VERMISCHTE

AUFSÄTZE

FÜR LIEBHABER

[illegible]

G. U. A. VIETH,

[illegible] LEHRER DER MATHEMATIK IN DESSAU.

ERSTES BÄNDCHEN.

BERLIN, 179[illegible].

VERMISCHTE

AUFSÄTZE

FÜR LIEBHABER

MATHEMATISCHER WISSENSCHAFTEN,

VON

G. U. A. VIETH,

ÖFFENTLICHEM LEHRER DER MATHEMATIK ZU DESSAU.

ERSTES BÄNDCHEN.

BERLIN, 1792.

IN DER FRANKESCHEN BUCHHANDLUNG.

ZWEYEN

MIR VEREHRUNGSWÜRDIGEN MÄNNERN,

MEINEM LEHRER

ABRAHAM GOTTHELF KÄSTNER

KÖNIGL. GROSSBR. HOFRATHE, PROF. DER MATH. U. S. W.

UND

MEINEM VATER

JULIUS EBERHARD VIETH

FÜRSTL. ANH. ZERBST. COMMISSIONSRATHE UND DEICHINSPECTOR ZU MARIENHAUSEN IN DER HERRSCHAFT JEVER.

AUS

HOCHACHTUNG UND DANKBARKEIT

ZUGEEIGNET.

Diese Aufsätze waren zu verschiednen Zeiten niedergeschrieben, und theils zu meiner eignen Unterhaltung, theils zur Belehrung meiner Schüler, theils für freundschaftliche Zusammenkünfte bestimmt. Ihr erster Zweck wurde also unmittelbar erreicht.

Sollten auch wohl meine Beurtheiler mir die etwas kränkende Bemerkung machen, welche man oft in Recensionen findet: dafs es dabey hätte fein Bewenden haben können?

Dieser Gedanke hat mich lange abgehalten, die Bekanntmachung derselben zu wagen.

Nach Verlauf eines beträchtlichen Zeitraumes scheinen sie mir doch nicht so ganz unnütz, dafs ich mir nicht den unschuldigen Genuſs erlauben könnte, sie Anfängern und Liebhabern einer Wissenschaft, welche ich selbst so sehr liebe, mitzutheilen. Freylich ist die Schätzung eigner Arbeiten selten unparteyisch. Ich wünschte, daſs competente und billige Männer ihnen einigen Beyfall gäben.

Ich würde die Bitte hinzufügen, dem Tadel, welcher diese Aufsätze treffen kann, nicht jene unangenehme Einkleidung zu geben, die den Verfasser beleidigt, ohne dem Leser zu nützen, — wenn ich nicht zu meinem Vergnügen bemerkt hätte, daſs in Recensionen mathematischer Schriften dieser Ton weniger herrscht, als in manchen andern.

Dessau d. 15 April 1792.

I.

Versuch

einer neuen Erklärung

des optischen Phänomens,

da aus

einem Lichte Strahlen auszufahren scheinen.

Nebst einem Anhange

von den sogenannten Luftspiegeln.

Bey den Bemühungen, welche die Naturforscher schon in den früheren Zeiten angewendet haben, optische Erscheinungen zu erklären; bey der sorgfältigen, glücklichen Methode, womit jetzt die verschiedenen Felder der Physik bearbeitet werden, welche unserm Zeitalter so entschiedene Vorzüge über seine Vorgänger gibt, und wodurch so manche schwierige Probleme, die den nachdenkenden Beobachtern von der Natur vorgelegt wurden, Theils aufgelöset, Theils der Auflösung näher gebracht sind, konnte die ganz gemeine Erscheinung, welche der Gegenstand der folgenden Untersuchung ist, in den Schriften der Physiker nicht übergangen werden. Verschiedne Männer, deren Nahmen man nicht anders als mit Verehrung nennen kann, haben Erklärungen davon gegeben, oder zu geben versucht.

Unter diesen habe ich nun zwar keine auffinden können, die mir völlig befriedigend geschienen hätte. Das beweiset indessen, wie ich gern zugebe, ganz und gar nicht, daſs nirgends eine richtige Erklärung vorhanden sey; denn wahrscheinlich werde ich sie nicht alle gelesen haben, und unter denen, die mir bekannt sind, könnte auch eine oder die andere seyn, die manchem Leser zulänglich scheint, wenn sie mich gleich nicht befriedigt. Bey Naturerscheinungen, wo es auf Untersuchung der Ursachen ankommt, liegt die Wahrheit selten so rein, wie in der Geometrie, zu Tage, daſs nicht die Verschiedenheit der Vorstellungsarten bey verschiedenen Subjecten, einigen merklichen Einfluſs auf Beyfall und Nichtbeyfall haben könnte.

In dieser Ungewiſsheit dürfte es wohl am rathsamsten seyn, ehe ich die Erörterung einer alltäglichen Sache anfange, mir durch eine eben so alltägliche Cautel den Rücken frey zu machen, indem ich meine Leser vorläufig um Verzeihung bitte, wenn ich hier etwas vorbringen sollte, was sie schon anderswo, und vielleicht befriedigender und belehrender gelesen haben. Es würde ja überdieſs wohl nicht der einzige Fall seyn, wo eine und eben dieselbe Sache, zwey-, drey- und mehrere Mahl gedruckt wäre. Wer das nicht bey hundert andern, vielleicht noch etwas unwichtigern Dingen, als Erklärungen von Naturerscheinungen sind, bis zum Eckel erfahren hätte, der müſste entweder nicht lesen gelernt haben, oder ganz besonders glücklich in der Wahl seiner Lectüre gewesen seyn.

Unter denen, welche für wissenschaftliche Untersuchungen Sinn haben, müssen ferner nach aller Wahrscheinlichkeit, doch wohl auch solche seyn, welche sich in Ansehung des behandelten Gegenstandes, ungefähr in einer ähnlichen Lage befinden, wie der Verfasser, v o r seiner Untersuchung; zumahl jetzt, da die Anzahl der wissenschaftlichen Dilettanten ziemlich beträchtlich ist. Für diese könnte denn doch das Gelesene immer interessant und nützlich seyn.

Dafs die folgenden Bemerkungen stückweise schon eher niedergeschrieben waren, als ich mich mit der Geschichte der Meinungen über das behandelte Phänomen bekannt machte, kann mir hoffentlich nicht zum Vorwurf gereichen, weil ich vielleicht um desto unbefangener mit meinen eigenen Augen gesehen, und hinterher wiederholt und geprüft habe.

Wenn endlich dieser Aufsatz etwa nicht in bester Form, als eine vollkommene Erklärung sollte bestehen können, so will ich hiemit noch — *tamquam clausulam quasi codicillarem* — hinzugefügt haben, dafs man ihn wenigstens für einen gut gemeinten Versuch gelten lasse.

I.

Beschreibung des Phänomens.

Die Erscheinung, von welcher hier die Rede ist, muſs ein jeder des Abends bey Lichte oft genug erfahren haben, nehmlich daſs, wenn man mit halb geschlossenen Augenliedern in das Licht sieht, oben und unten aus der Flamme ein Strahl oder Lichtschweif schräg nach uns her auszufahren scheint.

In der ersten Figur habe ich die Erscheinung, so wie sie mir vorkommt, wenn ich das eine Auge ganz verschlieſse, und mit dem andern auf die beschriebene Art in das Licht sehe, abgebildet. Die Entfernung eines Auges vom Lichte habe ich dabey, etwa zu sechs bis acht Fuſs angenommen. Man muſs sich bey der Zeichnung vorstellen, daſs die Strahlen von der Flamme *A*, welche in der Ebene des Papiers liege, angerechnet, aus dieser Ebene herausgehen, und also *F A G* ein Winkel ist.

Meine Augen, welche beyde ziemlich von gleicher Güte sind, sehen nicht gut in die Ferne, aber desto besser in die Nähe, ohne jedoch eigentlich ganz kurzsichtig zu seyn. Die Traubenhaut zieht sich in denselben bey wenigem Lichte stark zusammen, so dafs sie nur einen schmalen Ring um den Stern bildet. Ich kann daher bey ziemlich schwacher Helle, nahe Gegenstände mit hinlänglicher Deutlichkeit unterscheiden, — eine Fähigkeit, die ich mir vermuthlich ehemals, durch Lesen in der Dämmerung, zu meinem Schaden erworben habe. Dieses und die erste Figur dürften vielleicht aus dem Grunde nicht ganz überflüssig seyn, weil bey manchen andern Personen, eine Verschiedenheit in der Beschaffenheit, Farbe der Augen (die meinigen sind dunkelblau) wohl irgend eine Abänderung in dem Phänomen hervorbringen könnte, z. B. in der scheinbaren Länge, Breite, Farbe der Strahlen.

Ich will hier zuvörderst Einiges beybringen, was ich bey genaueren und verschiedentlich abgeänderten Beobachtungen über diese Strahlen zu bemerken gefunden habe. Ich befürchte, — das kann ich nicht läugnen, — manches darunter werde minutieus scheinen. Weglassen wollte ich es aber deſswegen nicht, weil ein etwas umständliches Detail in der Erzählung von dergleichen Beobachtungen, wohl mit am ersten Entschuldigung verdient. Wenn gleich jedermann sie eben so gut selbst anstellen kann, so könnte er doch vielleicht auf diese oder jene nicht gleich von selbst fallen, und zuweilen geben ja anscheinende Kleinigkeiten Veranlassungen zu angenehmen Nachforschungen. So viel ich erfragen konnte, trafen die Bemerkungen Anderer gröſsten Theils mit den meinigen überein; freylich hat es zuweilen eigene Schwierigkeiten, von den Gesichts-Empfindungen Anderer, vorzüglich, wenn diese nicht im Zeichnen einiger Maſsen geübt sind, verständliche Nachrichten zu bekommen. Meine Erfahrungen sind folgende:

1.

Man sieht diese Strahlen nur dann, wenn der Stern des Auges zum Theil von den Augenliedern verdeckt und beschattet wird.

Mit ganz geöffneten Augenliedern gerade gegen das Licht gesehen, so daſs die ganze Hornhaut beschienen wird, zeigen sich dieselben niemahls.

2.

Bedeckt man bloſs mit dem obern Augenliede den obern Theil des Sterns; so sieht man nur den Strahl *A G*, (1. Fig.) allein, der nach der Seite des untern Augenliedes geht. Ich will ihn der Kürze wegen, den untern Strahl nennen, so wie den entgegengesetzten den obern, obgleich in der Folge gezeigt wird, daſs sie nicht immer in der auf den Horizont vertikalen Ebne erscheinen, für welche die Benennung im strengsten Verstande passend wäre.

Die Bedeckung des obern Theils des Sterns durch das obere Augenlied, kann entweder durch Blinzeln geschehen, oder durch einen Druck des Fingers, oder auch bloſs durch Stellung des Kopfes, indem man das Licht höher als die Augen setzt, und ohne den Kopf zurückzubeugen, von unten hinauf sieht, oder auch, welches in dieser Absicht dasselbe ist, wenn man auf ein gerade vorstehendes Licht mit, auf die Brust gesenktem Kopfe sieht.

3.

Wenn hingegen bloſs der untere Theil des Sterns von dem untern Augenliede verdeckt wird; so zeigt sich bloſs der obere Strahl *A F* (1. Fig.)

Man kann diefs ebenfalls durch Blinzeln, durch Drücken mit dem Finger, oder durch Zurückbeugung des Kopfes erhalten.

4.

Werden endlich beyde Segmente des Sterns, sowohl das obere, als das untere, dem Lichte durch beyde Augenlieder verdeckt, so dafs nur in der Mitte ein schmaler Streifen Licht empfangen kann; so sieht man beyde Strahlen, wie in der 1. Figur.

5.

Beym Blinzeln sieht man gewöhnlich beyde, weil beyde Augenlieder sich bewegen. Weil aber das obere Augenlied bey menschlichen Augen sich schneller und über einen gröfsern Raum bewegt als das untere, so pflegt man auch die untern Strahlen eher und in einer gröfsern Länge zu erblicken, als die obern, und wenn man diese mit jenen zu gleicher Zeit, und gleich lang will ausfahren sehen; so ist man genöthigt, den Kopf ein wenig zurückzubeugen. (3.)

6.

Bey einer Lichtflamme, bey dem Monde oder bey den Sternen, kann man die Strahlen leichter und deutlicher sehen als am Tage, wenn man z. B. gegen das Fenster sieht, weil in jenen Fällen der innere Raum des Auges schon ohne Bedeckung der Augenlieder, dunkel ist. Es ist leicht einzusehen, daſs die Erscheinung um desto deutlicher werden muſs, je schwächer das Licht der übrigen Gegenstände, welche auf das Auge wirken können, in Vergleichung mit dem Glanze des leuchtenden Punctes ist.

7.

Man unterscheidet diese sichtbaren Lichtstrahlen (wenn ich mich dieses etwas unphysicalischen Ausdrucks bedienen darf) leicht von andern glänzenden Erscheinungen, welche zuweilen um einen leuchtenden Punct wahrgenommen werden.

So sieht man z. B. einen verwirrten zitternden Glanz, wenn Thränen oder andere Feuchtigkeiten und Unreinigkeiten vor der Hornhaut befindlich sind, welche das Licht unordentlich brechen.

Man sieht Höfe und farbige Ringe um eine Lichtflamme, wenn man das Auge einige Zeit gedrückt hat, oder auch wegen einer fremden, die Lichtstrahlen brechenden Materie vor der Hornhaut.

Beym Blinzeln bemerkt man auch seitwärts aus der Flamme, oder allgemeiner zu reden, unter einem rechten Winkel mit den beschriebenen Lichtschweifen, einen matten Schein, den ich ebenfalls in der ersten Figur bey *K* und *L* angedeutet habe, welcher aber viel kürzer, bey weitem nicht so lebhaft und so scharf abgeschnitten ist, als die Strahlen, von denen wir hier reden.

Bey einer gehörigen Bewegung der Augenlieder erblickt man ferner oft einige zerstreute helle Linien, welche, wie ich glaube, von den Augenwimpern herrühren, indem diese, so wie alle Menschenhaare halb durchsichtige Körper sind, und das Licht brechen, auch kann die Beugung des Lichts daran Theil haben. Daſs sie von den Augenwimpern verursacht werden, ist wohl so gut als ausgemacht, weil sie sich mit dem obern Augenliede, so wie man dieses schlieſst und öffnet, herunter und hinauf bewegen, und auf den ersten Blick, um mich so auszudrucken, haaricht aussehen. Man hat die langen Lichtschweife aus der eben angeführten Ursache erklären wollen, aber diese sind von jenen ganz verschieden, sie sind gerade, scharf begränzt, fahren vom Lichte aus; jene sind krumm, rauh begränzt, und folgen dem Augenliede.

Wenn man am hellen Tage durch ein mit einer Nadel durchstochenes Kartenblatt in die Sonne sieht, indem man es etwa in der Weite des ausgestreckten Arms vor das Auge hält, so sieht man um den hellen Punct im Kartenblatt sehr feine farbige Strahlen nach allen Richtungen ausfahren, welche eine angenehm, aber heftig und zitternd glänzende Kreisfläche von etwa einem halben Zoll im Durchmesser bilden. Ich vermuthe, daſs diese Erscheinung von demjenigen Sonnenlichte herrühret, welches wegen seiner Lebhaftigkeit durch die Traubenhaut dringet, die bey diesem Verſuche desto eher geschickt ist, Licht durchzulassen, da sie wegen des starken Glanzes sehr ausgedehnt wird, indem sich der Stern verengert.

Einer meiner Freunde gab mir von einer Erscheinung Nachricht, die ich nicht habe hervorbringen können; seine Augen sind von sehr ungleicher Güte. Wenn er mit dem weitsehenden Auge in einer Entfernung von drey bis vier Fuſs gegen das Licht blinzelte, so sahe er, auſser dem Haupt - Lichtschweife, noch eine groſse Menge schwächerer, gleichsam punctirter Strahlen, welche sich nach unten zu krümmten. Er beschrieb es wie eine Feuergarbe; seine Zeichnung davon habe ich in der 2. Fig. beygefüget. Ich möchte wissen, ob alle weitsehende Personen etwas ähnliches sehen. Mit dem andern kurzsichtigen Auge sahe er nichts mehr als ich.

Sollten bey einigen von dergleichen kleinen Erscheinungen nicht auch die innere Fläche der Hornhaut und die vordere Fläche der Krystallinse wie Concav- und Convex-Spiegel wirken können?

8.

Die mehrerwähnten Lichtschweife zeichnen sich ferner noch besonders durch ihre Beweglichkeit aus, da man sie durch eine gröſsere oder geringere Eröffnung der Augenlieder, oder durch eine gehörige Bewegung des Kopfes bis auf Nichts verkürzen, oder bis zu einer gewissen Gröſse verlängern kann. Sie scheinen mit pfeilschneller Geschwindigkeit aus dem Lichte hervorzuschieſsen und sich in dasselbe zurückzuziehen.

9.

Man sieht mit einem Auge, unter der Bedingung (4.) niemahls mehr als zwey solcher Lichtschweife, einen obern und einen untern. (2.)

10.

Blinzelt man aber mit beyden Augen, so sieht man sowohl den obern als den untern doppelt, und zwar sind hier zwey Fälle möglich. Sind die Augenachsen dabey auf die Lichtflamme gerichtet, so erscheint diese wie bekannt, nur einfach, und aus ihr scheinen divergirend gegen jedes Auge zu ein oberer und ein unterer Strahl auszufahren. (Fig. 3.) Mir gelingt diese Erscheinung nur unter einer gewissen Entfernung vom Lichte, denn wenn ich mit beyden Augen blinzeln will, so treffe ich es selten, daſs das Licht im Horopter ſtehe.

11.

Richtet man aber die Augenachsen, indem man mit beyden Augen blinzelt, auf einen nähern Punct als die Lichtflamme, (oder auch auf einen entferntern, welches mir aber wiederum selten möglich ist) so sieht man auch die Lichtflamme doppelt, und aus jeder dieser Flammenbilder einen obern und einen untern Strahl ausfahren. (Fig. 4.) Legt man den Kopf auf die Schulter, so erscheint das eine Flammenbild höher als das andere, weil das eine Auge höher als das andere ist.

Man erlaube mir bey dieser Gelegenheit eine kleine Abschweifung.

Durch Veränderung des Horopters kann man die Flammenbilder von einander entfernen, einander nähern und in eins zusammengehen lassen. Für einige unter den Lesern, welche ich mir denke, habe ich zur Erläuterung, die 5. Figur beygefügt.

Der Punct, auf welchen die Augen gerichtet sind, oder der Durchschnittspunct der Augenachsen, ist *C*. Ein Gegenstand, z. B. eine Lichtflamme *E*, welche entfernter ist als *C*, bildet sich in dem linken Auge ungefähr in *e*, in dem rechten in E ab, als ob die Sehestrahlen, dem linken Auge

aus

aus *H* linker Hand von *C*, dem rechten Auge aus *I* rechter Hand von *C* zugeschickt würden.

Man sieht daher zwey Flammenbilder, eins in *H* mit dem linken Auge, und eins in *I* mit dem rechten Auge, weil *e* und *E* zwey nicht correspondirende Stellen der Netzhaut sind.

Eine Lichtflamme *D* im Gegentheil, die näher steht als *C*, erscheint dem linken Auge in *G* zur rechten Hand, dem rechten Auge aber in *F* zur linken Hand.

Dieſs läſst sich sehr leicht durch Versuche bestätigen; man darf nur in jedem der beyden angeführten Fälle ein Auge, ich will setzen, das linke, bedecken, so verschwindet im ersten Falle, wo die Augen auf einen nähern Punct gerichtet sind, das Flammenbild auf derselben linken Seite; im zweyten Fall, wo die Augenachsen sich, verlängert, erst jenseit der Lichtflamme schneiden, verschwindet das Bild auf der rechten Seite.

Den letztern Fall würde ein Kurzsichtiger nicht ohne Beschwerde versuchen können, weil die Lichtflamme den Augen sehr nahe stehen müſste. Für einen solchen ist es bequemer, die Lichtflamme in *C* zu setzen und einen andern nicht zu groſsen Körper z. B. einen Bleystift in *D* zu halten, welchen letztern er doppelt sehen wird, wenn er die

Augen auf die Flamme richtet. Es ist leichter die Augen auf einen glänzenden Gegenstand festzuhalten, als auf einen Punct in freyer Luft.

Man schätzt zwar die Entfernung der Flammenbilder ungefähr so groſs als die Entfernung der wirklichen Flamme, als ob diese verschwunden und jene zu beyden Seiten derselben ständen; vermuthlich aber nur, weil die Entfernung der wirklichen Flamme uns bekannt ist. Wüſste man diese nicht, so würde man die Entfernung der Flammenbilder schwerlich anders schätzen können als nach der scheinbaren Gröſse. Eins der Hauptmittel, Entfernungen durch die Augen zu bestimmen, Parallaxe, könnte bey jedem dieser einzelnen Flammenbilder nicht Statt finden.

Durch einige Uebung kann man es bald dahin bringen, die Augenachsen auf einen Punct in freyer Luft zu richten, ohne daſs ein dichter sichtbarer Gegenstand daselbst zu seyn brauchte. Bey zu sehr angewöhntem, oder nach zu lange anhaltenden Sehen auf nahe Gegenstände beym Schreiben, Zeichnen, u. s. w. richten sie sich von selbst so, und man kann nicht ohne merkliche, etwas schmerzhafte Anſtrengung der äuſsern Augenmuskeln sie in eine parallele, oder fast parallele Lage bringen. Letzteres wird, däucht mir, noch schwerer, wenn man auf einen in einer Tiefe liegenden entfernten Gegenstand sehen will, als auf einen in der Höhe liegenden; vielleicht veranlasset die *respective* Stärke der Augenmuskeln, oder die Richtung, nach welcher sie an der Augenkugel befestigt sind, bey dem Blicke in die Höhe eine parallele, bey dem Blicke in die Tiefe eine convergirende Lage der Augenachsen. Wahrscheinlich werden mehrere Personen die Bemerkung gemacht haben, daſs, wenn man nach langem Lesen ausgeht, man die Steine auf der Straſse dicht vor den Füſsen nicht deutlich sieht, als nur wenn man den Kopf nach der Brust zu beugt; dahingegen die weiter hin liegenden Steine oder höhern Gegenstände wie gewöhnlich erscheinen. Wenn alte weitsehende Leute in die Nähe sehen, lesen wollen, so halten sie das Buch niedrig und sehen von oben herab, es muſs ihnen also in dieser Lage leichter werden, die Augen auf einen nahen Punct zu richten. Kurzsichtige, wenn sie nur etwas entfernte Dinge sehen wollen, blicken gern von unten hinauf; daher man sie auch übersichtig nennt. Die Blicke auf nahe vorliegende Gegenstände der Erde, auf entferntere am Horizont, und auf das noch entferntere Firmament, scheinen hiemit dem Menschen erleichtert zu seyn. Die Siegwarte können ohne beschwerliche Beugung ihrer Nacken zum heiligen keuschen Mond hinauf seufzen, und die müſsigen Hottentotten mit gleicher Bequemlichkeit ihre selbst eigenen Nasenspitzen beschauen.

Eine falsche Richtung der Augenachsen gibt dem Blicke eines Menschen etwas Befremdendes, Unangenehmes, welches man an Schwärmern und Wahnsinnigen oft sehr auffallend bemerket. Bey Schlaftrunkenen, durch Tobak oder starkes Getränk Berauschten, und ohnmächtig werdenden Personen, haben die Augenmuskeln das Vermögen verloren, die Augen gehörig zu richten, so daſs der Durchschnittspunct der verlängerten Achsen auf wirkliche Gegenstände treffe oder willkürlich darauf fixirt werde. Dieser Umstand vermehrt ohne Zweifel den Schwindel und die Unsicherheit des Trittes, weil sie alles doppelt sehen. — Ich habe einmahl den Ausdruck „Scherblick" irgendwo gelesen, besinne mich aber nur dunkel, wem er zugeschrieben wurde. Ob das etwa ein Blick von der eben beschriebenen Art ist, wo einer selbst nicht recht weiſs, was er sieht?

Der Hr. Professor Klügel sagt in seiner Uebersetzung von Priestleys Geschichte der Optik, S. 458, Anm.: man sehe eine Sache nicht deſswegen doppelt, weil man die Augenachsen auf eine andere gerichtet hätte. Meiner Empfindung nach scheint es mir doch wirklich so zu seyn. Von den weit zur Seite liegenden Gegenständen kann man es nicht sagen, weil man diese überhaupt zu undeutlich sieht, allein gerade vorliegende Dinge sehe ich, wenn ich meine Aufmerksamkeit auf sie, und meine Augenachsen auf nähere oder weitere richte, immer doppelt. Es kostet anfangs einige Mühe, auf einen gewissen Gegenstand *A* zu sehen, und auf einen weiter oder näher liegenden *B* zu merken. Einige junge Damen haben darin eine ziemliche Fertigkeit. Sie unterreden sich z. B. mit einem nahe vor ihnen stehenden vernünftigen Manne *A*, und scheinen ihn anzusehen, indeſs ihre Seelen jenseit des Durchschnittspunctes ihrer Augenachsen, mit einigen unbärtigen Herrchen *B*; *C*; *D*; . . . . beschäftigt sind, welche in Ansehung der Qualitäten noch etwas weiter als in Ansehung des Orts hinter dem Manne *A* stehen. Doch! — junge Damen und physikalische Untersuchungen gehören nur in gewissen Fällen zusammen.

12.

Wenn man nahe bey der Lichtflamme steht, so sind die Strahlen breiter und weniger scharf begränzt, als wenn man sich weiter davon entfernt; in welchem Falle sie länger und feiner werden.

13.

Wenn die Strahlen breit sind, so bemerkt man, quer durch dieselben in der Richtung von einem Augenwinkel zum andern, äufserst feine, parallele, dicht aneinander liegende Striche, beynahe wie zarte durchsichtige Fäden eines feinen Gewebes. Ich weifs nicht ob sie ein jeder sieht, aber ich sehe sie sehr deutlich.

14.

Jeder der Lichtschweife scheint aus mehrern einfachen Strahlen zusammengesetzt, welche von verschiedener Helle und Dichtigkeit sind. Die mittelsten derselben sind am längsten und kommen am ersten aus der Flamme zum Vorschein.

15.

Die Lichtflamme an sich selbst erscheint mir, so bald meine Augenlieder so weit geschlossen sind, dafs Strahlen hervorzuschiefsen anfangen, nicht mehr vollkommen einfach, sondern gleichsam aus vielen in einander verschobnen Flammen bestehend, deren Spitzen nur, von einander abgesondert sind. Je weiter ich mich vom Lichte entferne, desto mehr kann ich durch starkes Blinzeln die Flamme vervielfältigen, so dafs mir nicht blofs mehrere nebeneinander, sondern auch übereinander verschobne Flammen erscheinen. Nähere ich mich aber dem Lichte bis auf eine Weite z. B. von zwey Fuſs, so sehe ich keine dergleichen Vervielfältigung mehr. Aus jeder dieser verschiedenen Flammen kommen jene einfachen Strahlen, welche zusammen den langen Büschel ausmachen.

Von dem Doppeltsehen (11.) wegen Richtung der Augenachsen, ist diese Vervielfältigung ganz verschieden. In (11.) sah jedes Auge eine Flamme, es konnten deſshalb nie mehr als zwey erscheinen, die nach Veränderung des Winkels der Augenachsen sich entfernten, näherten, congruirten. Hier sieht man auch mit einem Auge viele in einander verschobne Flammen, die sich nicht von einander trennen lassen, und jedes der Flammenbilder (11.) scheint unter gehörigen Umständen, auf die erwähnte Art, zusammengesetzt. S. d. Fig.

16.

Jeder der beyden Lichtschweife wird vom Lichte abwärts breiter, indem die einfachen Strahlen wie ein Fächer auseinander fahren. Es kam mir zuweilen vor, daſs diese Ausbreitung nicht allezeit gleich stark sey.

17.

In der Mitte jedes Lichtschweifs, ungefähr in der Gegend *D*; *E*; (1. Fig.) scheinen sich einige unter den einfachen Strahlen gewöhnlich zu durchkreuzen, und zwar so viel ich habe bemerken können, nur die nach der Seite des innern Augenwinkels; nicht die an der äufsern Seite.

18.

Am Ende, und am merklichsten, bey dem obern Strahl, scheinen sich die einfachen Strahlen aufser ihrer gröfsern Ausbreitung, auch noch ein wenig in die Krümme zu ziehen, jedoch nur dann, wenn sie ihr Maximum erreicht haben. (8.) Aufserdem sind sie schnurgerade.

19.

Dem ersten Ansehen nach, scheint zwar der obere Strahl aus dem obern Theil der Lichtflamme, der untere aus dem untern Theile auszufahren; aus folgender Beobachtung könnte man aber das Gegentheil schliefsen. Man führe den Finger, oder einen andern scharf begränzten undurchsichtigen Körper von unten herauf, in einiger Entfernung vom Auge vor die Flamme. So bald auf diese Weise der untere Theil der Flamme dem blinzelnden Auge verdeckt wird, so verschwindet der obere Strahl; umgekehrt verschwindet der untere Strahl, wenn man den undurchsichtigen Körper von oben herunter vor die Flamme führt, so bald der obere Theil der Flamme verdeckt wird. Mit einem blofsen leuchtenden Punct, z. B. einem durchstochenen Kartenblatt, läſst sich diese Erfahrung nicht machen.

20.

Vorzüglich der Beobachtung werth dürfte folgende Erfahrung seyn. Wenn man den Kopf gerade hält, so erscheinen die Strahlen wie in der ersten Figur. Legt man aber den Kopf auf die Seite, so drehen sich die Strahlen dieser Neigung gemäſs um A, als um einen festen Punct herum, Z. B. wenn man (1. Fig.) den Kopf auf die rechte Seite legte, so würden die Strahlen etwa in der Lage $A\ M$; $A\ N$; erscheinen, da doch das Licht selbst die natürliche perpendikuläre Stellung behält. Hierauf wurde in (2.) gedeutet.

Also: die Strahlen drehen sich mit dem Auge herum.

21.

Wenn der Kopf weder rückwärts noch vorwärts gebeugt wird, man mag ihn übrigens gerade aufgerichtet halten, oder auf eine oder die andere Schulter legen; etwas mathematischer ausgedruckt: wenn die, die Mitte der Hornhaut beyder Augen tangirende Ebene vertikal ist, so erscheinen die Strahlen in den Linien $A\ B$; $a\ b$; (6. Fig.) mit der Richtung der Nasenlänge $C\ D$ parallel, wenn man nehmlich die Augenachsen so richtet, daſs man zwey Flammen und zwey Paar Strahlen sieht.

Man beuge den Kopf zurück, so scheinen die Lichtschweife der beyden Flammenbilder nach unten zu convergiren. (7. Fig.)

Man beuge den Kopf nach der Brust, so convergiren sie nach oben. (Fig. 8)

Liegt die Ursache davon in den Augenmuskeln, so daſs die Augen bey einer Drehung in die Höhe oder Tiefe, zugleich eine kleine, obgleich unbeträchtliche Drehung um sich selbst erhalten? Findet dieſs nur Statt, wenn sie zugleich dabey auf einen nicht sehr entfernten Punct sehen? und fällt es weg, wenn die Achsen parallel sind, so daſs denn auch die Linien *A B*; *a b* in jeder Lage unter sich parallel seyen?

22.

Wenn man während des Blinzelns den Kopf so drehet, als wenn man von einer Seite zur andern umhersieht, so bemerkt man an den Enden der Lichtschweife, ebenfalls eine Art von drehender Bewegung, indem die einfachen Strahlen einer nach dem andern, abzulaufen und sich zu verkürzen scheinen, und immer neue längere an der andern Seite zum Vorschein kommen.

Diese Erfahrungen enthalten vielleicht das Hauptsächlichste, was sich über diese Erscheinung bemerken läſst. Einige andre, die mir weniger zur Sache zu gehören scheinen, übergehe ich, um nicht die Geduld meiner Leser zu ermüden; denn dergleichen Beschreibungen fordern viele Worte.

II.
Geschichte der bisherigen Meinungen von den Ursachen dieses Phänomens; nebst einigen Bemerkungen darüber.

Obgleich die Erscheinung schon so lange bekannt gewesen seyn muſs als menschliche Augen glänzende Gegenstände sahen, und ohne Vorrichtungen, so oft man will, hervorgebracht werden kann, so finde ich doch in den ältern Büchern ihrer nicht einmal erwähnt. Vielleicht hatte sie zu wenig Auffallendes; man hielt es nicht der Mühe werth, genauere Untersuchungen darüber anzustellen, und begnügte sich, wie es bey manchen Dingen geschieht, mit undeutlichen Vorstellungen. Mich wundert daſs Plato nicht einen Beweis für seine Synaugie daraus genommen hat; der erste Anblick des Phänomens könnte in den damahligen Zeiten vielleicht anf so etwas geleitet haben.

In Priestleys Geschichte der Optik 4te Periode, 4ter Abshn. S. 139 der Klügelschen Uebersetzung, werden nur Descartes, Rohault und de la Hire angeführt, die über die beschriebne Erscheinung Beobachtungen angestellt und Erklärungen davon gegeben haben.

I.

„Descartes schreibt sie gewissen Runzeln „auf der Oberfläche der Feuchtigkeiten des Au- „ges zu."

Ich hätte wohl gewünscht, mir von seiner Erklärung genauere Kenntniſs verschaffen zu können, (wenn er anders selbst irgendwo seine Gedanken umständlicher auseinander gesetzt hat) um zu sehen, ob sie mit der meinigen Aehnlichkeit habe. Ich habe aber nichts weiter als die eben angeführte kurze Nachricht davon gelesen, und zwar auch diese erst nachher, als ich meine Erklärung schon aufgesetzt hatte. Dieſs, um allen Verdacht eines Plagiums von mir zu entfernen. Einem Descartes etwas zu danken zu haben, wäre ein Geständniſs, dessen ich mich wahrlich nicht schämen würde. (*)

(*) Die hier angezogene Stelle des Descartes habe ich nachher in seinen Schriften gefunden. Sie steht in seiner *Dioptric p.* 233. und lautet ſo:

Perexiguae rugae in superficie humorum oculi secundum lineas rectas extensae efficiunt ut magnos quosdam radios hinc inde sparsos circa faces ardentes videamus.

Das ist alles, was ich davon habe finden können, und es scheint mir unzulänglich.

Es gehört hierher ferner noch eine Stelle aus Smiths oder vielmehr Kästners Optik. S. 371.

„Eben dieser Schriftsteller (de la Hire) er„kläret warum man Abends aus einem Lichte „Strahlen in die Höhe schieſsen sieht, wenn „man den Kopf niederwärts beuget; unterwärts „aber, wenn man ihn in die Höhe hebet; und „oberwärts und unterwärts, wenn man den „Kopf aufrichtet und die Augenlieder nahe zu„sammen hält. Es kommt auf die Feuchtigkeit „an, welche sich an den Rändern der Augenlie„der aufhält und die Strahlen bricht.

„Rohault hat hievon eine falsche Erklärung „gegeben (*Phil. Nat. P.* 1. *C.* 35.) Brigs aber

2.

Rohault glaubet, daſs die Ränder der Augenlieder „in diesem Falle wie Convexgläser „wirken."

Ich muſs bekennen, daſs ich mir von einer solchen Wirkung der Augenlieder, als undurchsichtiger Körper, keinen Begriff machen kann.

„Diese beyden Meinungen des Descartes „und Rohaults werden vom Grimaldi (*de lu-„mine* p. 392) umständlich untersucht und be-„stritten."

Ich bedaure daſs ich nicht Gelegenheit gehabt habe, die angezogene Schrift des Grimaldi zu Gesicht zu bekommen.

3.

„Man bemerkt," sagt de la Hire, „wenn man „ein Licht oder einen andern leuchtenden Körper

„in seiner Ophthalmographie eine, welche im „Hauptpuncte mit der la Hireschen einerley ist.

„Diese Erklärung würde richtig seyn, wenn „die äuſsersten dieser Lichtstrahlen gefärbt er-„schienen. Da aber solches nicht ist, so kön-„nen sie nicht von so starken Brechungen her-„rühren, vielleicht aber von Beugungen der „Strahlen aufwärts und unterwärts an beyden „Augenliedern, der Oeffnung des Auges ge-„genüber."

„mit fast verschlossenen Augen ansieht, daſs von „demselben, Lichtstrahlen nach verschiedenen Richtungen (nach meinen oben angeführten Erfahrungen nur nach zwey bestimmten Richtungen (I, 9.) „auf eine ziemliche Weite, fast wie der Schweif „eines Kometen, ausfahren. De la Hire glaubet, „daſs die Feuchtigkeit auf der Oberfläche des Auges, welche sich Theils an das Auge selbst, „Theils an den Rand des Augenliedes hängt, „einen Hohlspiegel bildet, dadurch die Strahlen bey „ihrem Eingange in das Auge zerstreut werden.“

Ich glaube nicht, daſs sich hieraus die Lichtschweife, von welchen hier geredet wird, erklären lassen. Daſs die Feuchtigkeit, welche vorn zwischen der Oberfläche des Augapfels und den Augenliedern befindlich seyn möchte, an den Rändern der letzteren kleine hohlspiegelartige Flächen bilden können, ist zwar nicht zu läugnen, da alle flüssige Körper an den Stellen, wo sie feste Körper schwererer Art berühren, vermöge der Attraction sich in solche Flächen ziehen, wie man an jedem Glase Wasser sieht; daſs aber dadurch solche Lichtschweife entstehen sollten, will mir aus folgenden Gründen nicht einleuchten.

Wenn in der 9. Fig. *A B* und *D E* dergleichen Flächen am Rande des obern und untern Augenliedes vor der Hornhaut bedeuten, so würden (vorausgesetzt dafs die Lage der Flächen richtig gezeichnet sey, wie ich nicht anders sehe) zwey Lichtstrahlen *G M* und *H N*, die von einem entfernten leuchtenden Puncte herkommen, nach den Gesetzen der Zurückwerfung nach der Gegend von *L* und *K* hingehen, und ohne Brechung in der Hornhaut und wässerigen Feuchtigkeit gar nicht, mit Beyhülfe derselben wenigstens kaum die Fläche der Krystalllinse treffen können, sondern schon von der Traubenhaut aufgefangen werden.

Noch dazu könnten es nur etwa diejenigen Strahlen seyn, welche sehr nahe bey *A* und *D* auf die Hohlspiegel-Fläche auffielen und diese Stellen selbst würden von dem überhangenden Rande des Augenliedes beschattet werden. Von allen näher nach der Hornhaut zu liegenden Stellen jener kleinen Hohlspiegel würden die zurückgeworfnen Strahlen wohl schwerlich nur überhaupt innerhalb des Auges kommen. Ferner könnten nur diejenigen Strahlen in Anschlag kommen, welche wie *G M* einfielen, nehmlich so dafs *G M A* und *H N D* sehr kleine Winkel wären. Von andern unter einem gröfsern Winkel einfallenden, wie *I M*, würde der reflektirte Strahl die Krystallinse noch viel weniger treffen können.

Auf

Auf jeden Fall würden endlich durch diese hohlspiegelartige Flächen nur äufserst wenige Strahlen auf die Netzhaut gelangen, und zwar nur in den weit von der Mitte entfernten Puncten derselben. Nach der Mitte aber, in die Gegend, wo das Bild des leuchtenden Punctes befindlich seyn müfste, wüfste ich durch dieses Mittel keine hinzubringen. Lichtschweife, welche von der Flamme ausgehen, könnten also, so viel ich sehe, dadurch nicht entstehen.

Die Meinung des de la Hire scheint mir endlich durch folgenden Versuch widerlegt zu werden. Ich stellte mich, um die Lichtflamme und Lichtschweife, und zugleich mein eigenes Auge beobachten zu können, nahe vor einen Spiegel, so dafs ich von dem etwa in einer Entfernung von acht Fufs hinter mir stehenden Lichte das Bild im Spiegel erblickte, und aus diesem Bilde die Strahlen durch Blinzeln ausfahren sahe. Während ich die Erscheinung auf diese Weise hervorbrachte, bedeckte ich mit Behutsamkeit den Rand des untern Augenliedes, wo die hohlspiegelartige Fläche sich bilden mufste, mit einem feinen Streifen des sogenannten Chinesischen Seidenpapiers, ohne die Lage des Auges zu verändern. Die Lichtschweife litten aber hierdurch nicht die geringste Veränderung, wie doch nothwendiger Weise hätte geschehen müssen, wenn die mehrerwähnten Flächen die Ursache der Erscheinung wären, da unter diesen Umständen die Wirkung der einen gänzlich gehindert war.

4.

Priestley selbst gibt seine Meinung zu erkennen, indem er die oben angezogene Stelle aus seiner Geschichte der Optik so anfängt:

„Ich will hier mit einer Anmerkung über ein „vom de la Hire beobachtetes — aber doch „vermuthlich schon von Adam bemerktes? — Er„eignifs beym Sehen beschliefsen, weil der Inhalt „dieses Abschnittes, nehmlich die Beugung des „Lichtes, die wahre Erklärung desselben an die „Hand zu geben scheint, wenn gleich de la Hire „anderer Meinung ist“ . . .

Und nachdem er die obigen Meinungen erzählt hat, fährt er fort: „die wahre Ursache aber, „scheint wohl diese zu seyn, dafs das Licht in die„ser Lage des Auges, zwischen den Augenwimpern „durchgeht, indem es daran vorbey streift, eine „Beugung erleidet und defswegen nach mancherley „Richtungen ins Auge kommt.“

Ohne irgend jemanden in seinem Urtheile vorzugreifen — wie sich das überhaupt von selbst versteht — kann ich dieser Meinung aus folgenden Gründen nicht beypflichten.

Sollten die Lichtschweife durch Beugung des Lichts an den Augenwimpern verursacht werden, so kann ich mir auf keine Weise vorstellen, wie sie so regelmäſsig, so lang, so schnurgerade, so scharf abgeschnitten erscheinen, und wie sie von der Flamme auszufahren scheinen könnten.

Man unterscheidet bey einiger Aufmerksamkeit sehr deutlich lichte Streifen, die so wie die Augenwimper gekrümmt, mehrere abgesondert nebeneinander und mit einem bräunlichen schwachen Lichte erscheinen. (I. 7.) Diese rühren unstreitig von den Augenwimpern her, und können durch Beugung oder Brechung, oder durch beyde Ursachen zugleich entstehen. Eine überflüssige Bestätigung, wenn man dem bloſsen Ansehen nicht glauben will, ist der Umstand, daſs man ähnliche helldunkle Streifen unordentlich durcheinander erblicken kann, wenn man die Augenbraunen so stark zusammenzieht und den Kopf und die Augen so gegen das Licht stellet, daſs vor den Lichtstrahlen, welche die Pupille treffen, einige an den Augenbraunen vorbey gehen müssen. Aber alle diese Erscheinungen sind von jenen geraden, hellen Strahlen durchaus verschieden.

Um ferner in Ansehung der Augenwimper mich völlig aufser Zweifel zu setzen, versuchte ich es, sie rückwärts an die Augenlieder fest zu kleben; diefs wollte mir nicht gelingen; abschneiden wollte ich sie nicht gern. Ich fand aber, dafs ich sie eben so gut mit dem Finger, wenn ich ihn etwas klebrig machte, nach oben und nach unten zu abbeugen konnte, so dafs ich völlig sicher war, dafs das Licht nicht durch sie hindurch streifen konnte, um ins Auge zu kommen. Ich machte es auf die oben erwähnte Art vor dem Spiegel, aber die Lichtschweife blieben wie gewöhnlich. Die andern dunklern Streifen sieht man aber offenbar mit den Augenwimpern verschwinden. Ich glaube, dafs es ziemlich überzeugend ist, dafs die Augenwimper auf unsre Erscheinung keinen Einflufs haben.

Dafs endlich die Beugung, welche die Lichtstrahlen etwa an den blofsen Augenliedern erleiden könnten, die Ursache seyn sollte, kommt mir ebenfalls unwahrscheinlich vor. Wie sollten nach der Structur des Auges und nach den Gesetzen der Beugung, solche blofs in die Länge gehende, so wenig Breite habende Streifen daraus entstehen können, deren äufserstes Ende von dem Bilde der Lichtflamme auf der Netzhaut so weit abstehen könnte! Woher ferner die einfachen Strahlen, aus denen die Schweife bestehen, das Durchkreuzen derselben u. s. w.?

Zum Ueberfluſs findet man bey einem Versuch, wo wohl die Beugung allein wirken muſs, eine ganz andere Erscheinung.

Ich nahm ein schwarzgefärbtes und mit einer Nadel durchstochenes Kartenblatt, hielt es so nahe vor das Auge, daſs der scheinbare Durchmesser des wegen der Nähe vergröſserten Loches etwa ein Viertel Zoll oder etwas drüber war. Ich entfernte mich darauf so weit vom Lichte, daſs ich die Flamme nicht ganz durch die Oefnung erblickte, sondern der oberste Theil derselben verdeckt blieb. Anstatt, daſs nun die Oefnung zirkelförmig, also in dem Bogen *A B* (10. Fig.) geschlossen hätte erscheinen sollen, so schien es vielmehr als ob die Flamme disseits ein wenig durch die Oefnung emporschlüge, oder als ob die Oefnung selbst noch oben den Ausschnitt *A B C D* gehabt hätte.

Sollte diese Erscheinung nicht bloſs von der Beugung herrühren, und zugleich ein sehr einfaches Mittel abgeben, diese Eigenschaft des Lichtes wahrzunehmen? Aber von jenen Lichtschweifen war hier nicht die mindeste Aehnlichkeit anzutreffen. Der Schein *A B C D* sahe völlig wie eine Fortsetzung der Flamme aus.

III.

Versuche, eine neue Erklärung zu finden.

Um eine befriedigendere Erklärung zu finden, wie die vorhin erwähnte, hatte ich schon einige nicht zum Zweck führende Versuche angestellt, als ich durch eine öfters gemachte Erfahrung auf eine Erklärung geleitet wurde, welche, wie ich bis jetzt noch nicht anders sehe, der Sache ganz anpassend ist.

Da mich die Beschaffenheit meiner Augen nöthigt, mich eines Hohlglases zu bedienen, um entfernte Gegenstände deutlich zu sehen, so hatte ich oft Gelegenheit, durch dieses Glas eine Erscheinung zu bemerken, welche mit der zu erklärenden, eine grofse Aehnlichkeit zu haben schien, und wovon der Grund offenbar in dem Glase, oder eigentlicher zu reden, an demselben zu suchen war.

1.

Wenn man nehmlich bey Lichte in einem Zimmer, wo die Luft voll Ausdünstungen ist z. B. in einem Tanzsaale das Glas gebrauchen will, und es vorher mit der Hand abwischt, um es von den Dünsten zu reinigen, welche sich daran gesetzt haben, so erblickt man, wenn man nach einer Lichtflamme sieht, von derselben aus, schmale helle Streifen von einem matten weislichten Lichte.

Mit einem Convexglase ist die Erscheinung wesentlich dieselbe.

Diese Streifen gehen zuweilen nur nach zwey, zuweilen aber auch nach mehrern Richtungen aus, und oft erscheinen sie ganz unordentlich, unterbrochen und sich durchkreuzend.

Man sieht sogleich, dafs sie, so oft man das Glas von neuen abwischt, nicht mehr genau nach derselben Richtung gehen, wie vorher, und mufs daraus natürlicher Weise die Folgerung ziehen, dafs die Richtung, nach welcher man beym Abwischen mit der Hand über das Glas fährt, auf die Richtung der Lichtstreifen Einflufs habe.

Fährt man unordentlich mit dem Finger hin und wieder nach verschiedenen Richtungen über das Glas, so erscheinen die Streifen ebenfalls unordentlich.

Wischt man die eine Seite des Glases nach einer, die andere Seite nach einer andern Richtung, so sieht man, daſs die Lichtstreifen sich in der Stelle, wo die Lichtflamme erscheint, durchkreuzen. Waren die Richtungen des Strichs aufeinander senkrecht, so erscheinen auch die Streifen unter einem rechten Winkel sich durchkreuzend.

Wischt man endlich beyde Seiten des Glases genau nach einer und ebenderselben Richtung, so erscheinen die Streifen in einer geraden Linie, werden nach den Enden zu breiter wie I. 16., und wenn man das Glas herum dreht, ohne es übrigens aus der Ebne in welcher man es erst gehalten hatte, zu verrücken, so drehen sich diese Streifen zu gleicher Zeit nach eben der Richtung um die Lichtflamme, wie I. 20.

Man wird ohne mein Erinnern die auffallende Aehnlichkeit bemerken, welche diese Erscheinung mit den Lichtschweifen beym Blinzeln hat.

Man siehet sodann auch, daſs die Richtung, in welcher die Lichtstreifen erscheinen, allemahl auf der Richtung des Strichs beym Abwischen des Glases senkrecht stehe.

Wischt man aber das Glas mit einem weichen Leder ab, oder ist es schon ohne dieſs völlig trocken und rein, so sieht man die Lichtflammen wie gewöhnlich, ohne jene Streifen.

2.

Um diesen Erfahrungen mehr Analogie mit dem zu erklärenden Phänomen zu geben, und sie mit mehrerer Sicherheit zum Behuf meiner Untersuchung anwenden zu können, wiederholte ich sie mit einer kleinen portativen *Camera obscura*, indem ich das Convexglas derselben auf die beschriebene Art strich. Damit ich die Erscheinung desto deutlicher machen könnte, strich ich meinen Finger vorher mit etwas Fettigem, so daſs die Striche auf dem Glase desto sichtbarer wurden, ohne eine Undurchsichtigkeit des Glases zu verursachen.

Der Erfolg war, wie ich es gewünscht hatte. Die Streifen zeigten sich auf dem Boden der *Camera obscura* mit der gröſsten Deutlichkeit.

Hatte ich beyde Seiten des Glases nach einerley Richtung bestrichen und das Glas so eingesetzt, daſs die Striche horizontal gingen, so standen die Lichtstreifen in perpendiculärer Richtung nach oben und nach unten von dem Bilde der Lichtflamme.

Mit einem gewöhnlichen Brennglase kann ein jeder an der Wand den Versuch, obgleich etwas weniger deutlich, nachmachen. In der 11. Fig. sey das Glas nach *A B* gestrichen, das Bild der Lichtflamme in *F*, die hellen Streifen bilden sich in dem Schatten, den das Convexglas an die Wand wirft nach *F M* und *F N*.

Durch Zurückwerfung der Strahlen sieht man auch auf dem Glase selbst, wenn man sich vor dasselbe stellt, dergleichen helle Streifen, wie in der 12. Fig., so auch auf jedem nach obiger Art bestrichenen ebenen Spiegel. Der helle Streifen, welchen man erblickt, wenn die Sonne schräg auf ein Wasser scheint, welches kleine Wellen schlägt, ist im Grunde hiermit einerley.

Dreht man das Glas in der *Camera obscura* herum, so drehen sich auch die Streifen auf dem Boden derselben um das Lichtbild.

Ist aber das Glas rein, so sieht man die Streifen nicht, auch nicht, wenn man es mit einem in Wasser getunkten Finger bestrichen hat, weil da die entstandenen Streifen bald zusammenfliefsen, und die Oberfläche des Glases glatt wird.

3.

Um diese Erscheinung an den Gläsern zu erklären, stelle ich mir vor, dafs durch die Erhöhungen und Vertiefungen in der Haut des Fingers, diesen angemessene Erhöhungen und Vertiefungen auf der beschmierten Oberfläche des Glases entstehen, deren Gestalt ich sehr vergröfsert in der 13. und 14. Fig. angedeutet habe. Die Vertiefungen der Haut bilden bey dem Striche solche kleine parallel unter einander gehende Reifen wie *A*, die über der Fläche des Glases erhaben sind.

Die Dicke derselben, um welche sie vor dem Glase herausragen, ist so äuſserst geringe, daſs sie das Licht durchlassen, da ohnehin Fett und fettige Ausdünstungen keine ganz undurchsichtige Materien sind.

Indessen mögen diese kleinen Reifen so schmal und so wenig über der Fläche des Glases erhoben seyn als man es sich denken kann, so ist es doch gewiſs, daſs sie da sind, sonst würde man keine Striche sehen, und sobald sie auch nur die geringste Dicke haben, so müssen sich zwey Seiten an ihnen denken lassen, welche schräg gegen die Fläche des Glases geneigt sind.

Die Erhöhungen der Haut streifen dicht über die Fläche des Glases weg, und bilden dadurch die bloſsen Stellen oder Vertiefungen auf dem Glase, wie *B*, zwischen jenen Reifen. Da die glatten Erhabenheiten der Haut mehr Fläche darbiethen als die Vertiefungen, welches man schon ohne Mikroskop an jedem Finger sehen kann, so müssen jene bloſsen Stellen den gröſsten Theil der Glasfläche einnehmen.

Durch diese bloſsen Stellen des Glases gehen nun die Strahlen, wie gewöhnlich, nach den Gesetzen der Brechung durch, und machen das Bild der Lichtflamme in der Gegend des Brennpunctes.

Hingegen die durch das Streichen entstandenen kleinen Reifen, müssen wegen ihrer, dem Lichte schräg zugekehrten Flächen, die Brechung derjenigen Lichtstrahlen, welche auf sie auffallen, verändern.

Fällt in der 15. Fig. ein Lichtstrahl von einem entfernten leuchtenden Puncte auf eine dergleichen Fläche in *A*: so wird er, anstatt herunter nach der Achse des Glases zu, gebrochen zu werden, vermöge der Lage dieser kleinen Fläche, innerhalb des Glases nach *D* gehen müssen.

Trifft er hier bey seinem Ausgange aus dem Glase in die Luft auf die Fläche *D*, so muſs er, da er aus einem dichtern Medio in ein dünneres kommt, vom Einfallslothe weggebrochen werden und nach *M* hinaufgehen.

Völlig auf eben die Art muſs ein Strahl, der von einem etwas niedrigern leuchtenden Puncte unten auf die Fläche *B* trifft, zuerst innerhalb des

Glases nach *E*, und von dort weiter nach *N* herunter gebrochen werden.

Aehnliche Brechungen müssen nothwendiger Weise alle Lichtstrahlen leiden, welche in der Gegend von *A* nach *B*, d. h. in der mittlern auf dem Glase gezogenen Perpendiculärlinie auf solche Flächen der kleinen Reifen fallen, welche in der Lage wie *A* und *B* dem Lichte zugekehrt sind.

Diese Strahlen allein müfsten also gewifs eine Lichtlinie von *M* nach *N* an der entgegenstehenden Wand bilden.

Die Flächen aber, welche in der obern Hälfte des Glases ungefähr wie *A*, und in der untern Hälfte wie *B* liegen, fangen, wie man leicht sieht, nächst den blofsen Theilen der Glasfläche die meisten Strahlen auf.

Weniger Strahlen fallen auf diejenigen Flächen der kleinen Reifen, welche mehr vom Lichte abgewandt sind und die Strahlen nach der entgegengesetzten Richtung hin, brechen könnten, wie Fig. 16.

Aber nicht allein die Strahlen, welche in der Mittellinie des Glases, sondern auch diejenigen, welche zu beyden Seiten derselben, z. B. in *a* und

α 17. Fig. oder *b* und β auf solche Flächen fallen, müssen nach der Gegend *M N* hingehen.

Daſs sie durch die Lage der kleinen Flächen hinauf und hinunter gebrochen werden, ist eben gezeigt worden. Die Strahlen, — bloſs diejenigen ausgenommen, welche in der Mittellinie des Glases auffallen, — können aber nach ihrer Brechung über dieſs nicht in derselben vertikalen Ebene bleiben, worin die einfallenden Strahlen waren, weil die Gegenden des Glases *a*, α, *b*, β, wegen der Convexität des Glases denselben schief entgegen stehen. Die Strahlen müssen daher nach der Vertikalebene, die durch die Mitte des Glases gelegt werden kann, hingebrochen werden.

Sämtliche auf die kleine Reifen auffallende Strahlen, müssen also zugleich nach oben und unten, und nach der mittlern Vertikalebene gehen, mithin sich auf der Wand in einem schmalen Streifen *M N* vereinigen, in dessen Mitte das Bild der Lichtflamme ist.

Daſs sich nun diese Streifen mit dem Glase herumdrehen müssen, ist von selbst klar.

IIII.
Neue Erklärung.

Die im III. Abschnitt erzählten und erklärten Versuche mit den Convexgläsern geben nun, meiner Meinung nach, den Schlüssel zu der Erscheinung der Lichtstreifen beym Blinzeln ab.

Hätte nehmlich die Krystalllinse des menschlichen Auges auf ihrer Oberfläche eine ähnliche Einrichtung, wie man den Gläsern durch einen nach einerley Richtung gehenden Strich des Fingers geben kann, so müſste auch eine ähnliche Erscheinung auf der Netzhaut, wie dort auf dem Boden der *Camera obscura*, die Folge davon seyn. Diese letztere aber hat schon auf den ersten Anblick so viel auffallende Aehnlichkeit mit jenen Lichtschweifen, das man alsdenn wohl nicht anstehen könnte, beyderley Erscheinungen für gleichartige Wirkungen einer und ebenderselben Ursache zu halten.

Mir däucht, die Hypothese, wodurch man der Krystalllinse im menschlichen Auge eine solche Einrichtung zuschreibt, hätte schon bloſs als Hypothese betrachtet, nicht viel wider sich. Sollte man nicht manchen, vielleicht viel künstlichern, das Bürgerrecht in der Physik gegeben haben?

Sie erhält aber noch einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit, und hört — nach meiner Vorstellung — beynahe, oder gänzlich auf, Hypothese zu seyn durch die bekannten anatomischen Beobachtungen, welche man über den Bau des Auges angestellt hat, und von denen ich diejenigen, die hier zu meinem Zwecke dienen, aus Priestley Gesch. d. Opt. 4. Par. 5. Abschn. 1. Kap. beybringen werde. Die Stelle ist folgende:

„Leoeuwenhoek entdeckte an der Krystall-„linse, nachdem sie trocken geworden, eine Men-„ge übereinander liegender dünner concentrischer „Blättchen oder Schuppen, deren er von der Mitte „bis zum Umfange, auf zweytausend in einer ein-„zigen Linse rechnet.

„Jede dieser Schuppen besteht, wie er „gefunden haben will, aus einem einzi-„gen Fäserchen oder sehr feinem Faden, „der auf die wunderbarste Weise hinauf „und hinunter gewunden ist, so daſs er „verschiedene Umläufe mit eben so viel Mittel-„puncten macht, ohne daſs sich diese mit einander „verwirrten, oder sich durchkreuzten.

An

„An Ochsen, Schafen, Schweinen, Hunden „und Katzen vollendet der Faden drey Umläufe, je„den mit einem Mittelpuncte; an Wallfischen fün„fe, an Hasen und Kaninchen nur zwey.

„Auf der ganzen Oberfläche der krystallenen „Linse eines Ochsenauges zählet er mehr als zwölf„tausend Fäserchen. (*Porterfield on the eye. Vol. 1.* „*p. 442.*)

„Dafs die Linse aus concentrischen Blättchen „zusammengesetzt sey, wie Leeuwenhoek „behauptet hatte, bestätigte Petit durch eine „sorgfältige Zergliederung, besonders aber durch „Zertrennung dieser Blättchen in sauren Flüs„sigkeiten."

Herrn Prof. Klügels Anmerkung.

„Das blätterige Gewebe oder die zwiebelartige „Structur der Linse ist schon vor Leeuwenhoek „entdeckt. Zinn. S. 131. Die Art wie die Lamel„len aus Fäserchen gewunden sind, kann man nicht „wohl aus der Beschreibung begreifen; Leeuwen„hoek hat sie in den *Arcanis naturae detectis,* „*p. 66. sq.* (*Lugd. Batav. 1722.*) durch Zeichnungen „ziemlich deutlich gemacht.

„Wie im menschlichen Auge die Fibern der „Lamellen gewunden sind, ist nicht bekannt.

„(Zinn. S. 133.) Leeuwenhoek hat seine Beob„achtungen nur an Thieraugen gemacht.“

Nichts kann besser mit der gegebenen Erklärung des Phänomens übereinkommen, als diese Structur der Krystalllinse. Man setze nehmlich die Krystalllinse so in das Auge, daſs die Umläufe der Fäserchen, woraus die Lamellen bestehen, horizontal gehen (wie auch nach der Beobachtung „hinauf und hinunter gewunden„ seyn muſs) so muſs die Oberfläche der Linse dadurch völlig die Beschaffenheit der Gläser im III. Abschnitt erhalten, folglich ganz ähnliche Wirkungen hervorbringen.

Es müssen sich jene hellen Streifen auf der Netzhaut bilden, und dieſs sind die Lichtschweife, welche man beym Blinzeln sieht.

Dieſs wäre denn meine Erklärung der Hauptsache nach. Einige Nebenfragen werden sich, hoffe ich, ebenfalls mit ihr übereinstimmend beantworten lassen.

1.

Müſste man nicht bey Vorausſetzung eines solchen Gewebes die Lichtschweife immer an jeder glänzenden Sache sehen, auch ohne zu blinzeln?

Ich antworte darauf: der Umstand, daſs die Erscheinung sich nur zeiget beym Blinzeln, Drücken, oder bey einer Beugung des Kopfes, wo das Auge eine gezwungene Drehung nach oben oder nach unten in der Augenhöhle machen muſs, kann aus folgenden Ursachen hergeleitet werden.

Die erste und vorzüglichste scheint mir diese zu seyn: die Fibern wurden an trocknen Linsen entdeckt. Im Auge sind die Krystalllinsen naſs, gallertartig und weich, und zwar, nach Porterfields Behauptung, beym Menschen noch weicher als bey den meisten andern Thieren. In ihrem natürlichen Zustande sind also die Zwischenräume zwischen den Fäserchen mit Feuchtigkeit angefüllt. In einer völlig freyen Lage ist daher die Oberfläche glatt. Aber durch Blinzeln u. s. w. wird die Augenkugel etwas gedrückt. Dieser Druck pflanzt sich auf die Krystalllinse fort, die Fäserchen derselben werden dadurch zusammengepreſst; welches nothwendiger Weise gerade eine solche Unebenheit der Oberfläche verursachen muſs, als wir zu unserer Erscheinung gebrauchen.

Man kann noch als eine zweyte Ursache hinzusetzen: eine Bedeckung der Augenlieder sey deſswegen dazu erforderlich, weil ohne diese der Stern zu viel Licht durchläſst, also der innere Raum des

Auges nicht dunkel genug ist, um die hellen Streifen auf der Netzhaut sehr empfindbar zu machen. Wenn man dem Glase der *Camera obscura* einige Bedeckung gibt, so werden die Streifen auf ihrem Boden ebenfalls lebhafter.

Die Beschattung kann nicht die einzige Ursache seyn, weil man die Lichtschweife, auch wenn man durch ein durchstochenes Kartenblatt sieht, nicht eher erblickt, als bis man die Augenlieder zudrückt. Hier können die Augenlieder nicht durch Beschattung wirken, weil das Kartenblatt schon das übrige Licht abhält.

Je stärker man blinzelt, desto mehr wird die Linse gedrückt, desto gröſser werden die Unebenheiten ihrer Oberfläche, desto länger die Streifen.

Daſs die Schweife sich mit dem Auge drehen müssen, folgt von selbst.

2.

Der in der Beschreibung dieser Erscheinung bemerkte Umstand, daſs die Strahlen schräg nach unserm Auge her aus der Flamme auszufahren scheinen, ist ein optischer Betrug, der bey genauerer Betrachtung verschwindet. Es ist natürlich, daſs wir die Flamme als den Ort ansehen, von dem die Strahlen ausgehen. Die

Strahlen sind vom Ende her breiter als an der Flamme. Wir glauben daher ein perspectivisches Zusammenlaufen der einfachen Strahlen zu bemerken. (Der Grund dieser Ausbreitung wird in der Folge vorkommen.) Kann nicht auch die Krümmung der Netzhaut am Boden des Auges Einfluſs dabey haben?

Der Betrug verschwindet, wenn man einen undurchsichtigen Körper, ein Kartenblatt so vor das Auge führt, daſs er einen der Lichtschweife ganz oder zum Theil verdecken müſste, wenn dieser vom Lichte herkäme. Man sieht aber immer den Schweif noch ganz und disſeits des Kartenblattes, man mag es so nahe an das Auge halten, wie man will, wodurch man denn überführt wird, daſs der Anfang des Schweifes nicht entfernter vom Auge sey als das Ende desselben.

3.

Daſs die Länge der Strahlen sich mit der Entfernung des Auges vom Lichte zu vergröſsern scheint (I. 12.), ist ebenfalls ein optischer Betrug. Ich versuchte es, die Länge eines Schweifes zu messen, indem ich einen Zirkel so nahe an das Auge hielt als es mir möglich war, so daſs die Spitzen die Augenwimper berührten.

Ich fasste denn die Enden des Schweifes mit diesen Spitzen und fand immer ungefähr 1, 5 Linien in jeder noch so kleinen oder noch so grossen Entfernung vom Lichte. Dem ersten Blick nach, ist ihre scheinbare Länge der Entfernung des Auges vom leuchtenden Puncte gleich, und kann also mehrere hundert Fuss betragen. Die Messung an sich kann freylich nicht anders als sehr unvollkommen seyn, da man wegen der zu grossen Nähe die Zirkelspitzen sehr undeutlich sicht, aber die Gleichheit der Länge ist doch klar daraus.

4.

Die im (I. 13.) erwähnte Erscheinung sehr feiner querlaufender paralleler Striche, die ich, wie ich aufrichtig versichern kann, eher sahe, als ich von der Leeuwenhoekschen Entdeckung etwas wusste, stimmt mit der gemuthmassten Structur der Krystalllinse so gut überein, dass auch dadurch die obige Erklärung für mich einen beträchlichen Zuwachs von Wahrscheinlichkeit erhält.

5.

Die Vervielfältigung der Flamme (I. 15) wird sich so erklären lassen: aus den dort angeführten Umständen erhellet, dass die Erscheinung von der Entfernung meines Auges vom Lichte abhängt. Je gröſser diese ist, desto mehr vervielfältigt sich die Flamme; bey einer geringen Entfernung aber sehe ich sie ganz einfach. Der Grund davon liegt unstreitig in dem auf nahe Gegenstände eingerichteten Bau des Auges. Entweder wegen der zu groſsen Convexität der Krystalllinse, oder ihrer zu groſsen Entfernung vom Boden des Auges, oder wegen beyder Ursachen zugleich, schneiden sich die von einem entfernten Puncte wie die Spitze der Flamme, fast parallel ins Auge geschickten Lichtstrahlen schon in der glasartigen Feuchtigkeit, ehe sie die Netzhaut erreichen. In dem Puncte, wo sie sich alle vereinigten, würde ein einfaches deutliches Bild des leuchtenden Punctes entstehen. Jenseits dieses Punctes hingegen fahren die Strahlen wieder auseinander, und machen folglich auf der Netzhaut mehrere über und neben einander liegende Bilder, deren jedes für sich aber schwächer ist als das Bild im Vereinigungspuncte gewesen seyn würde. Eben so muſs es den Strahlen gehen, die von allen übrigen Puncten der Flamme ins Auge kommen.

Bey dunkeln Gegenständen, welche die Nerven der Netzhaut nicht so stark rühren, zumahl wenn sie keine solche hervorstechende Spitzen haben wie

wie eine Lichtflamme, empfinden Kurzsichtige aus der angegebenen Ursache, nur eine Unbestimmtheit des Umrisses.

Selbst bey der Lichtflamme sieht man die Spitzen nicht ganz abgesondert, wenn man die Augen ganz offen hält, weil dann zu viel Licht ins Auge kommt, die Gränzen der onehin schwachen Bilder, jede besonders zu unterscheiden, und wie ich glaube auch deſshalb, weil erst durch das Zudrücken der Augenlieder die Convexität der Krystalllinse so sehr vergröſsert wird, daſs der Vereinigungspunct noch näher hinter derselben zu liegen kommt, d. h. noch weiter von der Netzhaut wegrückt. Daher die Strahlen auf dieser letztern um desto weiter von einander zerstreut werden.

Sehen also Weitsehende die Lichtflamme sowohl als die einfachen Strahlen, aus denen die Lichtschweife bestehen, etwa immer ganz einfach, oder nur wenig vervielfältigt?

Uebrigens kann man dieſs alles hinlänglich mit jedem Brennglase bestätigen, vorzüglich, wenn man der mehrern Deutlichkeit wegen, ein ziemlich groſses Glas und eine beträchtliche Entfernung vom Lichte nimmt.

6.

Dafs die Lichtschweife an den Enden breiter werden (I. 16.) kömmt meines Bedünkens daher, dafs die Strahlen, welche in der Gegend a α oder b β (17. Fig.) auf die Linse auffallen, wegen der abnehmenden Dicke der Linse innerhalb derselben nicht so weit nach der Vertical-Ebene *C M N* zu gebrochen werden können, folglich auf der Wand oder auf dem Boden des Auges nicht so nahe an der Linie *M N* sich vereinigen können als die in der Mitte der Linse auffallenden, welche wegen der gröfsern Dicke einen längern Weg nach der Vertical-Ebene zu, innerhalb der Linse zurück zu legen haben, und sich folglich jener Ebene eher nähern müssen.

7.

Die Vervielfältigung der Flammenbilder mit dem Umstande zusammen genommen, dafs die Fasern der Krystalllinse bey dem durch Blinzeln erlittenen Druck vielleicht nicht völlig auf beyden Seiten parallel bleiben dürften, gibt ferner einen zulänglichen Grund ab, von dem (I. 17.) erwähnten Durchkreuzen der einfachen Strahlen, aus welchen die Lichtschweife bestehen.

8.

Nach (I. 19.) sieht man die obern Lichtschweife, so lange der untere Theil der Flamme unverdeckt ist, und die untern, so lange der obere Theil der Flamme noch Strahlen ins Auge schicken kann. Auch das stimmt mit der gegebenen Erklärung überein. In der 17. Fig. bedeutet das dort gezeichnete Convexglas die Ksystalllinse, *M N* eine Gegend der Retina. Nun stelle man sich vor, ein undurchsichtiger Körper *G H* werde von oben her vor die Linse geführt, so daſs die von dem obern leuchtenden Puncte kommenden Strahlen von demselben aufgehalten werden, so können nur Strahlen von dem untern leuchtenden Puncte auf den untern Theil der Linse auffallen, welche nach der Gegend von *F* bis *N* gebrochen werden. Da nun das Bild der Lichtflamme auf der Netzhaut in umgekehrter Lage steht, so ist der Lichtschweif, *F N*, welcher von dem untern Theile der Flamme verursacht wurde, an der Spitze des Flammenbildes. Umgekehrt, wenn der undurchsichtige Körper von unten her vor die Linse geführt wird, ist der Lichtschweif *F M*, der von dem obern Theil der Flamme entstand, an dem untern Theil des Flammenbildes.

Es ist von selbst klar, daſs je mehr von der Lichtflamme verdeckt wird, desto schwächer in beyden Fällen der noch sichtbare Strahl werden müsse, wie auch die Versuche zeigen.

Es sey mir erlaubt, hier noch zu wiederhohlen, was schon der Titel sagt; daſs ich das bisher Vorgetragene für weiter nichts ausgebe, als was es ist, nehmlich ein Versuch einer neuen Erklärung. Der Ausdruck: „neue Erklärung" hat sonst bey einer Sache, deren Erklärung von groſsen Männern schon unternommen worden ist, einen Anstrich von Arroganz, die keinem Menschen auf der Welt unausſtehlicher seyn kann als mir selbst; und deren ich mich wirklich nicht schuldig fühle.

Es würde mich freuen, wenn das Obige einigen Beyfall fände, und Kenner diesen geringen Beytrag ihrer Prüfung würdigen wollten.

A n h a n g.

Von den Luftspiegeln.

Zum Schlufs noch ein paar Bemerkungen, bey Gelegenheit der in Priestley Gesch. der Opt. 4. Par. 5. Abschn. angeführten Erscheinung.

Hier ist die Stelle.

„Grey nahm ein Stück steics braunes Papier, „stach ein klein s Loch hinein, und hielt es nicht „weit vom Auge. Darauf hielt er auch eine Nadel „vor das Auge, und sahe zu seiner Verwunderung „die Spitze derselben umgekehrt. Je näher er die „Nadel an das Loch brachte, desto gröfser erschien „sie, war aber nicht so deutlich. Hielt er sie so, „dafs ihr Bild nahe an den Rand des Loches fiel, „so schien die Spitze umgebogen. Hieraus schlofs „er, dafs solche kleine Löcher, oder sonst etwas „in ihnen, wie Hohlspiegel anzusehen wären, und „nannte sie defswegen Luftspiegel. (*Phil. trans.* „*vol. 1. p. 172.*)“.

Hrn. Prof. Klügels Anmerkung.

„Der Jesuit Faber führt in seiner *synopsi optica. p. 26.* diesen Versuch auch an, und erklärt

„ihn, meines Bedünkens, recht gut. Er setzt nur „den Umstand hinzu, daſs man sich gegen einen „erleuchtenden Gegenstand gewendet haben müsse. „Es ist der Schatten von der Nadel, sagt er, der „sich im Auge entwirft. Dieser ist im Auge auf„recht, also glaubet man die Sache, für welche „man ihren Schatten genommen hat, verkehrt zu „sehen. Des Umstandes der scheinbaren Krüm„mung erwähnt er nicht, dagegen aber, daſs die „Nadel jenseits des Loches zu liegen scheine. Ich „habe den Versuch nicht nachmachen können."

Begreiflich kömmt bey dergleichen Erscheinungen sehr viel auf die Beschaffenheit der Augen an; bey manchen ist es so gar äuſserst schwer und meisten Theils sehr langweilig, sich mit Worten und Zeichnungen darüber deutlich auszudrucken. Ich habe die angeführte Erscheinung sogleich bey dem ersten Versuche vollkommen deutlich wahrgenommen. Einigen meiner Bekannten gelang es ebenfalls leicht, dahingegen der Mariottische Versuch, wodurch die Unempfindlichkeit der Stelle, wo der Sehnerve ins Auge eintritt bewiesen wird, ihnen viel schwerer nachzumachen wurde.

Das was ich darüber angemerket habe, bestätiget zum Theil Obiges; Theils fügt es vielleicht noch einen oder den andern dort nicht bemerkten kleinen Umstand hinzu.

1.

Je weniger fremdes Licht von andern Gegenständen aufser dem kleinen Loche ins Auge fallen kann, und je kleiner das Loch selbst ist, desto deutlicher fällt der Versuch aus, aus Gründen, die leicht einzusehen sind. Ein schwarzgefärbtes Kartenblatt, blofs mit der Spitze einer Nadel durchstochen, ist am besten.

2.

Am hellen Tage gegen eine offen gelassene Fensterscheibe, indem das übrige Fenster bedeckt ist, sieht man die Erscheinung besser als gegen eine Lichtflamme des Abends.

3.

Die Entfernung des Kartenblattes vom Auge nehme ich zwey bis drey Zoll, die Entfernung der Nadel vom Auge so, dafs sie fast die Augenwimper berühret.

4.

Ich sehe sodann zugleich die wirkliche Nadel in ihrer wahren Lage dicht vor meinem Auge, wegen ihrer groſsen Nähe vergröſsert und unbestimmt begränzt, und das Schattenbild derselben in umgekehrter Lage, als ob es jenseits des Loches wäre, und sehr vergröſsert.

5.

Wenn ich die Nadel, deren Spitze am bequemsten aufwärts gekehrt wird, seitwärts hin und her bewege, so bewegt sich jenes Schattenbild zu gleicher Zeit, nach den entgegengesetzten Seiten.

6.

Je näher die Nadel dem Loche gehalten wird, desto gröſser erscheint das Schattenbild, aber auch desto unbestimmter begränzt; die Nadel selbst aber weniger vergröſsert und schärfer begränzt. Umgekehrt, je näher die Nadel dem Auge gehalten wird, desto kleiner und schärfer das Schattenbild, desto gröſser und undeutlicher die wirkliche Nadel.

7.

Ich erblicke ferner, wenn ich die obern Augenlieder etwas zublinzle, die Schattenbilder der obern Augenwimper in dem Loche des Kartenblattes von unten heraufkommend, desto gröfser und unbestimmter, je näher ich das Kartenblatt dem Auge halte.

8.

Von der scheinbaren Krümmung des Schattenbildes der Nadel am Rande des Loches habe ich nichts bemerken können.

Dafs das umgekehrte Bild, der Schatten der Nadel, der Augenwimpern sey, leidet nicht den geringsten Zweifel; der Augenschein zeigt es. Die Benennung „Luftspiegel" ist also nicht sonderlich passend. Ich begreife nicht, wie Grey solchen „Löchern oder einem Etwas in ihnen" spiegelartige Wirkungen d. h. Reflexion der Strahlen zuschreiben konnte.

II.

Ueber die Wahrscheinlichkeit bey Würfeln.

Ueber die

Wahrscheinlichkeit bey Würfeln.

1. Berechnungen der Wahrscheinlichkeit werden überhaupt dadurch angestellt, daſs man untersucht, wie viel mögliche Fälle es gebe, wo ein gewisser Erfolg Statt finden kann, oder nicht. Wo nicht Mengen möglicher Fälle sich bestimmen lassen, da liegt die Beurtheilung der Wahrscheinlichkeit auſser dem Gebiethe der Mathematik.

2. In der Berechnung der Wahrscheinlichkeit bey Würfeln kommt es also darauf an, bey gegebener Anzahl von Würfeln, sowohl die Menge der möglichen Würfe überhaupt, welche ich = S setze, als auch die Mengen der möglichen Würfe von einerley Werth oder Nummer, welche = s seyn mag, zu finden.

3. Die Augen auf den sechs Seiten eines Würfels seyen a; b; c; d; e; f. Auf den gewöhnlichen Würfeln machen sie eine arithmetische Pro-

gression aus, und zwar die natürliche Zahlenreihe von 1 bis 6.

4. Bey einem Würfel, wo keine Combination von Augen Statt findet, sind die sechs möglichen Würfe, a; b; c; d; e; f; worunter einer so wahrscheinlich ist wie der andere, wenn der Würfel nicht falsch ist. Also für jeden Werth $s = 1$; $S = 6$.

5. Bey zwey Würfeln kann jede Seite des einen, mit jeder Seite des andern combinirt werden. Die sämtlichen Combinationen werden also gefunden, wenn $a + b + c + d + e + f$ auf die zweyte Potenz erhoben wird. Statt der vielen + Zeichen setze ich Vertical Striche.

a	b	c	d	e	f					
a	b	c	d	e	f					
aa	ab	ac	ad	ae	af					
	ba	bb	bc	bd	be	bf				
		ca	cb	cc	cd	ce	cf			
			da	db	dc	dd	de	df		
				ea	eb	ec	ed	ee	ef	
					fa	fb	fc	fd	fe	ff

6. Jedes einzelne Product ist eine Combination, und als Werth eines Wurfs betrachtet, bedeutet es die Summe beyder Factoren.

7. Die Werthe der in einer Verticalreihe untereinander stehenden Combinationen sind sich gleich,

z. B. in der sechsten Verticalreihe a f $= 1 + 6$; b e $= 2 + 5$, c d $= 3 + 4$. Jede $= 7$. Die Menge der Combinationen in einer Verticalreihe ist also $=$ s. (2.)

8. Bey zwey Würfeln findet man demnach folgendes:

Werthe	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
s =	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

S $= 36$

9. Der kleinste Wurf mit zwey Würfeln ist $= 2$. Folgende Geschichte macht indessen, wenn sie gegründet ist, eine seltsame Ausnahme. Zwey Delinquenten, von welchen nur einer sollte hingerichtet werden, würfelten nach irgend einem weisen Criminalgesetze um ihr Leben. Der niedrigere Wurf brachte den Tod. Der erste warf beyde Afs und war in Verzweiflung. Der andre aufser sich vor Freude, warf — und die Würfel fielen aufeinander, so dafs nur ein Afs oben lag. Das Schicksal hatte ihn einmahl zum Galgen bestimmt. Ein solcher Fall gehört in die Clausel (1) ungefähr wie der Fall mit den beyden Canonenkugeln, welche sich in der Luft begegneten und durch den heftigen Zusammenstofs vereinigt niederfielen. Man zeigt sie, glaub' ich, in Berlin.

10. Bey drey Würfeln müſste man $a + b + c + d + e + f$ auf die dritte Potenz erheben. Bey vier Würfeln auf die vierte u. s. w. Da jedes Glied der vorigen Potenz mit jedem Gliede der Wurzel zu verbinden ist, um die folgende Potenz zu machen; so wird die Anzahl der Glieder bey jeder folgenden Potenz sechsmal gröſser. Bey der dritten Potenz würde man 36, bey der vierten 216; bey der fünften 1296 Reihen, jede von sechs Gliedern hinschreiben müssen. Dieſs würde bald alle Geduld übersteigen.

11. Durch die Formel des binomischen Lehrsatzes auf das Polynomium angewandt, könnte zwar die successive Multiplication vermieden werden, allein eine vieltheilige z. B. hier sechstheilige Wurzel durch Hülfe dieser Formel auf eine hohe Potenz zu erheben, ist immer eine ermüdende Arbeit. Ueberdieſs müſste man dann noch die Combinationen von gleichem Werthe, worauf es hier ankommt, zusammensuchen. Bey der successiven Multiplication würde man diese gleich in einerley Verticalreihe ordnen.

12. Mit weniger Weitläufigkeit wird sich das Gesetz finden lassen, nach welchem die Mengen der Combinationen von gleichem Werthe, das

heifst, die Mengen der Glieder in den Verticalreihen wachsen.

13. Um die dritte Potenz zu machen, wird jedes Glied der zweyten Potenz zuerst mit a multiplicirt. Diese Multiplication gibt eine solche Sammlung von sechs Reihen, wie die, welche die zweyte Potenz ausmacht, nur dafs jedes Glied aus drey Buchstaben besteht. Das erste Glied ist a a a; das zweyte oder erste in der zweyten Verticalreihe a a b.

14. Ferner multiplicirt man die zweyte Potenz mit b, welches wiederum eine Sammlung von sechs Reihen gibt, welche aber eine Stelle weiter rechter Hand als die vorige (13.) anfängt, da das erste Glied a a b ist.

15. Die Multiplication mit c gibt wieder eine solche Sammlung, welche noch eine Stelle weiter nach der rechten Hand zu, anfängt, da ihr erstes Glied a a c ist.

16. Dieses Fortrücken findet bey allen folgenden Sammlungen Statt. Die letzte Sammlung, welche durch die Multiplication der zweyten Potenz mit f entsteht, fängt sich in der sechsten Stelle an; Ihr erstes Glied ist a a f.

17. Da nun in jeder dieser sechs Sammlungen der dritten Potenz, die Anzahlen der Glieder in

den Verticalreihen eben so wie in der zweyten Potenz folgende sind: |1|2|3|4|5|6|5|4|3|2|1| so finden sich die Mengen der Glieder in den Vertikalreihen der dritten Potenz, wenn man die eben hingeschriebene Zahlenreihe mit Beobachtung jenes Fortrückens sechsmal untereinander schreibt und addirt.

1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1					
	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1				
		1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1			
			1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1		
				1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	
					1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

18. Mitthin findet sich für drey Würfel

Werthe	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
s =	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

S = 216.

19. Bey vier Würfeln müſste man die vierte Potenz machen. Aus obigen Betrachtungen (13 .. 17) hier fortgesetzt, ergibt sich, daſs aus jeder der sechs Sammlungen der dritten Potenz, wenn sie mit a mit b .... mit f multiplicirt wird, sechs ähnliche Sammlungen in der vierten Potenz entstehen.

20. Diese sechs will ich zusammen als eine Sammlung der vierten Potenz ansehen. Es gibt

von diesen Sammlungen sechs, jede sechsmal gröſser als die der dritten Potenz, von welcher sie abstammen. Jede folgende rückt eine Stelle weiter nach der rechten Hand, weil die, von der sie abstammt, in der dritten Potenz so fortrückte.

21. Die Mengen der Glieder in den Verticalreihen, oder die Mengen der Würfe von einerley Werth, finden sich folglich für die vierte Potenz auf ähnliche Art wie in (17.) für die dritte, wenn man die Zahlenreihe | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 25 | 27 | ..... | 1 | mit Beobachtung jenes Fortrückens sechsmahl untereinander schreibt und addirt.

22. Man erhält also für vier Würfel folgendes:

Werthe	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	.....	24
s =	1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104	80	.....	1

S = 1296.

23. Auf ähnliche Art kann man auf die fünfte, sechste und folgende Potenzen fortschlieſsen. Man kann sich indeſs auch die Mühe ersparen, die Reihen der vorigen Potenz wie (17.) untereinander zu schreiben, wenn man überlegt, wie die Glieder dieser Zahlreihen entstehen.

24. Das erste Glied ist immer = 1. Das m te Glied in der Reihe der n ten Potenz entsteht dadurch, daſs man zu dem m — 1 ten Gliede dieser Reihe das m te Glied der Reihe der n — 1 ten Po-

tenz addirt, und wenn m gröſser als 6 ist, das m — 6 te Glied der n — 1 ten Potenz abzieht.

25. Dieſs würde bequemer durch folgenden Ausdruck dargestellt werden, bey dem hier wohl keine Miſsdeutung zu befürchten ist.

$$m\,G^{n} = (m-1)\,G^{n} + m\,G^{n-1} - (m-6)\,G^{n-1}.$$

26. Zum Beyspiel: Das sechste Glied der Reihe der vierten Potenz = 56 entsteht dadurch, daſs man zum fünften Gliede eben dieser Reihe = 35 das sechste Glied der Reihe der dritten Potenz = 21 addirt.

Das neunte Glied = 125 entsteht, indem man zum achten Gliede = 104 das neunte Glied der dritten Potenz = 27 addirt; und das dritte Glied der Reihe der dritten Potenz = 6 abzieht. 125 = 104 + 27 — 6.

Die sechs ersten und sechs letzten Glieder jeder solcher Zahlenreihe sind figurirte Zahlen.

Auf diese Weise ist die beygefügte Tafel ⊙ verfertigt, welche die Mengen der möglichen Würfe mit einem, mit zwey ...... mit acht Wrüfeln enthält.

27. Aufgabe: zu finden, wie groſs die Wahrscheinlichkeit sey, mit einer ge-

Zu Seite 74.

I. ⊙

Tafel, welche die Mengen aller möglichen Würfe für alle Nummern enthält, die mit 1, 2, ... 8 Würfeln geworfen werden können.

Nummer der Würfe.	Anzahl der Würfel 1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	1	1						
3	1	2	1					
4	1	3	3	1				
5	1	4	6	4	1			
6	1	5	10	10	5	1		
7		6	15	20	15	6	1	
8		5	21	35	35	21	7	1
9		4	25	56	70	56	28	8
10		3	27	80	126	126	84	36
11		2	27	104	205	252	210	120
12		1	25	125	305	456	462	330
13			21	140	420	756	917	792
14			15	146	540	1161	1667	1708
15			10	140	651	1666	2807	3368
16			6	125	735	2247	4417	6147
17			3	104	780	2856	6538	10480
18			1	80	780	3431	9142	16808
19				56	735	3906	12117	25488
20				35	651	4221	15267	36688
21				20	540	4332	18327	50288
22				10	420	4221	20993	65808
23				4	305	3906	22967	82384
24				1	205	3431	24017	98813
25					126	2856	24017	113688
26					70	2247	22967	125588
27					35	1666	20993	133288
28					15	1161	18327	135954
29					5	756	15267	133288
30					1	456	12117	125588
31						252	9142	113688
32						126	6538	98813
33						56	4417	82384
34						21	2807	65808
35						6	1667	50288
36						1	917	36688
37							462	25488
38							210	16808
39							84	10480
40							28	6147
41							7	3368
42							1	1708
43								792
44								330
45								120
46								36
47								8
48								1
S =	6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616

II.

Tafel, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, mit 1, 2, ... 8 Würfeln einen Wurf von einer bestimmten Nummer zu treffen und zu fehlen. Die Wahrscheinlichkeit zu treffen immer = 1.

Nummer der Würfe.	Anzahl der Würfel							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	5							
2	5	35						
3	5	17	215					
4	5	11	71	1295				
5	5	8	35	323	7775			
6	5	6,2	20,6	128,6	1554,2	46655		
7		5	13,4	63,8	517,4	7775	279935	
8		6,2	9,285	36,028	221,171	2220,714	39989,857	1679615
9		8	7,64	22,142	110,058	832,142	9996,714	209951
10		11	7	15,2	60,714	369,285	3331,571	46655
11		17	7	11,461	36,931	184,142	1332,028	13995,8
12		35	7,64	9,368	24,495	101,315	604,922	5088,745
13			9,285	8,214	17,514	60,714	304,273	2119,727
14			13,4	7,876	13,4	39,186	166,928	982,381
15			20,6	8,214	10,944	27,004	98,727	497,697
16			35	9,368	9,579	19,763	62,376	272,239
17			71	11,461	8,969	15,336	41,810	159,268
18			215	15,2	8,969	12,598	29,620	98,929
19				22,142	9,579	10,944	22,102	64,898
20				36,028	10,944	10,053	17,336	44,781
21				63,8	13,4	9,77	14,274	32,399
22				128,6	17,514	10,053	12,334	24,522
23				323	24,495	10,944	11,188	19,387
24				1295	36,931	12,598	10,655	15,997
25					60,714	15,336	10,655	13,773
26					110,058	19,763	11,188	12,381
27					221,171	27,004	12,334	11,601
28					517,4	39,186	14,274	11,354
29					1554,2	60,714	17,336	11,601
30					7775	101,315	22,102	12,381
31						184,142	29,620	13,773
32						369,285	41,810	15,997
33						832,142	62,376	19,387
34						2220,714	98,727	24,522
35						7775	166,928	32,399
36						46655	304,273	44,781
37							604,922	64,898
38							1332,028	98,929
39							3331,571	159,268
40							9996,714	272,239
41							39989,857	497,697
42							279935	982,381
43								2119,727
44								5088,745
45								13995,8
46								46655
47								209951
48								1679615

Beyspiel: man kann 98,929 . . Thaler gegen 1 Thaler wetten, daſs der Andere nicht mit acht Würfeln den Wurf 18 oder den Wurf 38 treffen werde.

gebnen Anzahl Würfel einen Wurf von einer bestimmten Nummer zu thun.

Auflösung. Die Wahrscheinlichkeit, einen Wurf von einer bestimmten Nummer zu thun, verhält sich zu der Wahrscheinlichkeit, ihn nicht zu thun, wie $s : S - s = 1 : \frac{S - s}{s} = 1 : \frac{S}{s} - 1$

28. Hiernach ist die Tafel ☽ verfertigt; welche das Verhältnifs der Wahrscheinlichkeit bey jedem Wurf mit einem, mit zwey ...... mit acht Würfeln angibt; die Wahrscheinlichkeit zu treffen immer $= 1$ gesetzt. Die Wahrscheinlichkeit zu fehlen oder $\frac{S - s}{s}$ ist darin bis auf Tausendtel berechnet.

29. Aufgabe: zu finden, wie grofs die Wahrscheinlichkeit sey, in den sogenannten Glücksbuden zu gewinnen, wo einige der Würfe von mitlerm Werthe Nieten, die übrigen gröfsern oder kleinern Würfe aber Gewinner oder Treffwürfe sind.

Auflösung. Die Menge aller möglichen Nieten (nicht blofs der Nummern, auf welche Nieten fallen) sey $= N$; aller möglichen Treffer $= T$, so verhält sich die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, zu der Wahrscheinlichkeit zu verlieren, wie $T : N = 1 : \frac{N}{T}$

30. Der Billigkeit gemäſs sollte doch wohl der Vortheil auf Seiten des Besitzers der Glücksbude und auf Seiten des Einsetzers gleich seyn. Da der erstere aber davon leben will, so ist schon ohnehin zu vermuthen, daſs die Sache sich anders verhalte.

31. Der Einsatz sey $= E$. Der Betrag aller möglichen Gewinne, oder der sämtlichen Ausgabe des Besitzers, in der Zeit, da die ganze Reihe aller möglichen Fälle durchgespielt wurde $= W$; das arithmetische Mittel hievon oder das, was der Einsetzer, im Fall er gewinnen sollte, im Durchschnitt zu erwarten hat $= \frac{W}{T} = M$. Der reine mittlere Gewinn $= M - E$. Der Billigkeit gemäſs, muſs der Einsetzer, im Fall er gewinnt, im Durchschnitt so viel Mahl mehr rein zu gewinnen hoffen können, als er eingesetzt hat: so viel Mahl die Wahrscheinlichkeit zu verlieren gröſser ist, als die zu gewinnen: oder es muſs sich verhalten.

$$E : M - E = T : N.$$

Also muſs seyn

$$M - E = \frac{N}{T} E$$

und

$$M = \frac{N}{T} E + E = \left(\frac{N}{T} + 1\right) . E$$

32. Ist dieses, so ist

$$W = M T = \left(\frac{N E}{T} + E\right) T = N E + T E = (N + T) E = S E$$

oder die sämtliche Ausgabe = W ist der sämtlichen Einnahme = S E gleich; während der Zeit, da die ganze Reihe möglicher Fälle durchgespielt wurde; und am Ende dieser Periode hätte keiner verloren oder gewonnen.

33. Die Gröſse der Gewinne, welche auf jede Nummer billiger Weise gesetzt seyn sollten, läſst sich folgender Maſsen bestimmen. Die Anzahl der gewinnenden Nummern sey = p. Der sämtliche Gewinn, auf alle mögliche Fälle einer jeden Nummer zusammen genommen, müſste also seyn $= \frac{W}{p} = \frac{S E}{p}$

Folglich: da die Gewinne desto gröſser seyn müssen, je seltener die Würfe sind: so ist der Gewinn auf jeden einzelnen Wurf $= \frac{S \,.\, E}{p \,.\, s \,.}$ wo s veränderlich ist. (2.)

34. Die Gewinne, wie sie in den Glücksbuden angesetzt werden, sind der Formel (33.) nicht gemäſs. Die Einnahme des Besitzers, während der Zeit, wo die ganze Reihe möglicher Fälle durchgespielt worden, = S E ist da weit gröſser als die Ausgabe = W.

35. Es sey $W = SE - q$.
Also der mittlere Gewinn, welchen der Einsetzer, Falls er gewinnt, hoffen kann $= \frac{SE - q}{T}$

Er sollte aber nach (31; 32) seyn $= \frac{SE}{T}$ wenn die Gröſse des Gewinnes der Wahrscheinlichkeit zu verlieren, das Gleichgewicht halten soll.

Er ist also um $\frac{q}{T}$ kleiner als er seyn sollte.

36. Das was man billiger Weise zu hoffen haben sollte, verhält sich zu dem, was man wirklich zu hoffen hat, Falls man gewinnt, wie

$$\frac{SE}{T} : \frac{SE - q}{T} = SE : SE - q = 1 : \frac{SE - q}{SE} = 1 : 1 - \frac{q}{SE}$$

37. Auf einem Jahrmarkte traf ich neulich einen Mann mit einer solchen Glücksbude. Es wurde mit acht Würfeln gespielt. Die Würfel waren nicht ausgegossen oder sonst unrichtig. Auch wäre mechanischer Vortheil unnöthig, da der arithmetische schon groſs genug auf Seiten des Besitzers ist.

Unter den ein und vierzig Nummern von 8 bis 48, welche mit acht Würfeln geworfen werden können, waren nur zwölf Nummern von 22 bis 33, worauf Nieten fielen. Auf die übrigen neun und zwanzig Nummern von 8 bis 21 und von 34 bis 48 fielen Gewinne.

Zu Seite 79.

III. ☿

Tafel der Gewinne einer Glücksbude wie sie eigentlich seyn sollten.

Nummer der Würfe.	Gewinne für den Einsatz E = 1.	Gewinne für den Einsatz E = 4 Groschen = $\frac{1}{6}$ Thaler.
8	57917,7931	9652,9655 Thaler (23 Groschen
9	7239,7241	1206,6206 — (14 —
10	1608,8275	268,1379 — (3 —
11	482,6482	80,4413 — (10 —
12	175,5084	29,2514 — (6 —
13	73,1286	12,1881 — (4 —
14	33,9097	5,6516 — (15 —
15	15,1488	2,5248 — (12 —
16	9,4221	1,5703 — (13 —
17	5,5265	0,9210 — (22 —
18	3,4458	0,5743 — (13 —
19	2,2723	0,3787 — (9 —
20	1,5786	0,2631 — (6 —
21	1,1517	0,1919 — (4 —
22 . . . 33	Nieten.	Die hier hinter der Klammer stehenden Zahlen geben den Betrag der Decimalbrüche in ganzen Groschen an.
34	0,8801	0,1466 — (3 —
35	1,1517	0,1919 — (4 —
36	1,5786	0,2631 — (6 —
37	2,2723	0,3787 — (9 —
38	3,4458	0,5743 — (13 —
39	5,5265	0,9210 — (22 —
40	9,4221	1,5703 — (13 —
41	15,1488	2,5248 — (12 —
42	33,9097	5,6516 — (15 —
43	73,1286	12,1881 — (4 —
44	175,5084	29,2514 — (6 —
45	482,6482	80,4413 — (10 —
46	1608,8275	268,1379 — (3 —
47	7239,7241	1206,6206 — (14 —
48	57917,7931	9652,9655 — (23 —

Die sämtlich möglichen Gewinne jeder Nummer betragen immer gleichviel = 9652,9655 . . . Thaler.

Und alle mögliche Gewinne oder die ganze Ausgabe des Besitzers so viel wie die Einnahme beträgt = 279936 Thaler.

Tafel der

|Nummer | Ge

Sehr anlockend für den gemeinen Mann! welcher die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen und zu verlieren nach dem Verhältniſs der Anzahl der gewinnenden und verlierenden Nummern schätzt, und von dem Verhältniſs der Mengen die möglichen Fälle nicht weiſs.

Der Einsatz war vier Groschen, und die Gewinne stiegen von vier Groschen bis zu hundert Thalern.

Wie wenig dessen ungeachtet der Besitzer dabey Gefahr laufe, banquerot zu werden, wird nach Anleitung des Obigen (29 . . . 36) folgender Maſsen erhellen.

38. Aus der Tafel ⊙ wird man finden, daſs bey dieser Einrichtung $N = 1309284$; $T = 370332$ ist. Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen verhält sich also zur Wahrscheinlichkeit zu verlieren wie $1 : \frac{N}{T}$ (29) $= 1 : 3{,}53543 \ldots$.

39. Der mittlere Gewinn müſste also seyn; $M = (3{,}53543 \ldots + 1).\ E$; (31)

Für $E = \frac{1}{6}$ Thaler beträgt dieſs 0,755904 . . . Thaler.

40. Die einzelnen Gewinne, welche auf jede der gewinnenden Nummern gesetzt werden sollten, sind nach (33) in der Tafel ☿ berechnet.

41. So müſste es seyn, wenn der Besitzer und Setzer gleichen Vortheil genieſsen; wenn Einnahme und Ausgabe des Erstern sich gleich seyn sollten (32.)

42. Nun vergleiche man aber die Tafel ♀ welche die Gewinne enthält, wie sie in der Glücksbude wirklich angesetzt waren, mit der Tafel ☿ so wird man sehen, wie weit jene von dieser abweicht.

Die sämtliche Einnahme des Besitzers in der Zeit, wo alle mögliche Fälle vorkommen, ist $= ES = 1679616.4$ Groschen $= 279936$ Thaler.

Dagegen aber die sämtliche Ausgabe oder die Summe aller möglichen Gewinne $= W = 144194$ Thaler.

Also $q = 135742$ Thaler. (35)

Mittler Gewinn $= \frac{W}{T} = \frac{144194}{370332} = 0{,}389283 \ldots$ Thaler. Also verglichen mit (39) um $0{,}366621 \ldots$ Thaler $= \frac{q}{T}$ kleiner als er billig seyn sollte.

Das was man, im Fall man gewinnt, im Durchschnitt billiger Weise sollte zu erwarten haben, verhält sich zu dem, was man wirklich nur zu erwarten hat, wie $0{,}755904 \ldots : 0{,}389283 \ldots$

Also:

eite 80.

vie sie

aller mög-

inne.

Zu Seite 80.

IV. ♀

Tafel der Gewinne einer Glücksbude wie sie wirklich sind.

Nummer der Würfe.	Gewinne gegen 4 Groschen Einsatz.	Sämtlicher Betrag aller möglichen Gewinne.
8	100 Thaler	100 Thaler
9	80 —	640 —
10	60 —	2160 —
11	30 —	3600 —
12	20 —	6600 —
13	10 —	7920 —
14	5 —	8540 —
15	1 —	3368 —
16	— — 16 Groschen	4098 —
17	— — 12 —	5240 —
18	— — 8 —	5602 — 16 Groschen
19	— — 4 —	4248 — — —
20	— — 4 —	6114 — 16 —
21	— — 4 —	8381 — 16 —
22 . . . 33	Nieten.	
34	— — 4 —	10968 — — —
35	— — 4 —	8381 — 16 —
36	— — 4 —	6114 — 16 —
37	— — 4 —	4248 — — —
38	— — 8 —	5602 — 16 —
39	— — 12 —	5240 — — —
40	— — 16 —	4098 — — —
41	1 — — —	3368 — — —
42	5 — — —	8540 — — —
43	10 — — —	7920 — — —
44	20 — — —	6600 — — —
45	30 — — —	3600 — — —
46	60 — — —	2160 — — —
47	80 — — —	640 — — —
48	100 — — —	100 — — —

Summe aller möglichen Gewinne, oder der sämtlichen Ausgabe des Besitzers = 144194 Thaler.

Summe der sämtlichen Einnahme — 279936 Thaler.

Also: das, was man, im Fall man gewinnt, hoffen darf, beträgt nur wenig mehr als die Hälfte dessen, was man eigentlich zu hoffen haben sollte.

43. Statt der acht Würfel wurde in der Glücksbude auch mit acht und vierzig hölzernen Eyern gespielt, welche je sechs und sechs mit den Nummern 1 bis 6 bezeichnet waren, so daſs sechs solcher Eyer hier das sind, was vorher ein Würfel war. Alle werden in einen groſsen Beutel gethan und durcheinander gerüttelt. Der Einsetzer nimmt unbesehends acht Eyer heraus. Die Sache ist, wie man sieht, wesentlich dieselbe wie mit den Würfeln, nur in der Form verändert. Diese Veränderung ist eine Lockspeise mehr; aus eben der Ursache waren auch hier gar keine Nieten, sondern der Einsatz zwölf Groschen, und niedrige Gewinne zu sechs Groschen.

44. Die Gewinne, bey dem Würfelspiel sowohl als bey dem Eyerspiel wurden zuvörderst in Galanteriewaaren angebothen — also zugleich ein merkantilischer Vortheil! — jedoch wurden sie auch, wenn der Einsetzer es verlangte, in baarem Gelde ausgezahlt.

Urkundlich dessen waren Nummern und Gewinne auf einem Bogen Papier in forma patenti aufgesetzt, welcher zu jedermanns Wissenschaft hingelegt wurde, damit alles recht ehrlich — aussähe.

Des Besitzers persönliche Ehrlichkeit brauchte man auch gerade nicht zu bezweifeln, obgleich sein Spiel nicht das ehrlichste war. Allem Anschein nach, mochte er an der Berechnung desselben sehr unschuldig seyn.

III.

Vom künstlichen

Kartenmischen.

Vom künstlichen Kartenmischen.

Man kann zwey Gattungen von künstlichen Kartenmischungen unterscheiden.

Bey der ersten Gattung *scheint* die Lage der Karten nur verändert zu werden, bleibt aber in der That die vorige. Durch eine schnelle Bewegung der Finger läfst es sich leicht machen, dafs es den Augen der Unerfahrnen vorkommt, als ob die Karten wirklich gemischt würden, da sie doch im Grunde eben so wieder aufeinander gelegt werden, wie sie zuvor lagen. Man könnte diefs das *Scheinmischen* nennen.

Bey der zweyten Gattung, mit welcher wir uns hier einige Augenblicke beschäftigen wollen, wird die Lage der Karten wirklich verändert, und das Künstliche besteht darin, dafs man diese Veränderungen in seiner Gewalt hat, die künftigen durch ein oder mehrmahliges Mischen entstehenden Ordnungen vorherbestimmen, und nach einer zuvor gemachten Tafel leicht übersehen kann.

Diese letzte Gattung verdient also, wie man sieht, mehr Aufmerksamkeit, und ist über dieſs auch schwerer in der Ausführung. Beyde Gattungen haben mehrere Arten, die ein jeder, welcher Gebrauch davon machen will, sich selbst nach Gefallen wählen, oder erfinden kann.

Handgriffe, durch welche beyde Gattungen ausgeführt werden können, findet man in Wieglebs natürlicher Magie angegeben. Sie gehören hier weiter nicht zu unserm Zwecke. Die Hauptsache indessen, um besonders Mischungen der zweyten Gattung mit Ungezwungenheit und Sicherheit auszuführen, besteht in einer groſsen Fertigkeit des Daumens der linken Hand, um eine bestimmte Anzahl Kartenblätter mit möglichster Geschwindigkeit aus der linken Hand in die rechte zu schieben, ohne ein Blatt zuviel oder zu wenig auf einmahl zu nehmen. Es erfordert eine ziemlich anhaltende Uebung, ehe man es so herausbringt, daſs bloſs das Ungefähr alles zu bewirken scheine. Gut ausgeführt, thut es aber auch überraschende Wirkungen, welche an mehrern Orten nachgelesen werden können.

Meine Absicht ist hier nur, in der Kürze zu zeigen, wie bey der zweyten vorzüglichern Gattung des künstlichen Mischens, in jedem Falle übersehen werden könne, welche Veränderungen in der Lage der Karten dadurch entstehen, und wie diese Veränderungen durch alle, von wiederhohlten Mischungen hervorgebrachte Ordnungen, sich fortpflanzen. Nicht so wohl, wie man bemerken wird, der Kartenkünste wegen, als weil es eine gute Uebung ist, nach gewissen Gesetzen fortgehende Veränderungen in den Ordnungen der Dinge zu übersehen.

---

1. Wir wollen die Blätter, so wie sie in der für die erste oder Anfangsordnung angenommenen Lage liegen, nach der Reihe, durch A B C D u. s. w. bezeichnen.

2. Zuerst ist zu überlegen, in welche Stelle das Blatt A nach dem Mischen zu liegen kommt, wenn die Anzahl der Kartenblätter und die Mischungsmethode gegeben sind.

3. Die Anzahl der sämmtlichen Kartenblätter sey = N.

4 Die Mischungsmethode sey in allgemeinen Ausdrücken folgende:

Zuerst werden einige Kartenblätter aus der linken Hand, in welcher Anfangs das ganze Spiel liegt, in die rechte Hand geschoben. Diese sollen die Anfangsblätter heifsen. Ihre Anzahl = a.

Hierauf werden einige Blätter über die Anfangsblätter geschoben. Ihre Anzahl = b.

Sodann einige unter die Anfangsblätter. Ihre Anzahl = c.

Und so werde fortgefahren, nemlich immer b Blätter nach oben, und c Blätter nach unten in die rechte Hand geschoben.

5. Es ist klar, dafs dieses so oft wiederhohlt werden kann, als b + c Blätter in dem, nach Abzug der Anfangsblätter noch übrigen Kartenhaufen enthalten sind. Die Anzahl dieser Wiederhohlungen, welche wir Mischungsperioden nennen können, ist demnach $= \frac{N - a}{b + c}$

6. Wenn dieser Quotient nicht blofs Ganze enthält, d. h. wenn, nachdem man einige Mahl

b Karten oben, und c Karten unten gelegt hat, nicht mehr gerade so viel Karten übrig sind, um eine Mischungsperiode noch vollständig zu machen, so wird der Rest, wenn er nicht mehr als b beträgt, ganz, oben hingelegt, sonst kommt begreiflich der Theil, um welchen er b übertrifft, nach unten.

7. Die Ganzen des Quotienten (5) oder die Anzahl der vollständigen Mischungsperioden heiſse $= Q$, der Rest $= R$, der Theil, um welchen er gröſser ist als b, sey $= x$, welches also in den Fällen, wo R nicht gröſser als b ist, $= 0$ wird; jedoch nicht negativ soll verstanden werden, wenn $R < b$.

8. Die Menge der Kartenblätter, welche auf die erwähnte Art nach und nach von der linken in die rechte Hand gebracht sind, ist also erstlich a Anfangsblätter, sodann in den vollständigen Mischungsperioden $Q\,(b + c)$; wovon $Q \,.\, b$ oben; und $Q \,.\, c$ unten liegen. Zuletzt noch der Rest R, wovon, wenn er gröſser ist als b, der Theil x unten, der andre Theil $R - x = b$ oben hingelegt wird. Wenn er aber nicht gröſser als b ist, so liegt er ganz oben, da wir ihn aber auch der Allgemeinheit wegen durch $R - x$ be-

zeichnen können, weil da $x = 0$ nicht oben negativ verstanden werden soll.

9. Die Karten liegen folglich nach dem Mischen in folgender Ordnung untereinander.

Obere Abtheilung.	
Ganz oben	$R - x$
Hiernächst	$Q \cdot b$
Untere Abtheilung.	
Anfangsblätter	a
Hiernächst	$Q \cdot c$
Ganz unten	x

10. Die Anzahl der Karten in der obern Abtheilung sey $= P = R - x + Q \cdot b$.

11. Das Blatt A, als das erste der Anfangsblätter, hat also nach dem Mischen die $P + 1$ te oder $R - x + Q \cdot b + 1$ te Stelle.

12. Exempel. Es sey $N = 24$, $a = 2$, $b = 2$, $c = 3$; Wiegleb I. B. S. 405, so ist $\frac{N - a}{b + c} = \frac{22}{5}$, $Q = 4$, $R - x = 2$, $P = 2 + 4 \cdot 2 = 10$, $P + 1 = 11$.

Das Blatt A bekommt also bey dieser Anzahl Karten und bey dieser Mischungsmethode die eilfte Stelle in der Ordnung nach dem Mischen.

13. Die beyden ersten Ordnungen in diesem Exempel wären also folgende:

Stellen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Ordnung I	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
II	X	Y	S	T	N	O	H	I	C	D	A	B	E	F	G	K	L	M	P	Q	R	U	V	W

14. Das Blatt A rückt also aus der ersten Stelle in die eilfte, B aus der zweyten in die zwölfte; C aus der dritten in die neunte; D aus der vierten in die

zehnte; E aus der fünften in die dreyzehnte u. s. w. Diese Verrückungen aus den Stellen der vorigen Ordnung in die Stellen der folgenden, ſtellt folgende Tafel dar, welche nicht nur für die erste und zweyte Ordnung, sondern wie man leicht einsehen wird, für jede zwey aufeinander folgende Ordnungen gilt.

I Aus der Stelle	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
II In die Stelle	11	12	9	10	13	14	15	7	8	16	17	18	5	6	19	20	21	3	4	22	23	24	1	2

15. So bald nur die Verrückungen aus der ersten Ordnung in die zweyte bestimmt sind, so lassen sich die, für die übrigen Ordnungen, welche durch eine zweyte, dritte, vierte und folgende Mischungen entstehen, ohne Mühe daraus herleiten. Wollte man z. B. wissen, welche Stellen die Dinge in der dritten Ordnung einnehmen würden, so sähe man aus der Tafel (14), daſs A aus der eilften in die siebzehnte, B aus der zwölften in die achtzehnte, C aus der neunten in die achte u. s. w. fortrücken müssen.

16. Wollte man einen allgemeinen Ausdruck haben, wo ein gewisses Blatt z. B. die Spadille, dessen Stelle in der Ordnung I bekannt ist, nach dem Mischen hinkomme, so würden dazu folgende Betrachtungen dienen.

17. Gesetzt die Spadille habe in I die m te Stelle gehabt, so war die Anzahl der Mischungsperioden, bis man an dieses Blatt inclusive kam $= \frac{m - a}{b + c}$

18. Die Ganzen dieses Quotienten, oder die Anzahl der vollständigen Mischungsperioden bis dahin sey $= q$, so daſs also in denselben $q.(b + c)$ Kartenblätter aus der linken in die rechte Hand gebracht sind.

19. Ist der Rest, der etwa aufser diesen vollständigen Mischungsperioden noch übrig bleibt, bis man die Spadille erreicht, nicht gröfser als b, also entweder $= b$, oder $< b$, so kommt sie in die obere Abtheilung, sonst in die untere.

20. Im ersten Falle ist begreiflich die Anzahl der zwischen dem Blatte A und der Spadille liegenden Blätter $= q \cdot b + d$, wenn der vorhin erwähnte Rest um d kleiner ist als b.

21. Also hat die Spadille alsdann vom Anfange der Ordnung II angerechnet die $(P - q \cdot b - d)$ te Stelle.

22. Exempel. Gesetzt in (13) sey N die Spadille, also $m = 13$; das übrige alles, wie in (12), so ist $\frac{m - a}{b + c} = \frac{11}{5}$; $q = 2$, der Rest $= 1$ also auch $d = 1$, mithin $P - q\,b - d = 10 - 2 \cdot 2 - 1 = 5$. Also das Blatt N, welches in der Ordnung I die dreyzehnte Stelle hatte, bekommt in der Ordnung II die fünfte.

23. Anderes Exempel. Y sey die Spadille, also $m = N = 24$; $\frac{m - a}{b + c} = \frac{22}{5}$; $q = Q = 4$; Rest $= 2 = b$; also $d = 0$, mithin $P - q\,b - d = 10 - 4 \cdot 2 = 2$. Das Blatt Y, welches in der Ordnung I die vier und zwanzigste Stelle hatte, bekommt in der Ordnung II die zweyte.

24. Im zweyten Falle, wo die Spadille unten zu liegen kam (19), ist die Anzahl der in der untern Abtheilung bis auf die Spadille inclusive liegenden Blätter $= a + q \,.\, c + e$ wenn e dasjenige bedeutet, was der Rest über b beträgt.

25. Folglich hat die Spadille in diesem Falle vom Anfange der Ordnung II angerechnet, die $(P + a + q\,c + e)$ te Stelle, q wird wie (17. 18) gefunden, aus m, a, b.

26. Exempel. Gesetzt, das Blatt Q in (13) sey die Spadille, also $m = 16$, das übrige alles wie (12). So ist $\frac{m - a}{b + c} = \frac{14}{5}$, $q = 2$, Rest $= 4$, also $e = 2$.

Mithin $(P + a + qc + e) = 10 + 2 + 2 \,.\, 3 + 2 = 20$. Das Blatt Q, welches in der Ordnung I die sechszehnte Stelle hatte, bekommt in der Ordnung II die zwanzigste.

27. Anderes Exempel. Das Blatt W sey die Spadille. Also $m = 22$, $\frac{m - a}{b + c} = \frac{20}{5}$, $q = 4$, $e = 0$, mithin ist $P + a + qc + e = 10 + 2 + 4 \,.\, 3 = 24$. Das Blatt W, welches in der Ordnung I die zwey und zwanzigste Stelle hatte, bekommt in der Ordnung II die vier und zwanzigste.

28. Soll also n überhaupt die Zahl der Stelle bedeuten, welche ein Blatt, das in der vorhergehenden Ordnung das m te war, in der folgenden Ordnung einnimmt, so ist entweder

$$n = P - qb - d \quad (21.)$$

oder $$n = P + a + qc + e \quad (25.)$$

je nachdem der Rest, der bey der Division $\frac{m - a}{b + c}$ übrig bleibt, nicht gröſser oder gröſser als b ist.

29. War die Spadille eine von den Anfangskarten, also m nicht gröſser als a; so ist von selbst klar, daſs $n = P + m$ sey.

30. Die Frage (16.) umgekehrt, läſst sich ebenfalls im Allgemeinen bestimmen, welche Stelle ein Blatt in der vorhergehenden Ordnung muſs eingenommen haben, wenn die Stelle, wo es in der nächstfolgenden liegt, nebst Anzahl der Karten und Mischungsmethode gegeben ist.

31. Das Blatt liege also in der n ten Stelle der nachfolgenden Ordnung; m wird gesucht. n, N, a, b, c sind gegeben, folglich auch noch (5, 7) Q und R; mithin auch P (10) bekannt.

32. Erster Fall. Wenn $P > n$, d. h. wenn das Blatt in der obern Abtheilung liegt, so ist die Anzahl der zwischen ihm und A liegenden Blätter $= P - n = q \cdot b + d$, also ist hierdurch q bekannt, aber die Ganzen des Quotienten $\frac{P - n}{b}$

33. So

33. So oft wie nun in $P - n$ der obern Abtheilung b enthalten ist, eben so oft ist auch in der untern Abtheilung außer den Anfangskarten c enthalten, bis man an die Spadille inclusive kommt, oder die Anzahl der überhaupt bis auf die Spadille inclusive gemischten Karten, oder $m = a + q(b + c) + b - d$.

34. Exempel. Das Blatt N hat in (13) in der Ordnung II die fünfte Stelle, also $n = 5$. Das übrige wie (12).

Also $\frac{P - n}{b} = \frac{5}{2}$, $q = 2$, der Rest $= 1$; folglich auch $d = 1$, mithin $m = 2 + 2 . (2 + 3) + 2 - 1 = 13$. Das Blatt 77 hatte also in der Ordnung I die dreyzehnte Stelle, wie auch die Tafel zeigt.

35. Zweyter Fall. Wenn $n > P$, d. h. wenn das Blatt in der untern Abtheilung der folgenden Ordnung liegt, so ist es, da es von vorne angerechnet die n te Stelle hat, von A an gerechnet, das $(n - P)$ te, und $n - P = a + q . c + e$, also $n - P - a = qc + e$. Die Ganzen des Quotienten $\frac{n - P - a}{c}$ sind $= q$

36. Da nun außer den Anfangsblättern in der untern Abtheilung q mahl c Kartenblätter liegen, so sind gewiß in der obern Abtheilung wenigstens auch q mahl b Blätter.

37. Aber wenn unten noch e Statt findet, so liegen in der obern außer den q mahl b Blättern, noch einmahl b . als zu dem Reste gehörig (24).

38. Also die Anzahl der überhaupt bis auf die Spadille inclusive gemischten Karten oder $m = a + q . (b + c) + b + e$.

39. Findet kein e Statt, so fällt das letzte $b + e$ ganz weg. Es können zwar wohl außer q . b noch einmahl b Karten oben liegen, wenn auch unten kein e liegt, aber denn läge die Spadille, als das letzte Blatt dieser letzten b Karten in der obern Abtheilung, also wäre da $P > n$, welches für den ersten Fall (32.) gehört.

40. Exempel. Das Blatt L hat in der Ordnung II (13.) die siebzehnte Stelle. $n = 17$. Das übrige wie (12). Also $\frac{n - P - a}{c} = \frac{17 - 10 - 2}{3} = \frac{5}{3}$, $q = 1$ der unterliegende Theil des Restes (24) $e = 2$, welches also voraussetzt, daß in der obern Abtheilung außer den q . b noch ein b liege. Die Anzahl der bis auf das Blatt L gemischten Karten, ist demnach (38), $m = 2 + 1 . (2 + 3) + 2 + 2 = 11$, wie in der Tafel. (13)

41. Fällt n zwischen P, und $P + a$; so sieht jeder ein, daß $m = n - P$ sey.

42. Noch wollen wir ein Beyspiel für andere Werthe von N a b c beybringen, und da

A B C . . . . . eben so gut jede andre Dinge als Kartenblätter bedeuten können, so mögen es hier der Aehnlichkeit wegen Soldaten seyn, mit denen die großen Herren ungefähr eben so spielen, wie unser eins mit jenen — freylich mit dem kleinen Unterschiede, daſs wir dabey bloſs wegen Zeit und Geld verantwortlich sind, dagegen . . . . . u. s. w. Kleine Fürsten, welche die übrigen doch nicht zum ernstlichen Spiele, sondern nur zum Zeitvertreibe gebrauchen, können dergleichen Kunststücke damit machen, und das Exempel zum Spaſs probiren lassen, wenn N ihnen nicht zu groſs ist.

43. Exempel:

A ——————— R ——————— B
C —————————————————— D.

Tausend Soldaten stehen zuerst in der geraden Linie A B, und sollen durch eine taktische Mischung in die gerade Linie C D rücken, so daſs beide Linien gleich seyn, und keine die andre überflügele, wenn man nehmlich sich vorstellt, daſs ein drittes hinter A B stehendes Glied in A B rückt, so wie dieſs in C D kommt. Die Mischungsmethode soll folgende seyn. Zuerst brechen zwölf Mann vom rechten Flügel A ab, und stellen sich in C D, wo? das ist die Frage. Hierauf, so wie sie auf einander folgen, stellen sich neun Mann zur rechten der zwölf ersten, das heifst in diesem Falle, nach C zu, und sieben zur linken nach D zu. Diefs wird so lange fortgesetzt, bis alle wieder in einer geraden Linie in C D stehen. Wo mufs der Flügelmann, der vorher in A stand, sich in C D hinstellen, damit sich alle übrigen ohne zu rücken gehörig neben einander stellen können?

Hier ist $N = 1000$, $a = 12$, $b = 9$, $c = 7$, P, gesucht.

$\frac{N - a}{b + c} = \frac{1000 - 12}{9 + 7} = \frac{988}{16}$, welches gibt $Q = 61$ und $R = 3$.

Da hier R kleiner ist als b, so ist nach (7) $x = 0$, also $P = R - x + Q \cdot b = 3 + 61 \cdot 9 = 552$. $P + 1 = 553$. Der Flügelmann bey A stellt sich also in der vordern Linie gerade vor denjenigen hin, welcher in der hintern Linie der 553ste war, so können sich Alle gehörig neben einander stellen.

44. Wollte ein gewisser Mann R, der z. B. in A B der 749ste war, wissen, wo er in der vordern Linie zu stehen kommen werde, so würde er diefs nach (20.) so zu überlegen haben.

Es ist hier $m = 749$, $\frac{m - a}{b + c} = \frac{749 - 12}{16} = \frac{737}{16}$. Die Ganzen davon $q = 46$; der Rest

$= 1$, also $d = 8$; er kommt also von den zwölf ersten angerechnet nach C hin zu stehen, was wir vorhin obere Abtheilung nannten, und es ist aus (28. 21.) $n = P - qb - d = 552 - 46 \cdot 9 - 8 = 130$. Der Mann R wird in der vordern Linie der hundert und dreyſsigste.

45. Aehnliche Exempel für die Fälle (24, 32, 35) überlassen wir dem Liebhaber selbst zu machen.

46. Man wird schon aus dem bisherigen auf die Vermuthung kommen, daſs nach einer gewissen Anzahl von Mischungen, welche immer auf dieselbe Art wiederhohlt würden, jedes Ding endlich wieder an seiner anfänglichen Stelle werde zu liegen kommen, oder daſs nach einer gewissen Anzahl von Ordnungen, wieder eine Ordnung zum Vorschein kommen werde, welche ganz dieselbe ist wie die Anfangsordnung, oder sich mit derselben deckt. Die Ordnungen von der Anfangsordnung bis zu der deckenden, müssen alle von einander verschieden seyn, und alle Veränderungen in sich fassen, welche durch eine bestimmte Mischungsmethode und bey einer bestimmten Anzahl der Dinge möglich sind. Die letzte dieser von einander verschiednen Ordnungen, welche vor der, mit der Anfangsordnung sich deckenden zunächst vorhergeht, soll die Schluſsordnung heiſsen.

47. Für die Werthe in dem Exempel (12), sind die Stellen, durch welche jedes Ding nach und nach fortrückt, in den Vertikalreihen der beygefügten Tafel angezeigt, welche demnach alle Veränderungen enthält, die mit vier und zwanzig Dingen durch die in (12) angegebne Mischungsmethode möglich sind.

48. Die Entwerfung einer solchen Tafel hat nicht so viel Schwierigkeit, als vielleicht mancher bey dem ersten Anblick der beträchtlichen Menge von Zahlen vermuthen könnte. Am bequemsten ist es, wenn man jede Vertikalreihe für sich herunterschreibt: man bemerkt alsdann bald, daſs jeder Buchstab nur durch eine gewisse Tour von Zahlen geht, nach deren Vollendung, diese wieder nach derselben Ordnung auf einander folgen; und daſs ferner mehrere Buchstaben eine und ebendieselbe Tour mit einander gemein haben, nur daſs verschiedne Buchstaben auch bey verschiedenen Zahlen anfangen.

49. So gehen in der Tafel (47) die Buchstaben:

A, L, R, Y, X

durch die Stellen

1, 11, 17, 21, 23

welches ihre Stellenzahlen in der ersten Orduung waren.

	R	S	T	U	V	W	X	Y
I	17	18	19	20	21	22	23	24
II	21	3	4	22	23	24	1	2
III	23	9	10	24	1	2	11	12
IV	1	8	16	2	11	12	17	18
V	11	7	20	12	17	18	21	3
VI	17	15	22	18	21	3	23	9
VII	21	19	24	3	23	9	1	8
VIII	23	4	2	9	1	8	11	7
IX	1	10	12	8	11	7	17	15
X	11	16	18	7	17	15	21	19
XI	17	20	3	15	21	19	23	4
XII	21	22	9	19	23	4	1	10
XIII	23	24	8	4	1	10	11	16
XIV	1	2	7	10	11	16	17	20
XV	11	12	15	16	17	20	21	22
XVI	17	18	19	20	21	22	23	24
XVII	21	3	4	22	23	24	1	2
XVIII	23	9	10	24	1	2	11	12
XIX	1	8	16	2	11	12	17	18
XX	11	7	20	12	17	18	21	3
XXI	17	15	22	18	21	3	23	9
XXII	21	19	24	3	23	9	1	8
XXIII	23	4	2	9	1	8	11	7
XXIV	1	10	12	8	11	7	17	15
XXV	11	16	18	7	17	15	21	19
XXVI	17	20	3	15	21	19	23	4
XXVII	21	2	9	19	23	4	1	10
XXVIII	23	24	8	4	1	10	11	16
XXIX	1	2	7	10	11	16	17	20
XXX	11	12	15	16	17	20	21	22
XXXI	17	18	19	20	21	22	23	24

Zu Seite 102.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
II	11	12	9	10	13	14	15	7	8	16	17	18	5	6	19	20	21	3	4	22	23	24	1	2
III	17	18	8	16	5	6	19	15	7	20	21	3	13	14	4	22	23	9	10	24	1	2	11	12
IV	21	3	7	20	13	14	4	19	15	22	23	9	5	6	10	24	1	8	16	2	11	12	17	18
V	23	9	15	22	5	6	10	4	19	24	1	8	13	14	16	2	11	7	20	12	17	18	21	3
VI	1	8	19	24	13	14	16	10	4	2	11	7	5	6	20	12	17	15	22	18	21	3	23	9
VII	11	7	4	2	5	6	20	16	10	12	17	15	13	14	22	18	21	19	24	3	23	9	1	8
VIII	17	15	10	12	13	14	22	20	16	18	21	19	5	6	24	3	23	4	2	9	1	8	11	7
IX	21	19	16	18	5	6	24	22	20	3	23	4	13	14	2	9	1	10	12	8	11	7	17	15
X	23	4	20	3	13	14	2	24	22	9	1	10	5	6	12	8	11	16	18	7	17	15	21	19
XI	1	10	22	9	5	6	12	2	24	8	11	16	13	14	18	7	17	20	3	15	21	19	23	4
XII	11	16	24	8	13	14	18	12	2	7	17	20	5	6	3	15	21	22	9	19	23	4	1	10
XIII	17	20	2	7	5	6	3	18	12	15	21	22	13	14	9	19	23	24	8	4	1	10	11	16
XIV	21	22	12	15	13	14	9	3	18	19	23	24	5	6	8	4	1	2	7	10	11	16	17	20
XV	23	24	18	19	5	6	8	9	3	4	1	2	13	14	7	10	11	12	15	16	17	20	21	22
XVI	1	2	3	4	13	14	7	8	9	10	11	12	5	6	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
XVII	11	12	9	10	5	6	15	7	8	16	17	18	13	14	19	20	21	3	4	22	23	24	1	2
XVIII	17	18	8	16	13	14	19	15	7	20	21	3	5	6	4	22	23	9	10	24	1	2	11	12
XIX	21	3	7	20	5	6	4	19	15	22	23	9	13	14	10	24	1	8	16	2	11	12	17	18
XX	23	9	15	22	13	14	10	4	19	24	1	8	5	6	16	2	11	7	20	12	17	18	21	3
XXI	1	8	19	24	5	6	16	10	4	2	11	7	13	14	20	12	17	15	22	18	21	3	23	9
XXII	11	7	4	2	13	14	20	16	10	12	17	15	5	6	22	18	21	19	24	3	23	9	1	8
XXIII	17	15	10	12	5	6	22	20	16	18	21	19	13	14	24	3	23	4	2	9	1	8	11	7
XXIV	21	19	16	18	13	14	24	22	20	3	23	4	5	6	2	9	1	10	12	8	11	7	17	15
XXV	23	4	20	3	5	6	2	24	22	9	1	10	13	14	12	8	11	16	18	7	17	15	21	19
XXVI	1	10	22	9	13	14	12	2	24	8	11	16	5	6	18	7	17	20	3	15	21	19	23	4
XXVII	11	16	24	8	5	6	18	12	2	7	17	20	13	14	3	15	21	2	9	19	23	4	1	10
XXVIII	17	20	2	7	13	14	3	18	12	15	21	22	5	6	9	19	23	24	8	4	1	10	11	16
XXIX	21	22	12	15	5	6	9	3	18	19	23	24	13	14	8	4	1	2	7	10	11	16	17	20
XXX	23	24	15	19	13	14	8	9	3	4	1	2	5	6	7	10	11	12	15	16	17	20	21	22
XXXI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

Die Buchstaben

B, M, S, C, I, H, G, P, T, D, K, Q, U, W, Y

gehen durch die Stellen

2, 12, 18, 3, 9, 8, 7, 15, 19, 4, 10, 16, 20, 22, 24

welches ihre Stellenzahlen in der ersten Ordnung waren.

Die Buchstaben

E, N

gehen immer nur durch die beyden Stellen

5, 13.

Und endlich die beyden noch übrigen Buchstaben

F, O

gehen immer nur durch die Stellen

6, 14.

Wenn daher nur die Tour eines Buchstabens aus (14) hergeleitet ist, so weiſs man schon im voraus, daſs diejenigen Buchstaben, welche in der ersten Ordnung eine Stelle haben, deren Zahl in dieser Tour enthalten ist, eben diese Tour beobachten werden.

Hier sind vier verschiedne Touren, in andern Fällen, z. B. für einen andern Werth von N, können mehr oder weniger, es kann auch wohl nur eine einzige Statt finden, welche also alle Buchstaben durchlaufen, so wie auch wiederum andere

Fälle kommen können, wo ein oder mehrere Buchstaben sich gar nicht verrücken, sondern durch alle Mischungen hindurch immer an der anfänglichen Stelle bleiben.

50 Verlangt man nicht jede Ordnung selbst zu wissen, sondern nur wie viel von einander verschiedne Ordnungen durch eine gewisse Mischungsmethode, bey einer gewissen Anzahl Blätter möglich werden, oder nach wie viel Mischungen alles wieder an dem anfänglichen Ort sey, so ist dazu nicht nothwendig, die Tafel bis auf die Schlufsordnung hinaus zu entwerfen, sondern man braucht nur die verschiednen Touren, wie in diesem Exempel die vier (49) für A B E F hinzuschreiben und zu bemerken, wie viel Glieder jede habe.

Die von A und den correspondirenden Buchstaben hat fünf Glieder; diese Buchstaben kommen also nach fünf; zweymahl fünf, dreymahl fünf u. s. w. Ordnungen an ihrer anfänglichen Stelle.

Die von B und den correspondirenden Buchstaben hat funfzehn Glieder; daher diese Buchstaben nach funfzehn, zweymahl funfzehn, dreymahl funfzehn u. s. w. Ordnungen an ihrer anfänglichen Stelle kommen.

Die von E N und die von F O haben jede nur zwey Glieder, daher diese Buchstaben nach zwey, vier, sechs, acht u. s. w. Ordnungen an ihrer anfänglichen Stelle kommen.

51. Die Anzahl der Ordnungen von der Anfangsordnung bis auf die Schlufsordnung inclusive mufs also nothwendiger Weise zugleich eine fünffache, funfzehnfache, und zweyfache Zahl seyn: oder sie mufs durch 5, 15, 2 ohne Rest dividirt werden können. Diefs findet gewifs Statt, wenn sie $= 5 . 15 . 2 = 150$, oder eine 150fache Zahl ist. Die 151ste Ordnung deckte sich also mit der ersten. Aber man sieht sogleich, dafs noch mehrere Ordnungen vorher gehen können, welche sich mit der ersten decken, indem 150 nicht die kleinste Zahl ist, die durch 5, 15, 2 aufgeht. Weil nehmlich eine funfzehnfache Zahl schon an sich auch eine fünffache ist, so ist $15 . 2 = 30$ die kleinste Zahl, bey welcher die erwähnte Bedingung eintrifft; so wie man bey Brüchen, welche unter einerley Nenner gebracht werden sollen, diejenigen Nenner, welche in andre aufgehen, nicht mit zu multipliciren braucht, um den gemeinschaftlichen Nenner zu finden.

52. Nach 30, 60, 90, ... Mischungen kommt also alles wieder in die ursprüngliche Ord-

nung zurück, und überhaupt decken sich die Ordnungen, welche in jeder Vertikalreihe der folgenden Tafel untereinander stehen.

1	2	3	4	. . . .	27	28	29	30
31	32	33	34	. . . .	57	58	59	60
61	62	63	64	. . . .	87	88	89	90
91	92	93	94	. . . . . .	117	118	119	120
121	122	123	124	. . . . .	147	148	149	150

u. s. w.

53. Beyspiele zu den am Ende von (49) erwähnten Fällen sind folgende:

Wenn man bey der bisher angenommenen Mischungsmethode (12) zehn Karten nimmt, so bleiben das dritte, vierte und letzte Blatt durch alle Mischungen hindurch auf ihrer anfänglichen Stelle, indem die übrigen die Tour durch die Stellen 1, 5, 7, 9. 2, 6, 8 machen.

Stellen		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ordnung	I	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K
	II	H	I	C	D	A	B	E	F	G	K
	III	F	G	C	D	H	I	A	B	E	K
	IV	B	E	C	D	F	G	H	I	A	K
	V	I	A	C	D	B	E	F	G	H	K
	VI	G	H	C	D	I	A	B	E	F	K
	VII	E	F	C	D	G	H	I	A	B	K
	VIII	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K

Nimmt man $N = 7$, so ist aufser der Anfangsordnung nur noch eine einzige möglich, und die drey letzten Dinge bleiben in ihrer Stelle.

Stellen	1	2	3	4	5	6	7
Ordnung I	A	B	C	D	E	F	G
II	C	D	A	B	E	F	G
III	A	B	C	D	E	F	G

Nimmt man $N = 13$, so haben alle Dinge nur eine und ebendieselbe Tour, alle kommen also nach dreyzehn Mischungen in die ursprüngliche Ordnung zurück, oder die Anzahl der möglichen Veränderungen ist der Anzahl der Dinge gleich. $P = 5$.

Stellen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ordnung I	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N
II	N	H	I	C	D	A	B	E	F	G	K	L	M
III	M	E	F	I	C	N	H	D	A	B	G	K	L
IV	L	D	A	F	I	M	E	C	N	H	B	G	K
V	K	C	N	A	F	L	D	I	M	E	H	B	G
VI	G	I	M	N	A	K	C	F	L	D	E	H	B
VII	B	F	L	M	N	G	I	A	K	C	D	E	H
VIII	H	A	K	L	M	B	F	N	G	I	C	D	E
IX	E	N	G	K	L	H	A	M	B	F	I	C	D
X	D	M	B	G	K	E	N	L	H	A	F	I	C
XI	C	L	H	B	G	D	M	K	E	N	A	F	I
XII	I	K	E	H	B	C	L	G	D	M	N	A	F
XIII	F	G	D	E	H	I	K	B	C	L	M	N	A
XIV	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N

Tour aller dreyzehn Buchstaben durch alle Ordnungen,

1, 6, 9, 3, 4, 5, 8, 2, 7, 10, 11, 12, 13,

wie man zum Beyspiel an den Buchstaben A sieht.

54. In Rücksicht auf die unmittelbar vor (1) vorhergehende Bemerkung sey es vergönnt, hier noch ein paar Aufgaben beyzubringen, deren Auflösungen sich aus dem Bisherigen ergeben.

55. Aufgabe. Wenn die Anzahl der Dinge und die Mischungsmethode, nebst einer gewissen Ordnung gegeben sind, zu finden, wie eine andre Ordnung, deren Entfernung von jener bekannt ist, ausſehen werde.

Die Auflösung wird sich am verständlichsten an einem Exempel zeigen lassen.

56. Erster Fall. Die gesuchte Ordnung sey eine der folgenden, zum Beyspiel die siebenzehnte.

Die gegebne sey:

Stelle	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
⊙	Y	C	G	U	E	F	D	T	P	W	X	I	N	O	K	Y	A	H	Q	B	L	M	R	S

Anzahl der Dinge und Mischungsmethode wie (12).

So gehen nach (49) die Dinge, welche in den Stellen 1, 11, 17, 21, 23 dieser Ordnung liegen, nach und nach jedes durch alle diese Stellen. Also die Dinge Y X A L R, welche die oben erwähnte Tour machen, waren nach jeden fünf Ordnungen, also nach funfzehn Ordnungen, in ihre Stelle, welche sie in (⊙) einnehmen. Nach siebzehn Ordnungen ist alles jedes um zwey Glieder in seiner Tour fortgerückt. Also liegen Y X A L R, welche in ⊙ in den Stellen 1, 11, 17, 21, 23 lagen, in der siebzehnten Ordnung in der 17, 21, 23, 1, 11 Stelle.

Die Dinge C I H G P T D K Q U W Y B M S, welche in ⊙ in der 2, 12, 18, 3, 9, 8, 7, 15, 19, 4, 10, 16, 20, 22, 24 Stelle lagen, sind jedes nach funfzehn Ordnungen wieder an ihrer Stelle; also nach siebzehn Ordnungen jedes um zwey Glieder weiter in ihrer Tour fortgerückt, und liegen also in den Stellen 18, 3, 9, 8, 7, 15, 19, 4, 10, 16, 20, 22, 24, 2, 12.

E und N welche in der 5. und 13ten, und F und O, welche in der 6. und 14ten Stelle liegen, kommen nach jeden zwey, folglich nach sechzehn Ordnungen an die Stelle, die sie in ⊙ halten; also nach siebzehn Ordnungen iſt jedes um eine Stelle weiter in seiner Tour fortgerückt, mithin liegen dann E N F O in den Stellen 13, 5, 14, 6.

Die gesuchte Ordnung ist also folgende:

Stelle	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
☾	L	M	I	K	N	O	P	G	H	Q	R	S	E	F	T	U	V	C	D	W	X	Y	A	B

Zur Probe kann man beyde Ordnungen nach der Tafel (47) construiren. ☉ ist die XIIIte und ☾ wird die 17te darauf folgende, nehmlich die XXXste oder Schlußordnung seyn.

57. Zweyter Fall. Die gesuchte Ordnung sey eine der vor der gegebnen vorhergehenden. Z. B. die zwölfte.

Vor zehn Ordnungen waren Y X A L R, in den Stellen, wo sie in ⊙ liegen, nehmlich: 1, 11, 17, 21, 23.

Zwey Ordnungen vorher waren sie also jedes noch zwey Glieder in ihrer Tour zurück; sie lagen also in den Stellen 21, 23, 1, 11, 17.

Die Dinge

C I H G P T D K Q U W Y B M S,

welche in ⊙

in 2, 12, 18, 3, 9, 8, 7, 15, 19, 4, 10, 16, 20, 22, 24

liegen, waren zwölf Ordnungen, vorher noch jedes um zwölf Glieder in ihrer Tour zurück, sie lagen also in den Stellen

3, 9, 8, 7, 15, 19, 4, 10, 16, 20, 22, 24, 2, 12, 18.

E N F O waren vor zwölf Ordnungen in denselben Stellen; in 5, 13, 6, 14.

Die gesuchte Ordnung ist also folgende:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

oder die Anfangsordnung der Tabelle (47).

58. Aufgabe. Wenn zwey Ordnungen gegeben sind, die Entfernung zwischen beyden zu finden.

Es seyen gegeben die Ordnungen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
♁	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
⊙	V	C	G	U	E	F	D	T	P	W	X	I	N	O	K	Y	A	H	Q	B	L	M	R	S

Das erste Ding in ♁ ist in ⊙ das siebzehnte.

Das zweyte in ♁ ist in ⊙ das zwanzigste.

Ueberhaupt sind die Verrückungen folgende:

Aus ♀	in ⊙
1	17
2	20
3	2
4	7
5	5
6	6
7	3
8	18
9	12
10	15
11	21
12	22
13	13
14	14
15	9
16	19
17	23
18	24
19	8
20	4
21	1
22	10
23	11
24	16

In Rücksicht auf A L R Y X könnte also die Ordnung ⊙ von ♁ angerechnet, die 2te, 2 + 5te, 2 + 10te u. s. w. seyn, oder es könnten 2, 7, 12 u. s. w. Mischungen Statt gefunden haben.

In Rücksicht von B und den correspondirenden Buchstaben, könnten 12, 12 + 15, 12 + 30 u. s. w. Mischungen zwischen beyden Ordnungen vorgegangen seyn, weil diese in ⊙ jedes zwölf Glieder in ihrer Tour weiter sind als in ♁.

E F N O liegen in denselben Stellen in beyden Ordnungen. In Ansehung ihrer konnten also entweder gar keine oder zwey oder vier u. s. w. Mischungen vorgegangen seyn.

In Rücksicht aller dieser Touren können also zwölf Mischungen Statt gefunden haben.

Oder es ist ♁ die erste und ⊙ die dreyzehnte darauf folgende Ordnung.

59. Eine Tafel wie die (47) scheint ein gutes Mittel zu einer Geheimschreibekunst abgeben zu

können, welche wohl schwerlich zu dechifriren seyn dürfte. Man kann nehmlich nicht nur unter den dreyſsig dort angegebnen Ordnungen eine nach Gefallen wählen, nach welcher man die obenstehenden Buchstaben durch Zahlen ausdrucken will; sondern man könnte auch, um die Sache noch mehr zu verstecken, ein Wort oder eine Zeile aus der einen, und das andre Wort oder die andre Zeile aus einer andern Ordnung nehmen, da man denn um Miſsverständnissen vorzubeugen, die Ordnungs Zahl mit Römischen Ziffern dabey zu bemerken hätte. Wegen der mannigfaltigen Mischungsmethoden, die man erdenken kann, würde es fast nicht möglich seyn, einer solchen Schrift auf die Spur zu kommen.

60. Bey den gewöhnlichen Kartenspielen z. B. beym L'Hombre, hat jeder der Spielenden, ohne eben künstlich zu mischen, und ohne die Absicht zu haben, den Kartenblättern eine gewisse Ordnung zu geben, doch seine eigne, durch Gewohnheit ihm geläufig gewordene Art, die Karten zu mischen. Also ist wohl nicht zu läugnen, daſs unter drey L'Hombrespielern gewisse Ordnungen in der Lage der Karten wahrscheinlicher werden als andre. Genau genommen, kann man daher,

wie es scheint, bey Wahrscheinlichkeitsberechnungen nicht alle Versetzungen als gleich möglich vorausſetzen. Daſs das bloſs Spekulation ist, versteht sich von selbst.

IV.

Die unbegreiflichen Zahlen.

Die unbegreiflichen Zahlen.

Unter diesem Titel findet sich in Wiegl. I. B. S. 436. ein Kunststück, welches eine artige Anwendung des künstlichen Kartenmischens ist. Es ist daselbst, wie das bey solchen Sammlungen gewöhnlich ist, keine Erläuterung beygefügt, die über den Grund der Sache befriedigende Auskunft gäbe. Das Stück scheint es indessen zu verdienen; vielleicht wird es durch folgenden Vortrag am besten erläutert werden.

Aufgabe. Auf eine gewisse Anzahl Kartenblätter = N, welche in n gleiche Klassen, jede von $\frac{1}{n}$. N zusammenliegenden Blättern abgetheilt werden kann, sind verschiedne Zahlen geschrieben, deren sämtliche Summe = S ist. Es wird verlangt, daſs, wenn die Karten, nach einer vorgeschriebnen Methode gemischt worden, so wohl nach dem ersten als nach dem zweyten Mischen, die Summe der Zahlen in jeder Klasse $= \frac{1}{n} . S$ sey. Man soll finden, wie die Karten dieser Bedingung zu Folge müssen gelegt werden.

Auflösung. 1. Man sucht zuerst aus den sämtlichen Blättern n Haufen aus, jeden von $\frac{1}{n} . N$ Blättern, deren Summe, d. h. die Summe jedes Haufens $= \frac{1}{n} . S$ sey.

2. Die Zahlen müssen so beschaffen seyn, daſs dieses angeht, sonst wäre die Aufgabe ungereimt.

3. Diese willkürlich gewählten Haufen (1.) sollen die Klassen der, nach der ersten Mischung entstehenden Ordnung II seyn.

4. Die Lage der einzelnen Blätter in jedem dieser Haufen, würde ganz gleichgültig seyn, wenn bloſs verlangt würde, daſs die Klassen der Ordnung II die Summe $\frac{1}{n} . S$ geben sollten. Aber da auch die nach der zweyten Mischung entstehende Ordnung III eben diese Bedingung erfüllen soll, so muſs hierauf in der Ordnung II Rücksicht genommen werden.

5. Man muſs also für die Ordnung III, aus den erst ausgesuchten Haufen oder Klassen der Ord-

nung II wiederum drey andre Combinationen nach zehn, heraussuchen, deren jeder Summe $= \frac{1}{n} \cdot S$ sey; wobey man aber nicht mehr so willkürlich verfahren darf, wie bey Aussuchung jener ersten Haufen, sondern aus jedem Haufen oder aus jeder Klasse der Ordnung II nur gerade so viel, nicht mehr und nicht weniger Blätter nehmen muſs, als durch die folgende Mischung in eine und ebendieselbe Klasse der Ordnung III zusammenrücken.

6. Die Beschaffenheit der Zahlen muſs übrigens, wie sich von selbst versteht, auch diese Combinationen, auf die erwähnte Art ausgesucht, gestatten, wenn anders die Aufgabe nicht ungereimt seyn soll.

7. Die nach (5.) für die Ordnung III ausgesuchten Blätter können also nunmehr in diejenigen Stellen der Ordnung II gelegt werden, aus welchen sie durch das Mischen in eine und ebendieselben Klassen der Ordnung III zusammenrücken, ohne daſs die Ordnung II dadurch für die Aufgabe untüchtig werde, weil man die Blätter nicht aus ihren Klassen verrückt, sondern nur in ihren Klassen ihnen die gehörige Stellen anweiset.

8. Wenn auf diese Art die Ordnungen II und III bestimmt sind, so ist noch übrig, die Ordnung I zu finden; das heiſst, die Karten so zu

legen, daſs die Ordnung II durch das Mischen daraus entsteht; welches aus dem, was in dem Aufsatze über das künstliche Kartenmischen gesagt ist, mit leichter Mühe zu bewerkstelligen ist.

9. Das Gesagte (5 ... 8) wird für ein bestimmtes N; n; unter den Vorausſetzungen (2; 6) leicht auszuführen seyn, nachdem man vorher für N und die vorgeschriebne Mischungsmethode zwey nächstaufeinander folgende Ordnungen im Allgemeinen entworfen hat, um die durch das Mischen bewirkte Verrückung der Stellen zu erfahren. An Exempeln wird sich das bisherige ferner erläutern lassen.

10. Exempel. Es sey $N = 30$; $n = 3$ die Mischungsmethode wie (12) des Aufsatzes über das künstliche Kartenmischen. Die Anzahl der Blätter in jeder Klasse $= \frac{30}{3} = 10$. Die Blätter jedes Haufens oder jeder Klasse der zum Grunde gelegten Ordnung II, sollen durch einerley Buchstaben bezeichnet werden, und durch kleine über sie gesetzte Striche wollen wir die Klasse bezeichnen, welcher sie in der Ordnung II angehörten; so wie man in der Musik die Töne der Octaven durch gleichnahmige Buchstaben, und die Octave, zu der sie gehören, durch Striche andeutet.

11. Zwey nächstaufeinander folgende Ordnungen sind sodann folgende. $P = 12$. Also das

erste Blatt der vorhergehenden Ordnung kommt in die dreyzehnte Stelle der folgenden Ordnung zu liegen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
♃	A′	B′	C′	D′	E′	F′	G′	H′	I′	K′	A″	B″	C″	D″	E″	F″	G″	H″	I″	K″	A‴	B‴	C‴	D‴	E‴	F‴	G‴	H‴	I‴	K‴
♄	H‴	I‴	C‴	D‴	H″	I″	C″	D″	H′	I′	C′	D′	A″	B′	E′	F′	G′	K′	[illegible]	B″	E″	F″	G″	K″	A‴	B‴	E‴	F‴	G″	K‴

12. Also die Stellenveränderungen folgende:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
13	14	11	12	15	16	17	9	10	18	19	20	7	8	21	22	23	5	6	24	25	26	3	4	27	28	29	1	2	30

13. Aus der Tafel der Stellenveränderungen aus einer Ordnung in die nächstfolgende läſst sich auch mit leichter Mühe eine Ordnung ♂ welche nächst vor ♄ in (II) vorhergeht, construiren, indem man zum ersten Blatt in ♂ das dreyzehnte von ♄ nimmt, zum zweyten in ♂ das vierzehnte in ♄ u. s. w.

14. Man bemerke, daſs die Klassen der Ordnung ♃ aus folgenden Theilen bestehen:

	Blätter	Stellen in ♄	Stellen in ♃
Erste Klasse vom ♃ enthält vier Blätter aus der dritten Klasse von ♄	H''' I''' C''' D'''	28,29,23,24	1, 2, 3, 4
Vier Blätter aus der zweyten Klasse von ♄	H'' I'' C'' D''	18,19,13,14	5, 6, 7, 8
Zwey Blätter aus der ersten Klasse von ♄	H' I'	8, 9	9, 10
Zweyte Klasse von ♃ enthält acht Blätter aus der ersten Klasse von ♄	C' D' A' B'	3, 4, 1, 2	11,12,13,14
	E' F' G' K'	5, 6, 7, 10	15,16,17,18

	Blätter	Stellen in ♄	Stellen in ♃
Zwey Blätter aus der zweyten Klasse von ♄	$\overset{\prime\prime}{A}$ $\overset{\prime\prime}{B}$	11, 12	19, 20
Drittte Klasse von ♃ enthält vier Blätter aus der zweyten Klasse von ♄	$\overset{\prime\prime}{E}$ $\overset{\prime\prime}{F}$ $\overset{\prime\prime}{G}$ $\overset{\prime\prime}{K}$	15,16,17,20	21,22,23,24
Sechs Blätter aus der dritten Klasse von ♄	$\overset{\prime\prime\prime}{A}$ $\overset{\prime\prime\prime}{B}$ $\overset{\prime\prime\prime}{E}$ $\overset{\prime\prime\prime}{F}$ $\overset{\prime\prime\prime}{G}$ $\overset{\prime\prime\prime}{K}$	21,22,25,26 27, 30	25,26,27,28 29, 30

15. Aus (14) mit (5) zusammengehalten, läſst sich die Auflösung dieses Exempels folgender Maſsen bewerkstelligen.

α. Man suche nach (1) aus allen dreyſsig Karten, drey Haufen, jeden von zehn Karten, aus, so daſs die Summe der Zahlen auf den Blättern eines jeden Haufens $= \frac{1}{3} . S$ sey. Diese Haufen sollen die Klassen der Ordnung II ausmachen; diese Klassen der Ordnung II sind nun also bestimmt.

β. Man suche wiederum aus der dritten Klasse vier; aus der zweyten vier, und aus der ersten zwey Blätter aus, die ebenfalls die

Summe $= \frac{1}{3}$. S geben, und gebe ihnen in der Ordnung II die Stellen 28, 29, 23, 24, 18, 19, 13, 14, 8, 9; so werden sie nach dem Mischen in der ersten Klasse der Ordnung III beysammen seyn, und daselbst die Stellen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 einnehmen.

γ. Suche man aus der ersten Klasse acht; und aus der zweyten Klasse zwey Blätter aus, welche die Summe $= \frac{1}{n}$. S geben; und gebe ihnen in der Ordnung II die Stellen 3, 4, 1, 2, 5, 6, 7, 10, 11, 12, so werden sie nach dem Mischen die zweyte Klasse der Ordnung III ausmachen, und daselbst die Stellen 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 einnehmen.

δ. Nehme man die aus der zweyten Klasse noch übrigen vier; und aus der dritten Klasse noch übrigen sechs Blätter, deren Summe nun ebenfalls $= \frac{1}{3}$. S seyn wird, und gebe ihnen in der Ordnung II die Stellen, 15, 16, 17, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 30; so werden diese, nach dem Mischen, die dritte Klasse der Ordnung III ausmachen; und daselbst die Stellen 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 einnehmen.

ε. Nachdem auf obige Art die Ordnung II gehörig gelegt ist, so ist noch übrig, daſs man die

die Ordnung I so construire, daſs daraus die Ordnung II durch das Mischen hervorgehe. (13)

16. Bey Wiegleb am a. O. sind die auf die Blätter geschriebnen Zahlen so gewählt, daſs auf zehn Blättern eines jeden der drey Haufen, welche die Klassen der Ordnung II ausmachen sollen, die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 stehen.

17. Die drey Haufen mit der oben (10) gewählten Bezeichnung untereinander gelegt, wären also:

Erster Haufe	$1'$	$2'$	$3'$	$4'$	$5'$	$5'$	$6'$	$7'$	$8'$	$9'$
Zweyter Haufen	$1''$	$2''$	$3''$	$4''$	$5''$	$5''$	$6''$	$7''$	$8''$	$9''$
Dritter Haufen	$1'''$	$2'''$	$3'''$	$4'''$	$5'''$	$5'''$	$6'''$	$7'''$	$8'''$	$9'''$

Es ist hier $S = 150$, $\frac{1}{3} S = 50$ die Summe jedes Haufens.

18. Für die Klassen der Ordnung III sind bey Wiegl. nach (15) folgende ausgesucht:

Für die erste Klasse von III	$1'''$	$5'''$	$9'''$	$7'''$	$5''$	$1''$	$5''$	$6''$	$6'$	$5'$
Für die zweyte Klasse von III	$3'$	$1'$	$9'$	$8'$	$5'$	$2'$	$7'$	$4'$	$9''$	$2''$
Für die dritte Klasse von III	$7''$	$4''$	$3''$	$8''$	$3'''$	$5'''$	$6'''$	$4'''$	$8'''$	$2'''$

Daher denn den Zahlen $1'''$, $5'''$, $9'''$, $7'''$ in der Ordnung II die Stellen 28, 29, 23, 24 angewiesen sind. Und so bey den übrigen Zahlen, dem in (15) beygebrachten gemäfs, wie aus folgender Tafel zu ersehen.

19. Die drey Ordnungen sind also folgende:

Stellen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ordnung I	$\overset{\prime\prime}{5}$	$\overset{\prime\prime}{6}$	$\overset{\prime\prime}{9}$	$\overset{\prime\prime\prime}{2}$	$\overset{\prime\prime}{7}$	$\overset{\prime\prime}{4}$	$\overset{\prime\prime}{3}$	$\overset{\prime}{5}$	$\overset{\prime}{4}$	$\overset{\prime\prime}{5}$
II	$\overset{\prime}{9}$	$\overset{\prime}{8}$	$\overset{\prime}{3}$	$\overset{\prime}{1}$	$\overset{\prime}{5}$	$\overset{\prime}{2}$	$\overset{\prime}{7}$	$\overset{\prime}{6}$	$\overset{\prime}{5}$	$\overset{\prime}{4}$
III	$\overset{\prime\prime\prime}{1}$	$\overset{\prime\prime\prime}{5}$	$\overset{\prime\prime\prime}{9}$	$\overset{\prime\prime\prime}{7}$	$\overset{\prime\prime}{5}$	$\overset{\prime\prime}{1}$	$\overset{\prime\prime}{5}$	$\overset{\prime\prime}{6}$	$\overset{\prime}{6}$	$\overset{\prime}{5}$

Stellen	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ordnung I	$\overset{\prime\prime}{1}$	$\overset{\prime\prime}{8}$	$\overset{\prime}{7}$	$\overset{\prime}{6}$	$\overset{\prime\prime\prime}{3}$	$\overset{\prime\prime\prime}{5}$	$\overset{\prime\prime\prime}{9}$	$\overset{\prime}{5}$	$\overset{\prime}{2}$	$\overset{\prime\prime\prime}{7}$
II	$\overset{\prime\prime}{9}$	$\overset{\prime\prime}{2}$	$\overset{\prime\prime}{5}$	$\overset{\prime\prime}{6}$	$\overset{\prime\prime}{7}$	$\overset{\prime\prime}{4}$	$\overset{\prime\prime}{3}$	$\overset{\prime\prime}{5}$	$\overset{\prime\prime}{1}$	$\overset{\prime\prime\prime}{8}$
III	$\overset{\prime}{3}$	$\overset{\prime}{1}$	$\overset{\prime}{9}$	$\overset{\prime}{8}$	$\overset{\prime}{5}$	$\overset{\prime}{2}$	$\overset{\prime}{7}$	$\overset{\prime}{4}$	$\overset{\prime\prime}{9}$	$\overset{\prime\prime}{2}$

Stellen	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Ordnung I	$\overset{\prime\prime\prime}{6}$	$\overset{\prime\prime\prime}{4}$	$\overset{\prime}{3}$	$\overset{\prime}{1}$	$\overset{\prime\prime\prime}{8}$	$\overset{\prime\prime\prime}{1}$	$\overset{\prime\prime\prime}{5}$	$\overset{\prime}{9}$	$\overset{\prime}{8}$	$\overset{\prime\prime\prime}{2}$
II	$\overset{\prime\prime\prime}{3}$	$\overset{\prime\prime\prime}{5}$	$\overset{\prime\prime\prime}{9}$	$\overset{\prime\prime\prime}{7}$	$\overset{\prime\prime\prime}{6}$	$\overset{\prime\prime\prime}{4}$	$\overset{\prime\prime\prime}{8}$	$\overset{\prime\prime\prime}{1}$	$\overset{\prime\prime\prime}{5}$	$\overset{\prime\prime\prime}{2}$
III	$\overset{\prime\prime}{7}$	$\overset{\prime\prime}{4}$	$\overset{\prime\prime}{3}$	$\overset{\prime\prime}{8}$	$\overset{\prime\prime\prime}{3}$	$\overset{\prime\prime\prime}{5}$	$\overset{\prime\prime\prime}{6}$	$\overset{\prime\prime\prime}{4}$	$\overset{\prime\prime\prime}{8}$	$\overset{\prime\prime\prime}{2}$

20. Begreiflich können, je nachdem die Zahlen sind, oft viele Combinationen nach zehn, Statt finden, deren jede Summe = $\frac{1}{2}$ S ist.

Man könnte z. B. bey dem bisher behandelten Exempel verlangen, daſs jede Klasse der Ordnung III wiederum die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 enthielte.

Da könnte man denn etwa für die Klassen der Ordnung III folgende Zahlen ausſuchen:

Für die erste Klasse	$1'$	$2'$	$3''$	$4''$	$5''$	$5''$	$6'''$	$7'''$	$8'''$	$9'''$
Für die zweyte Klasse	$1''$	$2''$	$3'$	$4'$	$5'$	$5'$	$6'$	$7'$	$8'$	$9'$
Für die dritte Klasse	$1'''$	$2'''$	$3'''$	$4'''$	$5'''$	$5'''$	$6''$	$7''$	$8''$	$9''$

und geben nach Anleitung von (15) den beyden Zahlen $1'$, $2'$ in der Ordnung II die Stellen 8, 9, den Zahlen $3''$, $4''$, $5''$, $5''$ die Stellen 18, 19, 13, 14, den Zahlen $6'''$, $7'''$, $8'''$, $9'''$ die Stellen 28, 29, 23, 24, u. s. w. bey den übrigen Klassen.

21. Daſs man die Blätter einer Klasse in der Ordnung II, welche auch in der Ordnung III in einer Klasse nebeneinander liegen bleiben, unter sich verwechseln könne, zum Beyspiel: daſs man Statt $\overset{'''}{H}$, $\overset{'''}{I}$, $\overset{''''}{C}$, $\overset{''''}{D}$ (14) in die Stellen 28, 29, 23, 24 zu legen, dieselben auch umgekehrt in die Stellen 24, 23, 29, 28 legen könne, bedarf kaum der Erwähnung, da ein jeder sogleich einsieht, daſs hierdurch nichts zur Aufgabe Wesentliches verändert wird.

22. Exempel. Wir wollen hier noch ein Beyspiel beybringen, wo die auf die dreyſsig Blätter geschriebenen Zahlen die natürlichen Zahlen von 1 bis 30 seyn mögen. Dieser arithmetischen Progression, Summe $S = (30 + 1) \frac{1}{2} . 30 = 465$; also die Summe jeder Klasse $\frac{1}{3} S = 155$.

23. Zehn Zahlen, deren Summe $= 155$ ist, könnten etwa so genommen werden, daſs man die Progression in sechs gleiche Theile A, B, C D, E, F, jeden von fünf aufeinander folgenden Gliedern theilte, da denn $A + F = B + E = C + D = \frac{1}{3} S = 155$ wäre. Die Klassen

der Ordnung II könnten demnach aus folgenden Zahlen bestehen.

Erste Klasse	1′	2′	3′	4′	5′	26′	27′	28′	29′	30′
Zweyte Klasse	6″	7″	8″	9″	10″	21″	22″	23″	24″	25″
Dritte Klasse	11‴	12‴	13‴	14‴	15‴	16‴	17‴	18‴	19‴	20‴

24. Für die Klassen der Ordnung III könnte man hieraus, nach (15), folgende Zahlen aussuchen:

Für die erste Klasse	11‴	12‴	19‴	20‴	9″	10″	21″	22″	5′	26′
Für die zweyte Klasse	1′	2′	3′	4′	27′	28′	29′	30′	6″	25″
Für die dritte Klasse	7″	8″	23″	24″	13‴	14‴	15‴	16‴	17‴	18‴

alsdann den ersten Zahlen 11‴, 12‴, 19‴, 20‴, in der Ordnung II die Stellen 28, 29, 23, 24 geben, u. s. w. bey den übrigen Zahlen, wie es aus dem bisherigen hinlänglich bekannt ist.

25. Die drey Ordnungen, welche man solchergestalt herausbringt, sind folgende:

Stellen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ordnung I	$21''$	$22''$	$6''$	$25''$	$7''$	$8''$	$23''$	$26'$	$30'$	$9''$
II	$3'$	[illegible]$'$	$1'$	$2'$	$27'$	$28'$	$29'$	$5'$	$26''$	$30'$
III	$11'''$	$12'''$	$19'''$	$20'''$	$9''$	$10''$	$21''$	$22''$	$5'$	$26'$

Stellen	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ordnung I	$10''$	$24''$	$29'$	$5'$	$13'''$	$14'''$	$19'''$	$27'$	$28'$	$20'''$
II	$6''$	$25''$	$21''$	$22''$	$7''$	$8''$	$23''$	$9''$	$10''$	$24''$
III	$1'$	$2'$	$3'$	$4'$	$27'$	$28'$	$29'$	$30'$	$6''$	$25''$

Stellen	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Ordnúng I	$15'''$	$16'''$	$1'$	$2'$	$17'''$	$11'''$	$12'''$	$3'$	$4'$	$18'''$
II	$13'''$	$14'''$	$19'''$	$20'''$	$15'''$	$16'''$	$17'''$	$11'''$	$12'''$	$18'''$
III	$7''$	$8''$	$23''$	$24''$	$13'''$	$14'''$	$15'''$	$16'''$	$17'''$	$18'''$

26. So wie wir bisher zuerst die Klassen der Ordnung II aussuchten und aus diesen die Klassen der Ordnung III, so kann man auch umgekehrt zuerst aus allen Blättern diejenigen nehmen, welche die Klassen der Ordnung III ausmachen sollen, sodann für jede Klasse der Ordnung II aus jeder Klasse von III so viel nehmen, als der, zu dem Ende gemachten Tafel gemäfs erfordert wird, und diese in III in die gehörigen Stellen legen. Die Tafel, die man zu dem Ende zu verfertigen hätte, wäre gleichsam die umgekehrte von der in (11.), und man machte davon ähnliche Anwendung wie (14.), welches jeder sogleich von selbst übersehen wird.

27. Man könnte fragen, ob nicht auch in 25 noch eine vierte Ordnung Statt finde, welche die Aufgabe erfüllte?

Diefs würde davon abhängen, ob bey drey schon construirten Ordnungen, diejenigen Blätter, welche in der Ordnung III die Stellen 8, 9, 18, 19, 13, 14, 28, 29, 23, 24 einnehmen, als welche in der Ordnung IV die erste Klasse ausmachen würden, auch wirklich $\frac{1}{3}$ S geben. Ist dieses nicht, so findet es nicht

Statt; denn verrücken und andere Blätter in ihre Stelle legen, kann man nicht, ohne die Ordnungen II und I zu zerstören.

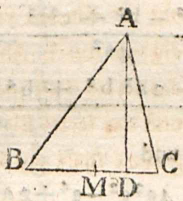
28. So viel wird genug seyn, um die unbegreiflichen Zahlen begreiflich zu machen.

Das Mechanische beruht endlich darauf, dafs, um die Klassen von II und III in der Geschwindigkeit durch Abheben von einander zu sondern, das letzte Blatt jeder Klasse von II ein breiteres, und das letzte Blatt jeder Klasse von III ein längeres Blatt sey als die übrigen.

V.

Aufgabe.

Aus den drey Seiten eines Dreyeckes die Abschnitte BD, DC zu finden: welche die Normale aus der Spitze auf die Grundlinie macht.



Auflösung. Wenn $BC = a$, $CA = b$, $BA = c$, $AD = h$, $BD = x$, so ist $h^2 = c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2$ und $c^2 = b^2 - a^2 + 2ax$. Folglich $x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$.

Da $\frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$ die halbe Grundlinie BM ist, so ist $MD = \frac{-b^2 + c^2}{2a} = \frac{(c+b)(c-b)}{2a}$ und wird durch Zeichnung vermittelst der Proportion $2a : c + b = c - b : MD$ gefunden.

AUFGABE.

Aus den drey Seiten eines Dreyecks, den Inhalt desselben zu finden.

Auflösung. Der Inhalt ist $= \frac{a \cdot h}{2} =$ $\frac{a}{2} \sqrt{(c^2 - x^2)} = \sqrt{\left(\frac{a}{4} \; (c^2 - x^2)\right)}$. Es ist aber

$$x^2 = \frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{4a^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2 + 2(a^2 - b^2)c^2 + c^4}{4a^2}$$

$$= \frac{a^4 - 2a^2 b^2 + b^4 + 2a^2 c^2 - 2b^2 c^2 + c^4}{4a^2}$$

und

$$c^2 - x^2 = \frac{4a^2 c^2 - a^4 + 2a^2 b^2 - b^4 - 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - c^4}{4a^2}$$

also

$$\frac{a^2}{4}(c^2 - x^2) = \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2}{4 \cdot 4}$$

und

$$\sqrt{\frac{a^2}{4}(c^2 - x^2)} = \frac{\sqrt{(-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2)}}{4}$$

Die Wurzelgröſse im Zähler läſst sich anders ausdrucken, wenn man die Gröſse unter dem Wurzelzeichen mit $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$ dividirt; wodurch sie in ihre Factoren zerfällt wird.

$$
\begin{array}{l|l|l}
\text{Divisor.} & & \text{Quotient.} \\
a^2+2ab+b^2-c^2 & -a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2 & -a^2-b^2+c^2+2ab \\
\hline
 & -a^4 \quad -a^2b^2+a^2c^2 \quad -2a^3b & \\
\hline
 & -b^4-c^4+3a^2b^2+a^2c^2+2b^2c^2+2a^3b & \\
 & -b^4 \quad -a^2b^2 \quad +b^2c^2 \quad -2ab^3 & \\
\hline
 & -c^4+4a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2a^3b+2ab^3 & \\
 & -c^4 \quad +a^2c^2+b^2c^2 \quad +2abc^2 & \\
\hline
 & +4a^2b^2 \quad +2a^3b+2ab^3-2abc^2 & \\
 & +4a^2b^2 \quad +2a^3b+2ab^3-2abc^2 & \\
\hline
 & 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Der Divisor ist, wie man sogleich sieht $= (a+b)^2 - c^2 = (a+b+c) \,.\, (a+b-c)$

Der Quotient ist $= c^2 - a^2 + 2ab - b^2 = c^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = c^2 - (a-b)^2 = (c + (a-b)) \,.\, (c - (a-b)) = (c+a-b) \,.\, (c-a+b)$

Die Gröſse unter dem Wurzelzeichen besteht also aus den vier Factoren $a+b+c$; $a+b-c$; $c+a-b$; $c-a+b$.

Und der Inhalt des Dreyecks

$$\sqrt{\left(\frac{(a+b+c).(a+b-c).(a-b+c).(-a+b+c)}{4}\right)}$$

$= \frac{1}{4}\, u$ (Küste Trig. 21 S.)

$$= \sqrt{\left(\frac{(a+b+c).(a+b-c).(a-b+c).(-a+b+c)}{2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2}\right)}$$

Aber $\frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - c$, $\frac{a-b+c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - b$; $\frac{-a+b+c}{2} = \frac{a+b+c}{2} - a$. Wenn man also $\frac{a+b+c}{2} = s$ nennt, so ist der Inhalt des Dreyecks

$= \sqrt{(s \,.\, (s-a) \,.\, (s-b) \,.\, (s-c))}$

(Busse kleine Geom. Abhandlungen.)

VI.

Vom Zauberstern.

Vom Zauberstern.

In Wieglebs natürl. Magie, 1. B. 344. S. steht unter dieser Benennung ein Kunststück, welches einer allgemeinern Ausführung werth zu seyn scheint. Das Aufserwesentliche: Sternfigur, Rechenpfennige u. s. w. davon weggenommen, ist die Sache folgende:

Aufgabe. Eine Menge arithmetischer Progressionalzahlen so in dem Umfang eines Kreises herumzustellen, dafs die Summe eines jeden Paares benachbarter Glieder, gleich sey der Summe des Paares der gegenüberstehenden.

Auflösung. 1. Zwey einander gegenüber, d. h. an den beyden Enden eines Durchmessers stehende Glieder will ich correspondirende Glieder nennen.

2. Die Anzahl der Glieder sey $= n$: Es ist von selbst klar, daſs n gerade seyn muſs, weil immer zwey correspondirende Glieder zusammengehören.

3. Correspondirende Glieder sind:

das 1ste und	das $\frac{1}{2}n + 1$te der Kreisſtellung
das 2te	$\frac{1}{2}n + 2$te
⋮	⋮
u. s. w.	
⋮	⋮
das $\frac{1}{2}n - 1$te	$n - 1$te
endlich	
das $\frac{1}{2}$ nte	nte.

4. Die Aufgabe verlangt, daſs in der Kreisſtellung die Summe gleich sey der Summe

des 1ten u. 2ten Gliedes	des $\frac{1}{2}n + 1$ten u. $\frac{1}{2}n + 2$ten
2 u. 3	$\frac{1}{2}n + 2$ten u. $\frac{1}{2}n + 3$ten
⋮	⋮
u. s. w.	
endlich $\frac{1}{2}n$ u. $\frac{1}{2}n + 1$ten	n ten u. 1ten

5. Aus der Betrachtung der Gleichungen (4) erhellet folgendes: Da das erste Glied in der Kreisſtellung, welches zugleich das erste dei Progression sey, um einen gewissen Unterschied kleiner ist als das correspondirende $\frac{1}{2}n + 1$te, so muſs im Gegentheil sein benachbartes 2te Glied um eben den Unterschied gröſser seyn als dessen correspondirendes $\frac{1}{2}n + 2$te Glied. In der zweyten

Glei-

Gleichung mufs daher wiederum das 3te Glied um denselben Unterschied kleiner als das correspondirende $\frac{1}{2}$ n + 3te seyn und so fort, die benachbarten Glieder immer wechselsweise kleiner und gröfser als ihre correspondirenden Glieder.

6. Es werden also alle Glieder in den ungeraden Stellen kleiner als ihre correspondirenden Glieder; die in den geraden Stellen aber gröfser als ihre correspondirenden Glieder seyn. Diefs würde sich widersprechen, wenn zwey correspondirende Glieder beyde in geraden oder ungeraden Stellen ständen. Ein Glied in einer ungeraden Stelle mufs daher ein correspondirendes Glied in einer geraden Stelle haben. Das correspondirende Glied des ersten Gliedes oder des $\frac{1}{2}$ n + 1te mufs also in einer geraden Stelle stehen, d. h. $\frac{1}{2}$ n + 1 mufs gerade, folglich $\frac{1}{2}$ n mufs ungerade seyn.

7. Der Unterschied zweyer in der Ordnung der Progression auf einander folgenden Glieder sey = d; der Unterschied jeder zwey correspondirenden Glieder in der Kreisftellung sey = u; und ich setze u = m d; von zwey correspondirenden Gliedern bezeichne ich das kleinere durch einen deutschen, das gröfsere durch einen lateinischen gleichlautenden grofsen Buchstaben; so dafs

also nach (5) in der Kreisstellung deutsche und lateinische Buchstaben abwechseln würden und die Anzahl einer jeden Art $= \frac{1}{2}$ n ist.

8. Das erste oder kleinste Glied der Progression und der Kreisstellung heiſse $\mathfrak{A}$, sein correspondirendes Glied A; so ist $A = \mathfrak{A} + u = \mathfrak{A} + m\,d$ also A das $m + 1$te Glied der Progression, wie es das $\frac{1}{2}n + 1$te der Kreisstellung ist.

9. Die Glieder nach Ordnung der Progression neben einander hingeschrieben und von $\mathfrak{A}$ abgezählt, gehen also vor A vorher m Glieder; wozu von A abgezählt eben so viel correspondirende Glieder gehören, um sie in eine Kreisstellung zu bringen, so daſs zu einer solchen Verbindung 2 m aufeinander folgende Glieder der Progression erfordert werden.

10. Sind alle Glieder der Progression durch eine einzige solche Verbindung zu correspondirenden Gliedern gepaart, so ist $n = 2\,m$. Sind aber noch Glieder übrig, so muſs die Anzahl dieser wieder entweder $= 2\,m$ oder zweymahl 2 m oder dreymahl 2 m u. s. w. betragen, wenn alle zu correspondirenden Glieder verbunden werden sollen; also muſs n entweder $= 2\,m$ oder $= 4\,m$ oder $= 6\,m$ u. s. w. seyn; oder es muſs $\frac{1}{2}$ n entweder

$=$ m oder $=$ 2 m oder $=$ 3 m u. s. w. seyn, d. h. m muſs ein Factor von $\frac{1}{2}$ n seyn.

11. Ist $\frac{1}{2}$ n eine Primzahl, so kann m nicht anders als $=$ 1 oder $= \frac{1}{2}$ n seyn, also u $=$ d oder $= \frac{1}{2}$ n d. Ist aber $\frac{1}{2}$ n keine Primzahl, so kann auch m, folglich auch u mehrere Werthe haben als die nur angezeigten beyden; überhaupt so viel als $\frac{1}{2}$ n Factoren hat, welche von einander verschieden sind. Ich will die Anzahl derselben $= \nu$ setzen.

12. Wenn man die Glieder nach Ordnung der Progression hinschreibt und vom ersten Gliede abgezählt in Klassen, jede von 2 m Gliedern theilet, so darf man nicht zwey Glieder aus verschiedenen Klassen zu correspondirenden Gliedern verbinden, weil sonst in der ersten und letzten Klasse am Anfange und am Ende der Progression ein oder mehrere Glieder übrig bleiben würden, denen man die correspondirenden Glieder weggenommen hätte, und welche folglich nicht mehr könnten gestellt werden.

13. Wenn man bey einer zu machenden Kreisſtellung das erste Glied 𝔄 an das eine, und sein correspondirendes Glied A an das andere Ende eines angenommenen ersten Durchmessers gestellt

hat, so hat man noch unter $\frac{1}{2}$ n — 1 lateinischen Bushstaben, B C D u. s w. die Wahl, welchen man dem ersten Gliede als benachbartes zweytes Glied zugeben will.

14. Hat man einen, z. B. B gewählt, dessen correspondirendes Glied 𝔅 also neben A zu stehen kommt, so hat man noch unter $\frac{1}{2}$ n — 2 deutschen Buchstaben ℭ 𝔇 𝔈 u. s. w. die Wahl, welche man dem zweyten Gliede B als benachbartes drittes Glied zusetzen will.

15. Hat man hier einen, z. B. ℭ gewählt, dessen correspondirendes Glied C also neben 𝔅 zu stehen kommt, so gibt es noch $\frac{1}{2}$ n — 3 lateinische Buchstaben, deren jeder dem dritten Gliede ℭ als benachbartes viertes Glied zugeordnet werden kann.

16. Man sieht, dafs dieses so fortgeht; dafs bey der Wahl des fünften Gliedes noch $\frac{1}{2}$ n — 4 bey der Wahl des sechsten Gliedes noch $\frac{1}{2}$ n — 5 bey der Wahl des siebenten Gliedes noch $\frac{1}{2}$ n — 6 u. s. w. endlich bey der Wahl des $\frac{1}{2}$ nten noch $\frac{1}{2}$ n — ($\frac{1}{2}$ n — 1) d. h. nur ein einziges Glied noch übrig sey, dessen Correspondent sodann neben dem ersten zu stehen kommt und den Kreis schliefst.

17. Nach (13 ... 16) würde man folglich

$$(\tfrac{1}{2}n - 1).(\tfrac{1}{2}n - 2).(\tfrac{1}{2}n - 3)\ldots\ldots 3.2.1$$

Veränderungen der Ordnungen der Glieder in der Kreisstellung machen können. Aber unter diesen würden diejenigen mit begriffen seyn, die nur die umgekehrten von andern sind, welche nach der Theorie der Versetzungen gerade die Hälfte der ganzen Anzahl ausmachen. Zwey solche entgegengesetzte Ordnungen würden aber für die Aufgabe von keiner wesentlichen Verschiedenheit seyn, da die Glieder in der einen, wie in der andern einander benachbart wären, nur dafs man bey der einen die Glieder nach der rechten Hand herum, bey der andern nach der linken Hand herum einschriebe.

18. Mithin ist die Menge der für einen gewissen Unterschied der correspondirenden Glieder möglichen verschiednen Stellungen:

$$= \frac{(\tfrac{1}{2}n - 1).(\tfrac{1}{2}n - 2).(\tfrac{1}{2}n - 3)\ldots\ldots 3.2.1}{2}$$

19. Und die Menge aller möglichen verschiedenen Stellungen für eine gegebne Progression:

$$= \nu.\frac{(\tfrac{1}{2}n - 1).(\tfrac{1}{2}n - 2).(\tfrac{1}{2}n - 3)\ldots\ldots 3.2.1}{2}$$

20. Zur Erläuterung des bisherigen sey $\frac{1}{2}n = 5$; die correspondirenden Glieder:

𝔄 A | 𝔅 B | ℭ C | 𝔇 D | 𝔈 E

so wird man nach folgender Tafel die Genealogie der Stellungen für den Kreis am bequemsten übersehen können:

1stes	2tes	3tes	4tes	5tes Glied.
𝔄	B	ℭ	D	𝔈
			E	𝔇
		𝔇	C	𝔈
			E	ℭ
		𝔈	C	𝔇
			D	ℭ
	C	𝔅	D	𝔈
			E	𝔇
		𝔇	B	𝔈
			E	𝔅
		𝔈	B	𝔇
			D	𝔅
	D	𝔅	C	𝔈
			E	ℭ
		ℭ	B	𝔈
			E	𝔅
		𝔈	B	ℭ
			C	𝔅
	E	𝔅	C	𝔇
			D	ℭ
		ℭ	B	𝔇
			D	𝔅
		𝔇	B	ℭ
			C	𝔅

21. Die verschiednen Stellungen der Glieder in der ersten Hälfte des Kreises gibt die Tafel (20) an, setzt man die correspondirenden Glieder in der andern Hälfte des Kreises hinzu, so erhält man folgende Stellungen für den Kreis

	Glieder in der 1sten Hälfte.					Correspondirende Glieder in der 2ten Hälfte des Kreises.					
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Stellungen 1	𝔄	B	ℭ	D	𝔈	A	𝔅	C	𝔇	E	𝔄
2	𝔄	B	ℭ	E	𝔇	A	𝔅	C	𝔈	D	𝔄
3	𝔄	B	𝔇	C	𝔈	A	𝔅	D	ℭ	E	𝔄
4	𝔄	B	𝔇	E	ℭ	A	𝔅	D	𝔈	C	𝔄
5	𝔄	B	𝔈	C	𝔇	A	𝔅	E	ℭ	D	𝔄
6	𝔄	B	𝔈	D	ℭ	A	𝔅	E	𝔇	C	𝔄
7	𝔄	C	𝔅	D	𝔈	A	ℭ	B	𝔇	E	𝔄
8	𝔄	C	𝔅	E	𝔇	A	ℭ	B	𝔈	D	𝔄
9	𝔄	C	𝔇	B	𝔈	A	ℭ	D	𝔅	E	𝔄
10	𝔄	C	𝔇	E	𝔅	A	ℭ	D	𝔈	B	𝔄
11	𝔄	C	𝔈	B	𝔇	A	ℭ	E	𝔅	D	𝔄
12	𝔄	C	𝔈	D	𝔅	A	ℭ	E	𝔇	B	𝔄
13	𝔄	D	𝔅	C	𝔈	A	𝔇	B	ℭ	E	𝔄
14	𝔄	D	𝔅	E	ℭ	A	𝔇	B	𝔈	C	𝔄
15	𝔄	D	ℭ	B	𝔈	A	𝔇	C	𝔅	E	𝔄
16	𝔄	D	ℭ	E	𝔅	A	𝔇	C	𝔈	B	𝔄
17	𝔄	D	𝔈	B	ℭ	A	𝔇	E	𝔅	C	𝔄
18	𝔄	D	𝔈	C	𝔅	A	𝔇	E	ℭ	B	𝔄
19	𝔄	E	𝔅	C	𝔇	A	𝔈	B	ℭ	D	𝔄
20	𝔄	E	𝔅	D	ℭ	A	𝔈	B	𝔇	C	𝔄
21	𝔄	E	ℭ	B	𝔇	A	𝔈	C	𝔅	D	𝔄
22	𝔄	E	ℭ	D	𝔅	A	𝔈	C	𝔇	B	𝔄
23	𝔄	E	𝔇	B	ℭ	A	𝔈	D	𝔅	C	𝔄
24	𝔄	E	𝔇	C	𝔅	A	𝔈	D	ℭ	B	𝔄

22. Die eine Hälfte dieser Stellungen besteht aus den umgekehrten der andern Hälfte. Um die-

ses desto deutlicher zu übersehen, ist hinten an jede Stellung noch das erste Glied angehängt. Die Stellungen, welche sich decken, wenn die einen nach der umgekehrten Ordnung gelesen werden, sind folgende:

Stellung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	13	15
Deckende Stellung	24	18	22	12	16	10	23	17	20	14	21	19

Die Anzahl der für den Kreis wirklich verschiednen Stellungen also:

$$= 12 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = \frac{(\frac{1}{2}n-1) \cdot (\frac{1}{2}n-2) \ldots 1}{2} \quad (18)$$

23. Folgende Exempel werden dienen, die Anwendung des bisherigen Verfahrens auf Zahlen zu zeigen.

I. Exempel. $\frac{1}{2}n = 3;\ d = 1;\ \mathfrak{A} = 1$

Progression	1	2	3	4	5	6
$m =$	1	3				
$u =$	1	3				

Correspondirende Glieder für $u = 1$

$\mathfrak{A}$	A	$\mathfrak{B}$	B	$\mathfrak{C}$	C
1	2	3	4	5	6

Genealogie der Stellungen.

1stes	2tes	3tes Glied
1	4	5
	6	3

Tafel der Stellungen.

In der ersten Hälfte des Kreises.			Correspondirende Glieder in der zweyten Hälfte.			
1	4	5	2	3	6	1
1	6	3	2	5	4	1

Beyde decken einander, wenn die eine umgekehrt wird. Es ist also nur eine einzige brauchbar.

Correspondirende Glieder für $u = 3$

𝔄	A	𝔅	B	ℭ	C
1	4	2	5	1	6

Genealogie der Stellungen.

1stes	2tes	3tes Glied
1	5	3
	6	2

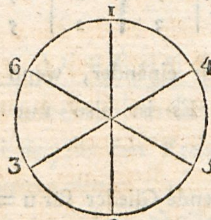
Tafel der Stellungen.

In der ersten Hälfte des Kreises.			Correspondirende Glieder in der zweyten Hälfte.			
1	5	3	4	2	6	1
1	6	2	4	3	5	1

welche beyde sich ebenfalls decken, wenn die eine umgekehrt wird, wovon also nur die eine brauchbar ist.

Folgende beyde Figuren stellen demnach die beyden möglichen verschiedenen Stellungen im Kreise dar.

1 Fig. u = 1



2 Fig. n = 3

In der ersten Figur ist

$$1 + 4 = 2 + 3$$
$$4 + 5 = 3 + 6$$
$$5 + 2 = 6 + 1$$

In der zweyten Figur ist

$$1 + 5 = 4 + 2$$
$$5 + 3 = 2 + 6$$
$$3 + 4 = 6 + 1$$

wie es die Aufgabe verlangt.

II. Exempel. $\frac{1}{2}$ n = 5; d = 1; 𝔄 = 1.

Progression	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

m =	1	5
u =	1	5

Correspondirende Glieder für u = 1

𝔄	A	𝔅	B	ℭ	C	𝔇	D	𝔈	E
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Genealogie der Stellungen.

1stes	2tes	3tes	4tes	5tes Glied.
1	4	5	8	9
			10	7
		7	6	9
			10	5
		9	6	7
			8	5
	6	3	8	9
			10	7
		7	4	9
			10	3
		9	4	7
			8	3
	8	3	6	9
			10	5
		5	4	9
			10	3
		9	4	5
			6	3
	10	3	6	7
			8	5
		5	4	7
			8	3
		7	4	5
			6	3

Die für den Kreis wirklich verschiedenen Stellungen können in diesem Exempel aus (21, 22) genommen werden.

Sie sind folgende:

Stellung	1	1	4	5	8	9	2	3	6	7	10
	2	1	4	5	10	7	2	3	6	9	8
	3	1	4	7	6	9	2	3	8	5	10
	4	1	4	7	10	5	2	3	8	9	6
	5	1	4	9	6	7	2	3	10	5	8
	6	1	4	9	8	5	2	3	10	7	6
	7	1	6	3	8	9	2	5	4	7	10
	8	1	6	3	10	7	2	5	4	9	8
	9	1	6	7	4	9	2	5	8	3	10
	11	1	6	9	4	7	2	5	10	3	8
	13	1	8	3	6	9	2	7	4	5	10
	15	1	8	5	4	9	2	7	6	3	10

Correspondirende Glieder für $u = 5$

𝔄	A	𝔅	B	ℭ	C	𝔇	D	𝔈	E
1	6	2	7	3	8	4	9	5	10

Ohne hier die Genealogie der Stellungen besonders hinzusetzen, will ich gleich aus (21, 22) die zwölf verschiedenen Stellungen nehmen.

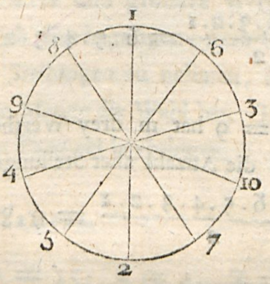
Sie sind folgende:

Stellung 1	1	7	3	9	5	6	2	8	4	10
2	1	7	3	10	4	6	2	8	5	9
3	1	7	4	8	5	6	2	9	7	10
4	1	7	4	10	3	6	2	9	5	8
5	1	7	5	8	4	6	2	10	3	9
6	1	7	5	9	3	6	2	0	4	8
7	1	8	2	9	5	6	3	7	4	10
8	1	8	2	10	4	6	3	7	5	9
9	1	8	4	7	5	6	3	9	2	10
11	1	8	5	7	4	6	3	10	2	9
13	1	9	2	8	5	6	4	7	3	10
15	1	9	3	7	5	6	4	8	2	10

Ein paar Stellungen, eine für $u = 1$; die andere für $u = 5$ stellen folgende Figuren dar;

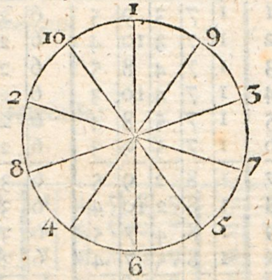
für $u = 1$, die 8te Stellung

Fig. 3.



für n = 5, die 15te Stellung

Fig. 4.



24. Bey einer grössern Anzahl von Gliedern alle mögliche Stellungen zu construiren, würde alle menschliche Geduld übersteigen, weil ihre Anzahl sehr schnell wächs't.

Bey $\frac{1}{2}$ n = 7 hat m zwey Werthe, 1 und 7, weil $\frac{1}{2}$ n eine Primzahl ist; also $\nu = 2$. Die Anzahl aller Stellungen

$$= 2 \cdot \frac{6.5.4.3.2.1}{2} = 6.5.4.3.2.1 = 720$$

Bey $\frac{1}{2}$ n = 9 hat m drey Werthe, 1, 3, 9. Also $\nu = 3$; die Anzahl aller Stellungen

$$= 3 \cdot \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{2} = 9.8.7.6.5.4$$

$= 60480.$

Bey $\frac{1}{2}$ n = 11 hat m zwey Werthe, 1, 11, also $\nu = 2$. Die Anzahl aller Stellungen

$$= 2 . \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{2} = 10.9.8 \ldots . 1$$

$= 3628800$.

Bey $\frac{1}{2}$ n = 13 hat m zwey Werthe, 1, 13, und $\nu = 2$. Die Anzahl aller Stellungen also

$$= 2 . \frac{12 . 11 . 10 \ldots . 1}{2} = 12 . 11 . 10 \ldots . 1$$

$= 479001600$.

Bey $\frac{1}{2}$ n = 15 hat m vier Werthe, 1, 3, 5, 15, also $\nu = 4$, und die Anzahl aller Stellungen

$$= 4 . \frac{14 . 13 \ldots . 1}{2} = 2 . 14 . 13 \ldots . 1$$

$= 17435'658400$.

25. Für diese und gröſsere Werthe von $\frac{1}{2}$ n wird man sich also begnügen, nach Gefallen eine, oder einige Stellungen zu nehmen, da man unter einer groſsen Menge die Wahl hat. Ich werde hievon noch ein Exempel beybringen.

III. Exempel.

$\frac{1}{2}$ n = 15; d = 4; $\mathfrak{A} = 7$.

Progression

7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71	75	79

83	87	91	95	99	103	107	111	115	119	123

m =	1	3	5	15
u =	4	12	20	60

Ich wähle eine Stellung für u = 20. Also m = 5; 2 m = 10, dieſs gibt drey Klassen correspondirender Glieder.

Erste Klasse

𝔄 A	𝔅 B	ℭ C	𝔇 D	𝔈 E
7 27	11 31	15 35	19 39	23 43

Zweyte Klasse

𝔉 F	𝔊 G	ℌ H	ℑ I	K 𝔎
47 67	51 71	55 75	59 79	63 83

Dritte Klasse

𝔏 L	𝔐 M	𝔑 N	𝔒 O	𝔓 P
87 107	91 111	95 115	99 119	103 123

Eine

Eine von den vielen Millionen Stellungen ist also folgende: ich nehme die erste, welche am wenigsten Mühe beym Zusammensuchen macht.

Glieder in der ersten Hälfte des Kreises.

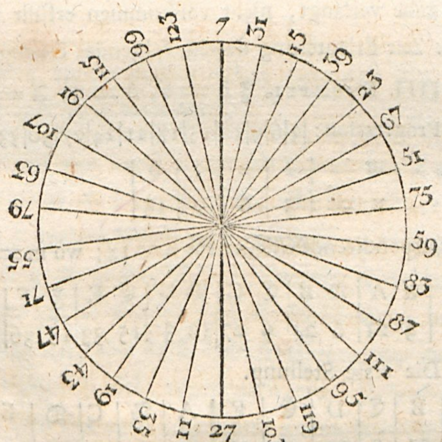
𝔄	B	ℭ	D	𝔈	F	𝔊	H	𝔍	K	𝔏	M	𝔑	O	𝔓
7	31	15	39	23	67	51	75	59	83	87	111	95	119	103

Correspondirende Glieder in der zweyten Hälfte.

A	𝔅	C	𝔇	E	𝔉	G	ℌ	I	𝔎	L	𝔐	N	𝔒	P
27	11	35	19	43	47	71	55	79	63	107	91	115	99	123

Diese Stellung im Kreise ist in folgender Figur dargestellt.

Fig. 5.



26. Am leichtesten ist immer die erste Stellung für $m = \frac{1}{2} n$. Diese kann nehmlich ganz mechanisch so hingeschrieben werden, daſs man erst die Glieder nach Ordnung der Progression im Kreise herum schreibt und dann das zweyte, vierte, sechste Glied u. s. w. mit ihren gegenüberstehenden verwechselt.

27. Ich habe oben (6) gezeigt, daſs die halbe Anzahl der Glieder ungerade seyn müsse. Ist sie gerade, so können zwar alle übrige gegenüberstehende Paare gleiche Summen geben, aber nicht das Paar des ersten und letzten Gliedes mit ihren gegenüberstehenden; mithin würde das, was die Aufgabe verlangt, nicht vollkommen erfüllt werden. Zur Erläuterung dessen, folgendes Exempel:

IIII. Exempel. $\frac{1}{2} n = 6$, $d = 3$, $\mathfrak{A} = 3$.

Progression:	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36

m =	1	2	3	6
u =	3	6	9	18

Correspondirende Glieder für $u = 18$; wo $m = \frac{1}{2} n$

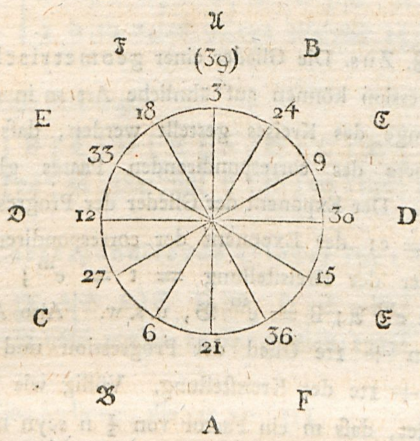
𝔄.	A	𝔅	B	ℭ	C	𝔇	D	𝔈	E	𝔉	F
3	21	6	24	9	27	12	30	15	33	18	36

Die erste Stellung.

𝔄	B	ℭ	D	𝔈	F	A	𝔅	C	𝔇	E	𝔉
3	24	9	30	15	36	21	6	27	12	33	81

Im Kreise.

Fig. 6.



Alles übrige ist hier richtig, nur dass $\mathfrak{F} + \mathfrak{A}$ nicht $= F + A$ seyn kann.

Wenn man am Schlusse des Kreises statt 𝔄 ein Glied $= 21 + u = 39$ hätte, oder dem Gliede 𝔄 einen doppelten Werth gäbe, einmahl als Anfangsglied $= 3$, das andere Mahl als überzähliges Schlussglied $= 39$, so würden zwar die Gleichungen heraus kommen, aber doch diese Auflösung der Aufgabe eigentlich nicht angemessen seyn. Uebrigens, wenn man das eben angeführte gelten lassen will, so kann die ganze Anzahl der Glieder auch ungerade seyn wie aus der sechsten Figur von selbst erhellet.

28. Zus. Die Glieder einer geometrischen Progression können auf ähnliche Art so in dem Umfange des Kreises gestellt werden, daſs die Producte des correspondirenden Paares gleich seyen. Der Exponent der Glieder der Progression sey $= e$; der Exponent der correspondirenden Glieder der Kreisſtellung $= t = e^m$; also $A = e^m \mathfrak{A}$; $B = e^m \mathfrak{B}$, u. s. w. Also A ist das $m + 1$te Glied der Progression und das $\frac{1}{2} n + 1$te der Kreisſtellung. Völlig wie (10) erhellet, daſs m ein Factor von $\frac{1}{2} n$ seyn muſs, und daſs m und mithin t so viel verschiedne Werthe haben als $\frac{1}{2} n$ verschiedne Factoren hat. Die Menge der verschiednen Stellungen wird begreiflich hier auf eben die Art durchzuzählen seyn wie (18. 19).

V. Exempel. $\frac{1}{2} n = 5$; $e = 2$; $\mathfrak{A} = 3$. Geometrische Progression.

3	6	12	24	48	96	192	384	768	1536

m =	1	5
t =	2	32

Correspondirende Glieder für t = 2

𝔄	A	𝔅	B	ℭ	C	𝔇	D	𝔈	E
3	6	12	24	48	96	192	384	768	1536

Eine Stellung.

𝔄	B	ℭ	D	𝔈	A	𝔅	C	𝔇	E
3	24	48	384	768	6	12	96	192	1536

Correspondirende Glieder für t = 32

𝔄	A	𝔅	B	ℭ	C	𝔇	D	𝔈	E
3	96	6	192	12	384	24	768	48	1536

Eine Stellung, die 9te aus (21)

𝔄	C	𝔇	B	𝔈	A	ℭ	D	𝔅	E
3	384	24	192	48	96	12	768	6	1536

Beyde Stellungen sind in folgenden Figuren dargestellt.

Fig. 7.

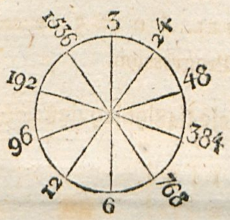
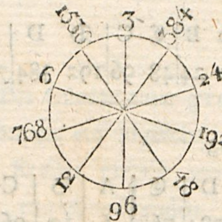


Fig. 8.



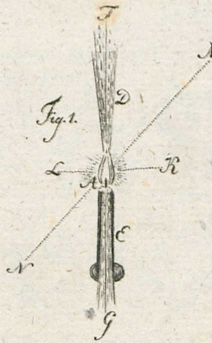
Ende des ersten Bändchens.

F.3.

F.4.

Fig. 4.

Fig. 1.



F. 2.

F. 3.

F. 4. Fig. 4.

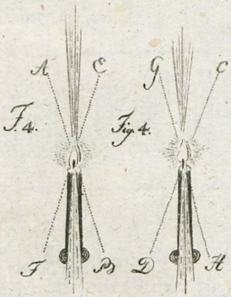
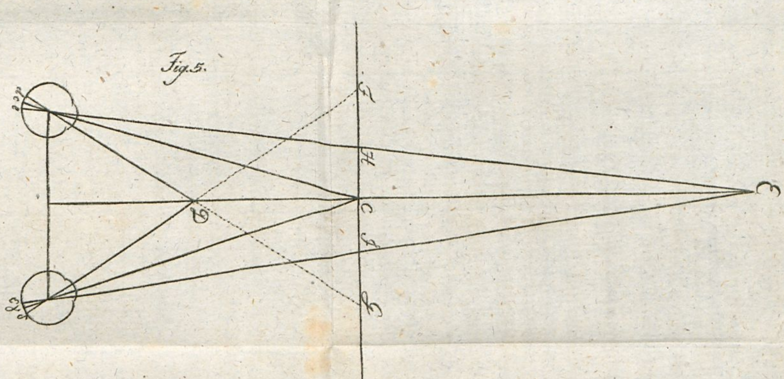


Fig. 5.



F. 6.

F. 7.

F. 8.

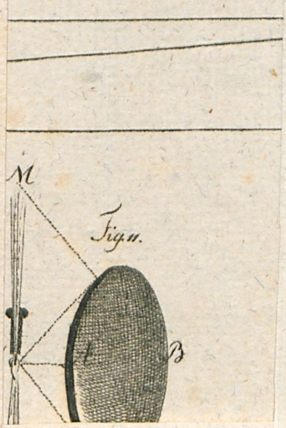


Fig. 11.

Fig. 9.

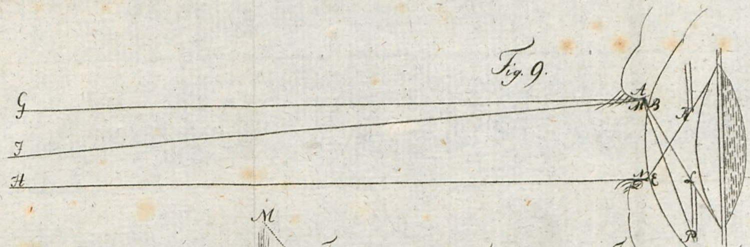


Fig. 10.

Fig. 11.

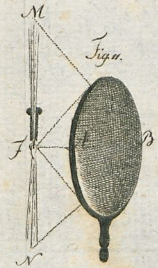


Fig. 12.

Fig. 13.

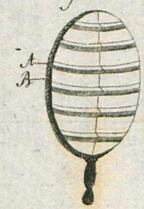


Fig. 14.

Fig. 15.

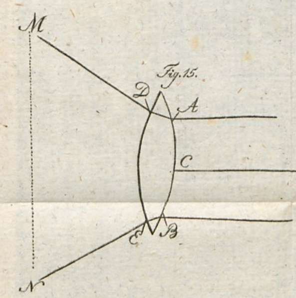
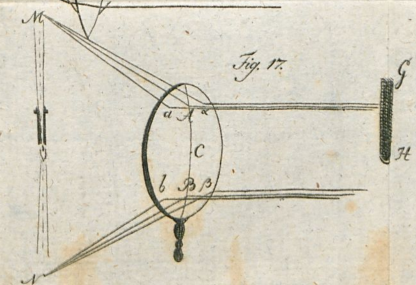


Fig. 16.

Fig. 17.



VERMISCHTE

AUFSÄTZE

FÜR LIEBHABER

MATHEMATISCHER WISSENSCHAFTEN,

VON

G. U. A. VIETH,

ÖFFENTLICHEM LEHRER DER MATHEMATIK ZU DESSAU.

ERSTES BÄNDCHEN.

BERLIN, 1792.

IN DER FRANKESCHEN BUCHHANDLUNG.