Tübing
phil.
Disrat.
1801/5.

SCHOLIA
IN LIBRUM SEXTUM ELEMENTORUM EUCLIDIS

QUORUM

PARTEM QUARTAM

PRÆSIDE

CHRISTOPHORO FRIDERICO PFLEIDERER

UNIVERSITATIS ET COLLEGII ILLUSTRIS PROFESSORE PHYSICES ET MATHESEOS PUBL. ORD.

PRO CONSEQUENDO GRADU MAGISTERII

D. SEPT. MDCCCV.

PUBLICE DEFENDENT

THEOPHILUS ULRICUS OSIANDER, *Stuttgardianus.*
LUDOVICUS ADOLPHUS SCHIKARD, *Tubingensis.*
CAROLUS FRIDERICUS PLANCK, *Nürtingensis.*
CHRISTOPHORUS FRIDERICUS SCHÜZ, *Dettingensis.*
CHRISTIANUS HENRICUS HINTRAGER, *Schopflocensis.*

CANDIDATI MAGISTERII PHILOSOPHICI IN ILLUSTRI STIPENDIO THEOLOGICO.

TUBINGÆ
LITERIS SCHRAMMIANIS.

DEFINITIO V. ET PROPOSITIO XXIII.

§. 195.

Propositionis XXIII ([1]): *Τα ισογωνια παραλληλογραμμα προς αλληλα λογον εχει τον συγκειμενον εκ των πλευρων* ([2]), ſenſus, ut ex demonſtratione ejus patet, hic eſt: Cognitis laterum circa æquales parallelogrammorum æquiangulorum angulos rationibus mutuis colligi ex iis poſſe rationem, quam areæ parallelogrammorum invicem habeant. Vel rationem mutuam parallelogrammorum æquiangulorum pendere ab rationibus laterum ipſorum circa æquales angulos, & modum, quo illa ex his eliciatur, Propoſitio docet.

Eo enim redit momentum demonſtrationis, ut, ſi vel ipſa parallelogrammorum ΑΓ, ΓΖ (*Fig.* 85. 86.) circum æquales angulos ΒΓΔ, ΕΓΗ

(1) Cum Propoſitio hæc, pariter ac XIVta, nonniſi iterata Propoſitionis VI, 1. applicatione nitatur, & argumenti XIVta cœpti continuatio ac ſupplementum ſit; transpoſitione haud apta propoſitiones inter ad figuras ſimiles pertinentes, nec ullo modo cum ipſa connexas, inſerta fuiſſe videtur.

(2) Legendum vel intelligendum eſſe εκ των λογων των πλευρων, indicat Theorematis expoſitio: Εϛω ισογωνια παραλληλογραμμα τα ΑΓ, ΓΖ (*Fig.* 85.), ισην εχȣσα την υπο ΒΓΔ γωνιαν τη υπο ΕΓΗ· λεγω, οτι το ΑΓ παραλληλογραμμον προς το ΓΖ παραλληλογραμμον λογον εχει των συγκειμενον εκ (των λογων, vel ſimpliciter των) των πλευρων, τȣτε ον εχει η ΒΓ προς την ΓΗ, και τȣ ον εχει η ΔΓ προς την ΓΕ. Vulgaris lectio "ex lateribus compoſitam" abſurda eſt, inquit *Rob. Simſon* (p. 376. in verſione *Matthiae* p. 87.).

Ceterum, quod res ipſa & expoſitio monet, bina intelliguntur parallelogrammorum latera circum æquales angulos, ſeu generatim (§. 133.) contigua.

Parallelogramma, ut in XIVta (§. 137.), ſic etiam ſibi mutuo poſſunt adaptari, ut ipſorum anguli æquales ΒΓΔ, ΕΓΗ congruant (*Fig.* 86.). De conſtructione Euclidea conf. §. 135. ſq. In utraque ea parallelogrammorum latera in directum ponuntur, quorum mutuæ rationes dari cenſentur.

ΕΓΗ latera ΒΓ & ΓΗ, ΔΓ ac ΓΕ, proinde & eorum rationes dentur; vel (quod ſubintelligi cenſendum eſt) ſi lineæ ſaltem dentur rectæ α & β, γ & δ, quarum rationes eædem ſint rationibus laterum ΒΓ & ΓΗ, ΔΓ & ΓΕ; oſtendatur, duas quoque exhiberi poſſe rectas Κ, Μ, quarum ratio mutua eadem ſit rationi parallelogrammorum ΑΓ, ΓΖ.

§. 196.

Pariter *Propoſitionis* VIII, 5 (3): *Οι επιπεδοι αριθμοι προς αλληλυς λογον εχυσι τον συγκειμενον εκ των πλευρων*, demonſtratio duos exhiberi poſſe numeros Η, Κ, eosque in eadem ratione minimos, adſtruit, quorum ratio eadem ſit rationi numerorum planorum (*Lib.* VII. *Defin.* 16.) $A = \Gamma \times \Delta$, $B = E \times Z$; ſi rationes laterum $\Gamma : E$, $\Delta : Z$ in numeris minimis dentur.

§. 197.

Rectæ pro lubitu ſumtæ Κ reſpondens Μ (§. 195. *Fig.* 85. ſq.) iterata Problematis VI, 12. applicatione ſic inveniri docetur: ut primum rectis, rationem $B\Gamma : \Gamma H$ exhibentibus, & aſſumtæ Κ, quarta proportionalis Λ; tum rectis rationem $\Delta\Gamma : \Gamma E$ ſiſtentibus, & inventæ Λ, quarta proportionalis Μ conſtruatur.

Ac *Propoſitioni* VIII, 5. in uſum ejus præmiſſa VIII, 4ta rationibus numericis datis $\Gamma : E$, $\Delta : Z$, tres numeros Η, Θ, Κ invenire deinceps minimos in datis illis rationibus docet.

§. 198.

Identitatis rationum rectarum $K : M$ ac parallelogrammorum $A\Gamma : \Gamma Z$ (§. 195. *Fig.* 85. ſq.), numerorumque $H : K$ ac planorum $A : B$ (§. 196.) demonſtrandæ gratia, ibi tertium parallelogrammum ΓΘ, utrique ΑΓ, ΓΖ

(3) Alterius *Elementorum* propoſitionis, ejusque præter VI, 23tiam ſolius, in qua rationis ex aliis compoſitæ mentio ſit. Propoſitionem VI, 23tiæ analogam de parallelepipedis ſupplet *Rob. Simſon* in *Lib.* XI. *Prop.* D. poſt XI, 33tiam (p. 269. ſqq. 402. *Matth.* p. 138. ſq.). Pariter in *Libro* VIII. ſimile theorema de numeris ſolidis (*Lib.* VII. *Defin.* 17.) deſideraveris.

ΓZ respective æquealtum, sub latere ΔΓ prioris, ac ΓH latere posterioris; hic tertius numerus planus Λ sub latere Δ prioris A, ac latere E alterius B, construitur.

Tum iterata Propositionum VI, 1. VII, 17. V, 11. applicatione infertur esse

parallelogr. $\left\{\begin{array}{l} A\Gamma : \Gamma\Theta = K : \Lambda \\ \Gamma\Theta : \Gamma Z = \Lambda : M \end{array}\right.$; numer. plan. $\left\{\begin{array}{l} A : \Lambda = H : \Theta \\ \Lambda : B = \Theta : K \end{array}\right.$

Denique hinc, vi Propositionis V, 22. & analogæ VII, 14. efficitur

$A\Gamma : \Gamma Z = K : M$ $\quad\quad$ $A : B = H : K.$

§. 199.

Jam vero rationes K : M, H : K, termino artis dici primum ex rationibus $\left\{\begin{array}{ll} K : \Lambda & H : \Theta \\ \Lambda : M, & \Theta : K \end{array}\right\}$; tum ex rationibus $\left\{\begin{array}{ll} B\Gamma : \Gamma H & \Gamma : E \\ \Delta\Gamma : \Gamma E, & \Delta : Z \end{array}\right\}$, quæ prioribus $\left\{\begin{array}{ll} K : \Lambda & H : \Theta \\ \Lambda : M, & \Theta : K \end{array}\right\}$ respective eædem sint (§. 197.), componi adjicitur.

Οι αρα λογοι της τε K προς την Λ, και της Λ προς την M, οι αυτοι εισι τοις λογοις των πλευρων, της τε BΓ προς την ΓH, και της ΔΓ προς την ΓE. Αλλ ο της K προς την M λογος συγκειται εκ τε τȣ της K προς την Λ λογȣ και τȣ της Λ προς την M· ωςε και η K προς την M λογον εχει τον συγκειμενον εκ των πλευρων.

Οι αρα H, Θ, K προς αλληλȣς εχȣσι τȣς των πλευρων λογȣς. Αλλ ο τȣ H προς τον K λογος συγκειται εκ τȣ τȣ H προς τον Θ και τȣ τȣ Θ προς τον K· ο H αρα προς τον K λογον εχει τον συγκειμενον εκ των πλευρων (4).

Denique post demonstratam rationum AΓ : ΓZ & K : M, A : B & H : K identitatem (§. 198.) concluditur: Και $\left\{\begin{array}{l} \text{το } A\Gamma \\ \text{ο } A \end{array}\right\}$ αρα προς $\left\{\begin{array}{l} \text{το } \Gamma Z \\ \text{τον } B \end{array}\right\}$ λογον εχει τον συγκειμενον εκ των πλευρων.

(4) Hæc quidem in quibusdam exemplaribus desiderari, & commode abesse posse notat *Dav. Gregorius* (Ευκλειδȣ τα Σωζομενα. Oxon. 1703. p. 175.). Præmissa autem ab auctore fuisse arguit subsumtio ad calcem demonstrationis: Ο δε H προς τον K λογον εχει τον συγκειμενον εκ των πλευρων.

§. 200.

Prorsus nulla igitur in deductionibus *Propositionum* VI, 23. VIII, 5. habetur ratio ejus, quæ in *Elementis* nunc exstat, iisdemque verbis ab *Eutocio*, seculi post C. N. sexti scriptore, ex iis recitatur (5), *Lib.* VI. *Definitionis* 5tæ: Λογος εκ λογων συγκεισθαι λεγεται, οταν αι των λογων πηλικοτητες εφ εαυτας πολλαπλασιασθεισαι ποιωσι τινα (6); hoc ipso jam nomine (7), & laxo, in quod desinit, effato satis suspectæ. Ambiguo

(5) *Commentar.* in locum *Archimedis*, qui §. 202. affertur (p. 160.): Υπομνηστεον δη, πως ελεγετο λογος εκ λογων συγκεισθαι. Ως γαρ εν τη Στοιχειωσει, οταν αι των λογων πηλικοτητες εφ εαυτας πολλαπλασιασθεισαι ποιωσιν τινα· πηλικοτητος δηλονοτι λεγομενης τȣ αριθμȣ, ȣ παρωνυμος εστιν ο δεδομενος λογος — Ταυτον δε ειπειν και τȣ αριθμȣ τȣ πολλαπλασιαζομενȣ επι τον επομενον ορον τȣ λογȣ, και ποιȣντος τον ηγȣμενον.

(6) Sic editio Oxoniensis *Dav. Gregorii* (p. 113.). Basileensis *Hervagii* habet τινας (p. 68.). *Meibomius* (*De proportionibus Dialogus.* Hafn. 1655. p. 78.) monet: nec πηλικοτητας facile suppleri; nequaquam certe λογȣς. Conf. Not. 19.

(7) Vid. *Rob. Simson* (p. 373. *Matth.* p 383. sq). Idemque si non verbis, re tamen ipsa *Clavius* fatetur (p. 536.); & *Saccherius* (*Euclides ab omni naevo vindicatus.* Mediol. 1733. *Lib.* II. *Pars* II. *in qua expenditur quinta Definitio Libri VI.* p. 138. sq.) ratione nec rei, nec terminis textus Græci congrua (conf. Lib. V. Defin. 15. & Prop. 17. 18. Lib. VII. Defin. 13. 15.) excusare sic annititur: „Nolo dissimulare, quod jam inutilis fieret illa Definitio, super qua disputamus. Nam respondeo: voluisse utique Euclidem rationem veluti reddere nominis ab ipso assumti, ita ut nempe ad eum modum una aliqua ratio intelligatur ex pluribus rationibus componi, quo unus quispiam numerus ex pluribus numeris invicem multiplicatis exoriri intelligitur & componi; sed ea tamen nuspiam violata lege, ut nunquam ad demonstrandum eam Definitionem adhibeat, nisi antea ita omnes terminos disposuerit, ut locum habere possit demonstratio ex æquo juxta 22dam quinti. Atque ita semper faciunt omnes magni geometræ tam veteres quam recentiores — Unde tandem constat: illam Defin. 5. sexti nulla difficultati obnoxiam

biguo & vago τινα *Theon*, ſeculi poſt C. N. quarti ſcriptor, addit πηλικοτητα λογȣ (8); Σχολιον εις το ϛ. Αδηλȣ in parte priori ſubſtituit λογον (9). Plerique Commentatores, *Clavius* ex. gr. (p. 532.) interpretantur; nonnulli etiam, ut *Vitello* (*Opticæ* Lib. I. Baſil. 1572. p. 4.), *Tartalea* (*Euclide.* Venet. 1543. Fol. 78. b.), *Dav. Gregorius* (p. 513.) immediate vertunt: Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum $\left\{\begin{matrix}\text{quantitates}\\ \text{denominatores}\end{matrix}\right\}$ inter ſe $\left\{\begin{matrix}\text{multiplicatæ}\\ \text{multiplicati}\end{matrix}\right\}$ illius faciunt $\left\{\begin{matrix}\text{quantitatem}\\ \text{denominatorem}\end{matrix}\right\}$ (10).

§. 201.

noxiam eſſe; utpote quæ ſolius nominis impoſitionem decernit, nulli poſtea ad demonſtrandum uſui futuram."

(8) *Commentar.* in locum *Ptolemaei*, qui §. 202. citatur (p. 62.): λογος εκ δυο λογων η και πλειονων συγκεισθαι λεγεται, οταν αι των λογων πηλικοτητες πολλαπλασιασθεισαι ποιωσι τινα πηλικοτητα λογȣ: ubi primum, quod conſtet (alibi quam in textu, quem habemus, *Elementorum*) hæc Definitio traditur; quare & *Theon* ipſam, ſublata genuina, *Elementis* inſeruiſſe ab *Rob. Simſon* (p. 372. ſq. *Matth.* p. 82. ſq. 84.) accuſatur: "Nihil in geometriæ elementis tironibus difficilius intellectu haberi ſolet doctrinâ de rationum compoſitione; quam abſurdam & αγεωμετρικην reddidit *Theon* ſubſtituendo Definitionem 5tam Libri VI. vice Definitionis bonæ rationis compoſitæ, quam ſine dubio dederat *Eudoxus* vel *Euclides* poſt Definitionem rationis triplicatæ &c. in Libro V, proprio ſcilicet ejus loco — *Theonem* enim in *Elementa* eam induxiſſe vix dubitari poteſt: exſtat enim in *Commentariis* ejus in *Ptolemaei* Μεγαλην Συνταξιν; ubi & [vid. Not. 15.] puerilem tradit ejus explicationem, utpote ſolummodo eis rationibus convenientem, quæ numeris exhiberi poſſunt."

(9) In edit. Elementor. Baſileenſi p. 67: λογος εκ λογων συγκεισθαι λεγεται, οταν πηλικοτητες τινων λογων πολλαπλασιαζομεναι ποιωσι λογον. Εκεινος ο λογος συγκεισθαι εκ των λογων εκεινων λεγεται, ων αι πηλικοτητες ποιȣσιν αυτον. Πηλικοτητας δε λεγει, αφ ων ονομαζονται· ως απο τȣ δυο, ο διπλασιος.

(10) Ex relatis in Not. 5. 9. liquet: juxta *Eutocium* atque *Auctorem Scholii* πηλικοτητας λογων ſignificare denominatores ſeu exponentes, quos dicimus, rationum. Idemque ſupponi ab *Theone* patebit ex Nota 16.

§. 201.

Contra aperte ea denominationis *rationis compositæ* explicatio in demonstrationibus Propositionum VI, 23. VIII, 5. (§. 199.) subsumitur, quam strictius *Campanus* in Lib. VII. Defin. 19. [11], *Galilei* (*Principio della quinta giornata dettata ad Evang. Torricelli da aggiungersi all' altre quatro de' Discorsi e Dimostrazioni matematiche intorno alle due nuove scienze, appartenenti alla meccanica ed a' movimenti locali*, in *Elementi piani e solidi d'Euclide*. Fiorenze 1769. *Parte* II. p. 138. sqq.), *Herigonus* (*Cursus math.* Paris. 1644. Tom. I. *Euclidis Elementa*. p. 205.) & *Barrow* (*Euclidis Element. Libri* XV. Cantabrig. 1655. p. 93.) in suis Defin. 10. Lib. V. [12], *Scarburgh* (*The English Euclide*. Oxford. 1705. Schol. in Defin. 10. Lib. V. & in Defin. 5. vulgarem Lib. VI. p. 194. 240.), *Lorenz* (*Euklids Elemente*. Halle 1781. 1798.) in ea, quam tradit, Defin. 5. Lib. VI, aliique recentiores; uberius *Viviani* (*Scienza* uni-

---

(11) *Euclidis Element. Libri* XV. Basil. 1558. p. 169. "*Defin.* 18. Cum fuerint quotlibet numeri continue proportionales; dicetur proportio primi ad tertium sicut primi ad secundum duplicata, ad quartum vero triplicata. *Defin.* 19. Cum continuatæ fuerint eædem vel diversæ proportiones; dicetur proportio primi ad ultimum ex omnibus composita."

Definitionem 5. *Lib.* VI. *Campanus* non habet; quod & *Meibomius* (*Praefat.* p. 6.) ac *Rob. Simson* (p. 373. *Matth.* p. 84.) notant.

Et in demonstratione quidem VIII, 5tæ (p. 204.) per Definitionem proportionis compositæ concludens *Campanus* suam Libr. VII. 19nam innuere videtur: sed in demonstratione VI, 23tiæ, apud ipsum 24tæ (p. 158.) ad dicta in fine 11mæ Defin. L. V. (p. 109.) remittit; quæ ad rationis compositæ exponentem multiplicatione denominatorum rationum componentium producendum, propius igitur ad 5tam Lib. VI. Defin. (§. 200.) spectant.

(12) Quas ambo his enunciant verbis: "Quotlibet magnitudinibus ordine positis, proportio primæ ad ultimam componitur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, & ita deinceps, donec extiterit proportio." Uterque tamen deinde etiam vulgarem Lib. VI. Defin. 5. (§. 200.) tradit.

universale delle proporzioni, Defin. 14. 15. in supra nominatis *Elementi piani e solidi d'Euclide.* P. II. p. 11. sqq.), *Rob. Simson* in Defin. A. quam 11mæ Lib. V. subnectit (p. 132. sq. *Matth.* p. 40.), & post ipsum *Playfair* in sua Defin. 10. Lib. V. (p. 131.) exponunt; *Simson* quidem his verbis:

1°. "Si fuerint quotcunque magnitudines ejusdem generis; prima ad ultimam habere dicitur rationem compositam ex ratione, quam habet prima ad secundam, & ratione secundæ ad tertiam, & ea, quam habet tertia ad quartam, & ita deinceps usque ad ultimam. Ex. gr. sint magnitudines *A*, *B*, *C*, *D*: prima *A* habere dicitur ad ultimam *D* rationem compositam ex ratione ipsius *A* ad *B*, & ratione *B* ad *C*, & ratione *C* ad *D*; vel ratio *A* ad *D* dicitur composita esse ex rationibus *A* ad *B*, *B* ad *C*, & *C* ad *D*" (13).

2°. "Si igitur ratio *A* ad *B* eadem sit rationi *E* ad *F*; & ratio *B* ad *C* eadem fuerit rationi *G* ad *H*; & ratio *C* ad *D* eadem rationi *K* ad *L*: *A* ad *D* habere dicitur rationem compositam ex rationibus, quæ eædem sunt rationibus *E* ad *F*, *G* ad *H*, & *K* ad *L*. Idemque intelligitur, quando brevitatis gratia dicitur *A* ad *D* habere rationem compositam ex rationibus *E* ad *F*, *G* ad *H*, & *K* ad *L*."

3°. "Similiter si ratio *M* ad *N* eadem sit rationi *A* ad *D*; præcedentibus manentibus: brevitatis gratia dicitur ratio *M* ad *N* eadem esse rationi compositæ ex rationibus" [vel *A* ad *B*, *B* ad *C*, & *C* ad *D*; vel] "*E* ad *F*, *G* ad *H*, & *K* ad *L*"; imo quod & *Playfair* addit, ipsa ratio *M* ad *N* ex rationibus [vel *A* ad *B*, *B* ad *C*, *C* ad *D*; vel] *E* ad *F*, *G* ad *H*, *K* ad *L* componi dicitur.

§. 202.

(13) Huic quoque explicationi, non vulgari Def. 5. Lib. VI. (§. 200.), respondent, quæ in Definitionibus 10. 11. Lib. V. traduntur declarationes denominationum, rationibus ex *A* : *B*, *B* : *C*, *C* : *D* compositis tum adhiberi solitarum, quando rationes *A* : *B*, *B* : *C*, *C* : *D* invicem sunt eædem. Conf. *Clavius* p. 536. sq.; *Galilei* p. 141. sq.; *Scarburgh* p. 194. 256.; *Simson* p. 373. sq. *Matth.* p. 84. sq.

§. 202.

Eodemque sensu ceteri Geometræ veteres Græci denominationem rationis compositæ usurpant ([14]).

Archimedes ex. gr. in *Propos.* 5. *Lib. II. de sphæra & cylindro* (Αρχιμηδȣς τα Σωζομενα, μετα των Ευτοκιȣ Ασκαλωνιτȣ Υπομνηματων. Oxon. 1792. p. 158. *Archimeds zwey Bücher über Kugel und Cylinder* — Tübing. 1798. p. 77. *Fig.* 44.) infert: Επει ο της ΡΛ προς ΛΧ λογος συνηπται εκτε τȣ ον εχει η ΡΛ προς ΛΔ, και η ΔΛ προς ΛΧ· αλλ ως μεν η ΡΛ προς ΛΔ, το απο ΔΒ προς το απο ΔΧ· ως δε η ΔΛ προς ΛΧ, ȣτως η ΒΖ προς ΖΧ· ο αρα της ΡΛ προς ΛΧ λογος συνηπται εκτε τȣ ον εχει το απο ΒΔ προς το απο ΔΧ, και η ΒΖ προς ΖΧ. Πεποιηϑω δε ως η ΡΛ προς ΛΧ, η ΒΖ προς ΖΘ — Και ο της ΒΖ αρα λογος προς ΖΘ συνηπται εκ τε τȣ ον εχει το απο ΒΔ προς το απο ΔΧ, και η ΒΖ προς ΖΧ. Confer. ibidem *Propos.* 9. (Edit. Oxon. p. 187. Tubing. p. 97.).

Plura etiam exempla suppeditant Απολλωνιȣ Περγαιȣ Κωνικων Βιβλ. δ. τα πρωτερα, μετα Παππȣ Αλεξανδρεως Λημματων και Ευτοκιȣ Ασκαλωνιτȣ Υπομνηματων. Oxon. 1710. Videantur, præter alias, *Lib.* I. *Propos.* 39. 40. p. 68. sqq. *Lib.* III. *Propos.* 54. 56. p. 211. sq. 214. seqq.

Ptolemæus (Κλ. Πτολεμαιȣ Μεγαλης Συνταξεως Βιβλ. ιγ. Θεωνος Αλεξανδρεως εις τα αυτα Υπομνηματων Βιβλ. ια. Basil. 1538. Συνταξεως Βιβλ. α. p. 18.) Propositionem: Εις δυο ευθειας τας ΑΒ και ΑΓ (*Fig.* 87.) διαχθεισαι δυο ευθειαι, ητε ΒΕ και η ΓΔ, τεμνετωσαν αλληλας κατα το Ζ σημειον· λεγω, οτι ο της ΓΑ προς ΑΕ λογος συνηπται εκτε τȣ της ΓΔ προς ΔΖ, και τȣ της ΖΒ προς ΒΕ, sic adstruit: Ηχϑω γαρ δια τȣ Ε τη ΓΔ παραλληλος η ΕΗ. Και επει παραλληλοι εισιν αι ΓΔ και ΕΗ, ο της ΓΑ προς ΑΕ λογος ο αυτος εςι το της ΓΔ προς ΕΗ. Εξωϑεν δε η ΖΔ. Ο αρα της ΓΔ προς ΕΗ λογος συγκειμενος εςαι εκτε τȣ της ΓΔ προς ΔΖ και τȣ της ΔΖ προς ΗΕ· ωςε και ο της ΓΑ προς ΑΕ λογος συγκειται εκτε τȣ της ΓΔ προς ΔΖ και τȣ της ΔΖ προς ΗΕ. Εςι δε και ο της ΔΖ προς ΗΕ λογος ο αυτος τω της ΖΒ προς ΒΕ, δια το παραλληλȣς

(14) Contra Definitionis 5. Lib. VI. §. 200, nullum apud eos vestigium invenitur. (*Galilei* p. 137. *Viviani* p. 12. *Scarburgh* p. 236. *Simson* p. 373. *Matth.* p. 83.)

ληλȣς παλιν ειναι τας ΕΗ και ΖΔ. Ο αρα της ΓΑ προς ΑΕ λογος συγκειται εκτε τȣ της ΓΔ προς ΔΖ, και τȣ της ΖΒ προς ΒΕ [15].

§. 203.

---

(15) *Theon* in prolixa hujus loci commentatione (Εις το τȣ Πτολεμαιȣ Βιβλ. α. Υπομνημα. p. 61. sqq.) primum (p. 61.) Propositionem *Ptolemaei* accuratius enunciat, demonstrationemque uberius, servata autem ipsius acceptione denominationis rationis compositæ (§. 201.), exponit; tum (p. 61. sq.) ulterioris, quod ait, illustrationis gratia Propositionem 23. Lib. VI. *Element.* adhibet, quæ vero argumentationem complicat potius, quam explicat; denique (p. 62.) ex abrupto, & sine ulla ad propositum applicatione, Definitionem in Not. 8. relatam profert, eique hæc subjicit:

Εχετω γαρ το ΑΒ προς το ΓΔ (*Fig.* 88.) λογον δεδομενον, και το ΓΔ προς το ΕΖ λογον· λεγω, οτι ο τȣ ΑΒ προς ΕΖ λογος συγκειται εκ τε τȣ τȣ ΑΒ προς ΓΔ, και τȣ ΓΔ προς ΕΖ, τȣτεϛιν, οτι εαν η τȣ ΑΒ προς το ΓΔ λογȣ πηλικοτης πολλαπλασιασθη επι την τȣ ΓΔ προς ΕΖ τȣ λογȣ πηλικοτητα, την τȣ ΑΒ προς ΕΖ ποιησει.

Εϛω γαρ προτερον το μεν ΑΒ τȣ ΓΔ μειζον, το δε ΓΔ τȣ ΕΖ· και εϛω το μεν ΑΒ τȣ ΓΔ διπλασιον, το δε ΓΔ τȣ ΕΖ τριπλασιον. Επει ȣν το μεν ΓΔ τȣ ΕΖ τριπλασιον εϛι, τȣ δε ΓΔ διπλασιον το ΑΒ· το αρα ΑΒ τȣ ΕΖ εϛιν εξαπλασιον, επει και εαν το τριπλασιον τινος διαπλασιασωμεν, γινεται αυτȣ εξαπλασιον. Τȣτο γαρ εϛι κυριως συνθετις. Η ȣτως. Επει το ΑΒ τȣ ΓΔ εϛι διπλασιον, διῃρησθω το ΑΒ εις τα τω ΓΔ ισα τα ΑΗ, ΗΒ. Και επει το ΓΔ τȣ ΕΖ εϛι τριπλασιον, ισον δε το ΑΗ τω ΓΔ· και το ΑΗ αρα τȣ ΕΖ τριπλασιον εϛι. Δια τα αυτα δη και το ΗΒ τȣ ΕΖ εϛι τριπλασιον· και ολον αρα το ΑΒ τȣ ΕΖ εϛιν εξαπλασιον. Ο αρα τȣ ΑΒ προς το ΕΖ λογος συγκειται δια τȣ ΓΔ μεσȣ ορȣ εκτε τȣ τȣ ΑΒ προς το ΓΔ λογȣ, και τȣ τȣ ΓΔ προς ΕΖ.

Similiter, quando ΓΔ utraque ΑΒ, ΕΖ sit $\left\{\begin{matrix}\text{minor}\\ \text{major}\end{matrix}\right\}$: exponentium $\left\{\begin{matrix}3,\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{3}\end{matrix}\right\}$, quos sumit, rationum ΑΒ : ΓΔ, & ΓΔ : ΕΖ multiplicatione denominatorem $\left\{\begin{matrix}\frac{3}{2}\\ \frac{2}{3}\end{matrix}\right\}$ rationis ΑΒ : ΕΖ produci; hanc igitur juxta suam Definitionem ex illis componi, *Theon* infert; additque: Ομοιως δε και επι των λοιπων πτωσεων. Conf. *Clavius* p. 533. sq.

Theonis illa definitio & argumentatio alteram quoque constituunt par-

§. 203.

Juxta primum modum §. 201. frequens in vita etiam communi instituitur compositio rationum.

Sic quando concluditur: hebdomas continet 7 dies; dies, 24 horas; proinde hebdomas $7^{ies}24$, seu 168 horas: hora, 60 minuta prima; ideoque hebdomas $168^{ies}60$, seu 10080 minuta prima: rationes hebdomadis ad horam, ad minutum primum temporis, ex rationibus hebdomadis ad diem, diei ad horam, horæ ad minutum primum, componuntur; h. e. priores haud immediate cognitæ ex posterioribus notis inferuntur.

Idemque fit in ceteris, quas vocant, specierum homogenearum majorum ad minores ope unius pluriumve intermediarum reductionibus; monetarumque & mensurarum diversarum comparationibus, quæ (ut in regula, quam dicunt, catenaria) mediante aliqua, aliquibusve aliis, instituuntur.

§. 204.

Generatim, datis exponentibus seu denominatoribus (16) duarum pluriumve rationum, magnitudines inter homogeneas tres pluresve intercedentium, earumque ita invicem connexarum, ut terminus consequens cujusvis sit antecedens sequentis; exponens rationis, quam prima harum magnitudinum habet ad tertiam, & ad quamlibet subsequentem (& quæ juxta §. 201. n°. 1. componi dicitur ex ratione primæ ad secundam ac secundæ ad tertiam, atque universim ex rationibus

tem *Scholii* §. 200. & Nota 9. commemorati. Ibi vero sub initium legitur: Εχετω γαρ το ΑΒ προς το ΓΔ λογον δεδομενον, οιον, διπλασιον, η τριπλασιον, η τινα αλλον, και το ΓΔ προς το ΕΖ και αυτο δεδομενον· λεγω — ητοι εαν η τȣ ΑΒ προς το ΓΒ λογȣ πηλικοτης πολλαπλασιαϲθη επι την τȣ ΓΔ προς το ΕΖ λογȣ πηλικοτητα, ποιει την τȣ ΑΒ πρὸς το ΕΖ; & præter alias quasdam leviores discrepantias, ad calcem: Ομοιως δη και επι πλειονων, και επι των λοιπων πτωσεων.

(16) H. e. numeris integris fractisve, indicantibus, cui multiplo, aut cui parti, quibusve partibus consequentium æquentur termini antecedentes rationum (Not. 5. 15.).

nibus primam inter ac subsequentem illam intermediis), producitur continua multiplicatione denominatorum rationum intermediarum.

Nempe si $A = 5B$, $B = 7C$, $C = 4D$, $D = 1\frac{1}{2}E$ seu $\frac{3}{2}E$, &c.: substitutis $7C$ loco B, $4D$ loco C, $\frac{3}{2}E$ loco D, &c. colligitur esse

$$\begin{aligned} A &= 5 \times 7C = 35C \\ &= 35 \times 4D = 140D \\ &= 140 \times \tfrac{3}{2}E = 210E \text{ \&c.} \end{aligned}$$

Et universim si $A = mB$, $B = nC$, $C = pD$, $D = qE$, &c. denotantibus m, n, p, q, &c. numeros integros vel fractos; similiter infertur esse

$$\begin{aligned} A &= m \times nC \\ &= m \times n \times pD \\ &= m \times n \times p \times qE \text{ \&c.} \end{aligned}$$ (17)

§. 205.

(17) Mireris, *Theonem* iisdem ratiociniis (Not. 15.) conversum superstruere pronunciatum: Rationem dici ex aliis componi, quatenus denominator ipsius multiplicatis invicem harum exponentibus producatur; rationum igitur compositionem vel justo nimis restringere; vel quarumlibet rationum datarum exponentes integros fractosve dari, nullo tot rationum numeris ineffabilium habito censu, supponere. Prius eum haud voluisse apparet. Ad vulgarem igitur rationum proportionumque ideam, nonnisi denominatores earum distincte vel confuse perceptos spectantem, cujus perperam applicatæ alia etiam in *Elementis*, quæ habemus, vestigia exstant (vid. *Rob. Simson* p. 358. sq. 361. 363. 371. 379. sq. *Matth.* p. 48. 53. 58. 80. 91. sq.), notionem compositionis rationis accommodasse existimandus videtur.

Forsan nimis quoque angustam censebat Definitionem antiquam, verosimiliter ad num. I. §. 201. (æque ac Defin. 10. 11. Lib. V.) restrictam; nec enunciatis generalibus Propositionum, ut ipsarum *Ptolemaei*, VI, 23tiæ *Element*, ac similium, congruam: dum sua idoneum his sensum immediate subjiciat; & alteram quoque, ut casum particularem, vi ostensorum ab ipso complectatur.

Ut proinde præceps ipse in Not. 15. indicatus transitus conjiciendi ansam præbeat: *Theonem*, expuncta *Elementis* Definitione §. 201, alteram §. 200. illis inseruisse, vel insertam jam reperisse; iis certe, quorum in usum

 Com-

§. 205.

Quando numeris exprimuntur rationes datæ, ex quibus alia haud imme-

---

Commentarium ſuum ſcripſit, notam ac familiarem ſuppoſuiſſe; nec niſi id ſibi agendum putaſſe, ut eam cum *Ptolemaei* argumentatione: Εξωθεν δε η ΖΔ. Ο αρα της ΓΔ προς ΕΗ λεγος συγκειμενος εςαι εκτε τȣ της ΓΔ προς ΔΖ και τȣ της ΔΖ προς ΗΕ, conciliaret.

Eodem modo pronunciata: rationem componi, ſumto inter ipſius terminos aliquo medio, aliquibusve mediis; & cum exponens ejus multiplicatione exponentium aliarum rationum producatur (Not. 5.), ad ſe mutuo refert *Eutocius* in iis, quæ prolixius in locum *Archimedis* §. 202. relatum (p. 160. ſqq.), ſtrictius in Propoſitionem 11. Lib. I. *Conicor. Apollonii*, occaſione ſumta ab VI, 23tiæ *Elem.* in demonſtratione ejus applicatione, p. 32. ſq. commentatur; cum *Theone* in ceteris etiam conſentiens, nec niſi ejus argumentationem per exempla reprehendens. Ipſe vero, poſitis $\left\{\begin{matrix} D \\ E \end{matrix}\right\}$ exponentibus rationum $\left\{\begin{matrix} A : C \\ C : B \end{matrix}\right\}$, ita ut ſint $A = D \times C$, $C = E \times B$, & factis $D \times E = F$, ac $F \times B = H$; A eſſe $= H = F \times B$, igitur $F = D \times E$ denominatorem eſſe rationis $A : B$, proinde hanc juxta Deſin. §. 200. ex rationibus $A : C$, $C : B$ eſſe compoſitam, priori loco ſic infert:

$F : E = F \times B : E \times B = H : C$
& $E : C = D \times E : D \times C = F : A$
unde alterne $E : F = C : A$
& inverſe $F : E = A : C$
Ergo $H : C = A : C$; & hinc $H = A$.
Altero autem loco ſic: $E : C = D \times E : D \times C = F : A$
& $E : F = E \times B : F \times B = C : H$
ideoque alterne $E : C = F : H$
Proinde $F : A = F : H$; & hinc $A = H$.

Sed cum, ob E, F numeros, niſi A, C, H pariter numeri ſint, per communem rationis notionem & *Elem.* V Defin. 4. intelligi non poſſit eſſe $E : C = F : A = F : H$; proportiones ab *Eutocio* adhibitæ, ut (quod poſteriori immediate cognita componitur ſeu infertur; hæc eadem eſt rationi, quam

---

riori loco p. 33. contendit) de magnitudinibus univerſim demonſtratio ipſius valeat, efficere nequeunt. Potiorque hoc reſpectu eſt *Theonis* argumentatio (Not. 15.): quippe ad magnitudines quascunque A, C, B patens; nec ad numeros, exempli inſtar pro denominatoribus rationum ab eo ſumtos, reſtricta (§. 204.).

Vitello (loc. §. 200. cit. p. 7. ſq.) poſitis $\left\{\begin{matrix} D \\ E \\ F \end{matrix}\right\}$ rationum $\left\{\begin{matrix} A:C \\ C:B \\ A:B \end{matrix}\right\}$ denominatoribus, quos, pariter ac magnitudines A, C, B, per lineas rectas deſignat, ex eo, quod ſic tam $D \times C$ quam $F \times B$ ipſi A, proinde inter ſe æquentur, per VI, 16. *Elem.* infert eſſe $F:D = C:B$; ideoque $F = E \times D$, pariter ac (ſupp.) $C = E \times B$; rationem igitur $A:B$ ex rationibus $A:C$, $C:B$ juxta Defin. §. 200. componi.

Demonſtrationes Euclideas Lib. V. *Elem.* deſignandis per lineas rectas magnitudinibus A, B, C &c. ſuam imitari *Vitello* quidem ſibi perſuaſiſſe videtur; ſed argumentatio ex VI, 16. eam ad ipſas lineas rectas reſtringit. Tum lineam fieri ex ductu lineæ in lineam, ſeu denominatores rationum lineæ ad lineam eſſe lineas, Euclideis communibusque notionibus repugnat. Numeros autem denotare ſumtis D, E, F: tam eſſe $F \times B = A$, quam $D \times C = A$, igitur $F \times B = D \times C$, intelligitur quidem, quascunque magnitudines homogeneas deſignent A, C, B; & hinc eſſe $F:D = C:B$ conſequitur juxta Not. 18. nro. II.; unde per V, 4. infertur eſſe $F : E \times D = C : E \times B$; ideoque $F = E \times D$, ob $C = E \times B$ (ſupp.); verum ſic *Vitellonis* argumentatio plus non conficit quam *Theonis*.

Quare, cum hinc genuinam eſſe cenſeret Definitionem §. 200, inde *Theonis*, *Eutocii* ac *Vitellonis* demonſtrationes ipſi haud ſatisfacerent; *Savilius* (*Praelectiones tresdecim in principium Elementorum Euclidis*. Oxon. 1621. Lect. VII. p. 140.) profeſſus eſt: "In pulcherrimo geometriæ corpore duo ſunt nævi, duæ labes, nec, quod ſciam, plures, in quibus eluendis & emaculandis cum veterum, tum recentiorum vigilavit induſtria. Prior eſt Poſtulatum 5." [ſeu Ax. 11. Lib. I.]. "Poſterior pertinet ad compoſitio-quam productum multiplicationis terminorum antecedentium rationum data-

---

ſitionem rationum: rationem ſcilicet A ad B componi ex ratione A ad quodcunque extrinſecus ſumtum, v. gr. C, & illius extrinſecus ſumti ad B."

Et *Gregorius a S. Vincentio* (*Opus geometricum quadraturae circuli & ſectionum coni.* Antverp. 1647. Lib. VIII. p. 872.), eadem admiſſa Definitione, ut *Principium* ſe ſumere declaravit: "Datis tribus vel pluribus quantitatibus, ratio primæ ad ultimam componitur ex rationibus mediarum; ſive prima quantitas habet ad ultimam rationem, quæ oritur denominatoribus mediarum rationum inter ſe multiplicatis;" adjungens: "Quod principium etſi veriſſimum ſit, & a magnis geometris non ſemel uſurpatum, non tamen usque adeo omnibus arridet, ut ejus demonſtrationem non requirant. Ego vero cenſeo cum omnibus geometris tamdiu inter principia eſſe cenſendum, donec alicui ratio occurrat hoc ipſum geometrica demonſtratione inter theoremata reducendi."

Talem (ceterum fere totam ex ipſa Libri VIII. *Gregorii a S. Vincentio* de Proportionalitate, quam vocat, doctrina deſumtam) traditurus *Tacquet* (*Elementa geometriae planae ac ſolidae* — Amſtelod. 1683. primum Antverp. 1654. Lib. V. Pars III. p. 166. ſqq.) primum quidem (p. 167. ſq.) rationis nullius irrationalis, ſi ſola ſit, exhiberi poſſe denominatorem fatetur. At ſi duæ fuerint pluresve, alio quodam ſenſu earum poſſe denominatores exhiberi contendit: ipſis nempe ad rationes commune conſequens habentes reductis, commune hoc conſequens explere locum unitatis, & antecedentia eſſe denominatores rationum, oſtendentes, quomodo una ratio ad alteram ſe habeat. Tum magnitudinem dici per magnitudinem multiplicari cum analogia quadam ad numeros (p. 174.) monet: quando, ut quæpiam pro unitate aſſumta ſe habet ad alterutram datarum, ita reliqua fiat ad aliquam quartam, quæ productum vocabitur. Datis igitur rationibus $A:B$, $B:C$; & facto $B:C = X:B$: denominatores illarum eſſe A, X; B vero explere munus unitatis: ideoque, rurſus facto $B:X = A:Z$, productum multiplicationis A per X eſſe Z; rationemque $Z:B$ eam eſſe aſſerit, quæ ex multiplicatione rationum $A:B$ & $X:B$ ſeu $B:C$ producatur. Sed, ob $Z:A = X:B = B:C$, alterdatarum habet ad productum ex ipsarum terminis consequentibus: quo theo-

---

alterne esse $Z:B=A:C$; ergo & rationem $A:C$ ex multiplicatione rationum $A:B$, $B:C$ produci, seu ex rationibus $A:B$, $B:C$ componi, p. 175. sqq concludit: rationem enim, quæ ex plurium rationum multiplicatione producatur, eam esse, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habeat ad unitatem seu consequens commune; pariterque (per Defin. §. 200.) rationem, quæ ex pluribus rationibus componitur, eam esse, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habeat ad unitatem seu consequens commune (p. 170. 173.). Conf. *Gregor. a S. Vincent.* p. 868. sqq. 877. 882. 908.

Præter significatus vero haud proprios, vocibus: *denominator rationis, multiplicare*, tributos; alio etiam sensu, quam *Theon* & *Eutocius*, lectionem λογον (Not. 9) supponente, Definitionem §. 200. *Tacquet* accipit. Quibus concessis; rationem $Z:B$, ideoque etiam $A:C$, ex rationibus $A:B$, $B:C$ juxta Defin. §. 200. componi, missa rationum multiplicatione ambigua (*Barrow Lectiones habitæ in scholis publicis Acad Cantabrig. anno* 1666. Lond. 1684. Lect. V. p. 253. sqq. *Hindenburg* in *Lempii Erläuterungen der Kästnerischen Anfangsgr. der Arithm. Geom. u. Trigon.* p. 308. sqq. & Præfat. fol. b. 2. sqq.), poterat inferre.

In *Euclidis Elementor. geometricor. Lib. XIII. ex traditione Nasiridini Tusini* (seculo decimo tertio *Vitelloni* fere coævi), Arabice impressis Romæ 1594. juxta versionem Definitionum Lib. VI. a Dno *Hauber*, Prof. Denkendorfensi, mecum communicatam, compositio rationis e duabus rationibus homogeneis jam quoque dicitur effectio rationis, cujus quantitas (denominator) sit ad quantitatem unius duarum, ut quantitas alterius ad unitatem; rationis quantitas (denominator) ad magnitudinem ipsi homogeneam pro unitate sumtam statuitur esse ut rationis terminus antecedens ad consequentem (quod, proprio denominatoris significatu sumto recidit in multiplicationis magnitudinum explicationem ex *Tacqueti* scholio p. 174. relatam); & his conformiter rationem $A:C$ ex rationibus $A:B$, $B:C$ componi sic ostenditur: Sit ut A ad B, ita D ad unitatem ex magnitudinibus ejusdem genetheoremate praxis etiam regulæ trium, quam vocant, compositæ nititur.

Quippe si $A:B = 3:\ 2 = m:n$
$B:C = 1:\ 4 = p:q$
$C:D = 9:11 = r:s$
$D:E = 23:\ 7 = t:v$
&c.

deno-

generis assumtam; & ut B ad C, ita E ad unitatem; & fiat F ad E, ut D ad unitatem. Erit (V, 11.) ut A ad B, ut F ad E. Sed est B ad C, ut E ad unitatem. Igitur ex æquo ordinate (V, 22.) A ad C, ut F ad unitatem. Quare F denominator est rationis $A:C$. Cum & D, E sint rationum $A:B$, $B:C$ denominatores; ac F ad E sit uti D ad unitatem: componitur itaque ratio $A:C$ ex rationibus $A:B$ & $B:C$.

Utraque porro demonstratio (*Nasiridini* & *Tacqueti*) contra methodi accuratæ leges (*Rob. Simson* p. 365. *Matth.* p. 63.) supponit, quam invenire prius haud docuit, duabus propositis magnitudinibus quibuscunque tertiam; tribus, quartam proportionalem. Quarum symbolica, ad analogiam numerorum, repræsentatione si acquiescatur; deductiones illæ ad eam redeunt, qua *Barrow* in nota ad Defin. 5. Lib. VI. & *Wallis* (*Opp. math.* Pars I. Oxon. 1657. *Mathesis universalis*, Cap. 30. p. 261. *Adversus Meibomii de proportionibus dialogum Tractatus*. p. 26. sq.) utuntur: "Ratio $A:C$ componitur ex rationibus $A:B$ & $B:C$; nam $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{A}{C}$." Conf. Not. 19.

Wallis quidem (*Adv. Meibom. Tract.* p. 27.) hoc æque de rationibus numeris ineffabilibus valere contendit. Verius autem *Barrow* alia occasione in *Lectionibus* supra nominatis p. 332. profitetur: "Quando rationum termini sunt asymmetri: consequentes in antecedentibus non continentur aliquoties; adeoque peragi nequeunt accuratæ divisiones, nec ulli distincte comprehensibiles quoti exhiberi. Quoti vero sub confusione quadam imaginarii quando vel quomodo sibimet æquentur, haud ita fuerit in promtu discernere, vel ἀποδεικτικως ostendere." Conf. ibid. p. 261. sq.

denotantibus m, n, p, q, r, s, t, v numeros datos, eosque integros (quia rationes numero integro & fracto, vel duobus fractis expressæ facile per V, 15. ad æquipollentes numeris integris expressas reducuntur): ob

$$\begin{array}{ll} 2A = 3B & nA = mB \ (18 \text{ no. I.}) \\ 4B = C & qB = pC \\ 11C = 9D & sC = rD \\ 7D = 23E & vD = tE \\ \&c. & \end{array}$$

ideo-

---

(18) Ratio mutua duarum magnitudinum æqualium A, B æqualis est rationi mutuæ duarum quarumcunque aliarum æqualium C, D. Etenim ob $A=B$, $C=D$ (supp.), est tam $mA \gtreqless nB$, quam $mC \gtreqless nD$, pro eo ac $m \gtreqless n$ (Lib. I. Ax. 2. & V, 1. Coroll).

Quare $B:B=1:1$

& hinc (V,18.) $2B:B=2:1$

$3B:B=3:1$

&c.

$(r+1)B:B=r+1:1$, si $rB:B=r:1$ pro numero quocunque integro.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Igitur} & mB:B=m:1 \\ \text{\& (V,4. Cor.)} & B:nB=1:n \\ \text{(V, 22.)} & mB:nB=m:n \end{array}\right\} \text{pro numeris quibuscunque integris } m, n;$$

h. e. multipla ejusdem magnitudinis B sunt ut numeri, juxta quos ea metiuntur magnitudinem B.

Quare I°. si $A:B=m:n$

ob $nA:nB=A:B$ (V, 15.)

& $mB:nB=m:n$ (demonstr.)

est $nA:nB=mB:nB$ (V, 11.)

ideoque $nA=mB$ (V, 9.)

II°. Vicissim si $nA=mB$

ideoque $nA:nB=mB:nB$ (V, 7.)

ob $nA:nB=A:B$ (V, 13.)

& $mB:nB=m:n$ (dem.)

est $A:B=m:n$ (V, 11.)

C

$$\text{ideoque}\quad \begin{array}{ll} A=\frac{3}{2}B & \qquad A=\frac{m}{n}B \\ B=\frac{1}{4}C & \qquad B=\frac{p}{q}C \\ C=\frac{9}{11}D & \qquad C=\frac{r}{s}D \\ D=\frac{23}{7}E & \qquad D=\frac{t}{v}E \end{array}$$

&c.

$$\text{fit (§. 204.)}\quad \begin{array}{ll} A=\frac{3}{2}\times\frac{1}{4}C=\frac{3}{8}C & \quad A=\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}C=\frac{mp}{nq}C \\ \quad =\frac{3}{8}\times\frac{9}{11}D=\frac{27}{88}D & \quad =\frac{mp}{nq}\times\frac{r}{s}D=\frac{mpr}{nqs}D \\ \quad =\frac{27}{88}\times\frac{23}{7}E=\frac{621}{616}E & \quad =\frac{mpr}{nqs}\times\frac{t}{v}E=\frac{mprt}{nqsv}E \end{array}$$

&c.

$$\text{proinde}\quad \begin{array}{ll} 8A=3C & \qquad nqA=mpC \\ 88A=27D & \qquad nqsA=mprD \\ 616A=621E & \qquad nqsvA=mprtE \end{array}$$

&c.

$$\text{\& hinc}\quad \begin{array}{ll} A:C=3:8 & \qquad =mp:nq\ (18\text{ no. II.}) \\ A:D=27:88 & \qquad =mpr:nqs \\ A:E=621:616 & \qquad =mprt:nqsv \end{array}$$

&c.

§. 206.

$$\text{Vel ob}\quad A:B=3:2 \qquad =m:n$$

$$B:C=\left\{\begin{array}{l} 1:4 \\ 2:8 \end{array}\right. \qquad =\left\{\begin{array}{l} p:q \\ n:\frac{nq}{p} \end{array}\right. \text{(VII, 19. Cor. \& V, 11.)}$$

$$\text{est (V, 22.)}\quad A:C=3:8 \qquad =\left\{\begin{array}{l} m:\frac{nq}{p} \\ mp:nq \end{array}\right. \text{(V, 15. 11.)}$$

$$\text{Tum ob}\quad C:D=\left\{\begin{array}{l} 9:11 \\ 8:\frac{8\times 11}{9} \end{array}\right. \qquad =\left\{\begin{array}{l} r:s \\ nq:\frac{nqs}{r} \end{array}\right. \text{(VII, 19. Cor. \& V, 11.)}$$

$$\text{est (V, 22.)}\quad A:D=\left\{\begin{array}{l} 3:\frac{8\times 11}{9} \\ 27:88 \end{array}\right. \qquad =\left\{\begin{array}{l} mp:\frac{nqs}{r} \\ mpr:nqs \end{array}\right. \text{(V, 15. 11.)}$$

Porro

Porro ob $D:E = \begin{cases} 23 : 7 \\ 88 : \frac{88\times 7}{23} \end{cases} = \begin{cases} t : v \\ nqs : \frac{nqsv}{t} \end{cases}$ (VII, 19. Cor. & V, 11.)

fit (V, 22.) $A:E = \begin{cases} 27 : \frac{88\times 7}{23} \\ 621 : 616 \end{cases} = \begin{cases} mpr : \frac{nqsv}{t} \\ mprt : nqsv \end{cases}$ (V, 15. 11.)

§. 207.

Vel ob $A:B = 3 : 2 = \begin{cases} m : n \\ p\times m : p\times n & \text{(V, 15.)} \\ m\times p : n\times p & \text{(VII, 16.)} \end{cases}$

& $B:C = \begin{cases} 1 : 4 \\ 2 : 8 \end{cases} = \begin{cases} p : q \\ n\times p : n\times q & \text{(V, 15.)} \end{cases}$

est (V, 22.) $A:C = 3 : 8 = mp : nq$

Tum ob $A:C = \begin{cases} 9\times 3 : 9\times 8 \\ 27 : 72 \end{cases} = \begin{cases} r\times mp : r\times nq & \text{(V, 15.)} \\ mp\times r : nq\times r & \text{(VII, 16.)} \end{cases}$

& $C:D = \begin{cases} 9 : 11 \\ 8\times 9 : 8\times 11 \\ 72 : 88 \end{cases} = \begin{cases} r : s \\ nq\times r : nq\times s & \text{(V, 15.)} \end{cases}$

fit (V, 22.) $A:D = 27 : 88 = mpr : nqs$

Itaque etiam $A:D = \begin{cases} 23\times 27 : 23\times 88 \\ 621 : 2024 \end{cases} = \begin{cases} t\times mpr : t\times nqs & \text{(V, 15.)} \\ mpr\times t : nqs\times t & \text{(VII, 16.)} \end{cases}$

Unde ob $D:E = \begin{cases} 23 : 7 \\ 88\times 23 : 88\times 7 \\ 2024 : 616 \end{cases} = \begin{cases} t : v \\ nqs\times t : nqs\times v & \text{(V, 15.)} \end{cases}$

fit (V, 22.) $A:E = 621 : 616 = mprt : nqsv$ (19).

&c.

 §. 208.

(19) *Orontius Finaeus* (*In ſex priores Libros geometricor. Element. Euclidis Demonſtrationes*. Paris. 1544. primum 1536.) poſtquam Definitionem 5. Lib. VI. (§. 200.) ad rationes numeris datis expreſſarum quantitatum ſeu denominatorum eo, quo *Theon* (not. 15.), modo p. 120. ſqq. applicuit: "Eſt

§. 208.

Strictiori §. 201. n°. 1. exposito sensu Propositio V, 22. sic potest enunciari: Rationes, quæ ex rationibus respective iisdem inter se com-

"Est & alius", inquit p. 122. sq. "rationalium quantitatum multiplicandi modus, ipsis potissimum numeris, ad numerumve relatis quantitatibus, peculiaris — Nam, ex numerorum sub datis rationibus constitutorum multiplicatione numeri procreantur, sub composita vel inde constante ratione se habentes. Multiplicandi sunt itaque primum antecedentes numeri ad invicem; & antecedens ipsius compositæ rationis efficietur: deinde consequentes itidem inter sese ducendi, ut consequens ejusdem rationis generetur." Quod pariter tantum exemplis quibusdam *Orontius* illustrat; *Clavius* in *Appendice Libri IX. Element.* (T. II. p. 198. sq.) eo fere modo, qui §. 207. traditur, demonstrat.

Hoc etiam modo, alterove præcedentium, tum vero etiam exceptionibus Notæ 17. obnoxio, conversa Propositionis §. 205. Definitioni 5. Lib. VI. (§. 200.) fuit accommodata.

Sic *Wallis* (*Adv. Meibom.* p. 25. sqq.) de lectionibus τινα & τινας Defin. illius (§ 200. & Not. b.) pronunciavit: "Mihi quidem (utut τινα potiorem lectionem putem, quam & secutos video interpretes) perinde fere videtur, utrumvis dicatur. Si legatur τινας: interpretandæ erunt πηλικοτητες ipsæ quantitates comparatæ, sive rationum termini" [illæ autem in Elementis vocantur μεγεθη; hi alibi ὁρον: vid. §. 132. & *Meibom. Dial.* p. 95] qui propterea erunt invicem ducendi, ut faciant τινας (πηλικοτητας), terminos alios — Puta si componendæ rationes sint $a : b$ & $\alpha : \beta$: erit $a \times \alpha$ compositæ antecedens, & $b \times \beta$ compositæ consequens; ipsaque propterea ratio composita $a \times \alpha : b \times \beta$. Sin legatur τινα (quod potius crediderim); per rationis πηλικοτητα intelligendum erit, quod ex antecedentis ad consequentem applicatione emergit, puta quotiens aut fractio. Adeoque rationis $a : b$ quantitas erit $\frac{a}{b}$; & rationis $\alpha : \beta$ quantitas $\frac{\alpha}{\beta}$: quæ λογων πηλικοτητες invicem ductæ ποιωσι τινα (πηλικοτητα

λογου;

componuntur, eædem ſunt inter ſe. (*Rob. Simſon Elem. Lib. V. Propos. F.* p. 169. *Matth.* p. 72.)

§. 209.

λογȣ; id enim ſupplendum malim quam λογον), efficiunt, inquam, compoſitæ rationis quantitatem (vel, ſi libet, compoſitam sationem) $\frac{a}{b} \times \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\alpha}{b\beta}$." Conf. ejusdem *Matheſis univerſalis.* p. 261. ſq.

Jac. Bernoulli Poſitiones inter *mathematicas de rationibus & proportionibus* (Baſil. 1688. *Opp.* Tom. I. Genev. 1744. p. 361. ſqq.) has propoſuit 36tam & ſeq. (p. 370.): "Si quotcunque rationes proponantur; productum omnium antecedentium ad productum omnium conſequentium habere dicitur rationem compoſitam ex rationibus propoſitis. Hinc, datis quotcunque magnitudinibus, ratio primæ ad ultimam compoſita cenſetur ex ratione primæ ad ſecundam, ſecundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam, & ſic porro usque ad ultimam."

Definitionem 5. Lib. VI. juxta interpretationem *Walliſianam* lectionis τινος & Poſit. 36. *Bernoullii* informatam tradunt *Reyhers in Teutſcher Sprache vorgeſtellter Euclides* (Kiel 1699. p. 303.), & *Koenig* (*Elem. de geometrie, contenant les ſix prem. Livres d'Euclide.* Haye 1758. p. 224. 244.). Poſterior in *Appendice Lib. V*, præmiſſis (p. 219. 222.) Definitionibus: Multiplier dans un ſens general n'eſt autre choſe que trouver une grandeur, qui ſoit à une grandeur homogene dans la raiſon donnée d'une autre grandeur quelconque à une unité homogene; les produits, qui reſultent de la multiplication de deux grandeurs par un meme facteur ſeront nommés des Equiproduits; & huic addita obſervatione: Il ne faut pas confondre les equimultiples avec les equiproduits —; Propoſitionem 1: Les equiproduits mA & mB ſont comme les facteurs A & B, inde infert; quod, ob $\left\{ \begin{matrix} mA : A \\ mB : B \end{matrix} \right\} = m : 1$ (Defin.), fit $mA : A = mB : B$ (V, 11.), ideoque $mA : mB = A : B$. Tum rationem $A : C$ ex rationibus $A : B$, $B : C$ componi Propoſitione 5. (p. 225.) ſic concludit: Compoſant la raiſon $A : B$ avec la raiſon $B : C$, il en reſulte la raiſon $AB : CB$ (Defin.). Mais les termes AB, CB ſont des equiproduits des facteurs A & C (Defin.). Partant $A : C = AB : BC$ (Prop. 1.). Conf. Not. 23.

§. 209.

Pariter si duæ pluresve rationes eædem sunt totidem aliis; terminisque singularum ac magnitudini datæ vel assumtæ quarta proportionalis inveniri potest (20): latiori etiam sensu §. 201. n°. 2. sq. eædem inter se erunt rationes, quarum una ex prioribus, altera ex posterioribus componitur.

Quodsi enim $A : B = E : F$
$C : D = G : H$:
factis $A : B = K : L$ & $E : F = N : O$
$C : D = L : M \quad G : H = O : P$;
etiam sunt (V, 11.) $K : L = N : O$
$L : M = O : P$
igitur (V, 22.) $K : M = N : P$
h. e. juxta §. 201. n°. 2. ratio ex rationibus $A : B$, $C : D$ composita eadem est rationi compositæ ex rationibus $E : F$, $G : H$ (21).

Eodemque modo assertum de pluribus quam duabus rationibus, compositioneque rationum juxta §. 201. n°. 3. accepta, demonstratur. (*Rob. Simson* l. c. *Propos.* G. p. 169. sq. *Matth.* p. 73.).

§. 210.

Eædem porro inter se sunt rationes, quarum utraque sensu §. 201. n°. 2. ex iisdem rationibus componitur.

Hoc quippe sensu si tam ratio $A : B$, quam altera $C : D$, ex rationibus $E : F$, $G : H$ componitur; sintque $E : F = K : L$
$G : H = L : M$:

erit

(20) Eadem determinatio propositionibus analogis sequentibus est applicanda. Conf. Not. 25.

(21) Rationem ex duabus pluribusve sensu §. 201. nr. 2. 3. compositam, ubi e re erit, compendii causa designabimus, has serie verticali scriptas uncis includendo. Sic propositum §. 209. exprimetur modo sequenti:

$$\begin{pmatrix} A : B \\ C : D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E : F \\ G : H \end{pmatrix}, \text{ si } \begin{matrix} A : B = E : F \\ C : D = G : H. \end{matrix}$$

erit tam $\left.\begin{array}{l} A:B \\ \text{quam } C:D \end{array}\right\} = K:M$ (§. 201. n°. 2.); igitur $A:B = C:D$ (V, 11.) [22].

§. 211.

Sic propositum §. 205. de duabus primum, tum de pluribus rationibus per VIII, 5. (§. 196.) [23] obtinetur.

Positis enim $A : B = m : n$
$B : C = p : q$:
utraque ratio $A:C$, & $m \times p : n \times q$ componitur ex rationibus $m:n$ ac $p:q$; illa juxta §. 201. n°. 2; hæc juxta VIII, 5. pariterque sensu §. 201. n°. 2. (§. 196. sqq):
quare est $A : C = m \times p : n \times q$ (§. 210.).
Et si rursus $C : D = r : s$:
pariter utraque ratio $A:D$, & $mp \times r : nq \times s$ componitur ex rationibus $mp:nq$ ac $r:s$ (§. 201. n°. 2. & VIII, 5.).
Unde $A : D = m \times p \times r : n \times q \times s$
&c.

§. 212.

Rationem, quæ ex duabus datis rationibus, per lineas rectas numerosve expressis, componitur, dari, h. e. (*Euclid. Dator. Defin.* 2.) ipsi æqualem lineis rectis numerisve exhiberi posse, efficiunt demonstrationes Propositionum VI, 23. VIII, 5. (§. 195. sqq.) [24]

§. 213.

(22) Seu $A:B = C:D$, si tam $A:B = \left(\begin{array}{l} E:F \\ G:H \end{array}\right)$, quam $C:D = \left(\begin{array}{l} E:F \\ G:H \end{array}\right)$.

(23) Assumta Definitionis 5. Lib. V. (§. 200.) interpretatione in Not. 19. commemorata, identica foret Propositio VIII, 5.; per ambages igitur prorsus incongruas in *Elementis* demonstraretur. Posterius perstaret, admissa Definitionis illius interpretatione in Not. 17. exposita; a qua facillimus est ad priorem transitus (*Wallis* loco in Not. 19. cit.). Conf. *Rob. Simson* p. 374 *Matth.* p. 85.

(24) Idem similiter ad plures, quam duas, rationes sic datas, ex iisque compositas extenditur. Conf. §. 203. sqq.

§. 213.

Eædem conſequentiæ, invertendo ſolum rationes poſteriores ipſisque æquales (V, 4. Coroll.), nectuntur, ſi §. 195. *Fig.* 85. ſq. rationes ΒΓ : ΓΗ, ΕΓ : ΓΔ, & §. 196. rationes Γ : Ε, Ζ : Δ, dari ſupponuntur.

Atque ita, ob parallelogr. $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{A\Gamma : \Gamma\Theta = B\Gamma : \Gamma H} \\ \mathrm{Z\Gamma : \Gamma\Theta = E\Gamma : \Gamma\Delta} \end{array}\right.$ (VI, 1.),

& numeros planos (§. 196. 198.) $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{A : \Lambda = \Gamma : E} \\ \mathrm{B : \Lambda = Z : \Delta} \end{array}\right.$ (VII, 17. 18.)

conſequitur (§. 195. ſqq.): dari rationem mutuam $\left\{\begin{array}{ll} \text{parallelogrammor.} & \mathrm{A\Gamma : \Gamma Z} \\ \text{numeror. planor.} & \mathrm{A : B} \end{array}\right\}$,

ſi utriusque ratio ad $\left\{\begin{array}{l} \text{idem parallelogrammum } \Gamma\Theta \\ \text{eundem numerum planum } \Lambda \end{array}\right\}$ detur.

§. 214.

Hacque ipſa methodo *Euclides*, præmiſſis Propo[illegible] (*Dator.* 1. 2.): Duarum magnitudinum homogenearum datarum dari rationem mutuam; & viciſſim dari magnitudinem, cujus ad datam magnitudinem ratio detur [25]; generatim duas magnitudines, quarum rationes ad eandem tertiam dentur, pariter mutuo habere datam rationem in *Dator. Propos.* 8. [26], (apud *Rob. Simſon* & *Schwab* Prop. 9.) demonſtrat.

Denotantibus enim *A*, *C* magnitudines, quæ ad eandem *B* datas habeant rationes; & aſſumta quacunque magnitudine *D*: primum datæ rationi *A* : *B* æqualem fieri jubet *D* : *E*; cujus terminum conſequentem *E* dari infert ex *Dat.* 2. Tum datæ rationi *B* : *C* jubet inveniri æqualem *E* : *F* (ſeu, immediate datæ *C* : *B* æqualem *F* : *E*): ac rurſus *F* dari per *Dat.* 2; ideoque rationem *D* : *F* dari per *Dat.* 1; huic

(25) Si nempe, quod *Rob. Simſon* addit, duabus magnitudinibus, quibus hæc ratio exprimitur, & magnitudini datæ, quarta proportionalis poſſit inveniri.

(26) Τα προς αυτο λογον εχοντα δεδομενον και προς αλληλα λογον εξει δεδομενον.

huic vero, ob $\begin{matrix} A:B=D:E \\ B:C=E:F \end{matrix}$ (constr.), eandem esse rationem $A:C$ per V, 22. concludit.

§. 215.

Quo nixus principio *Euclides* deinde suam *Datorum* tractationem absque rationum compositione instruit; nominatim Propositionis 70. partem priorem (apud *Rob. Simson* & *Schwab* Prop. 67.), *Element.* VI, 23tiæ respondentem: Εαν δυοιν παραλληλογραμμων περι ισας γωνιας — αι πλευραι προς αλληλας λογον εχωσι δεδομενον, και αυτα τα παραλληλογραμμα προς αλληλα λογον εξει δεδομενον, sic adstruit (27):

Ad latus BC unius parallelogrammi AC (*Fig.* 89.), sub angulo CBG deinceps posito angulo $ABC = E$, applicato parallelogrammo $BH =$ alteri DF (I, 44.); est parallelogr. $AC:DF = AC:BH$ (V, 7.) $= AB:BG$ (VI, 1.).

Atqui ob ang. $G = ABC$ (I, 29.) $= E$ (supp.), & parallelogrammum $BH = DF$ (constr.), est $BG:DE = EF: \begin{cases} GH & \text{(VI, 14.)} \\ BC & \text{(I, 34.)} \end{cases}$.

Quare cum (supp.) detur ratio $EF:BC$, datur ratio $BG:DE$.
Per supp. vero etiam datur ratio $AB:DE$.
Proinde datur ratio $AB:BG$ (§. 214. seu *Dat.* 8.); ipsique æqualis $AC:DF$.

§. 216.

Quatenus ab modo, rationem, ex laterum ΒΓ & ΓΗ, ΔΓ ac ΓΕ (*Fig.* 85. sq.) rationibus compositam, lineis rectis numerisve datis exhibendi, abstrahitur; demonstratio VI, 23tiæ, præeunte *Candalla* (p. 129.), eo redigi potest, ut observetur: rationem parallelogrammorum ΑΓ, ΓΖ componi ex rationibus parallelogrammi ΔΓ ad ΓΘ, & hujus ad

(27) *Rob. Simson* Euclideæ deductioni eam, quam ex demonstratione VI, 23tiæ consequi §. 213. notavimus, ad normam demonstrationis *Dat.* 8væ (suæ 9.) compositam, substituit.

ad ΓZ (§. 201. n°. 1.), quæ eædem sint rationibus laterum ipsorum BΓ : ΓH, ΔΓ : ΓE (VI, 1.); itaque etiam dici ex his componi (§. 201. n°. 2.). Conf. *Clavius* p. 598; *Rob. Simson* p. 376. *Matth.* p. 87.

§. 217.

Quodsi desideratur, ut ratio parallelogrammorum AΓ, ΓZ seu composita ex rationibus laterum eorum, exhibeatur per rationem, quam ipsum prioris latus alterutrum BΓ habeat ad aliquam rectam datam; hæc erit quarta proportionalis duobus reliquis parallelogrammorum lateribus ΔΓ, ΓE, & lateri ΓH posteriois ΓZ, quod respondet lateri BΓ prioris AΓ.

Facta enim (VI, 12.) ΔΓ : ΓE = ΓH : I;

erunt parallelogr.	AΓ : ΓΘ	=	BΓ : ΓH (VI, 1.)
	ΓΘ : ΓZ = ΔΓ : ΓE (VI, 1.)	=	ΓH : I (V, 11.)
proinde	AΓ : ΓZ	=	BΓ : I (V, 22.)

§. 218.

Si ab recta ΓB (producta, quando opus est) abscinditur ΓN = I (quod juxta §. 23. 119. sq. immediate fit, diagonali ΔH parallelam EN agendo per punctum E; ac per N ducitur rectæ ΔΓ parallela: fit parallelogrammum ΓO = ΓZ (VI, 14.);

& hinc $\mathrm{A\Gamma : \Gamma Z = A\Gamma : \Gamma O}$ (V, 7.) $= \mathrm{B\Gamma} : \begin{cases} \mathrm{\Gamma N} \\ \mathrm{I} \end{cases}$ (VI, 1.).

§. 219.

Quare sic etiam potest Propositio VI, 23. enunciari: Si parallelogramma AΓ, ΓZ sint æquiangula; fiatque ut unum latus ΔΓ prioris ad unum ΓE posterioris, sic hujus alterum latus ΓH ad rectam I: erit parallelogrammum AΓ ad ΓZ, ut alterum latus BΓ prioris ad hanc rectam I.

§. 220.

Unde, data ratione parallelogrammi AΓ ad ΓZ datur ratio lateris BΓ prioris ad rectam I; estque ut unum latus ΔΓ prioris parallelogramlogrammi ΑΓ ad unum latus ΓΕ poſterioris ΓΖ. ſic hujus alterum latus ΓΗ ad hanc rectam Ι, ad quam alterum parallelogrammi prioris ΑΓ latus ΒΓ habet datam rationem mutuam parallelogrammorum ΑΓ, ΓΖ.

Quæ eſt *Dator.* Propoſitio 56. (apud *Rob. Simſon* & *Schwab*, pars prior 63tiæ): Εαν δυο ισογωνια παραλληλογραμμα προς αλληλα λογον εχει δεδομενον· εϛιν ως. η τȣ πρωτȣ πλευρα προς την τȣ δευτερȣ πλευραν, ȣτως η λοιπη δευτερȣ πλευρα προς ην η ετερα τȣ πρωτȣ πλευρα λογον εχει δεδομενον, ον το παραλληλογραμμον εχει προς παραλληλογραμμον; & analoge cum *Dat.* 70. (§. 215.) ſic demonſtratur (*Fig.* 89.): Ab producto latere AB parallelogrammi AC, cujus angulus $ABC = E$, abſcindatur BG quarta proportionalis alteri ejus lateri BC & lateribus EF, DE parallelogrammi DF; ac finiatur parallelogrammum $CBGH$. Erit hoc $= DF$ (VI, 14.); & $AB : BG = AC : BH$ (VI, 1.) $= AC : DF$ (V, 7. 11.). Lateribus igitur BC, EF, DE quarta proportionalis BG ea eſt, ad quam AB habet rationem datam parallelogrammi AC ad DF.

§. 221.

Propoſitio VI, 23. juxta demonſtrationem ejus Euclideam ſic quoque poteſt efferri: Si duo parallelogramma ſunt æquiangula; atque ut unum latus prioris ad unum poſterioris, ſic recta quæpiam aſſumta ſit ad ſecundam; & uti alterum latus prioris ad alterum poſterioris, ſic ſecunda illa recta ſit ad tertiam: prius parallelogrammum eſt ad poſterius, ut recta primitus aſſumta ad hanc tertiam (*Rob. Simſon* p. 375. *Matth.* p. 86.).

§. 222.

Denominatione *rationis compoſitæ* adhibita in compendium redigi enunciata VI, 23tiæ ſimiliumque propoſitionum, præſertim ſi plures quam duæ rationes conſiderandæ occurrant, ſponte ita apparet. Omnem tamen ejus vim unice hoc uſu terminare, quod *Rob. Simſon* velle videri poſſit (28), obſervatis §. 195. ſqq. 203. ſqq. §. 212. ſqq. haud eſt conſentaneum. Conf. *Viviani* p. 13. *Hindenburg* p. 317.

§. 223.

(28) Aſſerens (p. 375. *Matth.* p. 86.) "Nullus, quantum ſcio, proprium uſum

§. 223.

Quippe ratio, quæ ex aliis componi dicitur, eo ipſo ab his pendere, per eas determinari indicatur; ſic ut ex his cognitis juxta normam quandam conſtantem colligi atque inferri poſſit. Has porro & omnes, & ſimpliciſſimas deſignari ſupponitur, quas indoles magnitudinum, de quarum ratione ex iis componenda præcipitur, requirit; vel quas datorum problematis, cui enodando earum compoſitio adhibetur, conditio ſuggerit.

§. 224.

Sicut rationis ignotæ inveſtigatio compoſitione ejus ex rationibus ſcopo congruis dirigitur; &, quando hæ liquent, abſolvitur: ita viciſſim indagatio rationis, quam unam eſſe conſtat earum, ex quibus ratio data componitur, ad determinandam alteram alterasve hanc componentes reducitur; quo facto illa *diviſione*, quam vocant, *datæ rationis compoſitæ* per notam componentem alteram vel ex alteris compoſitam innoteſcit.

§. 225.

Reductionem diviſionis hujus ad compoſitionem docet *Pappi* Propoſitio 171. Lib. VII. *Collect. math.* ſeu Lemma 5. in Lib. I. *Conicor. Apollonii*: quo, ſi A ſit ad B in ratione compoſita ex rationibus $C:D$, $E:F$; viciſſim rationem $C:D$ ex rationibus $A:B$, ac $F:E$, ſeu inverſa ipſius $E:F$, componi oſtendit.

Facto enim $E:F = D:H$; erit (§. 201.) ratio, quæ ex rationibus $C:D$, $E:F$ componitur, h. e. (ſupp.) $A:B = C:H$. Quare cum ita

usum rationis compoſitæ hactenus oſtendit, vel propter quam cauſam in geometriam introducta fuerit; cum omnia, in quibus ſolet adhiberi ratio compoſita, poſſint etiam ſine ejusdem auxilio tum enunciari, tum demonſtrari. Uſus autem rationis compoſitæ in hoc unice conſiſtit, quod ejus ope periphraſes evitentur; & ita propoſitiones poſſint vel enunciari vel demonſtrari brevius, vel utrumque fieri poſſit." Ceterum eodem fere redit, quod *Galilei* p. 138. 142. ſq., *Saccherius* p. 137. 139. monent.

ita ſint $\quad C:H = A : B$
$\quad\quad\quad\;\; \underline{H:D = F : E}$
eſt (§. 201. & Not. 21.) $C : D = \begin{pmatrix} A : B \\ F : E \end{pmatrix}$ (29)

Eodemque modo, ex quotcunque rationibus $C:D$, $E:F$, $G:H$ &c. componatur ratio $A:B$; cæteris $E:F$, $G:H$ &c. ad unam $P:Q$ ex iis compoſitam reductis, demonſtratur: rationem $C:D$ componi ex rationibus $A:B$ & $Q:P$; ſeu C eſſe ad D in ratione compoſita ex directa A ad B & inverſa rationis P ad Q.

§. 226.

Hinc per §. 208. ſq. & V, 4. Cor. eædem etiam inter ſe ſunt rationes, quæ rationibus iisdem inter ſe $A:B$, $C:D$ per alias $E:F$, $G:H$ pariter inter ſe easdem diviſis obtinentur.

Quippe, ob $E:F = G:H$ (ſupp.), etiam eſt $F:E = H:G$ (V, 4. Cor.) Quare cum (ſupp.) quoque ſit $\quad A:B = C:D$: ratio ex $A:B$ ac $F:E$ compoſita eadem eſt rationi compoſitæ ex $C:D$ &

(29) *Euclides Dator.* Propoſitionem 68. (apud *Rob. Simſon* & *Schwab* 65.): Εαν δυο ισογωνια παραλληλογραμμα λογον εχει δεδομενον, και μια πλευρα προς μιαν πλευραν λογον εχει δεδομενον· και λοιπη πλευρα προς την λοιπην πλευραν λογον εξει δεδομενον, pariter ac 70mam (§. 215.), cujus converſam ſiſtit, eadem adhibita conſtructione, redigit ad *Dat.* 8vam (§. 214.). Quippe cum, iisdem, quæ §. 215. (*Fig.* 89) factis, ſint parallelogr. $AC:DF = AB:BG$, & $BC:EF = DE:BG$ (§. 215); datis parallelogrammorum $AC:DF$, laterumque $BC:EF$ rationibus, dantur laterum AB, DE rationes ad eandem rectam BG; ideoque etiam (*Dat.* 8.) ratio $AB:DE$. Cui inveniendæ ſi modus in *Dat.* 8va (§. 214.) præſcriptus applicatur; reſultat, quod *Pappi* Propoſitio dicit: nempe ob $AB : BG = AC : DF$
& $\underline{BG : DE = EF : BC}$
eſt $AB : DE = \begin{pmatrix} AC : DF \\ EF : BC \end{pmatrix}$
Simſon in demonſtratione ſuæ 65tæ rectam BG tantum juxta ſuam 63. (§. 220.) ducit, & ex hac 63. argumentatur.

& $H : G$ (§. 209); h. e. (§. 225.) quæ rationem $A : B$ per alteram $E : F$ dividendo prodit, ratio eadem est rationi divisione rationis $C : D$ per alteram $G : H$ oriundæ.

§. 227.

Idem in Propositionibus *H*, *K*, *Elementor*. Libro V. annexis (p. 170. sqq.; in versione *Matthiæ*, ubi vero deest Propos. *K*, p. 73. sq.) *Rob. Simson* uberius sic enunciat: "Si ratio ex quibusdam rationibus" [sive strictiori, sive latiori, §. 201. exposito sensu] "composita eadem sit rationi ex quibusdam aliis rationibus compositæ; fueritque una ratio ex prioribus, vel ratio ex quibusdam ex prioribus composita, eadem uni rationi ex posterioribus, vel rationi ex quibusdam ex posterioribus compositæ: erit reliqua ratio ex prioribus, vel ratio ex reliquis prioribus composita, eadem rationi reliquæ ex posterioribus, vel rationi ex reliquis posterioribus compositæ."

§. 228.

Uti parallelogramma æquiangula ΑΓ, ΓΖ (*Fig.* 85. sq.) ope tertii ΓΘ in ratione composita ex rationibus ΒΓ : ΓΗ, ΔΓ : ΓΕ esse in demonstratione VI, 23tiæ ostenduntur; sic eadem (quod enunciato Propositionis comprehenditur) etiam esse in ratione composita ex rationibus ΔΓ : ΓΕ, ΒΓ : ΓΗ, subsidio tertii parallelogrammi ΓΣ efficitur.

Et generatim, quando $A : B = \begin{pmatrix} C : D \\ E : F \end{pmatrix}$;

igitur, factis $\begin{matrix} C : D = K : L, \\ E : F = L : M \end{matrix}$ est $A : B = \begin{pmatrix} K : L \\ L : M \end{pmatrix} = K : M$ (V, 22.):

ob $K : M$ quoque $= \begin{pmatrix} L : M \\ K : L \end{pmatrix}$ (V, 23.) $= \begin{pmatrix} E : F \\ C : D \end{pmatrix}$;

pariter est $\quad A : B = \begin{pmatrix} E : F \\ C : D \end{pmatrix}$.

Similiterque rationem ex pluribus quam duabus compositam, mutato harum ordine, haud mutari ostenditur.

§. 229.

Inverse parallelogr. ΖΓ esse : ΓΑ $= \begin{pmatrix} \mathrm{E\Gamma} : \Gamma\Delta \\ \mathrm{H\Gamma} : \Gamma\mathrm{B} \end{pmatrix}$ vel $= \begin{pmatrix} \mathrm{H\Gamma} : \Gamma\mathrm{B} \\ \mathrm{E\Gamma} : \Gamma\Delta \end{pmatrix}$, ope

ope tertii parallelogrammi ΓΘ vel ΓΣ, eodem modo, quo rationis directæ ΑΓ : ΓΖ compoſitio, demonſtratur.

Pariterque generatim, quando $A:B = \begin{pmatrix} C:D \\ E:F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K:L \\ L:M \end{pmatrix} = K:M$;

eſt $B:A = M:K$ (V, 4. Cor.) $= \begin{pmatrix} L:K \\ M:L \end{pmatrix}$ (V, 23.) $= \begin{pmatrix} D:C \\ F:E \end{pmatrix}$ (V, 4. Cor.).

Quod rurſus ſimiliter ad rationem ex pluribus quam duabus compoſitam extenditur.

§. 230.

Si A, B, C, D ſunt magnitudines homogeneæ; eſt $\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A:D \\ C:B \end{pmatrix}$.

Factis enim $\dfrac{A:B = K:L \\ C:D = L:M}{}$, $\dfrac{A:D = K:O \\ C:B = O:P}{}$

ut ſint $\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \end{pmatrix} = K:M$ $\quad \begin{pmatrix} A:D \\ C:B \end{pmatrix} = K:P$ (§. 201.):

ob

$$\begin{array}{l} A:B = K:L \\ B:C = P:O \\ C:D = L:M \\ \hline \end{array}$$

eſt (§. 201.) $A:D$ ſeu (conſtr.) $K:O = \begin{pmatrix} K:L \\ P:O \\ L:M \end{pmatrix}$

Unde (§. 225.) $\quad \begin{pmatrix} K:O \\ O:P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K:L \\ L:M \end{pmatrix}$

h. e. (V, 22.) $\quad K:P = K:M$; ideoque $\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A:D \\ C:B \end{pmatrix}$.

§. 231.

Si $A:B = \begin{pmatrix} C:D \\ E:F \\ G:H \end{pmatrix}$, atque $E:F = D:I$; eſt $A:B = \begin{pmatrix} C:I \\ G:H \end{pmatrix}$.

Facto enim $G:H = I:K$, fit

$A:B = \begin{pmatrix} C:D \\ D:I \\ I:K \end{pmatrix}$ (§. 209.) $= C:K$ (§. 201.) $= \begin{pmatrix} C:I \\ I:K \end{pmatrix}$ (§. 201.) $= \begin{pmatrix} C:I \\ G:H \end{pmatrix}$ (§. 209.).

§. 232.

Sit A ad B in ratione compoſita ex rationibus $E:F$ & $G:H$; atque

atque $B:C=I:K$: erit A ad C in ratione composita ex rationibus $E:F$, $G:H$, $I:K$.

Factis enim $\begin{array}{l} P:Q=E:F \\ Q:R=G:H \\ R:S=I:K \end{array}$; unde $\begin{array}{l} P:R=\begin{pmatrix}E:F\\G:H\end{pmatrix} \\ P:S=\begin{pmatrix}E:F\\G:H\\I:K\end{pmatrix} \end{array}$:

erunt

$$\begin{array}{ll} A:B=P:R & (\S.\ 210.) \\ B:C=R:S & (V,\ 11.) \\ \hline A:C=P:S & (V,\ 22.)=\begin{pmatrix}E:F\\G:H\\I:K\end{pmatrix}. \end{array}$$

Idemque similiter & ad plures magnitudines A, B, C, D, &c., & ad rationes ipsarum rationibus mutuis æquipollentes simplices compositasve quaslibet, extenditur.

§. 233.

Si $A:B=\begin{pmatrix}C:D\\E:F\end{pmatrix}$; & A, B, C, D, E, F sunt magnitudines homogeneæ:

ob

$$\begin{array}{l} B:C=B:C \\ B:E=B:E \\ \hline \end{array}$$

fiunt

$$A:C=\begin{pmatrix}C:D\\E:F\\B:C\end{pmatrix}_{\S.232.}=\begin{pmatrix}B:C\\C:D\\E:F\end{pmatrix}_{\S.228.}=\begin{pmatrix}B:D\\E:F\end{pmatrix}_{\S.231.}$$

$$A:E=\begin{pmatrix}C:D\\E:F\\B:E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C:D\\B:E\\E:F\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C:D\\B:F\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B:D\\C:F\end{pmatrix}\S.230.$$

(*Castillion Sur une nouvelle proprieté des sections coniques*, in *Nouv. Mem. de l'Acad. de Berlin. Année* 1776. p. 298.). Ceteræ, quæ ibidem ex $A:B=\begin{pmatrix}C:D\\E:F\end{pmatrix}$ deducuntur rationes, ex §. 225. 229. 230. & nunc §. 233. ostensis consequuntur.

§. 234.

Ratio composita ex ejusdem rationis directa & inversa est ratio æqualitatis, seu æqualium.

Quippe si $A:B=E:F$

& $B:C=F:E$

fit $A:C=E:E$ (V, 22.)

proinde $A=C$ (*Simson Elem*, V. Prop. A. p. 142. *Matth.* p. 48.).

§. 235.

§. 235.

Compositionem vero plurium rationum ingredientes ejusdem rationis directa & inversa se mutuo destruunt: ita ut sint $\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \\ B:A \end{pmatrix} = C:D$; $\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \\ E:F \\ B:A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C:D \\ E:F \end{pmatrix}$; &c.

Factis enim
$$\begin{aligned} A:B &= K:L \\ C:D &= L:M \\ E:F &= M:N \end{aligned}$$

ideoque (§.201.) $\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \end{pmatrix} = K:M$

$\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \\ E:F \end{pmatrix} = K:N$:

ob $B:A = L:K$ (constr. & V, 4. Cor.)

fiunt $\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \\ B:A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K:M \\ L:K \end{pmatrix}$ (§. 232.) $= L:M$ (V, 23.) $= C:D$ (constr. &V,11.)

$\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \\ E:F \\ B:A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K:N \\ L:K \end{pmatrix} = L:N = \begin{pmatrix} C:D \\ E:F \end{pmatrix}$ (constr. & §.210.)

§. 236.

Hinc, si $\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E:F \\ G:H \end{pmatrix}$, atque $C:D = G:H$; pariter erit $A:B = E:F$.

Quippe; ob $\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E:F \\ G:H \end{pmatrix}$,

est $A:B = \begin{pmatrix} E:F \\ G:H \\ D:C \end{pmatrix}$ (§. 225.) $= \begin{pmatrix} E:F \\ C:D \\ D:C \end{pmatrix}$ (supp. & §.209.) $= E:F$ (§.235.)

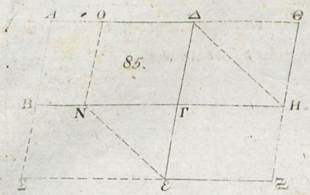
§. 237.

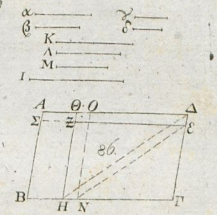
Vicissim si ratio, quæ ex duabus componitur, est ratio æqualitatis; rationum, ex quibus componitur, una est alterius inversa.

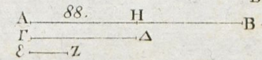
Nempe si $\begin{matrix} A:B=E:F \\ B:C=G:H \end{matrix}$ igitur $A:C = \begin{pmatrix} E:F \\ G:H \end{pmatrix}$;

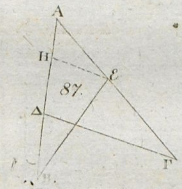
& $A=C$, ideoque $A:B=C:B$ (V,7.): fit $E:F=H:G$ (supp. & V, 4. Cor. V, 11.).

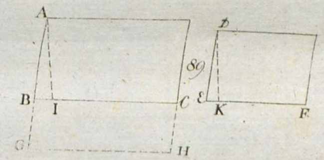
§. 238.











§. 238.

Pariter si in compositione trium pluriumve rationum duæ se mutuo destruunt, harum una alterius est inversa.

Quippe si $\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \\ E:F \end{pmatrix} = A:B$; & $\begin{matrix} A:B = K:L \\ C:D = L:M \\ E:F = M:N \end{matrix}$

est (§. 201.) $K:N = K:L$

ideoque (V, 9.) $N = L$

& (V, 7.) $L:M = N:M$; proinde $C:D = F:E$ (V, 4. Cor. V, 11.)

Pariter si $\begin{pmatrix} A:B \\ C:D \\ E:F \\ G:H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A:B \\ C:D \end{pmatrix}$; & $\begin{matrix} A:B = K:L \\ C:D = L:M \\ E:F = M:N \\ G:H = N:O \end{matrix}$

est (§. 201.) $K:O = K:M$

(V, 9.) $O = M$

(V, 7.) $M:N = O:N$; itaque $E:F = H:G$.

Et sic ulterius.

SCHOLIA
IN LIBRUM SEXTUM ELEMENTORUM EUCLIDIS

QUORUM

PARTEM QUARTAM

PRÆSIDE

CHRISTOPHORO FRIDERICO PFLEIDERER

UNIVERSITATIS ET COLLEGII ILLUSTRIS PROFESSORE PHYSICES ET MATHESEOS PUBL. ORD.

PRO CONSEQUENDO GRADU MAGISTERII

D. SEPT. MDCCCV.

PUBLICE DEFENDENT

THEOPHILUS ULRICUS OSIANDER, *Stuttgardianus.*

LUDOVICUS ADOLPHUS SCHIKARD, *Tubingensis.*

CAROLUS FRIDERICUS PLANCK, *Nürtingensis.*

CHRISTOPHORUS FRIDERICUS SCHÜZ, *Dettingensis.*

CHRISTIANUS HENRICUS HINTRAGER, *Schopflocensis.*

CANDIDATI MAGISTERII PHILOSOPHICI IN ILLUSTRI STIPENDIO THEOLOGICO.

TUBINGÆ

LITERIS SCHRAMMIANIS.