SCHOLIA
IN LIBRUM SEXTUM ELEMENTORUM EUCLIDIS

QUORUM

PARTEM PRIMAM

PRÆSIDE

CHRISTOPHORO FRIDERICO PFLEIDERER

UNIVERSITATIS ET COLLEGII ILLUSTRIS PROFESSORE PHYSICES ET MATHESEOS PUBL. ORD.

1800 2.

23

PRO CONSEQUENDO GRADU MAGISTERII

D. SEPT. MDCCC.

PUBLICE DEFENDENT

CHRISTIAN. NATHANAËL OSIANDER, *Kohlbergensis*,
CHRISTIAN. GOTTLIEB WUNDERLICH, *Nagoldensis*,
EBERHARDUS FRIDERICUS MEZGER, *Marbacensis*,
JO. FRIDERICUS WEIHENMAIER, *Steinenbronnensis*,
GOTTLIEB CHRISTIAN. PFEIFFER, *Marcogröningensis*,
CANDIDATI MAGISTERII PHILOSOPHICI IN ILLUSTRI STIPENDIO THEOLOGICO.

TUBINGÆ

LITERIS SCHRAMMIANIS.

DEFINITIO IV.

§. 1.

Υψος εςι παντος σχηματος η απο της κορυφης επι την βασιν καθετος αγομενη. (ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ τα Σωζομενα. *Ex recensione Dav.* GREGORII. Oxon. 1703.)

Cum in parallelogramma, parallelepipeda, prismata, cylindros, quorum altitudines in *Elementis* (VI, 1. XI, 29–32. 34. 40. XII, 10. 11. 14. 15.) commemorantur, definitio hæc non quadret; genuina haud esse videtur. Deest etiam in versione CAMPANI. (*Euclidis Elementorum Libri XV. cum expositione Theonis in priores XIII. a Barthol. Zamberto Latinitate donata, Campani in omnes.* Basil. 1558. p. 137.) Neque ejus rationem habet PROCLUS. (Vid. §. 8.)

§. 2.

Accuratius certe definitionem altitudinis segmentorum curvilineorum, quam Propositioni 18. *Libri de quadratura parabolæ* præmittit, ARCHIMEDES informat: *Των τμαματων περιεχομενων υπο τε ευθειας και καμπυλας γραμμας βασιν μεν καλω ταν ευθειαν· υψος δε ταν μεγιςαν καθετον απο τας καμπυλας γραμμας αγομεναν επι ταν βασιν τε τμαματος· κορυφαν δε το σημειον, αφ ε α μεγιςα καθετος αγεται.* Cui conformiter in Propos. 18. infert: "Si in segmento, quod sub recta linea" & rectanguli coni sectione" (arcu parabolæ) "continetur, a media" basi recta ducatur diametro parallela; verticem segmenti esse punctum" illud, in quo, quæ diametro parallela ducitur, coni sectionem secat:" quoniam, quæ sectionem coni in hoc puncto contingit, parallela sit basi; normalium igitur, quæ a sectione coni ad basin ducuntur, maxima sit, quæ ab illo puncto ducitur. (ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ τα Σωζομενα. *Ex recensione Jos.* TORELLI. Oxon. 1792. p. 30.)

§. 3.

ARCHIMEDIS hæc argumentatio, præter notionem curvæ concavæ & rectæ eam contingentis, nititur propositionum I, 28. 34. Corollario: quod perpendicula, ab rectæ alicujus punctis in aliam ipsi parallelam demissa, invicem æqualia; ipsis proinde minora sint, quæ in hanc ab punctis infra illam sitis cadunt.

Ob eandem rationem, quæ in triangulo ab vertice anguli, qui opponitur basi (lateri, cui triangulum insistere concipitur), ad rectam, in qua basis jacet, ducitur normalis, major est alio quovis perpendiculo ab trianguli cruribus super eandem rectam ducto; & quæcunque in parallelogrammo ab latere, quod opponitur basi (lateri, cui parallelogrammum insistere concipitur), ipso, vel producto, ad rectam, in qua basis jacet, ducitur normalis, major est alio quovis perpendiculo ab parallelogrammi cruribus (reliquis duobus lateribus) in eandem demisso: quare illa trianguli, hæ parallelogrammi altitudines; angulique basi oppositi vertex etiam trianguli vertex dicuntur.

PROPOSITIO I.

§. 4.

Demonstratio partis prioris, præter ipsam propositionem I, 38. supponit confectarium, facile ex ea ope propos. 3. & axiom. 9. Lib. I. deducendum: quod triangula easdem inter parallelas, sed super inæqualibus constituta basibus inæqualia sint; nominatim, quod illud majus sit, cujus basis est major.

§. 5.

Enunciatum propositionis: Τα τριγωνα και τα παραλληλογραμμα τα ὑπο το αυτο ὑψος οντα, stricte (quod & in expositione subjuncta fit) acceptum, supponit triangula circa eundem verticem, & (applicationis causa partis prioris ad demonstrandam alteram) parallelogramma, quorum latera basibus opposita contigua sint; utraque super basibus in directum jacentibus constituta.

Præ.

Præterea expoſitionis enunciatum: Εϛω τριγωνα μεν τα ΑΒΓ, ΑΓΔ (*Fig.* 1.), παραλληλογραμμα δε τα ΕΓ, ΓΖ, υπο το αυτο υψος οντα, την απο τȣ Α επι την ΒΔ καθετον αγομενην· λεγω, οτι εϛιν ως η ΒΓ βασις προς την ΓΔ βασιν, ȣτως το ΑΒΓ τριγωνον προς το ΑΓΔ τριγωνον, και το ΕΓ παραλληλογραμμον προς το ΓΖ παραλληλογραμμον, ſupponit triangula & parallelogramma invicem contigua, eaque in ſchemate ad oppoſitas lateris communis ΑΓ partes delineata; qualia etiam ſunt, ad quæ propoſitio in demonſtrationibus VI, 2. 14. 15. 23. 25. applicatur.

§. 6.

Sive autem contiguæ ſint figuræ earumque baſes (& ſive tunc ad diverſas, ſive ad easdem lateris communis partes jaceant); ſive invicem ſint disjunctæ; ſive partim coincidant: propoſitio I, 38. ipſiusque corollarium (§. 4.) ad triangula circa eundem verticem & ſuper baſibus in directum jacentibus conſtituta applicantur, ducta per verticem communem parallela rectæ, in qua jacent baſes triangulorum; & cum hac parallela, quippe unica, quæ rectæ illi per hoc punctum agi poteſt (I, 29. Coroll.) coincidunt parallelogrammorum, circa eundem cum triangulis verticem & ſuper iisdem pariter, ac triangula, baſibus conſtitutorum, latera baſibus oppoſita.

§. 7.

Porro demonſtratio æque pertinet ad triangula & parallelogramma æqualium altitudinum: quibus ita diſpoſitis, ut baſes illorum ſint in eadem recta linea, & figuræ ipſæ ad easdem hujus rectæ partes; recta per vertices triangulorum ducta ei, in qua baſes ſunt, fit parallela (I, 28. 33.); parallelogrammorum vero latera baſibus oppoſita in eandem incidunt rectam ei, in qua baſes ſunt, parallelam (I, 28. 33. & 29. Coroll.).

Quare triangula etiam & parallelogramma æquealta ſunt uti baſes. (*Euclidis Elementor. Libri priores VI. item XI & XII. Sublatis iis, quibus olim Libri hi — vitiati ſunt, & quibusdam Euclidis demonſtrationibus reſtitutis a Rob.* SIMSON. Glasg. 1756. VI, 1. Coroll p. 176. *Auszug aus Rob. Simſons Ueberſezung der Elemente. Von* MATTHIAS. Magdeb. 1799. S. 76.)

§. 8.

§. 8.

Extensionem hanc propositioni VI, 1. immediate tribuunt PROCLUS & CLAVIUS: hic quidem in demonstratione & figura adjuncta (*Euclidis Elementor. Libri XV. — perspicuis demonstrationibus accuratisque scholiis illustrati. Auctore Christoph.* CLAVIO. Francof. 1607. T. I. p. 542. sq.), ac præmissa (p. 541.) explicatione Definitionis 4; ille (ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ Στοιχειων Βιβλ. ιε. Εις τȣ αυτȣ το πρωτον Εξηγηματων ΠΡΟΚΛΟΥ Βιβλ. δ. Basil. 1533. Lib. IV. Ad I, 38. p. 105.) pronuncians: Το αυτο υψος ȣδεν διαφερει η εν ταις αυταις ειναι παραλληλοις. Παντα γαρ τα εν ταις αυταις οντα παραλληλοις υπο το αυτο εςι υψος, και αναπαλιν. Υψος γαρ εςι η απο της ετερας παραλληλȣ καθετος επι την λοιπην.

Et EUCLIDES ipse in XI, 29—32. XII, 4. 5. 6. 11. enunciato: υπο το αυτο υψος οντα, indicat solida ισουψη (XI, 40.); atque in XII, 10. υψος ισον dicit, quod est το αυτο.

§. 9.

Propositum de parallelogrammis ejusdem altitudinis, vel æquealtis, immediate demonstrari posse ope I, 36. eodem modo, quo assertum de triangulis ope I, 38. evincitur, sponte patet; & sic illud demonstrat CAMPANUS (p. 138. sq.).

§. 10.

Propositiones I, 35—38. theoremate VI, 1. comprehendi; sed, cum hujus demonstratio illis nitatur, non simul cum hoc una stabiliri demonstratione dici possunt, quod PROCLUS (l. c.) contendit: Δοκει δ εμοι των τετταρων τȣτων θεωρηματων — μιαν αποδειξιν εν τω εκτω Βιβλιω κατα το πρωτον θεωρημα περιεχεσθαι· λανθανειν τε τȣς πολλȣς τȣτο ποιων. Οτ αν γαρ τȣτο δεικνυη τα τριγωνα και τα παραλληλογραμμα, τα υπο το αυτο υψος, εχοντα προς αλληλα τον λογον, ον εχȣσιν αι βασεις, ȣδεν αλλο η ταυτα παντα καθολικωτερον αποδεικνυσιν εκ της αναλογιας. Το γαρ αυτο υψος ȣδεν διαφερει η εν ταις αυταις ειναι παραλληλοις — Εκει μεν ȣν δι αναλογιας δεδεικται, οτι ȣτως εχει τα τριγωνα και τα παραλληλογραμμα τα υπο το αυτο υψος, τȣτ εςι τα εν ταις αυταις κειμενα παραλληλοις, ὡς αι βασεις· και ισων ȣσων των βασεων ισα τα χωρια, και διαπλασια διαπλασιων, και αλλον λογον

γον εχȣσων, τον αυτον εξει και τα χωρια λογον προς αλληλα. Ενταυθα δε, ȣ γαρ ην αναλογια χρησθαι μηδεπω διδαξαντα περι αυτης, αρκειται τη ισοτητι μονη, και ταυτην εκ της ισοτητος η ταυτοτητος των βασεων συλλογιζεται. Εν ενι δ᾽ ȣν εκεινω τα τετταρα ταυτα θεωρηματα περιεχεται· ȣ μονον οτι δια μιας αποδειξεως δεικνυσιν, οσα εν τοις τετρασιν περιεχεται τȣτοις, αλλ οτι και τελεοντι προστιθησιν την ταυτοτητα των λογων, καν ανισοι αι βασεις ωσι.

Euclides quidem in demonſtrationibus XII, 7. 13. 14. æqualitatem pyramidum triangularium, cylindrorum, in eadem altitudine & ſuper æqualibus baſibus exiſtentium, ex propoſitionibus XII, 5. 11. ſubſumit; ſed harum demonſtrationes ex aliis fontibus, æqualitatem illam non ſupponentibus, repetit.

§. 11.

Parallelogramma & triangula rectangula, quæ unum latus circa angulum rectum commune, vel æquale habent, eſſe ut altera ipſorum latera circa angulum rectum, aſſerto generali VI, 1. & §. 7. continetur.

§. 12.

Hinc parallelogramma & triangula, primum rectangula, tum (I, 35. 37.) quælibet, ſuper eadem vel æqualibus baſibus conſtituta, ſunt uti altitudines: quod Clavius (p. 544.) ſimili modo infert; Commandinus (*Euclidis Elementor. Libri XV. cum ſcholiis antiquis. A Federico* Commandino *in Latinum converſi, commentariisque quibusdam illuſtrati.* Piſauri 1572. fol. 72. b.) prolixius, nec legitime, deducit.

§. 13.

Propoſitum §. 11. ſequentia complectitur Lemmata, *Elementorum* Libro X. vulgo inſerta:

1°. Si ſint duæ rectæ lineæ; erit ut prima ad ſecundam, ita quadratum, quod fit a prima, ad rectangulum, quod ſub duabus illis rectis continetur. (Lemma ante X, 23.)

2°. Si ſint duæ rectæ lineæ in ratione aliqua; erit ut major ad minorem,

norem, ita rectangulum ſub duabus contentum ad quadratum minoris. (Lemma ante X, 32.)

3°. Si fuerint tres rectæ lineæ in ratione aliqua; erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum contentum ſub prima & media ad id, quod ſub media & tertia continetur. (Lemma ante X, 33.)

4°. Si recta linea in inæquales ſecetur; erit ut major pars ad minorem, ita rectangulum ſub tota & majori parte ad rectangulum ſub tota & minori. (Lemma 2. ante X, 34.)

5°. Si ſint duæ rectæ inæquales; minor autem ipſarum in partes æquales ſecetur: rectangulum contentum ſub duabus illis rectis lineis duplum erit ejus, quod ſub majori & dimidia minoris continetur. (Lemma 3. ante X, 34.)

Quorum ſecundum non agnoſcere pleraque exemplaria; tertium, quartum & quintum deſiderari in ſuis Codd. MSS. notat *Dav.* Gregorius (p. 239. 240. 243.): nec poſteriora duo ab *Euclide* eſſe ſe arbitrari addit; quod veroſimiliter etiam de prioribus tribus eſt ſtatuendum.

§. 14.

Per deductionem ad impoſſibile, ſimilem ei, quæ demonſtrandis I, 39. 40. adhibetur, facile demonſtrantur propoſitionum VI, 1. & §. 7. 12. converſæ: nempe triangula & parallelogramma, quæ ſunt inter ſe uti baſes, æquales habere altitudines, vel eandem; &, quæ ſunt inter ſe ut altitudines, æquales habere baſes, ſi unam & eandem non habeant. (Clavius p. 543. ſq.)

Propositio II.

§. 15.

Rectam uni laterum trianguli, intra vel extra illud, parallelam ſecare reliqua ejus latera, ipſa vel producta, nititur hoc propos. 29. & axiom. 11 Lib. I. corollario, ſæpius in ſequentibus ſuppoſito: quod recta ſecans unam duarum parallelarum ſecet & alteram; ſeu quod, ſi una duarum parallelarum tertiam quandam rectam ſecat, altera hanc pariter ſecet.

§. 16.

Priore propositionis VI, 2. parte demonstratur: ductam uni BC laterum trianguli ABC parallelam DE (*Fig.* 2.) altera duo latera AB, AC ita secare, ut partes unius eandem mutuo habeant rationem, quam partes similiter sitæ alterius; h. e. ut sit $BD : DA = CE : EA$;
&, inverse (V, 4. Cor.), vel immediate pariter $AD : DB = AE : EC$.

§. 17.

Componendo igitur (V, 18.) etiam sunt $AB : \begin{Bmatrix} AD \\ BD \end{Bmatrix} = AC : \begin{Bmatrix} AE \\ CE \end{Bmatrix}$

& inverse $\begin{Bmatrix} AD \\ BD \end{Bmatrix} : AB = \begin{Bmatrix} AE \\ EC \end{Bmatrix} : AC$:

h. e. quam rationem habet unum trianguli latus ad alterum suorum segmentorum, eandem & alterum latus habet ad suum segmentum similiter situm; ac quam rationem habet alterutrum unius lateris segmentum ad hoc latus, eandem alterius lateris segmentum similiter situm habet ad hoc alterum latus.

§. 18.

Quod immediate sic adstruitur: Cum, ob parallelas BC, DE, æqualia sint triangula BDE, CED (I, 37.); æqualia etiam sunt (Lib. I. Ax. 2.) triangula ABE, ACD: quæ igitur tam ad idem triangulum ADE, quam ad æqualia BDE, CED, easdem habent rationes (V, 7. & Cor.);

h. e. $ABE : \begin{Bmatrix} ADE \\ BDE \end{Bmatrix} = ACD : \begin{Bmatrix} AED \\ CED \end{Bmatrix}$

Atqui (VI, 1.) $ABE : \begin{Bmatrix} ADE \\ BDE \end{Bmatrix} = AB : \begin{Bmatrix} AD \\ BD \end{Bmatrix}$

& $ACD : \begin{Bmatrix} AED \\ CED \end{Bmatrix} = AC : \begin{Bmatrix} AE \\ CE \end{Bmatrix}$

Ergo (V, 11.) $AB : \begin{Bmatrix} AD \\ BD \end{Bmatrix} = AC : \begin{Bmatrix} AE \\ CE \end{Bmatrix}$

Unde inversa colligitur per V, 4. Coroll.; vel immediate simili modo demonstratur.

§. 19.

Altera propositionis VI, 2. parte, prioris conversa, docetur: trianguli ABC duobus lateribus AB, AC ita sectis, ut partes unius eandem mutuo habeant rationem, quam partes similiter sitæ alterius, h. e. ut sit $BD : DA = CE : EA$, vel $AD : DB = AE : EC$; rectam DE, quæ puncta sectionum D, E conjungit, esse trianguli reliquo lateri BC parallelam.

§. 20.

Quare cum (V, 17.) divisim sit $BD : DA = CE : EA$
$AD : DB = AE : EC$;

si est $$AB : \left\{\begin{matrix} AD \\ BD \end{matrix}\right\} = AC : \left\{\begin{matrix} AE \\ CE \end{matrix}\right. :$$

parallela etiam est trianguli tertio lateri BC recta DE, jungens puncta D, E, quibus altera ejus duo latera AB, AC ita secantur, ut unum horum laterum ad alterutrum suorum segmentorum eandem habeat rationem, ac latus alterum ad suum segmentum similiter situm; & inverse.

§. 21.

Idemque sic immediate colligitur: quoniam (VI, 1.)

$$ABE : \left\{\begin{matrix} ADE \\ BDE \end{matrix}\right\} = AB : \left\{\begin{matrix} AD \\ BD \end{matrix}\right. , \quad ACD : \left\{\begin{matrix} AED \\ CED \end{matrix}\right\} = AC : \left\{\begin{matrix} AE \\ CE \end{matrix}\right. ;$$

si 1°. $AB : AD = AC : AE$;
pariter est (V, 11.) $ABE : ADE = ACD : AED$
ideoque (V, 9.) $ABE = ACD$
unde (Lib. I. ax. 3.) $BDE = CED$
& hinc (I, 39.) rectæ BC, DE parallelæ.
2°. Si $AB : BD = AC : CE$:
sunt (V, 11.) $ABE : BDE = ACD : CED$
(V, 17.) $ADE : BDE = AED : CED$
(V, 9.) $BDE = CED$
unde (I, 39.) rursus BC, DE parallelæ.

Conditiones inversæ vel ad præcedentes reducuntur; vel argumentatio ex iis similiter struitur.

§. 22.

Cum (V, 16.) alterne sint

$$BD : CE = AD : AE, \quad AB : AC = AD : AE = BD : CE,$$

si $BD : DA = CE : EA$, $\quad AB : \left\{\begin{matrix} AD \\ BD \end{matrix}\right\} = AC : \left\{\begin{matrix} AE \\ CE \end{matrix}\right.$;

ac viciſſim: recta etiam DE, uni BC laterum trianguli ABC parallela, ita ſecat reliqua ejus latera AB, AC, ut unum ſegmentum unius ad ſegmentum ſimiliter ſitum alterius eandem habeat rationem, quam alterum ſegmentum prioris ad alterum poſterioris, & quam ipſum latus prius ad poſterius; ac viciſſim.

§. 23.

Propoſitio VI, 2. ipſa, & quæ hactenus ei fuerunt adjuncta, etiam valent, ac ſimiliter demonſtrantur, ſi (*Fig.* 3.) recta DE ſecat trianguli ABC latera AB, AC, ad oppoſitas vertici A partes producta.

Nempe rurſus ductis BE, CD rectis; ſunt (VI, 1.)

$$BDE : \left\{\begin{matrix} ADE \\ BAE \end{matrix}\right\} = BD : \left\{\begin{matrix} DA \\ AB \end{matrix}\right., \quad CED : \left\{\begin{matrix} AED \\ CAD \end{matrix}\right\} = CE : \left\{\begin{matrix} EA \\ AC \end{matrix}\right.,$$

$$BAE : ADE = BA : AD, \quad CAD : AED = CA : AE.$$

Quare ſi 1°. DE eſt lateri BC parallela; igitur (I, 37.) triangulum $BDE = CED$, & hinc quoque (Lib. I. Ax. 3.) $BAE = CAD$;

proinde (V, 7. & Coroll.) $BDE : \left\{\begin{matrix} ADE \\ BAE \end{matrix}\right\} = CED : \left\{\begin{matrix} AED \\ CAD \end{matrix}\right.$

$$BAE : ADE = CAD : AED :$$

pariter ſunt (V, 11.) $BD : \left\{\begin{matrix} DA \\ AB \end{matrix}\right\} = CE : \left\{\begin{matrix} EA \\ AC \end{matrix}\right.$

$$BA : AD = CA : AE.$$

2°. Viciſſim ſi α) $BD : DA = CE : EA$

vel $BA : AD = CA : EA$:

erit (V, 11.) $BDE : ADE = CED : AED$

vel $BAE : ADE = CAD : AED$

unde (V, 19.) $BDE = CED$

vel $BAE = CAD$

ac poſteriori caſu (Lib. I. ax. 2.) rurſus $BDE = CED$.

Utroque igitur caſu ſunt BC, DE parallelæ (I, 39.).

Atque si β) $BD : AB = CE : AC$:
erunt (V, 11.) $BDE : BAE = CED : CAD$
(V, 19. Cor.) $BDE : ADE = CED : AED$
(V, 9.) $BDE = CED$.
ac (I, 39.) rursus BC, DE parallelæ.

Unde cetera, uti superius, invertendo & alternando colliguntur.

§. 24.

Propositionis VI, 2. si non enunciatum, expositio certe, quæ nunc in *Elementis* exstat, eam ad rectam ipsa trianguli crura secantem, & ad ipsas horum crurum partes ita factas, seu segmenta stricte sic dicta, hinc scilicet recta illa secante, inde crurum sectorum extremis, seu trianguli vertice ac tertio latere terminata, restringit (§. 16. 19): quod quidem ad applicationes sequentes in *Elementor.* VI, 3. 4. 9 — 12. XI, 17. XII, 3. non item in *Dator.* 38. 39. sufficit.

Annotata §. 17. sq. 20. sq. 23. propositionem ad segmenta crurum ipsorum pariter, atque ad opposita vertici trianguli, seu basi partes productorum, tam quæ hinc rectæ isti secanti, inde vertici trianguli ac tertio ejus lateri, quam quæ huic tertio lateri ac vertici trianguli interjacent, extendunt; sicque, dum in *Fig.* 2. ADE ut triangulum propositum, BC ut recta ejus crura AD, AE infra basin DE producta secans, spectatur, ad segmenta etiam hinc secante hac BC, inde trianguli vertice A & tertio latere DE terminata, propositum VI, 2. applicant.

Et ad hæc quidem segmenta, hinc rectæ crura trianguli utcunque secanti, inde basi ac vertici trianguli interjacentia, *Rob.* SIMSON (p. 177. 370) & PLAYFAIR (*Elements of geometry, containing the first six Books of Euclid, with two Books on the geometry of solids.* Edinb. 1795. p. 157. sq.) propositionem VI, 2. demonstratione eadem ad *Fig.* 2. 3. 4. applicata extendunt, sic eam enunciantes: Si uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit; proportionaliter secabit reliqua trianguli latera, vel latera producta: & si latera trianguli, vel latera producta proportionaliter secta fuerint; quæ sectiones conjungit recta linea, reliquo trianguli lateri parallela erit.

§. 25.

Omnia autem uno enunciato ſic etiam licet complecti: Quæ (*Fig.* 2. 3. 4.) ab cruribus ejusdem anguli BAC, vel duorum angulorum ad verticem oppoſitorum BAC, DAE, per duas rectas parallelas BC, DE, tam verticem inter & alteram earum, quam ipſas inter parallelas, abſcinduntur ſegmenta, ſic proportionalia ſunt; ut, quam rationem mutuo habent duo ſegmenta unius cruris, eandem invicem habeant duo ſegmenta homologa ſeu ſimiliter ſita cruris alterius, h. e. ut ſint $AB : AD : DB = AC : AE : EC$; & ut ſingula unius cruris ſegmenta ad ſegmenta homologa cruris alterius ſint in eadem ratione, $AB : AC = AD : AE = BD : CE$. Viciſſim parallelæ ſunt rectæ, quæ ab cruribus ejusdem anguli, vel duorum angulorum ad verticem oppoſitorum, ſegmenta alterutro ordine indicato proportionalia abſcindunt.

§. 26.

Rectæ AB, DE (*Fig.* 5. 6.) ſe ſecent in puncto C. Utrinque ab eo in ipſis AB, DE abſcindantur ſegmenta quæcunque $CM = Cm$, $CN = Cn$: & finiatur quadrilaterum $MmnN$; quod erit parallelogrammum. (*Schol. in Lib. II. Element* §. 235. ſq.)

Quæ per rectas quascunque LK, lk, lateribus hujus parallelogrammi parallelas, ab rectis AB, DE abſcinduntur ſegmenta puncto C adjacentia, erunt rectis CM, CN proportionalia; $\left.\begin{matrix} CK : CL \\ Ck : Cl \end{matrix}\right\} = CM : \left\{\begin{matrix} CN \\ Cn \end{matrix}\right.$: & viciſſim quælibet recta, in ipſis AB, DE ab puncto C inde abſcindens ſegmenta rectis CM, CN proportionalia, erit alteris parallelogrammi $MmnN$ lateribus oppoſitis parallela (§. 25.)

§. 27.

Hinc ſolvitur *Problema*, quod eſt *Locus* 3. *Libri prioris* Apollonii *de ſectione rationis*: Poſitione datis duabus rectis AB, DE, ſe mutuo in C ſecantibus; per datum extra eas, in eodem cum ipſis plano, punctum H ducere lineam rectam, quæ occurrens duabus AB, DE auferat ab ipſis ſegmenta puncto C adjacentia, quæ ſint inter ſe in ratione data, rectæ ſcilicet datæ M ad datam N. (Apollonii *Pergæi De ſectione rationis Libri duo, ex Arabico MSto Latine verſi. Accedunt ejusdem De ſectione*

ſpatii

ſpatii Libri duo reſtituti. Præmittitur PAPPI *Alexandrini Præfatio ad VII*mum *Collectionis mathematicæ, nunc primum Græce edita, cum Lemmatibus ejusdem Pappi ad hos Apollonii Libros. Opera & ſtudio Edmundi* HALLEY. Oxon. 1706. p. 10. ſqq.)

In recta AB enim ab alterutra puncti C parte abſciſſa $CM =$ datæ M; in recta autem DE utrinque ab puncto C abſciſſis $CN = Cn =$ datæ N; & ductis MN, Mn rectis; his autem per datum punctum H parallelis LHK, Hlk, Hkl, quæ rectis AB, DE occurrent (§ 15.): erunt $\left.\begin{matrix} CK : CL \\ Ck : Cl \end{matrix}\right\} = CM : \left\{\begin{matrix} CN \\ Cn \end{matrix}\right.$ (§. 25. ſq. n°. 1.) $= M : N$ (V. 11.).

Rectæ igitur LHK, $\left\{\begin{matrix} Hlk \\ Hkl \end{matrix}\right\}$ ſatisfaciunt problemati; eæque ſolæ (§. 25. ſq. n°. 2.)

Et ſic quidem problema in Scholio p. 14. ſq. ſolvit HALLEY. Analyſin ejus aliter inſtituit APOLLONIUS; quæ vero ad eandem conſtructionem deducit.

§. 28.

Quodſi altera e parallelis, nempe Hlk vel Hkl, per punctum C tranſit; altera tantum LHK unico modo rem præſtat. Ceteris caſibus duplici ſemper modo problema componetur. Et quidem, ſi laterum parallelogrammi $MmnN$ aliquod per datum punctum H tranſit, ipſum hoc latus eſt altera recta ducenda.

§. 29.

Duæ porro rectæ non contiguæ, duabus interceptæ parallelis BC, FD (*Fig.* 7.), pariter ab tertia GE his parallela proportionaliter ſecantur; & viciſſim.

Quodſi enim I°. rectæ FB, DK, parallelis BC, FD interceptæ, & ipſæ ſunt parallelæ; ideoque æquales (I, 34.):

1°. ducta GE rectis BC, FD parallela, pariter ſunt $FG = DH$, $GB = HK$ (I, 34.);
quare (V, 7. Coroll.) $FG : GB : FB = DH : HK : DK$
& alterne (V, 16.) $FG : DH = GB : HK = FB : DK$.

2°Si,

2°. Si vel $\left.\begin{matrix}FG\\GB\end{matrix}\right\}: FB = \left\{\begin{matrix}DH\\HK\end{matrix}\right\}: DK$;
vel $FG : GB = DH : HK$,
ideoque (V, 18.) $FB : GB = DK : HK$:
ob $FB = DK$ (dem.), sunt vel FG & DH, vel GB & HK æquales (V, 14.); ideoque GH, FD, BC parallelæ (I, 33. 30.).

II°. Quodsi parallelæ non sunt rectæ FB, DC, parallelis BC, FD interceptæ: ducta per alterutrum unius DC extremum D alteri FB parallela DK inter easdem parallelas BC, FD;

1°. ob $DE : EC : DC = DH : HK : DK$,
quando GE parallela est ipsis BC, FD, (VI, 2. & §. 17. sq.);
ac $DH : HK : DK = FG : GB : FB$ (§. 29. n°. I. 1.);
sunt (V, 11.) $DE : EC : DC = FG : GB : FB$,
& (V, 16.) $DE : FG = EC : GB = DC : FB$.

2°. Si vel $DE : EC = FG : GB$, vel $\left.\begin{matrix}DE\\EC\end{matrix}\right\}: DC = \left\{\begin{matrix}FG\\GB\end{matrix}\right\}: FB$;
nec esset GE rectis BC, FD parallela: per punctum G ducta ipsis BC, FD parallela GI ad occursum usque rectæ DK in I, & juncta EI recta, foret (§. 29. n°. I. 1.) $FG : GB = DI : IK$, $\left.\begin{matrix}FG\\GB\end{matrix}\right\}: FB = \left\{\begin{matrix}DI\\IK\end{matrix}\right\}: DK$
itaque (V, 11.) $DE : EC = DI : IK$, vel $\left.\begin{matrix}DE\\EC\end{matrix}\right\}: DC = \left\{\begin{matrix}DI\\IK\end{matrix}\right\}: DK$
proinde EI rectæ BC parallela (VI, 2. & §. 20. sq.): igitur rectæ EI, GI invicem essent parallelæ (I, 30.); quod repugnat.

§. 30.

Propositum §. 29. generatim sic quoque, ab altero unius rectæ DC extremo D ad terminum oppositum B alterius FB ducta DB recta (*Fig.* 8.), evincitur.

1°. Si GE est rectis BC, FD parallela:
sunt (VI, 2. & §. 17. sq.) tam $\left.\begin{matrix}FG : GB : FB\\ \text{quam } DE : EC : DC\end{matrix}\right\} = DL : LB : DB$
ideoque (V, 11.) $FG : GB : FB = DE : EC : DC$
ac (V, 16.) $FG : DE = GB : EC = FB : DC$.

2°. Vi-

2°. Vicissim si $FG : GB = DE : EC$, vel $\left.\begin{matrix}FG\\GB\end{matrix}\right\} : FB = \left\{\begin{matrix}DE\\EC\end{matrix}\right\} : DC$; nec esset GE rectis BC, FD parallela: per punctum G ducta rectæ FD, ideoque (I, 30.) etiam alteri BC parallela GM ad occursum usque rectæ DB in M, & juncta EM recta;

foret (VI,2. & §.17.sq.) $FG : GB = DM : MB$, $\left.\begin{matrix}FG\\GB\end{matrix}\right\} : FB = \left\{\begin{matrix}DM\\MB\end{matrix}\right\} : DB$:

igitur (V, 11.) $DE : EC = DM : MB$, vel $\left.\begin{matrix}DE\\EC\end{matrix}\right\} : DC = \left\{\begin{matrix}DM\\MB\end{matrix}\right\} : DB$;

& hinc (VI, 2. & §. 20. sq.) EM rectæ BC parallela; ac (I, 30.) rectæ EM, GM parallelæ inter se, quæ tamen in puncto M concurrunt.

§. 31.

Priore præcedentem directam demonstrandi modo (§. 29. n°. II. 1.) Euclides in VI, 10.; altero (§. 30. n°. I.) in adstruendo theoremate generaliori XI, 17. utitur.

Propositio III.

§. 32.

Quæ trianguli æquicruri angulum ad verticem bifariam dividit recta, bifariam & angulos rectos secat basin (I, 4). Vicissim, quæ a vertice trianguli æquicruri ad punctum bisectionis basis ducitur recta, basi normalis est, atque angulum ad verticem bifariam secat (I, 8.).

§. 33.

Quæ autem trianguli non-æquicruri angulum ad verticem bifariam dividit recta, ad angulos obliquos & in partes inæquales secat basin: sic ut minus segmentum adjaceat cruri minori; pariterque acutus sit angulus, qui cruri minori opponitur.

Nempe si $AC > AB$ (*Fig.* 9.), & AD bifariam dividit angulum BAC: ob angulum $ABC > C$ (I, 18.), sunt anguli $ABC + DAB > C + DAC$; ideoque (I, 32.) angulus $ADC > ADB$.

Et ab AC abscissa $AE = AB$, ac juncta DE recta: sunt (I, 4.) $BD = DE$, ang. $AED = ABD$. Quare, producta CB versus H, est ang.

ang. $DEC = ABH$ (I, 13.). Sed ang. $ABH > C$ (I, 16.). Ergo & ang. $CED > C$: ideoque (I, 19.) $CD > \begin{cases} DE. \\ DB \end{cases}$

§. 34.

Quæ igitur trianguli non æquicruri basin BC bifariam secat ex vertice trianguli A ducta AF recta, in hujus segmentum CD incidit; proinde in inæquales dividit angulum ad verticem BAC, sic ut major sit angulus BAF, qui adjacet cruri minori AB: eademque AF obliqua est basi; ob angulum $AFC >$ obtuso ADC, & $AFB <$ acuto ADB (I, 16.).

§. 35.

Posterior pars propositi §. 34. immediate etiam consequitur ex I, 25. Prior sic quoque ostenditur: continuata AF, donec sit $FG = FA$, & ducta BG recta; sunt (I, 15. 4.) ang. $G = CAF$, & $BG = AC > AB$; igitur (I, 18.) ang $BAG > \begin{cases} G \\ CAF \end{cases}$.

§. 36.

Hinc (§. 35.) vicissim intra angulum BAF cadit recta AD bifariam dividens angulum BAC; ideoque in inæqualia secat basin BC, sic ut minus sit segmentum BD, quod adjacet cruri minori AB.

§. 37.

Quæ de segmentis basis trianguli non-æquicruri, partibusque oppositis anguli ad verticem ostensa sunt §. 33. sqq., complet Propositio VI, 3. docens: rectam, quæ bifariam dividit angulum ad verticem trianguli non-æquicruri, basin in inæqualia sic secare, ut segmentum adjacens cruri minori altero segmento minus sit in eadem ratione, in qua crus hoc minus est altero crure; ac vicissim, basi divisa in segmenta cruribus trianguli adjacentibus proportionalia, rectam, a vertice trianguli ad punctum sectionis basis ductam, bifariam dividere angulum ad verticem.

Ceterum hoc ita asserit, ut casum quoque trianguli æqui cruri (§. 32.) complectatur.

§. 38.

Rectam CE (*Fig.* 10), per C ipsi DA parallelam, concurrere cum crure BA ultra verticem A producto, consequitur ex I, 29. Corollario §. 15. commemorato; vel simili modo, quo in demonstratione VI, 4. ad Lib. I. Ax. 11. reducitur. Posterius supplet CLAVIUS (p. 546.).

§. 39.

Juberi etiam potest, ut ab producta BA abscindatur $AE = AC$, & jungatur CE recta. Tunc enim

1°. ob angulum $BAC = E + ACE$ (I, 32.) $= \begin{cases} 2E \\ 2ACE \end{cases}$ (I, 5.), sunt anguli $\begin{Bmatrix} E \\ ACE \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}BAC = \begin{cases} BAD \\ DAC \end{cases}$, si recta AD bifariam dividit angulum BAC; itaque CE, AD parallelæ (I, 27. sq.); & hinc $BD : DC = BA : AE$ (VI, 2. n° 1.) $= BA : AC$ (V, 7. 11.).

2°. Si $BD : DC = BA : AC$ ideoque etiam $= BA : AE$ (V, 7. 11.): sunt CE, AD parallelæ (VI, 2. n° 2.); proinde anguli $BAD = E$, $DAC = ACE$ (I, 29.); & hinc, ob ang. $E = ACE$ (I, 5.), pariter angulus $BAD = DAC$.

§. 40.

Cum sic in demonstratione partis secundæ applicetur pars posterior propositionis VI, 2; altera hæc constructio & demonstratio potius, quam quæ nunc in *Elementis* exstat, eaque quodammodo manca (§. 38.), genuina esse videtur.

§. 41.

Duobus cujuscunque trianguli ABC (*Fig.* 11.) angulis A, B bifariam divisis per rectas AG, BG; quæ ex puncto G concursus ipsarum ad verticem tertii anguli C ducitur recta CG, pariter hunc bifariam secat.

Perpendicula enim GF, GH, GI, ex puncto G demissa in latera trianguli, sunt æqualia per demonstr. IV, 4. Quare, ob $GF = GH$, angulos ad F, H rectos, & hypotenusam CG communem, ideoque etiam $CF = CH$ (I, 47. Coroll.), est angulus $GCA = GCB$ (I, 8.).

§. 42.

§. 42.

Viciſſim tres rectæ, bifariam ſecantes angulos cujuslibet trianguli, in eodem intra triangulum puncto concurrunt.

Duabus enim angulos A, B trianguli ABC (*Fig.* 12.) bifariam ſecantibus, & in puncto G concurrentibus AG, BG occurrat, ſi fieri poſſit, recta bifariam angulum C dividens in punctis H, I ab G diverſis. Jungatur GC recta. Cum hæc bifariam ſecet angulum C (§. 41.): foret angulus $ACG = ACI$, uterque nimirum $= \frac{1}{2} ACB$; quod repugnat Libri I. Axiomati 9.

§. 43.

Rectæ bifariam ſecantes angulos cujuslibet trianguli, & ad latera usque oppoſita productæ, ita ſe mutuo in puncto ſectionis communi dividunt, ut cujuslibet ſegmentum adjacens angulo trianguli ſit ad ejus ſegmentum adjacens lateri oppoſito trianguli, ut ſumma laterum trianguli comprehendentium illum angulum eſt ad latus hoc ei oppoſitum; tota autem recta ſit ad ſegmentum ipſius adjacens $\left\{\begin{matrix}\text{angulo}\\\text{lateri}\end{matrix}\right\}$ trianguli, uti perimeter trianguli eſt ad $\left\{\begin{matrix}\text{ſummam laterum circa hunc angulum}\\\text{hoc latus}\end{matrix}\right\}$.

Rectæ AD, BL, CK (*Fig.* 13.) bifariam dividant angulos trianguli ABC; ac ſe mutuo ſecent in puncto G (§. 42.)

Erit
$$\left.\begin{aligned} AG : GD &= AB : BD \text{ ob ang. } ABG = DBG \\ &= AC : CD \text{ ob ang. } ACG = DCG \end{aligned}\right\} \text{(VI, 3.)}$$
$$= BA+AC : CB \text{ (V, 12.)}$$

& hinc $AD : \left\{\begin{matrix}AG\\GD\end{matrix}\right\} = BA+AC+CB : \left\{\begin{matrix}BA+AC\\CB\end{matrix}\right.$ (V, 18.)

Eodemque modo oſtenditur eſſe
$$BL : BG : GL = AB+BC+CA : AB+BC : CA$$
$$CK : CG : GK = AC+CB+BA : AC+CB : BA.$$

§. 44.

In triangulo igitur æquilatero ſunt
$$\left.\begin{matrix} AD : AG : GD \\ BL : BG : GL \\ CK : CG : GK \end{matrix}\right\} = 3 : 2 : 1.$$

§. 45.

Viciſſim ſi recta, trianguli perimetro terminata, & aliquem ejus angulum biſariam dividens, ita ſecatur, ut ſegmentum ipſius adjacens vertici anguli, quem biſecat, ſit ad ſegmentum adjacens lateri oppoſito trianguli, uti ſumma laterum circa angulum illum eſt ad tertium trianguli latus; ceteræ etiam rectæ, per punctum hujus ſectionis ex verticibus angulorum trianguli ductæ, biſariam hos angulos dividunt.

Biſariam angulum BAC dividat recta AD; ipſamque punctum G ita ſecet, ut ſit $AG : GD = BA + AC : CB$;
angulos autem ABC, ACB biſariam, ſi fieri poſſit, non dividant rectæ BG, CG, ſed BH, CH (§. 42.)

Ita foret $AH : HD = BA + AC : CB$ (§. 43.)
ideoque $AG : GD = AH : HD$ (V, 11.)
$AD : GD = AD : HD$ (V, 18.)
$GD = HD$; contra Lib. I. Ax. 9.

§. 46.

Simili modo enunciantur, & vel immediate ſimiliter demonſtrantur, vel ad præcedentem (§. 45.) ope V, 17. reducuntur converſæ partis ſecundæ §. 43.

§. 47.

Recta, biſariam dividens angulum exteriorem ad verticem trianguli æquicruri, parallela eſt baſi; & viciſſim.

Sit (*Fig.* 14.) $AB = AC$, & CAF recta: ac

1°. biſariam angulum BAF ſecet recta AG. Erunt anguli $\left.\begin{matrix}BAG\\GAF\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}BAF$ (hyp.) $= \frac{B+C}{2}$ (I, 32.) $= \left\{\begin{matrix}B\\C\end{matrix}\right.$ (I, 5.); igitur AG, BC parallelæ (I, 27. ſq.)

2°. Parallela ſit AG baſi BC. Erunt anguli $BAG = B$, $GAF = C$ (I, 29.); ideoque $BAG = GAF$, ob $B = C$ (I, 5.).

§. 48.

Recta vero, biſariam dividens angulum exteriorem ad verticem trianguli non æquicruri, concurrit cum baſi producta ad partes cruris mino-

minoris; eamque ita secat, ut rectæ in ipsa sectionem inter ac terminos basis abscissæ eandem habeant rationem, quam crura, quibus adjacent, trianguli.

Vicissim si basis trianguli non-æquicruri ad partes cruris minoris sic producitur, ut, quæ hinc fit, tota recta ad adjectam basi eandem habeat rationem, quam trianguli crus majus habet ad minus; recta ab termino continuationis hujus per verticem trianguli ducta bifariam dividit angulum trianguli exteriorem ad verticem.

Sit (*Fig.* 15.) $AB < AC$: itaque angulus $C < ABC$ (I, 18.); & angulus exterior BAF vel $CAH = C + ABC$ (I, 32.) $< 2ABC$.

1°. Bifariam angulum BAF vel CAH dividat recta KAG.

Erit ang. $BAG = \frac{1}{2}BAF$, vel (I, 15) $= \frac{1}{2}CAH$, minor angulo ABC (demonstr.); igitur anguli $BAG + ABG < ABC + ABG <$ 2 Rect. (I, 13.): proinde rectæ CBG, KAG ad has partes concurrunt (Lib. I. Ax. 11.).

Ab AC abscindatur $AE = AB$; & jungatur recta BE. Ob angulum $BAF = ABE + AEB$ (I, 32.) $= \begin{cases} 2ABE \\ 2AEB \end{cases}$ (I, 5.), sunt anguli $\begin{rcases} ABE \\ AEB \end{rcases} = \frac{1}{2}BAF = \begin{cases} BAG \\ FAG \end{cases}$ (hyp. vel I, 15.); ideoque AG, BE parallelæ (I, 27. sq): & hinc $CG : GB = CA : AE$ (§. 17.) $= CA : AB$ (V, 11.).

2°. Sit $CG : GB = CA : AB = CA : AE$, rursus facta $AE = AB$.

Erunt KAG, BE parallelæ (§. 20. sq): proinde anguli $\begin{rcases} BAG \\ KAH \end{rcases} = ABE$, $\begin{rcases} FAG \\ CAK \end{rcases} = AEB$ (I, 29.); & hinc $BAG = FAG$, $KAH = CAK$, ob $ABE = AEB$ (I, 5.).

§. 49.

Juberi etiam §. 48. potest, ut parallela rectæ KAG per B agatur BE; quæ, ob angulum $ABC > G$ (I, 16.), intra triangulum ABC cadet: & tunc propositum similiter ac VI, 3. in textu *Elementorum* demonstari.

Sicque demonstrationem ejus in Propositione A. post tertiam Libro VI. inserta tradunt *Rob.* Simson (p. 180. sq. *Matthias* p. 77.), ac Playfair (p. 160. sq).

Prior etiam in *Notis* (p. 370. sq. *Matthias* p. 77. sq.) monet: "Casus" secundus, qui habetur in Prop. A, pariter utilis ac primus, tertiæ Pro-"

"positio-

"poſitioni additus eſt; videlicet is, quo angulus trianguli exterior biſa-"riam ſecatur recta linea. Demonſtratio ejus ſimillima eſt demonſtra-"tioni primi caſus; & ob hanc forſan cauſam tum ea, tum enunciatio "caſus, omiſſa eſt ab imperito quodam editore. PAPPUS certe hac, tan-"quam propoſitione elementari" [ſimul cum ipſa VI, 3.] "ſine demon-"ſtratione utitur in Prop. 39. Libri VII. *Collect. Math.*" Lemm. 25. Libri I. *Apollonii de determinata ſectione.* (Piſauri 1588. fol. 183. b. ſq.). Conf. *Rob.* SIMSON *de determinata ſectione libri* IV. (p. 27. *Opp. reliq.* Glasg. 1776.).

§. 50.

Utramque propoſitionem VI, 3. & §. 48, quod & PLAYFAIR (p. 384.) notat, uno quoque enunciato licet complecti: Si trianguli angulus $\left\{\begin{array}{l}\text{interior}\\ \text{exterior}\end{array}\right\}$ biſariam dividitur, ſecans autem angulum recta ſecat & baſin $\left\{\begin{array}{l}\text{ipſam}\\ \text{productam}\end{array}\right\}$; baſis ſegmenta, hinc terminis ejus, inde puncto ſectionis intercepta, eandem habebunt rationem, quam crura ipſis adjacentia trianguli: viciſſim ſi baſis ita $\left\{\begin{array}{l}\text{ſecatur}\\ \text{continuatur}\end{array}\right\}$, ut ſegmenta, terminis ejus ac $\left\{\begin{array}{l}\text{puncto ſectionis}\\ \text{extremo continuationis}\end{array}\right\}$ intercepta, cruribus trianguli adjacentibus proportionalia ſint; quæ per verticem trianguli & $\left\{\begin{array}{l}\text{punctum ſectionis}\\ \text{extremum continuationis}\end{array}\right\}$ baſis ducitur recta, trianguli ad verticem angulum $\left\{\begin{array}{l}\text{interiorem}\\ \text{exteriorem}\end{array}\right\}$ biſariam dividet.

PROPOSITIO IV.

§. 51.

Senſum partis poſterioris aſſerti Propoſitionis hujus: και ομολογοι αι υπο τας ισας γωνιας υποτεινουσαι πλευραι, declarat Lib. V. Definitio 12: Ομολογα μεγεθη λεγεται ειναι τα μεν ηγουμενα τοις ηγουμενοις, τα δε επομενα τοις επομενοις. Eo ſcilicet ordine in triangulis invicem æquiangulis duo quælibet latera unius eandem rationem quam duo alterius latera

latera circa angulum æqualem habere indicantur, ut æquales duorum triangulorum angulos ſubtendant latera, quæ conſtituunt terminos antecedentes duarum rationum; pariterque igitur termini earum conſequentes ſint latera angulis triangulorum æqualibus oppoſita.

§. 52.

In demonſtratione latera circum æquales angulos B & DCE, ACB & E (*Fig.* 16.) easdem invicem rationes eo ordine habere ex propoſitionibus VI, 2. I, 34. V, 7. 11. immediate oſtenditur, ut terminos antecedentem & conſequentem ſingularum rationum conſtituant latera duorum triangulorum æqualibus eorum angulis oppoſita;

nempe $BA : CD = BC : CE$

$BC : CE = AC : DE$

Unde & (V, 11.) $BA : CD = AC : DE$

Quare generatim etiam, quam rationem habent duo duorum triangulorum invicem æquiangulorum latera æquales ipſorum ſubtendentia angulos, eandem habent bina illorum reliqua latera æqualibus angulis oppoſita; pariterque (V, 12.) eorum perimetri:

$$BA : CD = BC : CE = AC : DE = AB + BC + CA : DC + CE + ED.$$

§. 53.

Loco propoſitionis VI, 2. adhibita ea, quæ inde fuit §. 22. deducta; immediate conſequitur laterum proportio eo ordine, quem aſſertum hujus IV[tæ] enunciat.

§. 54.

Vi ejusdem ſimilia juxta Lib. VI. Defin. 1. dicuntur triangula invicem æquiangula; vel (I, 32. Coroll.) quorum ſaltem duo anguli unius duobus alterius, ſinguli ſingulis, ſunt æquales.

§. 55.

Triangula, quæ conditionibus propoſitionis I, 26. reſpondent, h. e. quæ duos angulos duobus angulis æquales habent, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, quod utrinque vel angulis æqualibus interjacet, vel uni angulorum æqualium opponitur, ſimilia ſunt & æqualia.

§. 56.

§. 56.

Quæ vero binos angulos æquales habent, & unum latus uni æquale, quod autem in uno triangulo æqualibus angulis interjacet, in altero unum æqualium angulorum ſubtendit, nonniſi ſimilia ſunt.

§. 57.

Triangula æquicrura, quorum anguli ad vertices, vel alterutri ad baſin anguli ſunt æquales, ſimilia ſunt. (I, 5. & 32. Coroll.)

§. 58.

Triangula quævis æquilatera ſunt ſimilia. (I, 5. Cor. & 32. Cor.) Ceterum proportionalia eſſe ipſorum latera, præter VI, 4^{tam}, etiam conſequitur ex V, 7. Corollario: quod æquales magnitudines *A*, *B* ad æquales *C*, *D* eandem habeant rationem.

Indidemque & ex I, 32. Coroll. univerſim ſimiles eſſe figuras rectilineas regulares, ſeu æquiangulas & æquilateras, ejusdem numeri laterum, conſequitur.

§. 59.

Propoſitiones IV, 2. 3. docent circulo dato inſcribere & circumſcribere triangulum ſimile dato.

§. 60.

Recta, quæ in triangulo parallela ducitur uni ejus lateri (*Fig.* 2.), abſcindit (I, 29.) triangulum ſimile toti. (Clavius p. 547.)

§. 61.

Recta hæc ſe habet ad latus trianguli, cui eſt parallela, uti ſegmentum alterutrius reliquorum trianguli laterum, ipſam inter & verticem anguli oppoſiti comprehenſum, eſt ad hoc latus (§. 52.).

§. 62.

Eadem per rectas ex vertice trianguli oppoſito ductas in eadem ratione ſecatur ac baſis trianguli, ſeu latus ejus, cui eſt parallela. (Clavius p. 549.)

Nempe

Nempe (*Fig.* 17.) quodlibet segmentum basis BC est ad segmentum iisdem rectis comprehensum parallelæ DE, uti alterutra recta ab trianguli vertice A ad terminos prioris ducta est ad segmentum ipsius vertici A & rectæ DE interjacens (§. 52. 61.); & posteriorum eadem semper est mutua ratio (§. 17. sq.); ideoque etiam priorum (V, 11.); ac alterne (V, 16.).

$$\left.\begin{array}{l} BF : DI = AB : AD = AF : AI \\ FG : IK = AF : AI = AG : AK \\ GH : KL = AG : AK = AH : AL \\ \qquad\&c. \\ BG : DK = AB : AD = AG : AK \\ FH : IL = AF : AI = AH : AL \\ \qquad\&c. \end{array}\right\} (\S.\ 52.\ 61.)$$

& $AB : AD = AF : AI = AG : AK = AH : AL$ &c. (§.17. sq.)
Quare $BF : DI = FG : IK = GH : KL = BG : DK = FH : IL$ &c. (V, 11.)
& $BF : FG : GH : BG : FH$ &c. $= DI : IK : KL : DK : IL$ &c. (V, 16.)

§. 63.

Pariter, si (*Fig.* 3. 4.) recta DE, trianguli ABC lateri BC parallela, secat ejus reliqua latera producta, est triangulum $ADE \backsim ABC$; $DE : BC = AD : AB = AE : AC$; & rectæ per verticem A ductæ ipsas BC, DE secant in eadem ratione.

§. 64.

Quodsi igitur a duabus parallelis AB, DE (*Fig.* 18. 19), ab punctis inde C, F in ipsis, duo quæcunque segmenta inæqualia CM, FN ad easdem punctorum C, F partes abscinduntur; & rectæ CF, MN junguntur, quæ productæ sibi mutuo occurrunt in puncto G extra parallelas AB, DE (sumtis enim GM, FN æqualibus, parallelæ per I, 33. forent CF, MN; ac vicissim, per I, 34.): bina segmenta, ut CK, FL, quæ rectæ quæcunque per punctum G actæ, ut GK, ab iisdem parallelis AB, DE, ex punctis inde C, F, abscindunt, erunt inter se uti CM ad FN (§. 62.).

§. 65.

Pariter si a duabus parallelis AB, DE, ab punctis inde C, F in ipsis, duo quæcunque segmenta CM, Fn ad alternas punctorum C, F partes abscinduntur; & rectæ CF, Mn junguntur, quæ se mutuo in

puncto

puncto g intra parallelas secabunt: bina segmenta, ut Ck, Fl, quæ rectæ quæcunque per punctum g actæ, ut kgl, ab iisdem parallelis AB, DE, ex punctis inde C, F abscindunt, erunt inter se uti CM ad Fn (§. 63.).

§. 66.

Si latera BC, AC trianguli ABC (*Fig.* 20.) bifariam secantur per rectas AD, BE ex verticibus angulorum oppositorum A, B ductas; recta quoque CF, ex tertii anguli C vertice ducta per punctum sectionis G duarum AD, BE, bifariam secat tertium trianguli latus AB.

Quippe ob $BD = DC$, $AE = EC$, utrumque triangulum ABD, BAE dimidium est trianguli ABC (I, 38. vel VI, 1.): igitur triangulum $ABD = BAE$; &, demto communi ABG, triangulum $GBD = GAE$: pariterque $2GBD = 2GAE$; h. e. ob $BD = DC$, $AE = EC$, triangulum $GBC = GAC$ (I, 38. vel VI, 1.).

$$\left.\begin{array}{l}\text{Atqui tam triang. } GBC : GBF \\ \text{quam triang. } GAC : GAF\end{array}\right\} = CG : GF \text{ (VI, 1.)}$$

Ergo (V, 11.) triang. $GBC : GBF = GAC : GAF$
& hinc (V, 14.) triang. $GBF = GAF$
ac (I, 38. conv.) $BF = AF$.

Aliam hujus demonstrationem prolixiorem, &, præter plerasque præcedentes, propositionibus VI, 2. 19. 22. nixam, habet CARDANUS (*De subtilitate Libri* XXI. Basil. 1560. Lib. I. p. 70. sqq.).

§. 67.

Tres rectæ, quæ ex singulorum trianguli cujuscunque ABC (*Fig.* 21.) angulorum verticibus A, B, C ducuntur ad puncta D, E, F laterum oppositorum, ubi hæc bifariam dividuntur, in eodem intra triangulum puncto se secant.

Duas enim AD, BE, quæ se in puncto G secant, trajiciat, si fieri possit, tertia CF in punctis H, I. Per puncta C, G agatur recta CGK. Cum hæc bifariam secet latus AB in puncto K, ubi ei occurrit (§. 66.); atque hoc coincidere non possit cum puncto F (Lib. I. Ax. 12.): foret AB bifariam secta in duobus punctis F, K; quod fieri nequit (Lib. I. Ax. 7. 9.).

§. 68.

Eædem tres rectæ ita se in puncto communi secant, ut segmentum cujuslibet adjacens lateri trianguli, ejusdemque segmentum adjacens vertici anguli oppositi, ac tota recta sint uti $1:2:3$; triangulum vero in sex triangula æqualia dividunt; ad punctum autem sectionis communis usque tantum ductæ triangulum dividunt in tria æqualia.

Nempe (*Fig.* 20.) 1°. ob $BD:DC = AE:EC = BF:AF$ (supp. & Lib. V. Def. 5.), sunt DE & AB, DF & AC parallelæ (VI, 2.). Quare (I, 15. 29.) triangula GDE & GAB, GDF & GAC sunt æquiangula; ideoque

$$GD:GA = \begin{Bmatrix} GE:GB = DE:AB \\ GF:GC = DF:AC \end{Bmatrix} (\S.52.) \begin{matrix} = CD:CB \\ = BD:BC \end{matrix} (\S.61.) \Big\} = 1:2$$

& $GD:GA:AD = GE:GB:BE = GF:GC:CF = 1:2:3$ (V, 18.)

2°. Triang. $GBD = GAE$ (§. 66. Dem.) $= GDC = GEC$ (I, 38.);

& triang. $\begin{Bmatrix} GFB:GCB \\ GFA:GCA \end{Bmatrix} = GF:GC$ (VI, 1.) $= 1:2$ (n°. 1.)

itaque $\begin{matrix} 2GFB = GCB = 2GBD \\ 2GFA = GCA = 2GAE \end{matrix}$; & pariter $\begin{matrix} GFB = GBD. \\ GFA = GAE \end{matrix}$

3°. Triang. $GBC = GAC$ (§. 66. Dem.);

& triang. $GAB = \begin{Bmatrix} 2GFB \\ 2GFA \end{Bmatrix}$ (I, 38.) $\begin{matrix} = GBC \\ = GAC \end{matrix}$ (n°. 2.).

§. 69.

Cum in triangulis æquilateris rectæ bifariam dividentes angulos bifariam quoque secent latera opposita, & vicissim (I, 4. 8.); liquet identitas conclusionum §. 44. 68. ad ipsa applicatarum.

Eademque per rectas AD, BE, CF in sex; per rectas AG, BG, CG in tria triangula similia & æqualia dividuntur.

§. 70.

Vicissim si recta ab vertice aliquo trianguli ad punctum bisectionis lateris oppositi ducta ita secatur, ut segmentum ipsius adjacens vertici trianguli duplum sit alterius segmenti adjacentis lateri opposito trianguli; ceteræ etiam rectæ per punctum hujus sectionis ex verticibus trianguli ductæ bifariam latera iis opposita secant.

Bifariam latus BC trianguli ABC fecet recta AD; ipfa vero puncto G ita fecetur, ut fit $AG = 2GD$.

Ductis BGE, DE rectis, erunt triangula $BAG = 2BGD$, $EAG = 2EGD$ (VI, 1.)

igitur triangulum $BAE = 2BDE$.

Sed ob $BC = 2BD$ (fupp.), etiam triangulum $BCE = 2BDE$ (VI, 1.)

Quare triangulum $BAE = BCE$

& hinc (I, 38. conv) $AE = CE$.

Similiterque oftenditur, vel nunc per §. 66. infertur: ducta CGF recta fieri etiam $AF = BF$.

§. 71.

Pariter fi tres rectæ ab puncto intra triangulum ad vertices angulorum ejus ductæ triangulum in tria æqualia dividunt; rectæ hæ ad latera usque trianguli oppofita continuatæ bifariam ea dividunt.

Rectis enim GA, GB, GC in tria triangula æqualia dividentibus triangulum ABC; & qualibet earum AG ad latus usque oppofitum BC continuata:

eft (VI, 1.) triang. $AGB : GDB = AG : GD = AGC : GDC$

Quare, ob triang. $AGB = AGC$ (fupp.), etiam triang. $GDB = GDC$ (V, 14.);

& hinc (I, 38. conv.) $BD = DC$.

Propositiones V. VI.

§. 72.

Propofitiones hæ converfæ funt præcedentis quartæ; atque uti hæc propofitioni I, 26. ita illæ propofitionibus I, 8. 4. refpondent, ad quas earum demonftrationes reducuntur, & fub quarum conditionibus triangula fimilia & æqualia funt.

§. 73.

Sub V^{tæ} conditionibus fimilia effe triangula propofitio hæc æque immediate ac IV^{ta} efficit (§. 54.): pofitis autem VI^{tæ} conditionibus, mediante IV^{ta} demum proportionalitas reliquorum circa angulos æquales laterum, ad triangulorum fimilitudinem per Lib. VI. Defin. 1. requifita, colligitur.

§. 74.

§. 74.

Conditiones V^{tæ} ſic etiam alterne (V, 16.) ſtatui poſſunt: ut unius trianguli latera ad latera alterius, ſingula ad ſingula, eandem rationem habere ponantur; & tum æquales erunt bini triangulorum anguli, quos latera ejusdem rationis terminos conſtituentia ſubtendunt.

§. 75.

Pariterque VI^{ta} ſic poteſt enunciari: Si duo triangula unum angulum uni æqualem habeant, circa hos æquales angulos autem unum latus unius ad unum latus alterius eandem habeat rationem quam alterum prioris latus ad alterum poſterioris; æquiangula erunt triangula; nominatim æquales ceteros habebunt angulos lateribus, qui ejusdem rationis termini ſunt, oppoſitos.

§. 76.

Ope VI^{tæ} demonſtrantur converſæ propoſitorum §. 61. ac parte ſecunda §. 63.: nempe quod (*Fig.* 2. 3. 4.) ſumtis in eadem recta tribus punctis A, B, D, & per duo eorum B, D ductis duabus parallelis BC, DE, ad $\left\{\begin{matrix}\text{easdem}\\ \text{oppoſitas}\end{matrix}\right\}$ rectæ illius partes, prouti puncta B, D in ea jacent ad $\left\{\begin{matrix}\text{easdem}\\ \text{oppoſitas}\end{matrix}\right\}$ partes puncti A, ſic ut ſit $BC : DE = AB : AD$; puncta A, C, E pariter jaceant in directum.

Junctis enim AC, AE rectis, ob angulum $ABC = ADE$ (I, 29.), & $BC : DE = AB : AD$ (ſupp.), eſt angulus $BAC = DAE$ (§. 75.): ideoque priori caſu rectarum AC, AE una in alteram incidit (Lib. I. Ax. 8. Conv.); poſteriori eædem rectæ lineæ in directum ſibi invicem ſunt (I, 15. Conv.).

Clavius (p. 548. ſq.) poſterius eodem modo, prius indirecte demonſtrat.

§. 77.

Sint (*Fig.* 18. 19.) AB, DE parallelæ; & M, N rectæ quæcunque inæquales. Utrinque ab punctis C, F, in parallelis AB, DE ubicunque

que sumtis, abscindantur in priore $CM = Cm = M$, in posteriore $FN = Fn = N$; ita ut puncta M, N sint ex una rectæ CF parte, m, n ex altera. Tres rectæ CF, MN, mn in eodem extra parallelas puncto G concurrent: &, si duo segmenta CK, FL ad easdem rectæ CF partes ab parallelis AB, DE abscissa sunt ut M ad N, recta quoque KL altera eorum extrema K, L jungens per punctum G transibit.

Quippe rectis CF, MN se in puncto G secantibus (§. 64.),

est (§. 61.)	$CM : FN = CG : GF$
Sed ob $Cn = CM$, $Fn = FN$, est (V, 7. Cor.)	$Cm : Fn = CM : FN$
ac (hyp. & V, 7. 11.)	$CK : FL = M : N = CM : FN$
Ideoque (V, 11.)	$\left.\begin{array}{r}\text{tam } Cm : Fn \\ \text{quam } CK : FL\end{array}\right\} = CG : GF$

& hinc (§. 76.) tam puncta m, n, G, quam puncta K, L, G jacent in directum.

§. 78.

Iisdem, quæ §. 77, sumtis & factis (nisi quod rectæ M, N nunc etiam possunt esse æquales): tres rectæ CF, Mn, mN se in eodem intra parallelas puncto g secabunt; &, si segmenta Ck, Fl ad alternas rectæ CF partes ab parallelis AB, DE abscissa sunt ut M ad N, recta etiam kl, altera eorum extrema k, l jungens, per punctum g transibit.

Rectis enim CF, Mn se in puncto g secantibus,

est (§. 63.)	$CM : Fn = Cg : gF$
Atqui ob $Cm = CM$, $FN = Fn$, est (V, 7. Cor.)	$Cm : FN = CM : Fn$
& (hyp. ac V, 7. 11.)	$Ck : Fl = M : N = CM : Fn$
Quare (V, 11.)	$\left.\begin{array}{r}\text{tam } Cm : FN \\ \text{quam } Ck : Fl\end{array}\right\} = Cg : gF$

proinde (§. 76.) in directum sunt tam puncta m, g, N, quam puncta k, g, l.

§. 79.

Per proposita §. 64. sq. 77. sq. solvitur *Problema*, quod est *Locus* 1. & 2. *Libri prioris* Apollonii *de sectione rationis* (p. 1. 6.): Sint duæ rectæ parallelæ AB, DE positione datæ, & datum sit in utraque illarum punctum (C, F); sitque etiam ratio data (datæ scilicet sint duæ rectæ M, N, eam invicem habentes rationem); præterea datum sit eodem in plano punctum

ctum H extra (*Fig.* 18.), vel intra (*Fig.* 19.) parallelas AB, DE, nec in directum jacens cum punctis C, F, quæ in ipsis parallelis dantur: ducere ab puncto dato H lineam rectam, quæ occurrens parallelis AB, DE auferat ab ipsis segmenta datis in iis punctis C, F adjacentia, quæ sint inter se in ratione data M ad N.

Ab recta enim AB ex alterutra dati in ea puncti C parte abscindetur $CM =$ datæ M; ab recta autem DE, $FN = Fn =$ datæ N, utrinque ab puncto in ipsa dato F: vel ab hac, ex una puncti F parte, $FN = N$; ab illa, utrinque ab puncto C, $CM = Cm = M$. Tum junctis MN & Mn vel mN rectis, iisque rectam CF secantibus in punctis G, g, quæ utroque modo eadem fient (§ 77. sq.); per punctum datum H & per utrumque punctum G, g agentur rectæ HG, Hg: quæ si rectis AB, DE in punctis K, L, k, l occurrunt, erunt segmenta

$$\left.\begin{array}{l} CK : FL \\ Ck : Fl \end{array}\right\} = CM : \left\{\begin{array}{l} FN \\ Fn \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} CM \\ Cm \end{array}\right\} : FN \,(\text{§. 64. sq.}) = M : N \,(\text{V. 11.}).$$

Rectæ igitur illæ ab puncto H per puncta G, g ductæ satisfaciunt problemati; nec aliæ (§. 77. sq.).

Et hanc quidem constructionem, ab *Apolloniana* (p. 2. sqq. 6. sqq.) diversam, in Scholio (p. 10.) tradit HALLEY.

§. 80.

Si ratio data $M : N$ fuerit æqualitatis (quam autem APOLLONIUS tacite excludit): ob parallelas CF & MN vel mn (I, 33.) deest punctum G; nec nisi uno modo per rectum Hg problema solvitur.

Quodsi in *Fig.* 18. recta HG, vel in *Fig.* 19. recta Hg parallela fuerit positione datis AB, DE; altera tantum solutionem præstabit.

Si & ratio æqualitatis fuerit data $M : N$; & punctum H intra parallelas AB, DE datum (*Fig.* 19.) in rectam ipsis per g parallelam inciderit: propositum effici nequit.

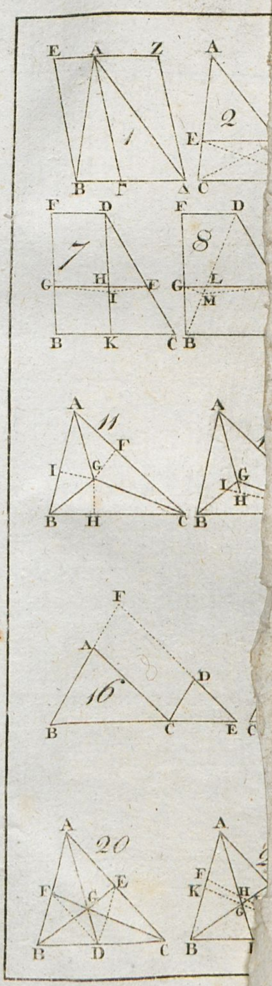
Ceteris casibus, quod problema requirit, duplici semper modo fieri potest: uno quidem, si rectarum MN, mn, Mn, mN aliqua per punctum H transierit, per ipsam hanc rectam.

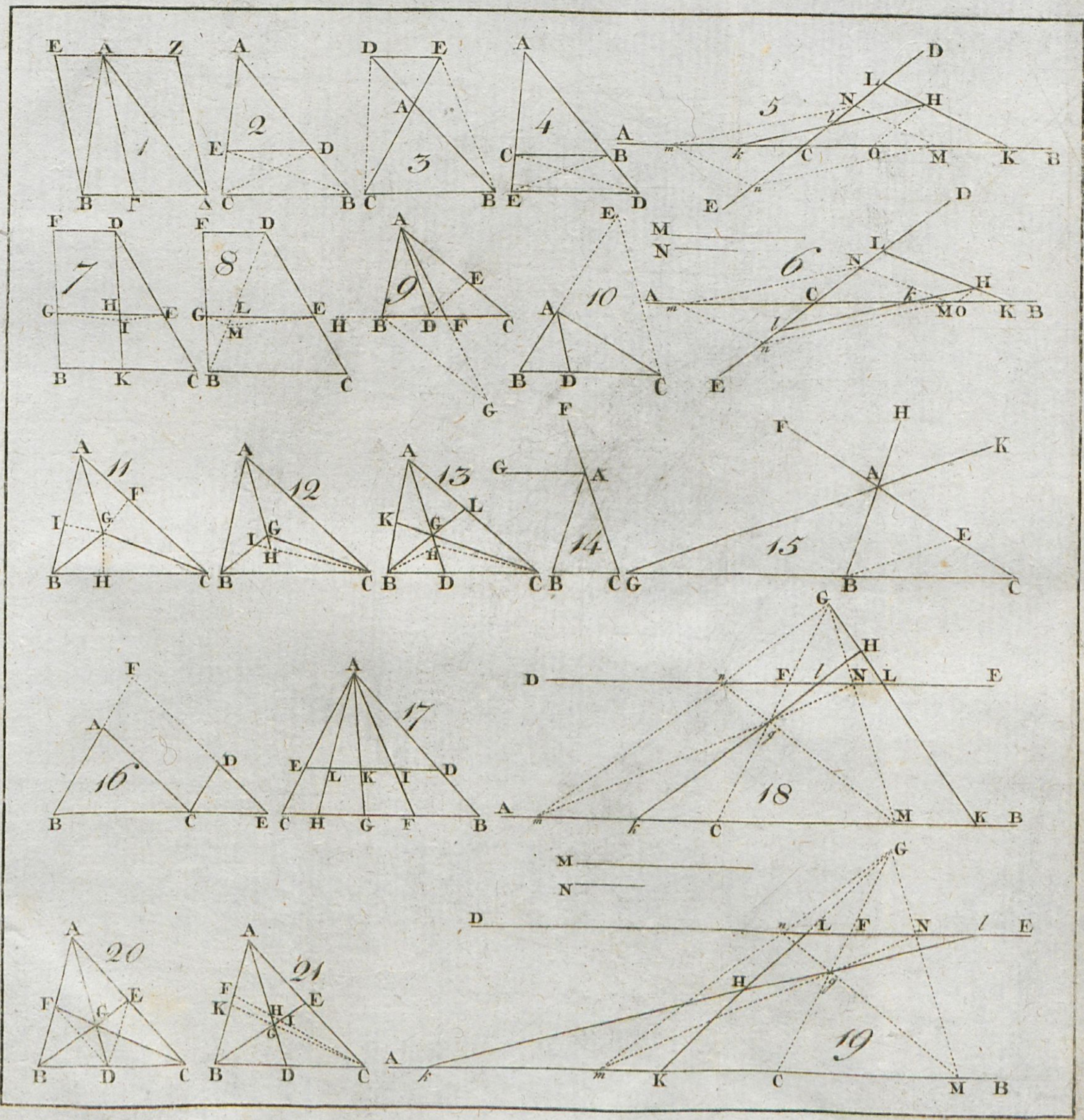
§. 81.

Quæ prioribus §. 77. 78. partibus asseruntur, sic etiam possunt enunciari: In quadrilateris, quorum duo latera sunt parallela, recta bifariam hæc latera dividens, & diagonales figuræ in eodem intra quadrilaterum puncto se secant; &, si altera duo latera parallela non sunt, hæc atque recta bifariam latera parallela dividens in eodem extra figuram puncto concurrunt.

§. 82.

In parallelogrammis igitur diagonales & rectæ bina latera opposita bifariam dividentes eodem in puncto se secant: quod ita fieri alio modo ostenditur in demonstratione XI, 39.


1
2
7
8
11
16
20


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21

W18

SCHOLIA
IN LIBRUM SEXTUM ELEMENTORUM EUCLIDIS

QUORUM

PARTEM PRIMAM

1800 2.

PRÆSIDE

CHRISTOPHORO FRIDERICO PFLEIDERER

UNIVERSITATIS ET COLLEGII ILLUSTRIS PROFESSORE PHYSICES ET MATHESEOS PUBL. ORD.

23

PRO CONSEQUENDO GRADU MAGISTERII

D. SEPT. MDCCC.

PUBLICE DEFENDENT

CHRISTIAN. NATHANAËL OSIANDER, *Kohlbergensis*,
CHRISTIAN. GOTTLIEB WUNDERLICH, *Nagoldensis*,
EBERHARDUS FRIDERICUS MEZGER, *Marbacensis*,
JO. FRIDERICUS WEIHENMAIER, *Steinenbronnensis*,
GOTTLIEB CHRISTIAN. PFEIFFER, *Marcogröningensis*,
CANDIDATI MAGISTERII PHILOSOPHICI IN ILLUSTRI STIPENDIO THEOLOGICO.

TUBINGÆ

LITERIS SCHRAMMIANIS.

490.