# SCHOLIA
# IN LIBRUM SECUNDUM ELEMENTORUM EUCLIDIS

1797, 2.

QUÆ

PRÆSIDE

CHRISTOPHORO FRIDERICO PFLEIDERER

UNIVERSITATIS ET COLLEGII ILLUSTRIS PROFESSORE PHYSICES ET MATHESEOS PUBL. ORD.

13

PRO CONSEQUENDO GRADU MAGISTERII

*D. SEPT. MDCCXCVII.*

PUBLICE DEFENDENT

IOHANNES LUDOVICUS GOLL, *Trossingensis*,
CAROLUS CHRISTIANUS GAUPP, *Herimontanus*,
IOHANNES IACOBUS EYTEL, *Bulacensis*,
IOH. CHRISTOPH. FRID. SIGWART, *Tubingensis*,
CAROLUS EBERH. AUG. LUDWIG, *Uhlbacensis*,

CANDIDATI MAGISTERII PHILOSOPHICI IN ILLUSTRI STIPENDIO THEOLOGICO.

---

*TUBINGÆ*
LITERIS SCHRAMMIANIS.

## Propoſitio I.

### §. 1.

Propoſitio I. ſic quoque poteſt enunciari: Quotcunque parallelogramma rectangula æquealta ſimul æqualia ſunt parallelogrammo æque, ac ipſa, alto, cujus baſis æquatur ſummæ baſium ipſorum; vel quotcunque parallelogramma rectangula æqualium baſium ſimul æqualia ſunt parallelogrammo rectangulo, cujus baſis eſt baſi ſingulorum æqualis, altitudo autem æqualis ſummæ altitudinum ipſorum.

### §. 2.

Commandinus (*Euclidis Element. Libri XV. una cum Scholiis antiquis.* Piſauri 1572. fol. 29. b.), ac poſt ipſum Clavius (*Euclidis Element. Libri XV.* Francof. 1607. T. I. p. 168.), Bærmannus (*Element. Euclidis Libri XV.* Lipſ. 1743. p. 42.), aliique Propoſitioni huic ſubjungunt theorema, demonſtratu eodem, quo ipſa, modo, vel per ipſam, facile: Si fuerint duæ rectæ lineæ, quæ ſecentur in quotcunque partes; rectangulum duabus illis rectis contentum æquale eſt rectangulis ſimul, quæ unaquaque parte unius ad unamquamque partem alterius applicata continentur.

Scilicet (*Fig.* 1.) parallelogrammum rectangulum ſub $AB$ & $AD$ æquale eſt parallelogrammis rectangulis ſimul, quæ ſub $AE$ & $AL$, $AE$ & $LM$, $AE$ & $MD$, $EF$ & $AL$, $EF$ & $LM$, $EF$ & $MD$, $FG$ & $AL$, $FG$ & $LM$, $FG$ & $MD$, $GB$ & $AL$, $GB$ & $LM$, $GB$ & $MD$ comprehenduntur.

### §. 3.

Ex eadem Prop. I. conſequitur: Si baſis $AB$ (*Fig.* 2.) fuerit multiplex quæcunque rectæ $AE$; parallelogrammum rectangulum ſub $AB$ & $AD$ æque multiplex eſſe parallelogrammi rectanguli ſub $AE$ & $AD$:

$AD$: ita ut, si $AB = n \times AE$, denotante $n$ numerum integrum; pariter sit parallelogrammum rectangulum $AC = n \times AF$.

§. 4.

Et cum itidem sit parallelogrammum rectangulum $AF = m \times AH$, si $AD = m \times AG$, rursus denotante $m$ numerum integrum: erit tum parallelogrammum rectangulum $AC = n \times m \times AH$. Hoc est: si basis $AB$ fuerit multipla quæcunque rectæ $AE$, & altitudo $AD$ multiplex quæcunque rectæ $AG$; parallelogrammum rectangulum ($AC$) sub $AB$ & $AD$ tam multiplex est parallelogrammi rectanguli ($AH$) sub $AE$ & $AG$, quam multiplex unitatis est numerus, quem faciunt sese multiplicantes numeri $n$, $m$, quorum unus indicat, quam multiplex rectæ $AE$ sit $AB$, alter, quam multiplex rectæ $AG$ sit $AD$.

§. 5.

Quodsi porro fuerit $AG = AE$, proinde parallelogrammum rectangulum $AH = AE^2$; fit parallelogrammum rectangulum $AC = n \times m \times AE^2$: h. e. si basis $AB$ atque altitudo $AD$ multiplices sunt ejusdem rectæ $AE$; parallelogrammum rectangulum sub $AB$ & $AD$ tam multiplex est quadrati rectæ $AE$, quam multiplex unitatis est numerus, quem faciunt sese multiplicantes numeri $n$, $m$, qui indicant, quam multiplices rectæ $AE$ sint $AB$, $AD$: seu, si eadem recta $AE$ utramque $AB$, $AD$ metitur; quadratum rectæ $AE$ metitur parallelogrammum rectangulum sub $AB$ & $AD$ per productum $n \times m$ numerorum, per quos recta $AE$ ipsas $AB$, $AD$ metitur.

§ 6.

Denique si $AB = AD = n \times AE$; fit $AB^2 = n \times n \times AE^2 = n^2 \times AE^2$: h. e. si recta $AB$ multiplex est rectæ $AE$; quadratum prioris tam multiplex est quadrati posterioris, quam multiplex unitatis est numerus, quem facit se ipsum multiplicans numerus $n$, qui indicat, quam multiplex rectæ $AE$ sit $AB$: seu, si latus ($AE$) alicujus quadrati metitur latus ($AB$) quadrati alterius per numerum integrum $n$; prius quadratum metitur posterius per quadratum numeri $n$.

PRO-

## Propositio II.

### §. 7.

Hæc casum sistit Propositionis I. specialem: quo scilicet recta proposita in duas tantum partes secatur; eademque alterum sit latus parallelogrammorum rectangulorum, ad totam, & ad ipsius segmenta applicatorum. Rectangula sub $AC$ & $AB$ atque sub $CB$ & $AB$ (*Fig. vers. Lorenz.*) simul æqualia sunt parallelogrammo rectangulo sub $AC+CB$ & $AB$ (§. 1.), h. e. quadrato rectæ $AB$.

Idem altera, quam exponunt, demonstratione innuunt Campanus (*Euclidis Element. Libri* XV. Basil. 1558. p. 41.), Peletarius (*In Euclidis Elementa demonstrationum Libri* VI. Lugd. 1610.), Clavius (p. 170.); eaque sola, quam tradunt, Scheubelius (*Euclidis sex Libri priores.* Basil. 1550. p. 140.), Tacquet (*Elementa geometriæ planæ ac solidæ.* Amstelod. 1683. p. 58.), Barrow (*Euclidis Element. Libri* XV. Cantabrig. 1655. p. 40.)

Applicationem propositi jam exhibet demonstratio I, 47.

### §. 8.

Quodsi bifariam in puncto $C$ secatur recta $AB$: ob rectangulum $CE = CD$ (I, 3?.), fit $AE = 2CD$, h. e. $AB^q = 2$ rectg. $CAB$.

### §. 9.

Pariter si recta $AB$ secetur in quotcunque partes; rectangula sub tota $AB$ & sub singulis ejus segmentis simul æqualia esse quadrato totius $AB$: Scheubelius (l. c.), Clavius (l. c.), alii monent. Ipsamque Propositionem II. sic enunciant Campanus (l. c.), Peletarius (l. c.), alii.

### §. 10.

Commandinus (fol. 30.) addit, similiter ut superius §. 2. demonstrari: Si recta linea secetur in quotcunque partes; quadratum totius æquale esse rectangulis simul, quæ sub singulis partibus ad singulas applicatis continentur. Conf. Clavius (p. 170.)

## Propositio III.

### §. 11.

Hæc quoque ſpecialem exhibet Propoſitionis I. caſum: quo nempe propoſita recta in duas tantum partes ſecatur; parallelogrammorumque rectangulorum, ad totam & ad ejus ſegmenta applicatorum, latus alterum eſt unum horum ſegmentorum. Parallelogramma rectangula ſub $AC$ & $CB$ (*Fig. vers. Lorenz.*), atque ſub $CB$ & $CB$, h. e. $CB^q$, rurſus ſimul æqualia ſunt rectangulo ſub $AC + CB$ & $CB$ (§. 1.), h. e. rectangulo ſub $AB$ & $CB$.

Eodem redeunt altera demonſtratio Campani (p. 42.), Peletarii (p. 92.), Clavii (p. 171.); prior Scheubelii (p. 141.); ſola Tacqueti (p. 59.), Barrowii (p. 41.)

### §. 12.

Propoſitiones II. III, quamvis prima jam comprehenſæ, nominatim ſine dubio enunciatæ fuerunt, ut immediate eſſent ad uſus occurrentes paratæ; nec, quod aſſerit Austin (*Examination of the firſt ſix Books of Euclid's Elements.* Oxford 1783. p. 36.) vitioſæ quadrati ab rectangulo diſtinctioni originem debent. Vid. Lib. I. Def. 30. 31. Lib. II. Def. 1.

## Propositio IV.

### §. 13.

Quando recta $AB$ (*Fig. vers. Lorenz.*) bifariam in puncto $C$ ſecatur: rectarum æqualium $GH = AC$ & $BC$ quadrata $HF$, $CK$ ſunt æqualia; & ob $CG = CB = AC$, $GF = GH = AC = CB = GK$, parallelogramma rectangula $AG$, $GE$ pariter fiunt quadrata, prius quidem rectæ $AC$, alterum $= CB^q$: igitur quadratum $AE$ componitur ex quatuor quadratis æqualibus, ſeu eſt unius ipſorum quadruplum; Propoſitionisque formula pro caſu ſegmentorum inæqualium, ſcilicet

$$AB^q = AC^q + CB^q + 2AC \times CB$$

transformatur in hanc $AB^q = 2AC^q + 2AC^q = 4AC^q$: conformiter etiam §. 6. vi cujus eſt $AB^q = 4AC^q$, quando $AB = 2AC$. (Clavius p. 174. Barrow p. 42. Bærmannus p. 45.)

§. 14.

Textus Græcus, quem exhibent tum editio Elementorum Basileensis HERVAGII, 1533. p. 22. sq. tum Euclidis, quæ supersunt, omnium Oxoniensis DAV GREGORII, 1703. p. 37, demonstrationi Propositionis IV. quam solam tradit versio *Lorenziana*, aliam subjungit, in versionibus ZAMBERTI (*Euclidis Element.* Basil. 1558. p. 43.), SCHEUBELII (p. 142. sq.), COMMANDINI (fol. 30. b.), BÆRMANNI (p. 44. sq.), aliorum, pariter adjectam; quæ eo tantum a priori discrepat, quod æqualitatem angulorum *BGC*, *ABD* inde infert: quia trianguli æquicruri & ad *A* rectanguli *BAD* angulus ad basin *ABD* semissis est recti (I, 32. 5.); ideoque trianguli ad *C* rectanguli *BCG* tertius angulus *BGC* pariter semissis recti est (I, 32.)

CLAVIUS (p. 172), BARROW (p. 41.), priore omissa, posteriorem tantum demonstrationem exponunt.

Eandem CAMPANUS (p. 42.) adhibet ad constructionem suam: quam non ab totius rectæ *AB*, sed ab segmenti ejus *BC* quadrato orditur; cujus diametrum *BG* protrahit, donec perpendiculo, quod rectæ *AB* in puncto *A* ducit, occurrat in puncto *D* per Lib. I. Ax. 11.

§. 15.

PELETARIUS (p. 93.) hanc primo loco constructionem demonstrationemque tradit (*Fig.* 3.): "Ex altera partium, ut ex *CB*, describo quadratum *CBED*; & productis lateribus *ED* & *CD*, ponam „*DF* & *DG* æqualia ipsi *AC*; & perficiam quadratum *DFHG*, quod „constat esse quadratum ipsius *AC*. Tum connexa *FA*, erit *CF* parallelogrammum rectangulum per I, 33. 34; quod est ex *CB* in „*AC*, cum *CD* sit ipsi *CB* æqualis. Similiter constituo alterum parallelogrammum rectangulum *DK*, productis *BE* & *HG*, quæ concurrant ad punctum *K*; quod eadem ratione fit ex *CB* in *AC*. Quoniam ergo duo anguli *DFH* & *DFA* sunt recti; erit per I, 14. *AH* „linea una: & eadem ratione *HK* linea una; & *BK* etiam una. Et „quia *GK* ipsi *CB* est æqualis; & *AF* eidem *CB*, quia æqualis est „ipsi *EB*; item *HF* & *HG* ipsi *AC*: erunt duæ *AH* & *HK* toti *AB* „æquales. Itidem & *BK* eidem *AB* æqualis. Cum itaque quatuor

„angu-

„anguli $A$, $B$, $H$, $K$ ſint recti: erit $ABKH$ quadratum; & nonniſi „ipſius $AB$, cum ſit unum laterum. Quare cum ipſum compleatur „quadratis $AC$ & $CB$, duobusque ſupplementis, quæ ſub $CB$ & $AC$ „comprehenduntur; conſtat Propoſitio."

Tum ſubjicit: "Hanc demonſtrationem, meo judicio, expeditio„rem reddidi, quam ſit ea, quæ per diametros & angulos ſemirectos „adſtruitur verboſius. Nihil eſt enim, quod magis oneret memo„riam, quam longe ducta demonſtratio; in iis præſertim propoſitio„nibus, quas vel ipſa conſtructio manifeſtas reddit."

## §. 16.

Sed conſtructionem ſuam (ei, quæ in Lemmate, Propoſitioni X, 55. præmiſſo, occurrit, analogam) haud accurate exponit Peletarius; dum rectas $BE$, $HG$ producere jubet, donec in $K$ concurrant. Debebat potius, ut diagonali $BH$, vel recta $HE$ opus non haberet, nec ſuperflua eſſent, quæ in demonſtratione dicit: "& eadem „ratione $HK$ linea una"; jubere ab recta $BE$ producta abſcindere $EK = AC$, & rectam $GK$ jungere.

Altera autem demonſtratio textus Græci (§. 14.), ad analogiam demonſtrationum II, 9. 10. compoſita, per interpolationem irrepſiſſe videtur.

## §. 17.

Campanus (p. 42.) Propoſitionem IV. etiam inferre docet ex præcedentibus II. III.

Nempe $AB^q = \text{rectg.ſub}\,AB\&AC + \text{rectg.ſub}\,AB\&CB$ (II, 2.)

Sed $\text{rectg.ſub}\,AB\&AC = AC^q + \text{rectg.ſub}\,AC\&CB$
pariterque $\text{rectg.ſub}\,AB\&CB = CB^q + \text{rectg.ſub}\,AC\&CB$ (II, 3.)

Quare $AB^q = AC^q + CB^q + 2\,\text{rectg.ſub}\,AC\&CB.$

Addit autem: "Sed hac via non patet Corollarium, ſic ut via „præcedenti patet; unde prima eſt auctori magis conſona."

Eandem demonſtrationem Peletarius (p. 93. ſq.), Clavius (p. 173.), Tacquet (p. 59.), Barrow (p. 41.) exponunt; Scheubelius (p. 142.) ſuccincte his verbis indicat: "Eſt hæc quarta nihil „aliud

„aliud quam tertia Propositio repetita bis; id quod cuilibet manifesta-„bitur, qui, quadratum totius (mutato nomine) duo rectangula esse, „quæ sub tota & duobus segmentis comprehenduntur, perceperit."

§. 18.

Austin (p. 37.) Corollarium Propositioni IV. adjunctum, æque ac alteram hujus demonstrationem, interpolatum esse existimat. Illud tamen frequentis in demonstrationibus Propositionum sequentium applicationis causa ab ipso Elementorum auctore notatum fuisse censeri potest. Nec generatim, quod Austin asserit, corollaria & duplices propositionum demonstrationes connecti in Elementis deprehenduntur.

§. 19.

Summam quadratorum duarum rectarum vi Propositionis IV. minorem semper esse quadrato summæ earundem rectarum, nominatim notare; ac, ut ab illis invicem æquiparandis caveant, tirones monere supervacaneum haud fuerit.

§. 20.

Cum sit $AE = FH + AK + FK$ (*Fig vers. Lorenz.*)
h. e. $AB^q = AC^q + \text{rectg.sub } AB \,\&\, CB + \text{rectg.sub } AC \,\&\, CB$
$= AC^q + \text{rectg.sub} (AB + AC) \,\&\, CB$ (§. 1.);
Propositio IV. sic quoque potest enunciari: Quadratum totius $AB$ utcunque in $C$ divisæ æquale est quadrato unius partis $AC$ & rectangulo simul, quod sub altero segmento $CB$ & sub totius $AB$ ac prioris segmenti $AC$ aggregato continetur; vel (notante Peletario p. 94.) si duæ rectæ inæquales fuerint ($AB$, $AC$); quadratum majoris ($AB$) simul æquale est quadrato minoris ($AC$), & rectangulo sub ipsarum summa ($AB + AC$) ac differentia ($CB = AB - AC$).

§. 21.

Seu duorum quadratorum inæqualium differentia æqualis est rectangulo sub summa & differentia laterum ipsorum.

Nempe

Nempe $AE - FH = AK + FK$

h. e. $AB^q - AC^q =$ rectg ſub $AB$ & $CB$ + rectg. ſub $AC$ & $CB$

$=$ rectg ſub $(AB + AC)$ & $CB$ (§. 1.)

$=$ rectg. ſub $(AB + AC)$ & $(AB - AC)$.

§. 22.

Angelus de Marchettis (*Euclides reformatus.* Liburni 1709. Pars II.), qui theorema hoc ad demonſtrandas Propoſitiones IV—VIII. adhibet cogitve, illud immediate ſic adſtruit (p. 87. ſq.). Conſtructis (*Fig.* 3.) inæqualium rectarum $AB$, $CB$ quadratis $AK$, $CE$, quorum igitur differentiam ſiſtit gnomon $KEDCAH$: lateri $AH$ quadrati $AK$ in directum adjicit $LH = CB$, ut ſit $AL = AB + CB$; & rectam $CDG$ continuat, donec rectæ $LI$, quæ per punctum $L$ parallela rectæ $AB$ agitur, in puncto $I$ occurrat: quo facto eſt $LI = AC$ (I, 34.) $= AB - CB$; & rectangulum $AI$ id, quod ſub ſumma ac differentia rectarum $AB$, $CB$ continetur. Tum vero ob $GK = CB$ (I, 34.) $= HL$ (conſtruct.), & $KE = BK - BE = AB - CB$ (conſtr.) $= AC = GH$ (I, 34.); eſt rectangulum $GE = GL$. Quibus addito communi rectangulo $AG$, prodit gnomon $KEDCAH$, h. e. differentia quadratorum $AK$, $CE$, æqualis rectangulo $AI$.

§. 23.

Tum (p. 190. ſq.) Propoſitionem IV. ſic demonſtrat. Recta $AB$ (*Fig.* 4.) utcunque in puncto $C$ ſecta continuetur, donec ſit $AD = AC$; proinde $DB = AB + AC$, & $CB = AB - AC$.

Ita $AB^q - AC^q =$ rectg. $DBC$ (§ 22.); & $AB^q = AC^q +$ rectg. $DBC$

Atqui rectg. $DBC = CB^q +$ rectg. $DCB$ (II, 3.) $= CB^q +$ 2 rectg. $ACB$

(§. 3.), quia $DC = 2AC$ (conſtr.)

Ergo $AB^q = AC^q + CB^q +$ 2 rectg. $ACB$.

Sic autem per ambages ex propoſito §. 22. infertur, quod hujus conſtructio jam involvit.

§. 24.

Scheubelius (p. 142.) indicat: & hanc Propoſitionem IV. de pluribus ſegmentis intelligi poſſe. Nempe (*Fig.* 5.) recta $AB$ diviſa

utcun-

utcunque in tres partes $AC$, $CD$, $DB$; eadem methodo, qua in demonſtratione Prop. IV, efficitur

$$AE = MI + GP + DO + LH + HQ \quad + AG + PE \quad + CK + KN$$

& hinc $AB^q = AC^q + CD^q + DB^q + 2$ rectg. ſub $AC$ & $CD$ + 2 rectg. ſub $AC$ & $DB$ + 2 rectg. ſub $CD$ & $DB$;

vel $AE = MI + GP + DO + LH + HQ \quad + AK + KE$

h. e. $AB^q = AC^q + CD^q + DB^q + 2$ rectg. ſub $AC$ & $CD$ + 2 rectg. ſub $AD$ & $DB$;

vel $AE = MI + GP + DO + AH + HE \quad + CK + KN$

h. e. $AB^q = AC^q + CD^q + DB^q + 2$ rectg. ſub $AC$ & $CB$ + 2 rectg. ſub $CD$ & $DB$.

Eadem Propoſitionis IV. repetita applicatione ſic colliguntur:

$$AB^q = (AC + CB)^q = AC^q + \left\{ \begin{matrix} CB^q \\ (CD + DB)^q \end{matrix} \right\} + 2ACB$$
$$= AC^q + CD^q + DB^q + 2ACB + 2CDB$$

pariterque $$BA^q = (BD + DA)^q = BD^q + \left\{ \begin{matrix} DA^q \\ (DC + CA)^q \end{matrix} \right\} + 2BDA$$
$$= BD^q + DC^q + CA^q + 2BDA + 2DCA$$

ſeu $$AB^q = (AD + DB)^q = \left\{ \begin{matrix} AD^q \\ (AC + CD)^q \end{matrix} \right\} + DB^q + 2ADB$$
$$= AC^q + CD^q + DB^q + 2ACD + 2ADB$$

Unde porro, cum ſint rectg. $ACB$ = rectg. $ACD$ + rectg. ſub $AC$ & $DB$
rectg. $ADB$ = rectg. ſub $AC$ & $DB$ + rectg. $CDB$ } (II, 1.)

ſequitur $AB^q = AC^q + CD^q + DB^q + 2$ rectg. $ACD$ + 2 rectg. ſub $AC$ & $DB$ + 2 rectg. $CDB$.

Similiterque propoſitum oſtenditur de pluribus, quam tribus, ſegmentis.

## Propositio V.

### §. 25.

Ceteris manentibus, demonſtratio ſic quoque inſtrui poteſt: (*Fig. vers. Lorenz.*) rectangula $AL = CM$ (I, 36.), & $CH = HF$ (I, 43.); itaque rectangulum $AH$ = gnomoni $CMG$ (Lib. I. Ax. 2.) &c.

### §. 26.

Cum gnomon $CMG$ ſit exceſſus quadrati $CF$ ſuper quadratum $LG$, proinde $= CB^q - CD^q$; atque rectangulum $AH$ gnomoni æquale



con-

continineatur sub lateribus $AD = \begin{Bmatrix} AC \\ CB \end{Bmatrix} + CD$, & $DB = CB - CD$; rursus ex Prop. V. consequitur, quod §. 21. ex Prop. IV. illatum fuit: duorum quadratorum inæqualium differentiam æquari rectangulo sub summa & differentia laterum quadratorum; seu rectangulum sub summa & differentia duarum inæqualium rectarum æquari differentiæ quadratorum ab illis rectis factorum. (WHISTON Coroll. 6. ad II. 5. in *Andr. Tacquet Elementis Euclideis geometriæ planæ ac solidæ — illustratis.* Romæ 1745. p. 51. BÆRMANNUS p. 46.)

## §. 27.

Quare vicissim Propositio V. ex Propositionis IV. enunciatis §. 20. consequitur: scil. $CB^q = CD^q + \text{rectg.sub}\left(\begin{Bmatrix} CB \\ AC \end{Bmatrix} + CD\right) \& \begin{Bmatrix} DB \\ (CB - CD) \end{Bmatrix}$

h. e. $CB^q = CD^q + \text{rectg.sub } AD \ \& \ DB.$

Ita ANGELUS DE MARCHETTIS (p. 88.)

## §. 28.

CLAVIUS juxta FRANC. MAUROLYCUM (p. 176. sq.), TACQUET (p. 60.), BARROW (p. 42.) Propositionem V. ex Prop. IV, in subsidium adhibitis Prop. III. & I, sic deducunt:

$CB^q = CD^q + DB^q + 2\,\text{rectg.sub } CD \ \& \ DB$ (II, 4.)

Sed $DB^q + \text{rectg.sub } CD \ \& \ DB = \text{rectg.sub } CB \ \& \ DB$ (II, 3.) seu sub $AC \ \& \ DB$ (I, 36.)

Quare $CB^q = CD^q + \text{rectg.sub } AC \ \& \ DB + \text{rectg.sub } CD \ \& \ DB$
$= CD^q + \text{rectg.sub } AD \ \& \ DB$ (II, 1.)

## §. 29.

Si recta $AD$ ut in puncto $C$ utcunque secta consideratur; ob $CB = AC$, & $DB = \begin{Bmatrix} CB \\ AC \end{Bmatrix} - CD$, emergit propositio: Si recta linea secatur utcunque; rectangulum sub tota & sub differentia partium, una cum quadrato partis minoris, æquale est quadrato partis majoris (MARINI GHETALDI *De resolutione & compositione mathematica*

*tica Libri* V. Romæ 1630. p. 2. sq.); quæ terminis tantum ab exposita §. 20. differt.

§. 30.

Ab recta $AB$ (*Fig.* 6.) abſcindatur $AI = DB$. Tum eſt $DI = AD - DB$: eademque bifariam in puncto $C$ ſecatur; cum, ob $CA = CB$ & $AI = DB$ (conſtr.), ſit $CI = CD$. Quare $CD$ ſiſtit ſemidifferentiam ſegmentorum rectæ $AB$ inæqualium $AD$, $DB$. Ab producta $AB$ autem abſciſſa etiam $BG = DI$, fit $AD = DG = \frac{1}{2}AG$.

Patetque: ſi ſumma ac differentia duarum rectarum inæqualium dentur; majorem ($AD$) obtineri, ſemiſſi ($AC$) ſummæ ipſarum addendo dimidiam earum differentiam ($CD$); minorem ($DB$), ab ſemiſſe ($CB$) ſummæ earum dimidiam ipſarum differentiam ($CD$) auferendo: ſeu punctum $D$, quod ſejungit duo rectæ datæ ſegmenta inæqualia, quorum differentia datur, inveniri, rectam datam $AB$ bifariam in $C$ ſecando, & ab ſemiſſe ejus $CB$ abſcindendo $CD$ = dimidiæ ſegmentorum differentiæ; vel rectæ datæ $AB$ in directum adjiciendo $BG$ = datæ ſegmentorum differentiæ, ac totam $AG$ bifariam in $D$ ſecando.

§. 31.

Itaque Propoſitio V. ſic etiam poteſt efferri: Quadratum ſemiſummæ ($CB$) duarum inæqualium rectarum ($AD$, $DB$) æquale eſt rectangulo ſub ipſis his rectis ($AD$, $DB$), una cum quadrato ſemidifferentiæ earum ($CD$).

§. 32.

Seu (§. 26.) exceſſus quadrati ſemiſummæ duarum inæqualium rectarum ſuper quadratum ſemidifferentiæ earum æqualis eſt rectangulo ſub ipſis his rectis.

§. 33.

Cum $CB^q$ idem ſit, quod parallelogrammum rectangulum ſub $AC$ & $CB$; Propoſitione V. continetur, quod aſſerit Pappi Lemma XIII. ad Libros Apollonii de ſectione rationis & ſpatii: recta $AB$ bifariam in puncto $C$ diviſa, rectangulum ad punctum $C$ abſciſſum,

 ſive

ſive ſub $AC$ & $CB$, majus eſſe quovis alio ſegmentis quibuslibet aliis ejusdem rectæ contento. (PAPPI *Mathematicæ Collectiones*. Piſauri 1588. fol. 170. APOLLONII *De ſectione rationis Libri duo ex Arabico MS. Latine verſi; & ejusdem De ſectione ſpatii Libri duo reſtituti. Opera Edm. Halley*. Oxon. 1706. p. XXIII. XLIX. *De maximis & minimis geometrica divinatio in quintum Conicor. Apollonii. Auctore Vincent. Viviani.* Florent. 1659. Lib. I. Prop. 60. p. 103. ſq. WHISTON p. 50. ſq. THOM. SIMPSON *Eſſai ſur les Max. & Min.* Theor. I. *Elemens de Geometrie.* Paris 1755. p. 173. ſq.)

§. 34.

Tam quadrati $CF$ (*Fig. vers. Lorenz.*) quam rectanguli $AH$ perimeter eſt $= 2AB$. Igitur Propoſitione V. ſimul evincitur: parallelogrammorum rectangulorum iſoperimetrorum maximum eſſe quadratum. (THOM. SIMPSON l. c. Theor. I. Coroll. p. 174. LHUILIER *De relatione mutua capacitatis & terminorum figurarum.* Varſaviæ 1782. p. 28.)

§. 35.

Et cum, ob altitudinem majorem (I, 19.), parallelogrammum rectangulum majus ſit quocunque parallelogrammo obliquangulo iſoperimetro ſuper eadem baſi; iſoperimetrorum parallelogrammorum quorumlibet maximum eſſe quadratum conſequitur. (*De Locis ſolidis ſecunda divinatio geometrica in quinque Libros Ariſtæi. Auctore Vinc. Viviani.* Florent. 1701. Lib. III. Prop. 9. p. 57. ſq.)

§. 36.

Ac quidem, cum ſit $CD = AD - \left\{ \begin{matrix} AC \\ CB \end{matrix} \right\} = CB - DB = \frac{AD - DB}{2}$ (§. 30.): exceſſus, quo parallelogrammum rectangulum æqualium laterum $AC$, $CB$ ſuperat rectangulum quorumvis ſegmentorum inæqualium $AD$, $DB$ ejusdem rectæ $AB$ (§. 33.), ſeu quo quadratum ſuperat parallelogrammum quodcunque rectangulum iſoperimetrum non æquilaterum (§. 34.), æqualis eſt quadrato, cujus latus ($CD$) eſt differentia laterum ſingulorum quadrati & rectanguli, h. e. exceſſus longitudinis rectanguli ſuper latus quadrati, vel lateris quadrati ſuper

super latitudinem rectanguli; seu quadrato, cujus latus ($CD$) est semidifferentia laterum contiguorum rectanguli. (LHUILIER l. c.)

§. 37.

Secetur (*Fig.* 6. 7.) $AB$ in alia inæqualia $AR$, $RB$ in puncto $R$ remotiore ab puncto bisectionis $C$, quam est $D$; ita ut sit $CR > CD$: ideoque vel $AR > AD$, $BR < BD$ (*Fig.* 6.); vel $BR > AD$, $AR < BD$ (*Fig.* 7.)

Erit rectg.$ADB + CD^q =$ rectg $ARB + CR^q$, scil. utrumque $= CB^q$ (II, 5.)

Sed $CD^q <$ $CR^q$ ob $CD < CR$ (supp.)

Itaque rectg. sub $AD$ & $DB >$ rectg. sub $AR$ & $RB$.

Breviter: posterius rectangulum $ARB$ minus est priore $ADB$; cum ab $CB^q$ magis, quam hoc deficiat, ob $CR^q > CD^q$.

§. 38.

Recta igitur $AB$ bifariam divisa in puncto $C$, & in partes inæquales in punctis $D$, $R$; punctum $D$ propius adjacens puncto $C$ rectangulum efficit majus remotiore $R$: quod est PAPPI (l. c.) Lemma XIV. Idem tradunt BARROW (p. 42.), VIVIANI (loco §. 33. cit.), WHISTON (p. 91.), BÆRMANNUS (p. 46.).

§. 39.

Rursus abscissa $AQ = RB$; segmentorum $AR$, $RB$ differentia est $RQ$, semidifferentia $CR = CQ$, uti §. 30. Perimeter vero rectanguli $ARB$ pariter est $= 2AB$.

§. 40.

Isoperimetrorum igitur parallelogrammorum rectangulorum non æquilaterorum illud majus est, cujus latera contigua, seu longitudo & latitudo, minus invicem differunt: & quo magis augetur differentia laterum contiguorum rectanguli, eo minorem aream rectangulum sub eadem perimetro comprehendit. (§. 37. 39.)

§. 41.

Cum recta quoque $RQ$ secetur in æqualia in puncto $C$, atque in inæqualia in puncto $D$; est $CR^q =$ rectg. sub $RD$ & $DQ + CD^q$ (II, 5.)

Quare

Quare (§.37.) $rectg.ADB + CD^q = rectg.ARB + rectg.RDQ + CD^q$
& hinc $rectg.ADB = rectg.ARB + rectg.RDQ$

$$\left.\begin{array}{l} \text{ubi (§.30.39.) sunt } DQ = \begin{Bmatrix} CQ \\ CR \end{Bmatrix} + CD = \dfrac{AR-RB}{2} + \dfrac{AD-DB}{2} \\ RD = CR - CD = \dfrac{AR-RB}{2} - \dfrac{AD-DB}{2} \end{array}\right\} Fig.6.$$

$$\left.\begin{array}{l} \& \; RD = \begin{Bmatrix} CR \\ CQ \end{Bmatrix} + CD = \dfrac{RB-AR}{2} + \dfrac{AD-DB}{2} \\ DQ = CQ - CD = \dfrac{RB-AR}{2} - \dfrac{AD-DB}{2} \end{array}\right\} Fig.7.$$

Spatium proinde, quo rectangulum sub segmentis $AD$, $DB$, in quæ recta $AB$ dividitur puncto $D$ propiore puncto bisectionis $C$, excedit rectangulum sub segmentis $AR$, $RB$ ejusdem rectæ $AB$, quæ distinguit punctum $R$ remotius ab puncto bisectionis $C$ (§. 38.); seu quo rectangulum ($ADB$), cujus latera contigua minus invicem differunt, excedit alterum isoperimetrum ($ARB$), cujus laterum adjacentium differentia est major (§. 40.); æquatur rectangulo ($RDQ$) sub summa ac differentia semidifferentiarum laterum contiguorum utriusque rectanguli.

## §. 42.

Quodsi utcunque in punctis $C$, $D$ secatur recta $AB$ (*Fig.* 8.): parallelogramma rectangula $ACB$ & $CDB$ simul æqualia sunt parallelogrammis rectangulis $BDA$ & $DCA$.

Nempe $rectg.ACB = rectg.sub\,BD\,\&\,AC + rectg.sub\,DC\,\&\,AC$ (II, 1.)
Quare $rectg.ACB + CDB = rectg.sub\,BD\,\&\,AC + rectg.sub\,BD\,\&\,CD + rectg.sub\,DC\,\&\,AC$
$= rectg.sub\,BD\,\&\,AD + rectg.sub\,DC\,\&\,AC$ (II, 1.)
$= rect.\ BDA + DCA.$

## §. 43.

Gregorius a s. Vincentio (*Opus geometricum quadraturæ circuli & sectionum coni.* Antverp. 1647. p. 37.) propositionem hanc infert ex demonstratis §. 24; vi quorum est

$AC^q$

$$AC^q+CD^q+DB^q+2ACB+2CDB=BD^q+DC^q+CA^q+2BDA+2DCA$$

cum utraque summa sit $=AB^q$: unde ablatis communibus quadratis, & sumtis residuorum dimidiis, manent parallelogramma rectangula

$$ACB+CDB = \qquad BDA+DCA$$

## §. 44.

Recta autem $AB$ bifariam in puncto $C$ secta; ob $AC=CB$, fiunt parallelogramma rectangula $ACB=CB^q$

$$DCA= BCD = CDB+CD^q \text{ (II, 3.)}$$

Quare (§. 42. sq.) $\quad CB^q+CDB=\begin{Bmatrix}BDA\\ADB\end{Bmatrix}+CDB+CD^q$

& hinc $\quad CB^q = ADB \quad +CD^q.$

Ita Propositionem V. corollarii instar ex propositione §. 42. sq. in subsidium adhibita Prop. III; vel immediate etiam ex Propositionibus I. III. deduci posse patescit.

## Propositio VI.

## §. 45.

Cum gnomon $CMG$ (*Fig. vers. Lorenz.*) sit excessus quadrati $CF$ super quadratum $LG$, adeoque $=CD^q-CB^q$; & rectangulum $AM$ gnomoni æquale contineatur sub lateribus $AD=CD+\begin{Bmatrix}CA\\CB\end{Bmatrix}$, atque $DB=CD-CB$; ex hac etiam Propositione consequitur, quod §. 21. ex Prop. IV, & §. 26. ex Prop. V. fuit illatum: nempe duorum quadratorum inæqualium differentiam æquari rectangulo sub summa & differentia laterum quadratorum.

## §. 46.

Vicissim etiam Propositio VI. ex Propositionis IV. enunciatis §. 20. consequitur: scilicet $CD^q=CB^q+\text{rectg. sub}\left(CD+\begin{Bmatrix}CB\\CA\end{Bmatrix}\right)\text{ \& sub}\begin{Bmatrix}DB\\(CD-CB)\end{Bmatrix}$

h. e. $\quad CD^q=CB^q+\text{rectg. sub } AD \text{ \& } DB.$

Ita Angelus de Marchettis (p. 89.)

§. 47.

§. 47.

Pariterque prius Propositionis IV. enunciatum §. 20. ex Propos. VI. deducitur. (VIVIANI *De max. & min.* Lib. II. Prop. I. p. 1.)

§. 48.

Eandem Propositionis IV. transformationem CLAVIUS altera sua Propositionis VI. demonstratione (p. 179.), & BARROW (p. 43.) sola, quam tradit, exhibent, sextam ex Propositionibus IV. III. sic deducentes: $CD^q = CB^q + BD^q + 2$rectg. sub $CB$ & $BD$ (II, 4.)
$= CB^q + BD^q +$ rectg. sub $AB$ & $BD$, quia $AB = 2CB$
$= CB^q +$ rectg. sub $AD$ & $BD$ (II, 3.)

§. 49.

CLAVIUS (l. c.) addit: *Mauritium Brescium*, Gratianopolitanum, regium mathematicarum disciplinarum in Acad. Parisiensi professorem, sequentem docuisse Propositionis VI. ex Prop. V. consecutionem. Ab producta $DA$ recta (*Fig.* 9.) abscindatur $AS = BD$: unde $SB = AD$, ac rectg. $SBD = ADB$; atque ob $CA = CB$, etiam $CS = CD$. Cum igitur recta $SD$ bifariam in puncto $C$, & utcunque in puncto $B$ secetur; fit (II, 5.) rectg. $SBD$ seu $ADB + CB^q = CD^q$.

Eadem demonstratione utitur TACQUET (p. 61.)

§. 50.

Quodsi recta $AD$ tanquam in puncto $C$ utcunque secta spectatur: ob $CB = AC$, & $BD = CD - \begin{Bmatrix} CB \\ AC \end{Bmatrix}$, pariter Propositio VI. transformatur in theorema expositum §. 29. (GHETALDUS p. 3. HERIGONUS in *Cursus mathematici* Tomo I. Paris. 1644. p. 78. sq.)

§. 51.

In figura Propositionis VI. $AD$ sistit summam duarum inæqualium rectarum $CD$, $AC$; & $DB$ earum differentiam, ob $CB = AC$: igitur $AB$, excessum summæ $AD$ super differentiam $BD$. Cujus excessus $AB$ cum semissis sit $AC$, consequitur: duarum inæqualium rectarum minorem esse semissem excessus summæ ipsarum super earum diffe-

differentiam (quod consentire cum §. 30. facile patet); atque punctum $C$, quod sejungit duo rectæ datæ $AD$ segmenta inæqualia, quorum differentia datur, hac etiam ratione (diversa ab iis, quæ §. 30. docentur) inveniri: ab data $AD$ auferendo $DB$ æqualem differentiæ datæ segmentorum, & residuum $AB$ bifariam in $C$ secando. (GHETALDUS p. 13.)

§. 52.

ISAACUS MONACHUS (*Scholia in Euclidis Elementor. geometriæ sex priores Libros.* Argentorati 1579.) in Scholio ad II, 6. quod & apud COMMANDINUM (fol. 31. b.) exstat, pariterque CLAVIUS, alii, observant: rectas $AD$, $CD$, $BD$ esse continue arithmetice proportionales, cum differentia $AC$ duarum priorum æqualis sit differentiæ $CB$ duarum posteriorum; Propositione VI. igitur hanc quoque contineri: Si tres rectæ sunt continue arithmetice proportionales; quadratum mediæ æquale est rectangulo sub extremis, cum quadrato differentiæ utriusvis extremarum ac mediæ.

§. 53.

Idem involvit Propositio V; ubi (*Fig.* 6.), ob differentiam communem $CD$ binarum sese consequentium, sunt rectæ $AD$, $CB = CA$, $DB$ continue arithmetice proportionales.

§. 54.

Atque hujus constructio pariter ac ea, quæ §. 49. *Fig.* 9. Propositioni VI. adhibetur, porro docet: Si tres rectæ sint arithmetice proportionales, summam extremarum duplam esse mediæ; seu mediam æquari dimidiæ summæ extremarum.

Nempe in *Fig.* 6. est $AD + DB = AB = 2CB$; $CB = \frac{1}{2}AB = \frac{AD + DB}{2}$

& in *Fig.* 9. $AD + BD = SD = 2CD$; $CD = \frac{1}{2}SD = \frac{AD + BD}{2}$

§. 55.

Sicque etiam ex Prop. VI. consequuntur theoremata exposita §. 31. sq: cum in fig. Prop. VI. sit $CD = \frac{AD + BD}{2}$ (§. 54.), & $CB = \frac{1}{2}AB = \frac{AD - BD}{2}$

Ac patet: bifariam in puncto *C* fecando refiduum *AB*, quod minore recta *BD* ab majori *AD* ablata relinquitur, hanc puncto *C* dividi in duo fegmenta, quorum majus *CD* fit femifummæ, minus *CA* femidifferentiæ duarum *AD*, *BD* æqualis; ita ut major *AD* fit aggregatum femifummæ *CD* & femidifferentiæ *CA*, minor autem *BD* fit exceffus femifummæ *CD* fuper femidifferentiam $CB = CA$; conformiter §. 30. Pappi Collect. III, 12. fol. 10.

§. 56.

Nec nifi terminis differre propofitiones enunciatas §. 51. 52. edocent §. 54. & obfervatio tam ex *Fig.* 6. 9. quam ex indole ipfa trium rectarum continue arithmetice proportionalium perfpicua: quod differentia extremarum dupla fit differentiæ utriusvis extremarum ac mediæ, feu quod hæc fit prioris femiffis.

§. 57.

Quodfi rectæ *AB* (*Fig.* 10), utcunque in puncto *C* divifæ, in directum adjicitur recta quæcunque *BD*; parallelogramma rectangula *ADB* & *ACB* fimul æqualia funt parallelogrammis rectangulis *ACD* & *CDB*.

Nempe rectg. fub $AD$ & $DB$ = rectg fub $AC$ & $DB$ + rectg. fub $CD$ & $DB$ (II, 1.)

Itaque rectg. $ADB + ACB$ = rectg. fub $AC$ & $DB$ + rectg. fub $AC$ & $CB$ + rectg. fub $CD$ & $DB$
= rectg. $ACD + CDB$ (II, 1.)

§. 58.

Quando igitur bifariam in puncto *C* fecatur *AB*: ob $AC = CB$ fit
rectg. $ADB + CB^q$ = rectg. fub $CB$ & $CD$ + rectg. fub $DB$ & $CD$ (§. 57.)
$= CD^q$ (II, 2.)

§. 59.

Propofitiones V. VI. uno enunciato fic poffunt comprehendi: (*Fig.* 6. 9.) Si recta (*AB*) bifariam (in puncto *C*) fecatur, atque in ea vel ipfa, vel producta punctum (*D*) pro lubitu affumitur; rectangulum fub rectis (*AD*, *BD*) puncto hoc (*D*) atque extremis (*A*, *B*) rectæ datæ (*AB*) terminatis æquale eft differentiæ quadratorum rectarum (*CB* feu *CA*, & *CD*) ab puncto bifectionis (*C*) rectæ propofitæ (*AB*) ad alterum ejus extremum (*B* vel *A*) & ad punctum arbitrarium

rium ($D$) protensarum. (§. 26. 45.) Nec nisi eo discrepant ambæ propositiones, quod in priori est $CB$ seu $CA > CD$, in posteriori $CD > CB$ seu $CA$.

§. 60.

Conversæ Propositionum V. VI, quæ sunt Pappi in Librum III. Conicor. Apollonii Lemmata 10. 9. 11. (*Collect. mathemat.* fol. 256. b. sqq.), vel 8. 7. 9. (Apollonii *Conicorum Libri octo. Opera Edm. Halleii.* Oxon. 1710. P. I. p. 155.) facile ad directas suas alterne reducuntur. Nempe

| | | |
|---|---|---|
| 1°. (*Fig.* 6.) Si | $ADB+CD^q=CB^q$; vel | $ADB+CD^q=CA^q$ x vel §. 20. |
| facta $CI=CD$, est (II, 6)* | $IBD+CD^q=CB^q$ | $DAI+\left\{ {CI^q \atop CD^q} \right\}=CA^q$ |
| Unde | rectg $ADB=IBD$ | $ADB=DAI$ |
| & hinc, ob comunem altitudinem | $DB$ | $AD$ |
| (I, 36. Conv.) | $AD=IB$ | $DB=AI$ |
| itaque, ob $CD=CI$ (constr.), | $AD-CD=IB-CI$ | $CD+DB=CI+AI$ |
| h. e. | $CA=CB$ | $CB=CA$ |

| | | |
|---|---|---|
| 2°. (*Fig.* 9.) Si | $ADB+CB^q=CD^q$; vel | $ADB+CA^q=CD^q$ x vel §. 20. |
| facta $CS=CD$, est (II, 5.)* | $SBD+CB^q=CD^q$ | $SAD+CA^q=\left\{ {CS^q \atop CD^q} \right.$ |
| Quare | rectg. $ADB=SBD$ | $ADB=SAD$ |
| Unde, ob comunem altitudinem | $DB$ | $AD$ |
| (I, 36. Conv.) | $AD=SB$ | $DB=SA$ |
| & ob $CD=CS$ (constr.) | $AD-CD=SB-CS$ | $CD-DB=CS-SA$ |
| h. e. | $CA=CB$ | $CB=CA.$ |

Bifariam igitur rectam $AB$ secat punctum $C$ sic in ea situm, ut rectarum $CB$ vel $CA$ ac $CD$, quarum una $CB$ vel $CA$ ipsum inter $C$ punctum atque alterutrum rectæ $AB$ extremum, altera $CD$ idem punctum $C$ inter atque punctum $D$ vel alibi in recta $AB$, vel in ea producta situm interjacent, quadrata invicem differant spatio æquali rectangulo sub rectis $AD$, $BD$, quæ hinc puncto $D$, inde extremis $A$, $B$ rectæ $AB$ terminantur.

Pappus priorum conversarum alteram ipsa methodo heic exposita; posteriores paulo operosiore demonstrat.

§. 61.

Applicationis Propositionum VI. V. exemplum præbent problemata Propositionibus XI. XIV. soluta; quas ideo statim illis subjungimus.

### Propositio XI.

§. 62.

Cum (*Fig. vers. Lorenz.*) quadratum dimidiæ $AB$ sit quadrans quadrati totius $AB$ (§ 6. 13.); rectangulum autem sub dimidia ac tota $AB$ sit quadrati ipsius $AB$ semissis (§. 4. 8.): sectio rectæ datæ $AB$ Propositione XI. imperata in inæqualia fieri; ac segmentum, cujus quadratum rectangulo sub tota & sub altero segmento æquetur, duorum inæqualium majus esse debet.

Facta supponatur sectio desiderata in puncto $H$. Tum super majori segmento $AH$ descripto quadrato $AHGF$; & ad minus segmentum $BH$ applicato rectangulo $BHKD$, cujus alterum latus $BD = AB$: requiritur, ut sit $AHGF = BHKD$.

Cum neutrum horum spatiorum, nec nisi rectanguli $BHKD$ alterum latus $BD = AB$ detur; ansa hinc non suppetit problema immediate solvendi.

Eam vero suppeditat rectarum $DK$, $FA$ ad occursum usque in puncto $C$ continuatio: qua facta, ut sit $AHGF = BHKD$, addito utrinque rectangulo $AHKC$, debet esse rectangulum $FCKG =$ quadrato $ABDC$ rectæ datæ $AB$.

Cum rectanguli $FCKG$ latus $FG$ sit $= FA$ (constr.); rectangulum $FCKG$ idem est cum rectangulo sub $CF$ & $FA$.

Itaque problematis solutio huc redit: ut rectæ $CA$ positione ac magnitudine datæ (quippe quæ datæ rectæ $AB$ perpendicularis est & æqualis) in directum adjiciatur $AF$ talis, ut rectangulum sub adjecta $AF$ & sub composita $CF$ ex data $CA$ & adjecta $AF$ æquale sit quadrato rectæ datæ $AB$.

Atqui bifariam in puncto $E$ divisa $CA$, est $EF^q = CFA + EA^q$ (II, 6.)
Quare, ut sit rectg. $CFA = AB^q$, debet esse $EF^q = AB^q + EA^q$
Sed ob ang. $EAB$ rectum (constr. & I, 13.) est $EB^q = AB^q + EA^q$ (I, 47.)
Proinde oportet, sit $EF^q = EB^q$; & hinc $EF = EB$.

§. 63.

## §. 63.

Constructio problematis, quod & Clavius (p. 191.) notat, non requirit, nisi ut datæ rectæ $AB$ in altero ejus extremo $A$ perpendicularis excitetur $AC$ ipsi $AB$ æqualis, eaque bifariam in puncto $E$ secetur; seu ut tantum semissi ipsius $AB$ æqualis $AE$ ad angulos rectos datæ $AB$ in puncto $A$ constituatur; tum recta $EA$ continuetur, donec sit $EF$ æqualis rectæ $EB$ jungenti puncta data $E$, $B$; denique ab data $AB$ abscindatur $AH$ æqualis rectæ per hactenus facta datæ $AF$. Quæ quidem semper erit data $AB$ minor; cum sit $EB$, itaque $EF$, seu $EA + AF < EA + AB$ (I, 20.): eademque major dimidia $AB$ seu $EA$; cum sit $EB$ seu $EA + AF > AB$ (I, 19.) seu $2EA$.

Demonstratio etiam constructionis absque reliquo figuræ apparatu sic peragi potest:

$$EF^q = EB^q = AB^q + EA^q \text{ (constr. \& I, 47.)}$$

Atqui $EF^q = AF^q + EA^q + 2EAF$ (II, 4.)

Igitur $AF^q + EA^q + 2EAF = AB^q + EA^q$

$AF^q + 2EAF = AB^q$

h. e. $AH^q + BAH = AB^q$ ob $AF = AH$, $AB = 2EA$ (constr.)

$= ABH + BAH$ (II, 2.)

Ergo $AH^q = ABH$.

## §. 64.

Propositio XI. aliis verbis docet rectangulum construere, cujus latus majus est datæ rectæ $AB$ æquale, & cujus area æqualis est quadrato differentiæ $AH$ laterum contiguorum $AB$, $BH$ rectanguli.

## §. 65.

Cum rectanguli $FCKG$ latus $FG$ sit $= FA$ (constr.); est $CF - FG = CA = AB$. Præter aream rectanguli $FCKG = AB^q$ (§. 62.), datur itaque differentia laterum ejus contiguorum $= AB$. Problema igitur Propositione XI. enunciatum per analysin §. 62. reducitur ad hoc: ut construatur parallelogrammum rectangulum, cujus differentia laterum contiguorum sit datæ rectæ $AB$ æqualis, & cujus area æqualis sit quadrato ejusdem rectæ datæ $AB$.

Quod

Quod porro per biſectionem differentiæ datæ $CA$ laterum $CF$ & $FG$ ſeu $FA$ rectanguli deſcribendi reducitur ad determinationem ſemiſummæ $EF$ eorundem laterum (§. 55.); quæ abſolvitur ope propoſitionum II, 6. I, 47.

## §. 66.

Eodemque modo ſolvitur problema generalius: conſtruere rectangulum, cujus differentia laterum contiguorum ſit datæ rectæ $AC$, area autem quadrato alius cujuscunque rectæ datæ $I$ æqualis. (*Fig.* 11.)

Sumto enim, $CF$ eſſe latus majus rectanguli conſtruendi: cum latus minus ab eo differre debeat longitudine $AC$; oportet, illud ſit $= AF$. Rurſus itaque eo redigitur problema: ut datæ rectæ $CA$ in directum adjiciatur $AF$ talis, ut rectangulum ſub adjecta $AF$ & ſub compoſita $CF$ ex data $CA$ & adjecta $AF$ æquale ſit quadrato rectæ datæ $I$. Quod, bifariam in $E$ ſecando datam laterum quæſitorum rectanguli differentiam $AC$, denuo ad illorum ſemiſummam $EF$ (§. 55.) inveſtigandam deducitur. Atqui $EF^q =$ rectg.$CFA + EA^q$ (II, 6.) Ut igitur ſit rectg.$CFA = I^q$; debet eſſe $EF^q = I^q + EA^q$; proinde (I, 47.) $EF$ æqualis eſſe debet hypotenuſæ trianguli rectanguli, cujus latera circa angulum rectum ſint, unum quidem datæ rectæ $I$, alterum datæ $EA$, æqualia.

Hinc ſequens enaſcitur conſtructio: Datæ laterum rectanguli differentiæ $AC$, bifariam in puncto $E$ diviſæ, perpendicularis in altero ejus extremo $A$ conſtituatur $AB =$ datæ rectæ I; tum centro $E$, intervallo $EB$, deſcribatur circulus; qui ob $EB > EA$ (I, 19.), ideoque & $> EC$, rectam $CA$ utrinque productam ſecabit. Sint puncta $F$, $L$ hæ ſectiones. Erit rectangulum ſub $CF$ & $FA$, vel ſub $AL$ & $LC$, quod requiritur.

Nempe 1°. tam $CF - FA$, quam $AL - CL = AC$.

2°. Rectg.$CFA + EA^q = EF^q$, & rectg.$ALC + EC^q = EL^q$ (II, 6.)

Quare cum ſint $EC = EA$, & $EF = EL = EB$ (conſtr.); fit

tam rectg.$CFA + EA^q$, quam rectg.$ALC + EA^q = EB^q = AB^q + EA^q$ (I, 47.)

& hinc tam rectg.$CFA$ quam rectg.$ALC$ $= AB^q = I^q$.

Ceterum latera rectangulorum $CFA$ & $ALC$ ſitu ſolo, non longitudine differunt. Etenim ob $EF = EL$, $EC = EA$ (conſtr.), ſunt $EF + EC = EL + EA$, h. e. $CF = AL$; & $EF - EA = EL - EC$, h. e. $AF = CL$.

Eandem

Eandem problematis, enunciato tantum ab præcedente diversi: ad datam rectam lineam dato quadrato æquale rectangulum applicare, excedens quadrato; constructionem tradit ROB. SIMSON (*Euclidis Elementor. Libri priores VI. item XI. & XIImus*. Glasguæ 1756. in Nota ad VI, 28. sq. p. 381. sq.) Nec nisi positione normalis $AB = I$ ad punctum bisectionis $E$ rectæ datæ $AC$, ejusque consequentibus differt modus, quo, ut proponit, applicare datum quadratum ad rectam datam excedens quadrato HALLEY in Scholio ad Prop. 18. Libri VIII. Conicor. Apollonii (P. II. p. 153.) docet.

## §. 67.

Si requiritur (*Fig.* 12.), ut rectæ datæ $AH$ in directum alia $BH$ sic adjiciatur, ut rectangulum sub adjecta $BH$ & sub composita $AB$ ex data & adjecta æquale sit datæ $AH$ quadrato: bifariam secta in puncto $M$ data recta $AH$, debebit $MB^q$, quod est $=$ rectg.$ABH + MH^q$ (II, 6.), esse $= AH^q + MH^q$.

Propositum igitur efficietur: rectæ datæ, bifariam in puncto $M$ sectæ, ad extremum $H$, ultra quod continuari debet, excitando perpendiculum $HG = AH$; tum ab $MH$ producta abscindendo $MB = MG$.

Ita enim $MB^q = MG^q = \left\{ \begin{matrix} HG^q \\ AH^q \end{matrix} \right\} + MH^q$ (constr. & I, 47.)

Atqui rectg.$ABH + MH^q = MB^q$ (II, 6.)

Ergo rectg.$ABH + MH^q = AH^q + MH^q$; & rectg.$ABH = AH^q$.

## §. 68.

Solutionem problematis hujus, quod aliis verbis jubet rectangulum construere, cujus laterum $AB$, $BH$ differentia sit datæ rectæ $AH$ æqualis, & cujus area æqualis sit ejusdem rectæ $AH$ quadrato, jam involvit, & ad eam, uti ex §. 62. 65. liquet, reducitur solutio problematis II, 11: ubi (*Fig. vers. Lorenz.*) datæ $AC$ in directum adjicienda erat $AF$ sic, ut esset rectg.$CFA = AC^q$; quod etiam, recta $AC$ in puncto $E$ bifariam secta, fiebat, ab producta $EA$ abscindendo $EF = EB$ rectæ, ab puncto $E$ ductæ ad extremum perpendiculi $AB = AC$ in puncto $A$ super $AC$ constituti.

## §. 69.

Jubeatur nunc, quod eſt alterum problematis II, 11. converſum, rectæ datæ $BH$ (*Fig.* 13.) alia $HA$ in directum ſic adjici, ut rectangulum ſub data $BH$ & ſub compoſita $BA$ ex data & adjecta ſit quadrato adjectæ $HA$ æquale; ſeu jubeatur rectangulum conſtrui, cujus latus minus ſit datæ rectæ $BH$ æquale; & cujus area æqualis ſit quadrato differentiæ $AH$ laterum $BA$, $BH$ rectanguli.

Facta ſupponatur continuatio deſiderata rectæ datæ $BH$ ad punctum $A$ usque. Cum ſit rectg. $ABH = BH^q +$ rectg. $AHB$ (II, 3.) $> BH^q$; ut poſſit eſſe $AH^q =$ rectg. $ABH$; debet eſſe $AH^q > BH^q$, $AH > BH$.

Conſtruatur ſuper $AH$ quadratum $AFGH$; & ſuper $AB$ rectangulum $ABPN$, cujus latus $BP = BH$. Recta $NP$, quæ ex oppoſito baſis $AB$ rectangulum $ABPN$ terminat, latera $AF$, $HG$ quadrati $AG$, utpote ipſi $AH$ æqualia, ac proinde majora quam $BP = BH$, in punctis $N$, $O$ ita ſecabit, ut ſint $AN = HO = BP$ (I, 34.) $= BH$ (conſtr.); adeoque $FN = GO = AH - BH = AQ$, facta $HQ = HB$; atque ut rectangulum $NFGO$ ſit $=$ rectg. ſub $HA$ & $AQ$.

Porro ut ſit $AH^q =$ rectg. $ABH$, h. e. (conſtr.) $AFGH = ABPN$: ablato communi ſpatio $AHON$, debet eſſe $NFGO = BHOP$, h. e. rectg. $HAQ = BH^q = HO^q$ (conſtr. & demonſtr.)

Atqui biſariam in puncto $R$ ſecta $HQ$, eſt $RA^q =$ rectg. $HAQ + RH^q$ (II, 6.) Oportet igitur ſit $RA^q = HO^q + RH^q = RO^q$ (I, 47.); $RA = RO$.

Unde ſequens emergit problematis conſtructio: Rectæ datæ $BH$ in directum adjiciatur $HR = \frac{1}{2}BH$; eidemque in puncto $H$ normalis ſtatuatur $HO = BH$; tum ab producta $BR$ abſcindatur $RA = RO$.

Etenim ſuper $AH$ deſcripto quadrato $AFGH$; et per punctum $O$ acta rectæ $AB$ parallela $NP$, quæ rectæ $BP$ ad $B$ ſuper $AB$ perpendiculari in $P$ occurrit; ab $RA$ autem abſciſſa $RQ = RH = \frac{1}{2}BH$; quo ſit $HQ = BH = HO$, & $AQ = GO$: eſt rectg. ſub $HA$ & $AQ + RQ^q = RA^q$ (II, 6.), & $HO^q + RH^q = RO^q$ (I, 47.) Quare, cum ſit $RA = RO$ (conſtr.), eſt rectg. ſub $HA$ & $AQ + RQ^q = HO^q + RH^q$. Et cum porro ſit $RQ = RH$ (conſtr.), eſt rectg. $HAQ = HO^q$, h. e. $GONF = BHOP$. Quibus addito communi ſpatio $AHON$, ſit $AFGH = ABPN$, h. e. $AH^q =$ rectg. $ABH$.

PRO-

## Propositio XIV.

### § 70.

Alterutro dati parallelogrammi rectanguli non æquilateri $BCDE$ (*Fig.* 14.) latere $BE$ (supervacanea enim, notante Rob. Simson p. 348. est textus Græci & plerarumque versionum ad latus majus restrictio) producto, donec $EF = ED$, ideoque rectangulum $BD =$ rectg. sub $BE$ & $EF$; cum recta $BF$ puncto $E$ secetur in inæqualia (hyp.); applicandæ Propositionis V. gratia, quæ de rectangulo segmentorum inæqualium datæ rectæ præcipit, eandem $BF$ secare etiam oportet in æqualia: quo facto in puncto $G$, est rectg. $BEF + GE^q = GF^q$.

Posito igitur rectæ $L$ quadrato $=$ rectg. $BEF$; debet esse $L^q + GE^q = GF^q$.

Hoc autem fiet: si, constructo triangulo rectangulo, cujus hypotenusa $= GF$, & unum latus circa angulum rectum $= GE$, sumitur $L =$ alteri lateri circa angulum rectum (I, 47.) Atque ita $L =$ segmento $EH$, quod circulus centro $G$, intervallo $GF$ descriptus abscindit ab recta $DE$ producta, quæ (supp.) rectæ $GE$ in puncto $E$ ad angulos rectos insistit.

### § 71.

Pariter proposito cuicunque parallelogrammo obliquangulo $BEIK$, utpote æquali rectangulo $BEDC$ super eadem basi & inter easdem parallelas $BE$, $CI$ (I, 35.), æquale quadratum efficietur: lateri cuilibet $BE$ parallelogrammi in directum adjiciendo rectam $EF$ æqualem distantiæ $ED$ lateris hujus $BE$ ab opposito $KI$; & reliqua peragendo uti in constructione Prop. XIV.

### § 72.

Cum sit $EH < GH$ (I, 19.) seu $GF$ (constr.): fit $4EH < 4GF$ seu $2BF$ seu $2(BE+ED)$; tantoque magis $4EH < 2(BE+EI)$, ob $ED < EI$ (I, 19.): h. e perimeter quadrati ab $EH$ minor perimetro rectanguli $BEDC$; tantoque magis minor perimetro parallelogrammi obliquanguli $BEIK$. Æqualem igitur aream quadratum sub minore perimetro quam parallelogrammum rectangulum non æquilaterum, vel parallelogrammum obliquangulum, comprehendit.

 Quod

Quod & ex ostensis §. 34. sq. jam consequitur: vi quorum sub perimetro æquali, proinde super latere $= \frac{BE+ED}{2}$, vel $\frac{BE+EI}{2}$, quadratum majus est parallelogrammis $BEDC$, $BEIK$; quadrati igitur ipsis æqualis latus $< \frac{BE+ED}{2}$, vel $\frac{BE+EI}{2}$; ac perimeter $< 2(BE+ED)$, vel $2(BE+EI)$, esse debet.

§. 73.

Et cum parallelogrammum rectangulum non æquilaterum $BEDC$, seu rectangulum sub rectæ datæ $BF$ segmentis inæqualibus $BE$, $EF$, ab quadrato isoperimetro, seu cujus latus $GF = \frac{1}{2}BF$ differat rectæ $GE$ quadrato (II, 5.): quadratum æquale rectangulo $BEDC$, seu rectangulo sub $BE$ & $EF$, ab $GF^q$ eodem $GE^q$ deficiat; ideoque (I, 47.) latus ejus æquale sit, oportet, lateri circa angulum rectum trianguli rectanguli, cujus hypotenusa $= GF$, atque alterum latus circa angulum rectum $= GE$: conformiter §. 70.

§. 74.

Quodsi vicissim recta data $BF$ (*Fig.* 15.) ita proponitur secanda, ut rectangulum sub segmentis ejus æquale sit quadrato rectæ datæ $M$; seu si parallelogrammum rectangulum construi jubetur æquale quadrato rectæ datæ $M$, & cujus summa laterum contiguorum sit datæ rectæ $BF$ æqualis, proinde perimeter $= 2BF$: ut, quod requiritur, fieri possit; recta data $M$ non major esse debet semisse $GF$ rectæ secandæ, seu datæ laterum contiguorum rectanguli describendi summæ $BF$: quia rectangulo sub segmentis æqualibus $BG$, $BF$, seu quadrato semissis ejus $GF$ majus spatium segmentis datæ $BF$, seu parallelogrammo rectangulo, cujus perimeter $= 2BF$, comprehendi nequit. (§. 33. sq.)

Tum vero si $M = \frac{1}{2}BF$; rectam $BF$ bifariam in $G$ secando, factum erit, quod jubetur: erit enim rectg. $BGF = GF^q = M^q$, cum sit $GF = M$ (hyp.)

Sed si $M < GF$, ideoque $M^q < GF^q$ seu rectg. $BGF$; ponatur in puncto

puncto $E$ facta rectæ $BF$ ſectio, qua obtineatur $M^q =$ rectg. $BEF$. Cum ſit rectg. $BEF + GE^q = GF^q$ (II, 5.): debebit eſſe $M^q + GE^q = GF^q$; proinde (I, 47.) diſtantia $GE$ puncti ſectionis $E$ quæſiti ab puncto biſectionis $G$ rectæ datæ $BF$, ſeu (§. 36.) ſemidifferentia laterum $BE$, $EF$ rectanguli conſtruendi, æquabitur lateri circa angulum rectum trianguli rectanguli, cujus hypotenuſa datæ $GF$, atque alterum latus circa angulum rectum datæ $M$ eſt æquale.

## §. 75.

Id quod efficietur (*Fig.* 15. 16.), rectæ datæ $BF$, bifariam in puncto $G$ ſectæ, in eodem puncto $G$ conſtituendo normalem $GS =$ datæ $M$: tum vel

1°. (*Fig.* 15.) perpendiculum indefinitum $SO$, rectæ $GS$ in puncto $S$ ductum, ſeu per punctum $S$ actam rectæ $BF$ parallelam $PO$, circulo centro $G$, intervallo $GF$ deſcripto, in puncto $N$ ſecando; quo facto erit $GSN$ triangulum rectangulum, cujus hypotenuſa $GN = GF$, atque cathetus $GS = M$: denique ab recta $BF$ abſcindendo $GE = SN$ per rectam $NE$ ex puncto $N$ ad $BF$ demiſſam perpendicularem. (I, 34.)

2°. Vel (*Fig.* 16.) centro $S$, intervallo $SQ = GF$ deſcribendo circulum, qui datam $BF$ in puncto $E$ ſecet; quo immediate fit $GE$ cathetus trianguli $SGE$, cujus hypotenuſa $SE = GF$, atque alter cathetus $SG = M$.

Priore caſu (*Fig.* 15.), ob $GS = M < GF$ ſeu $GU$ (ſupp. & conſtr.), punctum $S$ cadit intra circulum centro $C$, intervallo $GF$, ſeu circa diametrum $BF$ deſcriptum; ideoque $PO$ rectæ $BF$ parallela circulum hunc in duobus punctis $N$, $P$ ad easdem rectæ $BF$ partes ſecat; ex quibus in hanc $BF$ demiſſa perpendicula, ſeu ductæ rectæ $GS$ parallelæ $NE$, $PR$ datam $BF$ in punctis $E$, $R$ ita ſecant, ut ſint rectangula $BEF = BRF = M^q$.

| | | |
|---|---|---|
| Nempe tam | $BEF + GE^q = GF^q$ | quam $BRF + GR^q = GB^q$ (II, 5.) |
| Unde porro, ob | $GF^q = GN^q = NE^q + GE^q$ | $GB^q = GP^q = PR^q + GR^q$ (conſtr. et I, 47.) |
| ſequitur | $BEF + GE^q = NE^q + GE^q$ | $BRF + GR^q = PR^q + GR^q$ |
| & hinc | $BEF = NE^q$ | $BRF = PR^q$. |



Cum

Cum itaque ſint $NE = PR = GS$ (I, 34.); $= M$; fiunt rectangula $BEF = BRF = M^q$.

Altero caſu (*Fig.* 16.), ob $SG = M < GF$ ſeu $SQ$ (ſupp. & conſtr.), punctum $G$ rectæ $BF$ jacet intra circulum centro $S$, intervallo $SQ$ deſcriptum; quem igitur in duobus punctis $E$, $R$ ſecat hæc recta $BF$; idque, ob $GE < SE$ ſeu $GF$, $GR < SR$ ſeu $GB$ (I, 19. & conſtr.) ſic, ut puncta $E$, $R$ inter puncta $G$ & $F$, $G$ & $B$ cadant. Atque ita rurſus

tam rectg. $BEF + GE^q = GF^q$ quam $BRF + GR^q = GB^q$ (II, 5.)

Quare cum ſint $GF^q = SE^q = SG^q + GE^q$ $GB^q = SR^q = SG^q + GR^q$ (conſt. et I, 47)

fiunt $BEF + GE^q = SG^q + GE^q$ $BRF + GR^q = SG^q + GR^q$

& rectangula $BEF = BRF = SG^q = M^q$.

Ceterum $GE = GR$ in triangulis rectangulis $GEN$, $GRP$ (*Fig.* 15.), $SGE$, $SGR$ (*Fig.* 16.), quorum hypotenuſæ & catheti alteri æquales ſunt; atque $GB = GF$ (conſtr.): quare etiam ſunt

tam $GB + GE = GF + GR$, quam $GF - GE = GB - GR$

h. e. $BE = FR$ $FE = BR$;

itaque rectangula $BEF$, $BRF$ ſitu tantum, non longitudine laterum diverſa.

Poſteriorem conſtructionem ſolvendo problemati æquipollenti: applicare datum quadratum ad rectam datam, deficiens quadrato; ſeu ad datam rectam lineam dato quadrato æquale rectangulum applicare, deficiens quadrato, adhibent HALLEY (loco §. 66. citato), ROB. SIMSON (p. 380. ſq)

Prior conſtructio (*Fig.* 15.) haud neceſſario requirit, ut normalis $= M$ rectæ $BF$ in puncto biſectionis $G$ conſtituatur; ideoque applicatu ſæpe commodior eſt altera quamvis concinniore, dum problema ſeorſim ſpectatur.

## §. 76.

Prior conſtructio, pariterque ſolutio problematis ipſius Prop. XIV. exhibent theorema: Quadratum perpendicularis, a quolibet circumferentiæ circuli puncto in diametrum ductæ, æquatur rectangulo ſub ſegmentis diametri, quæ ab ipſa perpendiculari fiunt. Quod HERIGONUS (p. 76.) Propoſitioni V. ſtatim ſubjungit; & deinde ad Propoſitiopositiones VI—X. ipsas, easdemve aliter enunciatas, alio modo demonstrandas adhibet.

## §. 77.

Cum (*Fig.* 17. 18.) ducta per verticem *I* trianguli *IBE*, *IKE* parallela lateri ipsius *BE*, *KE*; atque huic in altero extremo *E* erecta, & ad occursum parallelæ illius continuata normali *EL*, *EB*; tum vel perpendiculo *EL*, vel latere *KE* in puncto *D* bifariam secto; triangulum æquale sit parallelogrammo rectangulo *BCDE* (I, 41. sq.): quodsi hoc æquilaterum non est; construetur quadratum æquale triangulo proposito, vel (*Fig.* 17.) latus *BE* continuando, donec sit $EF = ED = \frac{1}{2} EL$; vel (*Fig.* 18.) perpendiculum *BE* producendo, donec sit $EF = ED = \frac{1}{2} KE$; & tum (*Fig.* 17. 18.) latus *EH* quadrati rectangulo *BEF* æqualis juxta §. 70. determinando. (Campanus p. 51. sq. Clavius p. 213.)

## §. 78.

Propositæ figuræ rectilineæ quadratum æquale etiam efficietur, vel

1°. triangulum rectilineo dato æquale construendo methodis variis, quibus id juxta I, 37. fieri potest; tum huic triangulo æquale quadratum describendo juxta §. 77.

2°. vel singulis triangulis, in quæ figura proposita per diagonales dividitur, æqualia quadrata juxta §. 77. determinando; tum per propositionem I, 47. iteratamque, si figura multilatera est, ejus applicationem, quadratum datis illis quadratis simul æquale construendo.

Posteriorem methodum solam tradit Campanus; qui ipsam Prop. XIV. enunciat (p. 51): Dato trigono æquum quadratum describere; tum (p. 52.) addit: "Et nota, quod per hoc inveniatur latus tetragonicum cujuslibet altera parte longioris, & simpliciter omnis „figuræ rectis lineis contentæ, quæcunque fuerit; quoniam omnem „figuram talem in triangulos resolvemus, & cujuslibet illorum triangulorum inveniemus tetragonicum latus secundum doctrinam istius, „& inveniemus per penultimam primi lineam unam, quæ possit in „omnia latera tetragonica inventa."

Cla-

Clavius (p. 212.) eandem ſolutionem Euclideæ adjungit tanquam faciliorem; "quia laborioſum ſit rectangulum dato rectilineo „multorum angulorum conſtruere æquale, quod ſæpius ſuper datam „rectam conſtituendum ſit ex I, 44. rectangulum æquale triangulo": pariterque Peletarius (p. 107.) tanquam "compendium inveniendi „lateris tetragonici ad eas figuras, quas vocant irregulares, æquan„das"; ſubjuncto monito: "in figuris regularibus, quæ in triangula „æqualia reſolvantur" (quod vero demum per IV, 13. ſq. intelligitur) „compendium promtius eſſe; expedite enim ad unum parallelogram„mum rectangulum reduci." Quam autem præterea (p. 108.) tradit, ab Euclidea ſolutione diverſa non eſt; nec niſi, quæ in I, 45. docentur, repetit.

Tacquet (Schol. Prop. XIV. p. 70.) præcipit: "Conſtructio „Euclidea requirit, ut per I, 45. rectilineum reducatur ad rectangu„lum. Quæ reductio cum ſatis operoſa ſit, fortaſſe expeditius pro„blema abſolvetur hunc in modum: Rectilineum datum reſolvatur in „tot quadrangula, quot poteſt; tum ſingulis quadrangulis fac (I, 45.) „rectangula æqualia: ſi tunc ſuperſit unum triangulum, illi quoque „fac (I, 42.) æquale rectangulum; ſingulis deinde rectangulis per „hanc II, 14. fac quadrata æqualia; ac demum his omnibus quadra„tis unum æquale (I, 47.) fiat."

## §. 79.

Austin (p. 39. ſq.) Propoſitionem XIV. nusquam in primis ſex Elementorum Libris citari; & planam eſſe per VI, 13. 17: præterea ab objecto Libri ſecundi ſecedere; & in expoſitione conſtructionis vitio ab Rob. Simson notato (§. 70.) laborare obſervat: ideoque interpolatam cenſet. Suſpectam quoque, pari jure ac X, 117$^{mam}$, (Savilii *Prælectiones in principium Elementorum Euclidis.* Oxon. 1621. p. 13.) reddere poſſet locus, quo ponitur, tum ad calcem Libri II; tum ſejunctim ab Prop. XI, cujus ad Prop. VI. ſimilis ratio eſt ac XIV$^{tæ}$ ad V$^{tam}$: niſi alia turbati propoſitionum ordinis exempla in Elementis exſtarent; v. gr. III, 25. 31. VI, 23. 25. 31. 32. Pariter rationes duæ poſteriores Austini contra plures Elementorum propoſitiones ſine dubio genuinas valituræ eſſent; ipſemetque priorem earum inſtantia trium ultimarum Libri I. propoſitionum infringit. Propoſitio

positio XIV. argumentum propositionibus I, 42. 44. 45. coeptum complere censeri potest; pariter ac propositiones II, 12. 13. id, quod in I, 47. sq. fuit inchoatum. Porro, quod ad alteras duas AUSTINI animadversiones attinet, problematis I, 44. ideoque etiam sequentis I, 45. (quæ, exclusa Elementis Propositione II, 14. nullibi in illis ante VI, 25. supponuntur) solutio non modo æque plana est per VI, 14. 12. ac problematis II, 14. per VI, 17. 13; sed magis etiam expedita ea, quæ in I, 44. traditur. Problema VI, 30. expresse solvitur; quamvis ejus effectio ex propositionibus II, 11. VI, 17. æque ultro consequatur, ac propositio II, 14. per eandem VI, 17. ad VI, 13. reducitur: quod & in primis quinque Libri XIII. propositionibus supponitur; ipsaque propositionis VI, 30. solutione altera, ac prioris demonstratione docetur. Propositionum X, 28. 29. 32. 33. constructiones, concinnitatis demonstrationum gratia, immediate per VI, 13. 12. in duabus prioribus, & per II, 14. I, 45. in posterioribus peragi jubentur. Ceterum problema II, 14. sub generaliori VI, 25. tanquam casus particularis comprehenditur; pariter atque ejus conversum §. 74. sq. sub problemate VI, 28. quod enunciata ejus ad calcem §. 75. & Lemma præmissum propositioni X, 18. indicant. Eodemque modo ad VI, 29. se habet problema §. 66. cujus casum specialem sistit II, 11; prouti etiam ex problematis VI, 30. solutione priori apparet.

§. 80.

CLAUD. RICHARDUS (*Euclidis Elementorum geometricorum Libri XIII.* — Antverp. 1645.) incongrue prorsus demonstrationes Propositionum XI. XIV. in apagogicas transformat.

## PROPOSITIO VII.

§. 81.

Ceteris ut in constructione Euclidea factis, super $EN = BC$ (I, 34.) describatur quadratum $ENLI$ (*Fig.* 19.)

Erunt $AB^q + BC^q = AE + EL = AF + FL + NH$.

Sed ob $AG = GE$ (I, 43.) & $CF = EL$; est $AF = FL$.

Ergo $AB^q + BC^q = 2 AF + NH = 2$ rectg. $ABC + AC^q$.

Sic,

Sic, monente PELETARIO, qui hanc constructionem Euclideæ subjungit (p. 97.), omnes apparent Propositionis particulæ. Eandem demonstrationem tradunt FOURNIER (*Euclidis Element. Libri* VI. Paris. 1654. p. 98. sq.), COETSIUS (*Euclidis Element. Libri* VI. Amstelod. 1705. p. 206. sq.), WHISTON (p. 53.).

## §. 82.

Cum sit $AB^q = AC^q + BC^q + 2$ rectg. sub $AC$ & $BC$ (II, 4.)
est $AB^q + BC^q = AC^q + 2BC^q + 2$ rectg. sub $AC$ & $BC$
Sed $BC^q +$ rectg. sub $AC$ & $BC =$ rectg. sub $AB$ & $BC$ (II, 3.)
Igitur $AB^q + BC^q = AC^q + 2$ rectg. $ABC$.

Ita Propositionem VII. ex Propositionibus IV. III. deducunt SCHEUBELIUS (p. 50.), CLAVIUS (p. 159. sq.), TACQUET (p. 61. sq.), BARROW (p. 43.), VIVIANI (*De locis solidis* Lib. II. Prop. 65. p. 29. sq.), qui eam sic enunciat: Si datæ rectæ ($AC$) addita fuerit in directum quæcunque ($CB$); quadrata simul coadditarum ($AB$, $CB$) æquantur quadrato datæ ($AC$), una cum duplo rectangulo ex ipsis coadditis ($AB$, $CB$).

## §. 83.

ANGELUS DE MARCHETTIS (p. 89. sq.) Propositionis VII. ex theoremate §. 21. sq. inferendæ gratia rectam $AB$ utcunque in $C$ sectam (*Fig.* 20.) utrinque continuat, donec sint hinc $AE = AC$, inde $BD = BC$; ideoque $ED = 2AB$, $EB = AB + AC$, $BD = BC = AB - AC$.
Ita $AB^q - AC^q =$ rectg. $EBD$ (§. 21.); $AB^q = AC^q +$ rectg. $EBD$;
& $AB^q + BC^q = AC^q +$ rectg. $EBD + BD^q$.
Atqui rectg. $EBD + BD^q =$ rectg. $EDB$ (II, 3.) $= 2$ rectg. $ABD$ ob $ED = 2AB$
$= 2$ rectg. $ABC$ ob $BD = BC$
Ergo $AB^q + BC^q = AC^q + 2$ rectg. $ABC$.

## §. 84.

Cum tota $AB$ ejusque segmentum $BC$ possint duas quascunque rectas inæquales repræsentare; sequitur ex Prop. VII: summam quadratorum duarum inæqualium rectarum majorem esse duplo rectangulo sub ipsis; illam quippe hanc excedere quadrato differentiæ duarum rectarum.

Summam

Summam vero quadratorum duarum æqualium rectarum duplam esse parallelogrammi rectanguli sub ipsis, h. e. alterutrius quadrati, sponte, vel per II, 3. liquet.

§. 85.

Pariter recta, ut $AD$, in partes inæquales, $AB > BD$, divisa, & $BC = BD$ ex $AB$ abscissa; per Prop. VII. efficitur, quod in Lemmate propositioni X, 61. præmisso ex II, 5. 9. deducitur: partium illarum quadrata simul majora esse rectangulo, quod bis sub iisdem partibus continetur.

§. 86.

Porro vi Propositionis VII. est (*Fig.* 19.)

$AC^q = AB^q + BC^q - 2\text{rectg}\,ABC$; nempe $NH = AE + EL - \left\{\begin{matrix}(AF + FL) \\ 2AF\end{matrix}\right.$

Atqui $AC = AB - BC$. Ergo $(AB - BC)^q = AB^q + BC^q - 2\text{rectg.sub}AB \,\&\, BC$: h. e. quadratum differentiæ duarum inæqualium rectarum æquale est summæ quadratorum ipsarum, minus duplo rectangulo sub ipsis. (BARROW p. 43. WHISTON p. 53. BÆRMANNUS p. 48.)

§. 87.

Producta $AB$, donec sit $BK = AB$: habetur recta $CK$ in duas partes inæquales secta in puncto $B$, quarum differentia $BK - BC = AB - BC = AC$; & propositum §. 86. $AC^q = AB^q + BC^q - 2\text{rectg.sub}AB \,\&\, BC$ transformatur in hoc $(BK - BC)^q = BK^q + BC^q - 2\text{rectg.sub}BK \,\&\, BC$ h. e. si recta linea in partes inæquales utcunque secatur; quadratum differentiæ partium æquale est quadratis partium, minus duplo sub partibus rectangulo. (GHETALDUS p. 3. sq.)

§. 88.

Seu est $BK^q + BC^q = 2\text{rectg.sub}BK \,\&\, BC + (BK - BC)^q$; conformiter ipsi Propositioni VII. & §. 81: h. e. si recta linea in partes inæquales utcunque secatur; quadrata partium simul æqualia sunt quadrato differentiæ partium una cum duplo sub partibus rectangulo. (GHETALDUS l. c. HERIGONUS p. 81. sq.) COMMANDINUS (fol. 32.), Clavius (p. 182.) idem non ut conſectarium Propoſitionis VII. ſed ut ejus appendicem peculiari conſtructione demonſtrant.

§. 89.

Commandinus (fol. 29. b.), Clavius (p. 168. ſq.) Propoſitioni I. præter theorema §. 2. recenſitum, hoc alterum ſubjungunt Propoſitioni VII. analogum: Si fuerint duæ rectæ lineæ (*AB*, *BC* *Fig.* 21.), quæ utcunque (in punctis *D*, *E*) ſecentur; rectangulum (*BF*) totis contentum, una cum eo (*EG*), quod continetur duabus partibus ipſarum, æquale eſt rectangulis (*EF*, *DC*), quæ continentur totis & dictis partibus, una cum eo (*AH*), quod reliquis partibus continetur.

Quod, uti Propoſitio VII. §. 81, facile liquet; rectangulo *BM* ad rectam *BD* applicato, cujus alterum latus $BL = EC$. Tum ſcilicet

$$BF + \begin{Bmatrix} EG \\ BM \end{Bmatrix} = EF + \begin{Bmatrix} EM \\ DC \end{Bmatrix} + AH$$

h.e. rectg. $ABC$ + rectg. ſub $BD$ & $EC$ = rectg. ſub $AB$ & $EC$ + rectg. ſub $BC$ & $DB$ + rectg. ſub $AD$ & $BE$

§. 90.

Propoſitione VII. in ſubſidium adhibita ſolutio problematis §. 69. ſic inſtrui poteſt: (*Fig.* 13.)

$$\begin{array}{llll}
\text{cum ſit rectg.}\,ABH = BH^q + AHB\ (\text{II}, 3.) & & = BH^q + 2AHS, & \text{bifariam in } S \text{ diviſa } BC \\
 & & = BH^q + 2AHR, & \text{facta } HR = HS \\
\& \quad \underline{AR^q + 2AHR} & & \underline{= AH^q + HR^q} & \underline{(\text{II}, 7.)} \\
\text{eſt} \quad \text{rectg.}\,ABH + AR^q & & = AH^q + BH^q + HR^q & \\
\text{Ut itaque rectg.}\,ABH & \text{ſit} & = AH^q & \\
\text{debet fieri} \quad AR^q & & = BH^q + HR^q &
\end{array}$$

Unde eadem quæ §. 69. ſequitur conſtructio.

## Propositio VIII.

§. 91.

Propoſitionis hujus demonſtratio ſic quoque inſtrui poteſt:

$$\begin{array}{lll}
AF = AQ + FQ + CP & + HO & (\textit{Fig. vers. Lorenz.}) \\
= 2AQ & + 4CK + HO & \text{ob } FQ = AP\ (\text{I}, 43.)\ \&\ CP = 4CK\ (\S.\ 13.) \\
= 4AG & + 4CK + HO & \text{ob } CG = GQ\ (\S.\ 13.);\ \text{ideoque } AG = MQ,\ \&\ AQ = 2AG \\
= 4AK & + HO. &
\end{array}$$

§. 92.

§. 92.

Vel $AF = AK + MR + FK + BN + LQ + HO$

Atqui $MR = AK$ ob $RK = BK$ (§. 13.)

$FK = AK$ (I, 43.)

$BN + LQ = GR + MQ$ (§. 13. & I, 43.) $= MR = AK$

Quare $AF = 4AK + HO$. (CLAUD. RICHARDUS p. 60.)

§. 93.

Vel $AF = ADQO + DFHQ + HO$

Sed ob triangula $EDF = EDA$, $EQH = EQO$ (I, 34.) est $DFHQ = ADQO$

Igitur $AF = 2ADQO + HO$

Porro ob $BN = GR$ (§. 13.) est triangulum $DBK = KRQ$ (I, 34.); & hinc trapezium $ADQO$ = rectangulo $AR$: hoc autem $= 2AK$, ob $BK = KR$ (§. 13.)

Proinde $AF = 4AK + HO$ (PELETARIUS p. 98.)

§. 94.

Vel, omissis $MN$, $LR$ rectis (*Fig.* 22.)

$AF = AR + BP + FQ + HO$.

Atqui $BP = CR$ (I, 36.) & $FQ = AQ$ (I, 43.)

Ergo $BP + FQ = AR$; & $AF = 2AR + HO$.

Sed rectg. $AR$ sub $AB$ & $BR$ = rectg. sub $AB$ & $CD$, ob $BR = DP$ (I, 34.) $= CD$ (II, 4. Cor.)

= 2rectg. sub $AB$ & $BC$ (§. 3.)

Itaque $AF$ = 4rectg. sub $AB$ & $BC + HO$; h. e. $AD^q = 4ABC + AC^q$.

§. 95.

CLAVIUS (p. 183. sq.), TACQUET (p. 62. sq.), BARROW (p. 44.) Propositionem VIII. ex Propositionibus IV. VII. ita deducunt:

$AD^q = AB^q + BD^q +$ 2rectg. sub $AB$ & $BD$ (II, 4.)

$= AB^q + BC^q +$ 2rectg. sub $AB$ & $BC$ ob $BD = BC$ (constr.)

Sed $AB^q + BC^q$ = 2rectg. sub $AB$ & $BC + AC^q$ (II, 7.)

Ergo $AD^q$ = 4rectg. sub $AB$ & $BC + AC^q$.

## §. 96.

Eadem ex Propositionibus IV. III, in subsidium sumtis Propositionis I. Corollariis §. 3, 6, simili ratione, qua §. 91. sic colligitur:

$AD^q = AC^q + CD^q + 2$ rectg. sub $AC$ & $CD$ (II, 4.)

$= AC^q + 4BC^q + 4$ rectg. sub $AC$ & $BC$ (§. 3. 6.) ob $CD = 2BC$ (constr.)

Sed $BC^q +$ rectg. sub $AC$ & $BC =$ rectg. sub $AB$ & $BC$ (II, 3.)

Igitur $AD^q = AC^q + 4$ rectg. sub $AB$ & $BC$.

## §. 97.

Modus, quo ANGELUS DE MARCHETTIS (p. 91. sq.) Propositionem VIII. ex theoremate §. 21. sq. infert, ope Corollarii Prop. I. §. 4. in compendium sic redigitur. Recta $AB$ (*Fig.* 20.) utcunque in puncto $C$ secta rursus, uti §. 83, utrinque continuetur, donec sit $AE = AC$, $BD = BC$; proinde $ED = 2AB = AD + AC$, & $DC = 2BC = AD - AC$.

Ita $AD^q - AC^q =$ rectg. $EDC$ (§. 21. sq.); $AD^q = AC^q +$ rectg. $EDC$

Atqui rectg. $EDC = 4$ rectg. $ABC$ (§. 4.) ob $ED = 2AB$, $DC = 2BC$.

Ergo $AD^q = AC^q + 4$ rectg. $ABC$.

## § 98.

CLAVIUS (p. 184.), PELETARIUS (p. 98.) notant, ob $BD = BC$ (constr.) sic etiam posse Propositionem VIII. efferri: Si recta secetur utcunque, eique in directum adjiciatur alia recta uni segmentorum æqualis; quadratum totius lineæ compositæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub data & adjecta, una cum quadrato alterius segmenti. Atque hoc modo Propositionem VIII. enunciat CAMPANUS (p. 45.)

## §. 99.

Cum in puncto $B$ bifariam secetur recta $CD$, cui in directum adjicitur $CA$; observante CLAVIO (p. 184.), consequitur Propositionis VIII. enunciatum: Si recta ($CD$) secetur bifariam (in $B$), & illi recta quæcunque ($CA$) in directum adjiciatur; quadratum totius ($AD$) compositæ ex data ($CD$) & adjecta ($CA$) æquale est quadruplo rectangulo sub dimidia datæ ($CD$) & sub composita ($AB$) ex eadem dimidia

dia ($BC$) & adjecta ($CA$), una cum quadrato adjectæ. Et ſic Propoſitionem VIII. enunciat TACQUET (p. 68.).

§. 100.

Seu recta ($CD$) bifariam (in $B$) ſecta, & in ea producta ſumto quocunque puncto ($A$); pariter atque in hypotheſi Propoſitionis VI: differentia quadratorum rectarum ($AD$, $AC$) puncto arbitrario ($A$) & extremis ($D$, $C$) rectæ propoſitæ ($CD$) terminatarum æquatur quadruplo rectangulo ſub rectis ($BA$ & $BC$ ſeu $BD$), quæ hinc puncto biſectionis ($B$), inde puncto arbitrario ($A$) & alteri rectæ propoſitæ ($CD$) extremo ($C$ vel $D$) interjacent.

Nempe $AF - HO = 4AK$ (*Fig. vers. Lorenz.*)
h. e. $AD^q - AC^q = 4$ rectg. ſub $AB$ & $BC$, ſeu ſub $AB$ & $BD$.

§. 101.

Quodſi recta $AD$ tanquam in puncto $B$ utcunque ſecta conſideratur; ob $BC = BD$, ſiſtit $AC = AB - BD$ differentiam partium $AB$, $BD$; & emergit propoſitio: Si recta in partes inæquales utcunque ſecatur; quadratum totius, minus quadrato differentiæ partium, æquale eſt quadruplo ſub partibus rectangulo (§. 100.); ſeu (II, 8.) quadruplum rectangulum ſub partibus, cum quadrato differentiæ partium, æquale eſt totius lineæ quadrato (GHETALDUS p. 4. ſq. HERIGONUS p. 84. ſq.); quod & ſponte ex propoſitis §. 88. ac II, 4. conſequitur.

§. 102.

Porro $AD$, $AC$ ſunt rectæ inæquales, quarum differentia eſt $CD$, ſemidifferentia $BC$ ſeu $BD$.

Cum igitur (§. 30.) minor ($AC$) duarum inæqualium rectarum ſit ipſarum ſemiſummæ imminutæ ſemidifferentia ($BC$) æqualis; major autem ($AD$) æqualis ſit ſemiſummæ auctæ ſemidifferentia ($BD$): oportet, ſit $AB$ ſemiſumma duarum $AD$, $AC$. Idem immediate patet, facta $DI = AC$ (*Fig.* 23.), ut ſit $AI = AD + AC$; nam ob $BC = BD$, & $CA = DI$, eſt $AB = BI = \frac{1}{2}AI$.

Quibus

Quibus notatis, propositio $AD^q - AC^q = 4ABC$ (§. 100.) hanc exhibet: differentia quadratorum duarum inæqualium rectarum æqualis est rectangulo sub ipsarum semisumma ac semidifferentia quater sumto.

Quæ etiam ex propositione: quod duorum quadratorum inæqualium differentia æqualis sit rectangulo sub summa & differentia laterum ipsorum (§. 21. sq. 26. 45.), ultro per §. 4. consequitur.

## §. 103.

Aliter $AD = AB + \begin{cases} BD \\ BC \end{cases}$ sistit summam, atque $AC = AB - BC$ differentiam duarum inæqualium rectarum $AB$, $BC$.

Igitur (§. 100.) excessus quadrati summæ ($AD$) duarum rectarum inæqualium ($AB$, $BC$) super quadratum differentiæ ipsarum ($AC$) æqualis est quadruplo rectangulo sub rectis ($AB$, $BC$).

Quod consentire cum §. 32. 55. facile ex §. 13. infertur.

## §. 104.

Idem sic etiam ostenditur: Super $AD$ (*Fig.* 24.) constructo quadrato $ADFE$, ab lateribus ejus $AD$, $AE$, $DF$ abscindantur $AZ$, $AM$, $FH$, singulæ $= BD$; & per puncta $Z$, $B$ agantur rectis $AE$, $DF$ parallelæ $YV$, $BX$; quæ lateri $EF$ & parallelis rectæ $AD$ per puncta $M$, $H$ ductis in punctis $V$, $Y$, $W$, $K$, $X$ occurrant.

Ita $AF - KW = AK + MV + BH + FW$.

Quadrilatera $KW$, $AK$, $MV$, $BH$, $FW$ sunt parallelogramma rectangula (constr. & I, 29.)

Et $AK$ quidem est sub $AB$ & $BD$, ob $AM = BD$:

pariterque $MV$; ob $EM = AE - AM = AD - BD = AB$, & $EV = AZ$ (I, 34.) $= BD$:

item $BH$; ob $DH = DF - FH = AD - BD = AB$:

ac $FW$; ob $FV = FE - EV = AD - AZ = AD - BD = AB$, & $FH = BD$.

KW

$KW$ autem est quadratum, cujus latus $= BZ = AB\text{-}AZ = AB\text{-}BD$; cum sint (I, 34.) $KY = BZ$, & $KX = BX\text{-}BK = DH\text{-}AM = AB\text{-}AZ = BZ$.

Igitur $AD^q - BZ^q$ h. e. $(AB + BD)^q - (AB - BD)^q = 4$ rectg. sub $AB$ & $BD$.

## §. 105.

Eandem constructionem ad demonstrandam Prop. VIII. adhibet Coetsius (p. 208. sq.) Nempe per eam est

$$AF = AK + MV + BH + FW + KW = 4AK + KW$$

h. e. $AD^q$ seu $(AB+BD)^q = 4$ rectg. $ABD + \begin{cases}(AB-BD)^q \\ AC^q\end{cases}$ (*Fig. vers. Lorenz.*)

## §. 106.

Recta $AD$ continuata, donec sit $DI = AC$ (*Fig.* 23.); ob $AB = BI = \frac{1}{2}AI$ (§. 102.) Propositio VIII. $AD^q = AC^q + 4$ rectg. sub $AB$ & $BC$ transformatur in hanc: $AD^q = DI^q + 4$ rectg. sub $\begin{Bmatrix}AB \\ BI\end{Bmatrix}$ & $BD$:

h. e. recta $AI$ bifariam secta in puncto $B$, & in inæqualia in puncto $D$; quadratum segmenti majoris $AD$ æquale est quadrato segmenti minoris $DI$, cum quadruplo rectangulo sub dimidia $AB$ seu $BI$ & sub recta $BD$ inter puncta sectionum.

## §. 107.

Quadratorum igitur, quæ ab segmentis inæqualibus rectæ bifariam & utcunque in inæqualia sectæ fiunt, differentia quadrupla est rectanguli sub dimidia & sub recta inter puncta sectionum, seu (§. 30.) sub semisumma ac semidifferentia eorundem segmentorum.

Scilicet $AD^q - DI^q = 4$ rectg. sub $\begin{Bmatrix}AB \\ BI\end{Bmatrix}$ & $BD$.

## §. 108.

Pariterque in hypothesi Propositionis V. obtinet, quod §. 100. fuit sub conditione Prop. VI. ostensum: nempe recta ($AI$) bifariam

(in

(in $B$) secta, atque in ea sumto alio quocunque ~~quocunque~~ puncto ($D$); differentia quadratorum rectarum ($DA$, $DI$) puncto arbitrario ($D$) & extremis ($A$, $I$) rectæ propositæ ($AI$) terminatarum æquatur quadruplo rectangulo sub rectis ($BA$ seu $BI$ & $BD$), quæ hinc puncto bisectionis ($B$), inde puncto arbitrario ($D$) & alteri rectæ datæ ($AI$) extremo ($A$ vel $I$) interjacent.

THESES.

# THESES.

I. Rationes, quas *Euclidis Elementorum novo ordine ac methodo fere demonſtratorum* (Lond. 1678.) auctor ad calcem *Argumenti* illis præmiſſi affert, problemata ab theorematibus ſalva methodo Euclidea ſejungi haud perſuadent.

II. Euclidem tribus primis Libri I. Propoſitionibus triangulorum conſtitutionem & æqualium rectarum ortus poſſibilitatemque, prius, quam de illis præciperet, tradere voluiſſe, ſpecioſe magis quam ſolide (monente SAVILIO p. 215. ſq.) obſervat PROCLUS (*In primum Elementor. Librum Commentariorum Libri* IV. Patavii 1560. p. 132. ſq.)

III. Methodus, qua cel. MICHELSEN (*Anleitung zur Selbſterlernung der Geometrie.* Berlin 1790. S. 20. ff. 32. ff. 74. ff. 91. ff. 114. ff. 155. ff. 180. ff. *Euclides Elemente.* Berlin 1791. S. 17. ff. 84. f. 87. &c.) propoſitiones Euclideas deducere jubet, utiliter quidem interdum applicabitur; ſed declarationi genuinæ ſyntheſis didacticæ, quam proprie Elementa Euclidea ſiſtunt, & analyſis demonſtrationum ſolutionumque expoſitioni, ſerius tantum ac parcius ab MICHELSENO adjunctæ (*Anleitung* S. 134 f. 169. 174. ff. *Elemente* S. 95. f. 99. f. 108.), debet, ne falſis & nimis anguſtis conceptibus tirones imbuantur, ſubordinari. Conf. *Lamberts Neues Organon.* I B. S. 217. f. 300. f. 434. f. *Lamberts Logiſche und philoſoph. Abhandlungen.* I B. S. 244. 252. f. 421. f. II B. S. 94.

IV. SCHEUBELII inſtitutum demonſtrationes Elementorum absque literis ad figuras adſcriptis exponendi iniquius dijudicat SAVILIUS p. 189. ſq. Vid. SCHEUBELII *Epiſtola nuncupatoria*, editis ab ipſo Elementorum Libris præmiſſa, p. 3. ſqq. Ill. KÆSTNERI *Geſchichte der Mathematik.* I B. S. 266. ff.

V. Euclides ad præparandam Propositionis I, 5. demonstrationem solis delineationibus antea postulatis vel declaratis, atque ad eandem efficiendam nonnisi Propositione I, 4. & Axiomate 3. utitur; nec alias hypotheses subsidiarias immiscet: quod secus fit in variis eam planius instruendi modis, quos tradunt PROCLUS juxta PAPPUM (p. 142. sq.), CLAVIUS (p. 45.), BORELLIUS (*Euclides restitutus*. Pisis 1658. p. 24. sq.), ANG. DE MARCHETTIS (P. I. p. 15. sqq.)

VI. ROBERTI SIMSON (p. 343.) judicium de PROCLI (p. 141. 147. 149. sq.) sententia, statuentis: auctorem Elementorum, etsi Propositionis I, 5. parte posteriori nuspiam utatur, eo fine illam commemorasse, ut solutionem prævie suggereret objectionis seu instantiæ, qua Propositio I, 7. impeti posset; quæ TAYLOR (*The philosophical and mathematical Commentaries of Proclus on the first Book of Euclid's Elements*. Lond. 1789. Vol. II. p. 51. sq.) regerit, haud evertunt.

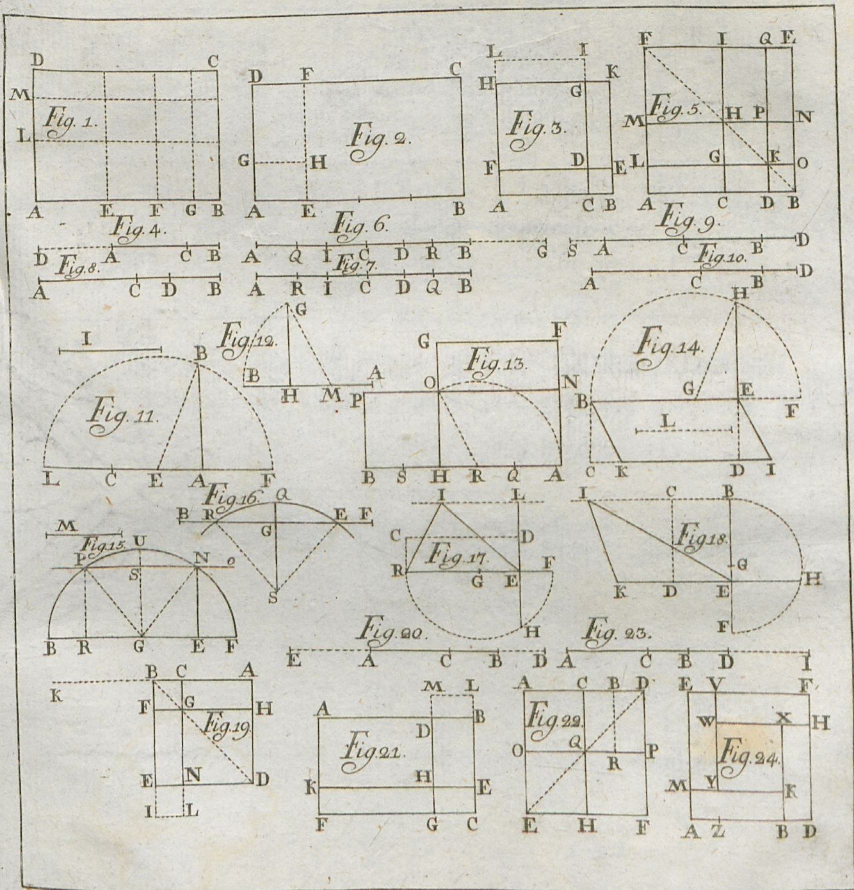
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 4.
Fig. 6.
Fig. 9.
Fig. 8.
Fig. 7.
Fig. 10.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 11.
Fig. 16.
Fig. 15.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 20.
Fig. 23.
Fig. 19.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 24.

W18

# SCHOLIA
# IN LIBRUM SECUNDUM ELEMENTORUM EUCLIDIS

1797, 2.

QUÆ

PRÆSIDE

CHRISTOPHORO FRIDERICO PFLEIDERER

13

UNIVERSITATIS ET COLLEGII ILLUSTRIS PROFESSORE PHYSICES ET MATHESEOS PUBL. ORD.

PRO CONSEQUENDO GRADU MAGISTERII

*D. SEPT. MDCCXCVII.*

PUBLICE DEFENDENT

IOHANNES LUDOVICUS GOLL, *Trossingensis*,
CAROLUS CHRISTIANUS GAUPP, *Herimontanus*,
IOHANNES IACOBUS EYTEL, *Bulacensis*,
IOH. CHRISTOPH. FRID. SIGWART, *Tubingensis*,
CAROLUS EBERH. AUG. LUDWIG, *Uhlbacensis*,

CANDIDATI MAGISTERII PHILOSOPHICI IN ILLUSTRI STIPENDIO THEOLOGICO.

---

*TUBINGÆ*
LITERIS SCHRAMMIANIS.