1796 19

DISSERTATIO
DE
AEQUATIONIBUS RADICES ALIQUOT AEQUALES HABENTIBUS,

CUJUS
PARTICULAM SECUNDAM
VENIA AMPLISSIMI ORD. PHILOSOPH. GRYPH.
PRAESIDE
Mag. ANDREA HULTÉN,
MATHEM. ET ASTRON. PROF. REG. ET ORD.
PRO GRADU PHILOSOPHICO
PUBLICE VENTILANDAM
SISTIT
SVENO NICOLAUS WAHRMAN,
HOLMIA-SVECUS,
IN AUDITORIO MAJORI
D. XII APRILIS MDCCXCVI.
H. A. M. S.

GRYPHIAE,
LITTERIS I. H. ECKHARDT, REG. ACAD. TYPOGR.

SACRAE REGIAE MAJESTATIS

MAGNAE FIDEI VIRO,

URBIS HOLMIAE PRAEFECTO

ATQUE

REGII ORDINIS DE STELLA POLARI EQUITI

SPLENDIDISSIMO,

GENEROSO ET NOBILISSIMO

DOMINO

HENRICO LILIENSPARRE,

MAECENATI MAXIMO,

HOC OPUSCULUM SACRARE, ET TANTO ORNARE NOMINE,

VIRI ILLUSTRISSIMI MAGNAE MENTI FIDENS,

AUDET

RESPONDENS.

§. 8.

Ut consectaria theorematis in § 7. Part. 1. demonstrati, evidentiora evadant, detur aequatio $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} + sx^{n-4}$ — etc. $= 0$ Multiplicentur termini ejusdem per correspondentes terminos progressionis arithmeticae

$$A,\ A \pm B,\ A \pm 2B,\ A \pm 3B,\ A \pm 4B \text{ etc.}$$

ita quidem, ut primus terminus aequationis in primum terminum progressionis ducatur et, producto P dicto, erit

$$Ax^n - (A \pm B)px^{n-1} + (A \pm 2B)qx^{n-2} - (A \pm 3B)rx^{n-3}$$
$$+ (A \pm 4B)sx^{n-4} - \text{etc.} = P.$$

Assumtis duabus progressionibus arithmeticis

$$A,\ A \pm B,\ A \pm 2B,\ A \pm 3B,\ A \pm 4B \text{ etc.}$$
$$a,\ a \pm b,\ a \pm 2b,\ a \pm 3b,\ a \pm 4b \text{ etc.}$$

et multiplicatione per correspondentes terminos eodem modo instituta, ita ut productum primorum progressionum arithmeticarum terminorum in primum terminum aequationis datae ducatur, et producto = Q posito, erit

$$aAx^n - (a \pm b)(A \pm B)px^{n-1} + (a \pm 2b)(A \pm 2B)qx^{n-2}$$
$$- (a \pm 3b)(A \pm 3B)rx^{n-3} + (a \pm 4b)(A \pm 4B)sx^{n-4} \text{ etc.} = Q.$$

Si tres assumtae fuerint progressiones arithmeticae

$$A,\ A \pm B,\ A \pm 2B,\ A \pm 3B,\ A \pm 4B \text{ etc.}$$
$$a,\ a \pm b,\ a \pm 2b,\ a \pm 3b,\ a \pm 4b \text{ etc.}$$
$$\alpha,\ \alpha \pm \beta,\ \alpha \pm 2\beta,\ \alpha \pm 3\beta,\ \alpha \pm 4\beta \text{ etc.}$$

et productum per similem multiplicationem ortum R appelletur, habebitur

$$\alpha aAx^n - (\alpha \pm \beta)(a \pm b)(A \pm B)px^{n-1}$$
$$+ (\alpha \pm 2\beta)(a \pm 2b)(A \pm 2B)qx^{n-2}$$
$$- (\alpha \pm 3\beta)(a \pm 3b)(A \pm 3B)rx^{n-3}$$
$$+ (\alpha \pm 4\beta)(a \pm 4b)(A \pm 4B)sx^{n-4} - \text{etc.} = R.$$

Similiter, si quatuor, quinque etc. progressiones arithmeticae assumtae fuerint, producta per S, T etc. designentur.

§. 9.

Aequatio data $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} -$ etc. $= 0$ radices aequales, $c, c, c, c,$ etc. et inaequales, $d, e, f,$ etc. habere ponatur. Si aequales illae radices duae fuerint, evanescit (per §. 7) quantitas P; si tres, non tantum P, sed etiam Q evanescit; si autem quatuor, P, Q et R simul evanescunt, posito nempe c pro x in quantitatibus P, Q et R, et erit in hoc casu

$$Ax^n - (A \pm B)px^{n-1} + (A \pm 2B)qx^{n-2} - (A \pm 3B)rx^{n-3} + \text{etc.} = 0$$
$$aAx^n - (a \pm b)(A \pm B)px^{n-1} + (a \pm 2b)(A \pm 2B)qx^{n-2} - \text{etc.} = 0$$
$$\alpha aAx^n - (\alpha \pm \beta)(a \pm b)(A \pm B)px^{n-1}$$
$$+ (\alpha \pm 2\beta)(a \pm 2b)(A \pm 2B)qx^{n-2} - \text{etc.} = 0.$$

Et

Et ſic quoque ſequentium ordinum oriuntur aequationes, prout, creſcente numero radicum aequalium aequationis datae, quantitates S, T etc. evaneſcunt. Quum praeterea progreſſio arithmetica A, A $\pm$ B, A $\pm$ 2B, etc. generalis ſit, et utcumque variari poſſit, aequatio prima $Ax^n - (A \pm B)px^{n-1} + \text{etc.} = 0$ aequationes numero infinitas ſub ſe comprehendit, quae per unam progreſſionem arithmeticam e data aequatione deductae ſunt. Hae omnes, brevitatis cauſſa, per A indigitentur. Eodem modo B, C, D etc. diverſos ſignificent aequationum ordines, prout e data aequatione, ope duarum, trium, quatuor etc. progreſſionum arithmeticarum, deductae fuerint.

§. 10.

Poſitis iis, quae in §. 7. demonſtrata ſunt, non tantum numerus, ſed etiam valor radicum aequalium aequationis datae $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} + \text{etc.} = 0$, ſi quas habuerit, per aequationes A, B, C, D, E, F, etc., per certum numerum progreſſionum arithmeticarum inde deductas, determinatur. Si enim data aequatio duas habuerit radices aequales, una illarum communis eſt radix aequationum A: ſi aequales radices aequationis datae tres fuerint, duae illarum ſunt aequationum A radices communes, et una aequalium eſt radix communis aequationum B. Eodem modo ſi radices aequales aequationis datae quatuor ponantur, tres illarum aequationes A, duae B, et una C ingrediuntur, et ſic in reliquis. Si autem vice verſa aequationes ordinis A, vel ordinis B, vel ordinis C unam habuerint radicem communem, aequatio data habebit in primo caſu duas, in ſecundo tres, et in quarto quatuor radices aequales, quarum quaelibet communi illi radici aequalis eſt. Quomodo ſeſe res habeat, quum in aequatione propoſita non tantum aequales radices, ſed claſſes quoque radicum aequalium dantur, ex allatis facile intelligitur. Quando vero radices aequales indagantur, progreſſiones arithmeticas ita eligendas eſſe, ut aequationes A, B, C, D, etc., quo facilius reſolvantur, ad gradum inferiorem deſcendant, per ſe

 patet.

patet. Obſervandum praeterea eſt, haec omnia, quae attulimus, valere, ſi ſigna in aequatione data $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} -$ etc. $= 0$ utcumque variantur.

§. 11.

Ea, quae in antecedentibus de aequalibus aequationum radicibus dicta ſunt, exemplo illuſtrandi cauſſa, reſolvenda proponatur aequatio quarti gradus

$$x^4 - x^3 - \frac{5}{3} x^2 - \frac{17}{27} x - \frac{2}{27} = 0$$

Ut radices ipſius aequales, ſi quas habuerit, inveniantur, ſecundum ſupra indicatas regulas fiat multiplicatio per progreſſiones arithmeticas pro lubito aſſumtas, e. g. per duas ſequentes:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3, \end{array}$$ et erit

$$-\frac{10}{3} x^2 - \frac{102}{27} x - \frac{24}{27} = 0, \text{ h. e. } x^2 + \frac{306}{270} x + \frac{72}{270} = 0,$$

ſeu $x^2 + \frac{17}{15} x + \frac{4}{15} = 0$, quae aequatio, ſecundum methodum cognitam reſoluta, dat $x = \frac{-17 \pm 7}{30}$, h. e.

$x = -\frac{1}{3}$, et $x = -\frac{4}{5}$.

Si,

Si, eadem data aequatione

$$x^4 - x^3 - \frac{5}{3}x^2 - \frac{17}{27}x - \frac{2}{27} = 0,$$

multiplicatio instituatur per duas alias progressiones arithmeticas

$$\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0, \end{array}$$ erit

$$3x^3 + \frac{20}{3}x^2 + \frac{51}{27}x = 0, \quad x^2 + \frac{20}{9}x + \frac{51}{81} = 0,$$

seu $x^2 + \frac{20}{9}x + \frac{17}{27} = 0$, unde datur $x = \frac{-10 \pm 7}{9}$,

h. e. $x = -\frac{1}{3}$, et $x = -\frac{17}{9} = -1 - \frac{8}{9}$.

Quum duae illae aequationes quadraticae communem radicem $\left(-\frac{1}{3}\right)$ habeant, proposita aequatio biquadratica tres habet radices aequales, quarum unaquaeque est $= -\frac{1}{3}$. Divisa itaque aequatione $x^4 - x^3 - \frac{5}{3}x^2 - \frac{17}{27}x - \frac{2}{27} = 0$ per $\overline{x + \frac{1}{3}}\Big|^3$, reliqua radix (2) datur.

§. 12.

Aequatio $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} +$ etc. $= 0$ repetatur, cujus radices aequales per c, c, c, c, etc. et inaequales per d, e, f, etc., ut supra, repraesententur. Erit itaque (per §. 9), dum radices aequales aequationis datae quatuor sunt, et c pro x substituitur,

nx^n

$$nx^n - (n-1)px^{n-1} + (n-2)qx^{n-2} - (n-3)rx^{n-3} + \text{etc.} = 0,$$

$$n(n-1)x^n - (n-1)(n-2)px^{n-1} + (n-2)(n-3)qx^{n-2}$$
$$- (n-3)(n-4)rx^{n-3} + \text{etc.} = 0,$$

$$n(n-1)(n-2)x^n - (n-1)(n-2)(n-3)px^{n-1}$$
$$+ (n-2)(n-3)(n-4)qx^{n-2} - \text{etc.} = 0,$$

h. e. si primam harum aequationum per $\frac{dx}{x}$, secundam per $\frac{dx^2}{x^2}$ et tertiam per $\frac{dx^3}{x^3}$ multiplicamus,

$$nx^{n-1}dx - (n-1)px^{n-2}dx + (n-2)qx^{n-3}dx - (n-3)rx^{n-4}dx + \text{etc.} = 0$$

$$n(n-1)x^{n-2}dx^2 - (n-1)(n-2)px^{n-3}dx^2 + (n-2)(n-3)qx^{n-4}dx^2 - \text{etc.} = 0$$

$$n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3 - (n-1)(n-2)(n-3)px^{n-4}dx^3$$
$$+ (n-2)(n-3)(n-4)qx^{n-5}dx^3 - \text{etc.} = 0$$

Quantitate dx, seu fluxione ipsius x, constante, 1a, 2a et 3a aequatio fluxionem primam, secundam et tertiam aequationis datae, quaeque suo ordine, repraesentant.

Quando itaque aequatio $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} + \text{etc.} = 0$ quatuor habet radices aequales, evanescit non tantum ejusdem fluxio prima, sed etiam secunda et tertia. Similiter, si tres fuerint radices aequales, prima et secunda fluxio evanescunt, si duae, fluxio prima tantum evanescit, et generaliter, posito numero radicum aequalium aequationis cujusdam $= m$, ejusdem aequationis ordines fluxionum evanescentium per $m - 1$ repraesentantur. Haec autem ita intelligenda sunt: Si aequatio, seu quantitas variabilis evanescens, $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} + \text{etc.} = 0$, radices aequales, c, c, etc., et inaequales d, e, f, etc. simul habuerit, ejusdem modo commemorati fluxionum ordines in eo tantum casu evanescunt, quum quantitas x uni aequalium radicum c, non autem, quum cuidam inaequalium, d, e, f, etc., aequalis evadit. Sic insignem fluxionum proprietatem theoria aequationum illustrat.

VD
18

1796 19

ERTATIO
DE
US RADICES ALIQUOT
ES HABENTIBUS,

CUJUS
LAM SECUNDAM
I ORD. PHILOSOPH. GRYPH.

AESIDE
DREA HULTÉN,
STRON. PROF. REG. ET ORD.

DU PHILOSOPHICO
E VENTILANDAM

SISTIT
OLAUS WAHRMAN,
LMIA-SVECUS,

TORIO MAJORI
PRILIS MDCCXCVI.

A. M. S.

YPHIAE,
KHARDT, REG. ACAD. TYPOGR.