~~Hft.~~

00 Me

2

Nachtrag

zur

Lehre

über

geometrische und ökonomische

Zertheilung der Felder

von

Johann Andreas Kirchner.

Mit einer Kupfertafel.

Weimar,

in Kommission der Hoffmannischen Buchhandlung 1797.

(Preis 3 Groschen)

§. 1.

Es würde zu viel gesagt seyn, wenn ich behaupten wollte, die Leser meiner Lehre über Zertheilung der Felder mit allen möglichen Fällen, die im gemeinen Leben vorkommen können, bekannt gemacht zu haben. Denn es ist unmöglich alle diese Fälle anzugeben, und dieß war auch meine Absicht nicht. Ich wollte meine Leser nur mit so vieler Theorie bekannt machen, wodurch sie selbst in den Stand gesetzt seyn möchten, alle die Aufgaben, die ihnen vorgelegt werden könnten, nicht allein aufzulösen, sondern auch über die Fehler, die dabey vorfallen, zu urtheilen, und die dabey angenommenen Fälle mögen sie blos als Beyspiele betrachten. Dieß war zwar mein Wunsch, meine Absicht und mein Wille. Aber ich habe nur gethan, so viel ich gekonnt habe; und man wird mir verzeihen, wenn meine Absicht nicht erreicht ist.

Nach dem fünften Kapitel meiner Lehre über Zertheilung der Felder sollen die Theile einer Figur so viel als möglich regulär seyn, und zwar alle, d. i. sie sollen, wo möglich, mit der ganzen Figur einerley Form haben. Man sieht also, wie unschicklich es ist, eine Figur, wie

Fig. 8, durch gerade Linien zu zertheilen, besonders wenn die Figur sehr aus- und einwärts gehende Winkel hat, wodurch eine solche Zertheilung oftmahls unmöglich gemacht werden kann. Aus §. 16, 33, und 36 erhellt, daß, wenn eine Figur der Breite nach zertheilt worden ist, die Theile wohl ein bestimmtes Verhältniß ihrer Breite nach unter sich haben, aber nicht zugleich ihrem Inhalte nach, wenigstens verhalten sich ihre Flächen, wie ihre Breiten, nur unter gewissen Bedingungen, wie aus §. 16 zu ersehen ist.

Die Aufgabe: ein Stükk Feld der Breite nach zu zertheilen, ist also von der: ein Stükk Feld seinem Inhalte nach zu zertheilen, ganz verschieden. Wo die Besitzer einer Lage Felder einmahl unter sich einig worden sind, ihre Lage der Breite nach zu zertheilen, ist es nothwendig ihrem Kontrakte gemäß zu handeln; wo aber dieß nicht ist, so läßt sich aus §. 16 und §. 36 so viele Theorie ableiten, als zur Auflösung einer solchen Aufgabe nöthig ist. Dieses möchte wohl für manchen Leser zu schwer seyn. Ich glaube daher keinen Undank zu verdienen, wenn ich dieß in einem kleinen Nachtrage zur Lehre über Zertheilung der Felder entwikkele.

§. 2.

Wenn eine Figur, wie ABDE, Fig. 1, wo AB und DE einander parallel sind, und die an einer Seite von einer krummen Linie begrenzt ist, in fünf gleiche Theile zertheilt werden soll, so ziehe man aus C durch die Figur die gerade Linie FC mit AB und DE parallel, und an der krummen Grenze AFE die geraden Linien fl und af. Hierauf berechene man den Flächeninhalt von AafF, FflE, aBCf und fCDl, und dividiere die Summe derselben durch die Zahl 5. Es sey der Inhalt eines fünften

ten Theils = m, der von AaflEF = n, n < m, und m — n = p. Es sey ferner der Inhalt von aBCDlf = M, aB = a, fC = b und lD = c Fuß. Nun setze man: wie sich verhält

$$M : p = a : x$$
$$M : p = b : x$$
$$M : p = c : x$$

In der ersten Proportion giebt x die Anzahl der Fuß von ab, in der zweyten von fg, und in der dritten von lm. Hierauf hat man nur nöthig bB, gC und mD in vier gleiche Theile zu theilen.

Sollen es nicht gleiche Theile werden, sondern solche, die sich verhalten, wie die Zahlen d, e, f, g, h, so suche man nach §. 28 meiner Lehre über Zertheilung der Felder den Inhalt der Abtheilung AbgmEF, der wieder = m, und m — n = p seyn soll. Hierauf bestimme man, wie schon gezeigt worden ist, die Anzahl der Fuß von ab, fg und lm, und zertheile nach §. 33 die Linien bB, gC und mD.

Es können auch nach Gefallen mehrere Durchschläge gezogen werden, wie Fig. 2 zu sehen ist; besonders ist dieses nothwendig, wenn die Abschnitte AabD, DbcKHFD zusammen genommen größer sind, als ein verlangter Theil. Denn zieht man die Durchschläge FG und HI den Linien AB und KL parallel, so läßt sich der Abschnitt verkleinern, und, wenn er zu klein ist, der noch fehlende Theil, wie gezeigt worden ist, auf den Durchschlägen abschneiden.

Auf diese Art, wie an Fig. 1 gezeigt worden ist, wird auch eine Figur zertheilt, die an beiden Seiten von krummen Linien begrenzt ist, und oben und unten parallele Seiten hat; die Theile mögen nun gleiche, oder solche seyn, die bestimmte Verhältnisse unter sich haben. Eine solche Figur sey Fig. 3. Man darf nur CD mit AB und EF parallel ziehen, und durch die geraden Linien af, fl, bc und cd die Stükke AaflEC und bBDFdc abschneiden, so, daß jedes kleiner ist, als ein verlangter Theil, und hierauf die Breite der Trapezen, die mit den Abschnitten verlangte Theile geben, bestimmen.

Die ganze Richtigkeit dieses Verfahrens, welches an Fig. 1, 2, 3 gezeigt worden ist, erhellt aus §. 16, meiner Lehre über Zertheilung der Felder. Denn wenn AB, CD und EF Fig. 3 einander parallel sind, so sind die Stükke zwischen ab, fc und ld Trapezen, welche gleiche Höhen haben. Wer im Stande ist, die parallelen Durchschläge auf dem Felde zu ziehen, und den Flächeninhalt aus den auf dem Felde gemessenen Linien berechenen will, der hat nicht nöthig solche Figuren, wie Fig. 1, 2, 3, aufzutragen.

§. 3.

Wenn aber an einer Figur, welche ebenfalls an einer oder an beyden Seiten von krummen Linien begrenzt seyn kann, die obere Seite der untern nicht parallel ist, wie Fig. 4, EG und AB: so ziehe man aus E die gerade Linie EF parallel mit AB, und verfahre völlig wie gezeigt worden ist, d. i. man theile die Linie EF eben so ein, wie AB und CD zertheilt worden sind. Z. B. diese Figur sey in vier Theile A, B, C, D zu zertheilen, die sich gegen einander verhalten, wie die Zahlen m, n, p, q. Es sey $EF = a$, $Ea = v$, $ab = x$, $bc = y$ und $cF = z$ Fuß. Also setze man: wie sich verhält

(m +

$$(m+n+p+q) : m = a : v$$
$$(m+n+p+q) : n = a : x$$
$$(m+n+p+q) : p = a : y$$
$$(m+n+p+q) : q = a : z$$

Hätte diese Figur EF zur Grenze, so wäre sich verhalten

$$A : B = m : n$$
$$B : C = n : p$$ (§. 16 Lehre über Zerth.)
$$C : D = p : q$$

Da aber EG die Grenzlinie ist, so verliert A das Dreyekk Eea, B das Viereкk enba, C das Viereкk nfcb, D das Viereкk fGFc, und also D mehr als C, C mehr als B, und B mehr als A.

Ein Stükk Feld von einer solchen Figur, wie hier Fig. 4, kann nicht wohl blos aus den auf dem Felde gemessenen Linien und Winkeln zertheilt werden, wenigstens würde die Zertheilung sehr weitläuftig ausfallen. Damit aber keine beträchtlichen Fehler vorkommen, so messe man die Linien CD, EG und EF zugleich auf dem Felde, und die Linien Ee, En und Ef auf dem Risse nach dem verjüngten Maaßstabe, nach welchem die Figur aufgetragen worden ist, und berechne den Flächeninhalt der Dreyekke Eea, Enb und Efc, wie §. 36 in der Lehre über Zertheilung der Felder lehrt.

Man ziehe aus F auf die verlängerte Linie EG den Perpendikel Fu, und setze seine Länge = b, die Höhe des Dreyekkes Efc = x, die Höhe des Dreyekkes Enb = y, und die Höhe des Dreyekkes Eea = z Fuß. Diese Hö-

 hen

hen mögen Perpendikel von a, b, c auf EG, und also Linien seyn, die mit Fu parallel sind. Mithin lassen sich x, y und z durch folgende Proportionen bestimmen:

$$(m+n+p+q) : m = b : z$$
$$(m+n+p+q) : (m+n) = b : y$$
$$(m+n+p+p) : (m+n+p) = b : x$$

Es sey $Ee = c$, $En = d$, $Ef = e$ und $EG = f$ Fuß
Nun ist

$$\tfrac{1}{2}zc = \Delta Eea$$
$$\tfrac{1}{2}yd = \Delta Enb$$
$$\tfrac{1}{2}xe = \Delta Efc$$
nnd $$\tfrac{1}{2}fb = \Delta EGF$$

$$\tfrac{1}{2}fb - \tfrac{1}{2}xe = \Delta EGF - \Delta Efc = fGFc$$
$$\tfrac{1}{2}xe - \tfrac{1}{2}yd = \Delta Efc - \Delta Enb = fcbn$$
$$\tfrac{1}{2}yd - \tfrac{1}{2}zc = \Delta Enb - \Delta Eea = enba$$

Hierdurch erhält man, wie viel die Theile A, B, C, D durch den Abschnitt EFG verlieren. Nun kommt es aber auch noch darauf an zu finden, wie viel der eine Theil gegen den andern zu viel verliert.

Wären die Theile A, B, C, D einander gleich, so müßte einer so viel verlieren als der andere. Da sie aber bestimmte Verhältnisse gegen einander haben sollen, so muß von ihnen auch nach diesen Verhältnissen abgeschnitten werden Wenn ein Theil 140 Quadratruthen und der andere 70 Quadratruthen enthält: so müssen von dem ersten 2 Quadratruthen abgeschnitten werden, wenn von diesem 1 Quadratruthe abgeschnitten worden ist; denn außerdem werden sie nicht in dem Verhältnisse bleiben, in dem sie doch eigentlich seyn sollen.

Es mögen v', x', y', z' die Zahlen der Quadratfuß seyn, welche die Theile A, B, C, D nach den Verhältnissen der Zahlen m, n, p, q durch den Abschnitt EGF verlieren müssen. Um v', x', y', z' zu bestimmen, setze man wie sich verhält:

$$(m+n+p+p) : m = \tfrac{1}{2}fb : v'$$

$$(m+n+p+q) : n = \tfrac{1}{2}fb : x'$$

$$(m+n+p+q) : p = \tfrac{1}{2}fb : y'$$

$$(m+n+p+q) : q = \tfrac{1}{2}fb : z'$$

Nun ist von A das Dreyekk Eea = $\frac{1}{2}$cz Quadratfuß abgeschnitten. Es müssen aber v' Quadratfuß abgeschnitten werden, wenn der Ueberrest mit dem des andern Theils, wo x' Quadratfuß abgeschnitten werden, in dem gegebenen Verhältnisse bleiben soll. Da nun nothwendigerweise $\frac{1}{2}cz < v'$, denn sonst müßte EG mit EF parallel und Ee > Ea seyn: so giebt $v' - \frac{1}{2}cz$ den Flächeninhalt eines Dreyekkes, das noch von A wegkommen muß.

Dieses Dreyekk sey dfe und df die richtige Grenze zwischen A und B. Um de zu bestimmen, ziehe man auf EG die Linie fg senkrecht, welche die Höhe des Dreyekkes dfe giebt. Man messe ihre Länge, die hier = g Fuß seyn soll. Nun giebt $\frac{v' - \frac{1}{2}cz}{\frac{1}{2}g}$ die Anzahl der Fuß von der Grundlinie des Dreyekkes dfe, d. i. von de. Zieht man diese hier gefundene Anzahl Fuß von c ab, so giebt der Ueberrest die Anzahl der Fuß Ed, d. i. von der eigentlichen Breite des Stükkes.

Eben daher würde $x' - (\frac{1}{2}yd - \frac{1}{2}zc)$ den Flächeninhalt des Dreyekkes mhn geben, das noch von B abgegeschnitten werden müßte. Man setze diesen Ausdrukk $-(x'-(\frac{1}{2}yd-\frac{1}{2}zc))$. Da aber das Dreyekk dfe $=$ $v'-\frac{1}{2}cz$ Quadratfuß dem Theile B zufällt, so müssen noch außerdem von B die Quadratfuß $v'-\frac{1}{2}cz$ weggenommen werden. Der eigentliche Flächeninhalt des Dreyekks, das von B wegkommen muß ist, also

$$= -(x'-(\tfrac{1}{2}yd-\tfrac{1}{2}zc)+(v'-\tfrac{1}{2}cz))$$
$$= -(x'-\tfrac{1}{2}yd+\tfrac{1}{2}zc+v'-\tfrac{1}{2}zc)$$
$$= -(x'+v'-\tfrac{1}{2}yd)$$

Man ziehe aus h auf EG die Linie hp senkrecht, und setze ihre Länge $=$ h. Auf diese Art findet man durch $-\frac{x'+v'-\frac{1}{2}yd}{\frac{1}{2}h}$ die Anzahl der Fuß der Linie mn.

Der Flächeninhalt des Dreyekkes qif, das von dem Theile C weggenommen und dem Theile D gegeben werden muß, läßt sich auf zweyerley Art bestimmen. Einmahl ist er, wie aus dem vorher gesagten erhellt, $=$ $y'+x'+v'-\frac{1}{2}xe$, und einmahl, da der Flächeninhalt des Vierekkes cfGF $=(\frac{1}{2}fb-\frac{1}{2}xe)>z'$, ist er $=$ $\frac{1}{2}fb-\frac{1}{2}xe-z'$. Es sey it, die Höhe des Dreyekkes qif, $=$ i Fuß. Mithin giebt so wohl $\frac{y'+x'+v'-\frac{1}{2}xe}{\frac{1}{2}i}$

als auch $\frac{\frac{1}{2}fb-\frac{1}{2}xe-z'}{\frac{1}{2}i}$ die Anzahl der Fuß von qf.

Exempel. Es sey b $=$ 12 Ruthen, m $=$ 3, n $=$ 2, p $=$ 4, und q $=$ 5. Also $m+n+p+q = 3+2+4+5 = 14$ und

(m+

$$(m+n+p+q) : m = b : z$$
$$14 : 3 = 12 : z$$

$$7 : 3 = 6 : z$$

$$\begin{array}{rl} & 3 \\ \hline 7) & 18 \,|\, 2{,}57^{\circ} = z \\ & 14 \\ \hline & 40 \\ & 35 \\ \hline & 50 \end{array}$$

$$(m+n+p+q) : (m+n) = b : y$$
$$14 : 5 = 12 : y$$

$$7 : 5 = 6 : y$$

$$\begin{array}{rl} & 5 \\ \hline 7) & 30 \,|\, 4{,}29^{\circ} = y \\ & 28 \\ \hline & 20 \\ & 14 \\ \hline & 60 \end{array}$$

$$(m+n+p+q) : (m+n+p) = b : x$$
$$14 : 9 = 12 : x$$

$$7 : 9 = 6 : x$$

$$\begin{array}{rl} & 9 \\ \hline 7) & 54 \,|\, 7{,}71^{\circ} = x \\ & 49 \\ \hline & 50 \\ & 49 \\ \hline & 10 \end{array}$$

Es sey $Ee = c = 4$ Ruthen, $En = d = 7$ Ruthen, $Es = e = 12$ Ruthen, und $EG = f = 18$ Ruthen. Also

$$\Delta Eea = \tfrac{1}{2}cz = \tfrac{1}{2}.4.2{,}57 = 5{,}14\square^{\circ}$$
$$\Delta Enb = \tfrac{1}{2}dy = \tfrac{1}{2}.7.4{,}29 = 15{,}01\square^{\circ}$$
$$\Delta Esc = \tfrac{1}{2}ex = \tfrac{1}{2}.12.7{,}71 = 46{,}26\square^{\circ}$$
$$\Delta EGF = \tfrac{1}{2}bf = \tfrac{1}{2}.18.12 = 108$$

Ferner:

$$(m+n+p+q) : m = \tfrac{1}{2}bf : v'$$
$$14 : 3 = 108 : v'$$
$$7 : 3 = 54 : v'$$

$$\begin{array}{r}
3 \\
\hline
7)\ 162|23{,}1429\square^{\circ} = v' \\
14 \\
\hline
22 \\
21 \\
\hline
10 \\
7 \\
\hline
30 \\
28 \\
\hline
20 \\
14 \\
\hline
60
\end{array}$$

$$(m+n+p+q) : n = \tfrac{1}{2}bf : x'$$
$$14 : 2 = 108 : x'$$
$$7 : 2 = 54 : x'$$

$$\begin{array}{r}
2 \\
\hline
7)\; 108 \mid 15{,}4286\,\square^{\circ} = x' \\
7 \\
\hline
38 \\
35 \\
\hline
30 \\
28 \\
\hline
20 \\
14 \\
\hline
60 \\
56 \\
\hline
40
\end{array}$$

Da nun $p = 2n$, so ist auch $y' = 2x'$. Also $y = 2 \cdot 15{,}4286 = 30{,}8572$ Quadratruthe.

Da $q = m + n$, so ist auch $z' = v' + x'$. Also $z' = 23{,}1429 + 15{,}4286 = 38{,}5715$ Quadratruthe.

Daher ist $v' - \frac{1}{2}zc = 23{,}1429 - 5{,}14 = 18{,}0029$ Quadratruthe. Es sey $fg = g = 40$ Ruthen. Also $\frac{v' - \frac{1}{2}cz}{\frac{1}{2}g} = \frac{18{,}0029}{20} = 0{,}9$ Ruthe, oder 9 Fuß, und $Ed = Ee - de = c - 9' = 40' - 9' = 31$ Fuß.

Nun

Nun ist $v' + x' = 38,5715$ Quadratruthe und $v' + x' - \frac{1}{2}dy = 38,5715 - 15,01 = 23,5615$. Es sey $hp = h = 38$ Ruthen. Also

$$\frac{v' + x' - \frac{1}{2}dy}{\frac{1}{2}h} = \frac{23,5615}{19} = 1,24 \text{ Ruthe} = mn,$$

und $Em = En - mn = d - 1,24 = 7 - 1,24 = 5,76$ Ruthe.

Wenn das Dreyekk $EGF = 108$ Quadratruthen und das Dreyekk $Esc = 46,26$ Quadratruthe ist, so ist das Vierekk $sGFc = \triangle EGF - \triangle Esc = 108 - 46,26 = 61,74$ Quadratruthe, und $\frac{1}{2}fb - \frac{1}{2}xe - z' = 61,74 - 38,5715 = 23,1685$. Es sey $it = 36$ Ruthen. Also ist $qs = \frac{\frac{1}{2}fb - \frac{1}{2}xe - z'}{\frac{1}{2}i} =$

$$\frac{23,1685}{18} = 1,29 \text{ Ruthe.}$$

Demnach ist $Ed = 3,1$ Ruthe
$Em = 5,76$ „
$Eq = 10,71$ „
$EG = 18,$ „
und $Ed = - \quad - \quad - = 3,1$ Ruthe
$dm = Em - Ed = 5,76 - 3,1 = 2,66$ Ruthe
$mq = Eq - Em = 10,71 - 5,76 = 4,95$ Ruthe
$qG = EG - Eq = 18,00 - 10,71 = 7,29$ Ruthe.

§. 4.

Bisher war die Rede von Figuren, die entweder an einer oder an beyden Seiten von krummen Linien be-

begrenzt sind. Wenn dieß aber nicht ist, so können die Durchschläge nicht nach Willkür gezogen werden; sondern sie müssen jederzeit die beyden gegenüber stehenden Winkel, welche die Seiten der Figur mit einander machen, wie Fig. 6 E und C, verbinden. Denn wenn die Theile einer Figur so wohl unter sich, als auch mit der ganzen Figur so viel als möglich einerley Form haben sollen: so muß die Grenze zwischen zwey Theilen auf der Linie, welche die Winkel C und E verbindet, gebrochen seyn d. i. die Theile einer solchen Figur, wie hier, müssen sich auf einer gemeinschaftlichen Linie wenden.

Es sey ABGH in vier Theile, zu zertheilen, die sich unter einander verhalten wie die Zahlen m, n, p, q. Man zertheile, wie schon gezeigt worden ist, nach diesen vorgeschriebenen Verhältnissen eine jede von den Linien AB, CE, HG, und ziehe die Linien ag, oh, xi, ak, ol, und xm. Sind die Linien AB, CE und HG mit einander parallel, so verhält sich

$$A : B = m : n$$

$$B : C = n : p \quad (\text{§.16 Leh. üb. Zerth. d. Fel.})$$

$$C : D = p : q;$$

ist aber blos AB der Linie HG parallel, wie Fig. 5, so ziehe man CD und EF den Linien AB und HG parallel, und verfahre übrigens wie an Fig. 6 gezeigt werden soll, wo CD mit AB und CF mit HG parallel ist.

Man ziehe ab, oq, xa' parallel mit EB und ad, of, xc' parallel mit EG. Wenn man nun zu CAgc das Dreyekk cgb addiert, zu cghp das Dreyekk phq addiert und von der Summe das Dreyekk cgb subtrahiert

hiert, und so auch mit phiz verfährt: so haben die Stükke zwischen AB und CD die vorgeschriebenen Verhältnisse, wie aus §. 16 und §. 36 in der Lehre über Zertheilung der Felder zu ersehen ist.

Ist AB = CD, wie Fig. 5 EF = HG, so ist cb = pq = za′ = o; ist AB $\geq$ CD so fällt b auf cp, und ist AB $\leq$ CD so trift b zwischen C und c, wie man §. 36 in der Lehre über Zertheilung der Felder sehen kann. Es muß also das Dreyekk cgb entweder addiert oder subtrahiert werden, je nachdem AB größer oder kleiner ist als CD. Mithin ist

$$\mp \triangle cbg$$
$$\pm (\triangle cbg - \triangle phq)$$
$$\pm (\triangle phq - \triangle zia')$$
$$\pm \triangle zia$$

und
$$\mp \triangle edk$$
$$\pm (\triangle edk - \triangle rfl)$$
$$\pm (\triangle rfl, - \triangle b'c'm)$$
$$\pm \triangle b'c'm.$$

Wenn ein Stükk Feld von einer solchen Figur, wie hier Fig. 6, in gleiche, oder in solche Theile zertheilt werden soll, die bestimmte Verhältnisse gegen einander haben; so messe man nach dem verjüngten Maaßstabe, nach welchem die Figur aufgetragen worden ist, die Linien cb, pq, za′, ed, rf, und b′c′. Wer die Linien CD und CF zugleich bey Aufnehmung der Figur auf dem

Felde

Felde messen will, welches zu mehrerer Genauigkeit doch nothwendig ist, der kann AM, als die gemeinschaftliche Höhe der Dreyekke zwischen AB und CD, und HN, als die gemeinschaftliche Höhe der Dreyekke zwischen CF und HG auch zugleich auf dem Felde messen. Es sey $cb = a$, $pq = b$, $za' = c$, $ed = e$, $rf = f$, $b'c' = g$, $AM = h$, und $HN = i$ Fuß. Demnach ist

$$\mp \Delta cbg = \mp \tfrac{1}{2}ah$$

$$\pm (\Delta cbg - \Delta phq) = \pm \tfrac{1}{2}(a - b)h$$

$$\pm (\Delta phq - \Delta zia') = \pm \tfrac{1}{2}(b - c)h$$

$$\pm \Delta zia' = \pm \tfrac{1}{2}ch$$

$$\pm \Delta edk = \pm \tfrac{1}{2}ei$$

$$\mp (\Delta edk - \Delta rfl) = \mp \tfrac{1}{2}(e - f)i$$

$$\mp (\Delta rfl - \Delta b'c'm) = \mp \tfrac{1}{2}(f - g)i$$

$$\mp \Delta b'c'm = \mp \tfrac{1}{2}gi.$$

Hierauf addiere man den Flächeninhalt der Dreyekke cbg und edk, wenn entweder der Flächeninhalt beyder addiert oder subtrahiert werden muß. Muß aber der Flächeninhalt des einen addiert und der des andern subtrahiert werden: so nehme man von beyden den Unterschied, addiere ihn, wenn der Flächeninhalt, der addiert werden muß, größer ist, als der des andern, und subtrahiere ihn, wenn der, der subtrahiert werden muß, größer ist. Man hat also sehr wohl Acht zu haben, wohin die Punkte b und d fallen. Auch bey den übrigen Dreyekken hat man sehr wohl darauf zu sehen, welches addiert und welches subtrahiert werden muß, und welches größer oder kleiner ist.

Es sey z. B. $-\frac{1}{2}(a-b)h$ und $-\frac{1}{2}(e-f)i$ und $a > b$ und $e > f$, so wird $\frac{1}{2}(a-b)h$ subtrahiert und auch $\frac{1}{2}(e-f)i$. Ist aber $+\frac{1}{2}(a-b)h$ und $+\frac{1}{2}(e-f)i$ und $a > b$, $e > f$, so wird $\frac{1}{2}(a-b)h$ addiert und auch $\frac{1}{2}(e-f)i$. In beyden Fällen kann man $\frac{1}{2}(a-b)h$ und $\frac{1}{2}(e-f)i$ zusammen addieren, und im ersten Falle der Summe das Zeichen $-$ und im andern das Zeichen $+$ geben. Wenn nun $\frac{1}{2}(a-b)h$ das Zeichen $+$ und $\frac{1}{2}(e-f)i$ das Zeichen $-$ hat, so kommt es darauf an, welches größer oder kleiner ist. Ist das erstere größer, so erhält der Unterschied das Zeichen $+$, und ist es kleiner, das Zeichen $-$. Es sey

$$\begin{array}{llll} \text{also} & +\frac{1}{2}ah & \pm\frac{1}{2}ei & = \pm\alpha \\ & \mp\frac{1}{2}(a-b)h & \mp\frac{1}{2}(e-f)i & = \mp\beta \\ & \mp\frac{1}{2}(b-c)h & \mp\frac{1}{2}(f-g)i & = +\gamma \\ \text{und} & \mp\frac{1}{2}ch & \mp\frac{1}{2}gi & = \mp\delta \end{array}$$

Wenn man die Theile A, B, C, D von C nach E zu berichtigen will, so kann man auch das letztere, nehmlich $\mp\frac{1}{2}ch \mp\frac{1}{2}gi = \mp\delta$ aus der Rechnung weglassen.

Nun berechene man den Flächeninhalt der Dreyekke Cac, Cop, Cxz, Cae, Cor, Cxb', wie schon §. 3 gezeigt worden ist, und addiere den von Cac und Cae, ferner von Cop und Cor, und endlich den von Cxz und Cxb' zusammen. Es sey der Flächeninhalt von Ccae $=$ a', Cpor $=$ b' und von Czxb $=$ c'. Endlich

suche

suche man die Anzahl der Quadratfuß eines jeden Theiles wenn CDEF nach den Verhältnissen, welche die Zahlen m, n, p, q unter sich haben, zertheilt worden wäre. Es sey die Anzahl der Quadratfuß des ersten $= \alpha'$, die des zweyten $= \beta'$, und die des dritten $= \gamma'$. Da nun A um α entweder zu groß oder zu klein ist, je nachdem die Zeichen — oder + sind, und auch von CDEF eine Fläche $= \alpha' - a'$ Quadratfuß erhalten sollte; so giebt $\alpha' - a' \pm \alpha$ die Anzahl der Quadratfuß, die dem Theile A noch gegeben werden müssen.

Da die Theilungslinien in CE zusammen treffen sollen, so können dem Theile A die noch fehlenden Quadratfuß nicht anders, als durch zwey Dreyekke akn und agn die eine gemeinschaftliche Grundlinie an haben, gegeben werden. Man lasse aus g und k die Perpendikel gv und kf auf CE fallen, und messe ihre Länge. Es sey $gv = \varepsilon$ und $kf = \zeta$ Fuß. Demnach giebt

$\dfrac{\alpha' - a' \pm \alpha}{\frac{1}{2}(\varepsilon + \zeta)}$ die Anzahl der Fuß von an.

Man ziehe nun auch von h, i, l, m die Linien hd′, if′, lu und me′ senkrecht auf die verlängerte Linie CE, und setze $hd' = \eta$, $if' = \vartheta$, $lu = \iota$ und $me' = \varkappa$ Fuß. Diesen Voraussetzungen nach giebt nun

$\dfrac{\alpha' + \beta' - b' \mp \beta}{\frac{1}{2}(\eta + \iota)}$ die Anzahl der Fuß von ot, und

$\dfrac{\alpha' + \beta' + \gamma' - c' \mp \gamma}{\frac{1}{2}(\vartheta + \varkappa)}$ die Anzahl der Fuß von xy.

Soll eine solche Figur in gleiche Theile zertheilt werden, so darf man nur $m = n = p = q$ setzen. Uebrigens bleibt alles wie gezeigt worden ist. Bey dieser Zertheilungsart, die Figur mag in gleiche, oder in solche Theile zertheilt werden, die gewisse Verhältnisse gegen einander haben, hat man zugleich den Vortheil, daß man den Flächeninhalt derselben nicht zu wissen braucht, ausgenommen wenn man von der Figur eine bestimmte Anzahl von Quadratruthen abschneiden soll. Es sey von ABGH der Theil $A = u$ Quadratruthen abzuschneiden, und die ganze Figur enthalte M Quadratruthen. In diesem Falle setze man M anstatt $m + n + p + q$ und u anstatt m, und verfahre übrigens wie gezeigt worden ist.

Exempel. Es sey $m = 2$, $n = 3 = p$, $q = 4$, $CD = 20$ Ruthen, $CE = 16$ Ruthen und $CF = 18$ Ruthen. Wie sich nun verhält

$$(m+n+p+q) : m = CD : Cb$$
$$(2+3+3+4) : 2 = 20 : x$$
$$12 : 2 = 20 : x$$
$$6 : 1 = 20 : x$$

6) 20 | 3,3333
18
20
18
20
18
20
18
20

Also ist $x = 3,3333$ Ruthe $=$ Cb.

$$\begin{array}{ccc} (m+n+p+q) & : & n = CD : bq \\ 12 & : & 3 = 20 : x \\ \hline 4 & : & 1 = 20 : x \\ \hline 1 & : & 1 = 5 : x \end{array}$$

Also ist $x = 5$ Ruthen $= bq = qa'$.

Da nun $q = 2m$, so ist auch $a'D = 2 . Cb$.
Also $a'D = 6,6666$ Ruthe $= 2 . Cb$.

Ferner:

$$\begin{array}{ccc} (m+n+p+q) & : & m = CE : Ca \\ 12 & : & 2 = 16 : x \\ \hline 6 & : & 1 = 16 : x \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6)\ 16 \,|\, 2,6666 \\ \quad\ 12 \\ \quad\ \overline{40} \\ \quad\ 36 \\ \quad\ \overline{\ \ 40} \\ \quad\ \ \ 36 \\ \quad\ \ \ \overline{\ \ 40} \\ \quad\ \ \ \ \ 36 \\ \quad\ \ \ \ \ \overline{\ \ 40} \end{array}$$

Also ist $x = 2,6666$ Ruthe $=$ Ca.

$$\begin{array}{l}
(m+n+p+q) : n = CE : ao \\
12 \quad : 3 = 16 : x \\
\hline
4 \quad : 1 = 16 : x \\
\hline
1 \quad : 1 = 4 : x
\end{array}$$

Also ist $x = 4$ Ruthen $= ao = ox$.

Da nun $q = 2m$, so ist auch $xE = 2 . Ca$. Also $xE = 5,3333$ Ruthe $= 2 . Ca$.

Ferner

$$\begin{array}{l}
(m+n+p+q) : m = CF : Cd \\
12 \quad : 2 = 18 : x \\
\hline
6 \quad : 1 = 18 : x \\
\hline
1 \quad : 1 = 3 : x
\end{array}$$

Also ist $x = Cd = 3$ Ruthen

$$\begin{array}{l}
(m+n+p+q) : n = CF : df \\
12 \quad : 3 = 18 : x \\
\hline
4 \quad : 1 = 18 : x \\
\hline
\end{array}$$

$$4)\ 18 \mid 4,5$$
$$\underline{16}$$
$$20$$

Also ist $x = df = fc' = 4, 5$ Ruthe, und $cF' = 2 . Cd = 6$ Ruthen.

Es

Es sey die Höhe des Dreyekkes CDE, oder der Perpendikel von E auf CD = 8 Ruthen, und die Höhe des Dreyekkes CEF, oder der Perpendikel von E auf CF = 4 Ruthen. Wie sich nun verhält

$$(m+n+p+q) : m = 8 : x$$
$$12 : 2 = 8 : x$$
$$6 : 1 = 8 : x$$

6) 8 | 1,3333
6
20
18
20
18
20
18
20

Also ist die Höhe des Dreyekkes Cca = 1,3333 Ruthe.

$$(m+n+p+q) : (m+n) = 8 : x$$
$$12 : 5 = 8 : x$$
$$3 : 5 = 2 : x$$

5
10

$$3)\ 10 \mid 3{,}3333$$
$$\begin{array}{r} 9 \\ \hline 10 \\ 9 \\ \hline 10 \\ 9 \\ \hline 10 \\ 9 \\ \hline 10 \end{array}$$

Also ist die Höhe des Dreyekkes Cpo $= 3{,}3333$ Ruthe.

$$\begin{array}{cccc} (m+n+p+q) & : (m+n+p) & = 8 : x \\ 12 & : \quad 8 & = 8 : x \\ \hline 3 & : \quad 2 & = 8 : x \\ & & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$3)\ 16 \mid 5{,}3333$$
$$\begin{array}{r} 15 \\ \hline 10 \\ 9 \\ \hline 10 \\ 9 \\ \hline 10 \\ 9 \\ \hline 10 \end{array}$$

Also ist die Höhe des Dreyekkes Czx $= 5{,}3333$ Ruthe.

Da

Da nun 4 die Hälfte ist von 8, so ist die Höhe des Dreyekkes Cae $= \frac{1,3333}{2} = 0,6666$ Ruthe, die Höhe des Dreyekkes Cor $= \frac{3,3333}{2} = 1,6666$ Ruthe und die Höhe des Dreyekkes Cxb' $= \frac{5,3333}{2} =$ 2,6666 Ruthe.

Es sey nun Cc $= 3,2$ Ruthe, Cp $= 8,25$ Ruthe, Cz $= 13,3$ Ruthe, Ce $= 2,9$ Ruthe, Cr $= 7,45$ Ruthe, und Cb' $= 11,97$ Ruthe. Diesen Voraussetzungen nach ist

$\Delta CDE = \frac{20.8}{2} = 80$ Quadratruthen

$\Delta Cca = \frac{3,20.1,33}{2} = 2,1280$.

$\Delta Cpo = \frac{8,25.3,33}{2} = 13,7362$.

$\Delta Czx = \frac{13,30.5,33}{2} = 35,4445$.

Ferner

$\Delta CEF = \frac{18.4}{4} = 36$ Quadratruthen

$\Delta Cae = \frac{2,90.0,66}{2} = 0,9570$.

$\Delta Cor = \frac{7,45.3,33}{2} = 12,4042$.

$\Delta Cxb' = \frac{11,97.2,66}{2} = 15,9201$.

Also

Also $C\alpha a e = a' = 2{,}1280 + 0{,}9570 = 3{,}0850$ Quadratruthe;

$Cpor = b' = 13{,}7362 + 12{,}4042 = 26{,}1404$ Quadratruthe;

$Czxb' = c' = 35{,}4445 + 15{,}9201 = 51{,}3646$ Quadratruthe;

und $CDEF = \triangle CDE + \triangle CEF = 80 + 36 = 116$ Quadratruthen.

Durch folgende Exempel wird nun aus 116 Quadratruthen α', β' und γ' bestimmt, und zwar indem man setzt, wie sich verhält

$$(m+n+p+q) : m = 116 : \alpha'$$

$$12 : 2 = 116 : \alpha'$$

$$6 : 1 = 116 : \alpha'$$

```
6) 116 | 19,3333
    6
   ---
    56
    54
   ---
     20
     18
    ---
      20
      18
     ---
       20
       18
      ---
        20
```

Also ist $\alpha' = 19{,}3333$ Quadratruthen.

$$
\begin{array}{rcl}
(m+n+p+q) : n & = & 116 : \beta' \\
12 \quad : 3 & = & 116 : \beta' \\
\hline
4 \quad : 1 & = & 116 : \beta' \\
\hline
1 \quad : 1 & = & 29 : \beta'
\end{array}
$$

Also ist $\beta' = 29$ Quadratruthen $= \gamma'$.

Demnach ist nun

$$\alpha' = 19,3333 \square^{\circ}$$

$$\alpha' + \beta' = 19,3333 + 29 = 48,3333 \square^{\circ}$$

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 19,3333 + 29 + 29 = 77,3333 \square^{\circ}$$

und

$$\alpha' - a' = 19,3333 - 3,0850 = 16,2483 \square^{\circ}$$

$$\alpha' + \beta' - b' = 48,3333 - 26,1404 = 22,1929 \square^{\circ}$$

$$\alpha' + \beta' + \gamma' - c' = 77,3333 - 51,3646 = 25,9687 \square^{\circ}$$

Den angenommenen Bedingungen nach ist auch

$$cb = a = Cb - Cc = 3,3333 - 3,2 = 0,13^{\circ}$$

$$pq = b = Cq - Cp = 8,3333 - 8,25 = 0,08^{\circ}$$

$$za' = c = Ca' - Cz = 13,3333 - 13,30 = 0,03^{\circ}$$

$$ed = e = Cd - Ce = 3,0000 - 2,9 = 0,1^{\circ}$$

$$rs = f = Cs - Cr = 7,5000 - 7,45 = 0,05^{\circ}$$

$$b'c' = g = Cc' - Cb' = 12,0000 - 11,97 = 0,03^{\circ}$$

Es sey AM $= h = 40$ Ruthen und HN $= i =$ 48 Ruthen.

Da=

Daher

$$+\tfrac{1}{2}ah = +\tfrac{1}{2}.0,13.40 = +2,60\,\square^{\circ}$$

$$-\tfrac{1}{2}(a-b)h = -\tfrac{1}{2}.0,05.40 = -1,00\,\square^{\circ}$$

$$-\tfrac{1}{2}(b-c)h = -\tfrac{1}{2}.0,05.40 = -1,00\,\square^{\circ}$$

$$+\tfrac{1}{2}ei = +\tfrac{1}{2}.0,1\ .48 = +2,40\,\square^{\circ}$$

$$-\tfrac{1}{2}(e-f)i = -\tfrac{1}{2}.0,05.48 = -1,20\,\square^{\circ}$$

$$-\tfrac{1}{2}(f-g)i = -\tfrac{1}{2}.0,02.48 = -0,48\,\square^{\circ}$$

Also

$$+(\tfrac{1}{2}ah + \tfrac{1}{2}ei) = +\alpha = 2,60+2,40 = +5\,\square^{\circ}$$

$$-(\tfrac{1}{2}(a-b)h+\tfrac{1}{2}(e-f)i) = -\beta = 1,00+1,20 = -2,20\,\square^{\circ}$$

$$-(\tfrac{1}{2}(b-c)h+\tfrac{1}{2}(f-g)i) = -\gamma = 1,00+0,48 = -1,48\,\square^{\circ}$$

Folglich

$$\alpha' - a' + \alpha = 16,2483 + 5 = 21,2483\,\square^{\circ}.$$

$$\alpha' + \beta' - b' - \beta = 22,1929 - 2,20 = 19,9929\,\square^{\circ}$$

$$\alpha' + \beta' + \gamma' - c' - \gamma = 25,9687 - 1,48 = 24,4887\,\square^{\circ}.$$

Es sey $gv = \varepsilon = 44$ Ruthen, und $kf = \zeta = 50$ Ruthen. Also

$$\frac{\alpha' - a' + \alpha}{\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\zeta)} = \frac{21,2483}{\tfrac{1}{2}(44+50)} = \frac{21,2483}{47} = 0,45$$ Ruthe $= an$, und $Cn = Ca + an = 2,6666 + 0,45 = 3,1166$ Ruthe.

Es sey hd' $=\eta=$ 46 Ruthen und lu $=\iota=$ 51 Ruthen. Also

$$\frac{\alpha'+\beta'-b'-\beta}{\frac{1}{2}(\eta+\iota)}=\frac{19,9929}{\frac{1}{2}(46+51)}=\frac{19,9929}{48,5}=0,41=$$

ot, und Ct $=$ Co $+$ ot $=6,6666+0,41=$ 7,0766 Ruthe.

Es sey if' $=\vartheta=$ 48 Ruthen und me' $=\varkappa=$ 52 Ruthen. Also

$$\frac{\alpha'+\beta'+\gamma'-c'-\gamma}{\frac{1}{2}(\vartheta+\varkappa)}=\frac{24,4887}{\frac{1}{2}(48+52)}=\frac{24,4887}{50}=$$

$0,48=$ xy, und Cy $=$ Cx $+$ xy $+$ $10,6666+0,48=11,1466$ Ruthe.

§. 5.

Alle übrigen Figuren, die sich nicht durch gerade Linien zertheilen lassen können nach §. 3, 4 zertheilt werden. Z. B. von Fig 7 läßt sich ABHG nach §. 4 und GHLI nach §. 3, und von Fig. 8. ABDC und CDFE nach §. 4 zertheilen. Fehler von einem ganzen oder einem halben Zolle Breite sind bey Akker- oder Wiesen-Zertheilungen nicht von Beträchtlichkeit. Wenn also die Linie CE, Fig. 7, so liegt, daß die Stükke zwischen den Linien CD und FE, welche mit AB und GH parallel sind, schon beynahe sich eben so verhalten, wie die Theile der Linien AB, CE und GH, und so auch die Stükke zwischen den parallelen Linien AB, CD und FE, GH; oder daß eins von jenen Stükken schon beynahe die Quadratruthen zu viel hat, welche einem von diesen feh fehlen: so behält man die zuerst gemachte Eintheilung der Linie CE bey, nehmlich die, wo sich ihre Theile eben so gegen einander verhalten, als die der Linien AB und GH. Bey IL ist die Figur von einer krummen Linie begrenzt. Man ziehe durch dieselbe eine gerade, so daß die Dreyekke aeb, dfe, und gih in der Breite der Stükke keine beträchtlichen Fehler geben. In diesem Falle läßt sich GHLI völlig nach §. 3 zertheilen.

Ver-

Verbesserungen

einiger Fehler in der Lehre über Zertheilung der Felder, welche sich bey genauer Durchsicht gefunden haben.

Die Seite 59 angeführte trigonometrische Rechnung hat man bey Zertheilung einer solchen Figur, wie Fig. 28 Tab. IV, nicht nöthig. Denn da HF mit BD parallel ist, so ziehe man aus H auf BD der Seite FD parallel eine Linie. Hierdurch erhält man von BD ein Stükk = BD — HF. Da nun auch MG und AE mit FD parallel sind, so verhält sich

$$(BD - HF) : BH = BE : BA$$

Seite 152 unten am Ende muß es heißen:

$\frac{x}{R} - \frac{x}{Rr^{\infty c}} = \frac{1}{r^c} - \frac{1}{r^{\infty c}}$. Da nun $r^{\infty c}$ unendlich groß und $\frac{1}{r^{\infty c}}$ unendlich klein ist, so kann man $\frac{1}{r^{\infty c}} = 0$ setzen: folglich ist

Seite 165 in der Mitte steht $\frac{(d-b)^2-(d-c)^2 a}{2d}$ anstatt $\frac{((d-b)^2-(d-c)^2)a}{2d}$ und so auch Seite 166 oben.

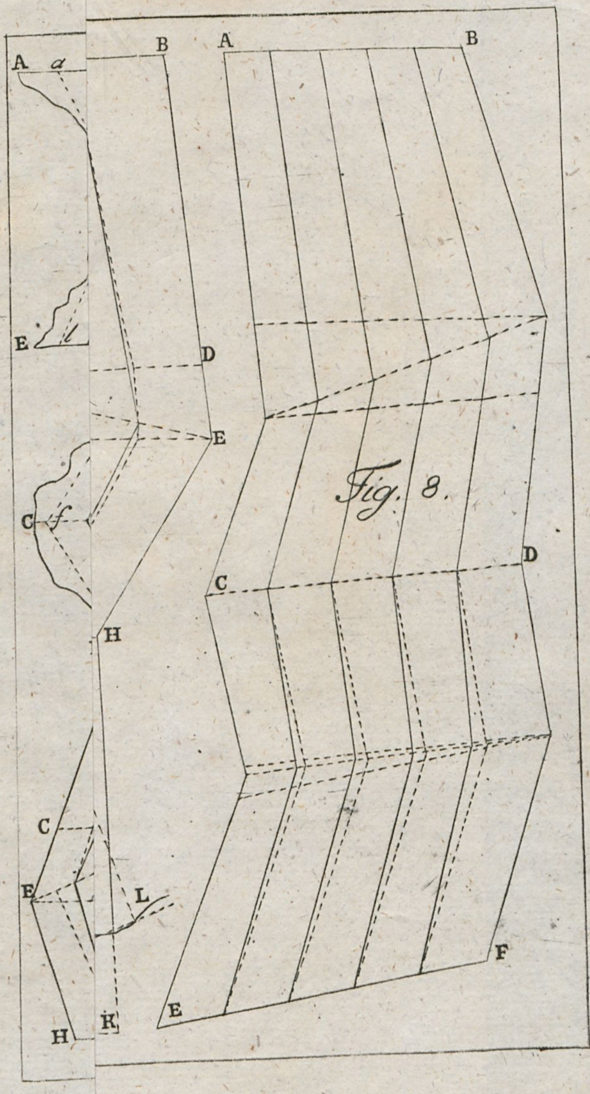

Fig. 8.

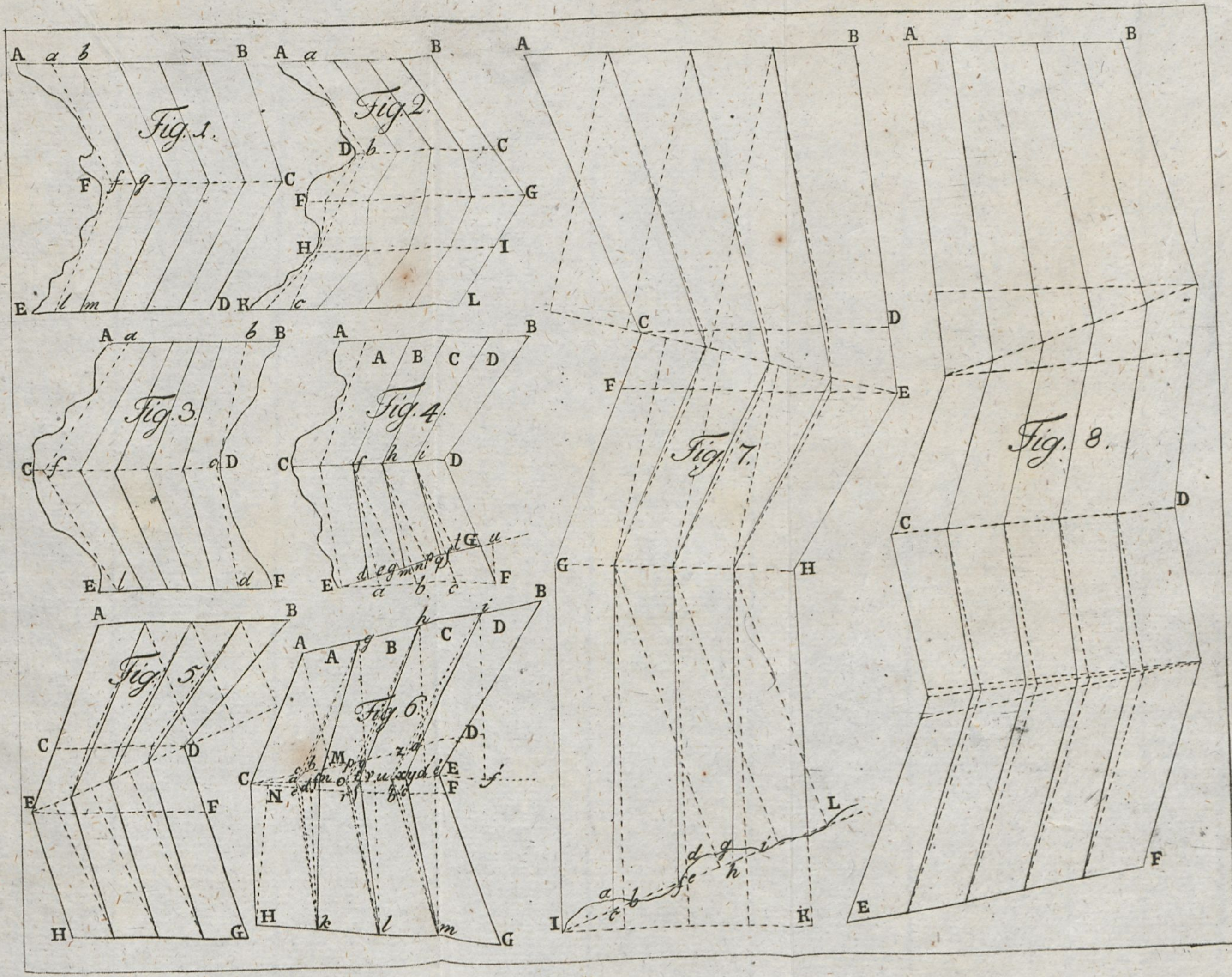
Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

11404 1

vd 18 RDA

2

Nachtrag

zur

Lehre

über

geometrische und ökonomische

Zertheilung der Felder

von

Johann Andreas Kirchner.

Mit einer Kupfertafel.

Weimar,

in Kommission der Hoffmannischen Buchhandlung 1797.

(Preis 3 Groschen)