräsentativen Volumenelemente lässt sich somit zu

$$d\bar{e} = \frac{1}{V^{\text{RVE}}} \int_{\Omega^{\text{RVE}}} de dV = \frac{1}{V^{\text{RVE}}} \int_{\Omega^{\text{RVE}}} de^* dV = d\bar{e}^* \quad (3.10)$$

definieren, wobei gefordert wird, dass sich bei Aufbringen eines auf der effektiven Ebene äquivalenten Deformationsinkrements in beiden Volumenelementen das gleiche mittlere Inkrement $d\bar{e}$ ergeben muss.

Als zweites Äquivalenzkriterium wird auf der mesoskopischen Ebene gefordert, dass für beide repräsentative Volumenelemente die Inkremente des Deformationsgradienten im Volumenmittel gleich sind:

$$d\bar{F}_{ij} = \frac{1}{V^{\text{RVE}}} \int_{\Omega^{\text{RVE}}} dF_{ij} dV = \frac{1}{V^{\text{RVE}}} \int_{\Omega^{\text{RVE}}} dF_{ij}^* dV = d\bar{F}_{ij}^*. \quad (3.11)$$

Auf eine nichtinkrementelle Form der Äquivalenzbedingungen (3.10) und (3.11) kann verzichtet werden, wenn während der Deformation keine Energiedissipation auftritt und somit eine reversible Zustandsänderung vorliegt. Die Bedingungen (3.10) und (3.11) vereinfachen sich in diesem Fall zu

$$\bar{e} = \frac{1}{V^{\text{RVE}}} \int_{\Omega^{\text{RVE}}} e dV = \frac{1}{V^{\text{RVE}}} \int_{\Omega^{\text{RVE}}} e^* dV = \bar{e}^* \quad (3.12)$$

und

$$\bar{F}_{ij} = \frac{1}{V^{\text{RVE}}} \int_{\Omega^{\text{RVE}}} F_{ij} dV = \frac{1}{V^{\text{RVE}}} \int_{\Omega^{\text{RVE}}} F_{ij}^* dV = \bar{F}_{ij}^*. \quad (3.13)$$

Da zwischen dem Deformationsgradienten und dem Verschiebungsgradienten der Zusammenhang

$$u_{i,j} = F_{ij} - \delta_{ij} \quad (3.14)$$

besteht, kann die Volumenmittelung in der Äquivalenzbedingung (3.13) der Komponenten F_{ij} des materiellen Deformationsgradienten in eine Volumenmittelung der Komponenten $u_{i,j}$ überführt werden. Im Fall infinitesimaler Dehnungen entspricht die Bedingung (3.13) somit dem auf BISHOP und HILL [4] zurückgehenden Äquivalenzkriterium (3.4) bzw. (3.7) für die Dehnungen der beiden gegenübergestellten Volumenelemente.

Eine weitere Interpretationsmöglichkeit des Äquivalenzkriteriums (3.13) wird ersichtlich, wenn mit Hilfe des GAUSSSchen Satzes das auftretende Volumenintegral in ein Oberflächenintegral überführt wird. Denn dann lässt sich erkennen, dass bei periodischen Strukturen bei der Homogenisierung im Verschiebungsgradienten der Differentialquotient durch den Differenzenquotienten bezüglich einer vollen Periodenlänge der Mikrostruktur ersetzt werden kann. Durch diese Vorgehensweise ist sichergestellt ist, dass die Relativverschiebung zweier beliebiger materieller Punkte an sich entsprechenden Positionen in benachbarten Volumenelementen des materiellen Körpers Ω auch bei der Verwendung des effektiven Mediums zu seiner Analyse korrekt wiedergegeben wird.

Anders ausgedrückt unterscheidet sich die Verschiebung eines beliebigen materiellen Punkts des homogenisierten Körpers Ω^* von der Verschiebung des entsprechenden materiellen Punkts des zu homogenisierenden Körpers Ω nur durch einen kleinen Anteil, welcher sich als Funktion der Position des jeweiligen materiellen Punkts innerhalb der Mikrostruktur und der effektiven Deformation des Körpers an der jeweiligen Position ergibt.

Durch Anwendung der Äquivalenzbedingung (3.13) wird somit das Verschiebungsfeld des zu homogenisierenden Körpers Ω durch das Verschiebungsfeld des homogenisierten Körper Ω^* im Mittel korrekt wiedergegeben.

Die bereits in Gleichung (2.13) eingeführten Komponenten des GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensors werden als Maß für die Verzerrungen der Volumenelemente auf der effektiven Ebene im Fall finiter Verzerrungen gewählt und ergeben sich zu

$$\bar{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i} + \bar{u}_{k,i}\bar{u}_{k,j}) \quad (3.15)$$

mit den Komponenten $\bar{u}_{i,j}$ des effektiven Verschiebungsgradienten.

Für den Fall infinitesimaler Dehnungen werden in Gleichung (3.15) die in den Komponenten des Verschiebungsgradienten auftretenden quadratischen Terme vernachlässigt und es gilt Gleichung (3.7) entsprechend.

Die zum jeweiligen effektiven Deformationszustand gehörenden effektiven Spannungen lassen sich dann – bei einer Beschränkung auf effektiv elastisches Materialverhalten – durch partielle Ableitung der Verzerrungsenergiegedichte nach dem korrespondierenden Verzerrungsmaß bestimmen. Mit der Beziehung (2.34) können dann aus der effektiven Verzerrungsenergiegedichte \bar{e} die Komponenten des ersten und zweiten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors zu

$$\bar{P}_{ij} = \frac{\partial \bar{e}(\bar{F}_{ij})}{\partial \bar{F}_{ij}} \quad (3.16)$$

$$\bar{\tau}_{ij} = \frac{\partial \bar{e}(\bar{\gamma}_{ij})}{\partial \bar{\gamma}_{ij}} \quad (3.17)$$

bestimmt werden. Des Weiteren können mit Gleichung (2.35) hieraus die Komponenten des effektiven CAUCHY-Spannungstensors auf der effektiven Hierarchieebene ermittelt werden.

Das energiebasierte Homogenisierungsverfahren lässt sich somit basierend auf den Gleichungen (3.10) bzw. (3.12) und den Gleichungen (3.11) und (3.13) in zwei Schritten durchführen.

3 Homogenisierungsverfahren

Zunächst werden auf das repräsentative Volumenelement der gegebenen Mikrostruktur und auf das entsprechende Volumenelement des effektiven Mediums eine Anzahl an unabhängigen Deformationszuständen aufgebracht, die die Gleichungen (3.13) und (3.15) erfüllen. Anschließend wird für alle Referenzdeformationszustände die Verteilung der Verzerrungsenergiegedichte berechnet und die im effektiven Stoffgesetz enthaltenen Materialkonstanten derart bestimmt, dass sie die Gleichung (3.10) bzw. (3.12) erfüllen.

In der Anwendung weist das verzerrungsenergiebasierte Homogenisierungsverfahren im Vergleich zum direkten Homogenisierungsverfahren zwar den Nachteil des größeren numerischen Aufwands auf, welcher aus der numerischen Approximation der partiellen Ableitungen durch Differenzenquotienten resultiert, aber für die Betrachtung von ungeordneten dreidimensionalen zellulären Strukturen ist es dennoch aufgrund der komplexen Mikrostruktur anzuwenden, da dieses Verfahren mit der Energieerhaltung direkt auf einem der grundlegenden Erhaltungssätze der Kontinuumsmechanik beruht und somit zwangsläufig im Gegensatz zu oberflächenorientierten Homogenisierungsverfahren das Lemma von HILL (3.9) erfüllt.

Weitere wichtige Vorzüge bestehen darin, dass seine kontinuumsmechanische Orientierung eine direkte Interpretation aller auftretenden Effekte ermöglicht. Darüber hinaus ist es vielseitig einsetzbar, da es sowohl eine Anwendung auf linear als auch auf geometrisch oder materiell nichtlineare elastische Homogenisierungsprobleme gleichermaßen erlaubt. Zudem kann es bei inkrementeller Betrachtung auch auf inelastische Homogenisierungsprobleme angewandt werden.

Der wesentliche Vorteil des verzerrungsenergiebasierten Homogenisierungsverfahrens ist, dass alle Komponenten des effektiven Materialtensors einschließlich aller Koppelkonstanten direkt zugänglich sind. Zudem besteht keine Einschränkung bezüglich der Art der untersuchten Mikrostruktur, so dass insbesondere keine Symmetrieanforderungen erfüllt werden müssen.

4 Numerisches Mikrostrukturmodell

Für das in Abschnitt 3 vorgestellte Homogenisierungsverfahren werden dreidimensionale Mikrostrukturmodelle benötigt. Zur präzisen Ermittlung der effektiven Materialeigenschaften und deren Streuung ist es dabei wichtig, dass statistisch repräsentative Mikrostrukturmodelle verwendet werden. Aus diesem Grund werden nicht reale Mikrostrukturausschnitte in ein Modell überführt, sondern es erfolgt eine Generierung der Mikrostrukturmodelle mittels eines stochastischen Raumteilungsverfahrens, so dass die wesentlichen Eigenschaften der repräsentativen Volumenelemente statistisch gleich sind. Im Rahmen dieser Arbeit wird hierzu das VORONOÏ-Verfahren in LAGUERRE-Geometrie angewandt (VORONOÏ [97], FAN *et al.* [22] und FAZEKAS *et al.* [23]), womit periodische offen- und geschlossenzellige Strukturen mit vorgegebener Zellgrößenverteilung gezielt generiert werden können.

Im Abschnitt 4.1 wird das VORONOÏ-Verfahren in LAGUERRE-Geometrie explizit dargestellt. Abschnitt 4.2 befasst sich mit der Überführung der gewonnenen Topologie in ein Finite-Elemente-Modell mit geeigneter Vernetzung. Zudem werden die erforderlichen periodischen Randbedingungen angegeben. Eine Validierung der Modelle erfolgt anschließend in Abschnitt 4.3 anhand experimentell ermittelter Struktureigenschaften eines offenzelligen Metallschaums.

4.1 Voronoï-Verfahren in Laguerre-Geometrie

Das VORONOÏ-Verfahren ist ein Raumteilungsverfahren, welches eine zelluläre Struktur basierend auf einer zufälligen Anordnung von Quellpunkten liefert. Dabei eignet sich zur Mikrostrukturgenerierung von Schäumen vor allem das VORONOÏ-Verfahren in LAGUERRE-Geometrie (HARDENACKE und HOHE [35]). Hierbei wird den einzelnen Quellpunkten zusätzlich ein individuell festlegbarer Radius zugewiesen, in dessen Umgebung kein weiterer Quellpunkt liegen darf, wodurch die Entstehung von extrem kleinen und ungünstig geformten Zellen vermieden werden kann.

Definiert ist die VORONOÏ-Zelle $\Omega^{Z(p)}$ durch

$$\Omega^{Z(p)} = \left\{ x_i \mid x_i \in \mathbb{R}^3, r_L(x_i, x_i^{QP(p)}) \leq r_L(x_i, x_i^{QP(q)}), q \neq p \right\}, \quad p, q = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

mit dem Abstand $r_L(x_i, x_i^{QP(p)})$ in LAGUERRE-Geometrie, der sich aus dem EUKLID-Abstand $r_E(x_i, x_i^{QP(p)})$ durch

$$r_L(x_i, x_i^{QP(p)}) = \left[(r_E(x_i, x_i^{QP(p)}))^2 - (r(p))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.2)$$

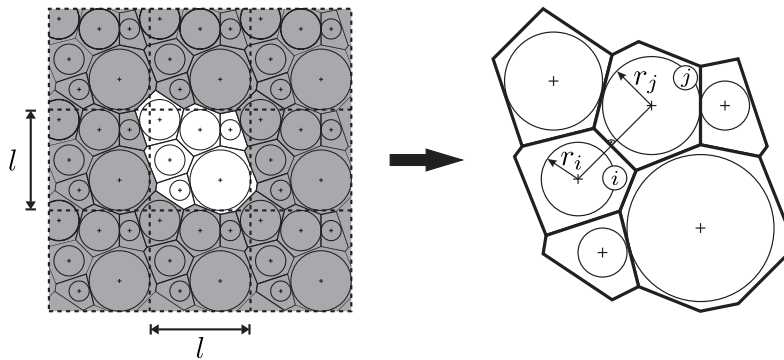


Abb. 4.1: Zweidimensionale Darstellung des VORONOÏ-Verfahrens in LAGUERRE-Geometrie zur Generierung periodischer Zellstrukturen

ergibt. Eine zweidimensionale Darstellung des VORONOÏ-Verfahrens in LAGUERRE-Geometrie zur Generierung von periodischen Zellstrukturen ist in Abb. 4.1 zu sehen.

Anschaulich erfolgt die Bestimmung der VORONOÏ-Zellen in drei Schritten. So werden zunächst Ebenen im Raum ermittelt, die in LAGUERRE-Geometrie zu den jeweils zugehörigen Quellpunkten einen gleichgroßen Abstand aufweisen und senkrecht auf der Verbindungsline dieser beiden Quellpunkte stehen. Darüber hinaus muss erfüllt sein, dass kein weiterer Quellpunkt einen geringeren LAGUERRE-Abstand zur Ebene besitzt, da durch die Ebenen die Wände der Zellstruktur definiert werden. In einem zweiten Schritt werden die Schnittgeraden der Ebenen bestimmt, wodurch die Kanten der VORONOÏ-Zellen definiert sind. Zuletzt werden die Schnittpunkte der Schnittgeraden berechnet, womit sich die Eckpunkte der einzelnen Zellen ergeben.

Im Folgenden wird sich auf die Generierung von periodischen Mikrostrukturen spezialisiert, wodurch zum einen die Problematik der Definition von Randbedingungen umgangen wird und zum anderen wird hierdurch sichergestellt, dass keine Randstörungen in den repräsentativen Volumenelementen, die auf makroskopischer Ebene materielle Punkte darstellen, auftreten. So werden im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich repräsentative Volumenelemente mit einer periodischen Mikrostruktur betrachtet, wobei zur Mikrostrukturierung zunächst ein Quellpunktfeld innerhalb des repräsentativen Volumenelements generiert wird. Anschaulich darstellen lässt sich dieses als eine Vielzahl von unterschiedengroßen Kugeln in einem Behälter (Abb. 4.2(a)), wobei die Verteilung der Quellpunktradien in Rahmen dieser Arbeit auf logarithmischen Normalverteilungen beruhen, deren Begründung in der späteren Validierung in Abschnitt 4.3 ersichtlich wird. Um die gewünschte Zellgrößenverteilung mittels Vorgabe dieser Quellpunktradienverteilung so exakt wie möglich wiedergeben zu können, ist es dabei günstig, wenn die Kugeln möglichst dicht gepackt sind und somit ein hoher Raumfüllungsgrad erreicht wird. Als Vergleichswert dient hierbei der Raumfüllungsgrad von etwa 74 %, der bei der dichtesten Kugelpackung gleichgroßer Kugeln erreicht wird.

Das auf diese Weise gewonnene Quellpunktfeld bildet die Grundlage, um mittels des VORONOÏ-Verfahrens in LAGUERRE-Geometrie eine zelluläre periodische Mikrostruktur zu erzeugen. Hierzu werden in einem ersten Schritt alle Quellpunktkoordinaten $x_i^{\text{QP}(p)}$ des repräsentati-

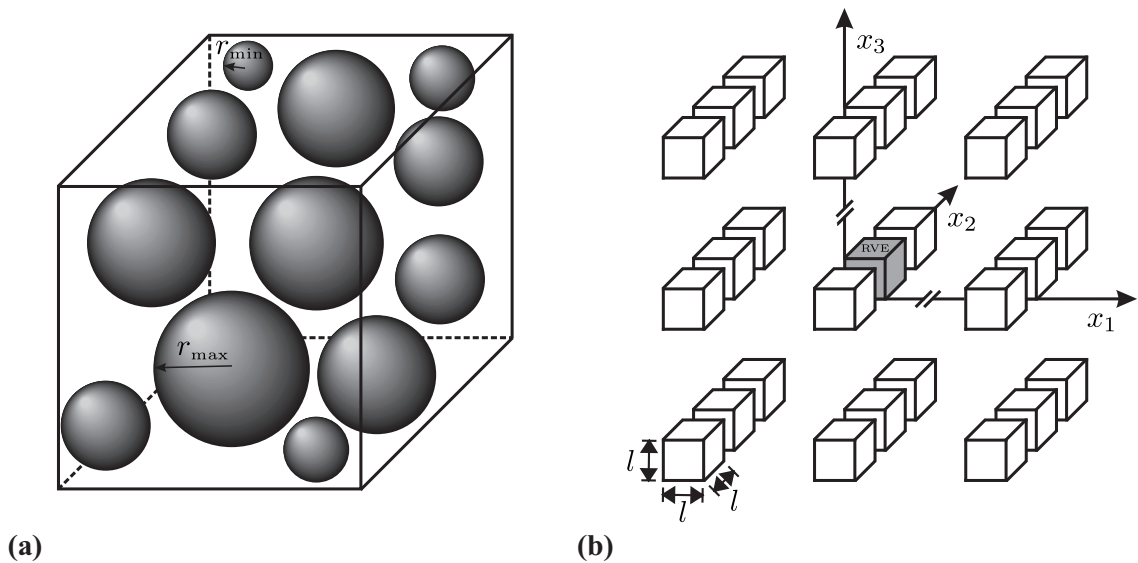


Abb. 4.2: Repräsentatives Volumenelement mit den Kugelumgebungen von zwölf Quellpunkten (a) und mit seinen 26 Nachbarvolumenelementen (b)

ven Volumenelemente in die benachbarten 26 Volumenelemente durch Verschiebung der Koordinaten um die Kantenlänge des repräsentativen Volumenelements $\pm l$ kopiert (Abb. 4.2(b)).

Die Bestimmung der VORONOÏ-Zellen im repräsentativen Volumenelement beruht dann wie zuvor auf Gleichung (4.1), wobei sich bei der computergestützten Bestimmung der Zelltopologie gezeigt hat, dass aufgrund der Vielzahl an Rechenoperationen es bei der zuvor beschriebenen anschaulichen analytischen Vorgehensweise zu numerischen Ungenauigkeiten kommen kann, so dass keine Zellstruktur ermittelt werden kann. Als deutlich stabiler hat sich die Verwendung eines numerischen Näherungsverfahrens zur Bestimmung der Zelltopologie erwiesen. Dies bestimmt die Eckpunkte der Zellen nicht über die Berechnung der Zellwände und -kanten, sondern die Koordinaten der Eckpunkte werden direkt durch Anwendung des NEWTON-Verfahrens (z. B. PARISCH [72]) derart bestimmt, dass in LAGUERRE-Geometrie vier Quellpunkte gleichweit von diesem Eckpunkt entfernt sind.

4.2 Vernetzung

Da zur Bestimmung der effektiven Materialeigenschaften von ungeordneten zufälligen Mikrostrukturen Finite-Elemente-Analysen durchgeführt werden sollen, muss die Zelltopologie (Abschnitt 4.1) vernetzt werden. Um sowohl offen- als auch geschlossenzellige Zellstrukturen untersuchen zu können, erfolgt dies auf zwei verschiedenen Weisen. So werden beim offenzelligen Mikrostrukturmodell nur die Kanten und beim geschlossenzelligen Modell nur die Wände mit finiten Elementen vernetzt. Hierfür werden in beiden Fällen zunächst weitere Finite-Elemente-Knoten mit den Koordinaten x_i^{Kante} mit $i = 1, 2, 3$ entlang der Zellkanten mit

gleichmäßigem Abstand generiert und dann gemäß der Verdichtung

$$\tilde{x}_i^{\text{Kante}} = x_i^{\text{Kante}} - \frac{(x_i^{\text{E}} - x_i^{\text{A}})}{f \cdot (n - 1)} \cdot \sin\left(2\pi \frac{(x_i^{\text{Kante}} - x_i^{\text{A}})}{(x_i^{\text{E}} - x_i^{\text{A}})}\right) \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 \quad (4.3)$$

in Richtung der Eckknoten verschoben. So ergeben sich die verschobenen Koordinaten $\tilde{x}_i^{\text{Kante}}$ der Kantenknoten in Abhängigkeit der Koordinaten der beiden zugehörigen Eckknoten x_i^{A} und x_i^{E} sowie der Anzahl an Knoten n der betrachteten Kante. Darüber hinaus wird durch den Faktor f der Grad der Verdichtung reguliert. Zu beachten ist hierbei, dass Werte des Faktors f unzulässig sind, die die Kantenknoten über die Eckknoten hinaus verschieben.

Im Fall der offenzelligen Mikrostrukturmodelle (Abb. 4.3(a)) werden die Finite-Elemente-Knoten auf den Zellkanten mit TIMOSHENKO-Balken mit kreisförmigem Querschnitt verbunden mit den Varianten, dass zum einen ein konstanter Radius für den Querschnitt angenommen werden kann und zum anderen die Stegdicke vom Eckknoten zur Stegmitte hin variiert werden kann. Dabei ist eine feinere Vernetzung in der näheren Umgebung der Eckknoten vorteilhaft, da auf diese Weise die in realen Schaumstrukturen häufig auftretende Materialanhäufung im Bereich der Zellstegverzweigungspunkten, wie z. B. durch MARKAKI und CLYNE [60] und auch KENESEI *et al.* [50] beobachtet wurde, besser abgebildet werden kann, da die Querschnittsänderung der Zellstege bzw. -wände innerhalb eines Elements nur linear interpoliert wird. So werden im Rahmen dieser Arbeit nicht nur konstante Stegdicken, sondern auch Zellstegdickenvariationen in Form von Potenzfunktionen angenommen.

Für die geschlossenzelligen Mikrostrukturmodelle ist die Vernetzung deutlich aufwändiger, da weitere Knoten auf den Zellwänden generiert werden müssen, um durch Anwendung einer DELAUNAY-Triangulierung (DELAUNAY [13]) die Zellwände mittels Dreieckselemente vernetzen zu können.

Für die Zellwanddicke kann entweder erneut ein konstanter Wert angenommen werden oder es kann zwischen zwei Dickenverteilungen gewählt werden. So nimmt bei der Variante „Treppe“ die Wanddicke in Form einer Potenzfunktion von den Zellkanten in Richtung der Zellwandmitte in Abhängigkeit des Mindestknotenabstands stufenförmig hin ab (Abb. 4.3(b)). Bei der zweiten Variante „Gewölbe“ unterscheidet sich die Dickenverteilung darin, dass die Wanddicke zum einen in Richtung der Zellwandmitte hin abnimmt und zum anderen sich zusätzlich auch die Wanddicke in Richtung der Kantenmitten hin verringert (Abb. 4.3(c)).

Angemerkt sei an dieser Stelle zu der Mikrostrukturvernetzung, dass hierbei sowohl Zellstege als auch Zellwände, die durch Begrenzungen des repräsentativen Volumenelements durchschnitten werden, immer vollständig auf einer Seite des Volumenelements vernetzt werden. Auf diese Weise ist sichergestellt, dass das gesamte Mikrostrukturmodell auf gleiche Weise vernetzt ist, mit der Folge, dass einzelne Zellstege und -wände zunächst frei im Raum zu hängen scheinen, wie dies auch in Abb. 4.3 zu sehen ist.

Die Verbindung dieser nicht räumlich an das übrige Mikrostrukturmodell angebundenen Elemente ist jedoch durch die Aufbringung von periodischen Randbedingungen gewährleistet. Diese stellen sicher, dass die periodische Mikrostruktur auch im deformierten Zustand sich lückenlos aneinanderfügen lässt. So müssen für die mikroskopischen Verschiebungsgradienten entlang gegenüberliegender Oberflächen $\partial\Omega^{\text{RVE}(+)}$ und $\partial\Omega^{\text{RVE}(-)}$ des repräsentativen Volu-

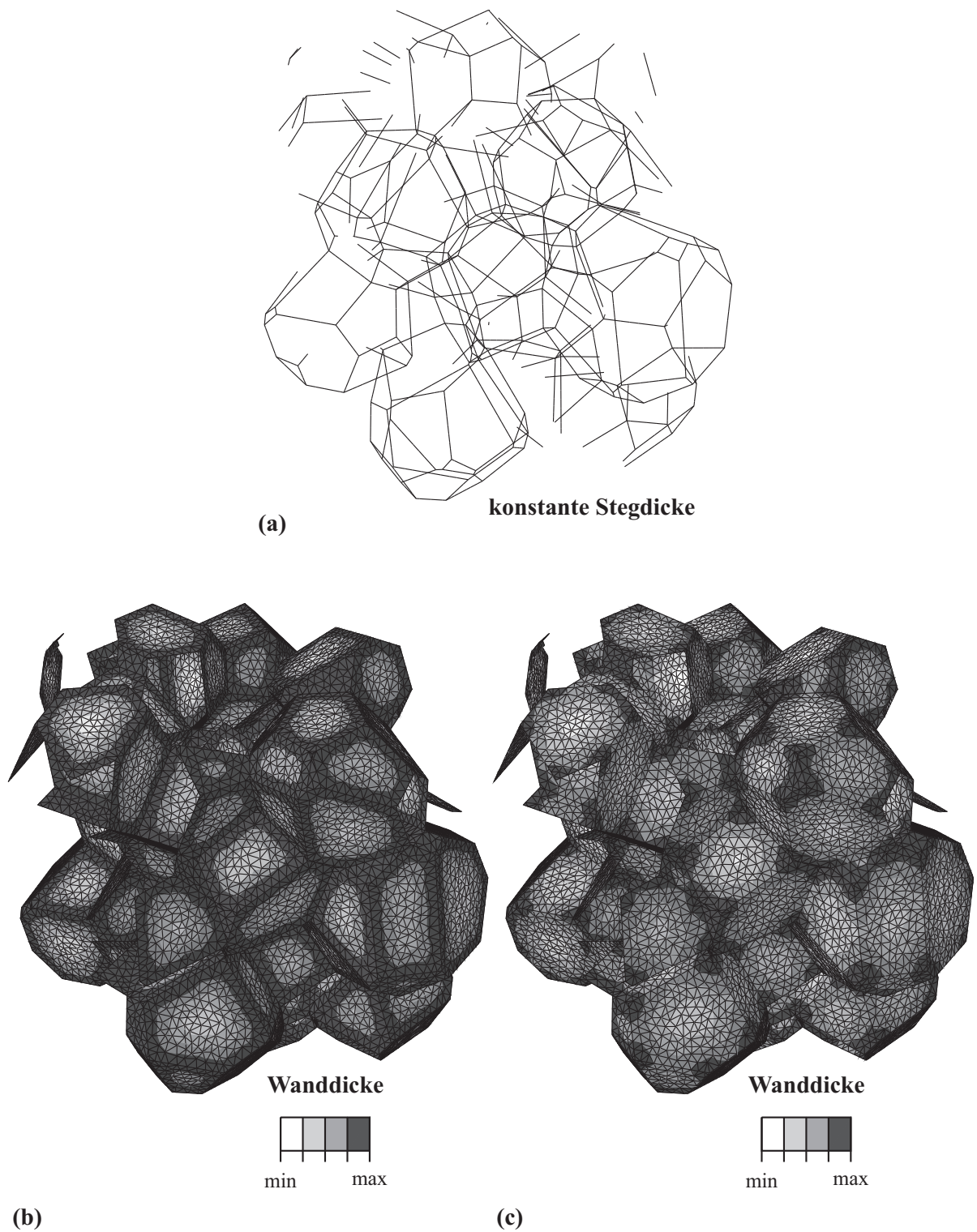


Abb. 4.3: Mikrostrukturmodelle mit 20 Zellen: offenzellig mit konstanter Stegdicke (a), geschlossenzellig mit der Wanddickenverteilung „Treppe“ (b) und geschlossenzellig mit der Wanddickenverteilung „Gewölbe“ (c)

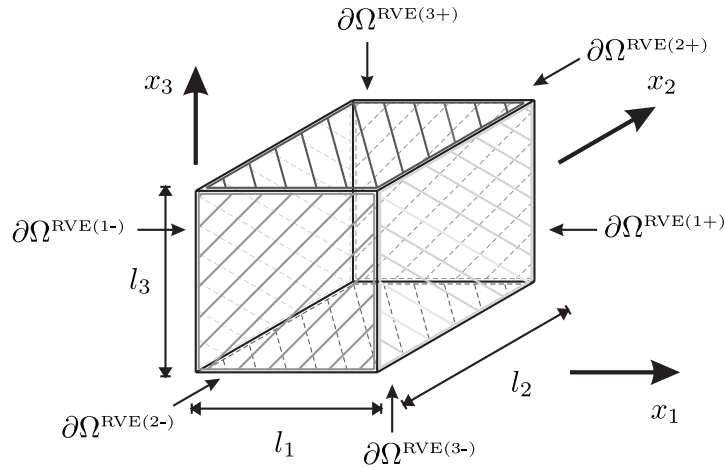


Abb. 4.4: Periodische Randbedingungen (HOHE und GUMBSCH [44])

menelements die periodischen Randbedingungen

$$\frac{u_i^{(+)} - u_i^{(-)}}{l_{(j)}} = \bar{F}_{ij} - \delta_{ij} \quad (4.4)$$

gelten, die aus der kinematischen Äquivalenzbedingung (3.13) ableitbar sind (HOHE und GUMBSCH [44]). Für das Mikrostrukturmodell folgt daraus eine Kopplung der Verschiebungskomponenten $u_i^{(+)}$ und $u_i^{(-)}$ von Knoten, die zu einer Zellwand der periodischen Mikrostruktur gehören innerhalb des Modells aber auf zwei parallelen, jedoch nicht zwangsläufig planaren Teiloberflächen $\partial\Omega^{\text{RVE}(+)}$ und $\partial\Omega^{\text{RVE}(-)}$ des repräsentativen Volumenelements auftreten (Abb. 4.4 aus HOHE und GUMBSCH [44]).

Weitere periodische Randbedingungen sind für die Verdrehungen dieser Knotenpaare erforderlich. So muss für diese

$$\varphi_i^{(+)} = \varphi_i^{(-)} \quad (4.5)$$

gelten.

Darüber hinaus ist die Aufbringung weiterer Randbedingungen erforderlich, um die Starrkörpertranslation und -rotation des repräsentativen Volumenelements zu unterbinden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird hierzu zum einen ein Knoten im Modell festgehalten und zum anderen wird die Symmetrie des effektiven Deformationsgradienten bzw. das Verschwinden der Rotation gefordert.

4.3 Validierung

Um sicherzustellen, dass die mittels des VORONOÏ-Verfahrens in LAGUERRE-Geometrie generierten Mikrostrukturmodelle geeignet sind, die makroskopischen Materialeigenschaften von festen Schäumen vorherzusagen, erfolgt eine Validierung anhand eines offenzelligen Me-

tallschaums, dessen geometrische Eigenschaften durch BOCK [5] mittels computertomographischer Messmethoden untersucht wurden. So werden die Qualität der einzelnen Zellen aber auch die Zellgrößenverteilung miteinander verglichen.

Im Zusammenhang mit der Validierung ist es wichtig zu beachten, dass das Ziel nicht darin besteht eine reale Mikrostruktur detailgetreu abzubilden, sondern ein statistisch repräsentatives Mikrostrukturmodell zu erzeugen, um später mittels der in Abschnitt 5 vorgestellten probabilistischen Methoden die Unschärfe der makroskopischen Materialeigenschaften basierend auf der bekannten bzw. zumindest messbaren Streuung der Mikrostrukturgrößen vorhersagen zu können.

Charakteristisch für reale Schaumstrukturen ist eine Variation in der Form und Größe der einzelnen Zellen. Während die ersten Schaummodelle, wie in Veröffentlichungen von GENT und THOMAS [25] 1963, GIBSON und ASHBY [26] 1982, ASHBY [2] 1983, CHRISTENSEN [9] 1987 und FRIIS *et al.* [24] 1988 zu finden sind, diese Tatsache noch unberücksichtigt ließen und aufgrund stark begrenzter Rechenkapazitäten nur aus einer einzigen Zellform in periodischer Aneinanderreihung bestanden, ist in einem ersten Schritt zu untersuchen, in wie weit das in Abschnitt 4.1 dargestellte Raumteilungsverfahren zelluläre Strukturen erzeugt, die den realen Zellgeometrien und -größenverteilungen entsprechen.

Ausgangspunkt aller Zellgeometriebetrachtungen bildet das KELVIN-Problem, welches sich mit der Auffindung einer periodischen Einheitszelle befasst, dessen Verhältnis der Zelloberfläche zum -volumen minimal ist. So publizierte THOMSON (Lord KELVIN) [91] bereits 1887, dass das Tetrakaidekaeder, welches dem Name nach ein vierzehneckiger Oktaederstumpf bestehend aus acht Sechsecken und sechs Vierecken ist, die Lösung dieses Optimierungsproblems sei. Erst über ein Jahrhundert später zeigten WEAIRE und PHELAN [100], dass eine Einheitszelle bestehend aus sechs Vierzehneckern und zwei Zwölfeckern zu einer weiteren – wenngleich äußerst geringfügigen – Optimierung des Zelloberflächen-Volumen-Verhältnisses führt.

Neben der Angabe des Oberflächen-Volumen-Verhältnisses hat sich bei der Charakterisierung der isoperimetrische Quotient

$$Q = 36\pi \frac{V^2}{A^3} \quad (4.6)$$

mit dem Zellvolumen V und der Zelloberfläche A durchgesetzt, da durch die Normierung für eine Kugel $Q_{\text{Kugel}} = 1$ gilt und somit sofort bei der Untersuchung realer Zellen die Abweichung zum optimalen Oberflächen-Volumen-Verhältnis einer Kugel ersichtlich ist.

Für eine Parameterstudie und den Vergleich zu den durch BOCK [5] ermittelten experimentellen Daten werden im Folgenden 189 Mikrostrukturmodelle mit jeweils zwanzig Zellen betrachtet, wobei sieben verschiedene Kombinationen an Eingangsparameter bei der Generierung der Quellpunktfelder verwendet wurden, so dass sieben Klassen (I, II, III, IV, V, VI, VII) mit je 27 Modellen existieren, deren normierte Streuung der Zellgröße von Klasse zu Klasse im Bereich von $\sigma(V)/E(V) = 0,1$ bis $0,5$ bei gleichzeitig leichter Streuung innerhalb einer Klasse zunimmt.

In Abb. 4.5(a) ist das arithmetische Mittel des isoperimetrischen Quotienten der 189 Mo-

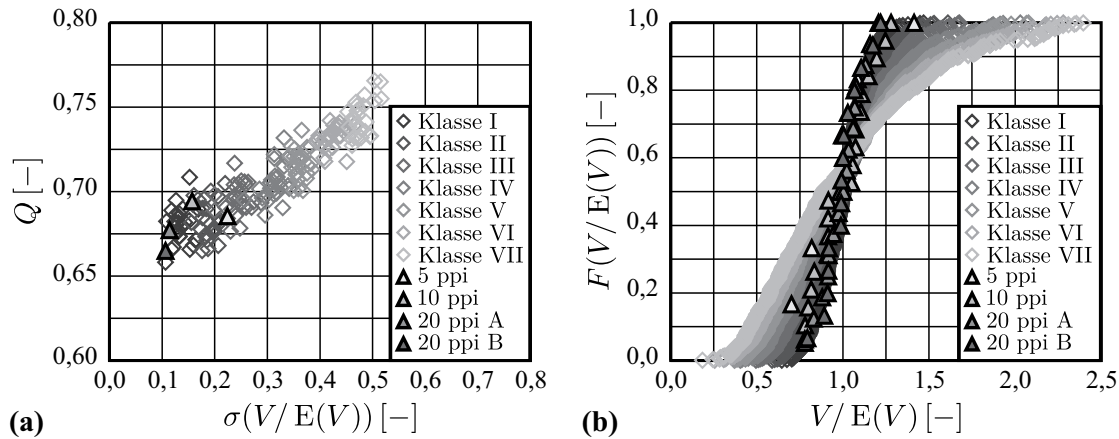


Abb. 4.5: Vergleich der Modelleigenschaften mit experimentell bestimmten Daten (BOCK [5]): isoperimetrische Quotienten (a) und Zellgrößenverteilungen (b)

delle und der experimentell ausgewerteten Metallschäume über den Streuungsparameter der logarithmischen Normalverteilung der Zellgrößen normiert auf den Erwartungswert aufgetragen. Deutlich zu erkennen ist, dass mit zunehmender Zellgrößenvariation der isoperimetrische Quotient zunimmt. Dies ist auf dem ersten Blick erstaunlich, da das Aneinandergrenzen von großen und kleinen Zellen erst einmal ungünstig erscheint. Da aber in diesen Modellen die absolut größten Zellvolumina auftreten, die besonders hohe isoperimetrische Quotienten aufweisen, nimmt auch im arithmetischen Mittel der isoperimetrische Quotient für diese Modelle zu.

Für den Metallschaum sind zudem die aus experimentellen Daten (BOCK [5]) berechneten isoperimetrischen Quotienten für die vier ausgewerteten Mikrostrukturausschnitte dargestellt, die jeweils weniger als zwanzig Zellen aufwiesen und deren Zellgrößen mit fünf, zehn und zwanzig Poren pro Inch (ppi) angegeben waren. Im Vergleich mit den Mikrostrukturmodellen lässt sich eine sehr gute Übereinstimmung der experimentellen Ergebnisse mit den Modellen mit der geringsten Zellgrößenstreuung (Klasse I) erkennen. Zu beachten ist aber, dass für eine gesicherte Aussage die Anzahl der ausgewerteten realen Mikrostrukturausschnitte deutlich zu gering ist.

Festzuhalten bleibt, dass für die Mikrostrukturmodelle eine hohe Qualität der Zellgeometrie sichergestellt ist, da alle Schaummodelle im Vergleich zum KELVIN-Schaum ($Q_{\text{Kel}} = 0,757$) bzw. dem WEAIRE-PHELAN-Schaum ($Q_{\text{w-p}} = 0,764$) ähnlich hohe Werte für den isoperimetrischen Quotienten aufweisen, die darüber hinaus deutlich über dem Wert für einen Kubus ($Q_{\text{Kub}} = 0,5236$) liegen (MONNEREAU und VIGNES-ADLER [65]).

In Abb. 4.5(b) sind die Zellgrößenverteilungen für die Klassen I bis VII der Zellgrößenverteilung und die Ergebnisse der von BOCK [5] experimentell ermittelten Zellgrößen des Metallschaums dargestellt. Ein Vergleich mit Abb. 2.7 zeigt, dass alle dargestellten Zellgrößenverteilungen näherungsweise logarithmischen Normalverteilungen entsprechen. Zudem ist deutlich eine Variation in der Streubreite der Klassen I bis VII der Zellgrößenverteilung zu erkennen.

Da die reale Schaumstruktur mit der Bezeichnung „20 ppi B“ sowohl beim isoperimetrischen

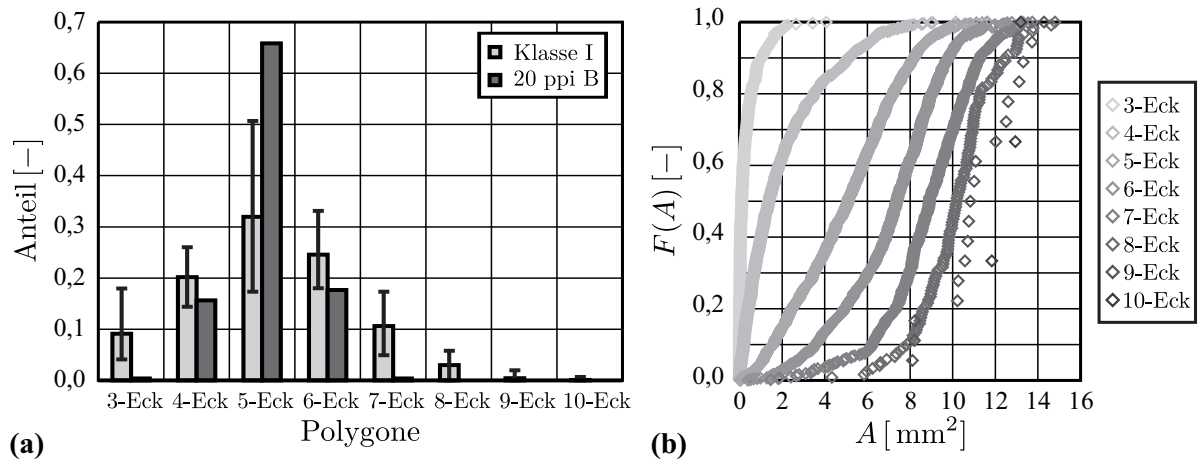


Abb. 4.6: Vergleich der Zellwandmodelleigenschaften mit experimentell bestimmten Daten (BOCK [5]): Anteiliges Auftreten verschiedener Zellwandformen (a) und Zellwandflächenverteilungen (b)

Quotienten als auch bei der Zellgrößenverteilung mit den Ergebnissen der Klasse I der Zellgrößenverteilung gut übereinstimmt, wurden zusätzlich die Eigenschaften der Zellwände näher betrachtet. Die Auswertung der bei den Zellwänden anteilig auftretenden Polygone ist in Abb. 4.6(a) dargestellt. Während nur ein realer Mikrostrukturausschnitt ausgewertet wurde, basiert das Ergebnis der Schaummodelle auf den Ergebnissen aller Modelle der Klasse I. So ist neben dem arithmetischen Mittel der 27 Modelle zudem das Ergebnis des Modells mit dem höchsten bzw. dem geringsten Wert in das Säulendiagramm eingezeichnet, wobei die große Streubandbreite auffällig ist.

Der in Abb. 4.6(a) dargestellte Vergleich zeigt, dass sowohl in der realen Schaumstruktur als auch in den Mikrostrukturmodellen am häufigsten Zellwände in Form von Fünfecken auftreten. Darüber hinaus sind in beiden Fällen in einem ausgeprägten Maße Vier- und Sechsecke vorzufinden. Bei den Mikrostrukturmodellen ist zudem ein signifikanter Anteil an Drei-, Sieben- und Achtecken auszumachen.

Bei Betrachtung der Abb. 4.6(b), in der die Zellwandflächenverteilungen für die auftretenden Polygone dargestellt sind, wird jedoch ersichtlich, dass die dreieckigen Zellwände eine sehr viel geringere Zellwandfläche A aufweisen als die übrigen Zellwände. So sind dies Zellwände bei denen mindestens zwei Eckpunkte sehr dicht beieinander liegen. Während bei der Mikrostrukturgenerierung mittels des VORONOÏ-Verfahrens hierdurch sehr kleine Zellwände entstehen, sind diese bei einer computertomographischen Auswertung einer realen Schaumstruktur jedoch nicht auszumachen, da ihre Wandflächen so klein sind, dass sie nicht als solche erkannt werden können. Zugleich ist in diesem Effekt begründet, warum in den Mikrostrukturmodellen zusätzlich zu den Dreiecken auch eine Vielzahl an Sieben- und Achtecken auftritt. Denn durch die sehr kleinen dreieckigen Zellwandflächen besitzen auch die angrenzenden größeren Zellwandflächen durch die sehr dicht beieinander liegenden Eckknoten eine höhere Eckknotenanzahl.

4 Numerisches Mikrostrukturmodell

Als Fazit ist festzuhalten, dass die mittels des VORONOÏ-Verfahrens in LAGUERRE-Geometrie generierten zellulären Strukturen reale Zellgrößenverteilungen mit qualitativ hochwertig geformten Zellen abbilden können (Abb. 4.5(a)). Auf diese Weise ist es möglich aus statistisch ausgewerteten Daten der experimentell ermittelten Mikrostruktureigenschaften, Mikrostrukturmodelle zu generieren, die inklusive der Streuung der mikrostrukturellen Eigenschaften statistisch repräsentativ sind für die gesamte zelluläre Struktur.

5 Bestimmung des effektiven Materialverhaltens

Nachdem im Kapitel 4 das im Rahmen dieser Arbeit angewandte Verfahren zur Mikrostrukturmodellerzeugung (Abschnitte 4.1 und 4.2) vorgestellt und anschließend in Abschnitt 4.3 validiert worden ist, wird in diesem Kapitel die angewandte probabilistische Methodik zur Bestimmung der effektiven Materialeigenschaften zellulärer Mikrostrukturen aufgezeigt. Zunächst wird jedoch in Abschnitt 5.1 die Problematik der möglichen Nichtexistenz wohldefinierter effektiver Eigenschaften diskutiert, bevor im folgenden Abschnitt 5.2 Lösungsansätze beschrieben werden. Die rechentechnische Umsetzung ist in Abschnitt 5.3 dargestellt. Eine abschließende Diskussion erfolgt in Abschnitt 5.4.

5.1 Problematik

Die Bestimmung der effektiven Materialeigenschaften zellulärer Mikrostrukturen kann bei einer möglichen Nichtexistenz wohldefinierter effektiver Eigenschaften problematisch werden. So können Mikrostrukturen auftreten für die sich kein repräsentatives Volumenelement derart bestimmen lässt, dass beide von HASHIN [38] aufgestellten Ungleichungen in (3.1) gleichzeitig erfüllt sind.

So wird die erste Ungleichung

$$\lambda \ll l \tag{5.1}$$

nicht erfüllt, wenn für eine betrachtete heterogene zelluläre Struktur die Kantenlänge l des repräsentativen Volumenelements zwar deutlich kleiner als das Längenausmaß L der betrachteten Struktur ist, jedoch als Folge dessen die auftretenden Mikroheterogenitäten mit dem Längenausmaß λ innerhalb der betrachteten Struktur durch das auf diese Weise definierte Volumenelement nicht mehr statistisch repräsentativ abgebildet werden können.

Die zweite Ungleichung

$$l \ll L \tag{5.2}$$

wird im Umkehrschluss verletzt, wenn die Kantenlänge l des repräsentativen Volumenelements so groß gewählt ist, dass zwar alle auftretenden Mikroheterogenitäten mit dem Längenausmaß λ statistisch repräsentativ durch das Volumenelement mit der Kantenlänge l abgebildet werden, jedoch diese damit nicht mehr deutlich kleiner als das Längenausmaß L der betrachteten Struktur ist.

Die Konsequenz des möglichen Auftretens der gleichzeitigen Nichterfüllbarkeit der von HASHIN aufgestellten Ungleichungen (5.1) und (5.2) ist, dass kein sauber definiertes repräsentatives Volumenelement existiert, womit in Folge dessen auch keine sauber definierten deterministischen effektiven Eigenschaften ermittelt werden können.

5.2 Lösungsansätze

Motiviert durch die im Abschnitt 5.1 aufgezeigte Problematik der möglichen Nichtexistenz wohldefinierter effektiver Eigenschaften, werden im Folgenden zwei probabilistische Lösungsansätze vorgestellt.

So erlaubt das erste Verfahren die Verletzung der Ungleichung (5.1), womit die in der betrachteten Struktur auftretenden Mikroheterogenitäten nicht mehr statistisch repräsentativ durch das Volumenelement – dessen Ausmaß durch die zweite Ungleichung definiert ist – abgebildet werden. Das auf diese Weise definierte Volumenelement ist folglich nicht mehr statistisch repräsentativ und wird somit im Folgenden als Testvolumenelement (TVE) bezeichnet (HUET [47]). Statistisch repräsentativ für die Mikrostruktur ist jedoch die mit ihren Auftretenswahrscheinlichkeiten gewichtete Gesamtheit aller betrachteten Testvolumenelemente. Zur Bestimmung der effektiven Materialeigenschaften der heterogenen zellulären Struktur wird für diesen Fall auf die probabilistische Methode der Mehrfachanalyse (Abschnitt 5.3.1) zurückgegriffen, da auf diese Weise durch die Generierung von einer Vielzahl von Testvolumenelementen bei einer nachfolgenden statistischen Auswertung die innerhalb der Struktur auftretenden Mikroheterogenitäten mittels Wahrscheinlichkeitsverteilungen abgebildet werden können.

Der zweite probabilistische Lösungsansatz ermöglicht die Bestimmung der effektiven Materialeigenschaften einer Mikrostruktur für den Fall, dass die Ungleichung (5.2) nicht erfüllt ist. Dies bedeutet, dass das betrachtete Volumenelement nicht deutlich kleiner als die betrachtete heterogene zelluläre Struktur ist. Hierfür bietet sich als Ausweg eine lokale Auswertung (Abschnitte 5.3.2 und 5.3.3) des vorliegenden Volumenelements an, so dass basierend auf der statistische Auswertung von Substrukturen Wahrscheinlichkeitsverteilungen ermittelt werden können, die der Ungleichung (5.2) Rechnung tragen.

5.3 Rechentechnische Umsetzung

Zur Bestimmung des effektiven Materialverhaltens zellulärer Mikrostrukturen wurden im Abschnitt 5.2 mit der Mehrfachanalyse und der lokalen Auswertung zwei probabilistische Lösungsansätze genannt, die auf Mikrostrukturausschnitte anwendbar sind, die nicht gleichzeitig die beiden von HASHIN aufgestellte Ungleichungen (5.1) und (5.2) erfüllen. Für beide Auswerteverfahren wird in diesem Abschnitt eine rechentechnische Umsetzung vorgestellt. So wird in Abschnitt 5.3.1 die Vorgehensweise bei der Mehrfachanalyse dargestellt. Anschließend werden mit der zellbasierten Auswertung (Abschnitt 5.3.2) und der „Moving-Window“-Auswertung (Abschnitt 5.3.3) zwei lokale Auswerteverfahren vorgestellt.

5.3.1 Mehrfache Testvolumenelemente-Auswertung

Die mehrfache Testvolumenelemente-Auswertung ist ein der globalen Auswertung entsprechendes lokales Verfahren, dessen Grundlage eine Vielzahl an Mikrostrukturmodellen mit geringer Zellanzahl bildet. Die Mikrostruktur in den einzelnen Testvolumenelementen kann sich dabei z. B. in der relativen Dichte, die den prozentualen Materialanteil bezogen auf das Gesamtvolumen des Testvolumenelements angibt, und in der Zellgrößenverteilung unterscheiden. Bei Gewichtung dieser Zufallsvariablen mit ihren Auftretswahrscheinlichkeiten müssen die betrachteten Modelle in ihrer Gesamtheit jedoch die betrachtete Mikrostruktur statistisch repräsentativ abbilden.

Nach der Aufbringung verschiedener Deformationszustände werden bei diesem Verfahren die effektiven Struktureigenschaften durch globale Auswertung der einzelnen Testvolumenelemente unter Berücksichtigung der zugehörigen Auftretswahrscheinlichkeiten berechnet. Die sich ergebenden Verteilungsfunktionen liefern nicht nur die Erwartungswerte der betrachteten Größen, sondern auch die zugehörige Streuung. Darüber hinaus kann die Auftretswahrscheinlichkeit extremer Fälle leicht abgelesen werden, die für die praktische Anwendung von zellulären Werkstoffen von großer Bedeutung ist.

Zur numerischen Bestimmung der Wahrscheinlichkeits- und Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen $F(\bar{\eta})$ und $f(\bar{\eta}) = \partial F(\bar{\eta})/\partial \bar{\eta}$ der effektiven Struktureigenschaften $\bar{\eta}$ wird der Raum der Zufallsvariablen $(X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)})$, welcher die betrachtete Mikrostruktur beschreibt, diskretisiert. Die Beschreibung jeder einzelnen Zufallsvariable $X^{(i)}$ erfolgt also durch diskrete Werte $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_k^{(i)}$.

Die Auftretswahrscheinlichkeit $\Delta F(x_i^{(1)}, x_j^{(2)}, \dots, x_l^{(n)})$ für einen durch die diskreten Zufallsvariablen beschriebenen Mikrostrukturzustand ist definiert durch

$$\begin{aligned} \Delta F(x_i^{(1)}, x_j^{(2)}, \dots, x_l^{(n)}) &= \int_{\Xi} f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) dx^{(1)} dx^{(2)} \dots dx^{(n)} \\ &\approx f(x_i^{(1)}, x_j^{(2)}, \dots, x_l^{(n)}) \Delta x_i^{(1)} \Delta x_j^{(2)} \dots \Delta x_l^{(n)} \end{aligned} \quad (5.3)$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $f(x_i^{(1)}, x_j^{(2)}, \dots, x_l^{(n)})$ der Zufallsvariablen und dem „finiten Element“ Ξ des Zufallsraums.

Exemplarisch ist für eine zweidimensionale Zufallsvariable $(X^{(1)}, X^{(2)})$ diese Diskretisierung in Abb. 5.1(a) skizziert.

Des Weiteren muss die Auftretswahrscheinlichkeit $\Delta F(x_i^{(1)}, x_j^{(2)}, \dots, x_l^{(n)})$ für eine durch die Zufallsvariablen $x_i^{(1)}, x_j^{(2)}, \dots, x_l^{(n)}$ beschriebene Mikrostruktur mit der für diesen Mikrostrukturfall aus einer Homogenisierungsanalyse bestimmten Auftretswahrscheinlichkeit $\Delta F(\bar{\eta}_m)$ übereinstimmen, die für den Wert $\bar{\eta}_m$ der effektiven Struktureigenschaft $\bar{\eta}$ ermittelt worden ist.

Es gilt somit

$$\Delta F(\bar{\eta}_m) = \Delta F(x_i^{(1)}, x_j^{(2)}, \dots, x_l^{(n)}) \quad (5.4)$$

mit $\bar{\eta}_m = \bar{\eta}_m(x_i^{(1)}, x_j^{(2)}, \dots, x_l^{(n)})$.

5 Bestimmung des effektiven Materialverhaltens

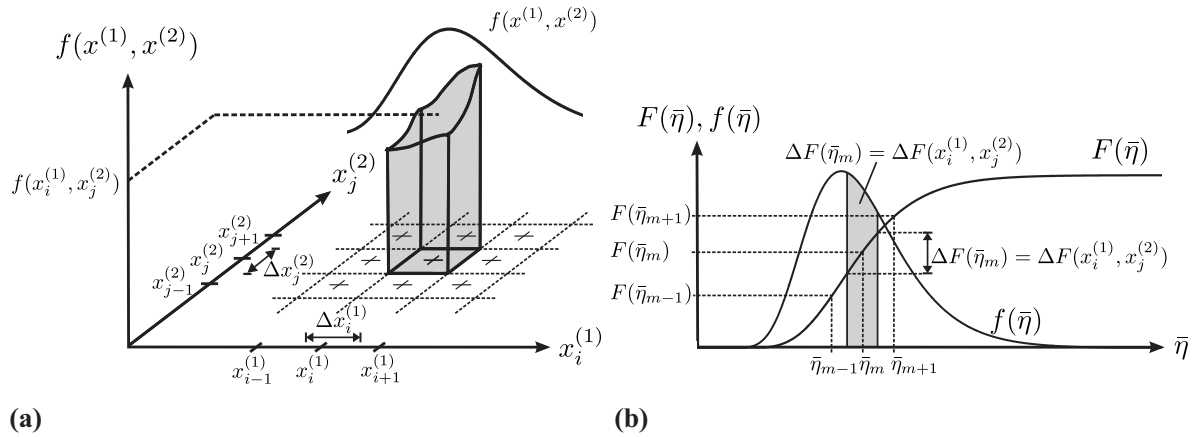


Abb. 5.1: Diskretisierung des Zufallsraums (a) und Verteilungen der effektiven Struktureigenschaft (b)

Nach einer aufsteigenden Sortierung der für die einzelnen Mikrostrukturausschnitte bestimmten Werte $\bar{\eta}_m$ der effektiven Struktureigenschaft $\bar{\eta}$ kann die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung durch

$$F(\bar{\eta}_m) = \sum_{s=1}^t \Delta F(\bar{\eta}_s) |_{\bar{\eta}_s < \bar{\eta}_m} + \frac{1}{2} \Delta F(\bar{\eta}_m) \quad (5.5)$$

berechnet werden.

In Abb. 5.1(b) ist exemplarisch für eine effektive Struktureigenschaft $\bar{\eta}$ einer Mikrostruktur, die durch eine zweidimensionale Zufallsvariable beschrieben wird, die sich ergebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung $F(\bar{\eta})$ skizziert. Darüber hinaus ist die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $f(\bar{\eta})$, die durch die (numerische) Ableitung $f(\bar{\eta}) = dF(\bar{\eta})/d\bar{\eta}$ gewonnen werden kann, dargestellt.

5.3.2 Zellbasierte Auswertung

Im Gegensatz zur Mehrfachanalyse basieren die lokalen Auswerteverfahren auf der Generierung von nur einem bzw. einer geringen Anzahl an Mikrostrukturmodellen, die die Mikroheterogenitäten der Struktur statistisch repräsentativ abbilden. Des Weiteren ist darauf hinzuweisen, dass diese lokalen Auswerteverfahren in der im Folgenden dargestellten Form nur auf geschlossenzellige Mikrostrukturen angewandt werden können.

Für die Bestimmung der effektiven Struktureigenschaften werden bei der zellbasierten Auswertung zunächst die effektiven Eigenschaften der einzelnen Zellen durch eine Homogenisierungsanalyse bestimmt, wobei die Spannungs- und Dehnungsmittelung (Abschnitt 3.2) auf jede Zelle einzeln angewandt wird. Die sich ergebenden effektiven Eigenschaften der einzelnen Zellen bilden dann die Rohdatenbasis zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der effektiven Eigenschaften der betrachteten heterogenen zellulären Struktur (Abb. 5.2). Berechnet werden die diskreten Verteilungen durch Gewichtung der einzelnen effektiven Zellei-

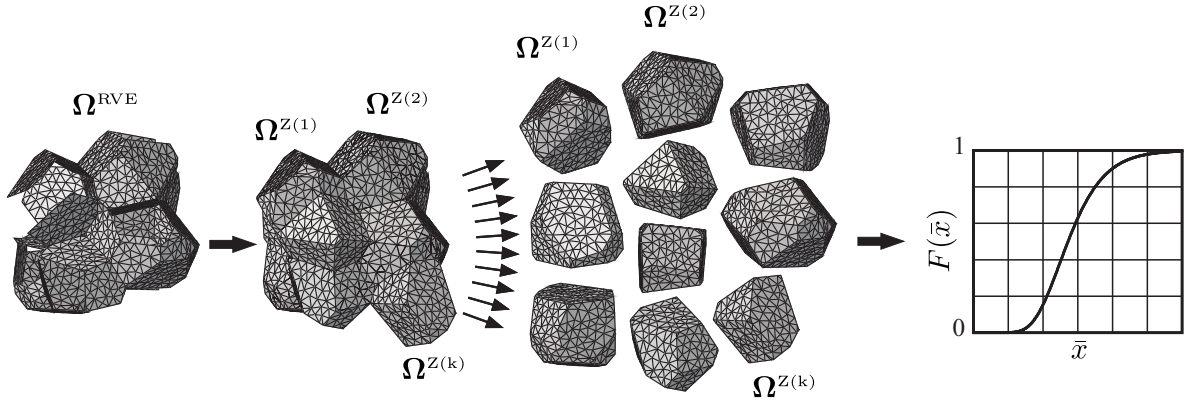


Abb. 5.2: Bestimmung der Verteilungsfunktionen mittels des zellbasierten Verfahrens

genschaften mit ihrem Zellvolumen.

Zur Beschreibung der lokalen Materialeigenschaften auf Zellebene ist eine Erweiterung der in Abschnitt 2.4 eingeführten globalen Größen auf lokaler Ebene erforderlich.

Da im Vergleich zur globalen Betrachtungsweise keine Spannungs- und Dehnungszustände für die einzelnen Zellen vorgegeben werden können, erfolgt die Bestimmung der effektiven Elastizitätskonstanten \bar{C}_{ij}^z (Abschnitt 2.4.1) auf Zellbasis durch Lösen des im Folgenden angegebenen linearen Gleichungssystems. So lassen sich die effektiven Elastizitätskonstanten \bar{C}_{ij}^z durch Aufbringung von sechs Referenzlastfälle auf das Mikrostrukturmodell über die Beziehung

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{\sigma}_{11}^z \\ \Delta \bar{\sigma}_{22}^z \\ \Delta \bar{\sigma}_{33}^z \\ \Delta \bar{\sigma}_{23}^z \\ \Delta \bar{\sigma}_{13}^z \\ \Delta \bar{\sigma}_{12}^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11}^z & \dots & \bar{C}_{16}^z \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{C}_{61}^z & \dots & \bar{C}_{66}^z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \bar{\varepsilon}_{11}^z \\ \Delta \bar{\varepsilon}_{22}^z \\ \Delta \bar{\varepsilon}_{33}^z \\ 2\Delta \bar{\varepsilon}_{23}^z \\ 2\Delta \bar{\varepsilon}_{13}^z \\ 2\Delta \bar{\varepsilon}_{12}^z \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

bestimmen, wobei die Matrix mit den effektiven Elastizitätskonstanten \bar{C}_{ij}^z symmetrisch ist. Zudem wird im Gegensatz zu Gleichung (2.38) die VOIGTSche Notation angewandt. Der Übergang zu dieser kompakten Schreibweise erfolgt entsprechend dem Schema

$$ij \rightarrow \begin{cases} i & \text{für } i = j \\ 9 - i - j & \text{für } i \neq j. \end{cases} \quad (5.7)$$

Zur Bestimmung der effektiven Fließkurven $\bar{\sigma}_v(\bar{\varepsilon}_v^{\text{pl}})$ auf Zellbasis erfolgt eine Separation des plastischen und elastischen Dehnungsanteils durch

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{\text{pl}(k)} = \bar{\varepsilon}_{ij}^{\text{ges}(k)} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{\text{el}(k)} \quad (5.8)$$

für alle Zeitschritte k der Belastung. Der elastische Anteil $\bar{\varepsilon}_{ij}^{\text{el}(k)}$ kann dabei durch die erneut in VOIGTScher Notation angegebene Inversion von

$$[\bar{\sigma}_i^z] = [\bar{C}_{ij}^z] \cdot [\bar{\varepsilon}_j^z] \quad (5.9)$$

5 Bestimmung des effektiven Materialverhaltens

gewonnen werden, wobei die effektiven Elastizitätskonstanten \bar{C}_{ij}^z über Gleichung (5.6) für das erste Belastungssinkrement berechnet werden und für die folgenden Zeitschritte konstant gehalten werden. Die effektiven deviatorischen plastischen Dehnungen ergeben sich zu

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{pl'(k)} = \bar{\varepsilon}_{ij}^{pl(k)} - \frac{1}{3}\bar{\varepsilon}_{ll}^{pl(k)}\delta_{ij} \quad (5.10)$$

für alle Zeitschritte k . Die Inkremente des effektiven plastischen Dehnungsdeviators $\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}^{pl'(k)}$ und der effektiven plastischen Vergleichsdehnung $\Delta\bar{\varepsilon}_v^{pl(k)}$ sind durch

$$\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}^{pl'(k)} = \bar{\varepsilon}_{ij}^{pl'(k)} - \bar{\varepsilon}_{ij}^{pl'(k-1)} \quad (5.11)$$

$$\Delta\bar{\varepsilon}_v^{pl(k)} = \left[\frac{2}{3}\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}^{pl'(k)}\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}^{pl'(k)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.12)$$

bestimmt, womit sich die akkumulierte effektive plastische Vergleichsdehnung zu

$$\bar{\varepsilon}_v^{pl(k)} = \sum_{t=1}^k \Delta\bar{\varepsilon}_v^{pl(t)} \quad (5.13)$$

berechnet. Analog zu Gleichung (2.62) wird der Deviator für die effektive Spannung durch

$$\bar{\sigma}'_{ij}{}^{(k)} = \bar{\sigma}_{ij}{}^{(k)} - \frac{1}{3}\bar{\sigma}_{ll}{}^{(k)}\delta_{ij} \quad (5.14)$$

gebildet. Die effektive VON-MISES-Vergleichsspannung errechnet sich zu

$$\bar{\sigma}_v{}^{(k)} = \left[\frac{3}{2}\bar{\sigma}'_{ij}{}^{(k)}\bar{\sigma}'_{ij}{}^{(k)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.15)$$

für alle Zeitschritte k , womit die Bestimmung der effektiven Fließkurve $\bar{\sigma}_v(\bar{\varepsilon}_v^{pl})$ aus den effektiven Spannungen $\bar{\sigma}_v{}^{(k)}(\bar{\varepsilon}_v^{pl(k)})$ in Abhängigkeit von den effektiven Dehnungen hergeleitet ist.

Die Bestimmung der effektiven Spannungen und Dehnungen auf Zellbasis erfolgt durch Integration über die Zelloberfläche $\partial\Omega^z$. Dabei gilt die für das repräsentative Volumenelement bereits in Gleichung (3.11) über die Mikrostrukturoberfläche durchgeführte Integration zur Bestimmung des effektiven Deformationsgradienten auch für eine einzelne Zelle. So ergibt sich mit

$$\bar{F}_{ij} = \frac{1}{V^z} \int_{\Omega^z} F_{ij} dV \quad (5.16)$$

und der Beziehung (3.14) zwischen dem Deformations- und dem Verschiebungsgradienten

$$\bar{F}_{ij} = \frac{1}{V^z} \int_{\partial\Omega^z} u_i n_j dA + \delta_{ij} \quad (5.17)$$

In einem weiteren Schritt werden die einzelnen Zellwände in ihre finiten Elemente zerlegt, so dass sich

$$\bar{F}_{ij} - \delta_{ij} = \sum_{e^z} \frac{1}{V^z} \int_{\partial\Omega^e} u_i n_j dA \quad (5.18)$$

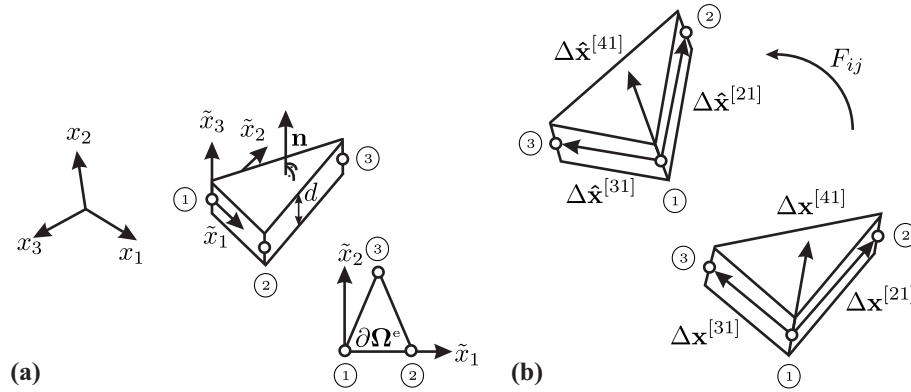


Abb. 5.3: Zellwandellement: im lokalen und globalen System (a) und in der Momentan- und Referenzkonfiguration (b)

schreiben lässt. Analog zu der Beziehung (5.16) für den effektiven Deformationsgradienten gilt zudem für die Komponenten des ersten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors

$$\bar{P}_{ij} = \frac{1}{V^Z} \int_{\Omega^Z} P_{ij} dV. \quad (5.19)$$

Durch Umformung von Gleichung (5.18) zu

$$\bar{F}_{ij} = \frac{1}{V^Z} \sum_{e^Z} \tilde{\alpha}_{ij}^e + \delta_{ij} \quad (5.20)$$

mit

$$\tilde{\alpha}_{ij}^e = \int_{\partial\Omega^e} u_i n_j dA = n_j^e \int_{\partial\Omega^e} u_i dA \quad (5.21)$$

kann die effektive Deformation der Zelle aus den bekannte lokalen Deformationen der Finite-Elementen-Rechnungen gewonnen werden. Dabei erfolgt für das Verschiebungsfeld $u_i(\tilde{x}_\alpha)$ eine bilineare Interpolation über das Element mit dem Ansatz

$$u_i(\tilde{x}_\alpha) = c_0 + c_1 \tilde{x}_1 + c_2 \tilde{x}_2, \quad (5.22)$$

wobei sich gemäß Abb. 5.3(a) die Konstanten zu

$$c_0 = u_i(\tilde{x}_1^{(1)}, \tilde{x}_2^{(1)}) \quad (5.23)$$

$$c_1 = [u_i(\tilde{x}_1^{(2)}, \tilde{x}_2^{(2)}) - u_i(\tilde{x}_1^{(1)}, \tilde{x}_2^{(1)})] \cdot [\tilde{x}_1^{(2)}]^{-1} \quad (5.24)$$

$$c_2 = [u_i(\tilde{x}_1^{(1)}, \tilde{x}_2^{(1)}) (\tilde{x}_1^{(3)} - \tilde{x}_1^{(2)}) - u_i(\tilde{x}_1^{(2)}, \tilde{x}_2^{(2)}) \tilde{x}_1^{(3)} + u_i(\tilde{x}_1^{(3)}, \tilde{x}_2^{(3)}) \tilde{x}_1^{(2)}] \cdot [\tilde{x}_1^{(2)} \tilde{x}_2^{(3)}]^{-1} \quad (5.25)$$

ergeben.

5 Bestimmung des effektiven Materialverhaltens

Die Integration des interpolierten Verschiebungsfelds über die Elementfläche liefert

$$\int_{\partial\Omega^e} u_i dA = \int_{\tilde{x}_2 \tilde{x}_1} u_i d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 = \frac{1}{3} \left(u_i(\tilde{x}_1^{(1)}, \tilde{x}_2^{(1)}) + u_i(\tilde{x}_1^{(2)}, \tilde{x}_2^{(2)}) + u_i(\tilde{x}_1^{(3)}, \tilde{x}_2^{(3)}) \right), \quad (5.26)$$

womit mittels Gleichung (5.18) der effektive Deformationsgradient der Zelle berechnet werden kann.

Zur Bestimmung der effektiven Spannungen wird Gleichung (5.19) unter Berücksichtigung der Tatsache, dass der Zellinnenraum spannungsfrei ist, zu

$$\bar{P}_{ij} = \frac{1}{V^Z} \int_{\partial\Omega^Z} \int_{\tilde{x}_3} P_{ij} d\tilde{x}_3 dA = \frac{1}{V^Z} \sum_{\epsilon^Z} A^\epsilon \int_{\tilde{x}_3}^0 P_{ij} d\tilde{x}_3 \quad (5.27)$$

umgeformt. Da die zweite Umformung die formulierungsbedingte Konstanz der Spannungen über die Elementfläche ausnutzt, wird nur in \tilde{x}_3 -Richtung über die halbe Zellwandstärke d integriert, da die gesamte Zellwand immer zu zwei benachbarten Zellen gehört.

Da auf Elementebene zunächst nur die CAUCHY-Spannungen bezüglich eines lokalen Koordinatensystems \tilde{x}_i vorliegen, müssen diese zur Bestimmung der Komponenten P_{ij} des ersten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors auf das globale x_i -Koordinatensystem des Elements transformiert werden. Da die Komponente \tilde{x}_3 dieses lokalen Systems immer der Flächennormalen \mathbf{n} des Elements entspricht (Abb. 5.3(a)) und aus diesem Grund mit der x_3 -Achse des globalen Systems übereinstimmt, muss im Folgenden nur die beliebige Orientierung der \tilde{x}_1 - und \tilde{x}_2 -Richtung berücksichtigt werden. Somit gilt

$$\bar{P}_{ij} = \frac{1}{V^Z} \sum_{\epsilon^Z} \tilde{\beta}_{ij}^\epsilon \quad (5.28)$$

mit

$$\tilde{\beta}_{ij}^\epsilon = A^\epsilon \int_{-\frac{d}{2}}^0 P_{ij} d\tilde{x}_3 = A^\epsilon \int_{-\frac{d}{2}}^0 \det \mathbf{F} \sigma_{ik} F_{jl}^{-1} d\tilde{x}_3 \quad (5.29)$$

nach Gleichung (2.27).

Die Integration wird an dieser Stelle für die innere und äußere Zellwandhälfte des Elements getrennt numerisch über

$$\tilde{\beta}_{ij}^{\epsilon(-)} = A^\epsilon \sum_{s=1}^{\frac{1}{2}(s^{\max}-1)} \left[\left(\det \mathbf{F} \sigma_{ij} F_{jk}^{-1} \right)_s + \left(\det \mathbf{F} \sigma_{ij} F_{jk}^{-1} \right)_{s+1} \right] \frac{d}{2(s^{\max}-1)} \quad (5.30)$$

$$\tilde{\beta}_{ij}^{\epsilon(+)} = A^\epsilon \sum_{s=\frac{1}{2}(s^{\max}+1)}^{s^{\max}-1} \left[\left(\det \mathbf{F} \sigma_{ij} F_{jk}^{-1} \right)_s + \left(\det \mathbf{F} \sigma_{ij} F_{jk}^{-1} \right)_{s+1} \right] \frac{d}{2(s^{\max}-1)} \quad (5.31)$$

mit dem SIMPSON-Integrationspunkt s und der Nummer des höchsten Integrationspunkts s^{\max} durchgeführt (Abschnitt 2.5).

Die Komponenten des CAUCHY-Spannungstensors σ_{ij} im globalen System werden aus den Komponenten $\tilde{\sigma}_{ij}$ des lokalen Systems mit Hilfe der Transformation

$$\sigma_{ij} = a_{ik}^{-1} a_{jl}^{-1} \tilde{\sigma}_{kl} \quad (5.32)$$

mit der Transformationsmatrix

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^{(1)} & \tilde{e}_2^{(1)} & \tilde{e}_3^{(1)} \\ \tilde{e}_1^{(2)} & \tilde{e}_2^{(2)} & \tilde{e}_3^{(2)} \\ \tilde{e}_1^{(3)} & \tilde{e}_2^{(3)} & \tilde{e}_3^{(3)} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

gewonnen.

Zur Berechnung des Deformationsgradienten wird dessen Definition als Abbildungsvorschrift

$$\Delta \hat{x}_i = F_{ij} \Delta x_j \quad (5.34)$$

zwischen dem Linienelement Δx_i in der Referenzkonfiguration und dem Linienelement $\Delta \hat{x}_i$ in der Momentankonfiguration zurückgegriffen (Abb. 5.3(b)).

Des Weiteren wird vereinfachend von über das gesamte Element konstanten Komponenten F_{ij} des lokalen Deformationsgradienten ausgegangen. Dies ist möglich, da für die verwendete Elementformulierung die Deformationen über die Elementoberfläche konstant sind und für die Biegeanteile mit einem linearen Ansatz gearbeitet wird.

Zur Bestimmung der Komponenten des Deformationsgradienten F_{ij} können die Elementkantenvektoren

$$\Delta \mathbf{x}^{[21]} = \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)} = x_i^{(2)} - x_i^{(1)} \quad (5.35)$$

$$\Delta \mathbf{x}^{[31]} = \mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(1)} = x_i^{(3)} - x_i^{(1)} \quad (5.36)$$

in der Referenzkonfiguration bzw.

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}^{[21]} = \mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{u}^{(2)} - [\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{u}^{(1)}] = x_i^{(2)} + u_i^{(2)} - x_i^{(1)} - u_i^{(1)} \quad (5.37)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}^{[31]} = \mathbf{x}^{(3)} + \mathbf{u}^{(3)} - [\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{u}^{(1)}] = x_i^{(3)} + u_i^{(3)} - x_i^{(1)} - u_i^{(1)} \quad (5.38)$$

in der Momentankonfiguration als Linienelemente betrachten werden.

Als drittes unabhängiges Linienelement wird der mit der Elementdicke in der jeweiligen Konfiguration multiplizierte Normaleneinheitsvektor auf der Elementfläche betrachtet. Hierfür gilt

$$\Delta \mathbf{x}^{[41]} = \frac{\Delta \mathbf{x}^{[21]} \times \Delta \mathbf{x}^{[31]}}{|\Delta \mathbf{x}^{[21]} \times \Delta \mathbf{x}^{[31]}|} d \quad (5.39)$$

mit der Elementdicke d in der Referenzkonfiguration und entsprechend

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}^{[41]} = \frac{\Delta \hat{\mathbf{x}}^{[21]} \times \Delta \hat{\mathbf{x}}^{[31]}}{|\Delta \hat{\mathbf{x}}^{[21]} \times \Delta \hat{\mathbf{x}}^{[31]}|} \hat{d} \quad (5.40)$$

mit der Elementdicke \hat{d} in der Momentankonfiguration.

5 Bestimmung des effektiven Materialverhaltens

Die neun unabhängigen Komponenten des Deformationsgradienten F_{ij} können dann aus den neun Gleichungen

$$\Delta \hat{x}_i^{[21]} = F_{ij} \Delta x_j^{[21]} \quad (5.41)$$

$$\Delta \hat{x}_i^{[31]} = F_{ij} \Delta x_j^{[31]} \quad (5.42)$$

$$\Delta \hat{x}_i^{[41]} = F_{ij} \Delta x_j^{[41]} \quad (5.43)$$

bestimmt werden.

5.3.3 „Moving-Window“-Auswertung

Die „Moving-Window“-Auswertung ist eine Weiterentwicklung der zellbasierten Auswertung, die es ermöglicht gleichgroße beliebig geformte Mikrostrukturausschnitte zu analysieren, die zudem zur gezielten Untersuchung der räumlichen Autokorrelation auf einem regelmäßigen Raster angeordnet werden können.

Betrachtet werden im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich kugelförmige rasterförmig angeordnete Mikrostrukturausschnitte. Die effektiven Struktureigenschaften dieser basieren auf den effektiven Zelleigenschaften, die mit dem zellbasierten Verfahren in Abschnitt 5.3.2 zu ermitteln sind. Zur Bestimmung der effektiven Struktureigenschaften der kugelförmigen Mikrostrukturausschnitte werden diese mittels sphärischer Koordinaten in eine Vielzahl von Segmenten zerlegt. Anschließend werden den einzelnen Segmenten die effektiven Eigenschaften der Zelle zugewiesen in der sich der Schwerpunkt des Kugelsegments befindet. Die Verteilungen für die effektiven Struktureigenschaften der kugelförmigen Mikrostrukturausschnitte ergeben sich dann durch Volumengewichtung der einzelnen Segmenteigenschaften (Abb. 5.4).

Eine Variante zu dieser als Gleichgewichtung bezeichneten Variante, bei der die Gewichtung der Segmenteigenschaften unabhängig vom Abstand zum Kugelmittelpunkt ist, liefert eine abstandsabhängige GAUSS-Gewichtung, wobei die Eigenschaften der zentrumnahen Kugelsegmente stärker gewichtet werden als die weiter außen liegenden.

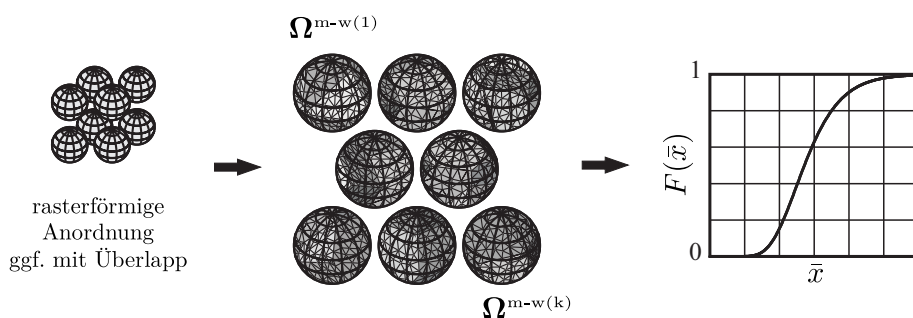


Abb. 5.4: Bestimmung der Verteilungsfunktionen mittels des „Moving-Window“-Verfahrens

Definiert ist die GAUSS-Gewichtung durch

$$w(r_E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r_E}{\sigma}\right)^2\right] \quad (5.44)$$

mit dem EUKLID-Abstand r_E vom Kugelmittelpunkt und dem Streuungsparameter σ , der im Rahmen dieser Arbeit derart gewählt ist, dass $w(r_{TVE}) = 1 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$ ist.

5.4 Diskussion

Die in Abschnitt 5.3 vorgestellten probabilistischen Methoden stellen ein Bewertungskonzept für heterogene zelluläre Materialien dar, wobei im Gegensatz zu einer rein deterministischen Betrachtungsweise die Streuungen in den Mikrostruktureigenschaften bei der Bestimmung der effektiven Materialeigenschaften berücksichtigt werden. Während bei einer MONTE-CARLO-Simulation zur Ermittlung der Streubandbreite in den effektiven Struktureigenschaften ein sehr hoher Rechenaufwand besteht, um bei zufälliger Wahl der Eingangsparameter auch seltener auftretende Mikrostrukturfälle zu berücksichtigen, können bei der vorgestellten probabilistischen Methode gezielt Extremfälle berücksichtigt werden. Vor allem für die Bauteilauslegung ist dies von außerordentlicher Bedeutung, da für das Materialversagen die Auftretenswahrscheinlichkeiten extremer Fälle ausschlaggebend sind. So kann durch die vorgestellte probabilistische Methode genau für diese Extrembereiche gezielt eine höhere Rohdatenbasis erzeugt werden. Auf diese Weise kann die Aussagekraft der Verteilungen der effektiven Struktureigenschaften in den Extrembereichen bei begrenztem Rechenaufwand erheblich verbessert werden.

Im Folgenden werden die Vor- und Nachteile der in Abschnitt 5.3 vorgestellten Auswerteverfahren dargestellt, so dass für den konkreten Anwendungsfall das am besten geeignete Verfahren gewählt werden kann.

So kann in der vorgestellten Form – wenngleich eine Erweiterung denkbar wäre – das zellbasierte und das „Moving-Window“-Auswerteverfahren derzeit nur für geschlossenzellige Mikrostrukturen verwandt werden, da zur Bestimmung der effektiven Zelleigenschaften gemäß Gleichung (5.16) über die Zelloberfläche integriert wird. Die mehrfache Testvolumenelemente-Auswertung ist jedoch sowohl zur Analyse von geschlossen- als auch offenzelligen Mikrostrukturen anwendbar. Darüber hinaus besteht ein weiterer Vorteil der mehrfachen Testvolumenelemente-Auswertung darin, dass es ausreichend ist Mikrostrukturmodelle mit einer geringen Zellanzahl zu generieren. Denn obwohl für eine statistisch repräsentative Rohdatenbasis eine Vielzahl von geringzelligen Modellen benötigt wird, ist der Rechenaufwand für diese Testvolumenelemente im Vergleich zu der Generierung von wenigen Modellen mit sehr großer Zellanzahl, wie sie für die Generierung von statistisch repräsentativen Volumenelementen benötigt wird, deutlich geringer. Zu beachten ist dabei, dass mittels dieser geringzelligen Modelle die charakteristischen Mikrostruktureigenschaften, wie die Zellgrößenverteilung, dennoch korrekt abgebildet werden können.

Dem gegenüber steht der Vorteil des zellbasierten und des „Moving-Window“-Auswertever-

5 Bestimmung des effektiven Materialverhaltens

fahrens, dass aufgrund der geringen Modellanzahl nur wenige Deformationsrechnungen zur Ermittlung der effektiven Materialeigenschaften durchgeführt werden müssen, so dass bei großen Deformationen die numerische Effizienz durch dieses Verfahren erheblich gesteigert werden kann. Zu beachten ist darüber hinaus dass für die Substrukturen keine gezielte Deformation vorgegeben werden kann, sondern nur das gesamte Mikrostrukturmodell gezielt bzw. entlastet werden kann.

Zudem liefert das zellbasierte Auswerteverfahren die Materialeigenschaften der einzelnen Zellen, wodurch z. B. eine mögliche Korrelation mit der Zellform untersucht werden kann, wenngleich die Zelleigenschaften bei diesem Auswerteverfahren von der Umgebung mitbeeinflusst werden. In Hinblick auf die Entwicklung eines Verfahrens zur Vorhersage der Materialeigenschaften basierend auf den bekannten bzw. messbaren Struktureigenschaften ist die Bestimmung der Korrelation der Zelleigenschaften von außerordentlicher Bedeutung.

Das „Moving-Window“-Verfahren lässt hingegen, wie auch die mehrfache Testvolumenelemente-Auswertung, einen Vergleich gleichgroßer Mikrostrukturausschnitte zu. Des Weiteren ist zu beachten, dass es bei der mehrfachen Testvolumenelemente-Auswertung innerhalb der einzelnen Modelle immer zu einem Mittelungseffekt in den Materialeigenschaften kommt, der bei der Betrachtung der Ergebnisse zu berücksichtigen ist. Zudem kann mit dem „Moving-Window“-Auswerteverfahren durch rasterförmige Anordnung der Auswerteausschnitte (Abb. 5.4) gezielt die räumliche Autokorrelation der Mikrostruktureigenschaften untersucht werden.

Weitere Vor- und Nachteile, die erst bei Anwendung dieser drei Auswerteverfahren zu beobachten sind, wie zum Beispiel der Einfluss der Größe des Testvolumenelements bei der „Moving-Window“-Auswertung, werden bei den Anwendungsbeispielen in den folgenden Kapiteln diskutiert.

6 Vorhersage des effektiven Materialverhaltens von Aluminiumschäumen

In diesem Kapitel soll exemplarisch an einem geschlossenzelligen Aluminiumschaum die Bestimmung des effektiven Materialverhaltens mittels der in den vorangegangenen Kapiteln beschriebenen probabilistischen Methode aufgezeigt werden. Nach Festlegung der Modellparameter in Abschnitt 6.1 werden die in Abschnitt 5.3 vorgestellten Auswerteverfahren zunächst angewandt (Abschnitt 6.2 bis 6.4) und anschließend in Abschnitt 6.5 miteinander verglichen.

6.1 Modell-Eingangsgrößen

Die Modellgenerierung zur Untersuchung des effektiven Materialverhaltens von Aluminiumschäumen basiert auf einer Vielzahl von Eingangsgrößen, dessen Wahl die Qualität der Ergebnisse zum Teil erheblich beeinflussen kann. Aus diesem Grund wurde eine ausführliche Literaturrecherche zum Materialverhalten von Aluminiumschäumen durchgeführt.

Wie von RAMAMURTY und PAUL [75] sowie KOLLURI *et al.* [51] beobachtet wurde, weisen die Zellen der experimentell untersuchten geschlossenzelligen Aluminiumschäume keine Vorzugsrichtung in ihrer Orientierung auf. Sie besitzen allenfalls eine leichte Ellipsoidform, womit die Verwendung des in Abschnitt 4.1 vorgestellten Raumteilungsverfahrens zur Mikrostrukturgenerierung gerechtfertigt ist. Für den mittleren Zelldurchmesser und für die zugehörigen Standardabweichung werden in RAMAMURTY und PAUL [75], ELMOUTAOUAKKAIL *et al.* [19] und KOLLURI *et al.* [51] Werte in gleicher Größenordnung vorgefunden. Eine Übereinstimmung der experimentellen Daten konnte an dieser Stelle von vorneherein nicht erwartet werden, da die Zellgröße ein Parameter ist, der gewöhnlich bei der Herstellung von Schäumen gezielt variiert wird.

Für die relative Dichte wurden jedoch übereinstimmende Daten vorgefunden. So ist in RAMAMURTY und PAUL [75] die Dichte des Aluminiumschaums mit $\rho_{\text{Al-Schaum}} = 0,26 \text{ g/cm}^3$ angegeben. Dieser Wert stimmt mit der relativen Dichte von $\bar{\rho}/\rho_0 = 0,095$ überein, die unter Angabe der Dichte für Aluminium von $\rho_{\text{Al}} = 2700 \text{ g/cm}^3$ in WIERZBICKI und DOYOYO [103] bestimmt worden ist. Des Weiteren ist in KOLLURI *et al.* [51] ein Histogramm mit einer Spannweite für die relative Dichte von $(\bar{\rho}/\rho_0)_{\min} = 0,070$ bis $(\bar{\rho}/\rho_0)_{\max} = 0,125$ abgebildet. Aufgrund des zusätzlichen Informationsgehalts werden für die Wahl der relativen Dichte in den nachfolgenden Rechnungen die Angaben aus KOLLURI *et al.* [51] verwandt.

Je nach Dichte konnten für die Zellwandstärke Werte im Bereich von $d_{\min} = 40 \mu\text{m}$ bis $d_{\max} = 160 \mu\text{m}$ durch ELMOUTAOUAKKAIL *et al.* [19] ermittelt werden. Nach Untersuchungen von RAMAMURTY und PAUL [75] und KOLLURI *et al.* [51] besteht bei der Variation jedoch kein Bezug zum Ort. In MARKAKI und CLYNE [60] ist hingegen eine deutliche Materialanhäufung im Bereich der Zellwandverzweigungspunkte zu erkennen. Diese Beobachtung wird auch durch KENESEI *et al.* [50] bestätigt, die niedrigere Dickenwerte für die Zellwandstärke als für die Zellwandverzweigungspunkte ermittelten.

Aufgrund dieser experimentellen Ergebnisse wird das Wandstärkenverhältnis zunächst nicht explizit festgelegt, sondern der Einfluss verschiedener Wandstärken-Verteilungen auf das effektive Materialverhalten wird mittels verschiedener Mikrostrukturmodelle zunächst zusätzlich untersucht. Sicherergestellt ist nach einer Auswertung von ELMOUTAOUAKKAIL *et al.* [19] jedoch, dass ausschließlich vollständig geschlossene Zellen vorliegen.

Zur Beschreibung des Materialverhaltens wird ein Elastizitätsmodul von $E_{\text{Al}} = 70 \text{ MPa}$ und eine Querkontraktionszahl von $\nu_{\text{Al}} = 0,3$ (vgl. KUCHLING [52]) als Eingangsgröße verwendet. Dabei ist zu beachten, dass auf Mikrostrukturebene aufgrund der geringen Kornanzahl in Dickenrichtung ein anderes Materialverhalten als bei einer größeren Probengeometrie, die zu Ermittlung dieser Bulkwerte verwendet wird, zu erwarten ist. Gleiche Schwierigkeiten bestanden bei der Wahl der Fließkurve zur Beschreibung der plastischen Deformation, so dass die Anfangsfließspannung zu $\sigma_y(0) = 190 \text{ MPa}$ festgesetzt wurde.

6.2 Mehrfache Testvolumenelemente-Auswertung

Für die mehrfache Testvolumenelemente-Auswertung werden Mikrostrukturmodelle mit jeweils 20 Zellen auf dem Einheitsvolumen generiert. Dies ist gerechtfertigt, da keine masse- oder ratenabhängigen Effekte untersucht werden und zudem in Abschnitt 4.3 festgestellt werden konnte, dass trotz einer geringen Zellanzahl eine logarithmische Normalverteilung für das Zellvolumen sehr gut reproduziert werden kann.

Für die Zellwandstärke werden drei Varianten verwendet. So wird neben einer konstanten Zellwandstärke d ebenso ein Anstieg der Zellwandstärke in Form einer Potenzfunktion von der Zellwandmitte zu den Zellwandkanten im Verhältnis von $(d_{\min}/d_{\max})^{\text{Wand}} = \frac{1}{3}$ bzw. $\frac{1}{10}$ betrachtet, wie sie in Abb. 4.3(b) als Dickenverteilung „Treppe“ dargestellt ist.

Die probabilistische Auswertung beruht auf vier diskreten Zufallsvariablen: Die relative Dichte ist hierbei von besonderer Bedeutung. So werden neun relative Dichten mit diskreten Werten von $\bar{\rho}/\rho_0 = 0,04, 0,06, \dots, 0,20$ betrachtet. Die zugehörigen Auftretswahrscheinlichkeiten konnten durch Anpassung einer logarithmischen Normalverteilung an die Ergebnisse von KOLLURI *et al.* [51] gewonnen werden. Für die logarithmische Zellgrößenverteilung werden gleichverteilt sieben normierte Standardabweichungen im Bereich von $\sigma(V^z)/E(V^z) = 0,1$ bis $0,5$ verwendet. Darüber hinaus werden zur gezielten Untersuchung der Streuung für jeden diskreten Fall der beiden zuvor eingeführten Zufallsvariablen jeweils drei Modelle generiert, die gleichgewichtet eine dritte Zufallsvariable darstellen. Als vierte Zufallsvariable dient die Orientierung im Raum, die aufgrund der Betrachtung von isotropen Materialverhalten auf ma-

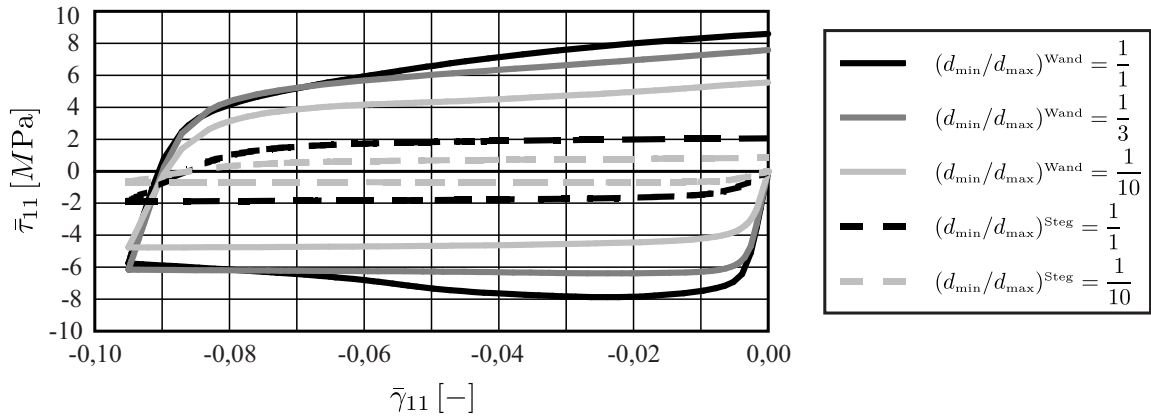


Abb. 6.1: Belastungskurven

kroskopischer Ebene ebenfalls als gleichverteilt angenommen wird.

Zur Bestimmung der effektiven Materialeigenschaften werden sowohl Normal- als auch Schubbelastungen aufgebracht, wobei entweder eine Normal- oder eine Schubkomponente des effektiven Deformationsgradienten \bar{F}_{ij} vorgegeben wird und alle anderen Komponenten keinen Zwängen unterworfen sind.

Die Deformation erfolgt in alle Fällen zunächst in Druckrichtung, wobei eine Abnahme der vorgegebenen Komponente des Deformationsgradienten \bar{F}_{ij} von 1 auf 0,9 für Normalbelastungen und von 0 auf $-0,1$ für Schubbelastungen gewählt wird. Anschließend erfolgt eine vollständige Rückbelastung, so dass der Deformationsgradient seinen Ausgangswert wieder annimmt.

Exemplarisch sind in Abb. 6.1 die effektiven zweiten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungskomponenten $\bar{\tau}_{11}$ über die effektiven GREEN-LAGRANGE-Dehnungskomponenten $\bar{\gamma}_{11}$ für Mikrostrukturmodelle des geschlossenzelligen Aluminiumschaums mit einer relativen Dichte von $\bar{\rho}/\rho_0 = 0,08$ bei Zellwandstärkenverteilungen von $(d_{min}/d_{max})^{Wand} = \frac{1}{1}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{10}$ dargestellt. Des Weiteren sind zwei Belastungskurven für offenzellige Aluminiumschäume mit Stegdickenverhältnissen von $(d_{min}/d_{max})^{Steg} = \frac{1}{1}$ und $\frac{1}{10}$ bei entsprechender relativer Dichte eingezeichnet, um den Einfluss zwischen einer konstanten Materialverteilung und einer Materialanhäufung im Bereich der Zellwandkanten bei den geschlossenzelligen Schäumen bzw. den Zellstegverzweigungspunkten bei den offenzelligen Schäumen noch deutlicher hervorzuheben.

In Abb. 6.2(a) bis (d) werden die Rohdatenbasen für den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl, die sowohl aus der Anfangssteigung als auch aus der Steigung bei der Rückbelastung gewonnen wurden, in Abhängigkeit von der relativen Dichte der Mikrostrukturmodelle gezeigt. Des Weiteren wurde die effektive Fließspannung während der plastischen Deformation untersucht. Hierzu wurde aus den Komponenten des CAUCHY-Spannungstensors die entsprechende VON-MISES-Vergleichsspannung an ausgewählten Punkten ermittelt. Für die Normalbelastungen sind die VON-MISES-Vergleichsspannungen in Abhängigkeit von der re-

6 Vorhersage des effektiven Materialverhaltens von Aluminiumschäumen

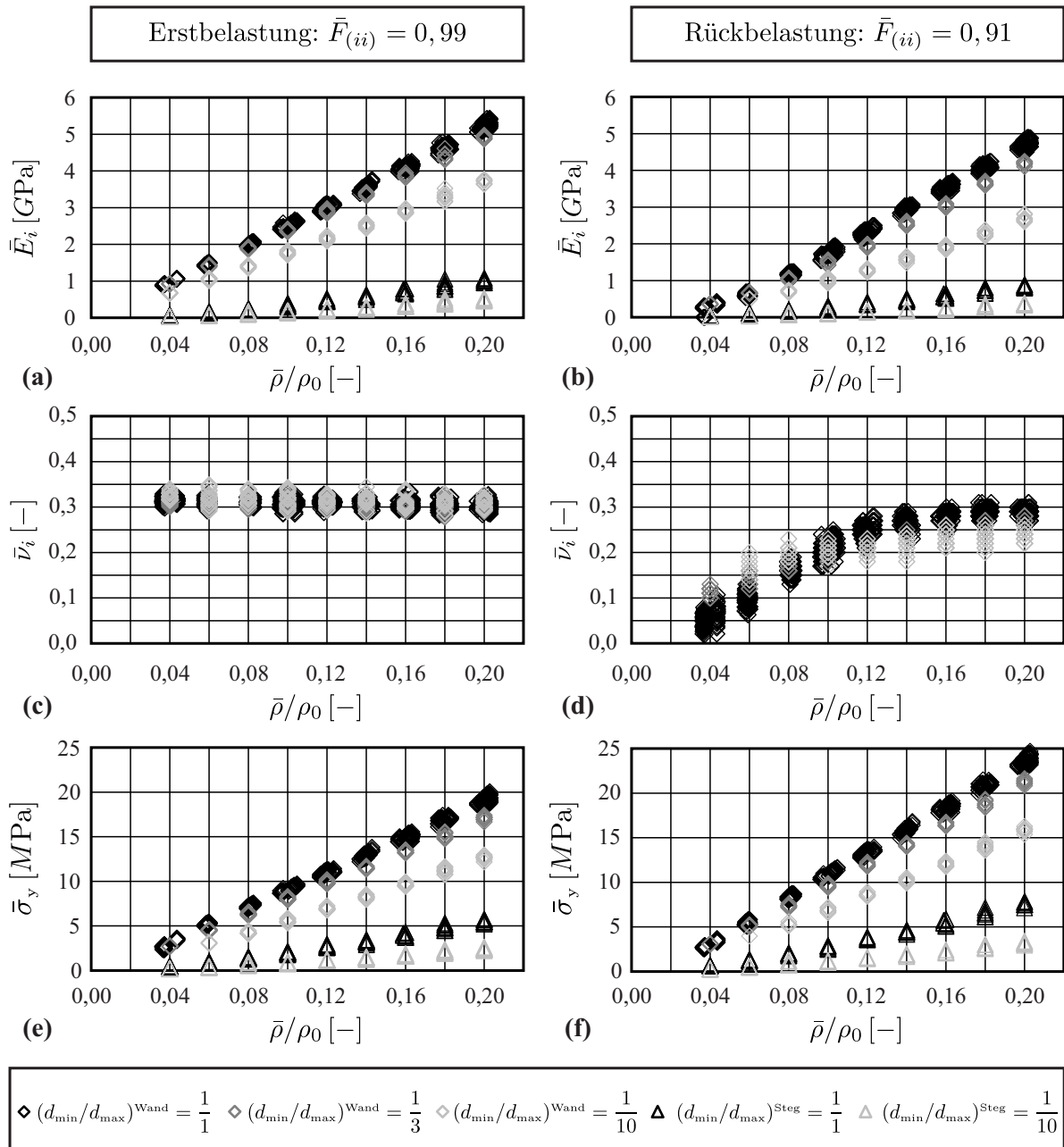


Abb. 6.2: Rohdatenbasis in Abhängigkeit von der relativen Dichte

lativen Dichte zum Zeitpunkt, zu dem der Deformationsgradient einen Wert von $\bar{F}_{(ii)} = 0,99$ aufweist, in Abb. 6.2(e) bei zunehmender Belastung und zum Zeitpunkt, zu dem der Deformationsgradient einen Wert von $\bar{F}_{(ii)} = 0,91$ aufweist, in Abb. 6.2(f) während der Rückbelastung exemplarisch dargestellt.

Für die Auswertung zum Zeitpunkt der Erstbelastung zeigt sich für den Elastizitätsmodul in Abb. 6.2(a) eine nahezu lineare Abhängigkeit von der relativen Dichte, wie sie bereits von GIBSON und ASHBY [27] für geschlossenzellige Schäume mit konstanter Zellwandstärke er-

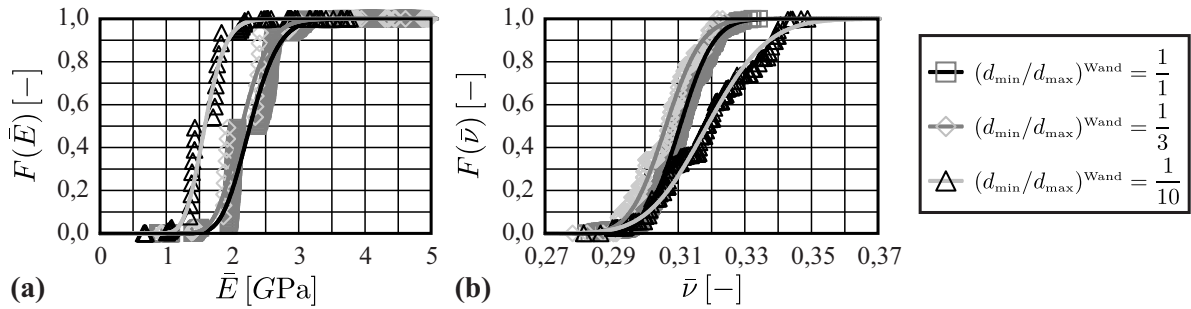


Abb. 6.3: Verteilungen: Elastizitätsmodul (a) und Querkontraktionszahl (b)

kannt worden ist. Des Weiteren ist zu beobachten, dass bei Verlagerung des Zellmaterials in Richtung der Zellkanten die Steifigkeit des Materials abnimmt. Begründet ist dies in der biegedominierten Deformation von offenzelligen Schäumen, welche aufgrund der Stützwirkung benachbarter Zellwände bei geschlossenzelligen Schäumen stark eingeschränkt ist.

Eine ausgeprägte Streuung der Werte für die verschiedenen Dichten ist nicht zu beobachten, woraus zu schließen ist, dass der Einfluss der Dichte erheblich stärker als z. B. der Einfluss der Zellgrößenverteilung ist. Für die Querkontraktionszahl ist zudem zum Auswertzeitpunkt während der Erstbelastung keine Abhängigkeit von der relativen Dichte zu beobachten (Abb. 6.2(c)). Dies ist damit zu begründen, dass die Querkontraktionszahl mechanismenbasiert, also unabhängig von den Zellwandmaterialeigenschaften, ist.

Bei Bestimmung der Materialkennwerte zu Beginn der Rückbelastung (Abb. 6.2(b) und (d)) ergeben sich gegenüber den Ergebnissen in den Abb. 6.2(a) und (c) vor allem für geringe Dichten deutlich sichtbare Veränderungen. So ist anstelle eines linearen ein gekrümmter Verlauf für den Zusammenhang zwischen Elastizitätsmodul und relativer Dichte zu beobachten (Abb. 6.2). Das weichere Materialverhalten ist mit der Umorientierung der Zellwände bzw. -stege zu begründen, wodurch bei der Rückbelastung die Deformation einen höheren Biegeanteil aufweisen kann. Des Weiteren lassen sich hiermit die deutlich geringeren Werte für die Querkontraktionszahl bei kleinen relativen Dichten erklären, wie sie Abb. 6.2(d) zu entnehmen sind.

Da bei einem Wert für den effektiven Deformationsgradienten von $\bar{F}_{(ii)} = 0,99$ bereits plas-

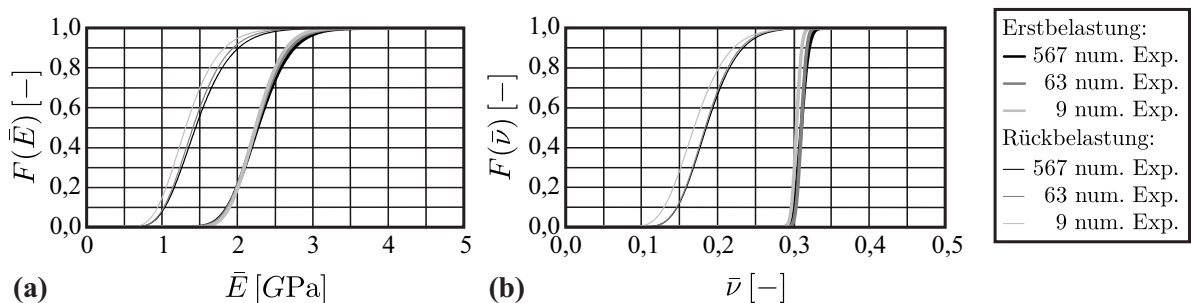


Abb. 6.4: Einfluss der Diskretisierung des Wahrscheinlichkeitsraums

tische Deformation eingesetzt hat, die sich auf mikroskopischer Ebene sowohl aus Biege- als auch aus Dehnungsanteilen zusammensetzt, ist qualitativ kein Unterschied in den Abb. 6.2(e) und (f) zu erkennen, die die Auswertung der effektiven Fließspannung $\bar{\sigma}_y$ während der Belastungs- bzw. Rückbelastungsphase zeigen. Allenfalls zu beobachten ist, dass durch die aufgebrauchte Deformation eine leichte Verfestigung eingesetzt hat. So ergeben sich zum Zeitpunkt der Rückbelastung etwas höhere Spannungswerte als während der Erstbelastung.

Darüber hinaus sind die deutlich sichtbaren Lücken in der Rohdatenbasis zu erwähnen, die sich aus der gezielten Diskretisierung des Wahrscheinlichkeitsraums mit den zu Beginn dieses Abschnitts eingeführten Zufallsvariablen ergeben.

In Abb. 6.3 sind für die drei verschiedenen Zellwandstärkenverhältnisse $(d_{\min}/d_{\max})^{\text{Wand}} = \frac{1}{1}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{10}$ Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die elastischen Konstanten dargestellt. Auffällig ist der treppenförmige Verlauf der diskreten Verteilungen, welcher eine Folge des nicht gleichmäßig mit Datenpunkten abgedeckten Spektrums der relativen Dichte in der Rohdatenbasis ist (Abb. 6.2). Da die eingangs vorgenommene Diskretisierung nicht den real auftretenden kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsvariablen entspricht, besteht im Nachgang die Notwendigkeit der kontinuierlichen Approximation der sich ergebenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Materialeigenschaften, wofür sich Anpassungen mittels logarithmischer Normalverteilungen als geeignet erwiesen haben.

Darüber hinaus ist bei Betrachtung der Abb. 6.3 zu beachten, dass die Rohdatenbasen für die Zellwandstärkenverhältnisse von $(d_{\min}/d_{\max})^{\text{Wand}} = \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{10}$ reduziert sind. Dennoch lässt sich für alle Zellwandstärkenverhältnisse eine gute Übereinstimmung der diskreten Verteilungsfunktionen für den Elastizitätsmodul (Abb. 6.3(a)) bzw. für die Querkontraktionszahl (Abb. 6.3(b)) zu den an die Datenbasen angepassten logarithmischen Normalverteilungen erkennen. Darüber hinaus ist der Einfluss des Zellwandstärkenverhältnisses sehr gut sichtbar. So treten bei den Mikrostrukturmodellen mit dem extremen Zellwandstärkenverhältnis von $(d_{\min}/d_{\max})^{\text{Wand}} = \frac{1}{10}$ signifikant geringere Werte für den Elastizitätsmodul auf. Für die Querkontraktionszahl lässt sich zudem eine deutlich größere Streubandbreite für diesen Extremfall erkennen.

Um zu zeigen, dass die reduzierte Rohdatenbasis für die Zellwandstärkenverhältnisse von $(d_{\min}/d_{\max})^{\text{Wand}} = \frac{1}{3}$ bzw. $\frac{1}{10}$ keinen signifikanten Einfluss auf die soeben beschriebenen Ergebnisse aufweist, sind in Abb. 6.4 Verteilungsfunktionen für den Elastizitätsmodul (Abb. 6.4(a)) und für die Querkontraktionszahl (Abb. 6.4(b)) für den Fall der konstanten Zellwandstärke dargestellt, wobei die Anzahl an numerischen Experimenten sukzessive von eingangs $n = 567$ über $n = 63$ auf die äußerst geringe Anzahl von $n = 9$ reduziert wurde. In beiden Diagrammen fällt auf, dass der Einfluss der Datenreduktion für die Auswertung in der Rückbelastungsphase ausgeprägter als bei der Erstbelastung ist. Des Weiteren ist deutlich zu erkennen, dass die Reduktion der Datenbasis auf $n = 63$, wie sie in Abb. 6.3 für die extremen Zellwandstärkenverhältnisse vorgenommen wurde, keinen signifikanten Einfluss auf die Verteilungsfunktionen besitzt. Erst bei einer weiteren Reduktion auf $n = 9$ ist eine leichte Verschiebung der Verteilungsfunktionen zu beobachten (Abb. 6.4). Dies Ergebnis zeigt zugleich, dass, wie eingangs vermutet, die relative Dichte den mit Abstand größten Einfluss auf die Ergebnisse besitzt. Da bei der extremen Reduktion auf $n = 9$, der Zufallsraum nur noch durch die relative Dichte dis-

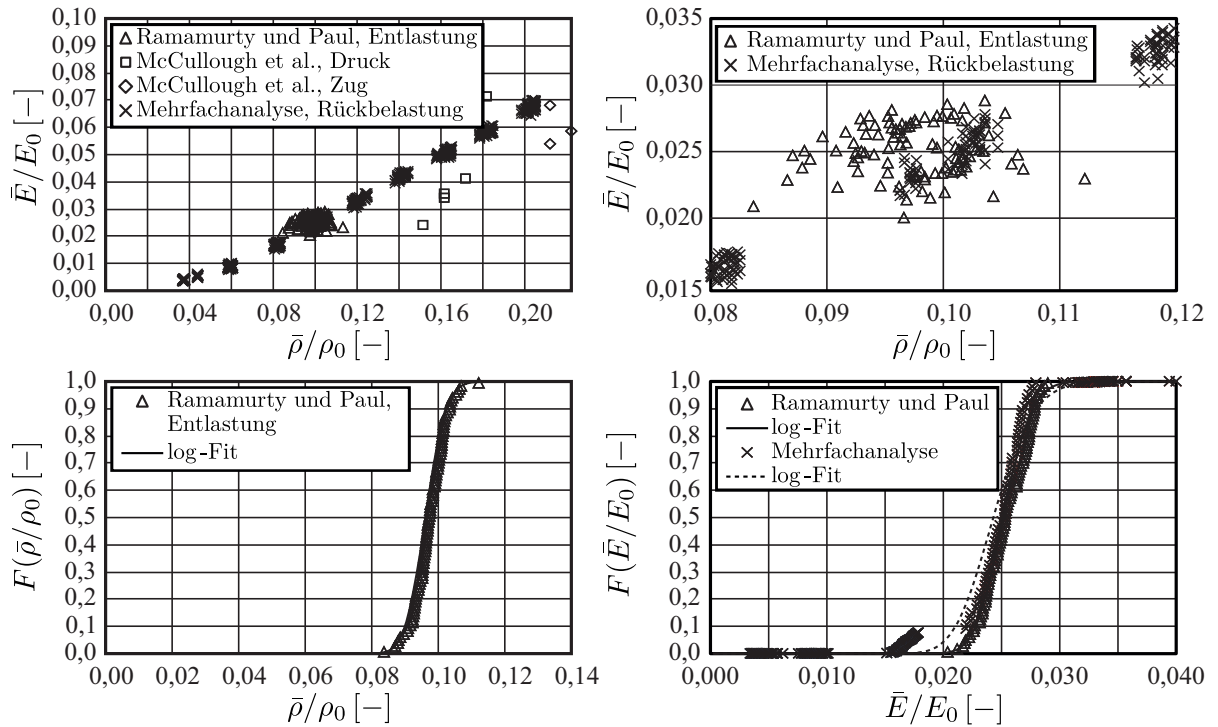


Abb. 6.5: Validierung: Rohdatenbasen (a) und (b), Verteilung der relativen Dichte (c), Vergleich der Verteilungen für den Elastizitätsmodul

cretisiert wird, während alle anderen Zufallsvariablen den Rechnungen nicht mehr zugrunde liegen.

Zur Validierung der Mehrfachanalyse ist ein Vergleich mit Literaturdaten vorgenommen worden. So ist in den Abb. 6.5(a) und (b) ein Vergleich der berechneten Rohdatenbasis für den auf den Elastizitätsmodul des Zellwandmaterials normierten Elastizitätsmodul \bar{E}/E_0 mit experimentell von RAMAMURTY und PAUL [75] ermittelten Daten für einen ALPORAS-Aluminiumschaum sowie von MCCULLOUGH *et al.* [63] bestimmten Daten für einem ALULIGHT-Aluminiumschaum dargestellt. Da die von RAMAMURTY und PAUL veröffentlichten Daten sich auf einen gemessenen Elastizitätsmodul beziehen, der während der Entlastung gemessen wurde, nachdem bereits erste plastische Verformungen aufgetreten waren, werden für den Vergleich die Werte des Elastizitätsmoduls herangezogen, die mit der Mehrfachanalyse zum Zeitpunkt der Rückbelastung ermittelt wurden. Dabei zeigt sich, dass die numerische Rohdatenbasis sehr gut mit den experimentellen Daten übereinstimmt. In Abb. 6.5(c) ist die Verteilung der relativen Dichte für die von RAMAMURTY und PAUL untersuchten Aluminiumschäume dargestellt, wobei die Verteilung gut durch eine logarithmische Normalverteilung angenähert werden kann. Zudem ergeben sich für die experimentell ermittelten Daten ein Erwartungswert $E(\bar{\rho}/\rho_0)$ von 0,097 und eine Standardabweichung σ von 0,005. Die Auswirkung der Streuung in der lokalen relativen Dichte auf den Elastizitätsmodul ist in Abb. 6.5(d) deutlich zu erkennen. So ist eine ausgeprägte Streuung zu beobachten, wobei die mit der Mehrfachanalyse numerisch berechnete und die aus den experimentellen Daten gewonnene Verteilung sehr gut

6 Vorhersage des effektiven Materialverhaltens von Aluminiumschäumen

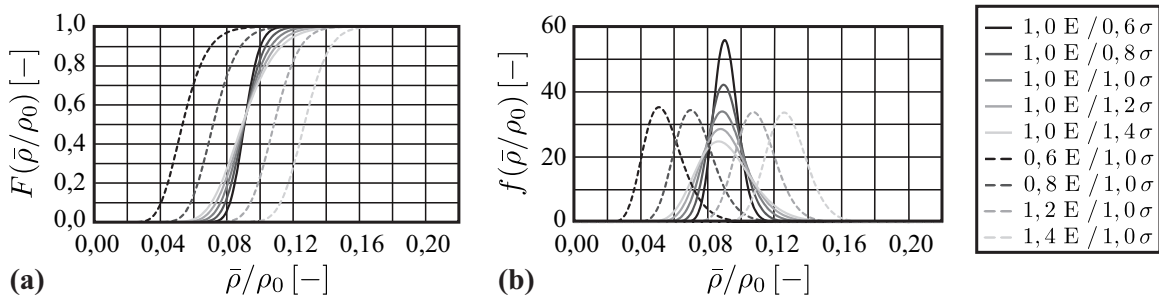


Abb. 6.6: Verteilungsfunktionen (a) und Dichtefunktionen (b) der relativen Dichte bei Variation des Erwartungswerts und der Standardabweichung

übereinstimmt.

Um den Einfluss der relativen Dichte weiter zu untersuchen, werden in einer Parameterstudie bei der verwendeten Wahrscheinlichkeitsverteilung zum einen die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\text{Var}(\bar{\rho}/\rho_0)}$ und zum anderen der Erwartungswert $E(\bar{\rho}/\rho_0)$ variiert, die sich für eine logarithmische Normalverteilung (Gleichung (2.101)) aus den Gleichungen (2.103) bzw. (2.102) berechnen lassen. In Abb. 6.6 sind sowohl die gewählten Parameter angegeben als auch die aus der Parametervariation sich ergebenden Verteilungs- und Dichtefunktionen (Abb. 6.6(a) und (b)) der relativen Dichte dargestellt.

Der Einfluss auf die Ergebnisse des Elastizitätsmoduls wird in Abb. 6.7 für das konstante Zellwandstärkenverhältnis gezeigt, wobei sich die Variation der Standardabweichung $\sigma(\bar{\rho}/\rho_0)$ in der Verteilungsfunktionen deutlich wiedererkennen lässt (Abb. 6.7(a)). Allerdings ist die Streubandbreite für die Ergebnisse des Elastizitätsmoduls deutlich geringer als bei den Ein-

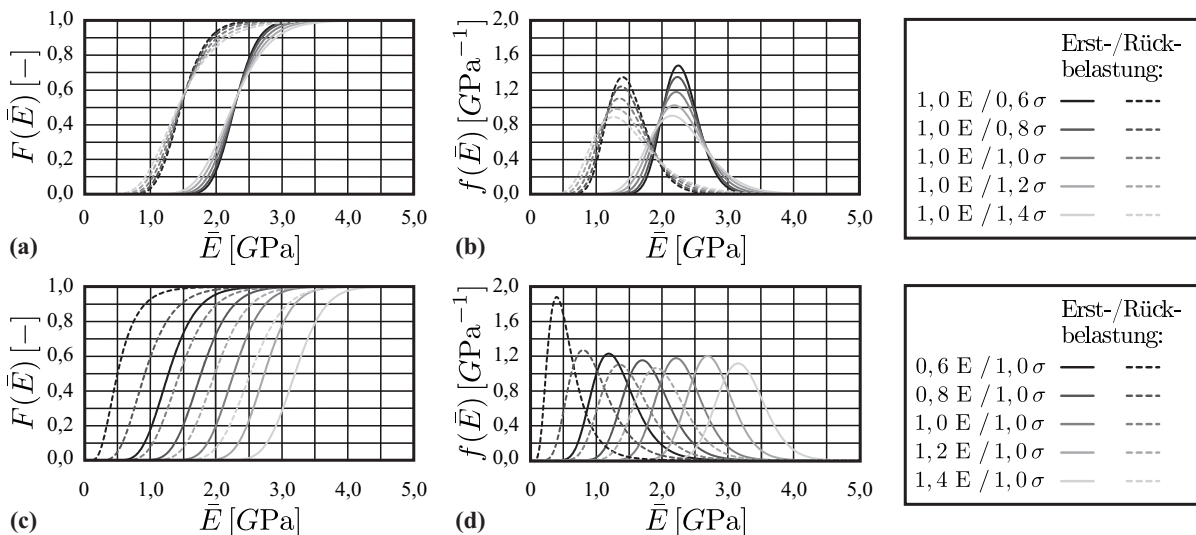


Abb. 6.7: Einfluss der Variation der Verteilungsfunktion der relativen Dichte auf die Verteilungsfunktionen des Elastizitätsmoduls

gangverteilungen der relativen Dichte (Abb. 6.6). Zudem ist sowohl in der Auswertung während der Erst- als auch der Rückbelastung eine Asymmetrie in der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen zu erkennen. Dies zeigt, dass eine bekannte Unschärfe in einer Eingangsgröße sich nicht zwangsläufig direkt auf die Ergebnisse überträgt (Abb. 6.7(b)).

Die Variation des Erwartungswerts $E(\bar{\rho}/\rho_0)$ verursacht eine Verschiebung der Verteilungsfunktionen, wobei die Form der Verteilung für die Auswertung während der Erstbelastung weitestgehend erhalten bleibt (Abb. 6.7(c)). Begründet ist dies in dem nahezu linearen Zusammenhang zwischen dem Elastizitätsmodul und der relativen Dichte (Abb. 6.2(a)). Da diese Linearität bei der Auswertung zu Beginn der Rückbelastung nicht mehr vorzufinden ist (Abb. 6.2(b)), tritt bei größeren Abweichungen des Erwartungswerts $E(\bar{\rho}/\rho_0)$ zum Ausgangswert auch bei den Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen des Elastizitätsmoduls in der Auswertung zu Beginn der Rückbelastung eine Formänderung auf (Abb. 6.7(d)).

In Abb. 6.8 sind die entsprechenden Einflüsse auf die Verteilungsfunktionen der Querkontraktionszahl dargestellt. Es lässt sich deutlich erkennen, dass die Variation der Standardabweichung $\sigma(\bar{\rho}/\rho_0)$ keinen Einfluss bei der Auswertung während der Erstbelastung besitzt (Abb. 6.8(a) und (b)). Zu begründen ist dies damit, dass die Querkontraktionszahl eine mechanismenbasierte Größe und damit unabhängig von den Zellwandeigenschaften ist. Bei der Variation des Erwartungswerts $E(\bar{\rho}/\rho_0)$ fällt in den Abb. 6.8(c) und (d) erneut eine starke Asymmetrie auf, die vor allem für die Ergebnisse aus der Auswertung während der Rückbelastung sehr ausgeprägt sind. So zeigen diese linksschiefen Verteilungen, dass zur Beschreibung der effektiven Materialeigenschaften die Angabe des Erwartungswerts (2.83) und der Varianz (2.85) unzureichend ist. So ist aufgrund der ausgeprägten Asymmetrie der Verteilung zumindest als weitere statistische Größe die Schiefe (2.87) zu bestimmen.

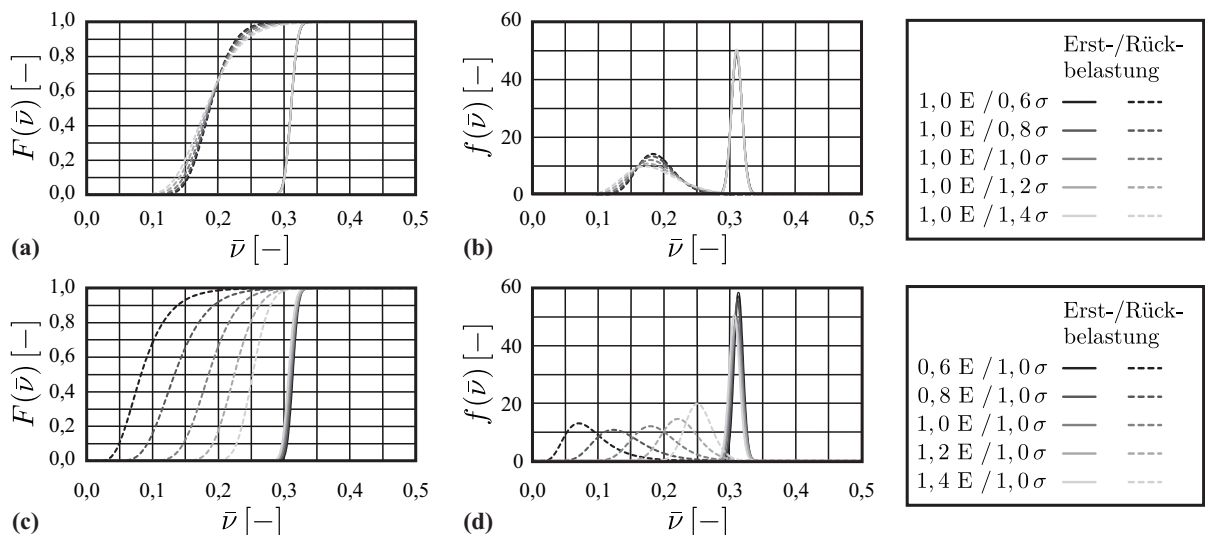


Abb. 6.8: Einfluss der Variation der Verteilungsfunktion der relativen Dichte auf die Verteilungsfunktionen der Querkontraktionszahl

6.3 Zellbasierte Auswertung

Ein weiteres Verfahren zu Bestimmung der Materialunschärfe besteht in der zellbasierten Auswertung, die im Folgenden an verschieden großen Mikrostrukturmodellen mit konstanter Zellwandstärke durchgeführt wird. So werden 16 Modelle mit jeweils 16 Zellen, 4 Modelle mit jeweils 64 Zellen und ein Modell mit 256 Zellen betrachtet, wobei das Gesamtvolumen der Modelle mit den geringeren Zellanzahlen jeweils dem Volumen von $V^{1 \times 256} = 1000 \text{ mm}^3$ des größten Modells entspricht. Auf diese Weise soll untersucht werden in wie weit die Modellgröße einen Einfluss auf die Ergebnisse der zellbasierten Auswertung besitzt.

In Abb. 6.9(b) sind die Zellgrößenverteilungen für die verschieden großen Modelle übereinander aufgetragen, wobei sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den drei Datenbasen erkennen lässt. Des Weiteren sind an die diskreten Datenpunkte logarithmischen Normalverteilungen angepasst, sowie die zugehörigen Dichtefunktionen eingezeichnet. Dabei zeigt sich erneut, dass mit dem verwandten Verfahren zur Quellpunkterzeugung im Zusammenhang mit dem VORONOÏ-Verfahren in LAGUERRE-Geometrie sehr gezielt logarithmisch-normalverteilte Zellgrößenverteilungen generiert werden können (Kapitel 4).

In Abb. 6.9(c) ist deutlich zu erkennen, dass mit zunehmendem Zellvolumen die relative Dich-

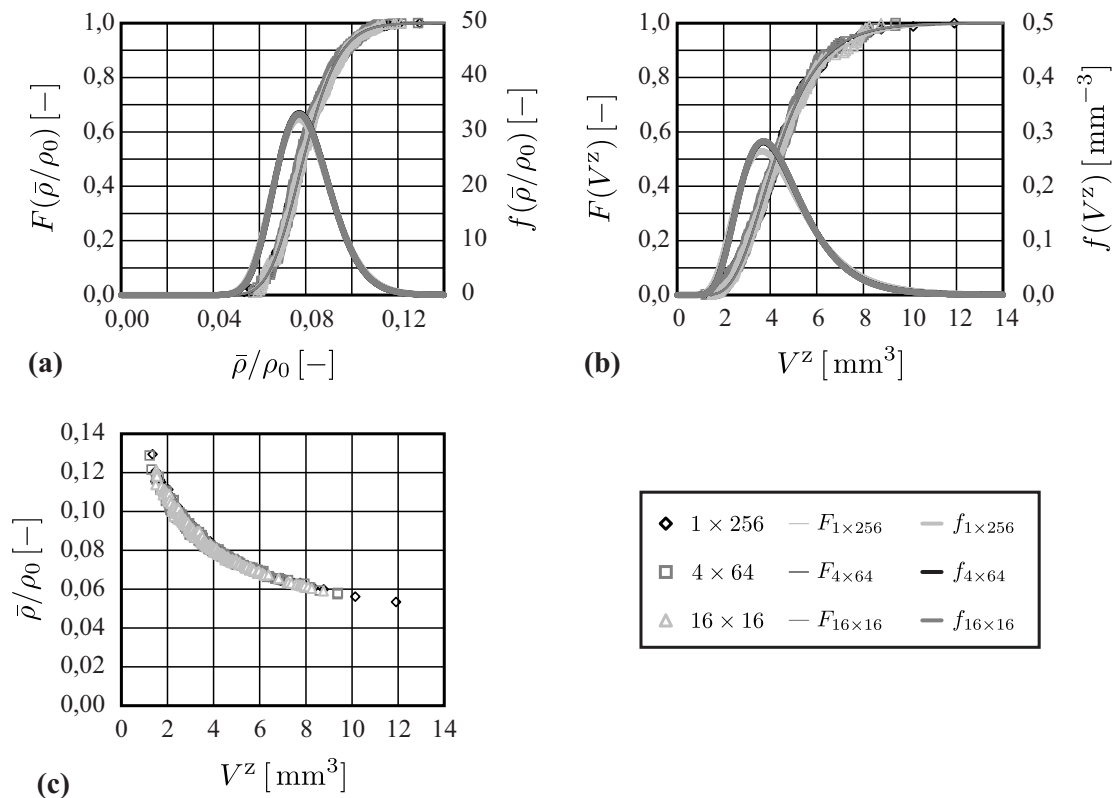


Abb. 6.9: Zellgrößenverteilungen (a), Verteilungsfunktionen für die relative Dichte (b) und deren Abhängigkeit vom Zellvolumen (c)

te der Zellen abnimmt, wobei für die Gesamtdatenbasis eine Spannbreite von $\bar{\rho}/\rho_0 = 0,05$ bis $0,13$ auftritt. Der nicht lineare Abfall der relativen Dichte bei einem von $V^Z \approx 1 \text{ mm}^3$ auf 12 mm^3 steigendem Zellvolumen ist damit zu erklären, dass die kleineren Zellen mit derselben Zellwandstärke wie die größeren Zellen im Allgemeinen einen geringeren isoperimetrischen Quotienten (Gleichung (4.6)) aufweisen. Aufgrund der geringen Streubandbreite in Abb. 6.9(c), zeigt sich in Abb. 6.9(a) für die Verteilungsfunktionen der relativen Dichte ein sehr ähnliches Ergebnis im Vergleich zu den Verteilungsfunktionen des Zellvolumens in Abb. 6.9(b).

In Abb. 6.10 sind die ermittelten Steifigkeitskomponenten für die einzelnen Zellen in Abhängigkeit von der relativen Dichte aufgetragen. Sowohl für die Normal- als auch für die Schub- und Koppelsteifigkeiten zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung der drei zugehörigen Steifigkeitskomponenten, wodurch auf ein isotropes effektives Materialverhalten geschlossen werden kann. Aus diesem Grund sind im Folgenden jeweils die entsprechenden drei Komponenten

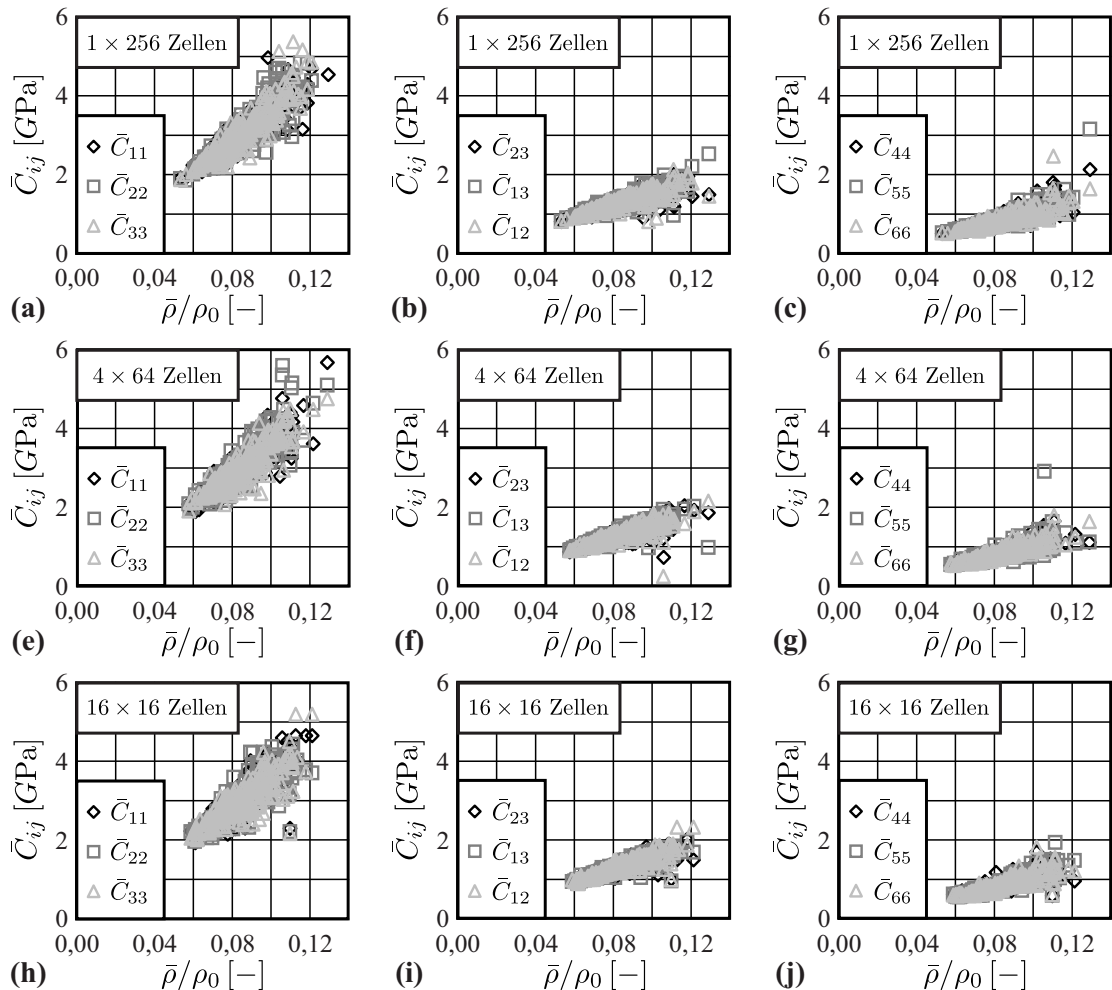


Abb. 6.10: Rohdatenbasis der Steifigkeitskomponenten der zellbasierten Auswertung in Abhängigkeit von der relativen Dichte

zu einer Datenbasis zusammengefasst. Ebenso ist eine gute Übereinstimmung der Rohdatenbasen der verschiedengroßen Modelle zu beobachten. Wie zu erwarten, weisen die Schub- (Abb. 6.10(c), (f) und (i)) und Koppelsteifigkeiten (Abb. 6.10(b), (e) und (h)) deutlich geringere Werte als die Normalsteifigkeiten (Abb. 6.10(a), (d) und (g)) auf, wobei auch der Anstieg der Steifigkeitswerte der Normalkomponenten mit zunehmender relativer Dichte deutlich steiler ist. Auffällig ist zudem die große Streubandbreite. So treten z. B. für eine relative Dichte von $\bar{\rho}/\rho_0 = 0,08$ effektive Normalsteifigkeitswerte von knapp $\bar{C}_N = 2 \text{ GPa}$ bis fast 4 GPa auf.

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Steifigkeitskomponenten werden die einzelnen Datenpunkte in Abb. 6.10 mit dem zugehörigen Zellvolumen gewichtet. Darüber hinaus erfolgt aufgrund der guten Übereinstimmung der drei Normal-, Koppel- bzw. Schubsteifigkeitskomponenten in Abb. 6.10 – die auf isotropes Materialverhalten schließen lassen – eine Zusammenfassung dieser Rohdatenbasen für die Ermittlung der Steifigkeitsverteilungen in Abb. 6.11. Zudem sind zur Beschreibung der Streuung und Unschärfe die Verteilungen mit logarithmischen Normalverteilungen angepasst und die zugehörigen kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen sind eingezeichnet. Auf eine Darstellung der diskreten Dichteverteilung wird jedoch verzichtet, da die numerische Ableitung der diskreten Wahrschein-

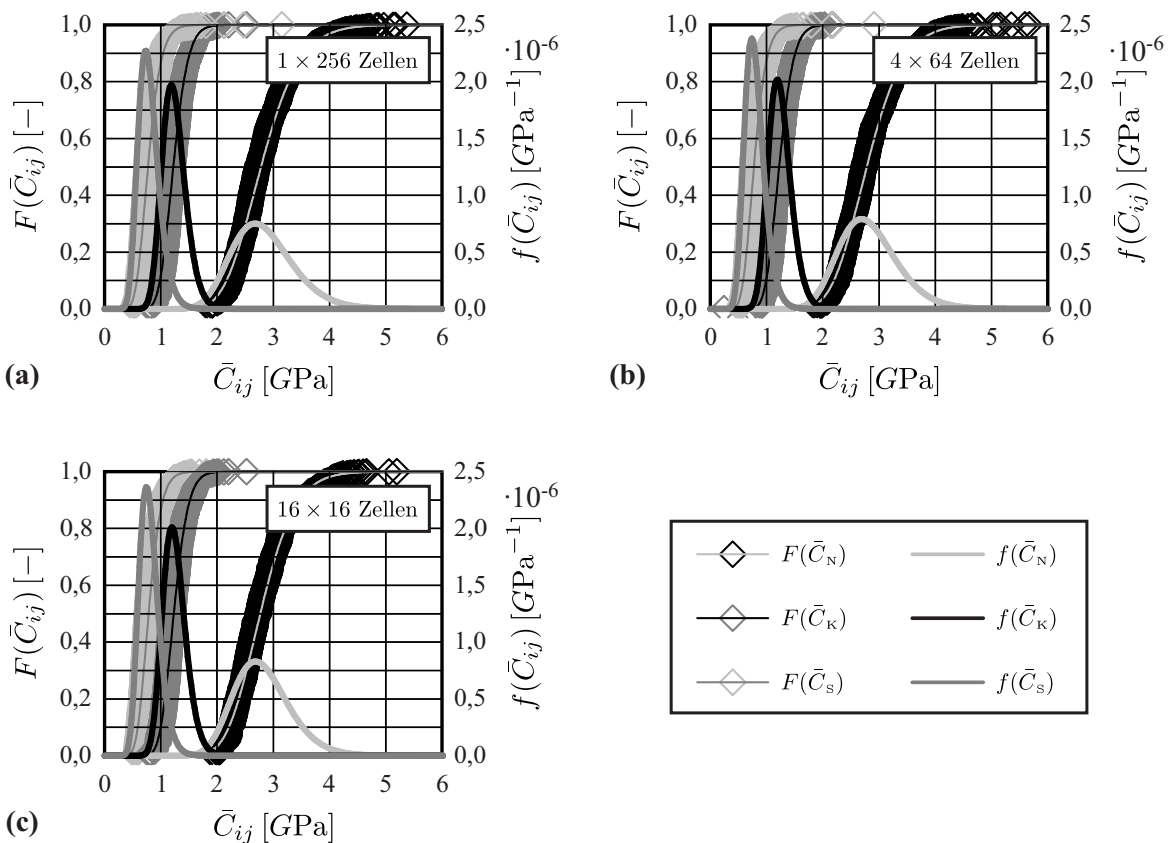


Abb. 6.11: Verteilungen für die Normal-, Koppel-, und Schubsteifigkeitskomponenten der Modelle 1×256 Zellen (a), 4×64 Zellen (b) und 16×16 Zellen (c)

lichkeitsverteilungen sehr sprunghafte Verläufe liefern würde. Die bereits in Abb. 6.9(a) festgestellte gute Übereinstimmung der Ergebnisse der verschiedengroßen Modelle lässt sich in beiden Darstellungsformen erneut deutlich erkennen, womit gezeigt ist, dass in Abhängigkeit von der Art der Mikrostruktur auch mittels kleiner Mikrostrukturmodelle adäquate Ergebnisse erzielt werden können mit dem Vorteil der erheblich gesteigerten numerischen Effizienz.

Zudem ist, wie bei der mehrfachen Testvolumenelemente-Auswertung, der starke Einfluss der Wahrscheinlichkeitsverteilung der relativen Dichte (Abb. 6.9(a)) auf die Ergebnisse der Steifigkeitskomponenten (Abb. 6.11) wiederzufinden. Dies wird auch durch die gemittelten Korrelationskoeffizienten $\rho(\bar{\rho}/\rho_0, \bar{C}_N) \approx 0,88$, $\rho(\bar{\rho}/\rho_0, \bar{C}_K) \approx 0,89$ und $\rho(\bar{\rho}/\rho_0, \bar{C}_S) \approx 0,84$ für die Normal-, Koppel- und Schubsteifigkeiten bestätigt.

Des Weiteren zeigen die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen in Abb. 6.11, dass eine Bestimmung des Erwartungswerts (2.83) und der Standardabweichung (2.85) zur Ermittlung der Unschärfen im Materialverhalten nicht ausreichend ist. Weil wie vor allem an den Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen für die Normalsteifigkeiten zu erkennen ist, weisen diese eine deutlich sichtbare Asymmetrie auf, die durch eine GAUSSsche Normalverteilung nicht abgebildet werden kann. Folglich ist zur korrekten Beschreibung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen neben der Angabe des Erwartungswerts (2.83) und der Varianz (2.85) zumindest die Angabe der Schiefe (2.87) als weitere Maßzahl unverzichtbar.

6.4 „Moving-Window“-Auswertung

Ähnlich zur zellbasierten Auswertung werden beim „Moving-Window“-Verfahren ebenso Mikrostrukturausschnitte betrachtet. Der Unterschied besteht darin, dass diese Auswerteausschnitte im Gegensatz zu den Zellen eine einheitliche Form und Größe aufweisen.

Im Folgenden wird die „Moving-Window“-Auswertung ausschließlich für das in Abschnitt 6.3 bereits mittels des zellbasierten Verfahrens ausgewerteten Modells mit 256 Zellen durchgeführt, wobei die 1000 Auswertungsausschnitte auf einem Raster von $10 \times 10 \times 10$ angeordnet sind. Sowohl bei einem gewählten Radius von $r_{\text{TVE}} = 1$ mm, der einem Kugelvolumen von etwa dem mittleren Zellvolumen entspricht, als auch bei einem Radius von $r_{\text{TVE}} = 4$ mm ergibt sich somit ein Überlapp der Auswertebereiche. Während die Mikrostruktureigenschaften der größeren Kugelausschnitte einer GAUSS-Gewichtung gemäß Gleichung (5.44) unterliegen, erfolgt bei den kleineren Auswertebereichen alternativ zur GAUSS- auch eine Gleichgewichtung.

Durch die GAUSS-Gewichtung wird erreicht, dass der innere Bereich der Kugelausschnitte stärker gewichtet wird als der Randbereich. Für einen Radius von $r_{\text{TVE}} = 1$ mm ist die angewandte GAUSS-Gewichtung in Abb. 6.12(a) dargestellt, wobei zudem die einfache, doppelte und dreifache Standardabweichung eingezeichnet ist, die 68,0 %, 95,5 % bzw. 99,7 % der betrachteten Datenbasis des Testvolumenelements enthält.

Die diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die relative Dichte, die sich bei Verwendung dieser drei vorgestellten Varianten ergeben, sind in Abb. 6.12(b) dargestellt. Da die dis-

6 Vorhersage des effektiven Materialverhaltens von Aluminiumschäumen

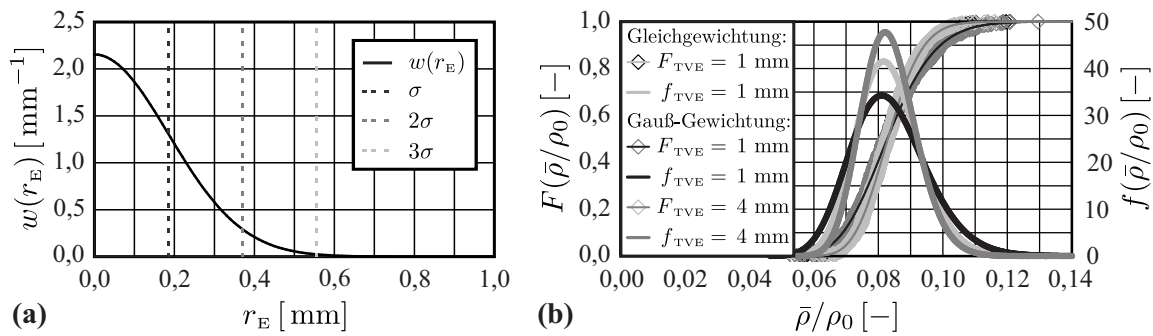


Abb. 6.12: GAUSS-Gewichtung (a) und Verteilungen der relativen Dichte (b)

kreten Verteilungen erneut durch logarithmische Normalverteilungen sehr gut angepasst werden können, werden zudem auch die sich hieraus ableitenden kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen angegeben. In allen drei Varianten streuen die relativen Dichten der Auswerteausschnitte um einen Erwartungswert von $E(\bar{\rho}/\rho_0) \simeq 0,08$, wobei die geringste Streubandbreite bei den größeren Kugelausschnitten aufgrund des eintretenden Selbstmitteilungseffekts auftritt. Hiermit lässt sich zudem auch die geringere Streubandbreite bei der Gleichgewichtung im Vergleich zur GAUSS-Gewichtung bei den kleineren Kugelausschnitten erklären.

In Abb. 6.13 ist die Rohdatenbasis in Analogie zu der Darstellung der zellbasierten Auswertung in Abb. 6.10 zu finden. Während die Diagramme in der ersten Spalte für die kleineren Kugelausschnitte ($r_{TVE} = 1$ mm) die Ergebnisse der gleichgewichteten Auswertung zeigen, sind die Ergebnisse in der zweiten ($r_{TVE} = 1$ mm) und dritten Spalte ($r_{TVE} = 4$ mm) mit einer GAUSS-Gewichtung versehen.

Bis auf einzelne Datenpunkte weisen die gezeigten Punktwolken ein sehr ähnliches Verhalten wie in Abb. 6.10 auf. Ebenso bestätigen die zugehörigen Korrelationskoeffizienten mit Werten von im Mittel $\rho(C_{ij}, \bar{\rho}/\rho_0) = 0,87$ erneut die große Abhängigkeit der Steifigkeitskomponenten von der relativen Dichte.

In Abb. 6.14(a) bis (c) sind für die zusammengefassten Normal-, Koppel- und Schubsteifigkeitskomponenten die diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen sowie die an die Datenbasen angepassten logarithmischen Normalverteilungen und die zugehörigen kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen dargestellt. Insbesondere für die Schubsteifigkeiten ergibt sich eine deutlich sichtbare asymmetrische Verteilungsfunktion für die Kugelausschnitte mit $r_{TVE} = 1$ mm unter Anwendung der GAUSS-Gewichtung.

Da die Ergebnisse auch ansonsten große Ähnlichkeiten zu den Ergebnissen der zellbasierten Auswertung aufweisen, werden die Ergebnisse der „Moving-Window“-Auswertungen an dieser Stelle nicht weiter diskutiert, sondern es erfolgt eine Gegenüberstellung der Ergebnisse dieser beiden lokalen Auswerteverfahren sowie ein Vergleich zu den Ergebnissen der mehrfachen Testvolumenelemente-Auswertung im Anschluss in Abschnitt 6.5.

Die räumliche Autokorrelation kann besonders gut mit dem „Moving-Window“-Verfahren untersucht werden, da bei diesem lokalen Auswerteverfahren eine rasterförmige Anordnung der

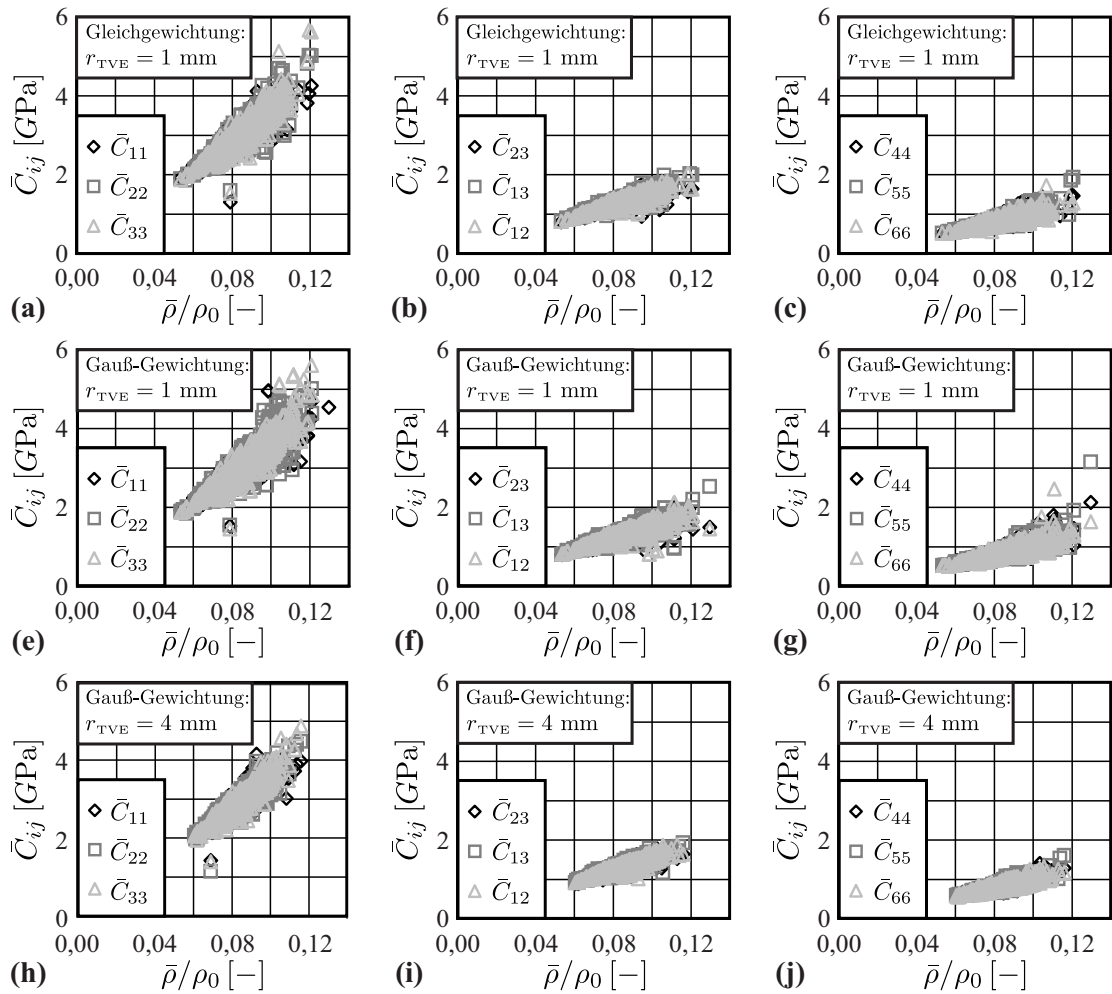


Abb. 6.13: Rohdatenbasis der Steifigkeitskomponenten der „Moving-Window“-Auswertung in Abhängigkeit von der relativen Dichte (Testvolumenelemente-Auswertung)

Auswertausschnitte gewählt werden kann. Wie in Abschnitt 2.6.2 definiert, wird zur Beschreibung der räumlichen Autokorrelation der MORAN-Index verwendet. In Abb. 6.15 sind für die Auswertausschnitte mit den Radien $r_{TVE} = 1$ mm und $r_{TVE} = 4$ mm bei angewandeter GAUSS-Gewichtung die ermittelten Werte für die relative Dichte $\bar{\rho}/\rho_0$, für die Steifigkeitskomponente \bar{C}_{11} und dem zugehörigen MORAN-Index $I_{(k)}(\bar{C}_{11})$ zur Untersuchung der räumlichen Autokorrelation durch eine Graustufenkodierung angegeben. Die rasterförmige Anordnung der Auswertausschnitte ist hierbei in Abb. 6.15 durch Schnittebenen parallel zur x_1 - x_2 -Ebene mit von oben nach unten steigenden x_3 -Werten dargestellt.

Der globale MORAN-Index für die kleineren Auswertausschnitte mit $r_{TVE} = 1$ mm ergibt sich zu $I(\bar{C}_{11}) = 0,0619$ und für die größeren Kugelausschnitte mit $r_{TVE} = 4$ mm zu $I(\bar{C}_{11}) = 0,1288$. Die durch den höheren Wert zu erkennende stärkere räumliche Autokorrelation für die größere Auswertausschnitte ist mit dem größeren Überlapp der Kugeln

6 Vorhersage des effektiven Materialverhaltens von Aluminiumschäumen

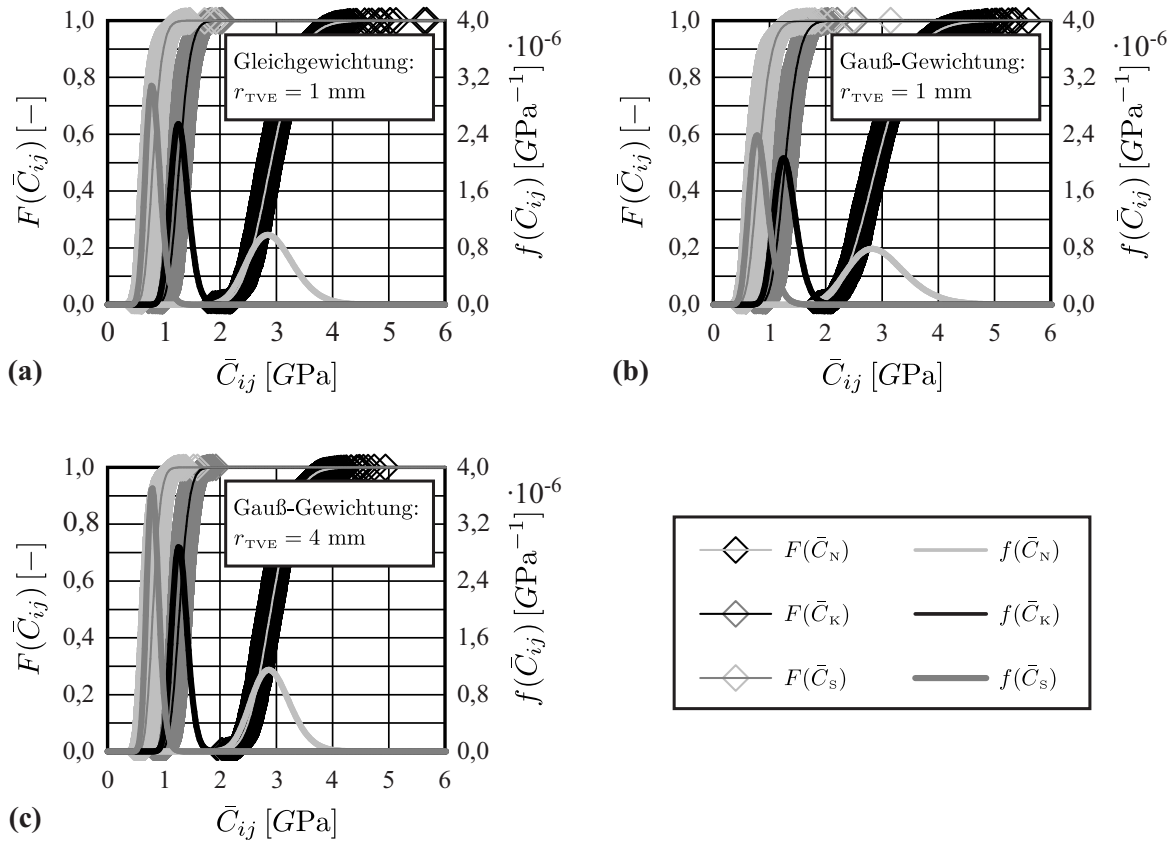


Abb. 6.14: Verteilungen und Dichtefunktionen der Steifigkeitskomponenten der drei verschiedenen „Moving-Window“-Auswertungen

im Vergleich zu den kleineren Auswertungsausschnitten zu erklären. In beiden Fällen ist die räumliche Autokorrelation jedoch nur schwach ausgeprägt, wobei dieser Effekt mit experimentellen Untersuchungen von KANIT *et al.* [49] übereinstimmt.

Die Ergebnisse für den lokalen MORAN-Index (Abb. 6.15) zeigen, dass sowohl Bereiche mit einer ausgeprägt positiven als auch Bereiche mit einer stark negativen räumlichen Autokorrelation auftreten. Ein Vergleich des lokalen MORAN-Index mit der lokal auftretenden relativen Dichte und der effektiven Steifigkeit zeigt, dass in den überwiegenden Fällen der MORAN-Index $I_{(k)}(\bar{C}_{11})$ einen sehr hohen Wert aufweist, wenn sowohl der Wert für die relative Dichte $\bar{\rho}/\rho_0$ als auch für die effektive Steifigkeit \bar{C}_{11} gering ist. Da geringe relative Dichten im Allgemeinen durch große Zellen (Abb. 6.9(c)) hervorgerufen werden, ist die starke räumliche Autokorrelation mit dem Auftreten einer großen Zelle in mehreren benachbarten Auswertungsausschnitten zu erklären. Zu beobachten ist dieser Effekt für die kleineren Auswertungsausschnitte mit $r_{\text{TVE}} = 1 \text{ mm}$ z. B. für die räumlichen Koordinaten $x_i = (0,5/7,5/2,5)$, $(3,5/5,5/4,5)$, $(3,5/5,5/5,5)$, $(4,5/5,5/5,5)$ und $(4,5/7,5/8,5)$.

Da für die größeren Auswertungsausschnitte mit $r_{\text{TVE}} = 4 \text{ mm}$ der globale MORAN-Index bereits höhere Werte annimmt, ist durch die Überlagerung mit dem Selbstmittelungseffekt innerhalb eines Auswertungsausschnitts dieser Effekt nicht so leicht ausfindig zu machen.

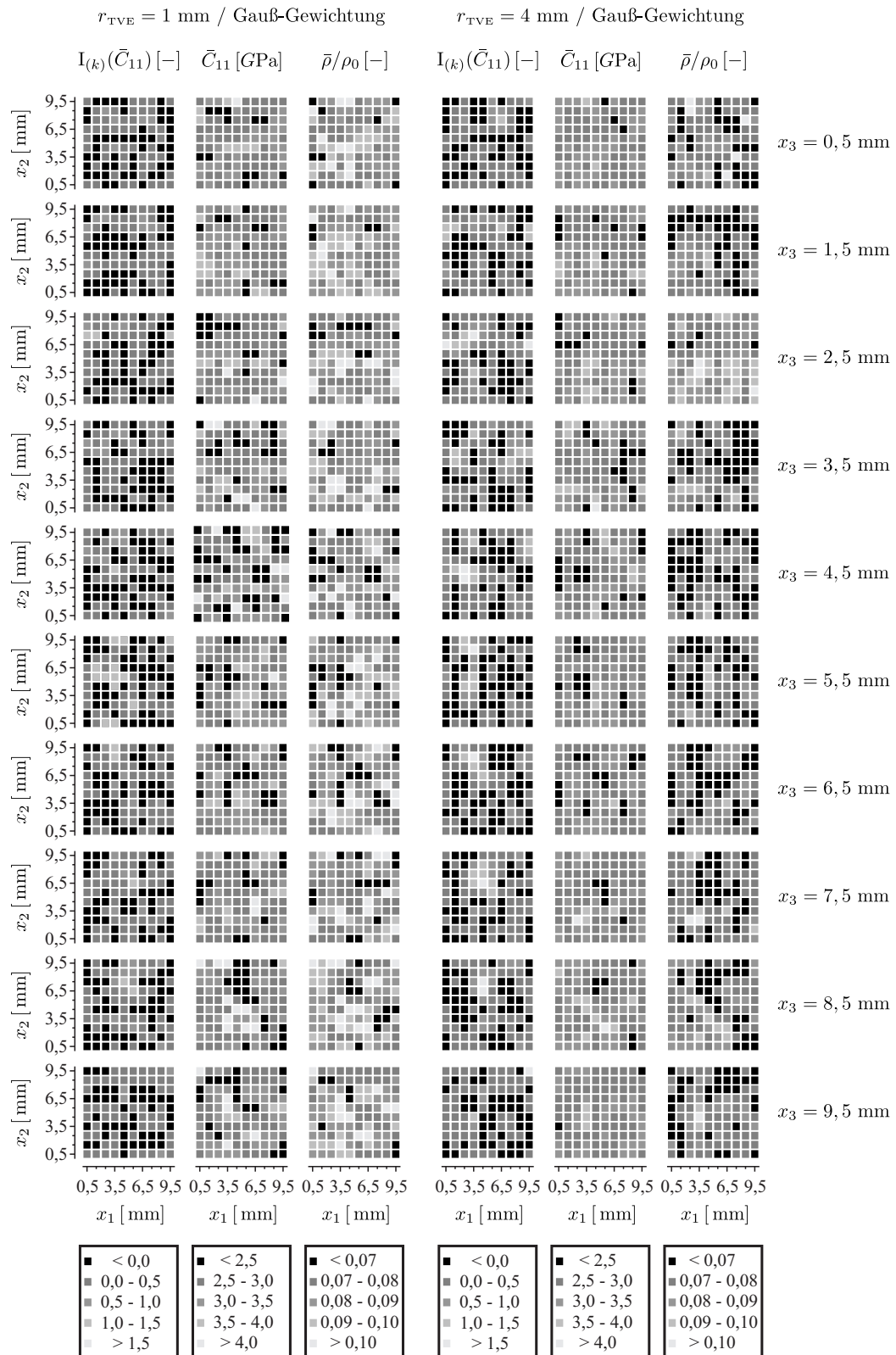


Abb. 6.15: Räumliche Autokorrelation

6 Vorhersage des effektiven Materialverhaltens von Aluminiumschäumen

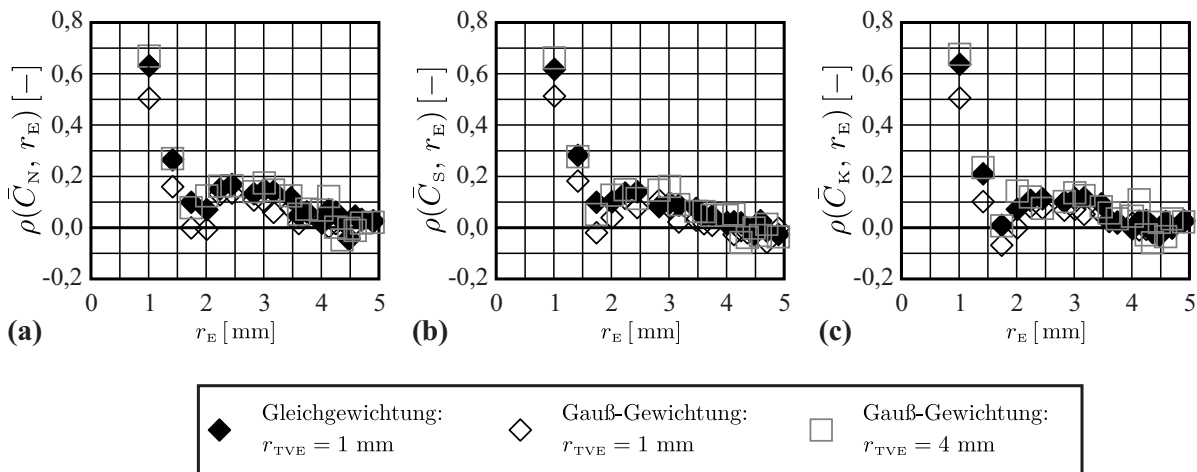


Abb. 6.16: Korrelationslängen

Jedoch ist zu beobachten, dass für einen lokalen MORAN-Index von $I_{(k)}(\bar{C}_{11}) > 1,5$ in allen Fällen für die Steifigkeitskomponenten $\bar{C}_{11} < 2,5 \text{ GPa}$ und für die relative Dichte $\bar{\rho}/\rho_0 < 0,07$ gilt.

Zur Bestimmung der Korrelationslänge für die räumliche Autokorrelation der effektiven Steifigkeitskomponenten \bar{C}_{ij} sind in Abb. 6.16 die Korrelationskoeffizienten $\rho(\Delta\bar{C}_{ij}, r_E)$ mit dem EUKLID-Abstand r_E für die Normal-, Koppel- und Schubkomponenten (Abb. 6.16(a) bis (c)) dargestellt. In allen drei Diagrammen ist deutlich zu erkennen, dass bereits für geringe Abstände die Werte der Korrelationskoeffizienten sehr stark abnehmen, so dass bereits bei einem Abstand von $r_E \gtrsim 1,5 \text{ mm}$, der in etwa dem mittleren Zelleradius entspricht, keine signifikante räumliche Autokorrelation mehr auszumachen ist. Wie bereits die geringen Werte der globalen MORAN-Indizes zum Ausdruck gebracht haben, zeigt dieses Ergebnis erneut die schwach ausgeprägte räumliche Autokorrelation innerhalb der betrachteten Mikrostruktur, so dass festzuhalten ist, dass in den betrachteten Mikrostrukturmodellen das Materialverhalten einer Zelle allenfalls durch die Eigenschaften der direkt benachbarten Zellen beeinflusst wird.

6.5 Vergleich der Auswerteverfahren

Die Darstellung der Ergebnisse der drei verschiedenen Auswerteverfahren der probabilistischen Methode zur Bestimmung der effektiven Materialeigenschaften eines geschlossenzelligen Aluminiumschaums in den Abschnitten 6.2 bis 6.4 haben bereits eine sehr gute Übereinstimmung gezeigt. Zur Herausarbeitung der Vor- und Nachteile der einzelnen Verfahren wird in diesem Abschnitt ein direkter Vergleich der Auswerteverfahren vorgenommen.

Aufgrund des bereits mehrfach beobachteten starken Einflusses der relativen Dichte auf die Ergebnisse der effektiven Materialeigenschaften ist in Abb. 6.17(a) für das Modell mit 256

Zellen die Differenz der kontinuierlichen Verteilungsfunktionen der zellbasierten mit den drei verschiedenen „Moving-Window“-Auswertungen $F^{zb}(\bar{\rho}/\rho_0) - F^{m-w}(\bar{\rho}/\rho_0)$ dargestellt.

Der Verlauf der drei berechneten Differenzfunktionen stimmt qualitativ überein. Die Abweichungen der Differenzfunktionen zueinander resultiert aus den Varianten der „Moving-Window“-Auswertung (Abb. 6.12(b)) und soll daher an dieser Stelle nicht näher betrachtet werden. Festzuhalten ist jedoch, dass die Abweichungen gering sind, wobei für relative Dichten zwischen $\bar{\rho}/\rho_0 = 0,07$ und $0,08$ die größten Differenzen auftreten. Dies entspricht dem Bereich der relativen Dichte zu dem Zellen mit etwa dem mittleren Zellvolumen gehören, wie aus Abb. 6.9(c) zu schließen ist. Da bei den „Moving-Window“-Auswertungen die relative Dichte hingegen durch Volumenmittelung der innerhalb des Auswertungsausschnitts sich be-

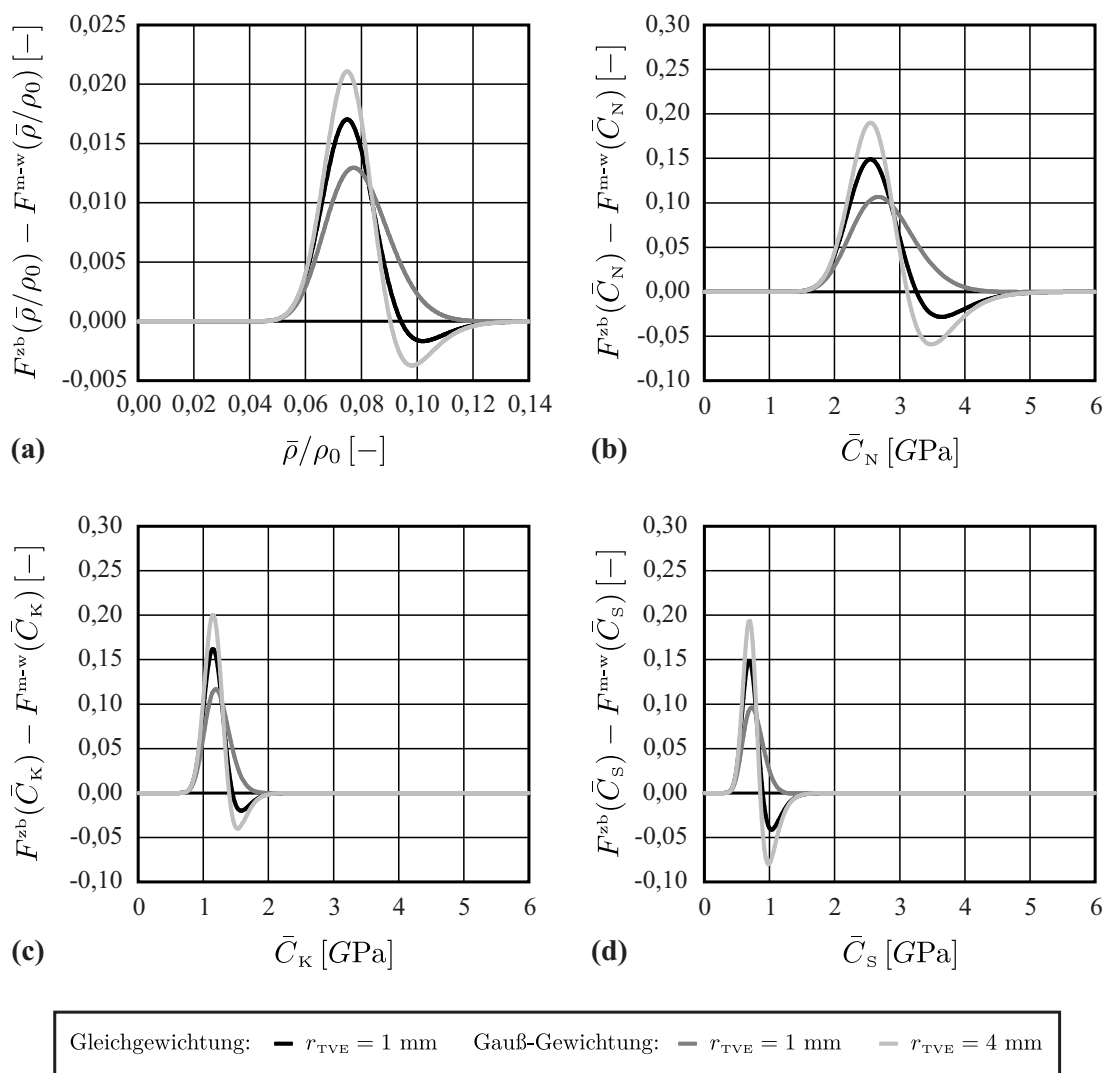


Abb. 6.17: Abweichung der Verteilungsfunktionen der zellbasierten und der Testvolumenelemente-Auswertung für die relative Dichte (a) und die Steifigkeitskomponenten (b), (c) und (d)

findenden Zellen bestimmt wird, nimmt die Auftrittswahrscheinlichkeit zu geringen relativen Dichten ab. Verstärkt wird dieser Effekt zudem dadurch, dass nur wenige große Zellen innerhalb der Mikrostruktur existieren, die mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit direkt aneinander angrenzen, wodurch in den Modellen keine großen zusammenhängenden Bereiche mit geringer relativer Dichte vorzufinden sind.

Da für die „Moving-Window“-Auswertung durch den Mittelungseffekt im Vergleich zur zellbasierten Auswertung seltener Auswertungsbereiche mit relativen Dichten von $\bar{\rho}/\rho_0 \gtrsim 0,075$ auftreten, nähern sich die Verteilungsfunktionen der beiden Auswerteverfahren wieder an. Diese Beobachtung wird in Abb. 6.17(a) durch den Abfall der Kurven wiedergegeben. Für sehr große relative Dichten ist die Auftrittswahrscheinlichkeit bei der zellbasierten Auswertung folglich dann auch größer als bei den „Moving-Window“-Auswertungen. Dies wird durch den Verlauf der Differenzfunktion $F^{zb}(\bar{\rho}/\rho_0) - F^{m-w}(\bar{\rho}/\rho_0)$ im negativen Bereich in Abb. 6.17(a) zum Ausdruck gebracht.

In den Abb. 6.17(b) bis (d) werden die Differenzfunktionen $F^{zb}(\bar{C}_{ij}) - F^{m-w}(\bar{C}_{ij})$ für die Normal-, Koppel- und Schubsteifigkeiten dargestellt, wobei qualitativ ein sehr ähnlicher Verlauf zu Abb. 6.17(a) zu beobachten ist. Dies ist erneut ein Beleg dafür, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung der relativen Dichte einen sehr großen Einfluss auf die Streubandbreite der effektiven Materialeigenschaften besitzt.

Ein Vergleich der Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Steifigkeitskomponenten für die zellbasierte (Abb. 6.11) und die „Moving-Window“-Auswertung (Abb. 6.14) mit den aus der mehrfachen Testvolumenelemente-Auswertung gewonnenen Verteilungsfunktionen für die elastischen Konstanten in Abb. 6.3 zeigt einen Vorteil der beiden erstgenannten Verfahren. Während bei den mittels der mehrfachen Testvolumenelemente-Auswertung bestimmten Verteilungsfunktionen, aufgrund der Verwendung diskreter Zufallsvariablen zur Beschreibung des Zufallsraums, deutlich sichtbare Lücken in den Verteilungsfunktionen auftreten, liegt eine kontinuierliche Besetzung mit Datenpunkten bei den anderen beiden Verfahren mit einer zu den Extrembereichen etwas geringer werdenden Datenbasis vor. Durch die Generation von Modellen mit extrem kleinen bzw. großen Zellen könnten diese Extrembereiche mit geringem Aufwand jedoch tiefergehend untersucht werden.

Der wesentliche Vorteil der mehrfachen Testvolumenelemente-Auswertung besteht in der außerordentlich hohen numerischen Effizienz aufgrund der Verwendung von sehr kleinen Mikrostrukturmodellen. Nachteilig ist hingegen der große Mittelungseffekt durch die globale Auswertung dieser Modelle. Ersichtlich wird die geringere Streubandbreite spätestens nach Umrechnung der aus der Mehrfachanalyse gewonnenen Werte für den Elastizitätsmodul in Abb. 6.3 in die Steifigkeitskomponenten gemäß Gleichung (2.40).

Die zellbasierte Auswertung besitzt den Vorteil, dass die Materialeigenschaften einzelner Zellen bestimmt werden können. Die daraus resultierenden unterschiedlich großen Auswertebereiche können jedoch nachteilig sein.

Die einheitliche Größe der Auswertungsausschnitte ist folglich bei der „Moving-Window“-Auswertung ein großer Vorteil. So können gleichgroße Mikrostrukturausschnitte miteinander verglichen werden und durch eine rasterförmige Anordnung mit Überlapp der Auswertungs-

ausschnitte ist zudem eine Bestimmung der räumlichen Autokorrelation möglich. Darüber hinaus kann gezielt der Einfluss der Größe der Auswerteausschnitte untersucht werden und unabhängig von der Zellanzahl des Modells kann die Größe der Datenbasis durch Variation des Abstandes der Auswertungsausschnitte zueinander variiert werden.

Da alle drei Auswerteverfahren jedoch qualitativ übereinstimmende Ergebnisse zeigen, ist die bestmögliche Wahl des Auswerteverfahrens vom konkreten Anwendungsfall abhängig. Zu beachten ist hierbei allerdings, dass im Rahmen dieser Arbeit nur elastische Eigenschaften betrachtet wurden. Da bei plastischem Materialverhalten lokale Effekte, wie die Abhängigkeit der Fließgrenze von den Mikrostrukturparametern, eine bedeutende Rolle spielen, können Abweichungen in den Ergebnissen der drei Auswerteverfahren dann durchaus auftreten.

7 Unschärfen im ratenabhängigen Verhalten von Polymerschäumen

Nach der Anwendung des probabilistischen Bewertungskonzepts auf ein Material mit elastisch-plastischem Verhalten in Kapitel 6, wird in diesem Kapitel ein viskoelastisches Materialmodell zur Bestimmung der Unschärfen im ratenabhängigen Verhalten von Polymerschäumen verwendet. Nach Definition der Bulk- und Schaummaterialeigenschaften und der Darstellung der zugehörigen Spannungs-Dehnungs-Kurven in Abschnitt 7.1, erfolgt in Abschnitt 7.2 die Bestimmung der Materialunschärfen im ratenabhängigen Verhalten des betrachteten Polymerschaums.

7.1 Bulkmaterial und Schaummodell

Zur Beschreibung der Materialeigenschaften des Bulkmaterials wird zur Modellvereinfachung ein rein hyperelastisches Materialverhalten, wie in Abschnitt 2.4.2 dargestellt, angenommen. Angemerkt sei dabei an dieser Stelle, dass aufgrund der vollständigen Vernachlässigung der plastischen Verformung durch dieses Modell somit die überwiegende Anzahl an Polymeren nicht hinreichend beschrieben werden kann. Rein elastische Rechnungen bei denen im Anschluss durch Korrekturen wie z. B. durch die NEUBER-Hyperbel (STOMMEL *et al.* [88]) dann auf das elastisch-plastische Materialverhalten geschlossen wird, sind bei der Charakterisierung von Polymeren jedoch weit verbreitet.

Als viskoelastisches Materialmodell wird das inkompressible Ogden-Modell zweiter Ordnung gemäß Gleichung (2.41) verwandt mit den Materialparametern

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 1600,0 \text{ MPa}, & \alpha_1 &= 0,1 \\ \mu_2 &= 5,0 \text{ MPa}, & \alpha_2 &= -5,0\end{aligned}\tag{7.1}$$

bei einer Temperatur von $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Die Viskoelastizität ist durch eine PRONY-Reihenentwicklung des normierten Relaxationsmoduls der Schubspannungen (Gleichung (2.47)) berücksichtigt.

Zur Berechnung der Polymerschaumeigenschaften werden 81 geschlossenzellige kubusförmige Mikrostrukturmodelle mit einem Volumen von 1000 mm^3 und jeweils 20 Zellen betrachtet, wobei die Wandstärke der Modelle durch die Wanddickenverteilung „Treppe“ (Abb. 4.3(b)) bei einem Wandstärkenverhältnis von $(d_{\min}/d_{\max})^{\text{Wand}} = \frac{1}{3}$ bestimmt ist. Durch die Wahl von drei verschieden stark ausgeprägten logarithmischen Zellgrößenverteilungen im Bereich von

7 Unschärfen im ratenabhängigen Verhalten von Polymerschäumen

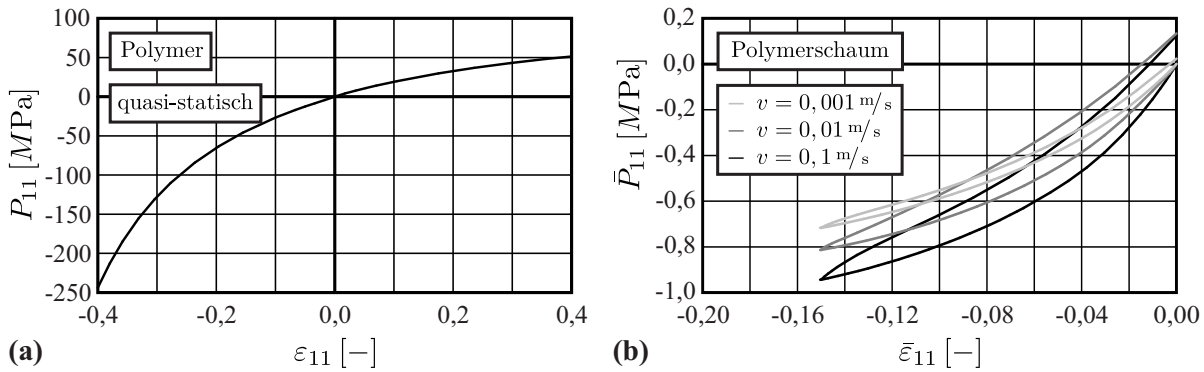


Abb. 7.1: Spannungs-Dehnungs-Kurve für das Polymer (a) und für einen Polymerschäum mit einer relativen Dichte von $\bar{\rho}/\rho_0 = 0,12$ (b)

$\sigma(V^z)/E(V^z) = 0,1$ bis $0,5$ und neun diskreten Werten $\bar{\rho}/\rho_0 = 0,04, 0,06, \dots, 0,20$ für die relative Dichte wird bei Generierung von jeweils drei Modellen zu jedem dieser diskreten Zufallsvariablenpaare der Wahrscheinlichkeitsraum diskretisiert.

Zur Bestimmung der Spannungs-Dehnungs-Kurven des Polymerschaums werden die Mikrostrukturmodelle bei konstanten Geschwindigkeiten von $v = 0,001 \text{ m/s}$, $v = 0,01 \text{ m/s}$ bzw. $v = 0,1 \text{ m/s}$ auf eine Maximaldehnung von $\bar{\epsilon} = -0,15$ in Druckrichtung belastet und anschließend findet mit derselben Geschwindigkeit eine vollständige Rückbelastung statt. Exemplarisch sind für ein Schaummodell mit einer relativen Dichte von $\bar{\rho}/\rho_0 = 0,12$ die sich ergebenden geschwindigkeitsabhängigen Belastungskurven bei uniaxialer Belastung in x -Richtung in Abb. 7.1(b) dargestellt. Zum Vergleich ist in Abb. 7.1(a) die sich aus den OGDEN-Parametern ergebene charakteristische quasi-statische Spannungs-Dehnungs-Kurve des Polymers als verwendetes Bulkmaterial abgebildet.

Auffällig am Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kurven des Polymerschaums ist der im Gegensatz zum Bulkmaterial gekrümmte Verlauf im Druckbereich. Dies ist ein Effekt der Mikrostruktur, wobei durch Zellwandbiegung ein weiches Materialverhalten bei großen Dehnungen im Vergleich zum Bulkmaterial vorliegt. Durch die Auffächerung der drei Spannungs-Dehnungs-Kurven ist zudem der Einfluss der Belastungsgeschwindigkeit deutlich zu erkennen.

7.2 Bestimmung der Materialunschärfen im ratenabhängigen Verhalten

Zu Bestimmung der Materialunschärfen im ratenabhängigen Verhalten werden sowohl zu den Zeitpunkten der erreichten Dehnungen von $\bar{\epsilon} = -0,05, -0,10$ und $-0,15$ während der Belastung als auch zu den Zeitpunkten der erreichten Dehnungen von $\bar{\epsilon} = -0,10, -0,05$ und $0,00$ während der Rückbelastung die Spannungswerte ermittelt. Die zugehörigen Rohdatenbasen sind für die drei Belastungsgeschwindigkeiten über die relative Dichte in Abb. 7.2(a),

7.2 Bestimmung der Materialunschärfen im ratenabhängigen Verhalten

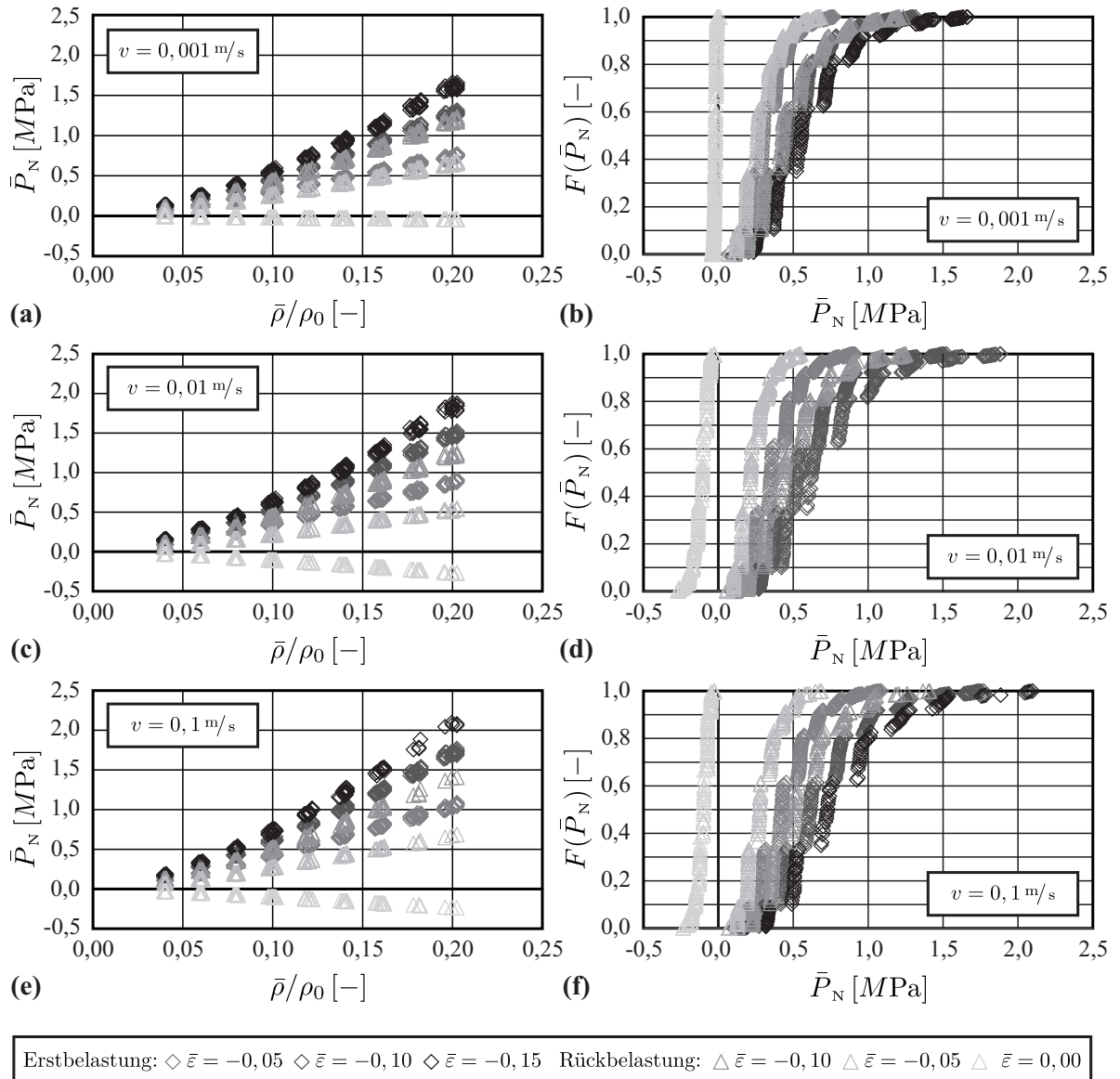


Abb. 7.2: Geschwindigkeitsabhängige Rohdaten der für diskrete Dehnungszustände ermittelten Spannungen in Abhängigkeit von der relativen Dichte ((a), (c) und (e)) und die zugehörigen Spannungsverteilungen ((b), (d) und (f))

(c) und (e) dargestellt. Zu beobachten ist neben dem zu erwartenden Spannungsanstieg bei höheren relativen Dichten zudem eine signifikante Streuung der Datenpunkte bei gleicher relativer Dichte unabhängig von der Belastungsgeschwindigkeit. Darüber hinaus ist deutlich zu erkennen, dass bei gleichen Dehnungen die Spannungswerte, die aus der Rückbelastung ermittelt werden, niedriger sind als die aus der Belastungsphase bestimmten. Dabei verstärkt sich dieser Effekt von der quasi-statischen Belastung (Abb. 7.2(a)) zu den höheren Belastungsgeschwindigkeiten (Abb. 7.2(c) und (e)).

Zur Ermittlung der zugehörigen Spannungsverteilungsfunktionen (Abb. 7.2(b), (d) und (f))

7 Unschärfen im ratenabhängigen Verhalten von Polymerschäumen

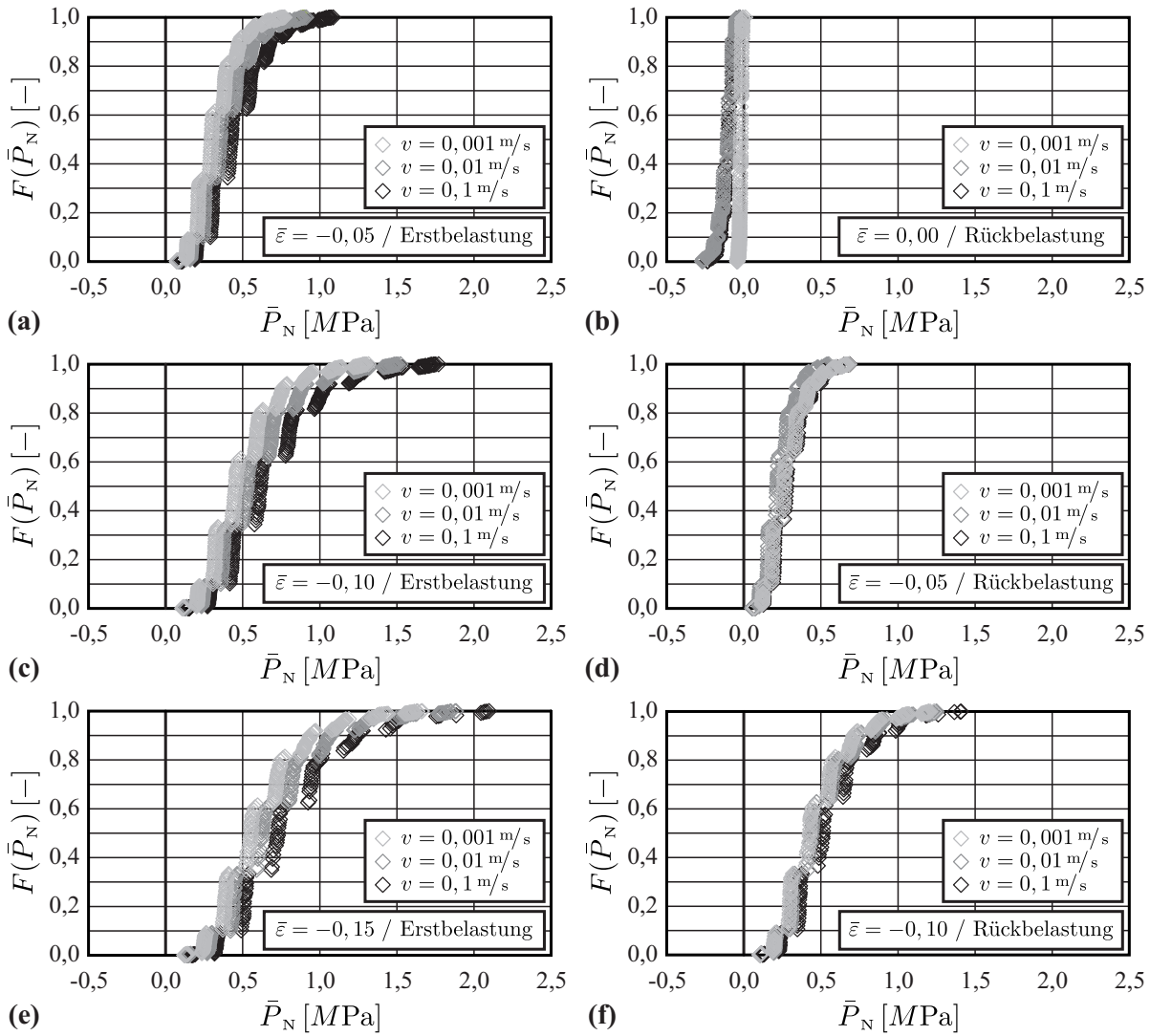


Abb. 7.3: Spannungsverteilungen für diskrete Dehnungszustände

wird für die Auftrittswahrscheinlichkeit der relative Dichte eine logarithmische Normalverteilung mit den Parametern $\sigma = 0,28$ und $\mu = -2,29$ angenommen, was einem Erwartungswert von $E(\bar{\rho}/\rho_0) = 0,105$ und einer Varianz von $\text{Var}(\bar{\rho}/\rho_0) = 0,0009$ entspricht. Für die Zellgrößenverteilung und die Modellanzahl je diskretem Zufallsvariablenpaar wird hingegen eine Gleichverteilung angenommen.

Der stufenförmige Verlauf der diskreten Verteilungsfunktionen in den Abb. 7.2(b), (d) und (f) ist, wie in Abschnitt 6.2, in der Diskretisierung des Zufallsraums begründet. Für die quasi-statische Belastungsgeschwindigkeit von $v = 0,001 \text{ m/s}$ (Abb. 7.2(b)) ist zu beobachten, dass bei vollständiger Rückbelastung auch die Spannungswerte auf einen Wert nahe null mit einer äußerst geringen Streubandbreite zurückgehen, welches dem hyperelastischen Materialmodell entspricht. Die Auswertung an den übrigen diskreten Dehnungszuständen zeigt jedoch, dass Belastungs- und Rückbelastungspfad nicht deckungsgleich sind.

7.2 Bestimmung der Materialunschärfen im ratenabhängigen Verhalten

Unabhängig von der Belastungsgeschwindigkeit sind in den Abb. 7.2(b), (d) und (f) extrem große Streubandbreiten für die Verteilungsfunktionen für Dehnungen $\bar{\varepsilon} \neq 0$ zu beobachten, die aufgrund der unterschiedlich starken Gewichtung der relativen Dichte nicht allein ein Effekt dieser ist. So lassen sich für eine Dehnung von $\bar{\varepsilon} = -0,15$ die neun relativen Dichten durch den stufenförmigen Verlauf der Verteilungsfunktion deutlich wiedererkennen (Abb. 7.2(b), (d) und (f)), wobei, wie bereits schon in Abb. 7.2(a), (c) und (e) zu sehen war, vor allem für große Spannungswerte eine sehr ausgeprägte Streuung trotz gleicher relativer Dichte zu beobachten ist.

Um den Einfluss der Belastungsgeschwindigkeit auf die Verteilungsfunktionen besser erkennen zu können, sind in Abb. 7.3 die Verteilungsfunktionen getrennt nach den ausgewerteten Dehnungszuständen abgebildet. In den Abb. 7.3(a), (c) und (e) ist dabei zu erkennen, dass mit zunehmender Belastungsgeschwindigkeit sich die Spannungsverteilungsfunktionen zu höheren Werten verschieben. Während der Rückbelastung (Abb. 7.3(b), (d) und (f)) dreht sich die Anordnung der Verteilungen jedoch um, so dass bei einer Belastungsgeschwindigkeit von $v = 0,001 \text{ m/s}$ die größte negative Spannung aufgebracht werden muss, um in den nicht deformierten Zustand zurückzukehren.

Trotz der stark vereinfachten Modellannahme eines inkompressiblen hyperelastischen Materialverhaltens, wodurch real in Polymerschäumen auftretende plastische Verformungen nicht abgebildet werden, zeigt das Beispiel deutlich, dass durch eine probabilistische Betrachtungsweise signifikante Materialunschärfen im ratenabhängigen Verhalten von Polymerschäumen, die auf der ungeordneten Mikrostruktur beruhen, aufgedeckt und beschrieben werden können.

8 Ableitung eines probabilistischen Stoffgesetzes

Durch Anwendung lokaler Auswerteverfahren konnten im Kapitel 6 für den betrachteten geschlossenzelligen Aluminiumschaum verschiedene Zusammenhänge zwischen den Mikrostruktur- und den Materialeigenschaften aufgezeigt werden. Basierend auf diesen Beobachtungen soll im folgenden Kapitel ein probabilistisches Stoffgesetz zur Bestimmung der Steifigkeitsverteilungen abgeleitet werden. So wird nach kurzer Darstellung der Vorgehensweise in Abschnitt 8.1 für die Ableitung eines probabilistischen Stoffgesetzes eine Separation der Einflussgrößen (Abschnitt 8.2) durchgeführt. Anschließend werden in Abschnitt 8.3 die durch das probabilistische Stoffgesetz gewonnenen Verteilungen für die effektiven Steifigkeitskomponenten dargestellt und mit den Ergebnissen der numerischen Simulation verglichen. Den Abschluss dieses Kapitels bildet der Abschnitt 8.4, in dem anhand eines einfachen Beispiels eine Anwendungsmöglichkeit des zuvor abgeleiteten probabilistischen Stoffgesetzes aufgezeigt wird.

8.1 Motivation und Vorgehensweise

Die Motivation der Ableitung eines probabilistischen Stoffgesetzes ist in den Ergebnissen der Mikrostrukturauswertung in Kapitel 6 begründet. So lieferte die zellbasierte Auswertung eine starke Korrelation zwischen den effektiven Steifigkeitskomponenten \bar{C}_{ij} und der relativen Dichte $\bar{\rho}/\rho_0$. Darüber hinaus konnte mittels der „Moving-Window“-Auswertung die räumliche Autokorrelation untersucht werden, wobei sich zeigte, dass die Eigenschaften einer Zelle in dem betrachteten Mikrostrukturmodell nur schwach von ihrer Umgebung beeinflusst sind.

Vor allem letztere Beobachtung legt eine weitere Untersuchung zwischen den geometrischen Zelleigenschaften und den lokalen effektiven Steifigkeitskomponenten nahe, wie sie bereits in den 1980er-Jahren von COWIN [10], TURNER und COWIN [93] sowie HUBER und GIBSON [46] vorgenommen wurde, die eine Beziehung zwischen der Anisotropie von Schäumen und dem Steifigkeitstensor herleiteten. Ein weiteres Modell wurde 1995 von ZYSSET und CURNIER [109] zur Beschreibung der Anisotropie der Elastizitätskonstanten ebenfalls basierend auf der ungeordneten Mikrostruktur vorgestellt. Dass es sich hierbei immer noch um ein aktuelles Forschungsgebiet handelt, zeigt die 2003 veröffentlichte Arbeit von RINCÓN KOHLI [78], in der zu lesen ist, dass die mechanischen Eigenschaften von zellulären Materialien nicht nur von den Eigenschaften des Bulkmaterials abhängen, sondern auch von der Menge und der geometrischen Anordnung. So ist in ihren Augen die relative Dichte zwar die wesent-

liche Einflussgröße in Bezug auf die Steifigkeit, aber da es sich um eine skalare Größe handelt, hält sie Informationen über die Zellgeometrie darüber hinaus für unverzichtbar.

Aufgrund dieser zitierten Beobachtungen sollen im folgenden Abschnitt 8.2 für die Mikrostruktureregebnisse einer zellbasierten Auswertung die Einflüsse der relativen Dichte, des Zellachsenverhältnisses und der Zellorientierung im Raum als die wesentlichen Zufallsvariablen separiert werden. Darüber hinaus ist von einer Reststreuung, die durch die ausgewählten Zufallsvariablen nicht erfasst wird, auszugehen.

Die sich aus der Separation ergebenden Zusammenhänge sollen durch Anpassung geeigneter Funktionen an die Datenbasis zunächst deterministisch beschrieben werden. Anschließend soll darauf basierend ein probabilistisches Stoffgesetz abgeleitet werden. Dies ermöglicht im Gegensatz zu der aufwendigen Mikrostrukturgenerierung und Auswertung auf direkte Weise aus den bekannten oder zumindest experimentell messbaren Verteilungen der Zufallsvariablen die Verteilungen der effektiven Steifigkeiten zu ermitteln. Anschließend erfolgt zur Bewertung ein Vergleich zwischen den aus der numerischen Simulation bestimmten und mittels dieses probabilistischen Stoffgesetzes berechneten Steifigkeitsverteilungen.

8.2 Separation der Einflussgrößen

Um die Abhängigkeit der Steifigkeit von der relativen Dichte und der Zellgeometrie sowie -orientierung zu untersuchen, wird im Rahmen dieser Arbeit in einem ersten Schritt für jede Zelle ein lokales Koordinatensystem derart bestimmt, dass die Achsen in die Vorzugsrichtungen der Zelle zeigen. Die Richtung des Basisvektors \mathbf{e}'_1 ist dabei derart definiert, dass das Verhältnis

$$Z^z = \frac{Z^{\min}}{Z^{\max}} \quad (8.1)$$

mit dem Zellwandanteil senkrecht zum Basisvektor \mathbf{e}'_1

$$Z^{\min} = \sum_i^w \sin \alpha_i \cdot A_i \quad (8.2)$$

und dem Zellwandanteil parallel zum Basisvektor \mathbf{e}'_1

$$Z^{\max} = \sum_i^w \cos \alpha_i \cdot A_i \quad (8.3)$$

maximal wird. Dabei sind A_i die Zellwandfläche, w die Wandanzahl und für den Winkel α gilt mit dem Normalenvektor \mathbf{n}

$$\alpha = \left| \frac{\pi}{2} - \arccos \left[\frac{(e'_{1x}n_x + e'_{1y}n_y + e'_{1z}n_z)}{\sqrt{e'^2_{1x} + e'^2_{1y} + e'^2_{1z}} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}} \right] \right|. \quad (8.4)$$

Die Ausrichtung des zweiten Basisvektors \mathbf{e}'_2 erfolgt unter der Bedingung $\mathbf{e}'_2 \perp \mathbf{e}'_1$, so dass erneut das Verhältnis Z^{\max}/Z^{\min} maximal wird. Für den Basisvektor \mathbf{e}'_3 wird $\mathbf{e}'_3 \perp \mathbf{e}'_2 \perp \mathbf{e}'_1$ und die Entstehung eines rechtshändigen Koordinatensystems gefordert.

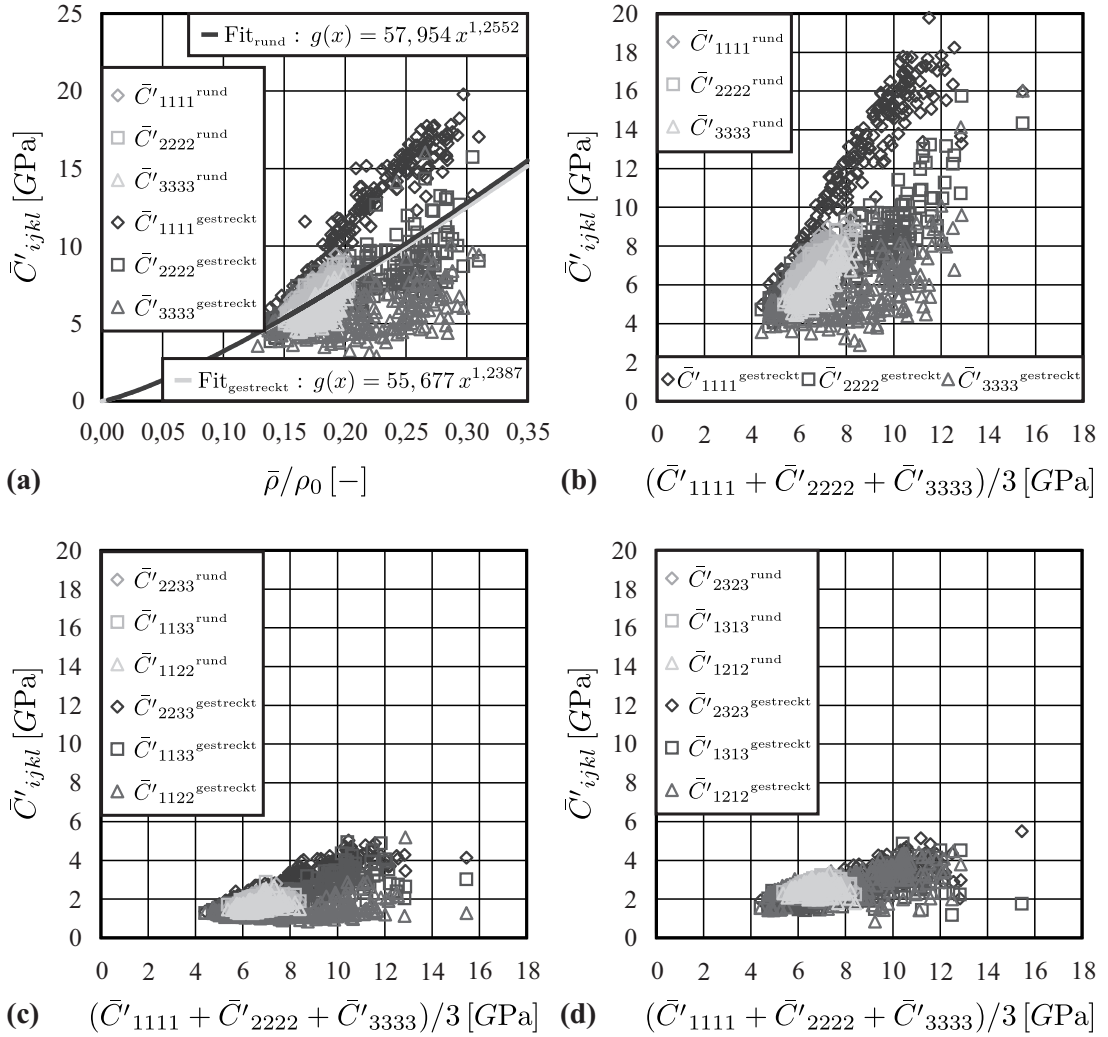


Abb. 8.1: Abhängigkeit der Normalsteifigkeiten von der relativen Dichte (a) und Steifigkeitskomponenten aufgetragen über den Mittelwert der Normalsteifigkeiten ((b), (c) und (d))

Nach Transformation der Steifigkeitskomponenten der einzelnen Zellen in die entsprechenden lokalen Koordinatensysteme, erfolgt eine Separation des Dichteinflusses. Hierzu werden die Steifigkeitskomponenten \bar{C}'_{ijkl} auf den Mittelwert der Normalsteifigkeiten

$$\bar{C}'_{ijkl}{}^{\text{norm}} = \frac{\bar{C}'_{(ijkl)}}{\left(\frac{\bar{C}'_{1111} + \bar{C}'_{2222} + \bar{C}'_{3333}}{3}\right)} \quad (8.5)$$

normiert.

Für ein geschlossenzelliges Schaummodell (256 Zellen) mit einer Kantenlänge von 1 mm und einer konstanten Wandstärke von 0,01 mm, welches mit dem in Kapitel 4 beschriebenen Verfahren generiert wurde, ist das Ergebnis dieser Normierung in den Abb. 8.1(b) bis (d) für die Steifigkeitskomponenten $\bar{C}'_{ijkl}{}^{\text{rund}}$ mit hellgrauen Symbolen dargestellt. Des Weiteren wird

8 Ableitung eines probabilistischen Stoffgesetzes

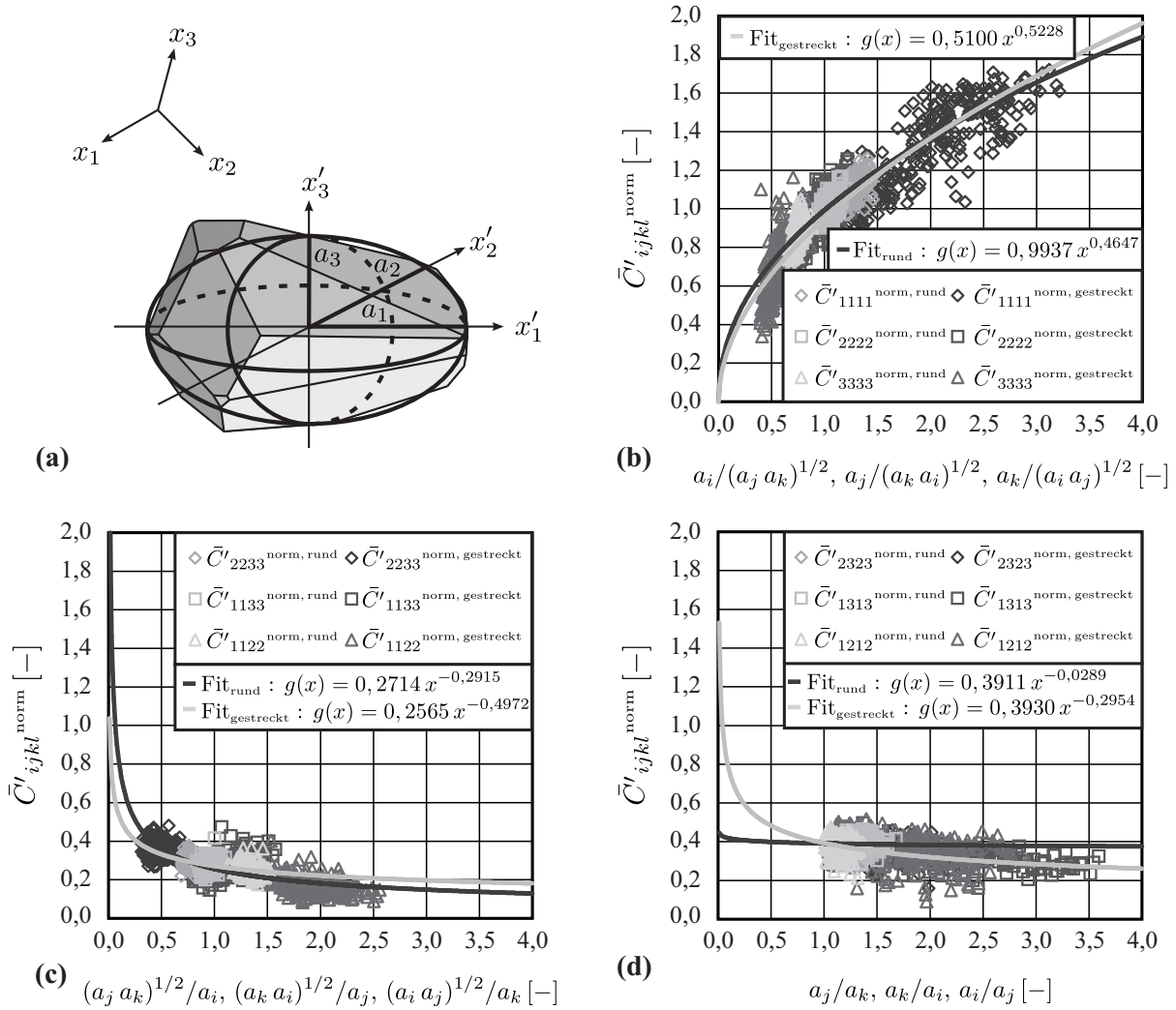


Abb. 8.2: Ellipsoid-Anpassung an eine Zelle (a) und Abhängigkeit der Steifigkeitskomponenten vom Achsenverhältnis ((b), (c) und (d))

an die Mittelwerte der drei Normalsteifigkeitskomponenten, die in Abb. 8.1(a) ebenfalls mit hellgrauen Symbolen über die relative Dichte aufgetragen sind, eine Potenzfunktion der Form

$$g(x) = G \cdot (x)^H \quad (8.6)$$

mit $G, H \in \mathbb{R}$ angepasst.

Wie in Abb. 8.2(a) skizziert, wird zur Untersuchung des Geometrieinflusses an jede Zelle ein Ellipsoid angepasst, dessen Achsen in Richtung der lokalen Koordinatenachsen weisen. In Abb. 8.2(b) sind folglich die normierten Normalsteifigkeitskomponenten $\bar{C}'_{(iii)} \text{ norm, rund}$ über das Achsenverhältnis $\frac{a_i}{\sqrt{a_j a_k}}$ mit hellgrauen Symbolen aufgetragen. Entsprechende Darstellungen sind in den Abb. 8.2(c) und (d) für die Koppel- und Schubsteifigkeitskomponenten $\bar{C}'_{(ijj)} \text{ norm, rund}$ bzw. $\bar{C}'_{(ijij)} \text{ norm, rund}$ zusehen, wobei die Achsenverhältnisse zu $\frac{\sqrt{a_i a_j}}{a_k}$ bzw. $\frac{a_i}{a_j}$ gewählt wurden.

Nach erneuter Anpassung der Datenbasen in den Diagrammen in Abb. 8.2(b) bis (d) durch Potenzfunktionen der Form (8.6) lassen sich die Steifigkeitskomponenten durch die Separationsansätze

$$\tilde{C}'_{(iiii)} = G_{\text{Dichte}} \cdot G_{\text{Achse, N}} \cdot \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \right)^{H_{\text{Dichte}}} \cdot \left(\frac{a_i}{\sqrt{a_j a_k}} \right)^{H_{\text{Achse, N}}} \quad (8.7)$$

$$\tilde{C}'_{(iiij)} = G_{\text{Dichte}} \cdot G_{\text{Achse, K}} \cdot \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \right)^{H_{\text{Dichte}}} \cdot \left(\frac{\sqrt{a_i a_j}}{a_k} \right)^{H_{\text{Achse, K}}} \quad (8.8)$$

$$\tilde{C}'_{(ijij)} = G_{\text{Dichte}} \cdot G_{\text{Achse, S}} \cdot \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \right)^{H_{\text{Dichte}}} \cdot \left(\frac{a_i}{a_j} \right)^{H_{\text{Achse, S}}} \quad (8.9)$$

mit den durch Gleichung (8.6) sich ergebenden Fit-Parametern G_{Dichte} , $G_{\text{Achse, N}}$, $G_{\text{Achse, K}}$, $G_{\text{Achse, S}}$, H_{Dichte} , $H_{\text{Achse, N}}$, $H_{\text{Achse, K}}$, $H_{\text{Achse, S}}$ darstellen, wobei die Fit-Parameter-Werte den Abb. 8.1(a) und 8.2(b) bis (d) entnommen werden können.

8.3 Ergebnisse

Nach der erfolgreichen Separation der wesentlichen Einflussgrößen in Abschnitt 8.2 können die effektiven Steifigkeitskomponenten durch das probabilistische Stoffgesetz, wie es in den Gleichungen (8.7) bis (8.9) angegeben ist, bestimmt werden. Ein Vergleich mit den diskreten Verteilungen, die aus der numerischen Simulation gewonnen wurden, sind in den Abb. 8.3(a), (c) und (e) für die Normal-, Koppel- und Schubsteifigkeitskomponenten im lokalen System dargestellt. Dabei weisen die aus den Separationsansätzen berechneten Steifigkeitsverteilungen bei guter Übereinstimmung der Erwartungswerte jedoch eine deutlich geringere Streubandbreite auf. Nach erfolgter Rücktransformation in das globale System mit den Steifigkeiten $\tilde{C}'_{(ijkl)}$, wobei für die Steifigkeitskomponenten

$$\tilde{C}'_{ijkl} = 0 \quad \text{für } ijkl \neq (iiii) \neq (iiij) \neq (ijij) \quad (8.10)$$

gewählt wurde, zeigt sich hingegen eine ausgezeichnete Übereinstimmung der diskreten Verteilungen für die Normal-, Koppel- und Schubsteifigkeitskomponenten in den Abb. 8.4(a), (c) und (e).

Die Ursache für die großen Abweichungen in den lokalen Steifigkeitsverteilungsfunktionen in den Abb. 8.3(a), (c) und (e) ist damit zu begründen, dass die mit dem VORONOÏ-Verfahren in LAGUERRE-Geometrie erzeugten Mikrostrukturen keine Zellen mit ausgeprägten Achsenverhältnissen aufweisen. Somit konnte weder die Anisotropie der Steifigkeitskomponenten noch eine eindeutige Materialvorzugsrichtung bestimmt werden.

Da aber anzunehmen ist, dass sowohl das Achsenverhältnis als auch die Orientierung der Zellen maßgeblichen Einfluss auf die Steifigkeitskomponenten besitzen, wurde ein Quellpunktfeld derart manipuliert, dass nach Anwendung des VORONOÏ-Verfahrens in LAGUERRE-Geometrie 256 Zellen mit einer ebenfalls konstanten Wandstärke von 0,01 mm auf einem Volumen von 1 mm³ entstanden, die zum größten Teil ausgeprägte Achsenverhältnisse mit einer Vorzugsorientierung in Richtung des globalen Basisvektors e_3 aufweisen.

8 Ableitung eines probabilistischen Stoffgesetzes

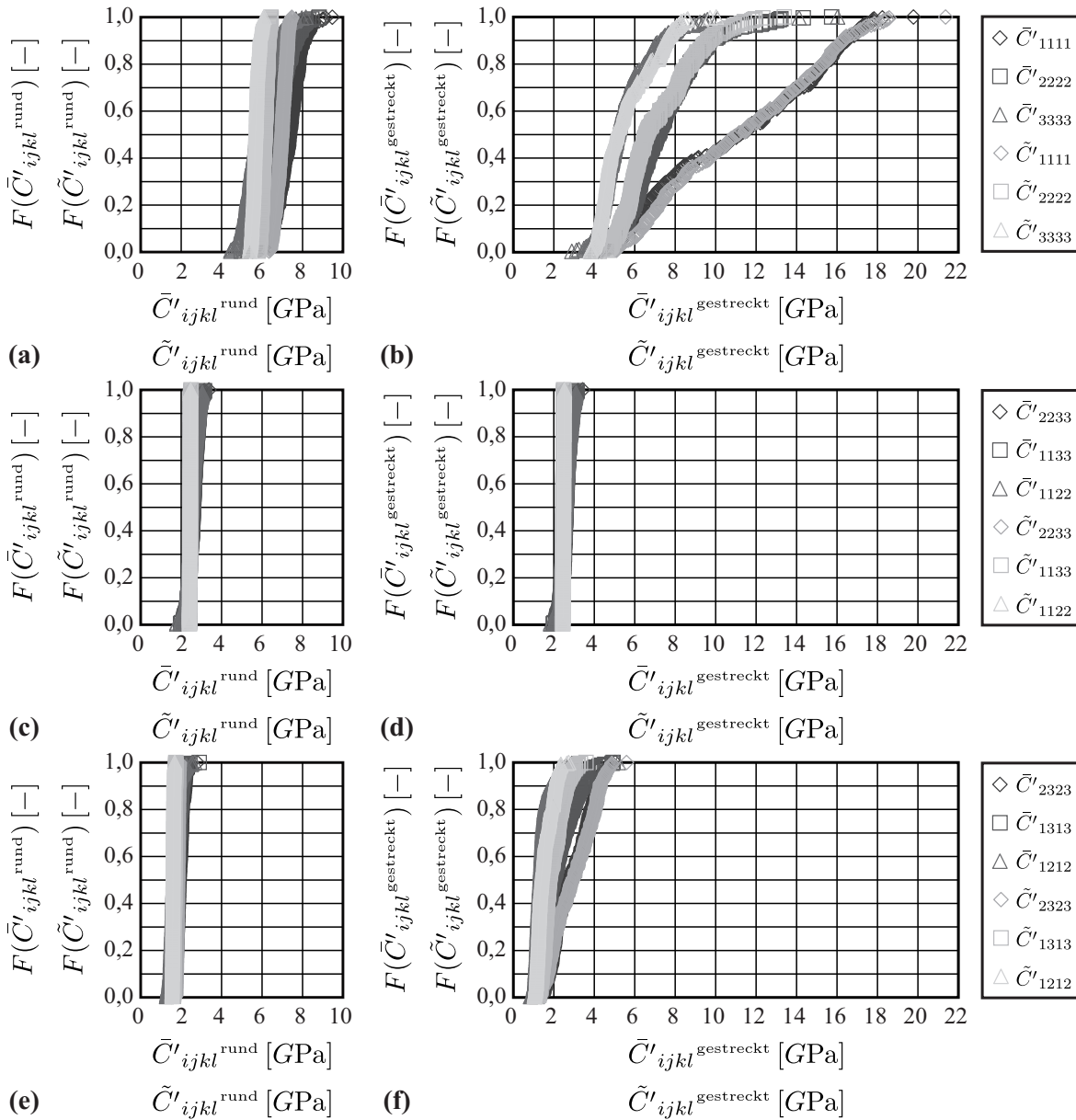


Abb. 8.3: Diskrete Verteilungen der aus der numerischen Simulation bestimmten und der aus dem probabilistischen Stoffgesetz ermittelten Steifigkeitskomponenten im lokalen Koordinatensystem

Auch für dieses Mikrostrukturmodell sind in Abb. 8.1(a) die lokalen Steifigkeitskomponenten $\bar{C}'_{ijkl \text{ gestreckt}}$ dargestellt und Abb. 8.2(b) bis (d) zeigt den Zusammenhang zwischen den normierten Steifigkeitskomponenten $\bar{C}'_{ijkl \text{ norm, gestreckt}}$ und den Achsenverhältnissen $\frac{a_i}{\sqrt{a_j a_k}}$, $\frac{\sqrt{a_i a_j}}{a_k}$ bzw. $\frac{a_i}{a_j}$ (jeweils dunkelgraue Symbole).

Ein Vergleich der Verteilungen der Steifigkeiten \bar{C}'_{ijkl} in den Abb. 8.3(b), (d) und (f) der aus der zellbasierten Auswertung bestimmten und den mit den Gleichungen (8.7) bis (8.9) berech-

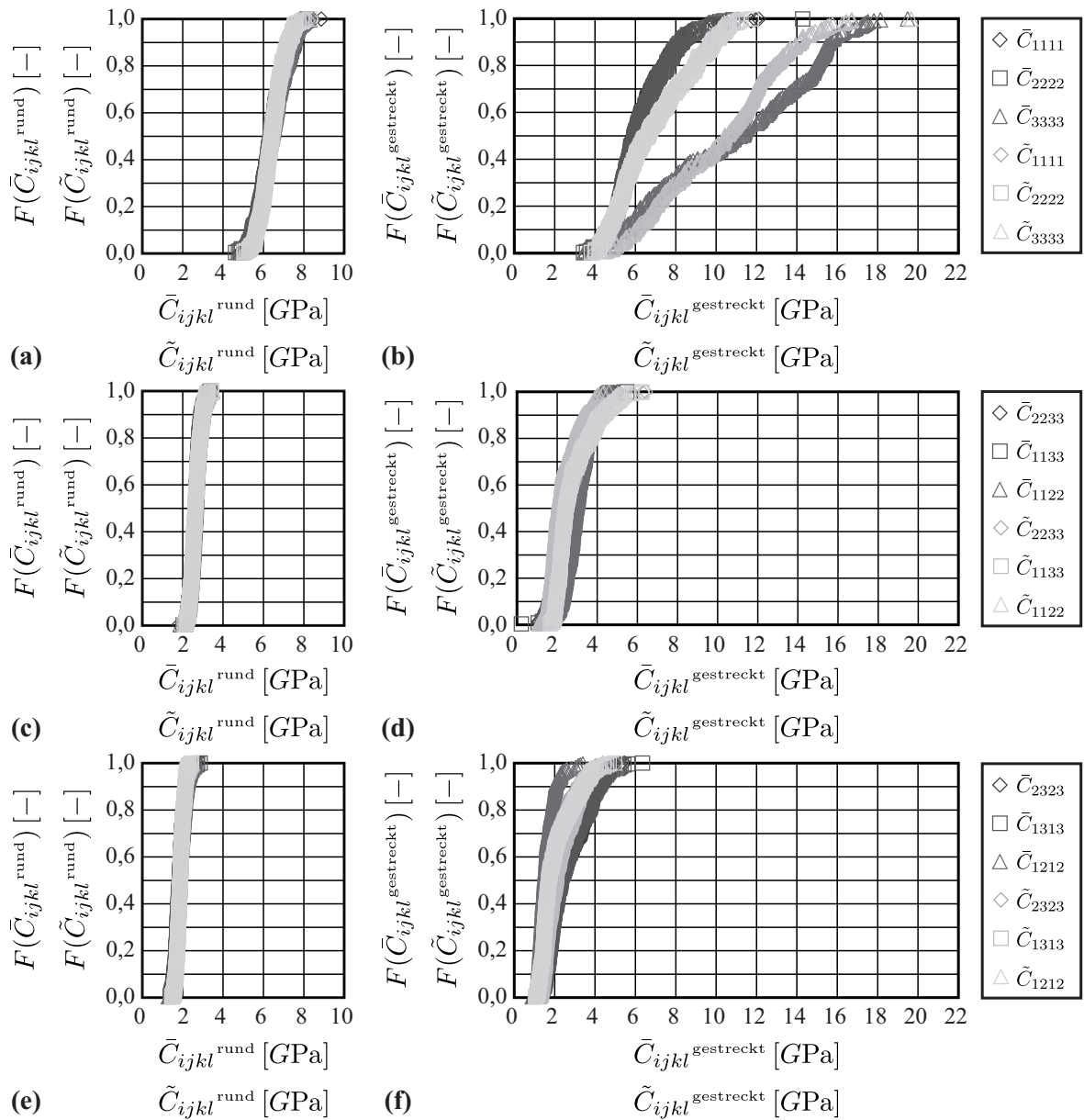


Abb. 8.4: Diskrete Verteilungen der aus der numerischen Simulation bestimmten und der aus dem probabilistischen Stoffgesetz ermittelten Steifigkeitskomponenten im globalen Koordinatensystem

neten lokalen Steifigkeiten \tilde{C}'_{ijkl} zeigt eindrucksvoll, dass nicht nur die Erwartungswerte wie in den Abb. 8.3(a), (c) und (e) übereinstimmen, sondern auch die Streubandbreite ausgezeichnet wiedergegeben wird.

Nach Rücktransformation in das globale System, ist in den Abb. 8.4(b), (d) und (f), eine gute Übereinstimmung der diskreten Steifigkeitsverteilungsfunktionen zu beobachten. Darüber hinaus ist in Abb. 8.4(b) deutlich zu erkennen, dass die Normalsteifigkeiten \tilde{C}_{3333} deutlich hö-

here Werte als die Komponenten \tilde{C}_{1111} und \tilde{C}_{2222} aufweisen, was eindeutig auf die länglichen in Richtung des globalen Basisvektors \mathbf{e}_3 ausgerichteten Zellen zurückzuführen ist.

Dieses Ergebnis ist vom großen Nutzen, da somit aus bekannten oder zumindest messbaren mikrostrukturellen Eigenschaften sich die Steifigkeit der Gesamtstruktur bis auf eine geringe Reststreuung, die z. B. ihren Ursprung im Einfluss der Umgebung haben kann, vorhersagen lässt.

8.4 Anwendungsbeispiel

Da sich durch computertomographische Auswerteverfahren sowohl die Achsenverhältnisse der Zellen und damit auch ihre Orientierung im Raum als auch die Verteilung der relativen Dichte bestimmen lassen, sollen basierend auf den Ergebnissen aus Abschnitt 8.3 Anwendungsmöglichkeiten des hergeleiteten probabilistischen Stoffgesetzes anhand eines einfachen Beispiels aufgezeigt werden.

So wird die Verteilung der effektiven Steifigkeiten basierend auf der Verteilungsfunktion der relativen Dichte, der Ellipsoidform und deren Orientierung im Raum vorhergesagt. Für die relative Dichte werden sechs diskrete Werte im Bereich von $\bar{\rho}/\rho_0 = 0,15$ bis $0,20$ angenommen, deren Wahrscheinlichkeiten p_{Dichte} auf der logarithmischen Normalverteilung mit dem Streuungsparameter $\sigma = 0,0585$ und dem Lageparameter $\mu = -1,7364$ beruhen. Die Variation in der Zellgeometrie wird durch Ellipsoide mit verschiedenen Achsenverhältnissen berücksichtigt. So werden in diesem Beispiel alle Kombinationen der Achsenverhältnisse $a_2/a_1 = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$ mit $a_3/a_1 = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$ betrachtet, wobei die Wahrscheinlichkeiten p_{Form} dieser diskreten Wertepaare als gleichverteilt angenommen werden. Zur Beschreibung der Orientierung im Raum werden die EULER-Winkel ϕ, θ und ψ verwendet, womit zur Diskretisierung die Ellipsoide in 20° -Schritten im Raum ($0^\circ \leq \phi < 180^\circ, 0^\circ \leq \theta < 180^\circ$ und $0^\circ \leq \psi < 180^\circ$) gedreht werden. Die Gewichtung (p_ϕ, p_θ und p_ψ) erfolgt zum einen gleichverteilt und zum anderen mittels einer GAUSSschen Normalverteilung, so dass eine Verteilung mit einer Vorzugsrichtung betrachtet werden kann.

Die Gesamtwahrscheinlichkeit für einen Ellipsoid ergibt sich somit zu

$$p_{\text{Ellipsoid}} = p_{\text{Dichte}} \cdot p_\phi \cdot p_\theta \cdot p_\psi \cdot p_{\text{Form}} \cdot p_{\text{Segment}}, \quad (8.11)$$

wobei durch p_{Segment} die Differenz der Kugeloberflächensegmente ausgeglichen wird, da durch die Verwendung der EULER-Winkel keine gleichmäßige Diskretisierung des Raums erfolgt.

Die Parameter in den Gleichungen (8.7) bis (8.9) sind durch eine gemeinsame Anpassung an die Datenbasen der beiden Mikrostrukturmodelle, die zur Ableitung des probabilistischen Stoffgesetzes zu Beginn dieses Abschnitts dienten, zu

$$\begin{aligned} G_{\text{Dichte}} &= 54.827, & H_{\text{Dichte}} &= 1.226 \\ G_{\text{Achse,N}} &= 0.9721, & H_{\text{Achse,N}} &= 0.5151 \\ G_{\text{Achse,K}} &= 0.4108, & H_{\text{Achse,K}} &= -0.3344 \\ G_{\text{Achse,S}} &= 0.2638, & H_{\text{Achse,S}} &= -0,4698 \end{aligned} \quad (8.12)$$

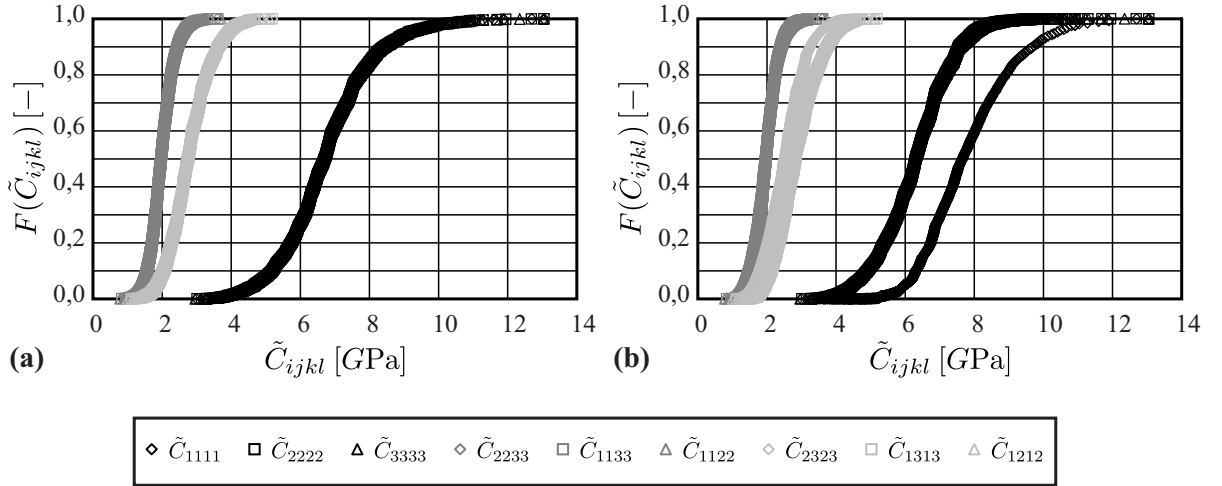


Abb. 8.5: Verteilungen der Steifigkeitskomponenten bei gleichverteilter Orientierung der Zellen (a) und einer x-Vorzugsrichtung (b)

bestimmt.

Nach Berechnung der lokalen Steifigkeitskomponenten \tilde{C}'_{ijkl} (Gleichungen (8.7) bis (8.9)) müssen diese in das globale Koordinatensystem transformiert werden. Mit den Komponenten der Drehmatrix

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \psi + n_1^2(1 - \cos \psi) & n_2 n_1(1 - \cos \psi) + n_3 \sin \psi & n_3 n_1(1 - \cos \psi) - n_2 \sin \psi \\ n_1 n_2(1 - \cos \psi) - n_3 \sin \psi & \cos \psi + n_2^2(1 - \cos \psi) & n_3 n_2(1 - \cos \psi) + n_1 \sin \psi \\ n_1 n_3(1 - \cos \psi) + n_2 \sin \psi & n_2 n_3(1 - \cos \psi) - n_1 \sin \psi & \cos \psi + n_3^2(1 - \cos \psi) \end{pmatrix} \quad (8.13)$$

und dem Drehvektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (8.14)$$

gilt

$$\tilde{C}_{ijkl} = a_{im} \cdot a_{jn} \cdot a_{kp} \cdot a_{lq} \cdot \tilde{C}'_{ijkl} \quad (8.15)$$

für die effektiven Steifigkeiten.

Die sich ergebenden diskreten Verteilungen sind in Abb. 8.5 dargestellt. Während in Abb. 8.5(a) bei angenommener Gleichverteilung der Zellorientierung die Steifigkeitsverteilungen der drei Normal-, Koppel- und Schubkomponenten übereinstimmen, ist in Abb. 8.5(b) durch die zu höheren Steifigkeitswerten verschobene Verteilung der Steifigkeitskomponente \tilde{C}_{1111} deutlich der Einfluss der bevorzugten Zellorientierung in x -Richtung wiederzufinden.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, dass die Verteilungen in den Abb. 8.3 und 8.4 aufgrund der riesigen Datenbasis einer Datenreduktion der Form

$$p^{\text{red}} = \sum_{m=1}^n p_m \quad (8.16)$$

8 Ableitung eines probabilistischen Stoffgesetzes

$$\tilde{C}_{ijkl}^{\text{red}} = \sum_{k=1}^n \tilde{C}_{ijkl,m} \quad (8.17)$$

unterliegen, bei der die Steifigkeiten zunächst aufsteigend sortiert werden und anschließend dann jeweils n Datenpunkte in Form eines Mittelwerts $\tilde{C}_{ijkl}^{\text{red}}$ bei Akkumulation der Wahrscheinlichkeiten p^{red} zusammengefasst werden.

9 Übertragung auf die strukturmechanische Ebene

Eindrucksvoll wurde in den Kapiteln 6 und 7 die Streuung der effektiven Materialeigenschaften in zufälligen ungeordneten Mikrostrukturen durch Untersuchung von repräsentativen Volumenelementen aufgezeigt. Im Folgenden sollen die angewandten probabilistischen Methoden derart erweitert werden, dass auch größere Bauteile analysiert werden können. In Abschnitt 9.1 werden zunächst das im Folgenden verwendete Fallbeispiel und die Problematik bei der Bewertung größerer Bauteile beschrieben. In den darauf anschließenden Abschnitten sind die Ergebnisse der Mikrostrukturanalyse (Abschnitt 9.2), die Diskretisierung des mikrostrukturellen Anteils mittels Zufallsfelder (Abschnitt 9.3) und die Ergebnisse der Bauteilanalyse (Abschnitt 9.4) dargestellt.

9.1 Fallbeispiel und Problematik

Die Bestimmung der Materialunschärfe auf strukturmechanischer Ebene erfolgt exemplarisch anhand einseitig eingespannter Sandwichbalken, die aus einem geschlossenzelligen Schaumkern ($d_{\text{Kern}} = 25 \text{ mm}$) und zweier 1 mm dicken Deckschichten bestehen (Abb. 9.1). Zur Bestimmung der Unschärfen in den effektiven Materialeigenschaften erfolgt eine Kraftaufbringung von $F = 100 \text{ N}$ am freien Ende des Balkens.

Wenngleich es sich bei dem soeben beschriebenen Sandwichbalken um ein sehr einfaches Bauteil handelt, ist die im Folgenden angewandte erweiterte probabilistische Methode nicht

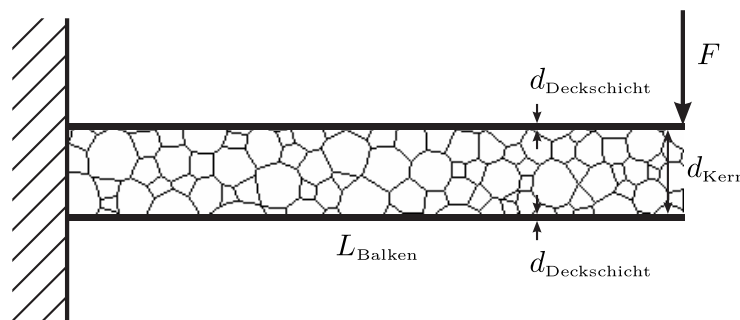


Abb. 9.1: Einseitig eingespannter Sandwichbalken mit ausgeprägter Mikrostruktur im Kern.

nur ohne Weiteres auf komplexe Bauteile zu übertragen, sondern zugleich ist hierin ein besonderes Einsatzpotential zu erkennen. So ist die Weiterentwicklung der zunächst zur Mikrostrukturanalyse angewandten probabilistischen Methoden auf Bauteile mit mikrostrukturellem Anteil von großer Bedeutung, da bei der Betrachtung und Finite-Elemente-Modellierung dieser auch heutzutage noch – wenn die Mikrostruktur aufgelöst abgebildet wird – sehr schnell die Grenzen der Rechenkapazitäten erreicht werden. Als Folge dessen vernachlässigen rein deterministische Berechnungskonzepte die Streuung vollständig, wodurch die Ergebnisse mit großen Sicherheitsbeiwerten angegeben werden müssen. Für die Konstruktion bedeutet dies eine schlechte Materialausnutzung, die unvereinbar mit der immer wichtiger werdenden Gewichtsreduzierung und dem sparsamen Umgang mit begrenzten Ressourcen ist.

Als Lösung bietet sich ein erweitertes probabilistisches Verfahren an, bei dem eine Übertragung der mikromechanischen Ergebnisse auf die strukturmechanische Ebene erfolgt. So werden basierend auf den Ergebnissen der Mikrostrukturanalyse zur Diskretisierung des mikrostrukturellen Anteils Zufallsfelder generiert, die in ihrer Geometrie den Abmessungen im Bauteil entsprechen. Auf diese Weise wird die reale Mikrostruktur nicht abgebildet, wodurch die numerische Effizienz erheblich gesteigert werden kann. Im Unterschied zu rein deterministischen Konzepten werden die Streuung in den Mikrostruktureigenschaften, die Korrelation zwischen verschiedenen Eigenschaften sowie die räumliche Autokorrelation jedoch berücksichtigt. Darüber hinaus kann bei der Generierung der Zufallsfelder im Gegensatz zu der vorherigen rein beschreibenden Statistik die Korrelation zwischen den verschiedenen Steifigkeitskomponenten erfasst werden.

9.2 Mikrostrukturauswertung

Für die Mikrostrukturauswertung werden 25 geschlossenzellige Mikrostrukturmodelle mit einer Kantenlänge von 10 mm mittels dem VORONOÏ-Verfahren in LAGUERRE-Geometrie generiert, wobei das mittlere Zellvolumen $\bar{V}^Z = 3,9 \text{ mm}^3$ beträgt und die größte Zelle etwa das vierfache Volumen der kleinsten Zelle aufweist. Die Wandstärke der Zellen nimmt im Verhältnis von $(d_{\min}/d_{\max})^{\text{Wand}} = \frac{1}{2}$ zwischen Zellwandmitte und -kante zu (vgl. Abb. 4.3(b)), wobei die Absolutwerte derart gewählt sind, dass die gesamte Mikrostruktur eine relative Dichte von $\bar{\rho}/\rho_0 = 0,08$ aufweist. Für die Materialeigenschaften werden Aluminium-Kennwerte verwendet, womit die Rechnungen auf einem Elastizitätsmodul von $E_{\text{Al}} = 70 \text{ GPa}$ und einer Querkontraktionszahl von $\nu_{\text{Al}} = 0,3$ (vgl. KUHLING [52]) beruhen. Um eine ausreichend große Rohdatenbasis zu erhalten, werden je Mikrostrukturmodell 1000 Testvolumenelemente mit einem Kugelradius von $r_{\text{TVE}} = 1 \text{ mm}$ mittels des in Abschnitt 6.4 beschriebenen „Moving-Window“-Verfahrens mit GAUSS-Gewichtung ($w(r_{\text{TVE}}) = 1 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$) ausgewertet.

Da in sehr seltenen Fällen aufgrund einer Schwäche des angewandten „Moving-Window“-Verfahrens definitiv unrealistische Werte auftreten, werden bei der Auswertung die jeweils fünf höchsten sowie niedrigsten Steifigkeitswerte der einzelnen Komponenten nicht berücksichtigt, so dass eine Auswertung der inneren 99 % erfolgt. Die zugehörige Rohdatenbasis ist für die Normal-, Koppel- und Schubsteifigkeiten über der relativen Dichte in Abb. 9.2(b) bis

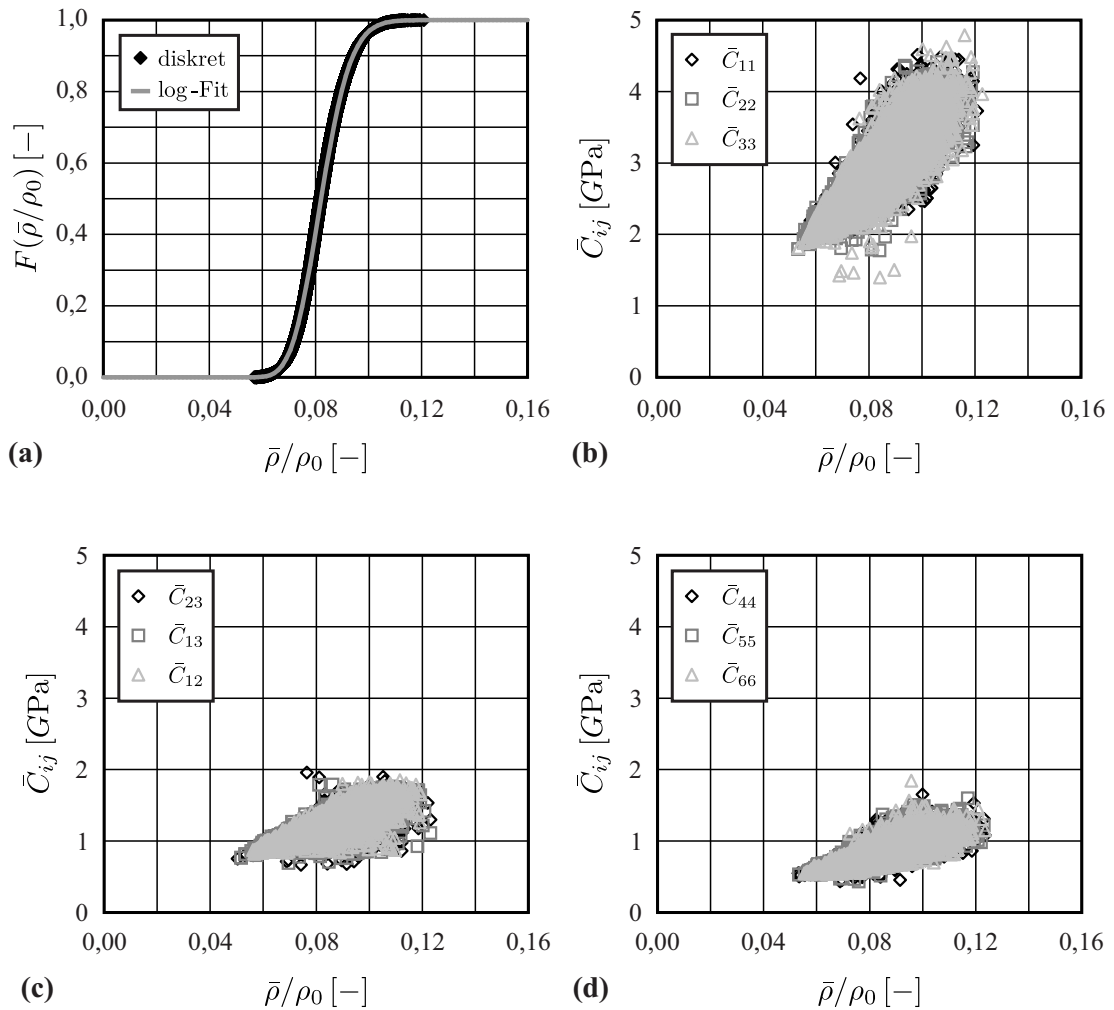


Abb. 9.2: Verteilung der relativen Dichte (a) und Rohdaten für die Normal- (b), Koppel- (c) und Schubsteifigkeiten (d) in Abhängigkeit von der relativen Dichte

(d) dargestellt, wobei erneut ein Anstieg der Steifigkeitswerte zu höheren relativen Dichten zu erkennen ist. Wesentlich interessanter ist jedoch die starke Streuung sowohl in den Werten der relativen Dichte im Bereich von $\bar{\rho}/\rho_0 = 0,05$ bis $0,11$ als auch in den Steifigkeitswerten bei gleicher Dichte.

In Abb. 9.2(a) ist die diskrete Verteilungsfunktion für die relative Dichte sowie eine Anpassung durch eine logarithmische Normalverteilung dargestellt, wobei sich der Erwartungswert zu $E(\bar{\rho}/\rho_0)^{m-w} = 0,08$ und die Varianz zu $\text{Var}(\bar{\rho}/\rho_0)^{m-w} = 7,9 \cdot 10^{-5}$ ergeben.

Für die Steifigkeitskomponenten sind in Abb. 9.3 für sieben Dichteklassen diskrete Verteilungsfunktionen der Normal-, Koppel- und Schubsteifigkeiten angegeben. Die Anpassung mit logarithmischen Normalverteilungen liefert erneut eine sehr gute Übereinstimmung. Die Erwartungswerte der Normal-, Koppel- und Schubsteifigkeiten betragen $E(\bar{C}_N) \simeq 2,863$ GPa, $E(\bar{C}_K) \simeq 1,234$ GPa und $E(\bar{C}_S) \simeq 0,814$ GPa, während alle übrigen Steifigkeitswerte nähe-

9 Übertragung auf die strukturmechanische Ebene

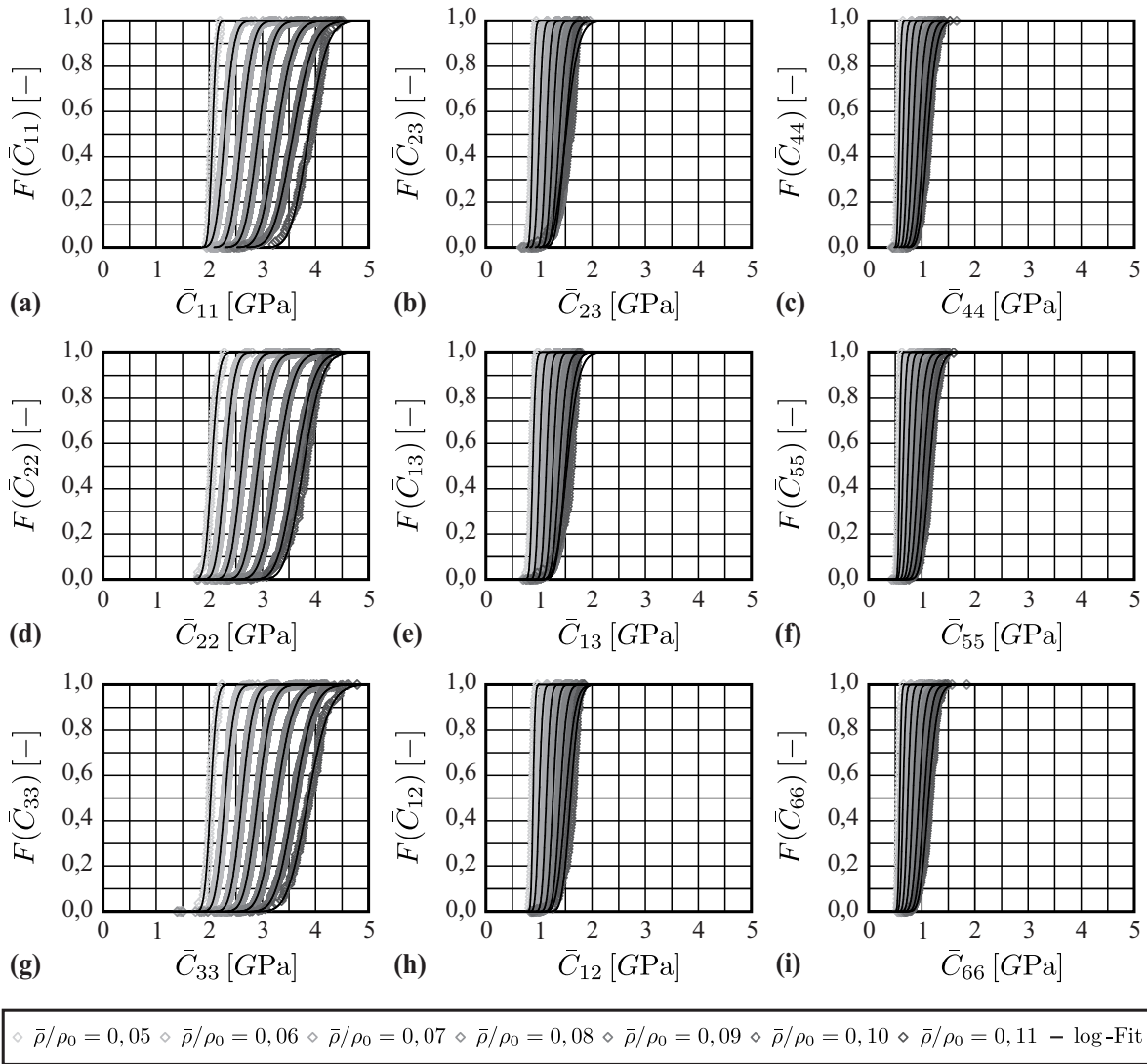


Abb. 9.3: Dichteabhängige Verteilungsfunktionen der Normal-, Koppel- und Schubsteifigkeiten

rungsweise null sind. Auffällig ist zudem, dass die Streubandbreite der Verteilungsfunktionen zu höheren Dichten signifikant zunimmt. Aus der sehr großen Ähnlichkeit der Verteilungsfunktionen in Abb. 9.3 für die jeweils drei Komponenten der Normal-, Koppel- und Schubsteifigkeiten lässt sich ein auf makroskopischer Ebene isotropes Materialverhalten ableiten.

Um realistische Zufallfelder generieren zu können, ist es zudem wichtig die räumliche Autokorrelation zu untersuchen. Hierzu ist in Abb. 9.4 die räumliche Autokorrelation der Steifigkeitskomponenten dargestellt, wobei sich jedoch zeigt, dass diese nur schwach ausgeprägt ist. So ist bereits bei einem Abstand von $r_E \simeq 2 \text{ mm}$ für alle Steifigkeitskomponenten ein Korrelationskoeffizient $\rho(\Delta \bar{C}_{ij}, r_E)$ von annähernd null erreicht, wobei der Abfall sehr gut durch

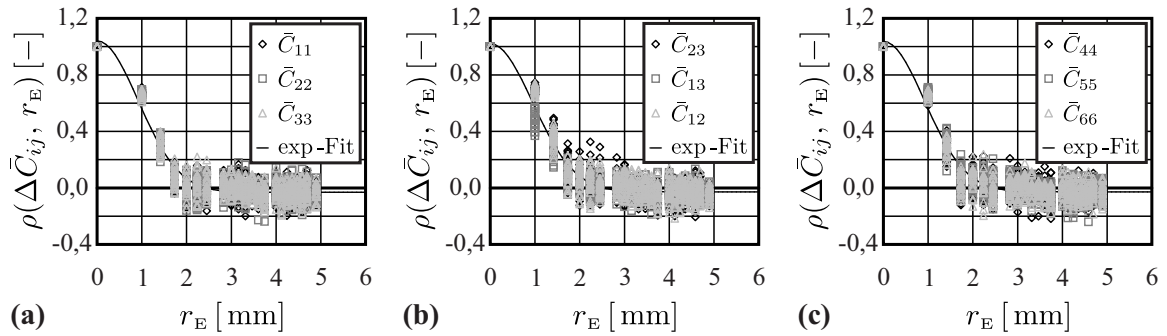


Abb. 9.4: Räumliche Autokorrelation der Normal- (a), Koppel- (b), und Schubsteifigkeitskomponenten (c)

Anpassung einer Exponentialfunktion der Form

$$g(x) = g_0 + g_1 \cdot \exp(-g_2 x^2) \quad (9.1)$$

mit den Fit-Parametern g_0 , g_1 und g_2 beschrieben werden kann. Ein Vergleich mit experimentellen Ergebnissen von KANIT *et al.* [49] bestätigt zudem diese schwach ausgeprägte räumliche Autokorrelation.

Eine weitere Information wird durch die Variogramme in Abb. 9.5 bereitgestellt. Die nach Gleichung (2.116) berechneten Semi-Varianzen $\gamma(r_E)$ für die Normal-, Koppel- und Schubsteifigkeiten zeigen, dass die Rauheit der Datenbasis mit größer werdendem Abstand deutlich zunimmt bis bei einem Abstand von $r_E \simeq 2$ mm ein konstantes Niveau erreicht wird. Dabei lassen sich in Abb. 9.5 erneut die Datenpunkte in allen drei Variogrammen durch eine Exponentialfunktion der Form (9.1) anpassen.

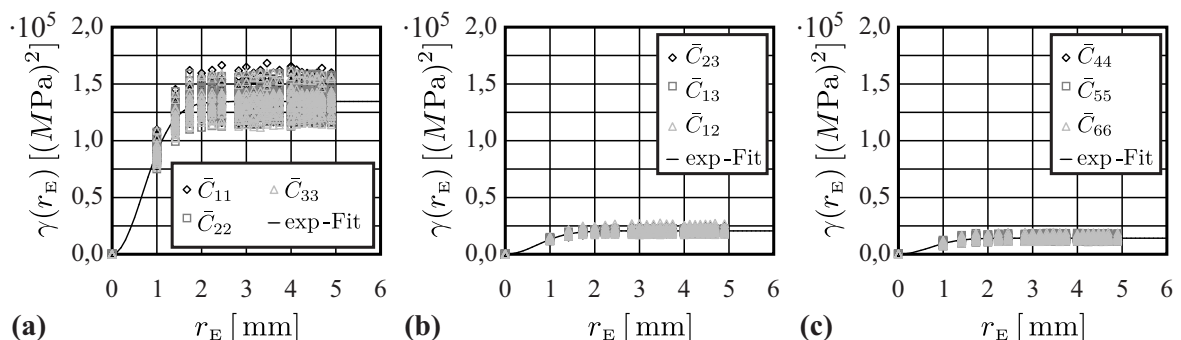


Abb. 9.5: Variogramme für die Normal- (a), Koppel- (b), und Schubsteifigkeitskomponenten (c)

9.3 Zufallsfelder

Basierend auf den Mikrostrukturergebnissen (Abschnitt 9.2) werden für die Untersuchung der Materialunschärfen in Sandwichbalken Zufallsfelder generiert. Hierzu erfolgt eine Diskretisierung durch 12500 rechteckige finite Elemente mit einer einheitlichen Kantenlänge von $r = 1 \text{ mm}$ (Abb. 9.6), wobei in einem ersten Schritt zunächst den 3250 finiten Elementen mit einer geraden Zeilen- und Spaltennummer Materialeigenschaften zugewiesen werden. Die Begründung für dieses Vorgehen besteht darin, dass diese Elemente einen Mindestabstand von 2 mm aufweisen und somit die Steifigkeitskomponenten nach Abb. 9.4 keine räumlichen Autokorrelation besitzen. Im Gegensatz zu dem Kern mit seiner ausgeprägten Mikrostruktur, werden die Deckschichten durch 5000 Elemente mit konstanten Materialeigenschaften beschrieben.

Um die Korrelation der Steifigkeitskomponenten untereinander zu berücksichtigen, werden zunächst den genannten finiten Elementen zufällig, jedoch unter Berücksichtigung der Verteilungsfunktion in Abb. 9.2(a), relative Dichten zugewiesen. Anschließend werden die Werte der einzelnen Steifigkeitskomponenten derart bestimmt, dass sie in ihrer Gesamtheit den Verteilungen der einzelnen Dichteklassen in Abb. 9.3 entsprechen. In einem zweiten Schritt werden die Werte der Steifigkeitskomponente der finiten Elemente berechnet, die als direkte Nachbarn an die finiten Elemente mit bereits zugewiesenen Materialeigenschaften angrenzen. Diese erhalten den Mittelwert der beiden Nachbarelemente zuzüglich einer Streuung die nach Abb. 9.5 kleiner als die Semi-Varianz für einen Abstand von $r_E = 1 \text{ mm}$ ist. Zuletzt werden den verbleibenden finiten Elementen Werte für die Steifigkeitskomponenten zugewiesen, die sich aus dem Mittelwert der acht Nachbarelemente zuzüglich einer erneuten Streuung berechnen.

Ein exemplarischer Vergleich zwischen den Ergebnissen eines auf diese Weise generierten Zufallsfelds und den Mikrostrukturdaten in Abb. 9.7 zeigt, dass die Zufallsfelder Steifigkeitsverteilungen besitzen, die eine sehr gute Übereinstimmung zu den Verteilungsfunktionen der Mikrostrukturmodelle aufweisen. So weichen die Erwartungswerte $E(\bar{C}_N) \simeq 2,856 \text{ GPa}$, $E(\bar{C}_K) \simeq 1,231 \text{ GPa}$ und $E(\bar{C}_S) \simeq 0,810 \text{ GPa}$ für die Normal-, Koppel- und Schubsteifigkeiten um weniger als ein halbes Prozent von den Mikrostrukturergebnissen ab. Allenfalls festzuhalten ist, dass die Streubandbreite etwas geringer ausfällt und die Schiefe der Verteilungsfunktionen für die Normalsteifigkeiten etwas ausgeprägter ist. Des Weiteren entsprechen auch die Koeffizienten der räumlichen Autokorrelation den Ergebnissen der Mikrostruktur wie Abb. 9.8 für die Normal-, Koppel- und Schubsteifigkeiten deutlich zeigt.

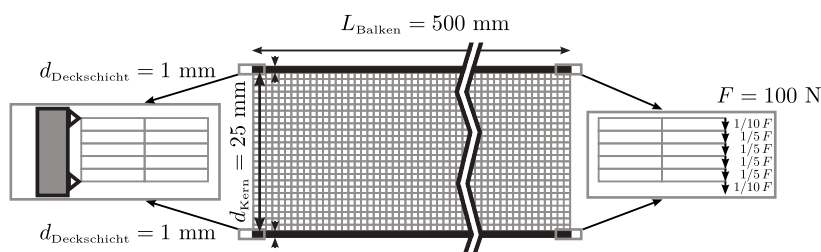


Abb. 9.6: Sandwichbalken-Modell mit Zufallsfeld zur Diskretisierung des Kerns

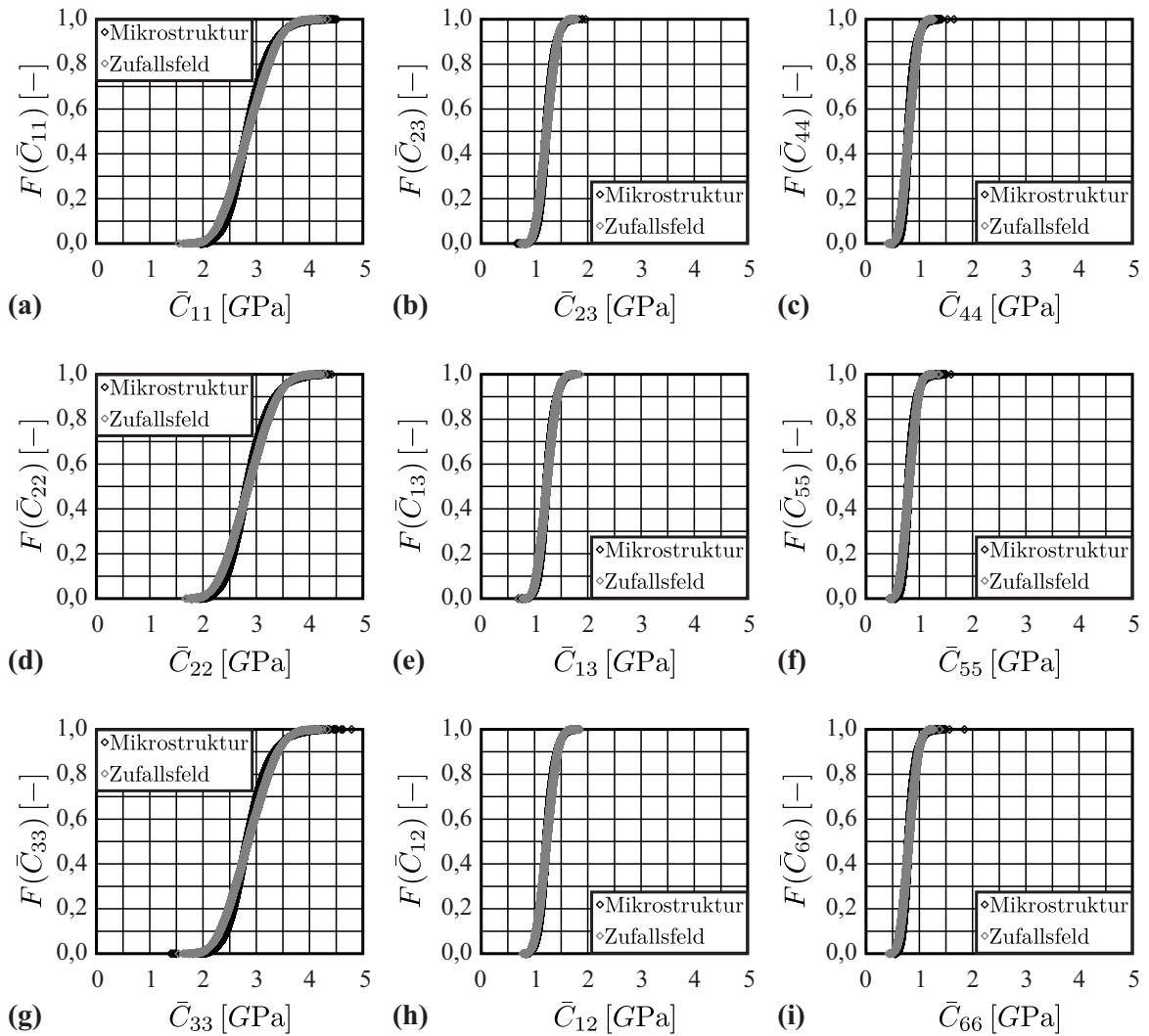


Abb. 9.7: Vergleich der Steifigkeitsverteilungen der Mikrostrukturanalyse und der generierten Zufallsfelder

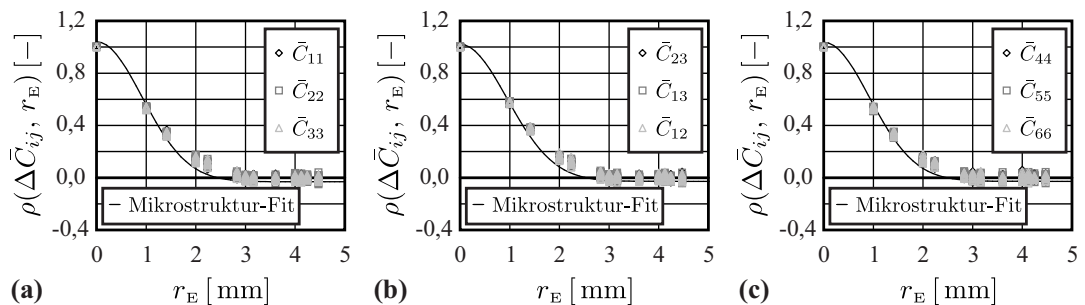


Abb. 9.8: Vergleich räumlichen Autokorrelation der Steifigkeitskomponenten der Mikrostrukturanalyse und der generierten Zufallsfelder

9.4 Ergebnisse

Zur Untersuchung der Materialunschärfen im Sandwichbalken wird als globale Größe die Balkenabsenkung an diskreten Punkten im Abstand von 50 mm ausgewertet. Zudem werden die räumlichen Verteilungen der VON-MISES- und der hydrostatischen Spannung betrachtet und die maximalen Spannungswerte aller Rechnungen als Verteilungsfunktionen aufbereitet.

In Abb. 9.9(a) ist zu erkennen, dass in den Ergebnissen der Balkenabsenkung keine signifikante Streuung auftritt. Darüber hinaus stimmen die Ergebnisse der Rechnungen mit den Zufallsfeldern zur Diskretisierung des Kerns mit der Balkenabsenkung überein, die zum Vergleich für einen Sandwichbalken mit einem homogenen Medium im Kern berechnet worden ist. Eine detaillierte Betrachtung liefern die Diagramme in den Abb. 9.9(b) und (c). So zeigt das Diagramm in Abb. 9.9(b) die diskrete Verteilungsfunktion für die Absenkung in der Mitte des Balkens. Eine Streuung ist hier nun erkennbar, allerdings beträgt sie weniger als einen Hundertstelmmillimeter. Zum Vergleich ist zudem die Balkenabsenkung für die Rechnung mit dem homogenen Medium im Kern als senkrechte Linie dargestellt. Ein Vergleich zeigt, dass die Rechnungen mit den Zufallsfeldern in allen Fällen minimal höhere Werte für die Balkenabsenkung liefern. Dieses Ergebnis ist auch in dem Diagramm in Abb. 9.9(c) zu beobachten, in dem die Absenkungen als diskrete Verteilungen am Ende des Balkens dargestellt sind. So hat die Differenz zwischen den Ergebnissen aus den Rechnungen mit den Zufallsfeldern zu der Vergleichsrechnung mit dem homogenen Medium im Kern weiter zugenommen und auch die Streubandbreite ist deutlich ausgeprägter. Trotz dieser Beobachtungen bleibt jedoch festzuhalten, dass auf globaler Ebene kein nennenswerter Unterschied in den Balkenabsenkungen festzustellen ist.

Anders sieht dies bei der Betrachtung der lokalen Spannungen in Abb. 9.10 aus. Dargestellt sind hier in der ersten und zweiten Spalte die Werte der VON-MISES- und in der dritten Spalte der hydrostatischen Spannungen der einzelnen finiten Elemente. Dabei zeigen die ersten beiden Spalten die ersten 50 mm in der Nähe der Einspannung und die dritte Spalte die letzten 50 mm im Bereich der Kraftaufbringung. Neben der Auswahl von drei Rechnungen mit Zufallsfeldern ist zudem in der unteren Zeile das Ergebnis der Rechnung mit dem homogenen Medium im Kern dargestellt.

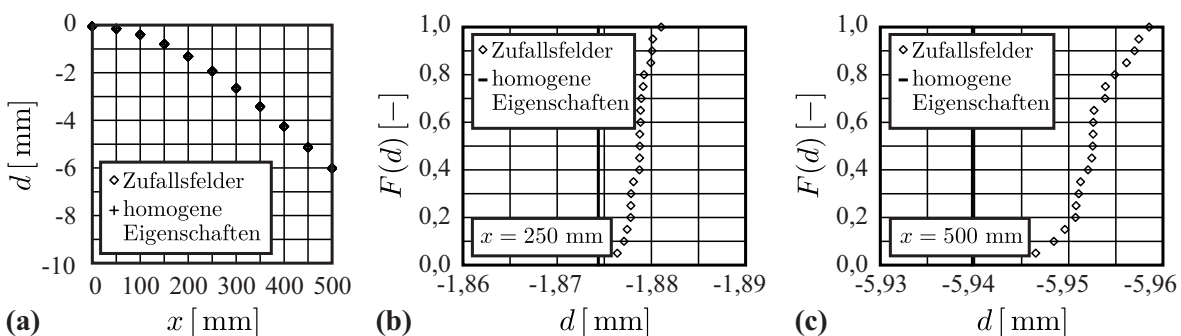


Abb. 9.9: Globale Balkenabsenkung (a) und Verteilungsfunktionen der Absenkung in der Balkenmitte (b) und am Balkenende (c)

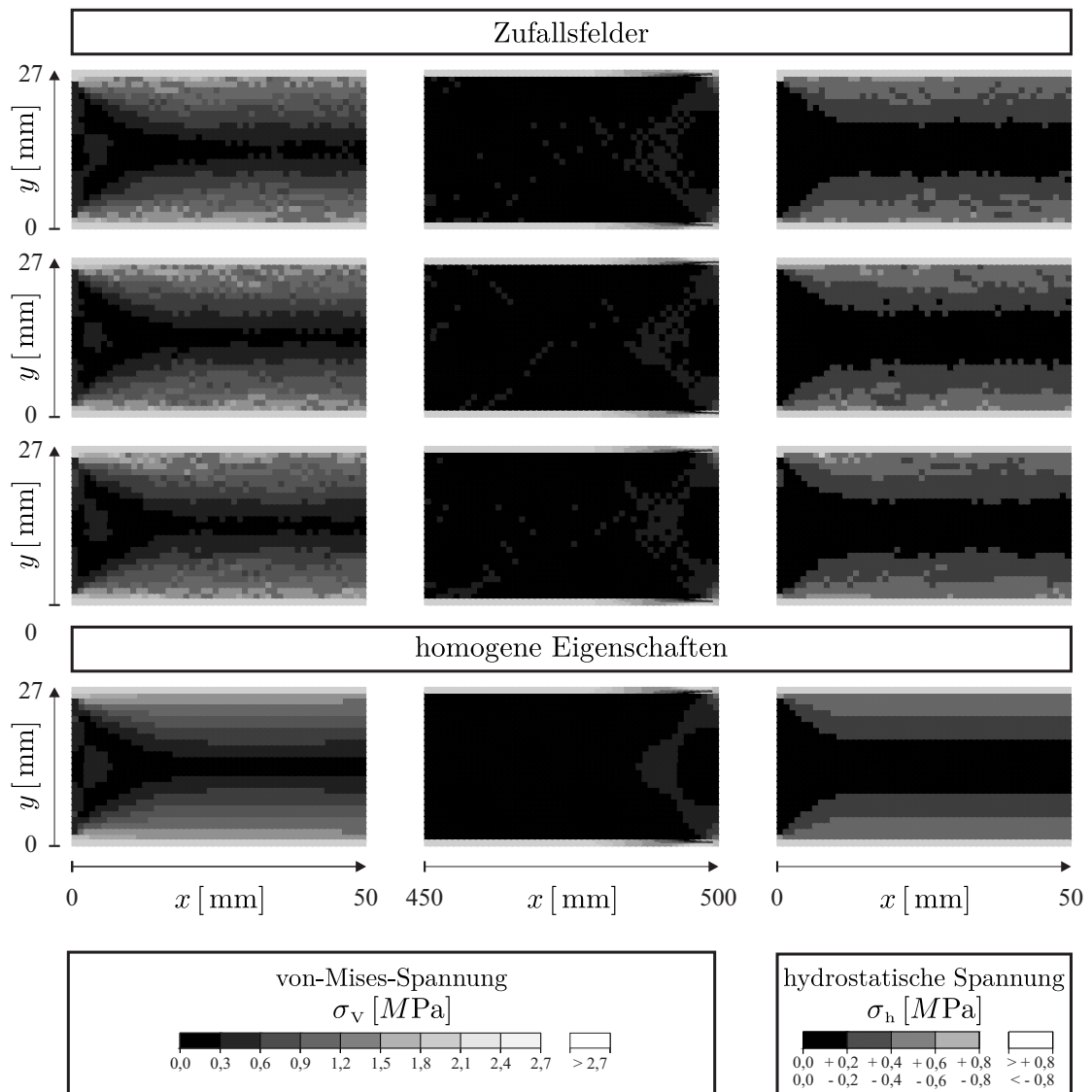


Abb. 9.10: Ausgewählte lokale Spannungsverteilungen

Auf dem ersten Blick ist vor allem im Bereich der Einspannung eine signifikante Streuung in den lokalen VON-MISES-Spannungswerten σ_v zu beobachten. Das Spannungmaximum σ_v^{\max} von etwa 3 MPa ist in allen Fällen in unmittelbarer Nähe zur Einspannung am oberen Rand des Kerns auszumachen. Entlang des Balkens und in Richtung der neutralen Faser nehmen die VON-MISES-Spannungswerte jedoch auf Werte nahe null ab. Eine Ausnahme ist am Ende des Balkens zu erkennen. So treten dort aufgrund der Kraftaufbringung in den Eckbereichen erneut höhere VON-MISES-Spannungswerte auf. Als zweite für die Festigkeitsbewertung von Schäumen wesentliche Spannungskomponente nehmen die hydrostatischen Spannungen Werte im Bereich von $\sigma_h^{\min} = -1,4 \text{ MPa}$ bis $\sigma_h^{\max} = 1,4 \text{ MPa}$ an, wobei die Extremwerte in der Nähe der Deckschichten zu beobachten sind. In Richtung der neutralen Faser nähern sich die Spannungsverteilungen erneut Werten nahe null. Da ebenfalls die Werte der hydrostatischen

9 Übertragung auf die strukturelle Ebene

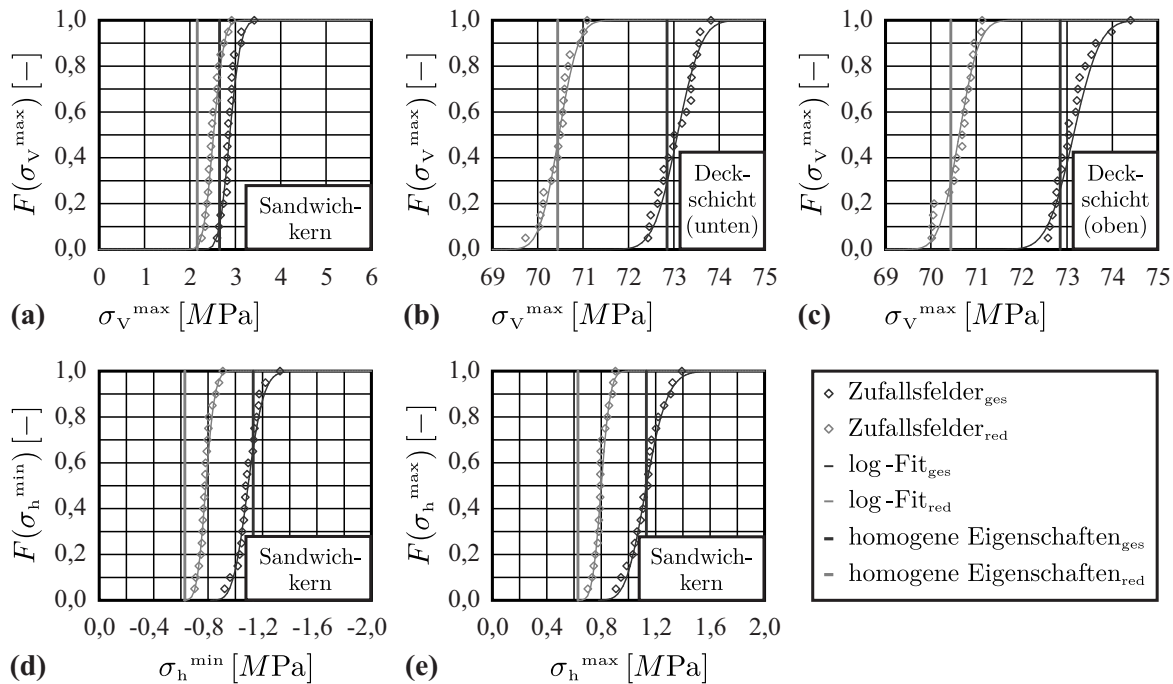


Abb. 9.11: Verteilungen der extremalen Spannungswerte

Spannung entlang des Balkens abnehmen, sind die Verteilungen am Ende des Balkens für die hydrostatischen Spannungen nicht abgebildet.

Für die Bestimmung von Materialunschärfen sind die extremalen Spannungswerte von ausschlaggebender Bedeutung. Aus diesem Grund sind in Abb. 9.11 sowohl die maximalen VON-MISES- als auch die extremalen hydrostatischen Spannungswerte als diskrete Verteilungsfunktionen getrennt für den Sandwichkern und die beiden Deckschichten dargestellt.

Da die Finite-Elemente-Modelle nicht in der Lage sind, die Spannungslokalisierung im Bereich der Einspannung und der Kraftaufbringung auf korrekte Weise wiederzugeben, ist neben der Betrachtung von allen finiten Elementen zudem eine alternative Auswertung in Abb. 9.11 dargestellt, wobei die finiten Elemente in den ersten drei Millimetern im Bereich der Balkeneinspannung sowie im letzten Millimeter im Bereich der Kraftaufbringung für die Bestimmung der Maximalwerte nicht berücksichtigt worden sind.

Bei den Verteilungen der maximalen VON-MISES-Spannungswerte fällt auf, dass die Spannungen in den beiden Deckschichten nicht nur wesentlich höher als im Kern sind, sondern auch die absolute Streubandbreite deutlich größer ist. Während die Verteilungen für die Ergebnisse der Deckschichten jedoch um den Wert streut, der aus der Rechnung mit dem homogenen Medium im Kern stammt, treten im Sandwichkern fast ausschließlich Maximalwerte für die Rechnungen mit den Zufallsfeldern auf, die höher sind als das Ergebnis der Vergleichsrechnung. Durch die alternative Auswertung mit dem reduzierten Auswertebereich verstärkt sich dieser Effekt sogar noch, wobei erwartungsgemäß etwas niedrigere Spannungswerte auftreten, die jedoch nach wie vor in die Größenordnung der kritischen Spannungen kommen.

Darüber hinaus ist die extrem starke Streuung im Kern zu beachten. So treten in der Auswertung aller finiten Elemente maximale VON-MISES-Spannungswerte zwischen etwa 2,5 MPa und 3,5 MPa auf, was einer Abweichung vom Median von zum Teil über 15 % entspricht. Dies zeigt, dass durch eine rein deterministische Analyse nicht nur die Streuung der lokalen Belastung als festigkeitsrelevante Größe nicht erfasst wird, sondern auch der Median deutlich unterschätzt werden kann.

Die ausgeprägte Streuung im Sandwichkern ist zudem in den Verteilungen der minimalen und maximalen hydrostatischen Spannungen wiederzufinden. Während bei der Auswertung aller finiten Elemente die Verteilung der Ergebnisse aus den Zufallsrechnungen um das Ergebnis der Vergleichsrechnung streuen, liefert die alternative Auswertung mit dem reduzierten Auswertebereich ausschließlich maximale bzw. minimale hydrostatische Spannungswerte, die extremer als der Vergleichswert sind.

So zeigt dieses einfache Beispiel eindrucksvoll, dass bei der Bestimmung der Materialunschärfen eines Bauteils mit mikrostrukturellen Anteilen eine rein deterministische Betrachtungsweise unzureichend sein kann, da bei den maximalen Spannungswerten, die für das Materialversagen von entscheidender Bedeutung sind, nicht nur die Streuung nicht bestimmt werden kann, sondern möglicherweise auch mit gravierenden Folgen zu niedrige Spannungswerte vorhergesagt werden.

Darüber hinaus ist festzuhalten, dass sich die Steifigkeits- und Festigkeitsbetrachtung grundlegend voneinander unterscheiden. So konnten bei der Steifigkeitsbewertung nur unwesentliche Streueffekte im Gesamtverhalten beobachtet werden, da die Balkenendabsenkung als globale Größe einem Selbstmittelungseffekt unterliegt.

Bei der Festigkeit liegt hingegen keine Mittelwert-, sondern eine Extremwertstatistik vor. So treten wesentliche Streueffekte auf, die unter anderem auch in der inhomogenen Spannungsverteilung über das Gesamtproblem zu begründen sind. In Folge dessen ist im Vergleich zur Steifigkeitsbewertung für die Festigkeitsbewertung das zu betrachtende relevante Gebiet um Größenordnungen kleiner.

Abschließend ist festzuhalten, dass die anhand dieses einfachen Fallbeispiels vorgestellten probabilistischen Verfahren zur Bestimmung der Materialunschärfen ohne Weiteres auf komplexe Bauteile übertragen werden können.

10 Zusammenfassung und Ausblick

Für den Einsatz in vielen technischen Anwendungen ist die Charakterisierung und Bewertung der Materialeigenschaften fester Schäume von außerordentlich großem Interesse. Eine Besonderheit dieser Werkstoffgruppe besteht in ihrer mikrostrukturellen Unordnung, deren Einfluss auf der Makroebene sich in der Unschärfe der effektiven Materialeigenschaften wiederfinden lässt. Im Gegensatz zu herkömmlichen Materialien, wie z. B. Metallen, bei denen gewöhnlich die Mikroheterogenitäten um Größenordnungen kleiner als die Bauteilgröße sind, ist für die Bewertung dieser mikroheterogenen Schäume eine rein deterministische Betrachtungsweise unzureichend.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine probabilistische Methode zur numerischen Vorhersage der Eigenschaften mikroheterogener Materialien vorgestellt. Die verwandte verzerrungsenergiebasierte Homogenisierungsanalyse zur Bestimmung der effektiven Materialeigenschaften ist dabei insbesondere auf zelluläre Strukturen mit geringer relativer Dichte und großen Hohlraumanteilen abgestimmt.

Für die Generierung der Mikrostrukturmodelle wurde sich für das VORONOÏ-Verfahren in LAGUERRE-Geometrie entschieden, da hierdurch im Gegensatz zur direkten Vernetzung von realen Mikrostrukturausschnitten statistisch repräsentative Mikrostrukturmodelle mit vorgegebenen Zellgrößenverteilungen erzeugt werden können.

Eine Validierung der generierten Zelltopologie erfolgte anhand eines experimentell charakterisierten offenzelligen Metallschaums. Dabei zeigte sich, dass sowohl die Zellgrößenverteilung als auch die Form der einzelnen Zellen durch die Mikrostrukturmodelle wiedergegeben werden können.

Zur Bestimmung der Streuung der Mikrostruktureigenschaften wurden eine probabilistische Methode vorgestellt. Eine Anwendung erfolgte anschließend exemplarisch an einem geschlossenzelligen Aluminiumschaum, wobei übereinstimmende Ergebnisse für die drei verschiedenen Varianten der angewandten probabilistischen Methode erzielt werden konnten. Für den konkreten Anwendungsfall hängt die Wahl somit von den vorgestellten Vor- und Nachteilen der einzelnen Varianten ab. So können derzeit rein technisch offenzellige Schäume – wenngleich eine Erweiterung der beiden anderen Varianten denkbar ist – nur mit der mehrfachen Testvolumenelemente-Auswertung untersucht werden, während für die Untersuchung der räumlichen Autokorrelation das „Moving-Window“-Verfahren am besten geeignet ist, da bei diesem Verfahren eine rasterförmig Anordnung der zu analysierenden Mikrostrukturausschnitte möglich ist. Der wesentliche Vorteil der zellbasierten Auswertung besteht hingegen in der Ermittlung der lokalen Eigenschaften einzelner Zellen. Bei der Ergebnisbewertung ist bei allen drei Verfahren die Größe der Auswerteausschnitte zwingend zu berücksichtigen, da

bei größeren Mikrostrukturausschnitten ein Selbstmittelungseffekt einsetzt.

Der wesentliche Vorteil im Gegensatz zu reinen MONTE-CARLO-Verfahren besteht bei der vorgestellten probabilistischen Methode im deutlich verringerten Rechenaufwand, da durch die Diskretisierung des Wahrscheinlichkeitsraums gezielt Bereiche großen Interesses untersucht werden können. So wurde anhand der mehrfachen Testvolumenelemente-Auswertung gezeigt, dass trotz einer erheblichen Reduzierung der Datenbasis bei geeigneter Diskretisierung hochwertige Ergebnisse erzielt werden können.

Mittels einer Parameterstudie wurde zudem aufgezeigt, dass Variationen in den Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Eingangsgrößen nicht zwangsläufig zu analogen Effekten in den Verteilungen der effektiven Materialeigenschaften führen, was im unterschiedlich stark ausgeprägten Einfluss der einzelnen Eingangsgrößen auf die verschiedenen Materialparameter zu begründen ist.

Auffällig bei der Untersuchung der räumlichen Autokorrelation am Beispiel eines geschlossenzelligen Aluminiumschaums war, dass selbst die direkte Umgebung einer Zelle nur geringen Einfluss auf das Materialverhalten der betrachteten Zelle besaß.

Motiviert durch die aus der lokalen Auswertung gewonnenen Erkenntnisse wurde ein probabilistisches Stoffgesetz für die Steifigkeiten auf der Basis der relativen Dichte sowie der Zellgröße und der Zellorientierung abgeleitet mit dem Ziel die effektiven Materialeigenschaften aus den Mikrostrukturdaten eines experimentell charakterisierten Schaums vorhersagen und durch weitere numerische Rechnungen auch optimieren zu können.

Da bei der Bewertung größerer Bauteile mit mikrostrukturellem Anteil auch heutzutage die Grenzen der Rechenkapazität erreicht werden, erfolgte eine Übertragung der probabilistischen Methode auf die strukturmechanische Ebene. So wurde exemplarisch an einem Sandwichtragwerk mit der Generierung von Zufallsfeldern ein stochastischer Ansatz vorgestellt, der es ermöglicht die Streuung und Korrelationen der Mikrostruktureigenschaften ohne die reale Abbildung der Mikrostruktur zu berücksichtigen. Die Ergebnisse zeigen eindrucksvoll, dass eine rein deterministische Betrachtungsweise, bei der der Sandwichkern durch ein homogenes Ersatzmedium abgebildet wird, äußerst kritisch zu betrachten ist. Während die berechneten Werte für die globale Balkenabsenkung der einseitig eingespannten Sandwichbalken für das rein deterministische Bewertungskonzept und die probabilistische Methode ohne nennenswerte Abweichung übereinstimmten, waren bei den Verteilungen der maximal auftretenden lokalen Spannungswerte gravierende Unterschiede festzustellen. So konnte durch die mehrfache Berechnung unter Verwendung verschiedener Zufallsfelder eine deutliche Streuung in den maximal auftretenden Spannungswerten ermittelt werden. Ein Vergleich mit dem Ergebnis der deterministischen Betrachtungsweise zeigte darüber hinaus, dass ein Großteil der Ergebnisse der probabilistischen Methode höhere maximal auftretende Spannungswerte lieferte, was im Hinblick auf das Materialversagen fatale Folgen haben kann.

Um zu illustrieren, dass das probabilistische Bewertungskonzept auch auf andere nicht-metallische Schäume angewendet werden kann, wurde in einem weiteren Beispiel gezeigt, wie die Materialunschärfen in einem Polymerschaum mit ratenabhängigem Verhalten untersucht werden können.

Die hierfür getroffenen stark vereinfachten Annahmen in Bezug auf das Materialverhalten zeigen zugleich ein deutliches Entwicklungspotential für die Zukunft auf. So sind in das Mikrostrukturmodell verschiedene Materialgesetze zur Beschreibung des breiten Spektrums im Materialverhalten fester Schäume zu implementieren. Eine weitere Modellverbesserung wird durch die Berücksichtigung von Imperfektionen – wie sie in allen realen Schäumen z. B. in Form von gekrümmten oder fehlenden Zellstegen bzw. -wänden auftreten – zu erzielen sein, da derzeit die zu hohen Steifigkeitswerte bei der Erstbelastung in den planaren Zellstegen und -wänden zu begründen sind.

In Hinblick auf das Verständnis des Zusammenhangs zwischen der Anisotropie auf der Mikrostrukturebene und den effektiven Materialeigenschaften sowie der damit verbundenen Weiterentwicklung eines probabilistischen Stoffgesetzes scheint die Betrachtung von Schaumstrukturen mit länglichen Zellen mit unterschiedlicher Orientierung, wie sie mit dem VORONOI-Verfahren in LAGUERRE-Geometrie nicht generiert werden können, als unausweichlich.

Bei der Generierung der Zufallsfelder ist darüber nachzudenken wie das inverse Problem der Stochastik aus statistischen Daten Zufallsfelder zu berechnen auf verbesserte Weise realisiert werden kann.

Trotz der stark vereinfachten Vorgehensweise konnten jedoch gerade die Ergebnisse der Sandwichbalkenrechnungen zeigen, dass das Fernziel die Etablierung wahrscheinlichkeitsorientierter Berechnungsmethoden für die Bewertung von Bauteilen mit mikrostrukturellem Anteil sein muss.

Literaturverzeichnis

- [1] ALTENBACH, H.; *Kontinuumsmechanik*; 2. Auflage; Springer Vieweg; Berlin Heidelberg 2012.
- [2] ASHBY, M.F.; *The Mechanical Properties of Cellular Solids*; Metall. Mater. Trans. A **14** (1983) 1755-1769.
- [3] BENSOUSSAN, A., LIONS, J.L. und PAPANICOLAOU, G.; *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*; North Holland Publishing; Amsterdam 1978.
- [4] BISHOP, J.F.W. und HILL, R.; *A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stress*; Philos. Mag. **42** (1951) 414-427.
- [5] BOCK, J.J.; *A geometric study of liquid retention in open-cell metal foams*; Dissertation; University of Illinois at Urban-Champaign; 2011.
- [6] BOUIX, R., VIOT, P. und LATAILLADE, J.-L.; *Polypropylene foam behaviour under dynamic loadings: Strain rate, density and microstructure effects*; Int. J. Impact Eng. **36** (2009) 329-42.
- [7] CHARMPIS, D.C., SCHUËLLER, G.I. und PELLISSETTI, M.F.; *The need for linking micromechanics of materials with stochastic finite elements: A challenge for materials science*; Comput. Mater. Sci. **41** (2007) 27-37.
- [8] CHRISTENSEN, R.M.; *Mechanics of low density materials*; J. Mech. Phys. Solids **34** (1986) 563-578.
- [9] CHRISTENSEN, R.M.; *Sufficient symmetry conditions for isotropy of the elastic moduli tensor*; J. Appl. Mech.-T. ASME **54** (1987) 772-777.
- [10] COWIN, S.C.; *The relationship between the elasticity tensor and the fabric tensor*; Mech. Mat. **4** (1985) 137-147.
- [11] COWIN, S.C.; *A note on the anisotropy and fabric of highly porous materials*; J. Mater. Sci. **26** (1991) 5155-5157.
- [12] DANIEL, I.M., CHO, J.-M., WERNE, B.T. und FENNER, J.S.; *Characterization and Constitutive Modeling of Sandwich Foam Cores under Static and Dynamic Loading*; In: (CASARI, P., Hrsg.): *Book of abstracts 10th International Conference On Sandwich Structures* (2012) 27-28.
- [13] DELAUNAY, B.N.; *Sur la sphère vide. In: Bulletin of Academy of Sciences of the USSR* 7 (1934) Nr. 6, 793-800.

- [14] DEMENT'EV, A.G. und TARAKANOV, O.G.; *Effect of cellular structure on the mechanical properties of plastic foams*; In: *Polym. Mech, original in russisch: Mekh. Polim.* **6** (1970) 519-525.
- [15] DESCELIERS, C., GHANEM, R. und SOIZE, C.; *Maximum likelihood estimation of stochastic chaos representations from experimental data*; *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **66** (2006) 978-1001.
- [16] DILLARD, T., N'GUYEN, F., MAIRE, E., SALVOS, L., FOREST, S., BIENVENU, Y., BARTOUT, J.-D., CROSET, M., DENDIEVEL, R. und CLOETENS, P.; *3D quantitative image analysis of open-cell nickel foams under tension and compression loading using X-ray microtomography*; *Philos. Mag.* **85** (2005) 2147-2175.
- [17] DIMITROVOVÁ, Z.; *Effective Constitutive Properties of Linear Elastic Cellular Solids With Randomly Oriented Cells*; *J. Appl. Mech.* **66** (1999) 918-925.
- [18] DRUGAN, W.J. und WILLIS, J.R.; *A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites*; *J. Mech. Phys. Solids* **44** (1996) 497-524.
- [19] ELMOUTAOUAKKAIL, L., SALVO, L., MAIRE, E. und PEIX, G.; *2D and 3D characterisation of metal foams using X-Ray tomography*; In (BANHART J., ASHBY, M.F. und FLECK, N.A., Hrsg.): *Cellular Metals and Metal Foaming Technology* (2001) 245-250.
- [20] FAHLBUSCH, N.-C. und BECKER, W.; *Effective Mechanical Properties of Closed-Cell Foams Investigated with a Microstructural Model and Numerical Homogenization*; In: (Altenbach, H. und Eremeyev, V.A., Hrsg.): *Shell-like Structures, Advanced Structured Materials* **15** (2011) 549-559.
- [21] FAHRMEIR, L., KÜNSTLER, R., PIGEOT, I. und TUTZ, G.; *Statistik*; 7. Auflage; Springer-Verlag; Berlin Heidelberg New York 2011.
- [22] FAN, Z., WU, Y., ZHAO, X. und LU, Y.; *Simulation of polychrystalline structure with Voronoï diagram in Laguerre geometry based on random closed packing of spheres*; *Comput. Mater. Sci.* **29** (2004) 301-308.
- [23] FAZEKAS, A., DENDIEVEL, R., SALVO, L. und BRÉCHET, Y.; *Effect of microstructural topology upon the stiffness and strength of 2D cellular structures*; *Int. J. Mech. Sci.* **44** (2002) 2047-2066.
- [24] FRIIS, E.A., LAKERS, R.S. und PARKS, J.B.; *Negative Poisson's Ratio Polymeric and Metallic Foams*; *J. Mater. Sci.* **23** (1988) 4406-4414.
- [25] GENT, A.N. und THOMAS, A.G.; *Mechanics of foamed elastic materials*; *Rubber Chem. Technol.* **39** (1963) 597-610.
- [26] GIBSON, L.J. und ASHBY, M.F.; *The mechanics of three-dimensional cellular materials*; *P. Roy. Soc. Lond. A* **382** (1982) 25-42.
- [27] GIBSON, L.J. und ASHBY, M.F.; *Cellular Solids - Structure and Properties*; Cambridge University Press; Cambridge 1997.

- [28] GITMAN, I.M., ASKES, H. und SLUYS, L.J.; *Representative volume: Existence and size determination*; Eng. Fract. Mech. **74** (2007) 2518-2534.
- [29] GOLUB, G.H. und WELSCH, J.H.; *Calculation of Gauss Quadrature Rules*; Math. Comput. **23** (1969) 221-230.
- [30] GOODCHILD, M.F.; *Spatial Autokorrelation*; 1. Auflage; Geo Books; Norwich 1989.
- [31] GRENESTEDT, J.L.; *Effective elastic behaviour of some models for 'perfect' cellular solids*; Int. J. Solids Struct. **36** (1999) 1471-1501.
- [32] GUILLEMINOT, J., SOIZE, C., KONDO, D. und BINETRUY, C.; *Theoretical framework and experimental procedure for modelling mesoscopic volume fraction stochastic fluctuations in fiber reinforced composites*; Int. J. Solids Struct. **45** (2008) 5567-5583.
- [33] GUILLEMINOT, J., SOIZE, C. und KONDO, D.; *Mesoscale probabilistic models for the elasticity tensor of fiber reinforced composites: Experimental identification and numerical aspects*; Mech. Mater. **41** (2009) 1309-1322.
- [34] HANSEN, A.G., HOPPERSTAD, O.S., LANGSETH, M. und ILSTADT, H.; *Validation of constitutive models applicable to aluminium foams*; Int. J. Mech. Sci. **44** (2002) 359-406.
- [35] HARDENACKE, V. und HOHE, J.; *Assessment of space division strategies for generation of adequate computational models for solid foams*; Int. J. Mech. Sci. **52** (2010) 1772-1782.
- [36] HARDERS, H., HUPFER, K. und RÖSLER, J.; *Influence of cell wall shape and density on the mechanical behaviour of 2D foam structures*; Acta Mater. **52** (2005) 1335-1345.
- [37] HARRIGAN, T.P. und MANN, R.W.; *Characterization of microstructural anisotropy in orthotropic materials using a second rank tensor*; J. Mater. Sci. **19** (1984) 761-767.
- [38] HASHIN, Z.; *Analysis of composite materials – a survey*; J. Appl. Mech. **50** (1983) 481-505.
- [39] HAZANOV, S. und HUET, C.; *Order relationships for boundary condition effect in heterogeneous bodies smaller than the representative volume*; J. Mech. Phys. Solids **42** (1994) 1995-2011.
- [40] HILL, R.; *The elastic behaviour of crystalline aggregate*; P. Roy. Soc. Lond. **A 65** (1952) 349-354.
- [41] HILL, R.; *Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles*; J. Mech. Phys. Solids **11** (1963) 357-372.
- [42] HOHE, J. und BECKER, W.; *Effective mechanical behavior of hyperelastic honeycombs and two-dimensional model foams at finite strain*; Int. J. Mech. Sci. **45** (2003) 891-913.
- [43] HOHE, J. und BECKER, W.; *A probabilistic approach to the numerical homogenization of irregular solid foams in the finite strain regime*; Int. J. Solids Struct. **42** (2005) 3549-3569.
- [44] HOHE, J. und GUMBSCH, P.; *On the potential of tungsten-vanadium composites for high temperature application with wide-range thermal operation window*; J. Nucl. Mater. **400** (2010) 218-231.

- [45] HOOKE, R.; *Micrographia*; Roy. Soc. Lond. (1665).
- [46] HUBER, A.T. und GIBSON, L.J.; *Anisotropy of foams*; J. Mater. Sci. **23** (1988) 3031-3040.
- [47] HUET, C.; *Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies*; J. Mech. Phys. Solids **38** (1990) 813-841.
- [48] JUNG, M. und LANGER, U.; *Methode der finiten Elemente für Ingenieure*; 2. Auflage; Springer-Verlag; Wiesbaden 2013.
- [49] KANIT, T., FOREST, S., GALLIET, I., MOUNOURY, V. und JEULIN, D.; *Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach heterogeneous bodies*; Int. J. Solids Struct. **40** (2003) 3647-3679.
- [50] KENESEI, P., KÁDÁR, Cs., RAJKOVITS, Zs. und LENDVAI, J.; *The influence of cell-size distribution in the plastic deformation in metal foams*; Scripta Mater. **50** (2004) 295-300.
- [51] KOLLURI, M., KARTHIKEYAN, S. und RAMAMURTY, U.; *Effect of lateral constrain on the mechanical properties of a closed-cell Al foam: I. Experiments*; Metall. Mater. Trans. A **38** (2007) 2006-2013.
- [52] KUCHLING, H.; *Taschenbuch der Physik*; 17. Auflage; Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag; München 2001.
- [53] LAKES, R.; *Materials with structural hierarchy*; Nature **361** (1993) 511-515.
- [54] LASCHET, G., KASHKO, T., ANGEL, S., SCHEELE, J., NICKEL, R., BLECK, W. und BOBZIN, K.; *Microstructure based model for permeability predictions of open-cell metallic foams via homogenization*; Mater. Sci. Eng. A **472** (2008) 214-226.
- [55] LEBÉE, A. und SAB, K.; *Homogenization of cellular sandwich panels*; Comptes Rendus Mécanique **340**, 4-5 (2012) 320-337.
- [56] LI, K., GAO, X.-L. und SUBHASH, G.; *Effects of cell shape and strut cross-sectional area variations on the elastic properties of three-dimensional open-cell foams*; J. Mech. Phys. Solids **54** (2006) 783-806.
- [57] LIEBSCHER, A., PROPPE, C., REDENBACH, C. und SCHWARZER, D.; *Stochastic multi-scale modeling of metal foams*; Procedia IUTAM **6** (2013) 87-96.
- [58] LIEBSCHER, A. und REDENBACH, C.; *Statistical analysis of the local strut thickness of open cell foams*; Image Anal. Stereol. **32** (2013) 1-12.
- [59] MANGIPUDI, K.R. und ONCK, P.R.; *Tensile failure of two-dimensional quasi-brittle foam*; Int. J. Solids Struct. **49** (2012) 2823-2829.
- [60] MARKAKI, A.E. und CLYNE, T.W.; *The Effect of Cell Wall Microstructure on the Deformation and Fracture of Aluminium-Based Foams*; Acta Mater. **49** (2001) 1677-1686.
- [61] MARKOV, K.Z. und PREZIOSI, L.; *Heterogeneous media: micromechanic modeling methods and simulations*; Birkhäuser; Boston 2000.

- [62] MATZKE, E.B.; *The three-dimensional shapes of bubbles in foams*; P. Natl. Acad. Sci. USA **31** (1945) 281-289.
- [63] MCCULLOUGH, K.Y.G., FLECK, N.A. und ASHBY, M.F.; *Uniaxial stress-strain behaviour of aluminium alloy foams*; Acta Mater. **47** (1999) 2323-2330.
- [64] MENGES, G. und KNIPSCHILD, F.; *Estimation of Mechanical Properties for Rigid Polyurethane Foams*; Polym. Eng. Sci. **15** (1975) 623-627.
- [65] MONNEREAU, C. und VIGNES-ADLER, M.; *Optical Tomography of Real Three-Dimensional Foams*; J. Colloid Interf. Sci. **202** (1998) 45-53.
- [66] MONTMINY, M.D., TANNENBAUM, A.R. und MACOSKO, C.W.; *The 3D structure of real polymer foams*; J. Colloid. Interf. Sci. **280** (2004) 202-211.
- [67] MORAN, P.A.P.; *The interpretation of statistical maps*; J. Roy. Stat. Soc. **B 10** (1948) 243-251.
- [68] NEMAT-NASSER, S. und HORI, M.; *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*; North Holland Publishing; Amsterdam 1993.
- [69] OGDEN, R.W.; *Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids*; P. Roy. Soc. Lond. **A 326** (1972) 565-584.
- [70] OGDEN, R.W., SACCOMANDI, G. und SGURA, I.; *Fitting hyperelastic models to experimental data*; Comput. Mech. **34** (2004) 484-502.
- [71] ONCK, P.R.; *Size effects in ductile cellular solids. Part I: modeling*; Int. J. Mech. Sci. **43** (2001) 681-699.
- [72] PARISCH, H.; *Festkörper-Kontinuumsmechanik*; 1. Auflage; Teubner, Stuttgart Leipzig Wiesbaden 2003.
- [73] PETRASCH, J., WYSS, P. und STEINFELD, A.; *Tomography-based Monte-Carlo determination of radiative properties of reticulate porous ceramics*; J. Quant. Spectrosc. Ra. **105** (2007) 180-197.
- [74] PONTE CASTAÑEDA, P. und SUQUET, P.; *On the Effective Mechanical Behaviour of Weakly Inhomogeneous Nonlinear Materials*; Eur. J. Mech. **A 14** (1995) 205-236.
- [75] RAMAMURTY, U. und PAUL, A.; *Variability in mechanical properties of a metal foam*; Acta Mater. **52** (2004) 869-876.
- [76] REDENBACH, C.; *Microstructure models for cellular materials*; Comp. Mater. Sci. **44** (2009) 1397-1407.
- [77] REUSS, A.; *Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen aufgrund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle*; ZAMM **9** (1929) 49-58.
- [78] RINCÓN KOHLI, L.; *Identification of a multiaxial failure criterion for human trabecular bone*; Dissertation; Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentine; 2003.
- [79] RÖSLER, J., HARDERS, H. und BÄKER, M.; *Mechanisches Verhalten der Werkstoffe*; 2. Auflage; Teubner; Wiesbaden 2006.

- [80] SANCHEZ-PALENCIA, E. und ZAOU, A.; *Homogenization Techniques for Composite Media*; Springer-Verlag; Berlin 1987.
- [81] SCHRAAD, M.W. und HARLOW, F.H.; *A stochastic constitutive model for disordered cellular materials: Finite-strain uni-axial compression*; Int. J. Solids Struct. **43** (2006) 3542-3568.
- [82] SCHUËLLER, G.I.; *On the treatment of uncertainties in structural mechanics and analysis*; Comput. Struct. **85** (2007) 235-243.
- [83] SIMONE, A.E. und GIBSON, L.J.; *Effects of solid distribution on the stiffness and strength of metallic foams*; Acta. Mater. **46** (1998) 2139-2150.
- [84] SIMONE, A.E. und GIBSON, L.J.; *The effects of cell face curvature and corrugations on the stiffness and strength of metallic foams*; Acta. Mater. **46** (1998) 3929-3935.
- [85] SOIZE, C.; *A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics*; Probabilist. Eng. Mech. **15** (2000) 277-294.
- [86] SOIZE, C.; *Non-Gaussian positive-definite matrix-valued random fields for elliptic stochastic partial differential operators*; Comput. Method. Appl. M. **195** (2006) 26-64.
- [87] SOIZE, C.; *Tensor-valued random fields for meso-scale stochastic model of anisotropic elastic microstructure and probabilistic analysis of representative volume element size*; Probabilist. Eng. Mech. **23** (2008) 307-323.
- [88] STOMMEL, M., STOJEK, M. und KORTE, W.; *FEM zur Berechnung von Kunststoff- und Elastomerbauteilen*; 1. Auflage; Carl Hanser Verlag; München 2011.
- [89] TERADA, K., HORI, M., KYOYA, T. und KIKUCHI, N.; *Simulation of the multi-scale convergence in computational homogenization approaches*; Int. J. Solids Struct. **37** (2000) 2285-2311.
- [90] TORQUATO, S.; *Random Heterogeneous Materials – Microstructure and Macroscopic Properties*; Springer-Verlag; New York Berlin Heidelberg 2002.
- [91] THOMSON, W. (LORD KELVIN); *On the division of space with minimum partitional area*; Philos. Mag. **24** (1887) 503-514.
- [92] TOBLER, W.R.; *A computer movie simulating urban growth in the Detroit region*; Econ. Geogr. **46** (1970) 234-240.
- [93] TURNER, C.H. und COWIN, S.C.; *Dependence of elastic constants of an anisotropic porous material upon porosity and fabric*; J. Mater. Sci. **22** (1987) 3178-3184.
- [94] TURNER, C.H., COWIN, S.C., RHO, J.R., ASHMAN, R.B. und RICE, J.C.; *The fabric dependence of the orthotropic elastic constants of cancellous bone*; J. Biomech. **23** (1990) 549-561.
- [95] VAN DER BURG, M.W.D., SHULMEISTER, V., VAN DER GEISSEN, E. und MARISSEN, R.; *On the Linear Elastic Properties of Regular and Random Open-Cell Foam Models*; J. Cell. Plast. **33** (1997) 31-54.

- [96] VOIGT, W.; *Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten isotroper Körper*; Ann. Phys. **274** (1889) 573-587.
- [97] VORONOÏ, G.; *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques*; J. Reine Ang. Math. **134** (1908) 198-312.
- [98] WARREN, W.E. und KRAYNIK, A.M.; *Foam mechanics: The linear elastic properties of open-cell foams*; J. Appl. Mech. **55** (1988) 341-346.
- [99] WARREN, W.E. und KRAYNIK, A.M.; *Linear elastic behavior of a low-density Kelvin foam with open cells*; J. Appl. Mech. **64** (1997) 787-794.
- [100] WEAIRE, D. und PHELAN, R.; *A Counter-Example to Kelvin's Conjecture on Minimal Surface*; Philos. Mag. **69** (1987) 107-110.
- [101] WEJRZANOWSKI, T., SKIBINSKI, J., SZUMBARSKI, J. und KURZYDŁOWSKI, K.J.; *Structure of foams modeled by Languerre-Voronoi tessellations*; Comp. Mater. Sci. **67** (2013) 216-221.
- [102] WHITEHOUSE, W.J.; *The quantitative morphology of anisotropic trabecular bone*; J. Microsc. **101** (1974) 153-168.
- [103] WIERZBICKI, T. und DOYOYO, M.; *Determination of the Local Stress-Strain Response of Foams*; J. Appl. Mech.-T. ASME **70** (2003) 204-211.
- [104] YOUSSEF, S., MAIRE, E. und GAERTNER, R.; *Finite element modelling of the actual structure of materials determined by X-ray tomography*; Acta Mater. **53** (2005) 719-730.
- [105] YUPENG, L. und CUBA, M.; *A flexible lag definition for experimental variogram calculation*; Min. Sci. Technol. **21** (2011) 207-211.
- [106] ZHANG, C.Y., TANG, L.Q., YANG, B., ZHANG, L., HUANG, X.Q. und FANG, D.N.; *Meso-mechanical study of collapse and fracture behaviors of closed-cell metallic foams*; Comp. Mater. Sci. Solids **79** (2013) 45-51.
- [107] ZHU, H.X., KNOTT, J.F. und MILLS, N.J.; *Analysis of the elastic properties of open-cell foams with tetrakaidecahedral cells*; J. Mech. Phys. Solids **45** (1997) 319-343.
- [108] ZHU, H.X., HOBDELL, J.R. und WINDLE, A.H.; *Effects of cell irregularity on the elastic properties of open-cell foams*; Acta Mater. **48** (2000) 4893-4900.
- [109] ZYSSET, P.K. und CURNIER, A.; *An alternative model for anisotropic elasticity based on fabric tensors*; Mech. Mater. **21** (1995) 243-250.
- [110] ZYSSET, P.K.; *A review of morphology–elasticity relationships in human trabecular bone: theories and experiments*; J. Biomech. **36** (2003) 1469-1485.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich gemäß § 5 der Promotionsordnung der Naturwissenschaftlichen Fakultäten I, II, III und des Zentrums für Ingenieurwissenschaften der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg vom 13. Juni 2012, die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und die den benutzten Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Freiburg im Breisgau, den 25. März 2014

Carla Beckmann

Lebenslauf

Carla Beckmann Susannenstraße 7b, 33335 Gütersloh

21.02.1984 geboren in Bielefeld

1990-1994 Kapellenschule – städtische katholische Grundschule in Gütersloh

1994-2003 Evangelisch Stiftisches Gymnasium in Gütersloh
Abitur am 27. Juni 2003

2003-2008 Physikstudium an der TU Braunschweig
Diplomprüfung am 27. Oktober 2008

Seit 2008 Wissenschaftliche Mitarbeiterin am
Fraunhofer-Institut für Werkstoffmechanik IWM
in Freiburg im Breisgau

Freiburg im Breisgau, den 25. März 2014

Carla Beckmann

Publikationen

BECKMANN, C. und HOHE, J.; *Assessment of material uncertainties in solid foams based on local homogenization procedures*; Int. J. Solids Struct. **49** (2012) 2807-2822.

BECKMANN, C. und HOHE, J.; *Effects of material uncertainty in the structural response of metal foam core sandwich beams*; Comp. Struct. **113** (2014) 382-395.

BECKMANN, C. und HOHE, J.; *Numerical prediction of disorder effects in solid foams using a probabilistic homogenization scheme*; Mech. Mat. **78** (2014) 22-43.

HOHE, J. und BECKMANN, C.; *Probabilistic homogenization of hexagonal honeycombs with perturbed microstructure*; Mech. Mat. **49** (2012) 13-29.

HOHE, J., BECKMANN, C. und PAUL, H.; *Modeling of uncertainties in long fiber reinforced thermoplastics*; Mater. Design **66** (2015) 390-399.

Konferenzbeiträge

BECKMANN, C. und HOHE, J.; *Stochastische Analyse des effektiven Materialverhaltens von ungeordneten dreidimensionalen Schäumen*; 18. Symposium Verbundwerkstoffe und Werkstoffverbunde; Chemnitz; 30. März - 1. April 2011 (Vortrag).

BECKMANN, C. und HOHE, J.; *Numerical assessment of disorder effects in metal foam core sandwich beams based on a local homogenization procedure*; 83rd Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics; Darmstadt; 26.-30. März 2012 (Vortrag).

BECKMANN, C. und HOHE, J.; *Analysis of Uncertainty Effects in Sandwich Structures with Disordered Cores – Probabilistic Analysis of Structural Response*; 10th International Conference on Sandwich Structures; Nantes (Frankreich); 27.-29. August 2012 (Vortrag).

BECKMANN, C. und HOHE, J.; *Numerische Bestimmung von Materialunsicherheiten in Sandwichtragwerken mit ungeordneter Mikrostruktur im Schaumkern*; 19. Symposium Verbundwerkstoffe und Werkstoffverbunde; Karlsruhe; 3.-5. Juli 2013 (Vortrag).

HOHE, J., BECKMANN, C. und BÖHME, W.; *Multifunktionale Hybridschäume*; 5. Freiburg Workshop zum Werkstoff- und Strukturverhalten bei Crashvorgängen; Freiburg; 21.-22. April 2009 (Poster).

HOHE, J., HARDENACKE, V. und BECKMANN, C.; *Numerical homogenization analysis of disorder effects in the effective thermo-mechanical response of structural foams and porous solids*; IV European Conference on Computational Mechanics; Paris (Frankreich); 16.-21. Mai 2010 (Vortrag).

HOHE, J., BECKMANN, C. und HARDENACKE, V.; *Strategies for numerical prediction of the uncertainty in the material response of solid foams*; 1st International Conference on Materials for Energy; Karlsruhe; 4.-8. Juli 2010 (Vortrag).

HOHE, J., BECKMANN, C., REINFRIED, M. und LUTHARDT, F.; *Numerical prediction of the macroscopic material response for the design of solid foams with structural hierarchy*; 1st International Conference on Cellular Materials; Dresden; 27.-29. Oktober 2010 (Vortrag).

HOHE, J., BECKMANN, C., REINFRIED, M. und LUTHARDT, F.; *Numerische Bestimmung der makroskopischen Eigenschaften hybrider Schäume*; 18. Symposium Verbundwerkstoffe und Werkstoffverbunde; Chemnitz; 30. März - 1. April 2011 (Poster).

HOHE, J. und BECKMANN, C.; *Probabilistic homogenization of solid foams*; 82nd Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics; Graz (Österreich); 18.-21. April 2011 (Vortrag).

HOHE, J. und BECKMANN, C.; *Numerical prediction of material uncertainties in solid foams*; IUTAM Symposium: Mechanics of Fluid and Solid Foams; Austin (USA); 8.-13. Mai 2011 (Vortrag).

HOHE, J. und BECKMANN, C.; *Numerical Analysis of disorder effects in the thermo-mechanical behavior of solid foams*; 16th International Conference on Composite Structures; Porto (Portugal); 28.-30. Juni 2011 (Vortrag).

HOHE, J. und BECKMANN, C.; *Local probabilistic homogenization schemes for assessment of material uncertainties in solid foams*; 83rd Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics; Darmstadt; 26.-30. März 2012 (Vortrag).

HOHE, J., BÖHME, W., LIENHARD, J. und BECKMANN, C.; *Experimental and Numerical Characterization of the Deformation Behavior of Hybrid Foams*; 6. Freiburg Workshop zum Werkstoff- und Strukturverhalten bei Crashvorgängen; Freiburg; 24.-25. April 2012 (Poster).

HOHE, J. und BECKMANN, C.; *Probabilistic homogenization of solid foams with application to sandwich structure*; 23rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics; Peking (China); 19.-24. August 2012 (Vortrag).

HOHE, J. und BECKMANN, C.; *Analysis of Uncertainty Effects in Sandwich Structures with Disordered Cores – Probabilistic Homogenization of Core Material*; 10th International Conference in Sandwich Structures; Nantes (Frankreich); 27.-29. August 2012 (Vortrag).

HOHE, J. und BECKMANN, C.; *Prediction of the uncertainty in the response of foam core sandwich structures due to disordered microstructure of the material*; International Conference on Cellular Materials; Dresden; 7.-9. November 2012 (Vortrag).

HOHE, J., PAUL, H. und BECKMANN, C.; *Probabilistische Modellierung des Elastizitätsverhaltens langfaserverstärkter Thermoplaste*; 19. Symposium Verbundwerkstoffe und Werkstoffverbunde; Karlsruhe; 3.-5. Juli 2013 (Vortrag).

HOHE, J. und BECKMANN, C.; *Prediction of the uncertainty in the response of lightweight structures consisting of solid foams*; 2nd World Congress on Integrated Computational Materials Engineering; Salt Lake City (USA); 7.-11. Juli 2013 (Vortrag).

HOHE, J., BECKMANN, C. und PAUL, H.; *Modeling of uncertainties in long fiber reinforced thermoplastics*; EUROMAT – European Congress and Exhibition on Advanced Materials and Processes; Sevilla (Spanien); 8.-13. September 2013 (Vortrag).

HOHE, J., PAUL, H. und BECKMANN, C.; *A probabilistic elasticity model for long fiber reinforced materials with uncertain local fiber orientation*; 85rd Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics; Erlangen; 10.-14. März 2014 (Vortrag).

WEISE, J., BAUMEISTER, J., HOHE, J., BÖHME, W. und BECKMANN, C.; *Epoxy Aluminum Hybrid Foam – An Innovative Sandwich Core Material with Improved Energy Absorption Characteristics*; 10th International Conference on Sandwich Structures; Nantes (Frankreich); 27.-29. August 2013 (Vortrag).