1793 18

DISSERTATIO
DE
AEQUATIONIBUS RADICES ALIQUOT AEQUALES HABENTIBUS,

CUJUS

PARTICULAM PRIMAM

VENIA AMPLISSIMI ORD. PHILOSOPH. GRYPH.

PRAESIDE

Mag. ANDREA HULTÉN,

MATHES. ET ASTRON. PROF. REG. ET ORD.

PUBLICE VENTILANDAM

SISTIT

SVENO CHRISTIANUS KLINGBERG,

NERICIUS,

IN AUDITORIO MAJORI

D. XV MAJI MDCCXCIII.

GRYPHISWALDIÆ,

LITTERIS A. F. RÖSE, REG. ACAD. TYPOGR. 1793.

VIRIS
AMPLISSIMIS ET CELEBERRIMIS,
DOMINO
Mag. JOH. CHR. MUHRBECK,
AD REG. ACAD. GRYPH. PHILOS. THEOR. ET PRACT. PROFESSORI,
H. A.
RECTORI MAGNIFICO
ET
COMITI PALATINO CAESAREO,

NEC NON
DOMINO
Mag. CAROLO BRISMAN,
IN ATHENAEO GRYPH. MATH. ET PHYS. EXPER. PROFESSORI,

FAUTORIBUS SUIS OPTIMIS,

JUVENILIA HAECCE TENTAMINA, DICATA VOLUIT

CULTOR DEVOTISSIMUS
SVENO CHRISTIANUS KLINGBERG.

§. 1.

Dum aequatio, cujus radices inaequales sunt, per hoc productum repraesentatur $(x-a.(x-b).(x-c).(x-d).\&c.=0$, ubi a, b, c, d &c., quae inaequales supponuntur, radices aequationis seu valores incognitae, cujus vices x heic sustinet, constituunt; aequatio, quae duas, tres, quatuor vel generaliter m radices aequales habet, per

$$(x-n).(x-n).(x-a).(x-b).(x-c).\&c.=0$$

seu $(x-n)^2.(x-a).(x-b).(x-c).\&c.=0$,

$$(x-n)^3.(x-a).(x-b).(x-c).\&c.=0,$$

$$(x-n)^4.(x-a).(x-b).(x-c).\&c.=0,$$

et $(x-n)^m.(x-a).(x-b).(x-c).\&c.=0$ respective proponi potest. Numerum factorum simplicium, producta ista componentium, gradum, ad quem aequatio adscendit, determinare, et hisce fatium, gradum, ad quem aequatio adscendit, determinare, et hisce factoribus inventis, aequationem resolutam esse, ex ipsis Algebrae elementis constat. Sic e. g. $(x-a).(x-b).(x-c).(x-d).=0$ aequatio est biquadratica, et problema factores $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$, inveniendi, aequationis resolutionem seu inventionem radicum a, b, c, d, constituit. Quum unus quilibet horum factorum inventus est, et aequatio per hunc factorem dividitur, aequationem ad gradum proxime inferiorem descendere, quum vero aequatio per productum duorum ejusmodi factorum dividitur, aequationem inferiorem oriri, cujus gradus numero binario a gradu datae aequationis differt, et sic porro, ipsae aequationum supra propositae formae indicant. Sic data aequatione biquadratica $(x-a).(x-b).(x-n).(x-n)=0$, seu $x^4-(a+b+2n).x^3+(ab+2an+2bn+n^2).x^2-(2abn+an^2+bn^2).x+abn^2=0$, quae duas aequales radices n habet, et duas inaequales

a et b, si per methodum aliquam duae illae aequales radices investigari possunt, divisione per $(x-n).(x-n)=0$, seu $x^2-2nx+n^2$ facta, aequatio habetur secundi gradus, duas reliquas radices aequationis datae a et b continens, et sic resolutio aequationis biquadraticae ad resolutionem aequationis quadraticae reducta est. In eo itaque cardo rei vertitur, ut methodus habeatur, cujus ope aequales illae radices eruantur, quo facto, resolutio ejusmodi aequationum eo facilior evadit, quo major numerus radicum aequalium fuerit. Nec hac in re summi nominis Analystarum opera desideratur, eorumque insistentes vestigiis materiam hancce attentione dignissimam illustrare conabimur.

§. 2.

Prius vero quam ad aequationes, quae duas vel plures aequales habent radices, considerandas propius accedamus, haec praemittenda sunt: Data aequatione $x^n-px^{n-1}+qx^{n-2}-rx^{n-3}+sx^{n-4}-\&c.=0$, quae aequationem cujuscumque gradus repraesentat, ponatur $y=x-e$, unde $x=y+e$. Hoc valore pro x in aequatione data substituto, erit $(e+y)^n-p.(e+y)^{n-1}+q.(e+y)^{n-2}-r.(e+y)^{n-3}+s.(e+y)^{n-4}-\&c.=0$, et dum potestates ipsius $e+y$ per Theorema binomiale NEWTONI evolvuntur, aequatio hanc induit faciem:

$$0=\left\{\begin{array}{l}
e^n+\frac{n}{1}.e^{n-1}y+\frac{n\ (n-1)}{1\ .\ 2}.e^{n-2}y^2+\frac{n}{1}\ldots e^{n-3}y^3+\&c.\\
-p\left(e^{n-1}+\frac{(n-1)}{1}.e^{n-2}y+\frac{(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2}.e^{n-3}y^2+\frac{(n-1)}{1}\ldots e^{n-4}y^3+\&c.\right)\\
q\left(e^{n-2}+\frac{(n-2)}{1}.e^{n-3}y+\frac{(n-2)(n-3)}{1\ .\ 2}.e^{n-4}y^2+\frac{(n-2)}{1}\ldots e^{n-5}y^3+\&c.\right)\\
-r\left(e^{n-3}+\frac{(n-3)}{1}.e^{n-4}y+\frac{(n-3)(n-4)}{1\ .\ 2}.e^{n-5}y^2+\frac{(n-3)}{1}\ldots e^{n-6}y^3+\&c.\right)\\
s\left(e^{n-4}+\frac{(n-4)}{1}.e^{n-5}y+\frac{(n-4)(n-5)}{1\ .\ 2}.e^{n-6}y^2+\frac{(n-4)}{1}\ldots e^{n-7}y^3+\&c.\right)\\
\quad\&c.\qquad\qquad\qquad\&c.\qquad\qquad\qquad\&c.
\end{array}\right.$$

Heic

Heic 1° observandum est, unamquamque radicem aequationis transformatae, ubi y incognita habetur, unaquaque radice aequationis datae $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} + sx^{n-4} - \&c. = 0$ quantitate e minorem esse, quum in hoc calculo $y = x - e$ posuerimus.

2°. $e^n - pe^{n-1} + qe^{n-2} - re^{n-3} + se^{n-4} - \&c.$ ultimus est terminus aequationis transformatae; $\left(\frac{n}{1} . e^{n-1} - \frac{(n-1)}{1} . pe^{n-2} + \frac{(n-2)}{1} . qe^{n-3} - \frac{(n-3)}{1} . re^{n-4} + \frac{(n-4)}{1} . se^{n-5} - \&c.\right) y$ penultimus; $\left(\frac{n}{1} . \frac{(n-1)}{2} . e^{n-2} - \frac{(n-1)(n-2)}{1 . 2} . pe^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{1 . 2} . qe^{n-4} - \frac{(n-3)(n-4)}{1 . 2} . re^{n-5} + \frac{(n-4)(n-5)}{1 . 2} . se^{n-6} - \&c.\right) y^2$ vero antepenultimus habetur, et sic ulterius.

3°. Aequationis transformatae ultimus terminus $e^n - pe^{n-1} + qe^{n-2} - re^{n-3} + se^{n-4} - \&c.$ idem omnino est, atque aequatio data $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} + sx^{n-4} = 0$, si in hac x cum e commutetur. Coëfficiens vero penultimi termini $\frac{n}{1} . e^{n-1} - \frac{(n-1)}{1} . pe^{n-2} + \frac{(n-2)}{1} . qe^{n-3} - \frac{(n-3)}{1} . re^{n-4} + \frac{(n-4)}{1} . se^{n-5} - \&c.$ habetur, quum unumquodque membrum ultimi termini per exponentem ipsius e ejusdem membri multiplicatur, et productum per $1 \times e$ dividitur. Sic quoque oritur termini antepenultimi coëfficiens $\frac{n}{1} . \frac{(n-1)}{2} . e^{n-2} - \frac{(n-1)(n-2)}{1 . 2} . pe^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{1 . 2} . qe^{n-4} - \&c.$ multiplicando unumquodque membrum coëfficientis penultimi per exponentem ipsius e, qui ibi habetur, et per $2 \times e$ dividendo, et generaliter coëfficiens termini cujuscumque, qui post se n terminos habet, a coëfficiente proxime

proxime praecedenti deducitur, dicto modo unumquodque hujus coëfficientis membrum per exponentem dignitatis, quam in ipso habet e multiplicando, et per $n \times e$ dividendo, id, quod transformata aequatio satis ostendit.

§. 3.

Si aequatio cujuscumque gradus radices habeat nihilo aequales, tot deficere terminos, a fine numerando, quot radices illæ, æquales nihilo, fuerint, observandum quoque est. Id ipsa multiplicationis natura indicat. Si enim aequatio sit $(x-a).(x-b).(x-0)=0$, seu $(x-a).(x-b).x=0$, hanc induit formam $x^3-(a+b).x^2+abx=0$, ubi ultimus terminus deficit. In aequatione vero $(x-a).(x-b).(x-0).(x-0)=0$, seu $(x-a).(x-b).x^2=0$, h. e. $x^4-(a+b).x^3+abx^2=0$ duo ultimi termini exsulant, et propositionem allatam de omnibus ejus modi aequationibus valere, evidentissimum est.

§. 4.

Ponamus jam, aequationem $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} + sx^{n-4} - \&c. = 0$, in §. 2. propositam, duas aequales radices habere, quarum utraque ipsi e aequalis sit. In illo itaque casu aequatio transformata, in qua $y=x-e$, duas habebit radices nihilo aequales. Evanescent igitur per §. 3. duo ultimi termini, vel, quod idem est, duae istae aequationes habentur $e^n - pe^{n-1} + qe^{n-2} - re^{n-3} + se^{n-4} - \&c. = 0$, et $n.e^{n-1} - (n-1).pe^{n-2} + (n-2).qe^{n-3} - (n-3.re^{n-4} + (n-4).se^{n-5} - \&c. = 0$, seu, quum $x=e$ sit, $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} + sx^{n-4} - \&c. = 0$, et $nx^{n-1} - (n-1).px^{n-2} + (n-2).qx^{n-3} - (n-3).rx^{n-4} + (n-4).sx^{n-5} - \&c. = 0$. Prior est ipsa aequatio data; posterior ab illa, multiplicando unumquemque terminum per exponentem dignitatis, quam in ipso habet x, deducta. Duae vero istae radices aequales, quarum utraque simul ipsi e aequalis est, in priori aequatione repriuntur, sed una tantum illarum in posteriori invenitur; si enim in posteriori quoque

que duae illae radices aequales reperirentur, etiam esset $\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,.\,x^{n-2}$ $-\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}\,.\,px^{n-3}+\frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}\,.\,qx^{n-4}-\frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2}\,.\,rx^{n-5}$ $+\frac{(n-4)(n-5)}{1\,.\,2}\,.\,sx^{n-6}-\&c.=0$ h. e. quum sit $x=e$, $\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,.\,e^{n-2}$ $-\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}\,.\,pe^{n-3}+\frac{(n-2)(n-3)}{1\,.\,2}\,.\,qe^{n-4}-\frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2}\,.\,re^{n-5}$ $+\frac{(n-4)(n-5)}{1\,.\,2}\,.\,se^{n-6}-\&c.=0$ haberetur, et aequatio data x^n $-px^{n-1}+\&c.=0$, tres haberet radices aequales [redacted], quod hypothesi repugnat. Eodem modo, quum aequatio x^n-px^{n-1} $+qx^{n-2}-\&c.=0$, tres radices aequales habet, tres ultimi termini aequationis transformatae evanescunt; quare habebitur non solum $x^n-px^{n-1}+qx^{n-2}-rx^{n-3}+sx^{n-4}=0$, et $nx^{n-1}-(n-1).px^{n-2}$ $+(n-2).qx^{n-3}-(n-3).rx^{n-4}+(n-4).sx^{n-5}-\&c.=0$, ut in priori casu; sed etiam $n.(n-1).x^{n-2}-(n-1).(n-2).px^{n-3}$ $+(n-2).(n-3).qx^{n-4}-(n-3).(n-4).rx^{n-5}+(n-4).(n-5).sx^{n-6}$ $-\&c.=0$, et omnes tres radices aequales in aequatione prima, duae in secunda, et una denique in tertia habetur. Hoc modo ulterius progredi licet. Si itaque aequatio data fuerit, quae radices aequales habeat, quarum numerus numero m exprimitur, dum unusquisque terminus aequationis datae per exponentem ipsius incognitae, hunc terminum adficientem, multiplicatur, aequatio exsurgit, quae easdem radices aequales habet, sed quarum numerus ipsi $m-1$ aequalis est; dum vero posterior illa aequatio eodem modo multiplicatur, tertia oritur aequatio, ubi numerus earumdem aequalium radicum numero $m-2$ designatur, et sic ulterius.

§. 5

Si itaque aequationem quamdam e. g. $x^4-(3r+q).x^3$ $+(3qr+3r^2).x^2-(3qr^2+r^3).x+qr^3=0$, tres radices aequales habere, constiterit, erit per §. 4. non tantum $4x^3-(9r+3q).x^2$

 +

$+ (6qr + 6r^2).x - 3qr^2 - r^3 = 0$, in qua aequatione duae earumdem aequalium radicum inveniuntur; ſed etiam $12x^2 - (18r + 6q)x + 6qr + 6r^2 = 0$, ſeu $x^2 - \frac{(3r+q)}{2}.x + \frac{qr + r^2}{2} = 0$, quae aequatio unam radicum aequalium aequationis datae habebit. Haec vero aequatio quadratica duas habet radices $\frac{q}{2} + \frac{r}{2}$ et r, quarum r cum aequatione $x^4 - (3r+q).x^3 + (3qr + 3r^2).x^2 - (3qr^2 + r^3).x + qr^3 = 0$, radicem habet communem; $\frac{q}{2} + \frac{r}{2}$ vero non item. Aequatione itaque $x^4 - (3r + q.)x^3 + (3qr + 3r^2).x^2 - (3qr^2 + r^3).x + qr^3 = 0$ per $(x - r).^3 = 0$, ſeu $x^3 - 3rx^2 + 3r^2x - r^3 = 0$ diviſa, datur $x - q = 0$, et r, r, r, q ſunt radices aequationis datae.

§. 6.

Dum in §. 4. ex aequatione $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - rx^{n-3} + ſx^{n-4}$ — &c. $= 0$ aequationem $nx^{n-1} - (n-1).px^{n-2} + (n-2).qx^{n-3} - (n-3).rx^{n-4} + (n-4).ſx^{n-5}$ — &c. $= 0$, deduximus, unumquemque terminum aequationis primae in exponentem ipſius x, eumdem terminum adficientem, ducendo, aequatio prima per progreſſionem arithmeticam $n, n-1, n-2, n-3, n-4$, &c. nimirum primus terminus aequationis per primum terminum progreſſionis, et ſic porro, multiplicatur, quae tamen progreſſio non pro lubito adſumta, ſed per exponentes dignitatum ipſius x in propoſita aequatione data eſt. Similiter aequatio $n.(n-1).x^{n-2} - (n-1).(n-2).px^{n-3} + (n-2).(n-3.qx^{n-4} - (n-3).(n-4).rx^{n-5} + (n-4).(n-5).ſx^{n-6}$ — &c. $= 0$ ab aequatione $nx^{n-1} - (n-1).px^{n-2} + (n-2).qx^{n-3} - (n-3).rx^{n-4} + (n-4).ſx^{n-5}$ — &c. $= 0$, unumquemque hujus terminum per correſpondentem terminum progreſſionis arithmeticae $n-1, n-2, n-3, n-4, n-5$, &c. multiplicando, deducitur, et ſic in reliquis. Sed haec omnia, quae in §. 4 demonſtrata ſunt, latius extendi poſſunt. Nam ſi data aequatio, quae radices aliquot

ae-

aequales habet, dicto modo per progressionem arithmeticam quamcumque, pro lubito adsumtam, multiplicatur, oritur quoque in illo casu aequatio, quae omnes habet aequales radices aequationis datae, praeter unam. Hujus aequationum proprietatis, qua HUDDENIUS methodum suam Maximorum et Minimorum superstruxit (Vide HUDDENII Epist. de Maximis et minimis), concinna habetur demonstratio in Appendice Libro Cel. CRAMER: *Introduction a l' Analyse des lignes courbes Algebrique*, subjuncta. Haec vero prius observanda sunt duo momenta:

1°. Si termini potestatis m binomii $c+x$ per correspondentes terminos progressionis arithmeticae $0b$, $1b$, $2b$, $3b$, &c. multiplicatur, erit productum $= bmx.(c+x)^{m-1}$ Quum enim sit $(c+x)^m$

$$= c^m + mc^{m-1}x + \frac{m\ (m-1)}{1\ .\ 2}.c^{m-2}x^2 + \frac{m\ (m-1)(m-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}.c^{m-3}x^3$$

$+$ &c., si unusquisque terminus membri posterioris hujus aequationis per correspondentem terminum progressionis arithmeticae $0b$, $1b$, $2b$, $3b$, &c. multiplicatur, productum erit $= b \Big(mc^{m-1}x$

$$+ m.(m-1).c^{m-2}x^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{1\ .\ 2}c^{m-3}x^3 + \&c. \Big)$$

$$= bmx\left(c^{m-1} + (m-1).c^{m-2}x + \frac{(m-1).(m-2)}{1\ .\ 2}.c^{m-3}x^2 + \&c. \right)$$

$$= bmx.(c+x)^{m-1}.$$

2°. Si termini potestatis m binomii $c+x$ per correspondentes terminos progressionis arithmeticae a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, &c. multiplicantur, ita nimirum ut terminus primus hujus potestatis in primum terminum progressionis ducatur, productum per $(c+x)^{m-1}$ dividi potest. Nam dicto modo seriem $c^m + mc^{m-1}x + \frac{m.(m-1)}{1\ .\ 2}.c^{m-2}x^2$

$$+ \frac{m.(m-1).(m-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}.c^{m-3}x^3 + \&c.$$ multiplicare, idem omnino est, ac primum omnes terminos per a, deinde terminos ejusdem seriei per correspondentes terminos progressionis arithmeticae $0b$, $1b$, $2b$, $3b$, &c. multiplicare. Per multiplicationem primam habetur productum

$= a.(c+x)^m = a.(c+x).(c+x)^{m-1} = (ac+ax).(c+x)^{m-1}$. Per ſecundam datur productum $= bmx.(c+x)^{m-1}$, (per mom. 1. hujus §.) et ſic productum totum $= (ac+ax+bmx).(c+x)^{m-1}$, unde per $(c+x)^{m-1}$ dividi poteſt. Si ſigna vel in binomio, vel in progreſſione Arithmetica, vel utrobique ſimul, utcumque mutantur, aſſertum tamen valere, facile patet.

§. 7.

Hiſce praeſtructis regula HUDDENII facile demonſtratur. Aequatio enim radices aequales habens, quarum quaelibet $= -c$, quarumque numerum m deſignat, ſub hac forma proponi poteſt:

$$(c+x)^m.(p+qx+rx^2+ſx^3+\&c. = 0, \text{ h. e.}$$

$$0 = \left\{\begin{array}{l} pc^m + mpc^{m-1}x + \frac{m.(m-1)}{1\,.\,2}.pc^{m-2}x^2 + \frac{\ldots.(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}.pc^{m-3}x^3 + \&c. \\ \quad + qc^m x + mqc^{m-1}x^2 + \frac{m.(m-1)}{1\,.\,2}.qc^{m-2}x^3 + \&c. \\ \qquad\qquad + rc^m x^2 + mrc^{m-1}x^3 + \&c. \\ \qquad\qquad\qquad + ſc^m x^3 + \&c. \end{array}\right.$$

Si jam termini hujus aequationis in correſpondentes terminos progreſſionis arithmeticae a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, &c. ducuntur, omnes lineae per progreſſionem arithmeticam multiplicantur, prima ſcilicet per a, $a+b$, $a+2b$, &c. ſecunda per $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, &c. tertia per $a+2b$, $a+3b$, $a+4b$, &c. et ſic porro. Omnes ſimul lineae dignitatem m binomii $c+x$ conſtituunt. Unaquaeque igitur linea (mom. 2. §. 6.) et ſic tota aequatio, poſt dictam multiplicationem, per $(c+x)^{m-1}$ dividi poterit. Poſſunt autem ſigna in binomio, in reliquo factore aequationis et in progreſſione illa arithmetica utcumque variari. Sic dum aequatio radices aequales habens per progreſſionem arithmeticam pro lubito adſumtam multiplicatur, ita ut primus terminus aequationis in primum terminum progreſſionis ducatur, productum erit aequatio, omnes illas aequales radices habens, praeter unam.

Quem uſum haec theoria in variis problematis ſolvendis praeſtet, et quomodo ad concluſiones viam muniat, quae ex aliis etiam principiis deducuntur, in praeſenti oſtendere animus fuit, ſed brevitati ſtudentes hanc operam in aliam occaſionem differre cogimur.

VD
18

1793 18

...RTATIO

...E

...RADICES ALIQUOT

...HABENTIBUS,

...US

...M PRIMAM

...*D. PHILOSOPH. GRYPH.*

...SIDE

...A HULTÉN,

...PROF. REG. ET ORD.

...NTILANDAM

...IT

...NUS KLINGBERG,

...CIUS,

...IO MAJORI

...MDCCXCIII.

...ALDIÆ,

... ACAD. TYPOGR. 1793.

482