SCHOLIA
IN LIBRUM SECUNDUM ELEMENTORUM EUCLIDIS

QUORUM

PARTEM SECUNDAM

PRÆSIDE

CHRISTOPHORO FRIDERICO PFLEIDERER

UNIVERSITATIS ET COLLEGII ILLUSTRIS PROFESSORE PHYSICES ET MATHESEOS PUBL. ORD.

1798, 4.

15

PRO CONSEQUENDO GRADU MAGISTERII

D. SEPT. MDCCXCVIII.

PUBLICE DEFENDENT

CHRISTIANUS CAROL. AUGUSTUS HAAS, *Soehnstettensis*,
CHRISTIANUS FRIDERICUS ESSICH, *Canstadiensis*,
CAROL. AUG. CHRISTOPH. RÜMELIN, *Mulifontanus*,
FRIDERICUS AUGUSTUS HOFFMANN, *Stuttgardianus*,
CANDIDATI MAGISTERII PHILOSOPHICI IN ILLUSTRI STIPENDIO THEOLOGICO.

TUBINGÆ

LITERIS SCHRAMMIANIS.

Propositio IX.

§. 109.

Clavius (p. 187. sq.) Propositionis IX. hanc demonstrationem quartam affert. Quadrato *ABEF* (*Fig.* 25.) super recta *AB* constructo, similiterque ac in demonstratione Propositionis VIII. diviso: sunt (II, 4. Cor. & I, 34.)

NH, DO, LG, PQ quadrata rectarum $NK=AD$, BD, $LI=AC$, $KQ=CD$;

& $NH=LG+PQ+LQ+HI$

$=LG+2PQ+PO+HI$, ob $LI=AC=CB=IM$, ideoque $LQ=MQ=PQ+PO$

Quare

$$NH+DO=LG+2PQ+\left\{\begin{matrix}PO+DO\\ DM\end{matrix}\right\}+HI$$

$$=LG+2PQ+\left\{\begin{matrix}HM+HI,\\ GM\end{matrix}\right.$$ ob $BM=EM$ (§. 13.), adeoque $DM=HM$

$=2LG+2PQ$, ob $GM=LG$ (§. 13.)

h. e.

$$AD^q+DB^q=2AC^q+2CD^q.$$

Eandem demonstrationem tradunt Claud. Richardus (p. 60. sq.), Euclidis *Elementa* Lond. 1678. (p. 91.)

§. 110.

Coetsius (p. 210. sqq.) Propositionem IX. sic demonstrat: super segmento majori *AD* (*Fig.* 26.) ad extrema ejus *A*, *D* constituantur perpendicula *AE*, *DF* semissibus *AC*, *CB* rectæ *AB* æqualia; & ab posteriori *DF* abscindatur $DG=CD$; quo facto relinquitur $FG=DB$; tum jungantur rectæ *CG*, *CE*, *EG*, *EF*.

Ob *AE*, *DF* æquales ac parallelas (constr. & I, 29.), parallelæ & æquales etiam sunt *EF*, *AD* (I, 33.); atque angulus $F=A$ (I, 34.) est rectus.

gregatum esse omnium minimum, quando ipsorum latera mutuo æqualia sunt. (LHUILIER p. 55)

§. 119.

Contrarium igitur in summa duorum quadratorum, eandem laterum summam habentium, seu quorum latera sunt partes ejusdem rectæ utcunque in duas divisæ, obtinet illius, quod in parallelogrammis rectangulis eandem laterum contiguorum summam habentibus, seu sub duabus ejusdem rectæ partibus, contingit. Horum quippe maximum est, quod ab æqualibus rectæ datæ segmentis comprehenditur (§. 33.); quadratorum autem ab æqualibus rectæ segmentis descriptorum summa minima est (§. 118.)

§. 120.

Et summa duorum quadratorum ab æqualibus rectæ segmentis descriptorum a summa duorum quadratorum ab inæqualibus ejusdem rectæ segmentis factorum deficit duplo quadrato semidifferentiæ segmentorum horum inæqualium, seu laterum quadratorum posteriorum. (II, 9. & §. 30.)

§. 121.

Qui defectus duplus est ejus, quo rectangulum sub iisdem ejusdem rectæ segmentis inæqualibus ab quadrato dimidiæ, seu ab rectangulo sub ejus segmentis æqualibus, deficit.

§. 122.

Nexum propositorum §. 119. sqq. mutuum indicat demonstratio §. 112. Quippe $AD^q + DB^q$ ab AB^q deficit 2 rectangulo sub AD & DB (II, 4.); sed $AC^q + CB^q$ ab AB^q deficit spatio $= 2AC^q$ (§. 13.) Eo ipso igitur, quia rectangulum sub AD & DB minus est quam AC^q (II, 5.); proinde $AD^q + DB^q$ ab AB^q minus deficit, quam $AC^q + CB^q$ ab eodem AB^q deficit: est $AD^q + DB^q > AC^q + CB^q$. Et prior quidem summa posteriorem superat excessu, quo posterioris ab AB^q defectus prioris ab eodem AB^q defectum superat; duplo igitur excessu ipsius AC^q super rectangulum sub AD & DB; h. e. (II, 5.) duplo CD^q.

§. 123.

Secetur AB (*Fig.* 6. 7.) in alia inæqualia AR, BR in puncto R remotiore quam D ab puncto bisectionis C; vel ita, ut sit $AR > AD$ (*Fig.* 6.), $BR > AD$ (*Fig.* 7.)

Erit summa $AR^q + RB^q$ major altera $AD^q + DB^q$: cum (II, 4.) hæc ab AB^q deficiat duplo rectangulo sub AD & DB; illa, duplo rectangulo sub AR & $RB < 2ADB$ (§. 37.): vel cum (II, 9.) hujus super $2AC^q$ excessus sit $2CD^q$; illius, $2CR^q > 2CD^q$. (Lemma ante X, 43. Barrow p. 42. Whiston p. 51. Bærmannus p. 46. Gilbert p. 281.)

§. 124.

Et quidem, cum sit

$$AR^q + RB^q = 2AC^q + 2CR^q \text{ (II, 9.)}$$
$$= 2AC + 2CD^q + 2\,\text{rectg.}\,RDQ, \text{ facta } AQ = BR \text{ (§.41.)}$$

atque $AD^q + DB^q = 2AC^q + 2CD^q$ (II, 9.);

fit $AR^q + RB^q = AD^q + DB^q + 2$ rectg. RDQ:

h. e. summa $AR^q + RB^q$ alteram $AD^q + DB^q$ superat duplo rectangulo sub summa & sub differentia semidifferentiarum laterum AR & RB, AD & DB (§. 41.); adeoque rursus duplo excessus rectanguli sub AD & DB super rectangulum sub AR & RB (§. 123.), quod etiam ex §. 123. consequitur.

§. 125.

Ex §§. 118. 123. conjunctis cum I, 47. tum huc collatis §§. 34. 40. sequitur: parallelogramma inter rectangula isoperimetra quadrati aream maximam, diagonales minimas esse; ceterorum areas eo minores, diagonales eo majores esse, quo magis latera ipsorum contigua invicem differant: pariterque triangula inter rectangula, quorum latera circa angulum rectum eandem summam conficiunt, æquicruri aream maximam, hypotenusam minimam esse; ceterorum scalenorum aream eo minorem, hypotenusam eo majorem esse, quo magis catheti eorum invicem differant.

§. 126.

Cum (*Fig.* 27.) bifariam in C secta AB, ibidemque ipsi constituto perpendiculo $CE = AC = CB$; tum junctis AE, BE rectis: fiat angu-

lus

lus AEB rectus; & quæ ex quibuslibet rectæ CB punctis D, R ipsi CE parallelæ, seu (I, 29.) rectæ CB perpendiculares aguntur ad occursum usque rectæ BE, vel quæ ex punctis quibuscunque F, P hujus BE normales in illam CB dimittuntur, DF, RP, fiant rectæ AB segmentis DB, RB æquales (Demonstr. Prop. IX.); ideoque sint $AD + DF = AR + RP = AC + CE = AB$: completis parallelogrammis rectangulis $ACEM$, $ADFN$, $ARPT$, triangulisque rectangulis ACE, ADF, ARP; quæ §. 125. de diagonalibus & hypotenusis eorum traduntur, etiam liquent ex Propositionum I, 19. 16. 17. Corollario: quod rectarum, quæ ex puncto A extra rectam aliquam BE ad hanc duci possunt, minima sit normalis AE; ceterarumque ad easdem normalis AE partes jacentium eæ sint majores, quæ ab AE sunt remotiores.

§. 127.

Rectæ CB normales DF, RP segmentis adjacentibus DB, RB rectæ AB æquales esse, in demonstratione Prop. IX. inde deducitur: quod angulum ABC semirectum esse fuit ostensum.

Quare eadem æqualitas tum ad normales df rectæ AC insistentes & ad continuatam BE usque protensas, ac rectæ AB segmenta dB illis adjacentia, ipsamque AB & ei in A normalem AL, rectæ BE in L occurrentem, iisdem ex I, 32. 6. nexis argumentis extenditur: tum subsistit, si recta BL ita immediate ducitur, ut efficiat angulum ABL semirectum, h. e. ut bifariam secet factum ad rectam AB ejusque extremum B angulum rectum ABH; vel si, ducto rectæ AB perpendiculo $AL = AB$ in ipsius extremo A, aut $DF = DB$ in ipsius puncto quocunque D, recta BL per data puncta B & L, B & F agatur, unde per I, 5. 32. fit angulus ABL semirectus.

§. 128.

Quicunque porro sit angulus ABH (*Fig.* 28. 29.); si bifariam eum secat recta BL: quælibet cruri BH parallela ab altero crure BA abscindit segmentum, ipsius parallelæ segmento rectis BA, BL interjacenti æquale.

Ob angulos enim ALB, dfB, CEB, DFB, RPB æquales angulo LBH (I, 29.), ideoque (constr.) angulo ABL; fiunt (I, 6.) $BA = AL$, $Bd = df$, $BC = CE$, $BD = DF$, $BR = RP$.

§. 129.

Viciſſim, per alterum rectæ AB extremum A ſub angulo quocunque ducta recta $AL = AB$, & juncta BL recta: quælibet rectæ AL parallela, rectis AB, BL terminata, æqualis eſt rectæ AB ſegmento, quod ad partes puncti B parallelæ iſti adjacet. Quippe ob angulos dfB, CEB, DFB, RPB æquales angulo ALB (I, 29.), ideoque (conſtr. & I, 5) angulo ABL; rurſus ſunt (I, 6.) $df = dB$, $CE = CB$, $DF = DB$, $RP = RB$.

Eademque obtinent; ſi, extremi L loco rectæ $AL = AB$, recta BL per extremum E, F rectæ cujuscunque $CE = CB$, $DF = DB$ ducitur.

§. 130.

Tum (§. 128. 129.) igitur pariter $Ad + df = AC + CE = AD + DF = AR + RB = AB$.

Proinde triangulorum Adf, ACE, ADF, ARP circa æquales (I, 29.) angulos obliquos Adf, ACE, ADF, ARP latera eandem ſummam conficiunt; & parallelogramma obliquangula $Adfn$, $ACEM$, $ADFN$, $ARPT$ circa angulum communem A iſoperimetra ſunt.

§. 131.

Contra, (*Fig.* 27. 28. 29.) quæ hinc recta AB, inde puncto quocunque O, U, extra rectam BL juxta §. 126—129. ductam, ad easdem cum ipſa partes rectæ AB ſito, terminantur rectæ DO, DU, poſitione datæ BH, vel BL, vel CG parallelæ, utpote minores vel majores quam DF, ſegmento adjacenti DB rectæ AB æquales non ſunt; nec proinde eſt $AD + DO$, vel $AD + DU$, rectæ AB æqualis.

§. 132.

Locus igitur, quem in iſoperimetris parallelogrammis æquiangulis ($Adfn$, $ACEM$, $ADFN$, $ARPT$), circa communem quemcunque angulum (A) conſtitutis, attingunt ipſorum anguli (f, E, F, P) communi angulo (A) oppoſiti, eſt (§. 126. ſqq.) baſis (BL) trianguli æquicruri (ABL), circa eundem cum parallelogrammis angulum (A) deſcripti, cujus crurum (AB, AL) ſumma eſt perimetro parallelogramgrammorum æqualis. (VIVIANI *De Locis solidis.* Lib. III. Prop. 8. p. 57.)

§. 133.

Pariter constructis ad easdem rectæ (AB) magnitudine ac positione datæ partes, in eodem plano, triangulis (Adf, ACE, ADF, ARP), quorum bases (Ad, AC, AD, AR) segmenta sunt datæ rectæ (AB) eidem ipsius extremo (A) adjacentia, latera autem (df, CE, DF, RP) alteris basium extremis adjacentia invicem sunt parallela & æqualia residuis datæ rectæ (AB) segmentis (dB, CB, DB, RB); ita ut triangulorum circa angulos æquales (Adf, ACE, ADF, ARP) latera simul sint datæ rectæ (AB) æqualia: Locus, quem vertices (f, E, F, P) horum triangulorum attingunt, est recta (BL) bifariam secans angulum (ABH), ad datam rectam (AB), ejusque alterum extremum (B), ad easdem ipsius partes, ad quas sunt triangula, constitutum æqualem ei, quem triangulorum latera, quorum summa est datæ rectæ (AB) æqualis, comprehendunt. (§. 126. sq. 128. 130. sq.)

§. 134.

Utroque casu (§. 132. sq.) Locus, de quo agitur, ceteris etiam modis §. 126—129. indicatis potest determinari.

§. 135.

Bifariam in C secta AB (*Fig.* 28. 29.): ob $CE = CB$ (constr. vel demonstr.) $= AC$, itaque (I, 5.) angulos $AEC = CAE$, $BEC = CBE$, ideoque $AEB = BAE + ABE = AEL$ (I, 32.); AE etiam est rectæ BL perpendicularis, quando obliqui sunt anguli BAL, ABH, ACE.

Quare per rationem §. 126. allatam in parallelogrammis etiam obliquangulis invicem æquiangulis & isoperimetris diagonalium homologarum, seu quæ vertices angulorum respective æqualium jungunt, minimæ sunt diagonales parallelogrammi æquilateri; ceterorum non æquilaterorum diagonales homologæ sunt eo majores, quo magis latera ipsorum contigua invicem differunt. Pariterque triangula inter, angulum aliquem obliquum (cujus vertex triangulorum etiam vertex esse concipiatur) æqualem habentia, & quorum latera circa hunc angulum (crura) eandem summam conficiant, æquicruri basis minima est;

eſt; ceterorum non æquicrurorum baſis eo major eſt, quo magis crura ipſorum invicem differunt.

Quæ de areis parallelogrammorum & triangulorum rectangulorum §. 125. addita ſunt: demum ope VI, 23. ad obliquangula extendi; vel immediate per VI, 27. de illis inferri poſſunt.

§. 136.

Per præcedentia facile determinatur ac ſolvitur Problema: *conſtruere triangulum rectangulum, cujus datur hypotenuſa & ſumma cathetorum;* vel *deſcribere parallelogrammum rectangulum, cujus datur diagonalis & ſumma duorum laterum contiguorum.*

Fieri debeat laterum trianguli vel parallelogrammi circa angulum rectum ſumma $=$ rectæ datæ AB (*Fig.* 30.). Tum altera recta data, cui æquari debet hypotenuſa trianguli, vel diagonalis parallelogrammi, minor ſit, oportet, quam AB (I, 20.); ſed quadratum ejus non minus eſſe debet duplo quadrato dimidiæ AB (§. 125. & I, 47.), vel ſemiſſe quadrati rectæ AB (§. 13.).

Bifariam in C ſecetur AB: & ſit

1°. altera recta data $I < AB$, atque $I^q = 2AC^q$. Rectæ AB in C perpendicularis ducatur $CE = CB$; & finiatur triangulum ACE, vel parallelogrammum $ACEM$: factum erit, quod requiritur. Ita enim $AC + CE = AB$; & $AE^q = 2AC^q$ (I, 47.) $= I^q$ (hyp.), ideoque $AE = I$.

2°. Sit altera recta data $K < AB$, & $K^q > 2AC^q$. Rurſus ducta rectæ AB in C normali $CE = CB$, & juncta AE recta; ob $AE^q = 2AC^q$ (I, 47.), erit $K^q > AE^q$, $K > AE$. Ab producta AE abſcindatur $AS = K$; & per puncta B, E ducatur recta BL. Trianguli vel parallelogrammi deſcribendi poſitis uno vertice A, & uno latere congruente cum ſegmento rectæ AB: tertius vertex debet eſſe ad rectam BL, ut ſumma laterum circa angulum rectum fiat $= AB$ (§. 126. 132. ſqq.); & ad peripheriam circuli, centro A, intervallo $AS = K$ deſcripti, ut hypotenuſa vel diagonalis ſit $= K$.

Quare factis ceteris jam indicatis; centro A, intervallo AS deſcribetur circulus: quem recta BL, per punctum E intra ipſum ducta,

 ſecafecabit in duobus punctis F, f; illo quidem F inter puncta E, B; hoc f inter puncta E, L, ubi rectæ AB in A normalis AL rectam BL fecat (§. 126.); ob $AS = K < AB$ (hyp.) Tum ex punctis F, f demissis in rectam AB perpendiculis FD, fd; quæ in ipsam inter puncta C & B, C & A incident (demonftr. & I, 27.): finiantur triangula ADF, Adf; vel parallelogramma $ADFN$, $Adfn$.

Ita erunt $FD = DB$, $fd = dB$ (Dem. Prop. IX.); ideoque tam $AD + DF$, quam $Ad + df = AB$; & $AF = Af = AS = K$.

Ceterum ob $EF = Ef$ (I, 47. Cor.); ideoque $FG = Eg$ (I, 29. 26.), $CD = Cd$ (I, 34.); & hinc $Ad = DB = DF$, $AD = Bd = df$: triangula ADF, Adf, pariterque parallegramma $ADFN$, $Adfn$ fitu folo diverfa funt.

§. 137.

Ab Problemate præcedenti enunciato tantum differt hoc: *Datis (Fig. 31) fumma* AB *laterum duorum quadratorum, & latere* HI *quadrati æqualis fummæ ipforum quadratorum, invenire eorum latera*; feu *propofitam rectam* AB *ita fecare, ut quadratorum ab fegmentis ejus factorum fumma fit quadrato rectæ datæ* HI *æqualis*: cujus determinatio & folutio immediate etiam fic inveftigantur.

Sive bifariam in puncto C, five in inæqualia utcunque in puncto D fecetur data recta AB; $AC^q + CB^q$, $AD^q + DB^q$ funt $< AB^q$ (II, 4. & §. 19.) Quare, ut effe poffit $AC^q + CB^q$, vel $AD^q + DB^q = HI^q$; oportet, fit $HI^q < AB^q$, $HI < AB$.

Summa autem $AC^q + CB^q = 2\,CB^q$ minima eft quadratorum, eandem laterum fummam AB habentium (II, 9. & §. 118.). Ideoque non debet effe $HI^q < 2\,CB^q$ feu EB^q (I, 47.), rectæ AB in C ducta normali $CE = CB$; nec proinde $HI < EB$.

1°. Sit $HI = EB$; itaque $HI^q = EB^q = 2\,CB^q$ (I, 47.): eft $AC^q + CB^q = HI^q$. Propofito igitur fatisfacit rectæ datæ AB bifariam fectio in puncto C.

2°. Si $HI > EB$; $HI^q > EB^q$ feu $2\,CB^q$: in inæqualia fecanda eft recta data AB. Factum fit in puncto D;

h.e. fit $AD^q + DB^q = HI^q$. Ob $AD^q + DB^q = 2(CB^q + CD^q)$ (II, 9.): oportet, fit $2(CB^q + CD^q) = HI^q = 4\,KI^q$ (§. 13.), bifariam in K fecta HI;

$CB^q + CD^q = 2\,KI^q$.

Facto

Facto igitur triangulo rectangulo, cujus hypotenusæ quadratum $= 2KI^q$, & cujus unum latus circa angulum rectum $=$ datæ CB: ejus alterum latus circa angulum rectum exhibebit CD, semidifferentiam segmentorum AD, DB (§. 36.); & determinabit punctum D.

Hinc sequens fluit constructio: Bifariam in punctis C, K secentur rectæ datæ AB, HI. Cum sit $HI < AB$ (supp.); est $KI < CB$. Ab perpendiculo $CE = CB$, quod rectæ datæ AB in puncto C ducatur, abscindatur $EF = KI$; & per punctum F agatur rectæ AB parallela FG ad occursum usque junctæ EB rectæ in G. Ob angulum $FGE = B$ (I, 29.), & angulum $B = BEC$ (I, 5.): erit angulus $FGE = FEG$; $FG = EF$ (I, 6.); $EG^q = 2EF^q$ (I, 47.) $= 2KI^q$ (constr.) Sed ob $HI > EB$ (supp.), proinde HI^q seu (§. 13.) $4KI^q > EB^q$ seu $2EC^q$ (I, 47.); est $2KI^q$ seu $EG^q > EC^q$; itaque $EG > EC$: & ob parallelas FG, CB est $EG < EB$. Circulus igitur centro E, intervallo EG descriptus rectam CB secabit in puncto D inter C & B sito, quod satisfaciet proposito.

Ita enim $AD^q + DB^q = 2(CB^q + CD^q)$ (II, 9.) $= 2(CE^q + CD^q)$ (constr.) $= 2ED^q$ (I, 47.)
$= 2EG^q$ (constr.) $= 4EF^q$ (constr. & dem.) $= 4KI^q$ (constr.)
$= HI^q$ (constr. & §. 13.)
& $AD + DB = AB$.

Eademque valent de altero puncto d, in quo recta AB, per punctum C intra circulum centro E, intervallo $EG > EC$ descriptum transiens, eum secat: & ob $Cd = CD$ (I, 47. Cor.), rursus sunt $Ad = DB$, $dB = AD$.

§. 138.

Alteri Problematis §. 137. casui, quo $HI^q > 2CB^q$, $2HI^q > 4CB^q$ seu (§. 13.) AB^q, solvendo adhiberi etiam possunt proposita §. 114. sqq: juxta quæ, si in puncto D facta esse ponitur imperata rectæ datæ AB in inæqualia divisio (*Fig.* 32.), & $DO = DB$ abscissa ab segmento majori AD, ut sit AO differentia horum segmentorum, est $AB^q + AO^q = 2(AD^q + DB^q)$: proinde, ut sit $AD^q + DB^q = HI^q$, debet esse $AB^q + AO^q = 2HI^q$. Unde, cum dentur AB, HI; inventio rectæ AO, & tum puncti D, rursus reducitur ad consectaria Propositionis I, 47.

Nempe ab $BA > HI$ (Determ. 1. §. 137.) abscissa $BL = HI$, atque in puncto L ducta rectæ AB normali $LM = BL = HI$, tum juncta BM recta; est $BM^q = 2HI^q$ (I, 47.) Et ob $2HI^q > AB^q$ (Determ. 2. §. 137. sq.), erit $BM^q > AB^q$, $BM > AB$. Tum, quod ob $BM > AB$ fieri poteſt, conſtructo triangulo rectangulo, cujus hypotenuſa $= BM$, & unum latus circa angulum rectum ſit AB; ideoque rectæ AB in A conſtituto perpendiculo, quod circulus, centro B, intervallo BM deſcriptus, in N ſecet: ob $AB^q + AN^q = BN^q$ (I, 47.) $= BM^q = 2HI^q$ (conſtr.), erit $AO =$ alteri catheto AN trianguli BAN. Ab AB igitur abſciſſa $AO = AN$, & reſidua BO bifariam in D ſecta (§. 51.); factum erit, quod jubebatur.

Sic enim $2\left(AD^q + \begin{Bmatrix} DO^q \\ DB^q \end{Bmatrix}\right) = \left(AD + \begin{Bmatrix} DO \\ DB \end{Bmatrix}\right)^q + \left(AD - \begin{Bmatrix} DO \\ DB \end{Bmatrix}\right)^q$ (§. 114.)

$$= AB^q + \begin{Bmatrix} AO^q \\ AN^q \text{ (conſtr.)} \end{Bmatrix}$$

$$= BN^q \text{(I,47.)} = BM^q \text{(conſtr.)} = BL^q + LM^q \text{(I,47)} = 2HI^q \text{(conſt.)}$$

ideoque $AD^q + DB^q = HI^q$.

§. 139.

Recta data AB (*Fig.* 33.) bifariam in C ſecta; tum ad AC in C conſtituto angulo $ACY =$ dato W, & ab ejus crure CY abſciſſa $CE = AC = CB$; denique juncta AE recta; ductisve per A, E puncta ipſis CE, AC parallelis AM, EM: ſi altera recta data $I = AE$; *ſub dato angulo obliquo* W *deſcribetur triangulum* AEC, *vel parallelogrammum* ACEM, *cujus latera circa hunc angulum ſimul ſunt datæ rectæ* AB *æqualia*, & *cujus baſis, vel diagonalis oppoſita angulo dato, eſt datæ rectæ* I *æqualis.*

Quodſi autem altera recta data K major eſt baſi AE trianguli æquicruri ACE, quod ſub dato ad verticem angulo W, & ſumma crurum æquali rectæ datæ AB conſtruitur (minor enim hac baſi altera recta data eſſe nequit vi §. 135; uti nec major quam AB, ob I, 20.): per puncta B, E ducta BL recta, & ab continuata AE abſciſſa $AS = K$; circuli, centro A, intervallo AS deſcripti, & rectæ BL interſectiones F, f tertium trianguli vel parallelogrammi verticem juxta §. 129. 132. ſqq., pariter ac §pho 136. nro. 2. deſignabunt.

§. 140.

Cum, parallelogrammi uno angulo dato, reliqui dentur (I, 29. 34.):

34.): ad Problema præcedens reducitur determinatio & ſolutio alterius, quo *parallelogrammi obliquanguli angulus*, *ſumma laterum circa hunc angulum*, *vel generatim* (*I*, 34.) *duorum laterum contiguorum*, *& diagonalis ex angulo dato ducta*, *dantur*.

§. 141.

Cum duorum laterum contiguorum cujuslibet parallelogrammi ſumma ſit ſemiſſi perimetri ejus æqualis (I, 34.): *datis parallelogrammi cujuscunque angulo*, *perimetro*, *& alterutra diagonali*, juxta §§. 136. 138. ſq. dijudicabitur poſſibilitas, & exigetur modus deſcribendi parallelogrammum.

§. 142.

Juxta §§. 127. ſq. 133. Problemata §. 136. 138. etiam ſolventur: ad datam AB ejusque extremum B facto angulo ABH recto (*Fig.* 30.), vel æquali dato obliquo W (*Fig.* 33.); tum ducta BL recta bifariam ſecante angulum ABH; atque in eam ab altero rectæ AB extremo A demiſſo perpendiculo AE, quo minor eſſe non debet altera recta data I vel K (§. 118. 126. 135.) Quare, ſi data $I = AE$; erit E vertex parallelogrammi vel trianguli deſcribendi, adjacens rectæ BL. Si data $K > AE$; vertices eorum F, f in recta BL eodem modo, quo §. 136. 138, deſignabuntur. Tum EC, FD, fd agentur rectæ BH parallelæ (§. 127. ſq.); & cetera fient uti §. 136. 138.

§. 143.

Cum, factis CEB, DFB, dfB angulis $= LBH$, fiant EC, FD, fd ipſi AH parallelæ (I, 27.); ſitque angulus $LBH = ABL$ (§. 142.); juberi etiam poteſt: ut ad rectam datam AB ejusque extremum B conſtituatur angulus ABL ſemirectus (*Fig.* 30.), vel ſemiſſis dati obliqui W (*Fig.* 33.); ac perpendiculum AE demittatur in rectam BL ab altero datæ AB extremo A; & centro A, intervallo $AS = K$ circulus deſcribatur, rectam BL in punctis F, f ſecans, ſi altera hæc recta data K fuerit $> AE$; tum ad puncta E, F, f fiant anguli BEC, BFD, Bfd æquales angulo ABL.

§. 144.

Quæ ita fieri debere, ut prodeant $AC+CE$, $AD+DF$, $Ad+df$ datæ AB æquales; proinde $CE=CB$, $DF=DB$, $df=dB$: etiam colligi potest ex I, 5. 32.

§. 145.

Triangulum, cujus dantur basis, summa crurum, & angulus ad verticem, describere, uti §. 143. docent, & partim juxta §. 136. (adhibita etiam III, 20.) inferunt, partim tantum constructionem per I, 6. 32. demonstrant GHETALDUS (p. 337. sq.), THOM. SIMPSON (*Treatise of Algebra*. Lond. 1745. p. 287. sq.), SCHWAB (*Euklids Data*. Stuttg. 1780. p. 174. sqq.), SCHULZE (*Taschenbuch für diejenigen, so gründliche Anwendungen der Messkunst zu machen sich vorsetzen. IItes Heft*. Berlin 1783. p. 400. sqq.). GHETALDUS Lemmate p. 337. præmisso, si triangulum fieri possit, rectam BL in circulum centro A, intervallo æquali basi datæ descriptum incidere demonstrat; determinationem vero basis distincte non exponit. *Cel.* SCHWAB eam ex constructione tradita deducit (p. 176.): quod, suppositis vel Lemmate GHETALDI, vel propositione §. 133, omnino valet; universim vero tutum semper non est. (vid. NEWTONI *Arithmet. univ.* Cap. XVI. Opp. Lond. 1779. Tom. I. p. 170. sq. APOLLONII PERGÆI *Inclinationum Libri duo, restituti ab Sam. Horsley*. Oxon. 1770. Lib. I. Schol. p. 22. sq.)

§. 146.

Modum ab præcedentibus (§. 137. sq.) diversum, & partim Propositionibus III, 31. VI, 8. 17. innixum, *datis summa duarum rectarum & aggregato quadratorum ab illis ortorum distinguendi singulas*, præmissa pro more analysi algebraica, ad numeros & quantitates universim relata, tradit. BILLY in *Diophanto geometra* (Paris. 1660. p. 53. sq.)

Triangulum rectangulum, cujus dantur hypotenusa & summa cathetorum; parallelogrammum rectangulum, cujus dantur diagonalis & summa duorum laterum contiguorum, describere simili ratione, qua §. 138. docent GHETALDUS (p. 93. sqq.) VAN SWINDEN (*Anfangsgründe der Messkunde*. Jena 1797. p. 485. sqq.): ille quidem præmissis analysi, sed algebraica potius, quam geometrica, & determinationibus; hic, ut solet,

let, compoſitione tantum tradita, nec niſi altera determinatione heic notata. Uterque laterum differentiam eodem modo, adhibita III, 31. obtinet: tum vero latera ipſa ille (pariter ac §. 138.) juxta §. 51; hic priori modo §. 36. tradito exhibet.

§. 147.

Ex Propoſitionibus V. IX. conjunctis ſequitur: recta bifariam & in inæqualia utcunque ſecta, quadrata inæqualium partium ſimul æquari quadrato ex totius dimidio, una cum triplo quadrato ex interpoſito ſegmento, & cum rectangulo earundem partium inæqualium.

Nempe (*Fig.* 42.) bifariam in C, & in inæqualia AD, DB ſecta AB recta:

$$\begin{array}{lll} \text{ob} & AC^q = CD^q + \text{rectg. ſub } AD \,\&\, DB & \text{(II, 5.)} \\ \text{fit} & \left.\begin{array}{l} 2AC^q + 2CD^q \\ AD^q + DB^q \end{array}\right\} = AC^q + 3CD^q + \text{rectg.} ADB. & \\ \text{ideoque (II, 9.)} & & \end{array}$$

Propoſitionem hanc VIVIANI (*De Locis ſolidis.* Lib. II. Prop. 68. p. 46.) ex II, 7. 6. ſic deducit: facta $CI = CD$; ideoque $IB = AD$ ob $CB = CA$ (ſupp.); $ID = 2CD$, & $ID^q = 4CD^q$ (§. 13.);

$$\text{eſt} \quad \left.\begin{array}{l} IB^q \\ AD^q \end{array}\right\} + DB^q = 2\text{rectg. ſub } IB \,\&\, BD + \left\{\begin{array}{l} ID^q \\ 4CD^q \end{array}\right. \quad \text{(II, 7.)}$$

$$\text{Sed} \quad \text{rectg.} IBD + CD^q = \left\{\begin{array}{l} CB^q \\ AC^q \end{array}\right. \quad \text{(II, 6.)}$$

$$\text{Ergo} \quad AD^q + DB^q = AC^q + \text{rectg. ſub} \left\{\begin{array}{l} IB \,\&\, BD \\ AD \,\&\, DB \end{array}\right\} + 3CD^q.$$

§. 148.

Idem (l. c. Prop. 52. 54. p. 33. ſq.) tradit: Si recta AB ſecta fuerit bifariam in C, & non bifariam in D; quadratum majoris ſegmenti AD æquari rectangulo ADB ſub ſegmentis inæqualibus, una cum duplo rectangulo ADC ſub ſegmento AD in interpoſitam CD; atque rectangulum ADB ſub inæqualibus ſegmentis æquari quadrato minoris ſegmenti DB, una cum duplo rectangulo BDC ex eodem minore ſegmento DB in reliquam CD ex dimidio datæ.

Quæ, vi §. 30, ſic etiam poſſunt enunciari: Quadratum majoris ſegmenti AD excedit rectangulum ADB ſub inæqualibus ſegmentis duplo

duplo rectangulo ſub majori ſegmento AD & ſub ſemidifferentia CD inæqualium ſegmentorum; contra rectangulum ADB ſub inæqualibus ſegmentis excedit quadratum ſegmenti minoris DB duplo rectangulo ſub eodem minori ſegmento DB & ſub ſemidifferentia CD ipſorum inæqualium ſegmentorum.

Nempe rurſus facta $CI=CD$; ideoque $AI=DB$, $AD=IB$, $ID=2CD$:

$$\begin{aligned}
\text{eſt}\quad AD^q &= \text{rectg.ſub}\,AD \,\&\, AI + \text{rectg.ſub}\,AD \,\&\, ID \quad (\text{II}, 2.)\\
&= \text{rectg ſub}\,AD \,\&\, DB + 2\text{rectg.ſub}\,AD \,\&\, CD \quad (\S.\ 3.);\\
\&\ \text{rectg.}ADB &= \text{rectg.}IBD = DB^q + \text{rectg.ſub}\,DB \,\&\, DI \quad (\text{II}, 3.)\\
&= DB^q + 2\text{rectg.ſub}\,DB \,\&\, CD \quad (\S.\ 3.)
\end{aligned}$$

§. 149.

Si utcunque in punctis C, D ſecatur recta AB (*Fig.* 8.): ſumma quadratorum ſegmentorum AD, DB, cum duplo rectangulo ſub BD & DC æqualis eſt ſummæ quadratorum ſegmentorum AC, CB, cum duplo rectangulo ſub AC & CD.

Quippe $AD^q + DB^q + 2ADB = AC^q + CB^q + 2ACB$; utraque ſc. ſumma $= AB^q$ (II, 4.)

$$\text{Sed}\quad \left.\begin{aligned}\text{rectg.}ADB &= \text{rectg.ſub}\,AC \,\&\, DB + \text{rectg.ſub}\,CD \,\&\, DB\\ \text{rectg.}ACB &= \text{rectg.ſub}\,AC \,\&\, CD + \text{rectg.ſub}\,AC \,\&\, DB\end{aligned}\right\}\ (\text{II}, 1.)$$

$$\begin{aligned}
\text{Ergo}\quad & AD^q + DB^q + 2\text{rectg.ſub}\,AC \,\&\, DB + 2BDC = AC^q + CB^q + 2ACD + 2\text{rectg.ſub}\,AC \,\&\, DB\\
\&\quad & AD^q + DB^q + 2BDC = AC^q + CB^q + 2ACD.
\end{aligned}$$

§. 150.

Bifariam igitur in C ſecta AB; ob $AC = CB$, fit

$$\begin{aligned}
AD^q + DB^q + 2\text{rectg.}BDC &= 2AC^q + \left\{\begin{aligned}&2\text{rectg.}BCD \ (\S.\ 149.)\\ &2\text{rectg.}BDC + 2CD^q \ (\text{II}, 3.)\end{aligned}\right.\\
\&\ AD^q + DB^q &= 2AC^q + 2CD^q.
\end{aligned}$$

Propositio X.

§. 151.

Peletarius (p. 101. ſq.) Propoſitionis X. demonſtrationi Euclideæ hanc addit: Rectæ AD (*Fig.* 34.) quadrato DE conſtructo, & ſimiliter uti in demonſtratione Propoſitionis VIII. diviſo;

eſt

est $DE = CG+LK+HE+DH$.

Atqui $HE = MK$ (I, 36.), ob $GH = AC = CB = HM$ (I, 34. & supp.)

$= MN+NO$

$= CG+NO$: ob $GH = HM$ (dem.); & MN, CG quadrata (II, 4. Cor.), cum per idem Cor. sit BV quadratum

ac $DH = NL$ (I, 36.), ob $CH = GH = HM = HN$ (dem.)

Ergo $DE = 2CG+LK+NO+NL$

$= 2CG+LK+$gnom.ONL

& $DE+PO = 2CG+2LK$

h.e. $AD^q+BD^q = 2AC^q+2CD^q$ (II, 4. Cor. & I, 34.)

§. 152.

Eodem redit demonstratio quinta Clavii (p. 198. sq.): qui (*Fig.* 35.) rectam AD producere jubet, donec sit $DI = DB$; tum super tota AI quadratum SI construere; atque illud simili ratione, qua in præparationibus demonstrationum Propositionum IV. VIII. dividere; ut sint

$$AD^q + \begin{Bmatrix} DI^q \\ BD^q \end{Bmatrix} = DE + RU, \quad AC^q+CD^q = CG+LK:$$

tum similiter, uti §. 151, ostendit esse

$$DE = 2CG+LK+\text{gnom.}ONL;$$

& quoniam quadratum $RU = PO$, ob $DI = DB$ (constr.), ideoque $FR = PQ$ (I, 34.)

infert esse $DE+RU = 2CG+2LK$

proinde $AD^q+BD^q = 2AC^q+2CD^q$.

Demonstratione hac etiam utitur Claud. Richardus (p. 61.)

§. 153.

Coetsius (p. 213. sq.) Propositionem X. simili modo quo IXnam (§. 110.) demonstrat: super recta AD (*Fig.* 36.), composita ex data AB & adjecta BD, in extremis ipsius A, D constituendo perpendicula AF, DE æqualia rectæ CD compositæ ex dimidia data CB & adjecta BD; tum ab priore AF abscindendo $AG = AC = CB$, quo facto relinquitur $FG = BD$; denique jungendo rectas CG, CE, EG, EF.

Sic,

Sic, (uti §. 110.) fiunt $FE = AD$; anguli F & ECG recti: quare (I, 47. & constr.) $CG^q = 2AC^q$, $CE^q = 2CD^q$

$$EG^q = \begin{cases} CG^q + CE^q = 2AC^q + 2CD^q \\ EF^q + FG^q = AD^q + BD^q \end{cases}$$

proinde $AD^q + BD^q = 2AC^q + 2CD^q$.

§. 154.

Clavius in demonstratione secunda (p. 198.), & Angelus de Marchettis (p. 93.) Propositionem X. ex Propositionibus IV. VII. sic eliciunt:

$$AD^q = AC^q + CD^q + 2\text{rectg. sub} \begin{Bmatrix} AC \\ CB \end{Bmatrix} \& \; CD \quad (\text{II}, 4.)$$

Igitur $AD^q + BD^q = AC^q + CD^q + 2\text{rectg.} DCB + BD^q$

Atqui $2\text{rectg.} DCB + BD^q = CD^q + \begin{Bmatrix} CB^q \\ AC^q \end{Bmatrix}$ (II, 7.)

Itaque $AD^q + BD^q = 2(AC^q + CD^q)$.

§. 155.

Barrow (p. 44.) tantum utitur Propositione IV. ejusque ac I^{mae} Corollariis §. 13. 3. expositis, hoc modo:

$$AD^q = AB^q + BD^q + 2\text{rectg. sub } AB \,\&\, BD \quad (\text{II}, 4.)$$
$$= 2AC^q + 2CB^q + BD^q + 4\text{rectg. sub } CB \,\&\, BD \quad (\S.\ 13.\ 3.)$$

Quare $AD^q + BD^q = 2AC^q + 2(CB^q + BD^q + 2\text{rectg. sub } CB \,\&\, BD)$
$= 2AC^q + 2CD^q$ (II, 4.)

§. 156.

Conjungi etiam possunt Propositiones VI. VII. cum Propositionis IV. Corollario §. 13: scilicet

$$AD^q + BD^q = 2\text{rectg. } ADB + AB^q \quad (\text{II}, 7.)$$
$$= 2\text{rectg.} ADB + 2CB^q + 2AC^q \quad (\S.\ 13.)$$
$$= 2CD^q + 2AC^q \quad (\text{II}, 6.)$$

Huc redit demonstratio Gilberti (p. 279.)

§. 157.

Commandinus demonstratione secunda (Fol. 33. b.), & Clavius tertia (p. 189.) eodem modo, quo §. 113. cum Propositione IV. conjungunt

jungunt VII^mæ^ enunciatum §. 84. 88. expositum: vi cujus rursus est

$$AC^q + CD^q = 2\,\text{rectg.}\,ACD + BD^q,\ \text{quia}\ BD = CD - \begin{cases} CB \\ AC \end{cases}$$

Quare $2(AC^q + CD^q) = AC + CD^q + 2\,ACD + BD^q$

$$= \quad AD^q \qquad + BD^q \ \text{(II, 4.)}$$

§. 158.

Atque ita etiam ex Propositione IV. & Propositionis VII. Corollario seu enunciato §. 86, Propositio X. eodem modo, quo IX^na^ §. 114, efficitur:

Nempe $AD^q = (CD + AC)^q \qquad = CD^q + AC^q + 2\,\text{rectg. sub}\ CD\ \&\ AC$ (II, 4.)

$BD^q = \left(CD - \begin{cases} CB \\ AC \end{cases}\right)^q \qquad = CD^q + AC^q - 2\,\text{rectg sub}\ CD\ \&\ AC$ (§. 86.)

Itaque $AD^q + BD^q = (CD + AC)^q + (CD - AC)^q = 2\,CD^q + 2\,AC^q$.

§. 159.

Unde liquet, ex Prop. X. pariter consequi theoremata ex Prop. IX. illata §. 115. sq.: scilicet aggregatum quadratorum ex summa & differentia duarum inæqualium rectarum æquari duplo quadratorum ex ipsis; & si recta linea utcunque in inæqualia secetur (uti AD recta in puncto C), quadratum totius & quadratum differentiæ partium dupla simul esse summæ quadratorum partium. (ISAACUS MONACHUS Schol. ad II, 10. GHETALDUS p. 6. HERIGONUS p. 90. sq. GILBERT p. 279.

§. 160.

Porro eadem constructione, quæ §. 49. (*Fig.* 9.) adhibita fuit ad Propositionem VI. ex V^ta^ deducendam, CLAVIUS in demonstratione quarta (p. 189.), & TACQUET (p. 64. sq.) Propositionem X. ex IX^na^ docent inferre.

Rursus nimirum (*Fig.* 44.) facta $AS = BD$; proinde $CS = CD$, & $SB = AD$: ob rectam SD bifariam in C, & utcunque in B sectam, est

$$SB^q + BD^q = 2SC^q + 2CB^q \ \text{(II, 9.)};$$

ideoque $AD^q + BD^q = 2CD^q + \begin{cases} 2CB^q \\ 2AC^q \end{cases}$

§. 161.

Ejusdem constructionis ope VIVIANI (*De Locis solidis.* Lib. II. Prop.

70.

70. p. 47.) ex Propositione §. 147. allata hanc infert: Si recta AB bifariam secta sit in C, eique addita in directum quædam BD; quadratum ex AD, data & addita, cum quadrato additæ BD, æquale est quadrato ex CD, dimidia datæ & addita, cum tribus quadratis ex AC, eodem datæ dimidio, & cum rectangulo ADB sub data cum addita in additam.

Scilicet $SB^q + BD^q = SC^q + 3\,CB^q +$ rectg. sub SB & BD (§. 147.);
proinde $AD^q + BD^q = CD^q + 3\,AC^q +$ rectg. sub AD & DB (§. 160.)

Quod theorema ex Propositionibus VI. X. sic consequitur:

$$CD^q = \left\{\begin{matrix} CB^q \\ AC^q \end{matrix}\right\} + \text{rectg.}ADB \text{ (II, 6.)};$$

igitur $\left.\begin{matrix} 2\,CD^q + 2\,AC^q \\ AD^q + BD^q \end{matrix}\right\} = CD^q + 3\,AC^q + \text{rectg.}ADB.$
h.e. (II, 10.)

§. 162.

Similiter etiam, ac §. 148, si rectæ AB bifariam in C divisæ adjicitur quæcunque BD: quadratum compositæ AD ex data & adjecta æquatur rectangulo ADB sub adjecta BD & sub composita AD ex data & adjecta, una cum duplo rectangulo DAC sub eadem AD & sub dimidia AC datæ, seu sub semidifferentia ipsarum AD & BD; ac rectangulum ADB sub adjecta BD & sub composita AD ex data & adjecta æquatur quadrato adjectæ BD, una cum duplo rectangulo DBC sub eadem adjecta BD & sub dimidia CB datæ, seu sub semidifferentia ipsarum AD & BD.

Quippe $AD^q = ADB + BAD$ (II, 2.) $= ADB + 2\,DAC$ (§. 3.)
& rectg. $ADB = BD^q + ABD$ (II, 3.) $= BD^q + 2\,CBD$ (§. 3.)

§. 163.

Si rectæ AB (*Fig.* 10.) utcunque in puncto C divisæ in directum quæpiam BD adjicitur: summa quadratorum rectarum AD, BD (compositæ scilicet AD ex data & adjecta, atque adjectæ BD), imminuta duplo rectangulo sub BD & DC, æqualis est summæ quadratorum segmentorum AC & CB, una cum duplo rectangulo sub AC & CD.

Nam

$$\begin{array}{llll}
\text{Nam} & AD^q + BD^q = & AB^q \qquad\qquad + 2ADB & \text{(II, 7.)} \\
& = & AC^q + CB^q + 2ACB + 2ADB & \text{(II, 4.)} \\
\text{Sed} & \text{rectg.}ACB + ADB = & \text{rectg.}ACB + \text{rectg. sub } AC \,\&\, DB + \text{rectg. sub } CD \,\&\, BD & \multirow{2}{*}{\Big\} \text{(II, 1.)}} \\
& = & \text{rectg.}ACD \qquad\qquad + \text{rectg.}BDC & \\
\text{Itaque} & AD^q + BD^q = & AC^q + CB^q + 2ACD \qquad + 2BDC & \\
\& & AD^q + BD^q - 2BDC = & AC^q + CB^q + 2ACD. &
\end{array}$$

§. 164.

Bifariam igitur in C secta AB; ob $AC = CB$, fit

$$AD^q + BD^q = 2AC + 2\text{rectg. sub} \left\{\begin{matrix} AC \\ CB \end{matrix}\right\} \& \; CD + 2\text{rectg. sub } BD \,\&\, CD \quad \text{(§. 163.)}$$
$$= 2AC^q + 2CD^q \quad \text{(II, 2.)}$$

§. 165.

Facta autem $BD = CB$, proinde $CD = 2CB$; emergit

$$AD^q + BD^q = AC^q + CB^q + 4\text{rectg. sub } AC \,\&\, CB + 4CB^q \quad \text{(§. 163. 3.)}$$
$$\& \; AD^q = AC^q + 4\text{rectg. } ABC \quad \text{(II, 3.)}$$

conformiter Propositioni VIII.

§. 166.

Recta AB (*Fig.* 37.) bifariam in C secta, & adjecta ei quacunque BD: ipsa AB differentia est rectarum AD, BD; CD autem earum semisumma. (§. 54. sq.)

Eadem igitur cum differentia AB, sed summa, ideoque etiam semisumma CD majori; ambæ AD, BD crescunt eodem, quo CD crescit, incremento: quod etiam ex §. 30. consequitur.

Et tunc, dum $CR > CD$, pariter sunt $AR^q + BR^q > AD^q + BD^q$ (II, 10.), atque rectg. $ARB > ADB$ (II, 6.): quæ ceterum, cum tam $AR > AD$, quam $BR > BD$, jam quoque per I, 36. possunt ostendi.

Facta $CQ = CR$; unde $CR^q = CD^q + \text{rectg.}QDR$ (II, 5.): nominatim sunt

$$\begin{array}{llll}
\text{rectg.}ARB + CB^q = CR^q & \text{(II, 6.)} & = \left\{\begin{matrix} CD^q \\ ADB + CB^q \end{matrix}\right\} + QDR & \text{(dem. \& II, 6.)} \\
AR^q + BR^q = 2CR^q + 2CB^q & \text{(II, 10.)} & = \left\{\begin{matrix} 2CD^q + 2CB^q \\ AD^q + BD^q \end{matrix}\right\} + 2QDR & \text{(dem. \& II, 10.)} \\
\text{ideoque rectg.}ARB & & = \text{rectg.}ADB \quad + QDR & \\
AR^q + BR^q & & = AD^q + BD^q \quad + 2QDR &
\end{array}$$

ubi

ubi

$$QD = \left\{ \begin{matrix} CQ \\ CR \end{matrix} \right\} + CD = \frac{AR + BR}{2} + \frac{AD + BD}{2},\ DR = CR - CD = \frac{AR + BR}{2} - \frac{AD + BD}{2}$$ (§. 54. sq.)

Dum igitur æque differunt AR & BR, AD & BD: rectangulum sub prioribus, quorum summa est major, excedit rectangulum sub posterioribus rectangulo sub summa & sub differentia semisummarum laterum AR & BR, AD & BD; duplo autem hoc rectangulo summa quadratorum ab prioribus summam quadratorum ab posterioribus excedit.

§. 167.

Hinc paralellogramma inter rectangula, quorum latera contigua æque invicem differunt, ejus, cujus perimeter major est, area & diagonales sunt majores: pariterque triangula inter rectangula, quorum latera circa angulum rectum æque invicem differunt, illius area & hypotenusa majores sunt, cujus summa cathetorum est major.

§. 168.

Recta AB (*Fig.* 37. 38. 39.) bifariam secta in puncto C; & per hoc ducta, sub angulo quocunque, $CE = AC = CB$; tum ultra punctum B versus X, Z continuatis AB, EB rectis: quæ his BX, BZ terminantur, rectæ CE parallelas quascunque DG, RP esse segmentis adjacentibus BD, BR rectæ BX æquales, proinde $AD - DG = AR - RP = AB$; simili ratione, qua in demonstratione Propositionis X, per I, 6. generatim infertur: quia anguli $CEB = CBE$ (I, 5.), $\left. \begin{matrix} DGB \\ RPB \end{matrix} \right\} = CEB$ (I, 29.), & $ZBX = CBE$ (I, 15.); ideoque $\left. \begin{matrix} DGB \\ RPB \end{matrix} \right\} = ZBX$.

Contra, quæ hinc rectæ BX, inde puncto quocunque O, U extra rectam BZ, ad easdem cum ipsa partes rectæ BX sito, terminantur rectæ DO, DU, ipsi CE parallelæ, utpote minores vel majores quam DG, segmento adjacenti BD rectæ BX æquales non sunt; nec proinde est $AD - DO$, vel $AD - DU$, rectæ AB æqualis.

Porro etiam ultra A, E puncta versus x, z productis BA, BE rectis: quæ ab punctis d ipsius Ax eidem CE parallelæ aguntur dg ad occursum usque rectæ Bz, ob angulos $Bgd = BEC$ (I, 29.), ideoque $= gBd$ (I, 5.), sunt segmentis adjacentibus Bd rectæ Bx æquales (I, 5.); proinde $gd - Ad = Bd - Ad = AB$: idque pariter exclusive.

§. 169.

Per punctum B ducta rectæ CE parallela Bb ad partes rectæ AX, ad quas est BZ: ob angulos $ZBb = BEC$ (I, 29.), $ZBX = CBE$ (I, 15.); bifariam angulum bBX secat recta EBZ.

Vicissim si recta BZ bifariam secat angulum bBX, quem recta Bb utcunque per B ducta cum continuata AB comprehendit: quælibet cruri ejus Bb parallela ab altero crure BX abscindit segmentum ipsius parallelæ segmento rectis BX, BZ interjacenti æquale; & quæ per punctum bisectionis C rectæ AB parallela cruri Bb agitur CE ad occursum usque continuatæ ZB in E, pariter fit $= CB = CA$. Ob angulos enim DGB, RPB, BEC singulos $= bBZ$ (I, 29.), ideoque $= XBZ$ (constr.) $= CBE$ (I, 15.); sunt (I, 6.) $DG = BD$, $RP = BR$, $CE = CB$.

Unde cetera quoque §. 168. proposita tum subsistunt.

§. 170.

Eandem ZBz, sive juxta §. 168, sive juxta §. 169. ducatur, bifariam dividere angulum ABH, quem producta bB cum data AB comprehendit, vel ex I, 29. 5, vel ex I, 15. consequitur.

Quare, dum æquales utrinque sunt anguli ABH, hæc ZBz in directum jacet cum recta BL supra §§. 126 — 129. 132. sqq. determinata.

§. 171.

Per rectæ igitur magnitudine ac positione datæ AB alterum extremum B ducta quacunque recta Bb; quæ angulum bBX, hac Bb & continuata AB comprehensum, bifariam secat recta utrinque continuata ZBz, quatenus hinc ultra B versus Z, inde ultra L, ubi rectæ AL ipsi Bb per A parallelæ occurrit, versus z extenditur (de ejus parte BL vid. §. 132. sq.), Locus est (§. 168. sq.), ad quem sunt

1°. vertices G, P, g, communi A oppositi, parallelogrammorum $ADGN$, $ARPF$, $Adgn$; quæ, ducta per alterum rectæ AB extremum A rectæ Bb parallela Vv, pariterque ultra A continuata BA, in angulis VAX, vAx, angulo bBX æqualibus (I, 29. 15.), fieri possunt, sic ut contigua ipsorum latera invicem differant data AB:

2°. ver-

2°. vertices tertii G, P, g triangulorum ADG, ARP, Adg, circa communem verticem A constitutorum, quorum anguli ad secundos vertices D, P, d, rectæ AB in directum jacentes, sunt dato ABb æquales (I, 29.), & quorum crura circa hos angulos data AB invicem differunt.

§. 172.

Ambos Locos (§. 132. sq 171.) una Propositione sic licet complecti: Si a puncto ad rectam positione datam ducatur recta in dato angulo; dataque sit summa vel differentia rectæ hujus & segmenti dato puncto adjacentis, quod ea ex recta positione data abscindit; tangit punctum rectam positione datam.

§. 173.

Bifariam in C secta AB; & per C ducta rectæ Bb parallela CE ad occursum usque rectæ ZBz, angulum hBX bifariam secantis, in E: fit $CE = CB = AC$ (§. 169.); ideoque angulus AEB rectus (§. 126. 135.); & hinc $AP > AG$ (§. 126.), dum $CR > CD$, proinde (§. 54. 166.) $AR + AP > AD + DG$.

Parallelogrammum vero $ARPT$ est $> ADGN$, & triangulum $ARP > ADG$, per Lib. I. Ax. 9.

Generatim igitur parallelogramma inter æquiangula, quorum latera contigua æque invicem differunt, ejus, cujus perimeter major est, area & diagonales homologæ, seu quæ vertices angulorum respective æqualium jungunt, majores sunt: pariterque triangula inter, quorum unus angulus æqualis, & quorum crura (latera circa hos angulos æquales) æque invicem differunt, illius area & basis majores sunt, cujus summa crurum est major.

§. 125.

Basin seu tertium latus AG cujuslibet trianguli non æquicruri ADG majorem esse differentia AB crurum ejus AD, DG; proinde & diagonalem utramque parallelogrammi cujusvis non æquilateri esse differentia laterum ejus contiguorum majorem; reducitur ad Propositionum I, 17. 19. Corollarium: quod trianguli obtusanguli latus oppositum angulo obtuso sit utroque ejus reliquo latere majus; cum, ab majori

majori crure AD abſciſſa $DB = DG$, trianguli æquicruri BGD angulus DBG ad baſin ſit acutus (I, 5. 17.); ei igitur deinceps poſitus ABG obtuſus (I, 13).

§. 175.

Ut *ſub dato quocunque angulo W deſcribatur triangulum, vel parallelogrammum, cujus latera circa hunc angulum differant recta data* AB, *& cujus baſis, vel diagonalis oppoſita angulo dato, ſit rectæ datæ* K, *majori quam* AB (§. 174) *æqualis:* bifariam in C ſecta AB, tum ad BC in C conſtituto angulo $BCY = W$, & ab ejus crure CY abſciſſa $CE = CB = AC$, jungentur AE, BE rectæ; & hæc utrinque indefinite continuabitur. Ob angulum AEB rectum (§. 173.); erit $AE < AB$ (I, 17. 19.), tantoque magis $< K$: & trianguli vel parallelogrammi deſcribendi poſitis uno vertice A, atque uno latere in directum jacente cum AB, tertius vertex debet eſſe ad rectam $ZBEz$, ut differentia laterum circa angulum $W = BCE$ fiat datæ AB æqualis (§. 168. ſq. 171.). Tum ab continuata AE abſciſſa $AS = K$, idem vertex eſſe debet ad peripheriam circuli, centro A, intervallo $AS = K$ deſcripti, ut baſis vel diagonalis oppoſita angulo dato W ſit datæ K æqualis.

Quare factis ceteris jam indicatis, deſcribetur circulus centro A, intervallo $AS = K$: intra quem erit tam punctum B, ob $AB < K$ (ſupp.); quam punctum L, ubi rectæ CE per A ducta parallela AL continuatæ BE occurrit, ob $AL = AB$ (§. 127.), ideoque pariter $< K$; & quem proinde recta BL utrinque producta in punctis G, g ad partes BZ, Lz ſecabit. Tum per puncta G, g ductis rectæ CE parallelis GD, gd ad occurſum usque rectæ AB, pariter utrinque productæ, in D, d: finiantur triangula ADG, Adg; vel parallelogramma $ADGN$, $Adgn$.

Sic erunt $\left.\begin{matrix} ADG \\ Adg \end{matrix}\right\} = BCE$ (I, 29.) $= W$ (conſtr.); $\left.\begin{matrix} AD-DG \\ dg-Ad \end{matrix}\right\} = AB$ (§. 168.); $\left.\begin{matrix} AG \\ Ag \end{matrix}\right\} = AS = K$ (conſtr.)

Ceterum ob $EG = Eg$ (I, 47. Cor.); ideoque, per punctum E ducta rectæ AB parallela Ff ad occurſum usque rectarum GD, gd in F, f, $EF = Ef$ (I, 29. 26.); itaque $CD = Cd$ (I, 34.); & hinc, æqualibus AC, BC additis ac ſublatis, $AD = Bd = dg$, $BD = DG = Ad$: triangula ADG, Adg, ac parallelogramma $ADGN$ $Adgn$ ſitu ſolo diverſa ſunt.

§. 176.

Ad Problema præcedens per obſervationem §. 140. reducitur conſtructio *parallelogrammi obliquanguli, cujus angulus, differentia duorum laterum contiguorum, & diagonalis ex angulo dato ducta, eaque major differentia data laterum, dantur.*

Manentibus ceteris §. 175, fiet tunc angulus ACY = angulo dato (I, 29.

§. 177.

Juxta §. 169. ſq. 171. Problema §. 175. etiam ſolvetur: ad datam AB ejusque extremum B facto angulo $ABh = W$; tum ducta ZBz recta bifariam ſecante angulum hBX vel ABH, deinceps poſitum angulo ABh; & per puncta G, g, ubi circulus centro A, intervallo = datæ K deſcriptus rectam ZBz ſecat, actis rectæ Bh parallelis ad occurſum usque continuatæ AB.

§. 178.

Ita fit angulus $ZBX = \frac{2\,\text{Rect.} - W}{2} = \text{Rect.} - \frac{1}{2}W$; ſuntque anguli $\left.\begin{matrix} BGD \\ Bgd \end{matrix}\right\} = ZBh$ (I, 29.) $= ZBX$ (conſtr.)

Quare juberi etiam poteſt: ut ad continuatam AB in B fiat angulus ZBX = ſemiſſi ſupplementi anguli dati W, vel = complemento ſemiſſis anguli W; tum in punctis G, g, ubi circulus centro A, intervallo = datæ K deſcriptus rectam ZBz indefinite productam ſecat, ad rectas BG, Bg conſtituantur anguli $\left.\begin{matrix} BGD \\ Bgd \end{matrix}\right\} = ZBX$.

Hoc modo, data baſi, differentia laterum, & angulo verticis, triangulum deſcribere, omiſſa determinatione & duplicis ſolutionis mentione, docent Ghetaldus (p. 336. ſq.), Thom. Simpson conſtructione altera, quam tradit (p. 289.).

§. 179.

Triangulo rectangulo ADG (*Fig.* 37.) juxta §. 175. 177. ſq. deſcripto, cujus differentia cathetorum datæ AB, hypotenuſa datæ K majori quam AB æqualis eſt; exhibentur duæ rectæ AD & DG ſeu DB, quarum differentia, & ſumma quadratorum ab ipſis dantur.

Pro-

Problema hoc: *datis (Fig. 40.) differentia AB laterum duorum quadratorum, & latere HI quadrati æqualis summæ ipsorum quadratorum, invenire eorum latera; seu propositæ rectæ AB aliam in directum sic adjicere, ut quadratum adjectæ & quadratum compositæ ex data AB & adjecta simul æqualia sint quadrato rectæ datæ HI;* immediate etiam sic determinatur ac solvitur.

Factum sit, quod requiritur, in directum adjiciendo datæ AB rectam BD; h. e. sit $AD^q + BD^q = HI^q$.

Ob $AD > AB$; igitur AD^q, ac tanto magis $AD^q + BD^q > AB^q$; debet esse $HI^q > AB^q$, $HI > AB$.

Cum, bifariam in C secta AB, sit $AD^q + BD^q = 2(CD^q + CB^q)$ (II, 10.): oportet, sit $2(CD^q + CB^q) = HI^q = 4KI^q$ (§. 13.), pariter in K bifariam secta HI; & $CD^q + CB^q = 2KI^q$.

Facto itaque triangulo rectangulo, cujus hypotenusæ quadratum $= 2KI^q$, & cujus unum latus circa angulum rectum $=$ datæ CB: ejus alterum latus circa angulum rectum exhibebit (I, 47.) CD, semisummam desideratarum AD, BD (§. 54. sq.); & assignabit punctum D.

Hinc sequens fluit constructio: Bifariam in punctis C, K secentur rectæ datæ AB, HI. Cum sit $HI > AB$ (determ.); est $KI > CB$. Ab perpendiculo $CE = CB$, quod rectæ AB in puncto C ducatur, producto abscindatur $EF = KI$; & per punctum F agatur rectæ AB parallela FG ad occursum usque rectæ EB continuatæ in G. Ob angulum $FGE = CBE$ (I, 29.), & angulum $CBE = CEB$ (I, 5.), erit angulus $FGE = FEG$; $FG = EF$ (I, 6.); $EG^q = 2EF^q$ (I, 47.) $= 2KI^q$ (constr.) Tum, cum sit $CE = CB$, & angulus ECB rectus (constr.); centro E, intervallo EG describatur circulus: qui, ob $EG > EB$, secabit rectam CB productam (§. 126.) in D puncto; quod satisfaciet proposito.

Ita enim $AD^q + BD^q = 2(CD^q + CB^q)$ (II, 10.) $= 2(CD^q + CE^q)$ (constr.) $= 2ED^q$ (I, 47.) $= 2EG^q$ (constr.) $= 4EF^q$ (constr. & dem.) $= 4KI^q$ (constr.) $= HI^q$ (constr. & §. 13.)

Eademque pariter valent de altero puncto d, in quo rectam CA productam secat circulus, centro E, intervallo $EG > EB$, ideoque etiam (I, 4) $> EA$ descriptus: &, ob $Cd = CD$ (I, 47. Cor.), rursus sunt $Ad = BD$, $Bd = AD$.

§. 180.

Eidem Problemati ſolvendo (ſimiliter ac §. 138.) adhiberi etiam poſſunt propoſita §. 114. ſqq. 158. ſq.: juxta quæ, ſi (*Fig.* 41.) ad punctum D usque facta eſſe ponitur imperata rectæ datæ AB continuatio, & $DO = DB$ abſciſſa ab producta AD, ut ſit $AO = AD + BD$; eſt $AO^q + AB^q = 2(AD^q + BD^q)$: proinde, ut ſit $AD^q + BD^q = HI^q$, debet eſſe $AO^q + AB^q = 2HI^q$. Unde, cum dentur AB, HI; inventio rectæ AO, & tum puncti D, rurſus reducitur ad conſectaria Propoſitionis I, 47.

Nempe ab producta BA abſciſſa $BL = HI$; atque in puncto L ducta rectæ BL normali $LM = BL = HI$; tum juncta BM recta: eſt $BM^q = 2HI^q$ (I, 47.). Tum, quod ob $BM > BL$, tantoque magis $> BA$ fieri poteſt, conſtructo triangulo rectangulo, cujus hypotenuſa $= BM$, & unum latus circa angulum rectum ſit AB; ideoque rectæ AB in A conſtituto perpendiculo, quod circulus centro B, intervallo BM deſcriptus in N ſecet: ob $AN^q + AB^q = BN^q$ (I, 47.) $= BM^q = 2HI^q$ (conſtr.), erit $AO =$ alteri catheto AN trianguli BAN: atque ob $AN^q + AB^q = LM^q + BL^q$ (I, 47. & conſtr.), & $AB < BL$; erit $AN > LM$ ſeu BL, tantoque magis $> AB$. Ab qua igitur producta ſi abſcindetur $AO = AN$; & reſidua BO bifariam in D ſecabitur (§. 51.): factum erit, quod jubebatur.

Sic enim $2\left(AD^q + \begin{Bmatrix} DO^q \\ DB^q \end{Bmatrix}\right) = (AD + DO)^q + (AD - DB)^q$ (§. 114. 158.) $= \begin{Bmatrix} AO^q \\ AN^q \end{Bmatrix} + AB^q$

$= BN^q$ (I, 47) $= BM^q = 2HI^q$ (conſtr.)

ideoque $AD^q + BD^q = HI^q$.

§. 181.

Altero hoc modo, data baſi trianguli angulum rectum ſubtendente, & differentia crurum, invenire triangulum (ſimili ac §. 146. præmiſſa analyſi & adhibita conſtructione) docet GHETALDUS (p. 92. ſq.). Pariterque cel. VAN SWINDEN (p. 487. ſq.) parallelogrammum rectangulum, cujus dantur diagonalis & differentia duorum laterum contiguorum, ſimiliter ac §. 146. illud, cujus diagonalis & ſumma duorum laterum contiguorum dantur, deſcribi indicat.

§. 182.

§. 182.

Præter Præpositionem ex utraque IX. X. deductam §. 115. 159, qua Problematum §. 137. 179. solutiones posteriores §. 138. 180. nituntur; applicando Propositionibus IX X, quæ observantur §. 30. 55, ex utaque etiam consequitur: duarum inæqualium rectarum quadrata simul dupla esse quadratorum ex ipsarum semisumma ac semidifferentia; eoque redeunt eorundem problematum solutiones priores §. 137. 179, quod in ipsis etiam indicatur.

§. 183.

Quodsi porro observata §. 52. sq. ad Propositiones IX. X. applicantur, ex iis sequitur: Si tres rectæ sint continue arithmetice proportionales; quadrata extremarum simul æquari duplo aggregato ex quadratis mediæ, ac differentiæ utriusvis extremarum & mediæ composito.

Quæ propositio terminis tantum ab præcedente §. 180. differt, per observata §. 54. 56.

§. 184.

Propositiones IX. X. simili etiam modo, quo Propositiones V. VI. §. 59, uno enunciato possunt comprehendi: Si (*Fig.* 42. 44.) recta (*AB*) bifariam (in puncto *C*) secatur; atque in ea vel ipsa, vel producta, punctum (*D*) pro lubitu sumitur: quadrata rectarum (*AD*, *BD*) puncto hoc (*D*) atque extremis (*A*, *B*) rectæ datæ (*AB*) terminatarum dupla simul sunt aggregati quadratorum duarum rectarum (*CB* seu *CA*, & *CD*), quæ ab puncto bisectionis (*C*) rectæ propositæ (*AB*) ad alterum ejus extremum usque (*B* vel *A*), & ad punctum arbitrarium (*D*) protenduntur.

§. 185.

Recta *AB* (*Fig.* 43.) in inæqualia utcunque in puncto *D* divisa; ab majori segmento *AD* abscindatur $DL = $ minori *DB*, & residua *AL* bifariam in *C* secetur.

Erit $AD^q + DL^q = 2(AC^q + CD^q)$ per II, 10; ideoque, ob $DL = DB$, etiam $AD + DB^q = 2(AC^q + CD^q)$; pariter ac in *Fig.* 42. juxta II, 9. quamvis nunc (*Fig.* 43.) puncto *C* bifariam haud secetur recta *AB*.

AC

AC (*Fig.* 43.) $= \frac{1}{2}AL = \frac{AD-DL}{2} = \frac{AD-DB}{2}$ (constr.) sistit semidifferentiam segmentorum inæqualium AD, DB; quam in *Fig.* 42. exhibet CD (§. 30.): & CD (*Fig.* 43.) $= CL+DL = \frac{1}{2}AL+\frac{1}{2}BL = \frac{1}{2}AB$ sistit segmentorum AD, DB semisummam; quæ in *Fig.* 42. est AC. Quare assertum $AD^q+DB^q = 2(AC^q+CD^q)$ *Fig.* 43. conforme etiam est communi Propositionum IX. X. enunciato §. 182.

§. 186.

Rectæ AB (*Fig.* 45.) in directum adjiciatur quæcunque BD; & denuo rectæ AD, recta $DL = BD$; ac bifariam in C secetur tota AL. Erit $AD^q+DL^q = 2(AC^q+CD^q)$ per II, 9; ideoque, ob $DL=DB$, etiam $AD^q+BD^q = 2(AC^q+CD^q)$, pariter ac in *Fig.* 44. juxta II, 10. quamvis rursus AB (*Fig.* 45.) bifariam puncto C non secetur.

Permutatis etiam AC, CD, utrumque $AD^q+BD^q = 2(AC^q+CD^q)$ *Fig.* 44. & 45. continetur proposito §. 180: quippe AC (*Fig.* 45.) $= \frac{1}{2}AL = \frac{AD+DL}{2} = \frac{AD+DB}{2}$ (constr.) sistit semisummam rectarum BD, AD, adjectæ scilicet & compositæ ex data AB & adjecta; quam in *Fig.* 44. exhibet CD (§. 55.): & CD (*Fig.* 45.) $= \frac{AD-DL}{2}$ (§. 30.) $= \frac{AD-BD}{2}$ sistit rectarum AD, BD semidifferentiam; quæ in *Fig.* 44. est AC.

§. 187.

Vicissim vero bifariam rectam AB (*Fig.* 42. 44.) secat punctum C sic in ea situm, ut duplum aggregatum quadratorum ex rectis CB vel CA, & CD factorum, quorum una CB vel CA ipsum inter C punctum atque alterum rectæ AB extremum, altera CD idem punctum C inter atque punctum D alibi in recta AB ipsa, vel producta sumtum interjacent, æquale sit quadratis rectarum AD, BD, quæ hinc puncto D, inde extremis A, B rectæ AB terminantur: dum, uti in ipsis Propositionibus IX. X, recta CD est rectis CB, CA minor, quando punctum D jacet in ipsa AB; sed CD major quam CB, CA, si punctum D est in producta AB.

Sit enim 1°. $AD^q + BD^q = 2(CB^q + CD^q)$, puncto D jacente ad eas puncti C partes, ad quas eſt punctum B: quo caſu per ſe eſt $CD < CB$, dum punctum D eſt in ipſa AB (*Fig.* 42.); ſed $CD > CB$, quando punctum D ſumitur in producta AB (*Fig.* 44.).

Ob $CB^q + CD^q = DB^q + 2\,\text{rectg. ſub}\ CB\ \&\ CD$ (II, 7.):

erit

$$AD^q + BD^q = 2(CB^q + CD^q)\ (\text{hyp.}) = CB^q + CD^q + DB^q + 2\,\text{rectg. ſub}\ CB \& CD$$

$$AD^q = CB^q + CD^q + 2\,\text{rectg. ſub}\ CB \& CD = (CB + CD^q)\ (\text{II}, 4)$$

Unde $AD = CB + CD$; & $AC = CB$.

2°. Sit $AD^q + BD^q = 2(CA^q + CD^q)$, punctis D & A jacentibus ad partes oppoſitas puncti C: ſitque $CD < CA$; quando punctum D in ipſa AB jacet (*Fig.* 42.); ſed $CD > CA$, ſi D eſt in producta AB (*Fig.* 44.)

Ob $AD^q = CA^q + CD^q + 2\,\text{rectg. ſub}\ CA\ \&\ CD$ (II, 4.):

erit $CA^q + CD^q + 2\,\text{rectg ſub}\ CA \& CD + BD^q = AD^q + BD^q = 2(CA^q + CD^q)$ (hyp.)

$$2\,\text{rectg ſub}\ CA \& CD + BD^q = CA^q + CD^q$$

$$BD^q = CA^q + CD^q - 2\,\text{rectg. ſub}\ CA \& CD$$

Hinc *Fig.* 42. ubi $CD < CA$ (hyp.); $BD^q = (CA - CD)^q$ (§. 86.)

$$BD = CA - CD$$

$CD + BD$ h. e. $CB = CA$.

Et *Fig.* 44. ubi $CD > CA$ (hyp.); $BD^q = (CD - CA)^q$ (§. 86.)

$$BD = CD - CA$$

$CA + BD = CD$; & $CA = CB$.

§. 188.

Poſteriorum caſuum demonſtratio immediate etiam ope Propoſitionis VII. perfici poteſt. Quippe in *Fig.* 42. ab $CA > CD$ (hyp.) abſciſſa $CI = CD$; & in *Fig.* 44. continuata $CA < CD$ (hyp.), donec $CS = CD$:

ob $2\,\text{rectg. ſub}\ CA\ \&\ CD + BD^q = CA^q + CD^q$ (Demonſtr. §. 187. n°. 2.), eſt

in *Fig.* 42. $2ACI + BD^q = CA^q + CI^q = AI^q + 2ACI$

Unde $BD^q = AI^q$

$BD = AI$

& hinc $BD + CD = AI + CI$

h. e. $CB = CA$

& in *Fig.* 44. $2ACS + BD^q = CA^q + CS^q = AS^q + 2ACS$ (II, 7.)

$BD^q = AS^q$

$BD = AS$

$CD - BD = CS - AS$

$CB = CA$.

§. 189.

Iisdem factis casus hi alterne etiam possunt ad directas Propositiones, quarum conversas ipsi exhibent, reduci.
Nempe

$$\left.\begin{array}{l}\text{ob } CI = CD \text{ (Fig. 42) est } AD^q + AI^q = 2(CA^q + CD^q) \text{ (II, 10)}\\ \text{\& ob } CS = CD \text{ (Fig. 44) } \quad AD^q + AS^q = 2(CA^q + CD^q) \text{ (II, 9)}\end{array}\right\} = AD^q + BD^q \text{ (hyp.); ideoq. } \left.\begin{array}{l}AI^q\\ AS^q\end{array}\right\} = BD^q$$

Unde reliqua consequuntur, uti §. 188.

§. 190.

In casibus analogis conversarum §. 60. per conditiones ipsas

$ADB + CD^q = CA^q$ (*Fig.* 6. 42.), $ADB + CA^q = CD^q$ (*Fig.* 9. 44.)

est $CD^q < CA^q$, $CD < CA$, quando punctum D in ipsa AB sumitur (*Fig.* 6. 42.); & $CD^q > CA^q$, $CD > CA$, si punctum D sumitur in producta AB (*Fig.* 9. 44.)

Ceterum præmissæ demonstrationum ex Propositionibus II, 6. 5. ibi deductæ,

$DAI + CI^q = CA^q$ (*Fig.* 6. 42.), $SAD + CA^q = CS^q$ (*Fig.* 9. 44.),

ambæ etiam ex Propositionis IV. enunciato §. 20. consequuntur.

§. 191.

In alteris earundem conversarum §. 60. casibus, qui prioribus §. 187. respondent, pariter atque in his (Demonstr. §. 187. n°. 1.), & præterea similiter ac §. 190. per ipsas conditiones liquet: puncto D in ipsa AB sumto (*Fig.* 6. 42.) esse $CD < CB$; & puncto D jacente in producta AB (*Fig.* 9. 44.) esse $CD > CB$. Sed non æque constat de rectarum CD, CA ratione mutua, quam constructionum §. 60. 188. ad hos casus applicatio supponit. Immediate vero eorum demonstrationes pariter per Propositionis IV. enunciatum §. 20. nectentur. Nempe

$$\begin{array}{llll}
\text{si (Fig. 42) } ADB + CD^q = CB^q & & \text{; \& (Fig. 44) } ADB + CB^q = CD^q & \\
\text{cum (§. 20.) fit } CB^q & = CD^q + (CB + CD)DB & CD^q & = CB^q + (CD + CB)DB \\
\text{fit } \quad ADB + CD^q & = CD^q + (CB + CD)DB & ADB + CB & = CB^q + (CD + CB)DB \\
ADB & = (CB + CD)DB & ADB & = (CD + CB)DB \\
AD & = CB + CD & AD & = CD + CB \\
AC & = CB & AC & = CB
\end{array}$$

§. 192.

Quamvis auter
terminationem §. 1
rali tamen proposit
tiæ quadratorum ex
gendum est: "dum
„ tionibus Propositi
„ CB, CA, quanc
„ quam CB, CA,

Ex Prop. VI. e
sequitur

$ADL+CL$

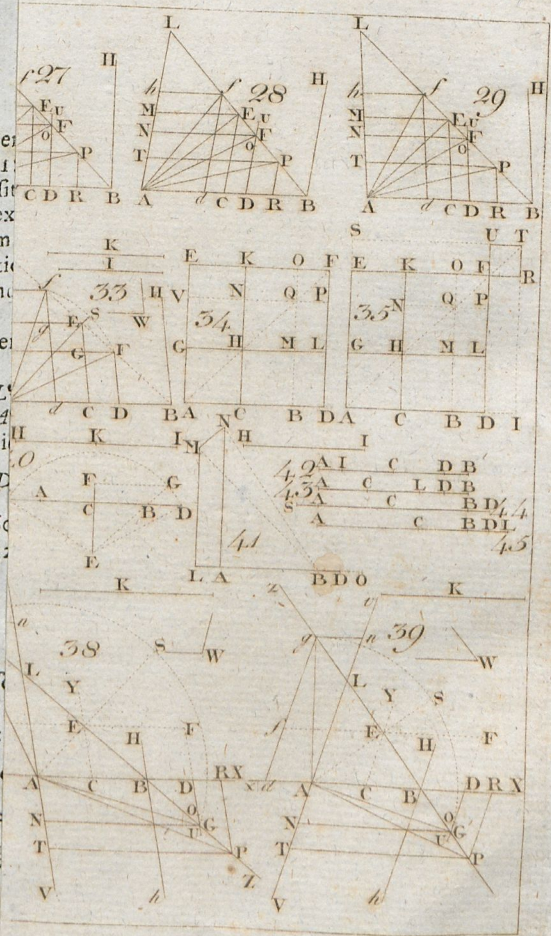
$ADB+CA$

& ex Prop. V. appli

$\left.\begin{matrix}ADL\\ADB\end{matrix}\right\}+CD$

Ibidem §. 6

& §. 8



I. Quæ §. 41. s
sten, II Th. I Abth.
thodi, quam vocant

II. Admissis

$\frac{C}{\frac{1}{2}r^2 \times \infty \text{Chord.} \frac{1}{\infty}\Pi} =$

$C = \frac{1}{2}r^2 \times \infty \text{Chord.} \frac{1}{\infty}$

III. Regulæ §.
extensæ fallunt.

IV. In parte se
tur, æquipollere syn

§. 192.

Quamvis autem particulares conditionum §. 60. expositiones determinationem §. 187. necessariam haud requirant (§. 190. sq.); generali tamen propositioni, utramque conversam indeterminata differentiæ quadratorum ex CD & CA vel CB mentione complectenti, adjungendum est: "dum, conformiter suppositis demonstratorum, & condi-„tionibus Propositionum directarum V. VI, CD recta minor est quam „CB, CA, quando punctum D in ipsa AB jacet; sed CD major „quam CB, CA, si punctum D est in producta AB."

Ex Prop. VI. enim ad constructionem §. 185. (*Fig.* 43.) applicata sequitur

$$\left.\begin{matrix}ADL+CL^q\\ADB+CA^q\end{matrix}\right\} = CD^q; \quad ADB = CD^q - CA^q:$$

& ex Prop. V. applicata ad constructionem §. 186. (*Fig.* 44.) prodit

$$\left.\begin{matrix}ADL\\ADB\end{matrix}\right\}+CD^q = \left\{\begin{matrix}CL^q\\CA^q\end{matrix}\right.; \quad ADB = CA^q - CD^q.$$

Ibidem §. 60. lin. 2. loco 256. legatur 274.
& §. 82. lin. 6. — 179. ——— 181.

THESES.

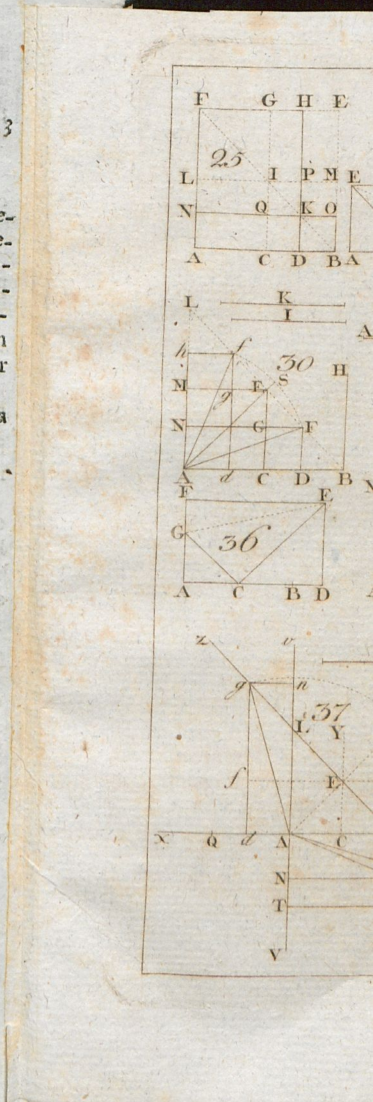
I. Quæ §. 41. sq. Lehrbegriff der gesamten Mathematik von Karsten, II Th. I Abth. p. 117. sqq. traduntur, genuinæ expositiones methodi, quam vocant, exhaustionis seu limitum non sunt.

II. Admissis expressionibus $\frac{\Pi}{\infty \text{Chord.} \frac{1}{\infty}\Pi} = 1$ (p. 118.), $\frac{C}{\frac{1}{2}r^2 \times \infty \text{Chord.} \frac{1}{\infty}\Pi} = 1$ (p. 120.); consequentiæ $\Pi = \infty \text{Chord.} \frac{1}{\infty}\Pi$, $C = \frac{1}{2}r^2 \times \infty \text{Chord.} \frac{1}{\infty}\Pi$, recusari non possunt.

III. Regulæ §. 157. p. 132. ad ea, quæ §. 21. 24. præcipiuntur, extensæ fallunt.

IV. In parte secunda §. 59. p. 134. sq. non ostenditur, sed sumitur, æquipollere symbola $a^{\frac{1}{n}}$ & $\sqrt[n]{a}$.

V. Inde



§. 192.

Quamvis autem particulares conditionum §. 60. expositiones determinationem §. 187. necessariam haud requirant (§. 190. sq.); generali tamen propositioni, utramque conversam indeterminata differentiæ quadratorum ex *CD* & *CA* vel *CB* mentione complectenti, adjungendum est: "dum, conformiter suppositis demonstratorum, & conditionibus Propositionum directarum V. VI, *CD* recta minor est quam *CB*, *CA*, quando punctum *D* in ipsa *AB* jacet; sed *CD* major quam *CB*, *CA*, si punctum *D* est in producta *AB*."

Ex Prop. VI. enim ad constructionem §. 185. (*Fig.* 43.) applicata sequitur

$$\left.\begin{matrix}ADL+CL^q\\ ADB+CA^q\end{matrix}\right\}=CD^q;\quad ADB=CD^q-CA^q:$$

& ex Prop. V. applicata ad constructionem §. 186. (*Fig.* 44.) prodit

$$\left.\begin{matrix}ADL\\ ADB\end{matrix}\right\}+CD^q=\left\{\begin{matrix}CL^q\\ CA^q\end{matrix}\right.;\quad ADB=CA^q-CD^q.$$

Ibidem §. 60. lin. 2. loco 256. legatur 274.
& §. 82. lin. 6. — 179. —— 181.

THESES.

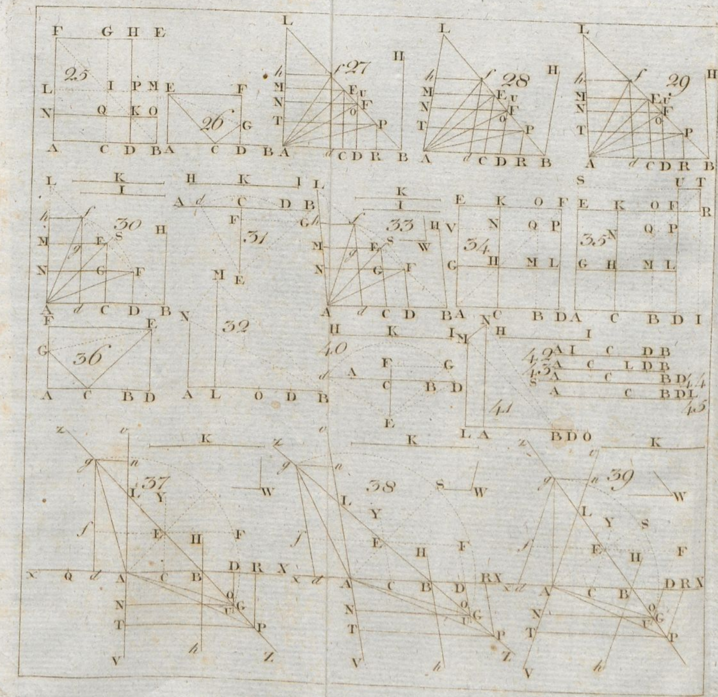
I. Quæ §. 41. sq. Lehrbegriff der gesamten Mathematik von Karsten, II Th. I Abth. p. 117. sqq. traduntur, genuinæ expositiones methodi, quam vocant, exhaustionis seu limitum non sunt.

II. Admissis expressionibus $\frac{\Pi}{\infty\,\text{Chord.}\,\frac{1}{\infty}\Pi}=1$ (p. 118.), $\frac{C}{\frac{1}{2}r^2\times\infty\,\text{Chord.}\,\frac{1}{\infty}\Pi}=1$ (p. 120.); consequentiæ $\Pi=\infty\,\text{Chord.}\,\frac{1}{\infty}\Pi$, $C=\frac{1}{2}r^2\times\infty\,\text{Chord.}\,\frac{1}{\infty}\Pi$, recusari non possunt.

III. Regulæ §. 157. p. 132. ad ea, quæ §. 21. 24. præcipiuntur, extensæ fallunt.

IV. In parte secunda §. 59. p. 134. sq. non ostenditur, sed sumitur, æquipollere symbola $a^{\frac{1}{n}}$ & $\sqrt[n]{a}$.

V. Inde



V. Inde vero non conſequitur, quod in tertia parte p. 135. infertur: eſſe $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)}$; ſed tantum eſſe $(a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)}$.

VI. In §. 60. p. 135. ſq. tantum efficitur eſſe $\sqrt[n]{(a^m)} = (a^{\frac{1}{n}})^m$, poſito $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

VII. Hypotheſis igitur manet, non ut conſequentia valet, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

VIII. Quæ §. 66. p. 141. ſq. præmiſſo demonſtrationis titulo proponuntur, poſtulati ſeu hypotheſis: a^{-m} idem denotare quod $\frac{1}{a^m}$, conformitatem ſolum cum ſignificatu ſigni (—) alias aſſumto explicant; neceſſitatem non ſtabiliunt.

IX. Et §. 67. p. 143. poſtulatur: regulam §. 55. 66. pro exponentibus inæqualibus demonſtratam vel ſumtam ad exponentes etiam æquales extendi.

X. Multiplicationis rationum tanquam compoſitionis ex partibus aliquotis conſideratio, eidemque adaptata illius denotatio, §. 123. 125. 127. ſqq p. 203. ſqq. æquivocæ, nec rei ipſi congruæ ſunt. Uti non ſcribitur $a^n = na$, $a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}a$, $a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}a$; nec pronunciatur, eſſe a^n n vicibus majorem quam a; $a^{\frac{1}{n}}$ eſſe $\frac{1}{n}$ ipſius a; $a^{\frac{m}{n}}$ eſſe $\frac{m}{n}$ ipſius a: ita etiam ſignis $A^n : B^n = n(A : B)$, $\sqrt[n]{A} : \sqrt[n]{B} = \frac{1}{n}(A : B)$, $\sqrt[n]{A^m} : \sqrt[n]{B^m}$ ſeu $A^{\frac{m}{n}} : B^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}(A : B)$; expreſſionibusque $A^n : B^n$ eſſe n vicibus majorem quam $A : B$; $\sqrt[n]{A} : \sqrt[n]{B}$ eſſe $\frac{1}{n}$ rationis $A : B$; $A^{\frac{m}{n}} : B^{\frac{m}{n}}$ eſſe $\frac{m}{n}$ rationis $A : B$, abſtinere, in Elementis certe tradendis, convenit.

XI. Tum nec opus eſt, de diſcrimine rationes inter earumque exponentes (§. 128) præcipere.

XII. Exemplum fallaciæ conceptus illius præbet §. 124. n°. 2. p. 204.

XIII. Nec ſatis liquet §. 136. p. 212. quare ex præmiſſis haud inferatur $B \times C : 1 = \frac{nr}{m}(b : 1)$.

XIV. Pariter Elementa commode carere poſſunt quæſtione illinc derivata de quantitate ac menſura rationum (§. 120. ſqq.), ambiguitatibus & tricis (§. 138. Zuſ. 2. §. 140.) obnoxia.

V. Inde vero non consequitur, quod in tertia parte p. 135. infertur: esse $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)}$; sed tantum esse $(a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{(a^m)}$.

VI. In §. 60. p. 135. sq. tantum efficitur esse $\sqrt[n]{(a^m)} = (a^{\frac{1}{n}})^m$, posito $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

VII. Hypothesis igitur manet, non ut consequentia valet, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

VIII. Quæ §. 66. p. 141. sq. præmisso demonstrationis titulo proponuntur, postulati seu hypothesis: a^{-m} idem denotare quod $\frac{1}{a^m}$, conformitatem solum cum significatu signi (—) alias assumto explicant; necessitatem non stabiliunt.

IX. Et §. 67. p. 143. postulatur: regulam §. 55. 66. pro exponentibus inæqualibus demonstratam vel sumtam ad exponentes etiam æquales extendi.

X. Multiplicationis rationum tanquam compositionis ex partibus aliquotis consideratio, eidemque adaptata illius denotatio, §. 123. 125. 127. sqq p. 203. sqq. æquivocæ, nec rei ipsi congruæ sunt. Uti non scribitur $a^n = na$, $a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}a$, $a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}a$; nec pronunciatur, esse a^n n vicibus majorem quam a; $a^{\frac{1}{n}}$ esse $\frac{1}{n}$ ipsius a; $a^{\frac{m}{n}}$ esse $\frac{m}{n}$ ipsius a: ita etiam signis $A^n : B^n = n(A:B)$, $\sqrt[n]{A} : \sqrt[n]{B} = \frac{1}{n}(A:B)$, $\sqrt[n]{A^m} : \sqrt[n]{B^m}$ seu $A^{\frac{m}{n}} : B^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}(A:B)$; expressionibusque $A^n : B^n$ esse n vicibus majorem quam $A:B$; $\sqrt[n]{A} : \sqrt[n]{B}$ esse $\frac{1}{n}$ rationis $A:B$; $A^{\frac{m}{n}} : B^{\frac{m}{n}}$ esse $\frac{m}{n}$ rationis $A:B$, abstinere, in Elementis certe tradendis, convenit.

XI. Tum nec opus est, de discrimine rationes inter earumque exponentes (§. 128) præcipere.

XII. Exemplum fallaciæ conceptus illius præbet §. 124. n°. 2. p. 204.

XIII. Nec satis liquet §. 136. p. 212. quare ex præmissis haud inferatur $B \times C : 1 = \frac{nr}{m}(b:1)$.

XIV. Pariter Elementa commode carere possunt quæstione illinc derivata de quantitate ac mensura rationum (§. 120. sqq.), ambiguitatibus & tricis (§. 138. Zus. 2. §. 140.) obnoxia.

W18

SCHOLIA
IN LIBRUM SECUNDUM ELEMENTORUM EUCLIDIS

QUORUM

PARTEM SECUNDAM

PRÆSIDE

CHRISTOPHORO FRIDERICO PFLEIDERER

UNIVERSITATIS ET COLLEGII ILLUSTRIS PROFESSORE PHYSICES ET MATHESEOS PUBL. ORD.

1798, 4.

1 5

PRO CONSEQUENDO GRADU MAGISTERII

D. SEPT. MDCCXCVIII.

PUBLICE DEFENDENT

CHRISTIANUS CAROL. AUGUSTUS HAAS, *Soehnstettensis*,
CHRISTIANUS FRIDERICUS ESSICH, *Canstadiensis*,
CAROL. AUG. CHRISTOPH. RÜMELIN, *Mulifontanus*,
FRIDERICUS AUGUSTUS HOFFMANN, *Stuttgardianus*,
CANDIDATI MAGISTERII PHILOSOPHICI IN ILLUSTRI STIPENDIO THEOLOGICO.

TUBINGÆ

LITERIS SCHRAMMIANIS.