

5bl sa 3209

T
vgl. Nr.



Lohn ³ Erziehungsbuch

v. Veltheim

Erziehungsbuch

von Hauptm. v. v.

Erster Theil

1780

Handbuch

der

Rechnung und Buchführung

von

Dr. G. A. S. S. S. S.

Mit dem Supplement

© alle

Dr. G. A. S. S. S. S.

1780



Grundriß
der
Kry stallkunde.

Für
Vor träge und Privatunterricht
bearbeitet

von

C. F. Ger mar,

Doktor der Philosophie, ord. Professor der Mineralogie,
mehrerer gelehrten Gesellschaften Mitgliede.

Mit eilf Kupfer tafeln.

Halle,
bei C. N. Schwetschke und Sohn.
1830.

Leihgabe der
Universitäts-
und Landesbibliothek
Sachsen-Anhalt
Halle (Date)

lok 71040



Universitäts- und Landesbibliothek
HALLE
Internationale Forschungsstätte
Europäische Aufklärung

92/311

L 55, 495



Vorbericht.

Als ich vor sieben Jahren die zweite Ausgabe des *Meinecke'schen* Lehrbuchs der Mineralogie bearbeitete, erlaubte der dort zu Grunde liegende Plan mir nicht, die Lehre von den Krystallen so zu bearbeiten, wie ich es gewünscht hätte, und ich beschloß seitdem, die Krystallographie in gemeinschaftlicher Sprache, wie sie dem Zwecke jenes Lehrbuchs entspricht, besonders zu bearbeiten. Besonders lag mir daran, aus den bis jetzt bekannten Erfahrungen allgemeine Naturgesetze aufzufinden, und der Krystallographie mehr die naturhistorische als mathematische Darstellung abzugewinnen. So entstand das gegenwärtige Werkchen, dessen Druck schon vor anderthalb Jahren begann, und daher vielleicht eine oder die andere neuere Erfahrung unberücksichtigt läßt; aber auch mehr darauf berechnet ist, das Studium der

Krystallographie denen zugänglich zu machen, die durch die bisherige mathematische Bearbeitung derselben und die dabei angewandte Nomenclatur davon abgehalten wurden, als auf eine neue und erschöpfende Darstellung.

Das erste Kapitel enthält die allgemeinen Gesetze, denen die Krystallbildung unterworfen ist, und bedarf keiner besondern Vorbemerkung. Nur muß ich erinnern, daß das in §. 5. gebrauchte Synonym Körperlicher Winkel bei Kantenwinkel freilich nicht genau dem mathematischen Begriffe von körperlichem Winkel entspricht, daß aber bei Anfängern und Dilettanten, der Ausdruck Kantenwinkel sehr oft zu Verwechslungen mit den durch die Kanten gebildeten ebenen Winkeln Veranlassung giebt, und diese Erfahrung mich zu dessen Anwendung verleitete.

Das zweite Kapitel stellt nur die einfachen Ableitungsgesetze für die einaxigen Körper auf, und berücksichtigt die Gestalten, deren Flächen selbst wieder als Diagonalen oder tangirende Ebenen für die Kanten und Ecken anderer abgeleiteter Körper und ihrer Verbindungen zu betrachten sind, nicht besonders, da bis jetzt noch keine besondern Gesetze für die Reihenfolge derselben aufgefunden sind, und bei jeder einzelnen Substanz nur die Erfahrung, nicht die Theorie sie anzugeben vermag. Bei dem tesselalen Systeme

sind dieselben, so weit die bisherigen Erfahrungen reichen, aufgeführt.

Das dritte Kapitel ist vorzüglich bestimmt, um dem Anfänger das Verhältniß und die Ableitung einzelner Gestalten anschaulich zu machen, und ihn durch Uebungen darin festzusetzen. Es kam hier gar nicht darauf an, Formeln für die Berechnungen anzugeben, sondern ihm einen Weg zu eröffnen, sich von den Gestalten, die aus der Verbindung der verschiedenen Flächen mit einander hervorgehen, eine klare Anschauung zu verschaffen, weshalb auch fast für jede Gestalt eine verschiedene Ableitungsart gewählt wurde. Man gebe dem Anfänger irgend eine in ihren Winkeln oder Axen bestimmte einfache Gestalt, und lasse nach der angegebenen Methode von ihm andere ableitbare Gestalten berechnen, so wird ihm der Zusammenhang derselben unter einander weit deutlicher werden, als ihm das Studium der Ableitungsgesetze allein ihn deutlich zu machen vermag.

Das vierte Kapitel ist bestimmt, die Eigenthümlichkeit der Reihenfolge der Krystalle für die einzelnen Substanzen durch Beispiele zu erläutern, keinesweges um vollständige Krystallbeschreibungen zu liefern. Die alte Werner'sche Methode, für jedes Mineral einen besondern, für sich begränzten For-

menkreis, dessen Glieder sich unter einander auf eine bestimmte Weise verbinden, die einzig durch die Erfahrung, nicht durch die Theorie bestimmt wird, ist in neuern Zeiten, wo die mathematische Ansicht die naturhistorische oft zu sehr in den Hintergrund stellte, mehr verdrängt worden, als es angemessen scheint. Diesen rein naturhistorischen Gesichtspunkt aber hervorzuheben, wurde hier vorzüglich berücksichtigt.

[Faint, mirrored bleed-through text from the reverse side of the page, including words like 'Vorbericht', 'Einleitung', and 'Zusammenhang']



Inhalt.

Erstes Kapitel. Gesetze der Krystallbildung . . . E. 1

Krystalle und ihre Theile S. 1—7. Einfache Krystalle und die Verbindungen derselben zu zusammengesetzten S. 8—19. Hemiedrische Körper S. 20—27. Textur S. 28—35. Absonderung S. 36—38. Zusammenhäufung S. 39—52. Zwillingkrystalle S. 53—56. Widersinnige Combinationen S. 57. Einwirkung der Grundstoffe auf die Krystallgestalt S. 58. Afterskrystalle S. 59—62. Krystallsysteme S. 63.

Zweites Kapitel. Entwicklung der Krystallsysteme — 48

Erstes System. Tesseralsystem.

Erste Abtheilung. Homoedrische Körper.

Allgemeine Uebersicht der Körper des Tesseralsystems S. 64. Würfel S. 65, 66. Oktaeder S. 67, 68. Rhomben = Dodekaeder S. 69. Pyramiden = Würfel S. 70. Trapezoeder S. 71. Pyramiden = Oktaeder S. 72. Acht- und vierzig = Flächner S. 73.

Zweite Abtheilung. Hemiedrische Körper — 69

Allgemeine Bestimmungen S. 74. Ableitungen aus dem Oktaeder S. 75, 76.; aus dem Pyramiden = Würfel S. 77—79.; aus dem Trapezoeder S. 80, 81.; aus dem Pyramiden = Oktaeder S. 82, 83.; aus dem Acht- und vierzig = Flächner S. 84—87.

Zweites System. Pyramidalsystem — 85

Erste Abtheilung. Homoedrische Körper.

Allgemeine Bestimmungen S. 88. Quadratpyramide S. 89—94. Birtonpyramide S. 95—99.

Zweite Abtheilung. Hemiedrische Körper — 98

Allgemeine Bestimmungen S. 100. Ableitungen aus der Quadratpyramide S. 100.; aus der Birtonpyramide S. 101, 102.

Drittes System. Prismatisches System — 101

Erste Abtheilung. Homoedrische Körper.

Allgemeine Bestimmungen S. 103. Rhombenpyramide S. 104—106. Oblongpyramide S. 107—110. Lo-
paspnyramide S. 111—116.

Zweite Abtheilung. Semiëdrische Körper	S. 113
Allgemeine Bestimmungen	S. 117. Ableitungen aus der Rhombenpyramide S. 118, 119.; aus der Oblongpyramide S. 120—122.; aus der Topaspyramide S. 123.
Viertes System. Hexagonalsystem	— 123
Erste Abtheilung. Homoëdrische Körper.	
Allgemeine Bestimmungen	S. 124. Hexagonal=Pyramide S. 125—129. Dodetagon=Pyramide S. 130—133.
Zweite Abtheilung. Semiëdrische Körper	— 132
Ableitungen aus der Hexagonal=Pyramide	S. 134—141.; aus der Dodetagon=Pyramide S. 142—151.
Drittes Kapitel. Beispiele für die Berechnung der Krystalle	— 149
Allgemeine Bestimmungen	S. 152. Tesseralsystem S. 153—160. Pyramidalsystem S. 161—170. Prismatisches System S. 171—183. Hexagonalsystem S. 184—202.
Viertes Kapitel. Beispiele für das Vorkommen der Krystalle bei Mineralien	— 232
Mineralien, dem tesseralen Systeme angehörig.	
Demant	S. 203. Spinell S. 204. Helvin S. 205. Granat, Gessonit S. 206. Analcim, Sodalit, Leuzit S. 207. Boracit S. 208. Flußpath S. 209. Gediegene Metalle S. 210. Fahlerz S. 211. Schwefelties S. 212. Bleiglanz S. 213.
Mineralien, dem pyramidalen Systeme angehörig	— 247
Zirkon	S. 214. Vesuvian, Gchlenit S. 215. Albin S. 216. Kupferties S. 217. Zinnstein S. 218. Lungstein S. 219.
Mineralien, dem prismatischen Systeme angehörig	— 252
Topas	S. 220. Aragonit S. 221. Wolfram S. 222. Aagit S. 223. Strahlties S. 224.
Mineralien, dem Hexagonal=Systeme angehörig	— 274
Quarz	S. 225. Apatit S. 226. Kalkstein S. 227.

Erstes Kapitel.

Gesetze der Krystallbildung.

§. 1.

Krystalle sind diejenigen von der Natur gegebenen Gestalten des anorganischen Reiches, die von einer bestimmten Anzahl Ebenen symmetrisch umschlossen werden.

Bei den Mineralien sind die Krystalle als von der Natur gegebene Einheiten zu betrachten, und entsprechen den Individuen des Thier- und Pflanzenreiches. Kein organischer Körper besitzt Krystallgestalt, und auch aus dem animalischen und vegetabilischen Lebensproceß gehen nicht unmittelbar Krystalle hervor, wiewohl durch Absterben und Verwesen organischer Körper Krystalle sich bilden. Die Knochen, Bezoarsteine, Muschelschaalen, Steinkorallen und andere steinartige Gebilde der Organismen besitzen keine Krystallgestalt, jedoch theilweise Anlage zur krystallinischen Struktur. Bei den Muschelschaalen von Lima, *Inoceramus* u. a. kündigt sich der Anfang dazu durch eine parallel-faserige Textur an, und bei *Oltraea* lassen sich, wiewohl unvollkommen, Durchgänge erkennen. Daß aber eine organische Form einen Einfluß auf die Gestalt der an ihre Stelle tretende anorganische Masse ausüben könne, beweist die Lage der Durchgänge in den in Kalkspath verwandelten Penetratrinitenstielen (Hessel über den Einfluß des organ. Körpers auf den unorganischen. *Monatsh. 1826.*)

§. 2.

Die Flächen, welche die Krystalle begränzen, werden als vollkommene Ebenen gedacht, doch sind sie in der Natur bisweilen etwas gewölbt, wodurch bei scharfen Messungen sich bisweilen kleine Schwankungen in den Winkelbestimmungen ergeben. Diejenigen Flächen eines Krystalls, die von gleichlangen und unter gleichen Winkeln zusammenstoßenden Linien begränzt werden, sind gleichnamig oder gleichwerthig.

Einfache Krystalle werden, wenige Ausnahmen abgerechnet, von gleichwerthigen Flächen begränzt, und zusammengesetzte Krystalle zeigen mehrere Arten von Flächen. Doch sind häufig Flächen von verschiedenem Werthe sich sehr ähnlich, z. B. beim Triakontaeder.

Wird die Wölbung der Flächen merklich, so runden sich die Kanten allmählig ab, es entstehen endlich Linien, oder kugelförmige Krystalle.

§. 3.

Um irgend einen Raum allseitig zu umschließen, sind wenigstens vier Flächen erforderlich, und ein einfacher Krystall muß daher wenigstens vierflächig seyn. Oft wird aber bei zusammengesetzten Krystallen eine oder die andere Fläche des einen Krystalls durch Flächen eines andern Krystalls ersetzt und er erscheint daher nicht mit seiner vollen Flächenzahl. Tritt aber eine einfache Gestalt auf, so wird die Zahl der Flächen sich stets mit 2 oder 3 dividiren lassen und eine ungebrochene Zahl geben.

§. 4.

Die Winkel, unter denen die Flächen der Krystalle zusammenstoßen, bleiben bei einerlei Substanz sich gleich, und liefern daher für diese Substanz ein sehr scharf bestimmtes Kennzeichen. Es kommen zwar bei einerlei Substanz in der Regel mehrere Krystalle vor, die in der Hauptgestalt gleich, in den Winkeln verschieden sind, hier muß aber jede dieser Abänderungen als ein für sich bestehender Körper gedacht werden, und nur für diesen Körper sind die Winkel bezeichnend. Ein Uebergang dieser verschiedenen Körper in einander, durch regelloses Schwanken und allmähliche Annäherung der Winkel findet nicht statt, sondern jede Substanz vermag nur in einer bestimmten Anzahl von Gestalten aufzutreten, und hat ihren streng begrenzten Formenkreis.

Es ist z. B. bei dem Kalkspath eine ganze Reihe von Rhomboëdern vorhanden, von denen das stumpfeste ebene Winkel von $114^{\circ} 27'$ und $65^{\circ} 33'$ das spitzeste von $24^{\circ} 37'$ und $155^{\circ} 23'$ besitzt; zwischen ihnen liegen Mitglieder mit ebenfalls scharf bestimmten Winkeln, aber eine allmähliche Annäherung giebt es nicht und keinen Uebergang des einen in das andere. Der Braunspath besitzt eine ähnliche Reihe von Rhomboëdern, von denen das stumpfeste ebene Winkel von $114^{\circ} 42'$ und $65^{\circ} 18'$, das spitzeste von $25^{\circ} 11'$ und $154^{\circ} 49'$ besitzt, es wird aber nie ein Rhomboëder bei ihm vorkommen können, das mit einem Rhomboëder des Kalkspathes vollkommen übereinstimmt. Jedes Rhomboëder ist daher als eine selbstständige, unveränderliche Gestalt zu betrachten.

§. 5.

Die Begrenzungslinien der Flächen sind die Kanten, und gleichlange und gleichwinkelige Kanten sind gleichnamig. Um den körperlichen Winkel einer Kante zu bestimmen, werden von der Kante, auf beide in ihr zusammenstoßende Flächen, Perpendikel gefällt, und der Winkel, unter dem die Perpendikel in der Kante sich schneiden, ist der körperliche Winkel oder Kantenwinkel. Derjenige Winkel, unter dem zwei benachbarte, in derselben Ebene liegende Kanten sich schneiden, ist der Flächenwinkel oder ebene Winkel.

Man hat verschiedene Instrumente zur Winkelmessung. Am schärfsten lassen sich die körperlichen Winkel durch das Reflexions-Goniometer bestimmen, doch müssen die Flächen lebhaften Glanz haben. Eine größere Genauigkeit als die von halben Graden ist durch Messung nicht zu erlangen, weil die zu messenden Flächen nicht immer völlige Ebenen sind, und weil alle Körper sich nach den verschiedenen Graden der Temperatur etwas ausdehnen und zusammenziehen. Bei Krystallen, deren Axen nicht gleich lang unter einander sind, erfolgt die Ausdehnung nicht nach allen Seiten gleich stark. Wenn bei krystallinischen Körpern deutliche Spaltungsflächen vorhanden sind, so eignen sich diese besser zur Winkelbestimmung als Krystallflächen, da sie in der Regel vollkommene Ebenen sind. Die Spaltungsflächen stehen stets mit den Krystallflächen in genauer Beziehung, und aus den Winkeln, unter denen die Spaltungsflächen zusammenstoßen, lassen sich die Winkel der Krystalle berechnen.

§. 6.

Die Ecken sind die Endpunkte der Kanten und werden nach der Zahl der in ihnen zusammenlaufenden

Kanten oder der zunächst liegenden Flächen 3 — 4 — 6 z. kantige oder flächige benannt. Diejenigen Ecken, die in Hinsicht der Zahl und des Werthes der in ihnen zusammenlaufenden Kanten übereinstimmen, sind gleichnamig.

Der Würfel und das Oktaeder sind die einzigen Krystalle, bei denen alle Ecken gleichnamig sind. Bei manchen Krystallen sind zwar die Ecken in Hinsicht der Zahl der in ihnen zusammenstoßenden Kanten, aber nicht in Hinsicht des Werthes derselben gleich. So besitzt z. B. das in der Natur vorkommende Pentagonalbodekaeder 20 dreikantige Ecken, aber acht dieser Ecken sind die Vereinigungspunkte von drei gleichwerthigen Kanten, in den zwölf übrigen Ecken laufen immer zwei gleichwerthige und eine ungleichwerthige Kante zusammen. In der Rhombenpyramide sind sechs vierkantige Ecken vorhanden, aber sie haben dreierlei Werth, indem nur die gegenüberstehenden gleich sind. Manche sich sonst sehr ähnliche Körper unterscheiden sich am leichtesten durch den verschiedenen Werth der Ecken. So besitzen das Rhomboidal-, Dodekaeder und das Hyazinth-, Dodekaeder beide zwölf rhombische Flächen, vierundzwanzig Kanten und sechs vierkantige und acht dreikantige Ecken, aber bei ersterem sind die Ecken nur zweierleiwerthig, bei letzterem besitzen sie dreierlei Werth.

§. 7.

Die Axe eines Krystalls ist eine gerade Linie, welche man sich durch dessen innern Mittelpunkt so gelegt denkt, daß sie die Oberfläche an zwei entgegengesetzten Punkten schneidet, und hier die Flächen, Kanten oder Ecken im Mittelpunkte trifft. Man unterscheidet darnach Flächenaxen (Fig. 3.), Kantenaxen (Fig. 4.) und Eckenaxen (Fig. 5.). Die Axen

eines Krystalls, jede Art für sich betrachtet, sind entweder unter sich gleich oder verschieden, und im letztern Falle unterscheidet man Polaxe und Randaxen (Hauptaxe und Nebenaxen), und nach den um sie herumgelagerten Flächen Vollflächen (Endflächen) und Randflächen (Seitenflächen). Eben so unterscheidet man auch Polecken und Randecken und Polkanten und Randkanten (Seitenkanten, Grundkanten).

Die Eckenaxen sind diejenigen, die am gewöhnlichsten zur Anwendung kommen, und das symmetrische Verhalten der Flächen, Kanten und Ecken wird nur dann deutlich erkannt, wenn man einen Krystall aufrecht auf seine Hauptaxe stellt.

§. 8.

Die in der Natur vorkommenden Krystalle sind einfach oder zusammengesetzt. Die einfachen sind für die Krystallgestalten als Einheiten zu betrachten, und lassen sich nicht von andern Gestalten ableiten, die zusammengesetzten sind als Verbindungen mehrerer einfachen Krystalle anzusehen, wo die Flächen des einen die Kanten, Ecken oder Flächen des andern ersetzen und deren Stelle einnehmen.

Die einfachen Krystalle werden größtentheils von völlig gleichnamigen Flächen begränzt, und nur die Obloppyramide macht eine Ausnahme davon, indem sie Flächen von zweierlei Werth besitzt. Sie können wieder in vollflächige (homoëdrische) und halbflächige (hemiëdrische) getheilt werden, die erstern sind von parallelen Flächenpaaren umschlossen, die letztern lassen sich aus den ersten ableiten, wenn man eine Hälfte von Flächen verschwinden, und die andere in eben dem Maaße

sich vergrößern läßt. Bei den letztern sind nicht immer parallele Flächenpaare vorhanden.

Dieserjenigen einfachen Körper, welche die Geometrie als solche kennen lehrt (Würfel, Oктаëder, Tetraëder, Dodekaëder, Ikosaëder) sind nicht diejenigen der Mineralogie, weil noch viele Körper vorkommen, welche selbstständig erscheinen und von den einfachen Körpern der Geometrie sich nicht naturgemäß ableiten lassen. Die einfachen Krystalle sind als von der Natur gegebene Einheiten der Krystallformen zu betrachten. Das Dodekaëder und Ikosaëder der Geometrie kommen in der Natur nicht vor, wiewohl sehr ähnliche Gestalten.

§. 9.

Da die Erfahrung gelehrt hat, daß die Winkel bei einer Substanz vorkommenden Krystallformen unabänderlich sind, und viele dieser Krystallformen unter die zusammengesetzten Krystalle gehören, so ist auch für jede Substanz die Art, wie sich einfache zu ihr gehörige Krystalle mit einander verbinden können, unabänderlich.

Die körperlichen Winkel beruhen auf der Neigung der Flächen gegen einander, und ist die Neigung der Flächen des einen Krystalls gegen die Flächen des andern Krystalls unabänderlich, so ist auch ein Gesetz vorhanden, nach welchem sich diese einfachen Krystalle mit einander verbinden müssen. Es sey z. B. das Oктаëder mit abgestumpften Kanten, bei welchem die Neigung der ungleichnamigen Flächen gegen einander $144^{\circ} 44' 8''$ beträgt, eine Verbindung des Oктаëders mit dem Rhomboidal-Dodekaëder, so muß die Fläche des letztern als tangierende Ebene für die Kante des erstern angenommen werden, und es würde jede andere Lage andere Winkel hervorbringen.

§. 10.

Die verschiedenen bei einer Substanz vorkommenden einfachen Krystalle müssen in einer bestimmten Stellung gegen einander gedacht werden, die sich aus der Art, wie sie sich mit einander zu verbinden vermögen, ergibt.

Das im vorigen §. angeführte Beispiel zeigt, wie das Oktaëder sich mit dem Rhomboidal-Dodekaëder zu verbinden vermag. Will man beide Körper einzeln neben einander stellen, so wird (vergl. Taf. II. Fig. 25. 26.), wenn man das Oktaëder auf eine Eckenare aufrecht stellt, das Rhomboidal-Dodekaëder auf eine Eckenare aufrecht gestellt werden müssen, die man durch die vierkantigen Ecken legt, und jeder Ecke des erstern wird eine vierkantige Ecke des letztern entsprechen.

§. 11.

Da die Krystalle von Flächen symmetrisch umschlossen werden, so kann auch die Verbindung einfacher Krystalle nur nach den Gesetzen der Symmetrie stattfinden, und die bei einerlei Substanz vorkommenden Krystalle müssen sich so gegen einander verhalten, daß die Flächen des einen Krystalls sich symmetrisch an den Flächen, Kanten oder Ecken des andern Krystalls vertheilen lassen.

Zu einer symmetrischen Vertheilung gehört, daß wenn irgend eine Kante oder Ecke eines Krystalls, von einer Fläche des andern Krystalls, unter einem bestimmten Winkel getroffen wird, auch alle Kanten oder Ecken, die damit gleichwerthig sind, von einer eben so gegen sie geneigten Fläche getroffen werden.

Um diese Vertheilung zu bewerkstelligen, muß man die Stellung kennen, in der beide Krystalle gegen einander befindlich gedacht werden müssen. Zwei Krystalle,

deren Flächen sich nicht auf diese Weise an einander verschließen lassen, vermögen sich auch nicht mit einander zu verbinden.

§. 12.

Die Kante eines Krystalls kann durch eine Fläche oder durch zwei Flächen eines andern Krystalls ersetzt werden. Im erstern Falle wird dieselbe diagonal gegen den körperlichen Winkel der Kante liegen, im zweiten Falle werden beide Flächen in der Kantennähe zum Durchschnitt kommen, und ihre gemeinschaftliche Durchschnittskante läuft parallel mit der ursprünglichen Kante.

Jede andere denkbare Lage der Flächen, welche an die Stelle einer Kante treten, würde unsymmetrisch seyn, indem sie von der einen anliegenden Fläche des Stammkrystalls einen andern Verhältnistheil wegnehmen müßte, als von der andern. Es sey z. B. Fig. 1. (Zaf. VIII.) der Durchschnitt eines Oblongprisma's, dessen Seitenkante durch eine Fläche ersetzt werden soll, so wird die Linie xy , die von jeder Fläche des Oblongprisma's die Hälfte wegnimmt, der Durchschnitt dieser neuen Fläche seyn. In Fig. 7. nimmt die Linie yq die Kante yx ganz und von der Kante xy' ein Drittheil weg; es muß daher, der Symmetrie gemäß, die Linie $y'q'$ die Kante $y'x$ ganz und von der Kante xy ein Drittheil wegnehmen, dann werden $y'q'$ und yq in der Ase xx bei ψ sich schneiden. Wollte man eine Kante durch drei Flächen ersetzen, so würde dies nur eine Verbindung des ersten und zweiten Falles seyn, und eine Ersetzung durch vier Flächen ist eine Verdoppelung des zweiten Falles.

§. 13.

Die Ersetzung der Ecken eines Krystalls ist auf dreifache Weise möglich, und die Zahl der ersetzenden Flächen wird durch die Zahl der in der Ecke zusammens-

stoßenden gleichnamigen Kanten bestimmt. Es tritt nemlich entweder a) eine Fläche an die Stelle der Ecke, welche alsdann von allen gleichnamigen Kanten gleichviel wegnimmt, oder b) auf jeder gleichnamigen Kante ruht eine Fläche, und sämtliche Flächen kommen in der Eckenage des Stammkrystalls zum Durchschnitt, oder c) um jede gleichnamige Kante lagern sich zwei Flächen, die sämtlich in der Eckenage zum Durchschnitt kommen. In beiden letztern Fällen wird also die Zahl der ersetzenden Flächen der einfachen oder der doppelten Zahl der in der Ecke zusammenstoßenden gleichnamigen Kanten gleich seyn.

Es sey die Würfecke (Zaf. I. Fig. 7. 9. 11. 13.) zum Beispiel gewählt, in welcher drei gleichwerthige Kanten sich vereinigen, und wo die Zahl der an ihre Stelle tretenden Flächen 1, 3 oder 6 seyn kann. In Fig. 7. wird von jeder Kante gleichviel (hm) weggenommen und mmm (oder o in Fig. 21.) ist die ersetzende Fläche. In Fig. 9. wird durch jede einzelne Fläche von zwei Kanten gleichviel (hm), von der dritten weniger (hr) weggenommen, und mrm bezeichnet die Lage einer einzelnen Fläche (in Fig. 34. ist C die Bezeichnung der auf diese Art entstandenen Flächen). In Fig. 11. wird durch jede einzelne Fläche von zwei Kanten gleichviel (hr), von der dritten mehr (hm) weggenommen, und rmr ist die Bezeichnung der Lage der einzelnen Flächen, deren Zusammenvorkommen B in Fig. 44. zeigt. In Fig. 13. lagern sich um jede Kante zwei Flächen, deren jede von den drei Kanten ungleiche Antheile hm , hs , hr wegnimmt, und mrs bezeichnet die Lage einer einzelnen Fläche, deren Zusammenvorkommen T in Fig. 54. angeht.

Man bezeichnet die Ersetzung der Kanten oder Ecken durch Flächen, auch durch die Ausdrücke Abstumpfung,

Zuschärfung und Zuspitzung. Abstumpfung findet statt, wenn eine Ecke oder Kante durch eine Fläche ersetzt wird; Zuschärfung, wenn zwei Flächen an die Stelle einer Ecke oder Kante treten, und Zuspitzung, wenn drei oder mehrere Flächen sich um eine Ecke herumlagern.

Wenn an die Stelle einer Fläche andere Flächen treten, so läßt sich dies Verhältniß auch stets als eine Abstumpfung, Zuschärfung oder Zuspitzung der Kanten oder Ecken betrachten.

§. 14.

Aus den Beziehungen der Flächen eines Krystalls gegen die Ecken und Kanten eines andern Krystalls ergibt sich der Grundsatz, daß die Zahl der Flächen eines Krystalls aus der Zahl der gleichnamigen Ecken oder Kanten des andern Krystalls sich ermitteln lasse.

Ist bei irgend einer Substanz ein einfacher Krystall gegeben, so lassen sich dadurch, daß man alle gleichnamigen Kanten und Ecken desselben auf die angegebene Weise durch Flächen ersetzt, und diese Flächen gleichmäßig überall vergrößert, bis sie allein einen neuen Körper umschließen, alle für diese Substanz möglichen einfachen Gestalten auffinden.

Für die leichtere Bestimmung und Zerlegung der zusammengesetzten Krystalle in ihre einfachen Gestalten kann man folgende Hülfsmittel anwenden:

Man zähle zuerst die gleichnamigen Flächen. Dies wird dadurch sehr erleichtert, daß man die um eine Ecke herumliegenden Flächen zählt, und mit der Zahl der gleichnamigen Ecken multiplicirt, wobei jedoch darauf zu sehen ist, ob eine Fläche mehreren Ecken gemeinschaft-

lich angehört, in welchem Falle in die vorher erhaltene Summe mit der Zahl dieser Ecken dividirt wird. 3. B. beim Oktaëder, welches sechs gleichwerthige Ecken hat, liegen an jeder Ecke vier Flächen, giebt 24, aber jede Fläche ist drei Ecken gemeinschaftlich, also $\frac{24}{3} = 8$. Beim Oktaëder mit vierflächiger Zuspizung der Ecken, liegen auch an jeder Ecke vier Flächen, aber jede Fläche berührt nur eine Ecke, und die vierflächige Zuspizung wird von einem 24flächigen Krystall abstammen.

Kennt man die Zahl der Flächen, so suche man die Zahl der ebenen Winkel, die bei dreiseitigen Flächen dreimal, bei vierseitigen viermal u. so viel betragen wird, als die Zahl der Flächen. Die Zahl der Kanten ist gleich der halben Zahl der ebenen Winkel, 3. B. der Pyramidenwürfel (Taf. I. Fig. 18.) wird von 24 dreiseitigen Flächen begränzt, er besitzt daher 72 ebene Winkel und 36 Kanten, die Flächen bilden gleichschenkelige Dreiecke, wo also 2 Seiten einen andern Werth haben als die dritte, mithin besitzen die Kanten auch zweierlei Werth und $\frac{2 \cdot 36}{3} = 24$ Kanten sind unter sich gleichnamig, aber verschieden von den 12 übrigen, unter sich gleichnamigen Kanten. Zieht man von der Zahl der Kanten + 2 die Zahl der Flächen ab, so erhält man die Zahl der Ecken, und die Zahl der Ecken + der Zahl der Flächen - 2 giebt die Zahl der Kanten, so wie die Zahl der Kanten + 2 - Zahl der Ecken, die Zahl der Flächen giebt.

Jede Fläche wird von eben so viel Linien (Kanten) begränzt, als benachbarte Flächen da sind, mit denen sie zum Durchschnitt kommt, und darnach wird sich ihr Umriß richten.

Wenn sich mehrere einfache Körper mit einander verbinden, so werden die stumpferen Ecken oder Kanten des einen an die Stelle der schärferen Ecken des andern treten. Bei allen Pyramiden, die mit einander in Verbindung treten, liegen die Flächen der stumpferen an den Pockeln, die Flächen der schärferen an der Basis.

Oft erleichtert auch die Abtheilung der Flächen eines Krystalls in Zonen und die Betrachtung der Lage dieser Zonen gegen einander die Bestimmung und Berechnung desselben. Diejenigen Flächen, deren Verbindungs-kanten mit einander parallel laufen, bilden eine Zone, und eine Ebene, welche alle diese Flächen rechtwinkelig schneidet, die Normalebene der Zone.

§. 15.

Alle vollflächigen Krystalle werden von parallelen Kanten- und Flächen-Paaren begränzt, und ihr Grundriß muß immer eine von Parallellinien begränzte Figur seyn. Alle von Parallellinien begränzte Figuren lassen sich auf das Viereck und das Sechseck zurückführen, und ihre Ausdehnung wird durch zwei oder drei Axen bestimmt. Nur das Quadrat, der Rhombus und das gleichwinkelige Hexagon sind einfache, von lauter gleichnamigen Linien umschlossene Figuren, die keine weitere Zerlegung in andere parallelfächige Gestalten gestatten. Es läßt sich daher die Grundansicht aller vollflächigen Krystalle auf Vierecke und Sechsecke, und die Grundansicht der einfachsten Krystalle auf das Quadrat, den Rhombus und das regelmäßige Sechseck zurückführen.

Das Achteck läßt sich zusammengesetzt betrachten aus zwei Vierecken, das Zehneck aus einem Sechseck und Viereck, das Zwölfeck aus zwei Sechsecken u. Das Parallelogramm, das Rhomboid und die ungleichwinkligen Sechsecke sind zwar von parallelen Linien begränzte Figuren und kommen auch als Grundrisse von Krystallen vor, aber die Linien sind ungleichwerthig, und die Erfahrung lehrt, daß Krystalle von diesem Grundriß nicht vollflächig sind. Nur das Parallelogramm macht eine Ausnahme und kommt als Grundriß vollflächiger

Krystalle vor, seine Linien entsprechen aber alsdann den Diagonalen eines Rhombus.

Stellt man einen Krystall aufrecht auf seine Hauptaxe, und läßt von denjenigen Ecken, die seinen Außenrand begränzen, Perpendikel auf die Grundfläche fallen, so bilden die Punkte, wo diese Perpendikel eintreffen, die Ecken des Grundrisses oder der horizontalen Projection. Wählt man nur die gleichnamigen Ecken dazu aus, so erhält man die Eckpunkte der zu Grunde liegenden geometrischen Figur.

§. 16.

Da die Grundansichten der Krystalle, welche die Dimensionen der Länge und Breite bestimmen, Quadrat, Rhombus und regelmäßiges Sechseck sind, so ergeben sich daraus, durch Hinzufügung der Dimension der Höhe folgende paralleleflächige Körper als Grundgestalten sämmtlicher Krystalle: das Oktaëder, die Quadratpyramide, die Rhombenpyramide, die Hexagonpyramide, oder auch der Würfel, das quadratische Prisma, das rhombische Prisma, das gleichwinkelige sechsseitige Prisma, je nachdem man die Endpunkte der Axen durch Linien verbindet und diese Linien als Begränzungen ihrer Flächen betrachtet, oder senkrecht gegen die Endpunkte der Axen Flächen stellt, und diese allseitig unter sich zum Durchschnitt bringt.

Bei dem Oktaëder stehen drei Axen von gleicher Länge senkrecht gegen einander, bei der Quadratpyramide sind von drei senkrecht stehenden Axen zwei gleichlang, die dritte ist verschieden, bei der Rhombenpyramide haben alle drei senkrecht gegen einander stehende Axen verschiedene Länge, bei der Hexagonpyramide steht

eine verschiedene Axe senkrecht gegen drei gleichlange unter gleichen schiefen Winkeln sich schneidende Axen.

§. 17.

Aus jeder dieser Grundgestalten lassen sich dadurch, daß man deren Kanten und Ecken symmetrisch durch Flächen ersetzt (§. 12. 13.), andere symmetrische Körper ableiten, wobei aber das Verhältniß der Axen unverändert bleibt. Da nun die Grundgestalten unter sich in ihren Axen verschieden sind, so werden es auch die aus jeder abgeleiteten Gestalten gegen einander seyn, so daß also eine abgeleitete Gestalt nur zu einer dieser Grundgestalten, nicht zu mehreren gehören kann.

Es kommen zwar bisweilen, aus verschiedenen Grundgestalten, sehr ähnliche Körper durch diese Ableitungen zum Vorschein, sie sind aber stets durch ihre Axenverhältnisse getrennt, z. B. Rhomboidal: Dodekaeder und Hyazinth: Dodekaeder.

§. 18.

Da bei den Grundgestalten die Zahl der gleichnamigen Ecken und Kanten gegeben ist, und jede Ecke und Kante nur durch eine bestimmte Anzahl Flächen ersetzt werden kann, so ist auch die Zahl der möglichen einfachen Krystalle überhaupt bestimmt.

Bei dem Oktaeder sind zwölf gleichwerthige Kanten und sechs gleichwerthige vierkantige Ecken vorhanden, und es sind in Bezug auf die Flächenzahl folgende Gestalten möglich: a) wenn man die Kanten durch Flächen ersetzt, 1) an die Stelle jeder Kante eine Fläche tretend, ein zwölfblättriger Körper, 2) an die Stelle jeder Kante

zwei Flächen tretend, ein vierundzwanzigflächiger Körper. b) Wenn man die Ecken durch Flächen ersetzt: 1) jede Ecke durch eine Fläche, ein Sechsfächner (der Würfel), 2) jede Ecke durch vier Flächen, ein Vierundzwanzigflächner, 3) jede Ecke durch acht Flächen, ein Achtundvierzigflächner.

Bei der Quadratpyramide finden sich acht gleichwerthige Polkanten und vier gleichwerthige Grundkanten. Ersetzt man jede Polkante durch eine Fläche, so erhält man wieder eine Quadratpyramide, durch zwei Flächen läßt sich eine sechszehnflächige Pyramide ableiten. Wollte man jede Grundkante durch eine Fläche ergänzen, so würde kein von Flächen allseitig begränkter Krystall entstehen, aber die Ergänzung jeder Grundkante durch zwei Flächen giebt wiederum eine Quadratpyramide. Die Ecken der Quadratpyramide haben zweierlei Werth: die Polecken, deren zwei sind, bilden Vereinigungspunkte für vier gleichnamige Kanten, und begründen die Ableitung von acht- und sechszehnflächigen Krystallen; die Randecken, deren vier sind, bilden Vereinigungspunkte von vier, aber zweierleiwerthigen Kanten, und ihre Ersetzung durch Flächen führt auch wieder zu acht- und sechszehnflächigen Krystallen.

Die weitere Ableitung der Krystalle aus den Grundgestalten enthält das folgende Kapitel.

§. 19.

Die einfachen Krystalle kommen in der Natur selten allein vor, gewöhnlich sind mehrere mit einander vereinigt, so daß die Flächen des einen, die Kanten, Ecken oder Flächen des andern theilweise ersetzen, und sie verbinden sich mit einander ihrer Ableitung gemäß.

Diese Verbindungen einfacher Krystalle nennt man zusammengesetzte Krystalle oder Combinationen, sie sind aber nicht als Verbindungen verschie-

dener Individuen mit einander anzusehen, sondern jede Combination stellt ein Individuum dar, und sie entsprechen den Varietäten im organischen Reiche.

Gewöhnlich ist eine einfache Gestalt vorherrschend, d. h. ihre Flächen sind verhältnismäßig in größerer Ausdehnung vorhanden, als die der übrigen. Sind aber in einer Combination die Flächen von zwei einfachen Gestalten gleich stark entwickelt, so bildet sie den Mittelkrystall derselben. Verbindungen von zwei einfachen Gestalten sind einfache Combinationen, von drei Gestalten dreifache u. Es stellt z. B. Taf. VII. im Pyramid. Syst. Fig. 9. die Verbindung des Prisma's (P) mit der Quadratpyramide (u); Fig. 16. die Verbindung des Prisma's (P) mit der Zirkonpyramide (q), Fig. 15. die Verbindung der Quadratpyramide (u) mit der Zirkonpyramide (q), mithin in allen drei Fällen eine einfache Combination dar; in Fig. 19. findet sich aber die Verbindung des Prisma's mit der Quadratpyramide und mit der Zirkonpyramide, zugleich aber auch die Verbindung der Quadratpyramide mit der Zirkonpyramide, mithin eine dreifache Combination.

§. 20.

Die Gesetzmäßigkeit der Krystallbildung wird jedoch scheinbar gestört durch die Erfahrung, daß bei den in der Natur vorkommenden Krystallen die Größe der Flächen und ihr Umriss Abänderungen unterworfen sind, und nur die körperlichen Winkel unabänderlich bleiben. Gleichwerthige Flächen erscheinen daher in der Natur nicht immer gleich groß und gleich gestaltet.

Der Würfel erscheint in der Natur häufig als Paralelepipedium, das quadratische Prisma als Würfel, das Oktaëder wird mitunter keilsförmig, und hat vier gleichseitige Dreiecke und vier Trapeze als Begränzungsflächen,

aber die körperlichen Winkel erleiden dadurch keine Veränderung. Die Vergrößerung einzelner Flächen bewirkt die Verkleinerung der andern. Die Beobachtung der körperlichen Winkel, die Untersuchung der Combinationen, so wie des Verhaltens der Spaltungsflächen zu den Krystallflächen (s. S. 34.) belehren dann über den verschiedenen Werth der Flächen.

Die Veränderlichkeit der Größe der Flächen ist die Ursache, daß die in der Natur vorkommenden Prismen nicht zur Bestimmung der Länge der Axen angewendet werden können, indem die körperlichen Winkel der Seitenkanten zwar für die Bestimmung der Grundaxen anwendbar sind, die Länge der Polaxe aber unbestimmt bleibt.

§. 21.

Die Vergrößerung und die ihr entsprechende Verkleinerung trifft entweder einzelne Flächen, oder eine bestimmte Zahl derselben. Bei der Vergrößerung einzelner Flächen findet dennoch gewöhnlich in so fern ein symmetrisches Verhältniß statt, als entweder die parallelen Flächen diese Vergrößerung trifft, oder die nicht parallelen.

Bei dem Quarz wachsen bisweilen zwei parallele Pyramidenflächen so, daß dieselben am Prisma als schiefe Endfläche erscheinen und die übrigen fast verdrängt sind (Haüy's Quarz halöide tab. 56. fig. 8.). Bei einer andern Abänderung (Haüy's Q. sphalloide tab. 56. fig. 7.) sind zwei einander parallele Flächenpaare der Pyramide, und vier neben einander liegende Flächen des Prismas vergrößert und die übrigen verhältnißmäßig verkleinert. Auch sind beim Quarz, so wie bei andern Substanzen, die Fälle nicht selten, daß die Vergrößerung einer Fläche die Vergrößerung der ihr parallelen Fläche nicht bemerkt.

§. 22.

Wenn eine bestimmte Zahl von Flächen sich vergrößert oder kleiner wird, so trifft dies die Hälfte oder ein Viertel oder drei Viertel der Gesamtzahl der Flächen, und auch in diesem Falle wachsen die parallelen oder die nicht parallelen Flächen. Schreitet die Vergrößerung so weit fort, daß die übrigen Flächen gänzlich verschwinden, so entsteht ein neuer Körper, der zwar auch von Flächen symmetrisch begrenzt wird, aber nicht immer von parallelen Flächen und Kanten umschlossen ist.

Bei allen pyramidalen Krystallen kann man eine obere und untere Hälfte unterscheiden, wo jede Fläche der einen Hälfte ihren parallelen Gegner in der andern Hälfte hat. Die Vergrößerung geschieht nun so, daß die parallelen Flächen wachsen, und auch wieder die unter sich parallelen Flächen verschwinden, oder jede Fläche wächst einzeln und ihr paralleler Gegner verschwindet.

Manche Krystalle erscheinen als eine Zusammensetzung von vier, sechs oder acht gleichartigen Pyramiden, indem um vier, sechs oder acht gleichwerthige Ecken sich eine Anzahl Flächen herumlagern und eine Pyramide bilden. Diese Versammlung von Flächen nennt man ein Flächen-system. Auch hier hat jede Fläche ihren parallelen Gegner in dem gegenüberstehenden Flächen-systeme.

§. 23.

Da wenigstens vier Flächen dazu gehören, um einen Raum allseitig zu umschließen, so sind auch nur diejenigen Krystalle fähig, durch Verschwinden der Hälfte ihrer Flächen einen neuen symmetrischen Körper zu bilden, die wenigstens acht Flächen besitzen, und selbst

Dann muß die Vergrößerung so geschehen, daß die Flächen den Raum allseitig umschließen.

Der Würfel, das Rhombendodekaëder und die vierseitigen Prismen sind nicht fähig durch Vergrößerung der Hälfte ihrer Flächenzahl einen Raum allseitig zu begrenzen. Das Oктаëder gestattet keine andere Vergrößerung, als die der nicht parallelen Flächen.

§. 24.

Bei den zusammengesetzten Krystallen (Combinationsen) setzt die Vergrößerung der Hälfte der Flächen des einen Krystalls nicht auch die des andern Krystalls voraus; aber manche Combinationen, deren einzelne Krystalle dieser Vergrößerung nicht fähig waren, lassen sich in dieser Beziehung als einfache Krystalle betrachten, oder die Flächen des einen Krystalls begrenzen den leeren Raum, der durch das Verschwinden der Flächenhälfte des andern Krystalls entstehen würde, und vermitteln die sonst unmögliche Halbierung.

In Fig. 79. Taf. IV. ist das Tetraëder als Hälfte des Oктаëders (o) mit dem Trapezoëder (C) verbunden, letzteres aber vollzählig vorhanden. In Taf. V. Fig. 104. und 105. tritt nicht nur das Oктаëder, sondern auch das Trapezoëder halbzählig auf. In Fig. 17. Taf. VIII. ist eine halbflächige Oblongpyramide (P) mit einem halbflächigen Oblongprisma (F) verbunden, wo die halbzählig auftretenden Flächen des letztern den leeren Raum begrenzen, der durch das Verschwinden paralleler Flächen der ersten entstehen müßte. In Fig. 15. ist die Oblongpyramide (L) halbflächig da, das rhombische Prisma (R) vollflächig.

§. 25.

Die durch Vergrößerung einer bestimmten Anzahl von Flächen aus andern Gestalten ableitbaren Körper zerfallen in:

1) viertheilflächige (tetartoëdrische), wo drei Vierteltheile der Flächen verschwunden sind, und nur ein Vierteltheil noch übrig ist, welches jetzt den Körper bildet. Ist häufig als nochmalige Halbiring eines halbflächigen Krystalls zu betrachten (dihemiëdrische Körper).

2) halbflächige (hemiëdrische), wo die Hälfte der Flächen verschwunden ist. Dies ist der gewöhnlichste Fall, und man hat bereits alle vollflächigen (homoëdrischen) Gestalten, bei denen es die Zahl und Lage der Flächen gestattet, hemiëdrisch auftretend gefunden. Manche Substanzen, z. B. Schwefelkies, Kalkspath, Fahlerz, kommen selten anders als in halbflächigen Gestalten, andere, z. B. Granat, Flußspath, selten anders als in vollflächigen Gestalten vor.

3) dreivierteltheilflächige (tritartoëdrische), wo drei Vierteltheile der Flächen gewachsen sind und nur ein Vierteltheil verschwunden ist. Kommt nur bei Körpern prismatischen Systems, besonders bei der Oblongpyramide vor. (S. Taf. VIII. Fig. 11.)

§. 26.

Man kann nach der Art der Flächen, welche wachsen oder verschwinden, wieder folgende Abtheilung der hemiëdrischen Körper treffen:

1) Hemiëdrische Körper, durch Wachsen abwechselnder Flächen entstanden.

a) parallelfächige, wenn immer parallele Flächen wachsen, z. B. Pentagonal-Dodekaëder aus

dem Pyramiden = Würfel (Taf. IV. Fig. 83. 84.), Rhomboëder aus der Hexagonal = Pyramide (Taf. IX. Fig. 9.). Bei Pyramiden findet hier entweder der Wechsel des Wachsens und Verschwindens nur in dem Verhältniß von rechts zu links, aber nicht von oben gegen unten Statt, und die Grundkanten des neuen Körpers liegen in einer Ebene (ebenrandige Körper), wie z. B. bei der abnormen Quadratpyramide, oder (bei hexagonalem Grundriß) der Wechsel findet auch von oben gegen unten Statt, und die Grundkanten steigen, wie z. B. bei dem Rhomboëder, abwechselnd in die Höhe und in die Tiefe (scalenoëdrische Körper).

b) nicht parallellächige, wenn die nicht parallelen Flächen wachsen, z. B. Tetraëder aus dem Oktaëder (Taf. IV. Fig. 72. 73.), tetragonales Trapezoëder aus der Zirkonpyramide (Taf. VIII. Fig. 23.). Man unterscheidet auch hier bei Pyramiden scalenoëdrische und ebenrandige Körper, erstere entstehen bei den Körpern mit quadratischem oder rhombischen, letztere bei denen mit hexagonalem Grundriße (z. B. die abnorme Hexagonalpyramide).

2) Hemiedrische Körper, durch Wachsen abwechselnder Flächenpaare entstanden.

a) parallellächige, wenn parallele Flächenpaare wachsen, z. B. die aus der Topaspyramide ableitbare rhombische Pyramide, die Kalkpyramide.

b) nicht parallellächige, wenn die nicht parallelen Flächenpaare wachsen, z. B. das tetragonale Scalenoëder (Taf. VIII. Fig. 22.), die Anomogon = Pyramide (Taf. X. Fig. 20. 21.).

Man hat in beiden Fällen wieder ebenrandige und scalenoëdrische Körper zu unterscheiden.

3) Hemiëdrische Körper, durch Wachsen der abwechselnden Flächensysteme entstanden. Hieher gehören das Pyramiden-Tetraëder (Taf. V. Fig. 103.), das Trapez-Dodekaëder (Fig. 107.) und das Herakis-Tetraëder (Fig. 108.) als halbflächige Gestalten des Trapezoëders, Pyramiden-Octaëders und des Acht- und vierzig-Flächners.

§. 27.

Es läßt sich jeder der, der Hemiëdrie fähigen vollflächigen Krystalle in zwei hemiëdrische Gestalten zerlegen, je nachdem man diese oder die andere Hälfte der Flächen wachsen läßt. Beide Gestalten sind zwar in der Regel in Hinsicht der Winkel sich gleich, aber nicht in Hinsicht ihrer Stellung, wo sie sich wie rechts und links zu einander verhalten.

Man vergl. Taf. IV. Fig. 72. und 73. die Stellung beider aus dem Octaëder abgeleiteten Tetraëder. In Taf. V. Fig. 104. und 105. ist ein Tetraëder in Verbindung mit einem Pyramiden-Tetraëder (Hemiëdrischen Trapezoëder) dargestellt, aber die mit C o bezeichneten Flächen in Fig. 104. verhalten sich zu denen in Fig. 105. wie rechts zu links. Bei der Topaspyramide giebt die Hemiëdrie nach parallelen Flächenpaaren zwei wesentlich verschiedene rhombische Pyramiden; denn läßt man in Fig. 8. Taf. VIII. die N Flächen wachsen, so erhält man eine rhombische Pyramide, deren Grundkanten in Fig. 9. die Linien xyxy bilden; durch Wachsen der O Flächen entsteht eine Pyramide, deren Grundrhombus ypyy in Fig. 9. anzieht.

§. 28.

Alle Krystalle lassen sich nach gewissen Richtungen leichter zerschlagen, als nach andern, und oft kommen dabei glatte glänzende Flächen zum Vorschein. Der Krystall erscheint dann nach dieser Richtung wie aus sehr dünnen parallelen Blättern zusammengesichtet. Diese scheinbare Zusammenschichtung bezeichnet man mit dem Ausdruck blätterige Textur, und die Spaltungsrichtungen sind die Durchgänge derselben.

§. 29.

Die Zahl und Richtung der Durchgänge entspricht stets der Zahl und Lage der Flächen eines Krystalls der Substanz, so daß man annehmen kann, jedem Durchgange entspricht eine Krystallfläche. Gleichwerthige Durchgänge sind gleich deutlich und gleich glänzend.

Undeutliche Durchgänge, die nur dann zum Vorschein kommen, wenn der Schlag ganz genau mit der Richtung der Blätter parallel geführt wird, und welche auch mindern Glanz besitzen, verrathen sich zuweilen durch besondern Lichtreflex, z. B. der Durchgang senkrecht auf die Axe beim Kalkspath, oder durch die Streifung der Flächen, wo die Streifungslinien als Begränzungslinien der Blätter anzunehmen sind, z. B. bei Schwefelkies, Beryll. Manche Durchgänge kommen dann zum Vorschein, wenn man den Krystall glühend ins Wasser wirft.

Bemerkt man bei einem Krystall einen Durchgang in seiner Lage gegen eine Ecke oder Kante, so muß bei allen gleichnamigen Ecken oder Kanten ein Durchgang in derselben Lage vorhanden seyn.

§. 30.

Die beobachtbaren Durchgänge entsprechen in der Regel nur einer einfachen Krystallgestalt, selten mehreren, weshalb die Zahl derselben größtentheils weit geringer ist, als die Zahl der beobachtbaren Krystallflächen.

Die größte Menge von Durchgängen ist bei dem gediegenen Spießglanz und dem Spießglanz-Silber beobachtet, wo zehn Durchgänge vorhanden sind, welche den Flächen eines Oktaeders und eines Rhomboïdal-Dodekaeders entsprechen. Bei dem Kalkspathe, der unter allen bis jetzt bekannten krystallisirten Substanzen die größte Mannichfaltigkeit an Krystallgestalten zeigt, sind nur drei Durchgänge (parallel den Flächen eines Rhomboïders) deutlich wahrnehmbar, mitunter ein vierter senkrecht auf die Ase, selten noch drei andere, parallel den Flächen eines flachen Rhomboïders.

§. 31.

Diejenigen Krystallflächen, welche den Durchgängen parallel laufen, sind nicht immer deutlich vorhanden, und es ist keine bestimmte Beziehung zwischen der Deutlichkeit der Entwicklung der Durchgänge und der Krystallflächen beobachtet.

Den am häufigsten bei einer Substanz vorkommenden und am größten ausgebildeten Krystallflächen entsprechen nicht immer die deutlichsten Durchgänge. Beim Flußspath ist der Würfel die vorwaltende Krystallform, die Durchgänge laufen parallel mit den Flächen des Oktaeders. Bei dem Kalkspathe kommen zwar häufig Rhomboëder vor, aber gerade dasjenige Rhomboëder, das aus den Durchgängen sich entwickeln läßt, findet sich höchst selten als Krystallgestalt. Bei dem Bitterkalk ist das Rhomboëder der Durchgänge auch die gewöhnlichste Krystallgestalt.

§. 32.

Diejenige einfache Gestalt, die sich durch die gleichmäßige Entwicklung gleichnamiger Durchgänge ergibt, wird als Kerngestalt betrachtet, und bei der Entwicklung und Berechnung der übrigen Krystallgestalten zu Grunde gelegt. Die Krystallgestalt, die mit der Kerngestalt übereinstimmt, betrachtet man als Stammgestalt (primitiv).

Um eine Kerngestalt oder Stammgestalt zu erhalten, denkt man sich alle gleichnamigen Durchgänge gleich stark entwickelt und jeden zwei einander parallele Flächen bildend. Sind z. B. drei Durchgänge von gleichem Werthe vorhanden, die sich rechtwinkelig schneiden, so muß auf diese Weise ein Körper entstehen, der von sechs gleichgroßen, rechtwinkelig gegen einander stehenden Flächen (Würfel) begrenzt ist.

§. 33.

Bisweilen ist nur die halbe Zahl derjenigen Durchgänge vorhanden, die den vorhandenen einfachen Krystallen zu Folge als vorhanden vorausgesetzt werden können, und es verschwinden die abwechselnden Durchgangsflächen, den Gesetzen der Hemiedrie gemäß.

Wo vier oder mehrere Durchgänge vorhanden sind, läßt sich schon mehrentheils dadurch, daß man jeden Durchgang nur einfach entwickelt, eine Krystallgestalt bilden, die einer hemiödrischen Gestalt entspricht, z. B. die vier Durchgänge parallel den Flächen des Oktaëders geben einfach zusammengestellt ein Tetraëder. Es kommen aber auch da, wo jeder Durchgang zwei Flächen bildet, scalenoödrische Körper vor, z. B. das Rhomboëder, das als halbflächige Gestalt der Hexagonpyramide zu be-

trachten ist. Von den Durchgängen parallel den Flächen der Oblongpyramide ist häufig nur einer sichtbar, z. B. Augit.

§. 34.

Manche Substanzen kommen sehr selten oder gar nicht in Krystallen vor, zeigen aber dennoch die Durchgänge. Hier läßt sich durch die Durchgänge das Krystallsystem bestimmen, zu dem sie gehören.

Schaalstein, Spodumen, Roth-Zinkerz, Kieselmann u. a. hat man bis jetzt noch nicht krystallisirt, wohl aber mit blätteriger Textur gefunden. Da nun bei allen in Krystallen vorkommenden Substanzen die Erfahrung lehrt, daß die Kerngestalten stets einer ableitbaren Krystallgestalt angehören, so läßt sich auch bei diesen Substanzen voraussetzen, daß ihre Durchgänge das Krystallsystem bestimmen, zu dem sie gehören.

Bei denjenigen Durchgängen, welche den Flächen der Prismen entsprechen, ist gewöhnlich der Durchgang parallel der Endfläche deutlicher als die nach den Seitenflächen, und nicht selten ist nur der erste erkennbar. Dann läßt sich nur bestimmen, daß die Substanz unter die ungleichartigen Körper gehöre, aber das System selbst ist nicht genauer dadurch bezeichnet.

Krystallflächen und Durchgangsflächen zusammengekommen, ergänzen sich oft wechselseitig und lösen die Zweifel, welche die unvollkommene Ausbildung des einen oder des andern übrig lassen. Es läßt z. B. ein rechtwinkeliges Prisma, das als Krystall erscheint, wegen Veränderlichkeit der Größe der Flächen (s. §. 20.) den Beobachter in Zweifel, ob er einen Würfel, ein quadratisches Prisma oder ein Oblongprisma vor sich habe. Hier entscheiden die Durchgänge, die einer einfachen Gestalt entsprechen. Fände man drei Durchgänge parallel

den Flächen des Prisma's, so würden beim Würfel alle drei gleichwerthig, bei dem quadratischen Prisma zwei gleichdeutlich, der dritte verschieden, bei dem Oblongprisma alle drei im Werthe von einander verschieden seyn. Singen die Durchgänge diagonal, so müßten beim Würfel nach allen Diagonalen, also sechs gleichwerthige Durchgänge, bei dem quadratischen Prisma zwei rechtwinkelig sich schneidende, und beim Oblongprisma zwei schiefwinkelig sich schneidende und gleichdeutliche Durchgänge vorhanden seyn.

§. 35.

Bei derben Massen mit blätteriger Textur dürfen nur diejenigen Durchgänge als zu einander gehörig angenommen werden, die in einem einzelnen abgesonderten Stücke beobachtbar sind, und die einzelnen abgesonderten Stücke sind als unvollkommne Krystalle zu betrachten.

Wenn man zwei, drei oder mehrere unmittelbar neben einander vorkommende Krystalle betrachtet, so werden diese gemeinlich verschiedene Größe besitzen, und ihre Axen verschieden gegen einander geneigt seyn, so daß jeder einzelne Krystall als ein für sich bestehendes, von den übrigen unabhängiges Individuum erscheint. Die derben Massen, bei denen eine blätterige Textur statt findet, sind größtentheils als Convolute von Krystallen zu betrachten, deren äußere Begrenzungsflächen nicht ausgebildet sind, und deren Umrisse überhaupt nicht mehr sichtbar werden, indem die Individuen so fest mit einander verwachsen sind, daß sie sich nicht mehr trennen lassen. In diesem Zustande erhalten sie den Namen krystallinische abgesonderte Stücke. Da nun jedes abgesonderte Stück als ein selbstständiges Individuum zu betrachten ist, so kann auch nur das Verhalten der in ihm enthaltenen Durchgänge gegen einander, aber

nicht gegen die Durchgänge im benachbarten abgesonderten Stücke in Betracht gezogen werden.

§. 36.

Bei allen derben Massen, welche blätterige Textur zeigen, sind auch abgesonderte Stücke vorhanden, deren Durchschnitte als Begrenzungslinien der Durchgänge erscheinen.

Bei der schieferigen Struktur, deren Spaltungsflächen überdies nie so vollkommene Ebenen sind, als die Durchgangsflächen, ist keine krystallinische Absonderrung vorhanden.

Um die Durchschnitte der abgesonderten Stücke zu erkennen, halte man ein derbes, mit blätteriger Textur versehenes Stück, z. B. Bleiglanz, unter einer Richtung gegen das Licht, so werden nur einzelne, aber scharf begrenzte Parthien, mit vollem Lichte erscheinen, unter einer andern Richtung wieder andere, und die Begrenzungslinien dieser Beleuchtung sind die Profile der abgesonderten Stücke.

Manche Substanzen, z. B. Glimmer, Fraueneis, Feldspath, zeigen sehr große abgesonderte Stücke, so daß in Handstücken man gewöhnlich nur ein einzelnes abgesondertes Stück erhält, manche andere zeigen sie sehr klein, und bei manchen, z. B. Bleiglanz, Grauspießglanzerz verschwinden sie durch Abnahme der Größe ganz und die Masse wird dicht.

§. 37.

Die abgesonderten Stücke sind mehr oder minder fest mit einander verwachsen, und je geringer ihr Zusammenhang unter einander ist, desto mehr nähert sich ihr Umriß einer Krystallgestalt. Wenn die abgesonder-

ten Stücke eine freie Oberfläche erreichen, so gehen sie in Krystalle aus.

Diese Verhältnisse zeigen, daß die abgesonderten Stücke, ihrer Entstehung nach, als Krystalle zu betrachten sind, die aus Mangel an Freiheit des Raums sich nicht vollständig auszubilden vermochten. Bei manchem Granat, Schwerspath stellen die abgesonderten Stücke schon wahre Krystalle dar. Der Uebergang der abgesonderten Stücke in Krystalle, da, wo sie einen freien Raum berühren, ist fast bei allen aufgewachsenen Krystallen, besonders deutlich bei Amethyst, Baryt, Grauspießglanz u. sichtbar.

§. 38.

Sind die abgesonderten Stücke in einer umschließenden Masse vollständig als Krystalle ausgebildet, so nennt man sie eingewachsene Krystalle, und sie sind dann, einzelne zufällige Unregelmäßigkeiten abgerechnet, um und um von Krystallflächen umschlossen. Besonders ist dies dann der Fall, wenn eine Substanz in eine fremdartige Substanz eingehüllt ist, und hier einzelne abgesonderte Stücke oder einzelne Krystalle bildet.

Als Beispiele für einzelne eingewachsene Krystalle dienen vorzüglich Boracit in Gyps, Staurolith in Glimmerschiefer, Augit in Basalt. Manche Substanzen sind bis jetzt nur in eingewachsenen Krystallen oder Körnern (d. i. in einzelnen abgesonderten Stücken ohne Krystallflächen) beobachtet worden, andere kommen in eingewachsenen und aufgewachsenen Krystallen zugleich vor.

§. 39.

Dieserjenigen Krystalle, welche dann entstehen, wenn die abgeforderten Stücke einen freien Raum erreichen, so wie dieserjenigen, die in einem freien Raume auf andern Substanzen sich gebildet haben, werden aufgewachsene Krystalle genannt. Bei ihnen ist der Krystall, so weit er auf seiner Grundlage ruht, mit derselben verwachsen, und nicht ausgebildet.

Hiaweilen ist bei aufgewachsenen Krystallen nur ein kleiner Theil der Gestalt sichtbar, und man ergänzt sich den ganzen Krystall in der Idee, den Gesetzen der Symmetrie und des Parallelismus gemäß. Ist der Krystall so aufgewachsen, daß er auf seiner Hauptaxe senkrecht steht, so nimmt man an, daß das verwachsene Ende dem freistehenden gleichgebildet sey.

§. 40.

Aufgewachsene Krystalle kommen selten, wie z. B. Topas, Apophyllit, einzeln vor, sondern gewöhnlich erscheinen sie in unbestimmter Zahl zusammengehäuft und bilden Gruppen (Drusen). Sie sind dann unregelmäßig an und durch einander gewachsen, oder zeigen bei ihrer Zusammenhäufung ein regelmäßiges Verhalten gleichartiger Axen gegen einander.

An einander gewachsene Krystalle berühren sich mit einzelnen Flächen, bei durch einander gewachsenen wird der eine (der durchwachsene) von dem andern (dem durchgewachsenen) unterbrochen. Es findet hier keine Vereinigung der einzelnen Krystalle zu einer Gesamtmasse statt, indem jedes Individuum durch die Lage seiner Durchgänge kenntlich bleibt. Man denke sich z. B. zwei Prismen des Topases, bei dem nur der Durchgang senkrecht auf die Hauptaxe deutlich ist, unter einem Winkel

von 45° einander durchwachsend, so müßten, wenn die Masse beider Prismen sich im Kreuze vereinigte, hier zwei Durchgänge, die sich unter 45° oder 135° schneiden, beobachtbar seyn, es wird aber nur ein Durchgang, der dem durchwachsenden Krystalle angehört, vorkommen.

Die, einerlei Substanz angehörigen, in Drusen vorkommenden Krystalle, sind gewöhnlich gleichartig, oder zeigen doch nur wenig Abweichungen von einander.

§. 41.

Bei den in unbestimmter Zahl zusammengehäuften Krystallen läßt sich theils in der Richtung, theils in der Länge ihrer gleichartigen Axen oft eine bestimmte Wechselbeziehung nachweisen, und man unterscheidet eine pyramidale, knospenförmige, büschelförmige, garbenförmige, sternförmige, kugelige, stangenförmige, mandelförmige, rosenförmige und vollständig krystallinische Zusammenhäufung.

Man könnte noch mehrere krystallinische Gestalten, z. B. gestriekt, baumförmig, zellig, hieher ziehen, da sie im Grunde nur Krystall-Zusammenhäufungen sind; aber bei ihnen sind die einzelnen Krystallgestalten nicht mehr erkennbar, ja wohl selbst theilweise nicht vollständig ausgebildet.

§. 42.

Pyramidal wird eine Zusammenhäufung genannt, wenn um einen gemeinschaftlichen großen Mittelkrystall sich mehrere kleinere versammeln, und die Hauptaxen aller parallel stehen. Dieser Fall findet nicht selten beim Amethyst statt.

Der große Krystall bildet hier den Ansammlungspunkte für die kleinern, die um je mehr sich verkürzen, je weiter sie von dem Mittelpunkte absehen. Gewöhnlich befinden sich nicht nur die Polaxen, sondern auch die Randaxen aller zu der Gruppe gehörigen Krystalle in paralleler Stellung, und sind auf ihrer Hauptaxe aufrecht stehend, aufgewachsen.

§. 43.

Knospenförmige Zusammenhäufung unterscheidet sich von der pyramidalen nur dadurch, daß die Polaxen der einzelnen Krystalle sich nach der senkrecht stehenden Hauptaxe des Mittelpunkts neigen. Kommt ebenfalls bei Amethyst vor.

Man kann in der pyramidalen Zusammenhäufung ein Bestreben der Masse, sich in Individuen zu theilen, und in der knospenförmigen Zusammenhäufung ein Bestreben der Masse, die einzelnen Individuen zu einem einzigen Individuum zu vereinigen, erblicken.

§. 44.

Die büschel-, garben- und sternförmige Zusammenhäufung wird nur bei solchen Krystallen angetroffen, wo eine Axe eine sehr überwiegende Länge gegen die andere hat, und sie sind dann so aufgewachsen, daß sie auf der Seitenfläche der Prismen (auf einer kurzen Axe) ruhen. Die Hauptaxen der verschiedenen gleichgroßen Individuen laufen excentrisch horizontal von einem Mittelpunkte weg, entweder nach einer Seite, oder nach zwei entgegengesetzten Seiten, im Mittelpunkte sich kreuzend, oder gleichförmig nach allen Seiten. Beispiele für dergleichen Zusammenhäufungen bieten vorzüglich Stilbit, Kobaltblüthe, Schörl dar.

Man erblickt in dieser Zusammenhäufung die Tendenz der Masse, sich in der Richtung einer Ebene auszubreiten, verbunden mit der Tendenz, sich um einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt zu versammeln.

§. 45.

Kugelige Zusammenhäufung findet statt, wenn Krystalle um einen Mittelpunkt sich versammeln und nach allen drei Dimensionen sich gleichförmig anhäufen: ein Fall, der besonders ausgezeichnet beim Schwefelfies vorkommt. Man hat, wenn die Krystalle auf derber Masse aufgewachsen vorkommen, zwar nur ein Kugelsegment vor sich, aber wenn die Zusammenhäufung in einer lockern Umhüllung geschah, erfolgen auch vollständige Kugeln.

Hier herrscht also die Tendenz der gleichförmigen Ausbreitung der Masse nach allen Seiten, sobald ein gemeinschaftlicher Mittelpunkt für dieselbe gegeben war. Nicht selten gab ein fremdartiger Körper den Mittelpunkt her, der beim Zerschlagen der Kugel gefunden wird. Fand die Masse nach irgend einer Richtung mehr Widerstand als nach der andern, oder hatte der fremdartige Mittelkörper eine mehr längliche als runde Gestalt, so nähern sich die Zusammenhäufungen dem walzenförmigen, elliptischen u. Wurde die Krystallbildung an der Oberfläche so gestört, daß keine glatten Flächen anstreten konnten, so entstanden auf diese Weise knollige, wulstförmige u. a. Gestalten.

§. 46.

Die stangenförmige Zusammenhäufung ist einigen Substanzen eigen, die in langgestreckten Prismen krystallisirt vorkommen, z. B. Schörl, Baryt.

Hier sind die Prismen mit ihren Seitenflächen verwachsen, die Hauptaxen liegen parallel und sind gleich lang.

§. 47.

Mandel förmige Zusammenhäufung kommt nur bei tafelartigen Krystallen vor, und ist besonders dem Baryt eigen. Hier liegen auf der breiten Fläche einer größern Tafel kleinere Tafeln mit allmählig abnehmender Größe, aber mit parallel laufenden Kanten aufgehäuft.

Sämmtliche Krystalle besitzen hier eine gemeinschaftliche, im Mittelpunkte der Tafeln senkrecht stehende Axe, alle übrigen Axen laufen unter einander parallel, und jede einzelne Tafel erscheint als eine in gleicher Stellung wiederkehrende Bildung ihres Vorgängers im verjüngten Maasstabe.

§. 48.

Bei der rosenförmigen Zusammenhäufung, die ebenfalls tafelartigen Krystallen eigen ist, sind die Tafeln auf ihren schmalen Randflächen auf- und so durch einander gewachsen, daß sie einer halb entfalteten Rose ähneln. Bei Baryt und Kalkspath ist diese Zusammenhäufung mitunter beobachtet.

Es läßt sich hier kaum eine bestimmte Beziehung der Axen gegen einander nachweisen, und es findet hier ein Uebergang in die unregelmäßigen und zufälligen Zusammenhäufungen statt.

§. 49.

Die vollständige krystallinische Zusammenhäufung findet dann statt, wenn gleich große und völlig gleich gebildete Krystalle mit ihren Flächen so an einander gereiht sind, daß ihre Zusammenhäufung wieder eine Krystallgestalt giebt. Diese Krystallgestalt ist entweder derjenigen wieder gleich, welche den einzelnen Krystallen zukommt, oder verschieden davon, gehört aber dann in die Reihe der der Substanz zukommenden Krystallgestalten.

Diese Art der Zusammenhäufung stellt die Hauy'sche Idee, von der Entstehung secundärer Gestalten aus der Kerngestalt, in der Natur dar. Die Flächen, Kanten und Axen sämmtlicher zusammengehäuften Krystalle liegen hier parallel unter einander, und die einzelnen Individuen sind so an einander gereiht, daß sie Schichten bilden, und diese Schichten sind wieder den Gesetzen der Symmetrie gemäß auf einander gelagert.

Die meisten der bei dem Flußspathe vorkommenden Oktaëder und Rhomben · Dodekaëder sind, durch das Vergrößerungsglas betrachtet, nur Zusammenhäufungen kleiner Würfel. Viele Bleiglanz und Schwefelkieswürfel sind aus kleinern Würfeln zusammengesetzt; und manche Kalkspath · Rhomboëder ergeben sich als Zusammenhäufungen kleinerer Rhomboëder.

§. 50.

Selbst Krystalle, die verschiedenen Substanzen angehören, bilden mitunter, wenn sie mit einander vorkommen, eine regelmäßige Zusammenhäufung, indem die Axen der Krystalle der einen Substanz gegen die Axen der Krystalle der andern Substanz eine bestimmte Richtung annehmen.

Ein auffallendes Beispiel für dieses Vorkommen giebt das Verhalten der Cubooktaeder des Schwefelkieses zu den Fünflingen des Speerkieses (vergl. v. Raumer in Steffens Handbuch II. p. 170), so wie die Verbindung der Prismen des Cyanits mit den Prismen des Stauroliths. (Vergl. meine Abhandlung in Leonhard's Taschenbuch 1817).

§. 51.

Es giebt aber auch Zusammenhäufungen, wo immer zwei Individuen sich nach bestimmten Gesetzen mit einander verbinden, und man unterscheidet hiebei gepaarte Krystalle und Zwillingkrystalle.

Die Eigenthümlichkeit dieser Zusammenhäufung besteht darin, daß zwei Individuen sich mit einander vereinigen und selbst dann, wenn drei oder vier Individuen (Drillings-, Vierlings-Krystalle) mit einander verbunden vorkommen, so ist dies nur als eine Wiederholung der Verbindung von zwei Individuen anzusehen. Man kann eine solche Verbindung nicht als eine Combination zweier einfachen Krystallgestalten ansehen (s. §. 19.), weil die beiden Individuen, die sich mit einander verbinden, ihre Individualität beibehalten, und entweder im Längenmaasse ihrer Axen, oder in ihrer Richtung von einander abweichen. Wollte man eine einfache Combination als einen Doppelkrystall betrachten, so müßte man annehmen, daß sämtliche Axen der beiden Individuen sich deckten.

§. 52.

Bei den gepaarten Krystallen liegen die Axen beider Individuen parallel, aber nicht alle Axen

decken sich, und der eine Krystall erscheint in dem andern eingeschoben oder eingeschlossen. Es kommen sowohl gleichartige als verschiedene Krystallgestalten in dieser Verbindung vor.

Bei den sogenannten gestielten Bergkrystallen, und bei den nordamerikanischen blauen Turmalinen mit rothem Kerne, sind zwei gleichartige Individuen in einander geschoben. Beim Kalkspath findet man mitunter, wie z. B. bei Bräunsdorf ohnweit Freiberg, die Kalkpyramide das Prisma durchwachsend, aus Illinois in Nordamerika kommen Würfel von Flußspath, die ein anders gefärbtes Oktaëder einschließen. Man kann in diesen Fällen wohl annehmen, daß das umhüllende Individuum später gebildet wurde, als das umhüllte, und eine Krystallbildung derselben Substanz und an demselben Punkte aber in verschiedener Zeit statt fand.

§. 53.

Bei den Zwillingsskrystallen sind zwei gleichartige Individuen mit einander so vereinigt, daß sie eine Aze gemeinschaftlich haben, während ihre übrigen gleichnamigen Azen sich unter bestimmten Winkeln schneiden. Es vereinigen sich auf diese Weise entweder zwei vollständige Individuen (Kreuzkrystalle) oder zwei getheilte Individuen (Hemitropien).

Bei den mehresten (jedoch nicht bei allen) Zwillingsskrystallen finden sich einspringende Winkel, die einzelnen Krystallen fremd sind. Ein Durchwachsen der beiden Individuen, so daß das eine als durchwachsen, das andere als durchwachsend betrachtet werden könnte, findet nicht statt, indem da, wo die Masse beider Individuen sich vereinigt, auch die Durchgänge beider Individuen vorhanden sind. Beide sind als völlig gleichwerthig zu betrachten.

§. 54.

Bei den Kreuzkrystallen sind zwei in Hinsicht ihrer Flächenzahl vollständige Individuen mit einander so verbunden, daß mehrere ihrer gleichnamigen Kanten oder Flächen sich unter einem Winkel von 90° oder 60° kreuzen. Stellt man zwei Individuen in völlig paralleler Stellung neben einander, so muß man sich das eine um 90° oder 180° herumgedreht und in dieser Richtung mit dem andern, in unveränderter Stellung verbliebenem gleichmäßig vereinigt denken, um die Zusammensetzung eines Kreuzkrystalls zu entwickeln.

Es kommt hier vorzüglich darauf an, die Stellung zu finden, in welcher beide Krystalle gegen einander befindlich gedacht werden müssen. Für beide bleibt immer eine Axe gemeinschaftlich, um welche der eine zur Hälfte oder um ein Viertel seines Perimeters herumgedreht gedacht werden muß (Umdrehungsaxe), und dies kann eine Ecken-, Kanten- oder Flächenaxe seyn.

Die bekanntesten Beispiele für das Vorkommen der Kreuzkrystalle sind Staurolith, Kreuzstein und Flußspath. Bei dem Staurolith stelle man zwei ungleichwinkelige sechsseitige Prismen auf eine Axe, die durch zwei Seitenkanten gelegt wird, so werden nach der Umdrehung um 90° alle Seitenkanten der beiden Prismen sich unter rechten Winkeln schneiden. (Vergl. Haüy tab. 62. fig. 47.). Bei dem Kreuzstein bleibt für beide Krystalle die Polaxe gemeinschaftlich, und die Randaxen kreuzen sich rechtwinkelig. Bei dem Flußspath denkt man sich beide Würfel auf eine Eckenaxe gestellt und den einen um 180° gedreht.

§. 55.

Bei hemiëdrischen Körpern erfolgt die Kreuzung gewöhnlich so, daß, wenn man den einen Krystall in irgend einer Stellung annimmt, der andere ihn so schneidet, daß desselben Flächen diejenige Lage annehmen, welche der Lage der verschwundenen Flächen des homoëdrischen Körpers entspricht.

Nimmt man z. B. einen Zwillingkrystall von zwei Pentagonal-dodekaëdern, so werden ihre Basen alle sich unter rechten Winkeln schneiden, und die Flächen beider dieselbe Lage haben, wie die Flächen des Pyramidenwürfels. Eben so werden zwei Tetraëder sich so kreuzen, daß die Flächen beider den Flächen eines Oktaëders gleich liegen. Im ersten Falle werden die Linien, welche die Kanten der einspringenden Winkel bilden, einen eingeschriebenen Pyramidenwürfel, im letztern Falle ein eingeschriebenes Oktaëder umschreiben. (Vergl. Haidinger im Edinb. Journ. of science. 1824. überf. in Isis 1825. Heft VI. p. 640. mit Abbild. auf Tab. IV.).

§. 56.

Die hemitropischen Zwillingkrystalle sind Vereinigungen von zwei halben Individuen, die beide durch einerlei Schnitt getheilt sind. Man stelle zwei gleichartige Krystalle senkrecht auf eine Ase, beide vollkommen parallel mit einander, theile beide durch einen Schnitt auf die Mitte dieser Ase in zwei völlig gleiche Hälften, und denke sich die zwei oberen oder die zwei untern Hälften dieser Individuen an ihren durch den Schnitt entstandenen Flächen wieder mit einander verbunden, so erhält man den hemitropischen Zwilling. Die eine Hälfte behält man dabei in unveränderter Stellung bei, die andere Hälfte muß um einen Halb-

kreis herumgedreht werden, um an die vorige anzupassen. Man erhält dieselbe Ansicht, wenn man ein Individuum halbiert, und die eine Hälfte um die Hälfte ihres Perimeters herumdreht, während die andere unverrückt bleibt.

Besonders deutliche Beispiele für Hemitropien liefern Spinell, Zinnstein und Kalkspath. Beim Spinell ist das Oktaeder durch einen Schnitt getheilt, der auf die Mitte seiner Flächenaxe parallel mit einer Fläche geht. (Hauy tab. 51. fig. 152—154. Mohs II. tab. X. fig. 152.). Bei dem Zinnstein ist eine Quadratpyramide durch einen Schnitt auf eine Kantenaxe oder eine Flächenaxe halbiert (Hauy tab. 112. fig. 263. 264. tab. 113. fig. 265.). Beim Kalkspath geht der Schnitt senkrecht auf die Polaxe der Kalkpyramide (Mohs II. tab. VIII. fig. 126.).

Trifft die Hemitropie hemiödrische Körper, so scheint auch dann bei den ungleichartigen Systemen bisweilen an einem Ende der homoödrische Krystall wieder hergestellt zu seyn, z. B. bei Augit, Hornblende. Sehr gewöhnlich treten dann an einem Pole Flächen von andern Werthe, wie am andern Pole auf, z. B. (Hauy tab. 65. fig. 75.) Hornblende, wo die Flächen r der Rhombenpyramide, die Flächen P und p der Oblongpyramide angehören.

§. 57.

Von den Zwillingkrystallen müssen die widersinnigen Combinationen unterschieden werden, die dann statt finden, wenn zwei verschiedene Krystallgestalten, die aber einerlei Substanz angehören, so mit einander in Verbindung treten, daß die Hälfte der Flächen der einen Gestalt um den einen Pol, die Hälfte der Flächen der andern Gestalt um den entgegengesetzten Pol sich herumlagert. Von den Zwillingen unter-

scheiden sich die widersinnigen Combinationen dadurch, daß beide Gestalten nur ein Individuum bilden, von den hemiedrischen Körpern dadurch, daß kein Wachsen und dadurch bedingtes Verschwinden abwechselnder Flächen oder Flächenpaare vorhanden ist. Sie kommen nur bei ungleichartigen Körpern vor, wo alsdann an einem Pole andere Flächen zum Vorschein kommen, als am andern Pole.

Der Turmalin liefert dafür die ausgezeichnetsten Beispiele. In fig. 196. tab. 76. bei Hauy ist das Prisma an einem Ende mit dem Stammrhomboëder verbunden, am andern Ende wird es durch die Fläche senkrecht auf die Axe begrenzt. Es scheint dieses Vorkommen mit dem elektrischen Verhalten der Substanzen in Beziehung zu stehen, indem bei den meisten Krystallen, die als widersinnige Combinationen beobachtet sind, der eine Pol Glas-, der andere Harz-Elektricität zeigt.

§. 58.

Der Zusammenhang der Krystallgestalt mit den Grundstoffen der Substanz, ist noch nicht vollständig ermittelt. Grundstoffe, die einerlei Krystallgestalt hervorzubringen fähig sind, sind in dieser Beziehung *isomorph*, wie alle Grundstoffe, die das regelmäßige Oktaëder zur Stammgestalt haben, z. B. Gold, Silber. Substanzen, die aus verschiedenen Grundstoffen zusammengesetzt sind, zeigen Krystalle, die keinem ihrer Urstoffe angehören, wiewohl der eine oder der andere mitunter einen vorwaltenden Einfluß auf dieselben ausgeübt zu haben scheint. Manche Urstoffe, die in Verbindung mit andern eine bestimmte Krystallgestalt zeigen, können durch andere ersetzt werden (stellvertretende Bestandtheile), ohne daß die Krystallgestalt

geändert wird. Oft kann der Formbestimmende Grundstoff in geringer Quantität vorhanden seyn. Ob einerlei Substanz in verschiedenen Grundgestalten aufzutreten im Stande sey (*dimorph*), ist bis jetzt noch ungewiß.

Alle Substanzen, die dem gleichartigen Krystallsysteme angehören, sind isomorph, es ist aber noch nicht außer Zweifel, ob es auch in den andern Systemen völlig isomorphe Substanzen gebe. Als Beispiele für den Einfluß der Grundstoffe auf die Krystallgestalt dienen besonders die kohlen-sauren Verbindungen. Kalk, Talk, Mangank, Eisen und Zink geben mit der Kohlen-säure Krystalle, die aus Rhomboëdern ableitbar sind, welche in ihren Winkeln nur um wenige Grade abweichen, und man ist genöthigt, hier die Kohlen-säure als Formbestimmend anzunehmen. Bei dem kohlen-sauren Blei, Kupfer, Stron u. finden andere Krystallisationen statt, die jedoch weder von der Säure, noch von der Base allein abhängig seyn möchten. Bei dem Aragonit, wo wir es mit einem kohlen-sauren Kalk, der nur sehr wenig kohlen-sauren Stron enthält, zu thun haben, erscheinen rhombische Prismen, die von den rhombischen Prismen des reinen kohlen-sauren Strons nur sehr wenig abweichen.

Bei denjenigen Krystallen, die der Mineralog dem Augit oder dem Färlerze beizählet, findet der Chemiker sehr verschiedene Zusammensetzungen. Betrachtet man den Augit als eine Verbindung von $\frac{1}{2}$ Kiesel mit $\frac{1}{2}$ Kalk-erde, so kann $\frac{1}{2}$ aus Talkerde allein bestehen, oder die Talkerde kann durch Metalloxyde vertreten werden, ohne Einfluß auf die Krystallgestalt. Bei dem Färlerze dürften Schwefelkupfer mit Schwefeleisen als charakteristische, Schwefelspiesglang und Arsenitkieseln als sich vertretende Bestandtheile anzunehmen seyn.

Als dimorphe Substanzen möchte man das Schwefeleisen und den Schwefel aufführen. Das Schwefeleisen, das aus 54 Theilen Schwefel und 46 Eisen zusammengesetzt ist, kommt theils in Krystallen des tessularen Sy-

stems (Schwefelkies), theils in denen des prismatischen Systems (Strahlkies) vor, da aber diese Verschiedenheiten der Krystallisation auch noch mit Verschiedenheiten der Farbe und der Verwitterbarkeit verbunden sind, so ist es wahrscheinlich, daß auch ein, bis jetzt noch nicht bekannter Unterschied in der chemischen Zusammensetzung statt findet. Mitscherlich (Annal. de Chimie et Phyl. 1823. p. 264.) zeigt, daß Krystalle, die er durch langsames Abkühlen von dem Schwefel erhielt, wesentlich von denen abwichen, welche der natürliche Schwefel und der aus Auflösungen erhaltene Schwefel darbieten, es ist aber auch hier der Verdacht einer chemischen Verschiedenheit dieser Schwefelsubstanzen nicht ganz ausgeschlossen.

§. 59.

Es giebt auch Krystalle, welche der Substanz, bei der wir sie jetzt finden, ursprünglich fremd sind, und welche derselben von einer andern Substanz erteilt worden sind. Man bezeichnet diese Krystalle mit dem Namen *Asterkrystalle* und unterscheidet nach der Entstehung: *Asterkrystalle* um einen Kern gebildet — im Eindruck gebildet — durch Verwandlung entstanden.

Asterkrystalle finden sich selbst bei Substanzen, die ihrer Cohärenz und übrigen Beschaffenheit nach, gar keiner Krystallisation fähig sind, z. B. bei Speckstein, Steinmark. Man erkennt die *Asterkrystalle* durch minder scharfe Kanten, weniger spiegelnde Flächen und den Mangel des Zusammenhanges mit den übrigen krystallinischen Verhältnissen der Substanz. Auch sind sie gewöhnlich hohl und ihr geognostisches Verhalten giebt gemeinlich über ihre Entstehung Auskunft.

§. 60.

Asterkrystalle, um den Kern gebildet, entstehen, wenn um einen Krystall sich eine fremdartige Substanz überall in gleicher Quantität herumlegt und die Gestalt des Krystalls beibehält. Der ursprüngliche Krystall ist später meist zerstört worden, und hat einen hohlen Raum im Asterkrystalle hinterlassen. Diese Asterkrystalle besitzen gewöhnlich rauhe drüsige Flächen.

Ausgezeichnete Beispiele liefern dafür die in den Krystallgestalten des Varyts bei Schneeberg vorkommenden Quarzkrystalle, und die Kupferkieskrystalle von Bräunsdorf bei Freiberg.

§. 61.

Asterkrystalle, im Eindruck gebildet, verdanken ihre Entstehung der Zerstörung anderer Krystalle, die in einer sie bedeckenden Masse ihre Abdrücke zurückließen, welche durch die neu entstehende Substanz ausgefüllt wurden, und für deren Gestalt als Chablone dienten.

Diese Asterkrystalle kommen nur dann vollständig zum Vorschein, wenn die Masse, in der sie sich abformten, später zerstört wurde. Sie sind meist im Innern hohl, und ihre äußern Flächen zwar ziemlich eben, aber selten glänzend. Ein Theil der Asterkrystalle des Hornsteins in den Gestalten des Kalkspathes von Schneeberg, die Kalkpyramiden des Rotheisensteins aus Sachsen und Westphalen gehören hieher.

§. 62.

Durch die Verwandlung mancher Substanzen in andere, ohne daß dabei die Gestalt verändert wird,

werden Krystalle übergetragen, die auf dem Wege unmittelbarer Erzeugung nicht entstanden seyn würden. Diese Asterkrystalle zeichnen sich durch gänzlichen Mangel aller krystallinischen Struktur und geringe Härte und Cohärenz aus.

Die Schwefelkieskrystalle aus Sibirien und von Preussisch Minden verlieren oft ihren Schwefelgehalt und wandeln sich allmählig von außen nach innen in Eisenorydhydrat um, so daß endlich Brauneisenstein in Gestalt des Schwefelkieses entsteht. Die Asterkrystalle des Specksteins von Göpfersgrün im Baireuthischen, die von Quarz und Feldspath abstammen, so wie die von Auzig abstammenden Asterkrystalle der Grünerde aus Tyrol, sind auf ähnliche Weise entstanden.

§. 63.

Sämmtliche aus einer Grundgestalt ableitbare Krystalle bilden mit einander ein System, und haben mit einander gleiche Axenverhältnisse. Den vier Grundgestalten (§. 16.) entsprechen vier Krystallsysteme:

I. Tetrahedrisches System. Die hieher gehörigen Krystalle stehen unter dem Gesetze von drei gleich langen, rechtwinkelig sich schneidenden Axen.

II. Pyramidal-System. Es enthält die Krystalle mit drei rechtwinkelig gegen einander stehenden Axen, von denen zwei gleich lang sind, die dritte länger oder kürzer ist.

III. Prismatisches System. Die drei rechtwinkelig gegen einander stehenden Axen sind sämmtlich in ihrem Werthe verschieden.

IV. Hexagonalsystem. Bei den Krystallen dieses Systems sind drei gleich lange Axen vorhanden, die sich unter Winkeln von 60° und 120° schneiden; eine vierte Axe, länger oder kürzer als die übrigen, steht gegen die vorigen rechtwinkelig.

Jedes dieser Systeme zerfällt wieder in die Reihe der homoëdrischen und in die der hemiedrischen Körper.

Zweites Kapitel.
Entwicklung der Krystallsysteme.

Erstes System.

Tesseralsystem.

Erste Abtheilung.

Homoëdrische Körper.

§. 64.

Das Tesseralsystem (Tessularsystem, System der gleichartigen Körper, sphäroëdrisches und isometrisches System) hat das Oktaëder oder den Würfel zur Grundgestalt, je nachdem man die Enden der Axen als Ecken oder als Mittelpunkte der Flächen einer Gestalt annimmt. Sowohl aus dem Würfel als aus dem Oktaëder lassen sich dadurch, daß man die Ecken oder Kanten durch Flächen symmetrisch ersetzt, das Rhomben=Dodekaëder, der Pyramiden=Würfel, das Trapezoëder, das Pyramiden=Oktaëder und der Achtundvierzig=Flächner als einfache Gestalten ableiten.

Die einfachen Gestalten sind 6—8—12—24—48flächig, daher muß die Zahl der Flächen eines zusammengesetzten Krystalls sich stets in diese Zahlen auflösen lassen.

Bei jedem Körper dieses Systems läßt sich ein Würfel denken, der diesen Körper so umschließt, daß sechs

Ecken oder Kanten des Körpers in den Mittelpunkt oder die Mittellinie der Flächen des Würfels eintreffen (umschreibender Würfel). Es läßt sich ferner ein Würfel verzeichnen, dessen Ecken in acht Ecken oder Flächenmittelpunkte des Körpers fallen (umschriebener Würfel), woraus die Lage der Flächen des Körpers gegen die Flächen des umschreibenden oder umschriebenen Würfels bestimmt werden kann. Der umschreibende und umschriebene Würfel stehen stets in paralleler Stellung mit einander. Eben so kann man ein umschreibendes und ein umschriebenes Oktaëder annehmen.

In Fig. 1. und 2. (Taf. I.) bezeichnen a die Ecken des umschreibenden, h die des umschriebenen Würfels. Fig. 1. giebt das Verhalten des Oktaëders, Fig. 2. das des Pentagonal-Dodekaëders zum umschreibenden und umschriebenen Würfel an.

Bei den einfachen Gestalten dieses Systems giebt es nur dreierlei Arten von Ecken: Würfelecken (Fig. 10. h) acht an der Zahl, die Ecken des umschriebenen Würfels; Oktaëderecken (Fig. 10. ω) sechs, die Ecken des umschriebenen Oktaëders; Trapezoëderecken (Fig. 10. k), zwölf, den Mittelpunkten der Flächen eines umschreibenden Rhomben-Dodekaëders entsprechend. Es ergiebt sich daher schon aus der Zahl der Ecken, welche eine einfache Gestalt besitzt, welche Arten von Ecken bei ihr vorhanden sind.

Die normale Stellung aller hieher gehörigen einfachen Gestalten, ist die senkrechte Stellung auf einer Flächenlage des Würfels oder einer Eckenlage des Oktaëders.

40 Zweites Kap. Entwicklung d. Krystallsysteme.

Zum tetrahedralen homoödrischen Systeme gehören folgende Mineralien: Demant, Spinell, Granat, Alkalit, Analzim, Flußspath, Steinsalz, Salmiak, Alaun, Gold, gediegen Silber, Silberglanz, Silberhornerz, Amalgam, gediegen Kupfer, Rothkupfererz, Magnet-eisenstein, Bleiglanz, Zinkblende, gediegen Wismuth, gediegen Spießglanz, Speiskobalt.

§. 65.

Der Würfel (das Hexaeder, Sechseck) Fig. 22. ist ein von sechs Quadraten begränzter Körper, mit acht Ecken und zwölf Kanten, und ein geometrisch einfacher Körper. Alle Flächenwinkel und alle körperlichen Winkel seiner Kanten betragen 90° , und die Flächen, so wie auch die Kanten und Ecken haben nur einfachen Werth. Die Flächenaxen Fig. 3. laufen parallel und sind gleich lang mit den Kanten, die Kantenaxen Fig. 4. mit den Flächendiagonalen. Die Flächenaxe verhält sich zur Kantenaxe wie 1 zur $\sqrt{2}$ und zur Eckenaxe (Fig. 5.) wie $1:\sqrt{3}$. Schneidet man den Würfel durch zwei diagonal gegenüberstehende Ecken (Fig. 6.), so daß der Schnitt längs den Kanten herabgeht, so erhält man ein Parallelogramm, dessen Seiten sich zu einander verhalten, wie $1:\sqrt{2}$.

In der Natur sind bei dem Würfel nicht immer alle Flächen gleich groß, sondern er erhält oft das Ansehen eines Parallelepipediums, aber die Flächen, Kanten und Ecken müssen dessen ungeachtet als gleichwerthig betrachtet werden.

§. 66.

Wenn man die Kanten oder Ecken des Würfels durch Flächen ersetzt, so daß dieselbe Veränderung,

die man an einer Kante oder Ecke vornimmt, an allen Kanten oder Ecken gleichmäßig bewirkt wird, so erhält man die Flächen sämtlicher einfachen Gestalten des Tesseralsystems. Verfolgt man diese Veränderungen gleichmäßig so lange, bis die Würfel Flächen gänzlich verschwunden sind, so ist die abgeleitete Gestalt vollständig.

Nennen wir die Würfelcke h und bezeichnen wir den Antheil, den wir von den drei in ihr zusammenstoßenden Kanten K wegschneiden, durch eine Zahl, so erhalten wir, da drei Punkte die Lage einer Ebene bestimmen, eine Bezeichnungsmethode für die Flächen sämtlicher aus dem Würfel ableitbaren einfachen Körper.

Wenn man sämtliche Kanten durch Flächen ersetzt, so kann an die Stelle jeder Kante (§. 12.) entweder eine Fläche treten, die parallel mit der Kante läuft, wodurch ein zwölfflächiger Körper entsteht, oder jede Kante wird durch zwei Flächen ersetzt, deren gemeinschaftliche Kante parallel mit der weggenommenen Kante läuft, und der daraus hervorgehende Körper muß von 24 Flächen begränzt seyn. In beiden Fällen wird die eine ursprüngliche Kante des Würfels ganz weggenommen und erhält das Zeichen ∞ , das man auch bei der Bezeichnung weglassen kann.

Bei Fig. 15. ersetzen wir die Kante $h h$ durch die Fläche, deren Begränzungslinien durch $**$ bezeichnet sind, sie nimmt von den beiden übrigen in h zusammenstoßenden Würfelkanten gleich große Theile h^* weg, und die Bezeichnung für diese Fläche würde seyn $1 h^{\infty} 1$ oder $1 h 1$. Werden alle Kanten auf diese Weise durch Flächen ersetzt, und dieselben gleichmäßig vergrößert,

bis der Würfel verschwunden ist, so entsteht das Rhomben-Dodekaëder Fig. 16.

Bei Fig. 17. ersetzen wir die Kante hh durch zwei Flächen, deren Begrenzungslinien durch $**$ und $††$ bezeichnet sind. Die Fläche $**$ nimmt von der Würfelfkante $h†$ einen Theil, die Kante $h*$ ganz weg, und für diese Fläche wäre die Bezeichnung $1h^2$ oder $1h^2$. Eben so muß sich die Fläche $††$ verhalten, und der aus diesen Flächen entstehende Körper ist der Pyramidenwürfel Fig. 18.

Wenn man sämtliche Ecken des Würfels durch Flächen ersetzt, so sind folgende Fälle möglich:

a) jede Ecke wird durch eine Fläche ersetzt, die alsdann von allen drei Kanten gleich große Theile wegnimmt, und deren Bezeichnung $1h^1$ ist. In Fig. 7. wird von K der Theil hm genommen, und es entsteht durch dieses Schnittgesetz das Oktaëder Fig. 8.

b) jede Ecke wird von drei Flächen ersetzt, deren jede von zwei Kanten gleiche Theile, von der dritten weniger wegnimmt, wie in Fig. 8. die Fläche mm^* , wo $h* = 1$; hm und $hm' = 2$. Die Bezeichnung ist $2h^2$. Der daraus hervorgehende Körper ist das Trapezoëder Fig. 10., das von 24 Flächen begrenzt seyn muß.

c) jede Ecke wird von drei Flächen ersetzt, deren jede von zwei Kanten gleiche Theile, von der dritten mehr wegnimmt. In Fig. 11. nimmt die Fläche rrr von einer Kante den Theil $hm = 2$, von den beiden andern nur $hr = 1$ weg, und die Bezeichnung ist in diesem Falle $1h^1$. Der daraus hervorgehende Körper ist das Py

ramiden=Oftaëder Fig. 12., das ebenfalls von 24 Flächen begränzt seyn muß.

d) jede Ecke wird durch sechs Flächen ersetzt, indem um jede Kante sich zwei Flächen herumlagern, die von allen drei Kanten ungleiche Theile wegnehmen. In Fig. 13. nimmt die Fläche mrs den Theil $hr = 1$; $hs = 2$ und $hm = 3$ weg, und die zu derselben Kante gehörige Nebenfläche würde $m\ddagger$ seyn, wo $h\ddagger = 1$; $h\ddagger = 2$ und $hm = 3$. Die Bezeichnung wäre hier $1h3$ und die daraus entspringende einfache Gestalt der Achtundvierzig=Flächner Fig. 14.

Bei allen Ableitungen, wo mehr als eine Fläche an die Stelle einer Ecke oder Kante tritt, lassen sich verschiedene Schnittgesetze z. B. $2h2$; $1h6$ u. denken, ohne daß die Symmetrie verletzt würde, wenn nur für alle Flächen dasselbe Schnittgesetz herrscht, und man findet sie auch in der Natur, aber diejenigen nach niedrigen Zahlen sind die gewöhnlichsten, und auch hier sind die ganz einfachen wie $1:2$ oder $1:3:4$ wiederum in der Natur häufiger anzutreffen, wie $1:6$ oder $2:7$ u.

§. 67.

Das Oftaëder (Achtflach) Fig. 8. ist ebenfalls ein einfacher geometrischer Körper und wird von acht gleichseitigen Dreiecken begränzt, hat sechs vierkantige, gleichwerthige Ecken und zwölf gleichwerthige Kanten. Seine Eckenagen (vergl. Fig. 1.) sind die Flächenagen des Würfels, seine Flächenagen die Eckenagen desselben, und seine Kanten laufen parallel mit den Kantenagen des Würfels. Der umschreibende Würfel wird erhalten, wenn man an alle Ecken des Oftaëders Flächen legt, welche rechtwinkelig gegen die Eckenagen stehen,

54 Zweites Kap. Entwicklung d. Krystallsysteme.

so daß die Eckenage des Oktaeders zur Flächenage des Würfels wird. Der umschriebene Würfel (h h in Fig. 1.) erfolgt, wenn man die Mittelpunkte der Oktaederflächen als Würfecken betrachtet und sie durch Linien verbindet.

Die Oktaederkante verhält sich zur Kante des umschreibenden Würfels $= \sqrt{2} : \sqrt{4}$; zur Kante des umschriebenen $= \sqrt{18} : \sqrt{4}$ und die Kante des umschreibenden Würfels verhält sich zu der des umschriebenen $= 3 : 1$.

Die Oktaederflächen werden beim Würfel als Abstumpungsflächen der Ecken, gegen alle angränzenden Flächen gleich geneigt erscheinen, und der Mittelkrystall des Würfels und Oktaeders (Kubooktaeder) Fig. 20. wird von acht gleichseitigen Dreiecken und sechs Quadraten begränzt. Fig. 19 — 21. stellt die verschiedenen Verbindungen des Würfels und Oktaeders dar.

Die ebenen Winkel des Oktaeders betragen alle 60° , die körperlichen Kantenwinkel $109^\circ 28' 16''$ und die Neigung der Oktaeder- und Würfel Flächen gegen einander $125^\circ 15' 22''$.

§. 68.

Um aus dem Oktaeder die übrigen Körper des tetrahedralen Systems abzuleiten, ersetzt man die Kanten oder Ecken durch Flächen, den Gesetzen der Symmetrie gemäß. Nennen wir die Oktaederecke ω und bezeichnen die, von den vier in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten weggenommenen Verhältnistheile mit Zahlen, wo wir die sich gegenüberstehenden Kantenabschnitte (z. B.



* ω * oder $\begin{matrix} * \\ \omega \\ * \end{matrix}$) durch gegenüberstehende, die nebeneinander stehenden (z. B. * ω oder ω *) durch nebeneinander stehende Zahlen angeben, so erhalten wir eine Bezeichnungsmethode für die einzelnen Flächen, wie bei dem Würfel. Da drei Punkte hinreichen, um die Lage einer Ebene zu bestimmen, so braucht man nur die Abschnitte dreier Kanten zu bezeichnen, doch ist es übersichtlicher, auch den vierten Schnitt anzugeben.

Ersetzt man die Kanten jede durch eine Fläche, nach dem Schnittgesetz $1\omega_2\infty$ oder $1\omega_2$, so erfolgt das Rhomben=Dodekaëder.

Ersetzt man jede Kante durch zwei Flächen, so erhält man für jede Fläche die Schnittgesetze $2\omega_6\infty$; $3\omega_{12}\infty$ u. Gibt das Pyramiden=Oftaëder.

Die Ecken lassen sich jede durch eine, vier oder acht Flächen ersetzen, und es müssen darnach sechs-, vier- und zwanzig- oder achtundvierzigflächige Krystalle entstehen.

Nach dem Schnitt $1\omega_1$, der von allen Kanten gleich große Theile wegnimmt, entsteht der Würfel.

Nimmt man von zwei gegenüberstehenden Kanten gleichviel, von den beiden andern verschiedene Theile, z. B. $6\omega_3^2$ oder $6\omega_4^3$ u. weg, so bezeichnet dies die Flächen des Pyramiden=Würfels.

Von zwei neben einander stehenden Kanten gleiche Theile weggenommen, von den beiden andern einen ver-

56 Zweites Kap. Entwicklung d. Krystallsysteme.

schiedenen Theil, z. B. $1\omega_2^1$, $1\omega_3^1$ u., giebt das Trapezöder.

Lagern sich um jede Kante zwei Flächen, so nimmt jede Fläche von allen vier Kanten ungleiche Theile weg, z. B. $5\omega_{15}^6$; $3\omega_{12}^4$, und es erfolgt ein Acht und vierzig-Flächner.

§. 69.

Das Rhomben-Dodekaöder Fig. 16. (einfantiges Tetragonal-Dodekaöder Mohs, Granatoöder Weiß, Granatdodekaöder Werner, Kautenzwölfflach v. Kaumer) wird von zwölf gleichen rautenförmigen Flächen begränzt, hat vier und zwanzig gleichwerthige Kanten, sechs vierkantige und acht dreikantige Ecken. Die Ngen durch die vierkantigen Ecken gelegt, sind die Flächenagen des Würfels, und die dreikantigen Ecken sind als Eckenagen eines eingeschlossenen Würfels zu betrachten, für welchen die kurzen Diagonalen der Flächen die Kanten bilden. Die langen Flächendiagonalen geben die Kanten eines eingeschlossenen Oктаeders. Die körperlichen Kantenwinkel betragen 120° , die ebenen Winkel $109^\circ 28' 16''$ und $70^\circ 31' 44''$.

Die Kante des umschreibenden Würfels $= 4$ genommen, so wird die Kante des umschriebenen Würfels $= 2$ und die Kante des Dodekaeders $= \sqrt{3}$. Die lange Flächen-Diagonale verhält sich zur kurzen $= \sqrt{8} : 2$. Stellt man das Rhomben-Dodekaöder aufrecht auf eine durch die vierkantigen Ecken gelegte Nge (normale Stellung), so ist die horizontale Pros

jection ein Quadrat; aufrecht auf eine Aye durch die dreikantigen Ecken, ein regelmäßiges Hexagon.

Die Verbindungen des Rhomben-Dodekaeders mit dem Würfel Fig. 23 — 24. geben Rhomben-Dodekaeder mit abgestumpften vierkantigen Ecken (wenn das erstere vorwaltend ist), oder Würfel mit abgestumpften Kanten (wenn der letztere vorwaltet). Das Oктаeder erscheint beim Rhomben-Dodekaeder als Abstumpfung der dreikantigen Ecken Fig. 26. und letzteres bei ersterem Fig. 25. als Abstumpfung der Kanten.

§. 70.

Der Pyramiden = Würfel Fig. 18. (hexaëdrisches Trigonal = Icositetraeder Mohs, Tetraëdis = Hexaeder Naumann, Hexaëdrisch = pyramidales = Icositetraeder Breithaupt) wird von vier und zwanzig gleichschenkeligen Dreiecken begrenzt, hat 36 Kanten und 14 Ecken. Man kann ihn als Würfel betrachten, dessen Flächen durch eine flache vierflächige Pyramide ersetzt sind und er entsteht aus demselben durch Zuspärfung der Kanten.

Die Kanten sind zweierleiwerthig: 12 ($h h$ in Fig. 18.) entsprechen den Kanten eines eingeschlossenen Würfels; 24 (ωh in Fig. 18.) laufen je vier in den Ecken eines eingeschlossenen Oктаeders zusammen. Acht Ecken (Würfelsecken) sind sechskantig und vereinigen Kanten von beiderlei Werthe, sechs (Oктаederecken) sind vierkantig und einerleikantig. Die horizontale Projection ist ein Achteck, mit abwechselnd stumpfern Winkeln.

58 Zweites Kap. Entwicklung d. Krystallsysteme.

Es sind bis jetzt drei Abänderungen bekannt:

a) aus $1h3$ oder $6\omega 3$ ableitbar. Die körperlichen Winkel der Kanten hh betragen $126^\circ 52' 12''$, der Kanten ωh $154^\circ 9' 29''$; die ebenen Winkel bei ω $86^\circ 59'$, bei h $46^\circ 30\frac{1}{2}'$. Die Kante des umschreibenden Würfels verhält sich zu der des umschriebenen wie $4:3$.

b) aus $1h2$ oder $6\omega 2$ ableitbar. Die körperlichen Winkel der Kanten hh , so wie auch die der Kanten ωh betragen $143^\circ 7\frac{3}{4}'$; die ebenen Winkel bei ω $83^\circ 37\frac{1}{4}'$; bei h $48^\circ 11\frac{1}{2}'$. Die Kante des umschreibenden Würfels verhält sich zu der des umschriebenen wie $3:2$.

c) aus $2h3$ oder $15\omega 3$ ableitbar. Die körperlichen Winkel der Kanten hh betragen $157^\circ 22\frac{3}{4}'$; der Kanten ωh $133^\circ 48\frac{3}{4}'$; die ebenen Winkel bei ω $79^\circ 31\frac{1}{2}'$; bei h $50^\circ 14\frac{1}{4}'$. Die Kante des umschreibenden Würfels verhält sich zu der des umschriebenen wie $5:3$.

Einige andere Schnittgesetze finden sich noch bei hemiedrischen Gestalten.

Die Verbindungen des Pyramiden-Würfels mit dem Würfel geben, je nachdem der erstere oder der letztere vorwiegend auftritt, Pyramidenwürfel mit abgestumpften vierkantigen Ecken (Fig. 28.), oder Würfel mit zugespitzten Kanten (Fig. 27.).

Die Flächen des Oktaeders erscheinen beim Pyramiden-Würfel als Abstumpfungen der sechskantigen Ecken (Fig. 30.), die Flächen des Pyramiden-Wür-

fels beim Oktaëder als vierflächige Zuspizung der Ecken auf den Kanten ruhend (Fig. 29. 31.).

Das Rhomben-Dodekaëder tritt beim Pyramiden-Würfel als Abstumpfung der Würfelfanten (Fig. 32.), letzterer bei erstem als vierflächige Zuspizung der vierkantigen Ecken, auf den Flächen ruhend auf (Fig. 33.).

§. 71.

Das Trapezoëder Fig. 10. (Leucitoëder und Leucitoide Weiß; zweikantiges Tetragonal-Zfositetraëder Mohs; trapezoidales Zfositessaraëder Breithaupt, Trapez-Zfositetraëder Naumann, Leuzit v. Kauer) ist ein von 24 symmetrischen Trapezen umschlossener Körper, hat 48 Kanten und 26 Ecken. Man kann es als achtflächige Doppelpyramide mit vierflächig zugespizten Polecken betrachten.

Die Kanten sind zweierleiwerthig, 24 ($k\omega$) laufen je vier in den Oktaëderecken zusammen, 24 (hk) je drei in den Würfecken. Die Ecken haben dreierlei Werth, acht dreikantige (h) entsprechen den Ecken eines eingeschlossenen Würfels; sechs vierkantige (ω), wo alle Kanten gleichen Werth haben, den Ecken eines eingeschlossenen Oktaëders, zwölf vierkantige (k), wo die Kanten zweierwerthig sind, den Mittelpunkten der Flächen eines umschreibenden Rhomben-Dodekaëders. Die horizontale Projection ist ein Achteck mit abwechselnd stumpfern Winkeln. Jede Fläche läßt sich nach der geneigten Diagonale in zwei ungleichseitige aber gleiche Dreiecke theilen, durch eine Theilung nach der horizontalen Diagonale erhält man zwei gleichschenkelige aber unter sich ungleiche Dreiecke.

60 Zweites Kap. Entwickelung d. Krystallsysteme.

Es sind mehrere Abänderungen des Trapezoëders bekannt, doch nur die erste ist gewöhnlich.

a) aus $2 \overset{1}{h} 2$ oder $1 \overset{1}{\omega} 3$ ableitbar. Die körperlichen Winkel der in den Oktaëderecken zusammenlaufenden Kanten betragen $131^{\circ} 48' 37''$; die der andern Kanten $146^{\circ} 26' 34''$; die ebenen Winkel bei h $117^{\circ} 2' 8''$, bei k $82^{\circ} 15' 3''$, bei ω $78^{\circ} 27' 46''$. Die horizontale Diagonale verhält sich bei dieser Abänderung zur geneigten, wie $\sqrt{32} : \sqrt{27}$, und die Kante des umschreibenden Würfels zu der des umschriebenen, wie $2 : 1$.

b) aus $3 \overset{1}{h} 3$ oder $1 \overset{1}{\omega} 2$ (Leucitoid). Die körperlichen Winkel der Kanten ωk betragen $144^{\circ} 54' 11''$, der Kanten $h k$ $129^{\circ} 31' 16''$; die ebenen Winkel bei h $112^{\circ} 53' 7''$, bei k $81^{\circ} 25' 37''$, bei ω $84^{\circ} 15' 39''$. Die Kante des umschreibenden Würfels zu der des umschriebenen verhält sich wie $3 : 2$. Romé de l'Isle und Haüy glauben die Flächen dieses Trapezoëders beim Demant gefunden zu haben.

c) aus $3 \overset{2}{h} 3$ oder $1 \overset{1}{\omega} 5$. Die körperlichen Winkel der Kanten ωk betragen $121^{\circ} 58 \frac{1}{2}'$; der Kanten $h k$ $160^{\circ} 15'$; die ebenen Winkel bei h 119° , bei k $84^{\circ} 27 \frac{1}{2}'$, bei ω $72^{\circ} 4 \frac{2}{3}'$. Die Kante des umschreibenden Würfels verhält sich zu der des umschriebenen wie $7 : 3$.

d) aus $6 \overset{1}{h} 6$ oder $5 \overset{5}{\omega} 7$. Die körperlichen Winkel der Kanten ωk betragen $161^{\circ} 30' 34''$, der Kanten $h k$ $110^{\circ} 5' 50''$; die ebenen Winkel bei h $104^{\circ} 49' 6''$, bei k $83^{\circ} 21' 55''$, bei ω $88^{\circ} 27' 4''$. Die Kante

des umschreibenden Würfels verhält sich zu der des umschriebenen wie 4:3.

Außerdem scheinen auch noch $7h7 \begin{matrix} 2 \\ \left(5 \omega 9 \right) \\ 9 \end{matrix}$ und in hemiedrischen Gestalten auch $4h4 \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}$ oder $3\omega5$ und noch andere Schnittgesetze vorzukommen. (Vernhardi Beitr. zur nähern Kenntniß der regelmäßigen Krystallformen p. 18.).

Die Verbindungen des Trapezoëders mit dem Würfel stellen Würfel mit dreiflächiger Zuspitzung der Ecken, die auf den Flächen ruht (Fig. 34.), oder Trapezoëder mit abgestumpften Oктаëderecken (Fig. 35.) dar. Die Verbindungen mit dem Oктаëder geben Oктаëder mit vierflächiger Zuspitzung der Ecken, die auf den Flächen ruht (Fig. 36.), oder Trapezoëder mit abgestumpften dreikantigen Ecken (Fig. 37.).

Bei dem Rhomben-Dodekaëder erscheint die erste Abänderung als Abstumpfung der Kanten (Fig. 38.), die übrigen Abänderungen als vierflächige Zuspitzung der vierkantigen Ecken, die auf den Kanten ruht (Fig. 41.). Die Flächen des Rhomben-Dodekaëders treten bei allen Abänderungen des Trapezoëders als Abstumpfungen derjenigen vierkantigen Ecken auf, in denen Kanten von zweierlei Werth zusammenstoßen (Fig. 39.).

Der Pyramiden-Würfel und das Trapezoëder liegen so gegen einander, daß die Flächen des erstern den längern Kanten des letztern entsprechen, und entweder als Abstumpfungen dieser Kanten (Fig. 40.), oder als vierflächige Zuspitzung der Oктаëderecken, die auf den Kanten ruht (Fig. 42.), beim Trapezoëder zum Vor-

schein kommen. Ist der Pyramidenwürfel die Hauptgestalt, so sind die Flächen des Trapezoëders als dreiflächige Zuspitzung der sechskantigen Ecken desselben ähnlich gelagert, wie beim Würfel (Fig. 43.).

§. 72.

Das Pyramiden = Oктаëder Fig. 12. (Oktädrisches Trigonal = Zfositetraëder Mohs, oktädrisches pyramidales Zfositetraëder Breithaupt, Pyramiden = Achtflach v. Raumer, Triakisoktaëder Naumann) wird, wie der Pyramiden = Würfel, von 24 gleichschenkeligen Dreiecken begrenzt, und besitzt auch, wie dieser, 36 Kanten und 14 Ecken, aber sechs Ecken (ω) sind achtkantig, acht (h) nur dreikantig. Man kann es als ein Oктаëder betrachten, wo jede Fläche durch eine flache dreiseitige Pyramide ersetzt ist, oder als ein Rhombendodekaëder, dessen Flächen nach der langen Diagonale getheilt sind. Es kommt selten vollständig in der Natur vor, sondern fast nur in Verbindung mit andern tesseralen Gestalten.

Die Kanten besitzen zweierlei Werth: zwölf ($\omega\omega$) entsprechen den Kanten eines eingeschlossenen Oктаëders, vier und zwanzig ($h\omega$) laufen je drei in den Würfelcken zusammen und liegen ähnlich den Kanten eines eingeschlossenen Rhomben = Dodekaëders. Die horizontale Projection ist, wie die des Oктаëders, ein Quadrat.

Es läßt sich aus dem Würfel durch dreiflächige Zuspitzung der Ecken, die Zuspitzungsflächen auf den Kanten ruhend, herleiten, wo der Schnitt von einer Kante mehr wegnimmt, als von den beiden übrigen.

Es giebt mehrere Abänderungen, von denen folgende die gewöhnlichsten sind:

a) aus $1 h 1$ oder $3 \omega \infty$. Die körperlichen Winkel der Kanten $\omega \omega$ betragen $141^{\circ} 3' 27''$, der Kanten $h \omega$ $152^{\circ} 44' 2''$, die ebenen Winkel bei h $118^{\circ} 4' 10''$, bei ω $30^{\circ} 57' 55''$. Die Kante des umschreibenden Würfels verhält sich zu der des umschriebenen wie 5:2.

b) aus $2 h 2$ oder $5 \omega \infty$ ableitbar. Die körperlichen Winkel der Kanten $\omega \omega$ betragen $129^{\circ} 31' 19''$, der Kanten ωh $162^{\circ} 39' 30''$; die ebenen Winkel bei h $119^{\circ} 14'$, bei ω $30^{\circ} 23'$. Die Kante des umschreibenden Würfels verhält sich zu der des umschriebenen wie 8 zu 3.

c) aus $1 h 1$ oder $2 \omega \infty$ ableitbar. Die körperlichen Winkel der Kanten $\omega \omega$ betragen $153^{\circ} 28' 30''$, der Kanten ωh $142^{\circ} 8' 10''$, die ebenen Winkel bei h $116^{\circ} 10' 44''$, bei ω $31^{\circ} 54' 38''$. Die Kante des umschreibenden Würfels verhält sich zu der des umschriebenen wie 7 zu 3.

Bei dem Würfel erscheint das Pyramiden-Octaëder als dreiflächige Zuspitzung der Ecken, die auf den Kanten ruht (Fig. 44.), der Würfel bei ihm als Abstumpfung der achtkantigen Ecken (Fig. 45.).

Das Octaëder tritt mit dem Pyramiden-Octaëder durch Zuschärfung seiner Kanten (Fig. 46.), letzteres mit ersterem durch Abstumpfung der dreikantigen Ecken (Fig. 47.) in Verbindung.

Die Abstumpfung der Oктаëderkanten beim Pyramiden-Oктаëder (Fig. 48.) rührt von den Flächen des Rhomben-Dodekaëders, die dreiflächige Zuspitzung der dreikantigen Ecken, die auf den Flächen ruht (Fig. 49.), bei letzterem vom Pyramiden-Oктаëder her.

Der Pyramiden-Würfel zeigt sich beim Pyramiden-Oктаëder als vierflächige Zuspitzung der Oктаëderecken, die auf den langen Kanten ruht (Fig. 50.), letzteres bei ersterem als dreiflächige Zuspitzung der sechskantigen Ecken, auf den langen Kanten ruhend (Fig. 51.).

Das Trapezöeder kommt beim Pyramiden-Oктаëder als vierflächige Zuspitzung der achtkantigen Ecken, auf den kurzen Kanten ruhend (Fig. 52.), letzteres bei ersterem als Zuschärfung der Trapezöederecken, auf den kurzen Kanten ruhend (Fig. 53.), zum Vorschein.

§. 73.

Der Achtundvierzig-Flächner Fig. 14. (Pyramiden-Granatoëder Weiß, Tetrafontaoftaëder Mohs, Heptakisoktaëder Naumann, Trigonalpyeder Hausmann) hat acht und vierzig ungleichseitige Dreiecke zu Begrenzungsflächen, zwei und siebenzig Kanten und sechs und zwanzig Ecken.

Die Kanten haben dreierlei Werth: 24 (x) in Fig. 14.) liegen je acht in den Durchschnittebenen durch die Mitte der Flächen eines umschreibenden Würfels; 24 (y) liegen paarweis über den Kanten des eingeschlossenen Würfels; 24 (z) liegen ähnlich wie die Kanten eines eingeschlossenen Rhomben-Dodekaëders und verbinden die Oктаëderecken mit den Würfecken.

Von den 26 Ecken entsprechen acht den Ecken eines eingeschlossenen Würfels, in ihnen laufen Kanten von dreierlei Werth zusammen; sechs entsprechen den Ecken eines eingeschlossenen Oktaeders und sind die Vereinigungspunkte von acht zweierleiwerthigen Kanten; zwölf Ecken, den Flächenmittelpunkten eines umschreibenden Rhomben-Dodekaeders entsprechend, sind vierkantig und die Zusammenstoßungs-Punkte von zweierleiwerthigen Kanten.

Man kann den Achtundvierzig-Flächner als Oktaeder betrachten, wo jede Fläche durch eine sechsflächige Pyramide ersetzt ist und seine Flächen sich in acht Flächensysteme vertheilen; oder als Rhomben-Dodekaeder, jede Fläche durch eine vierflächige Pyramide ersetzt, und dann enthält er zwölf vierflächige Flächensysteme; oder auch als Würfel, jede Fläche durch eine achtflächige Pyramide ersetzt, und daher mit sechs achtflächigen Flächensystemen. Die horizontale Projection ist immer ein Achteck mit abwechselnd stumpferen und weniger stumpferen Winkeln. Er kommt selten vollständig in der Natur vor und erscheint häufig nur hemiedrisch.

Der Achtundvierzig-Flächner läßt sich aus dem Würfel darstellen, wenn man jede Ecke durch sechs Flächen ersetzt, die sich paarweise um die Kanten lagern, und aus dem Oktaeder, wenn jede Ecke durch acht Flächen ersetzt wird, die paarweise an die Kanten vertheilt sind. Bei beiden entsteht die einzelne Fläche durch einen Schnitt, der von allen in der Ecke zusammenlaufenden Kanten einen verschiedenen Theil wegnimmt. Es sind mehrere Abänderungen in der Natur bekannt; die folgenden drei kommen am häufigsten vor:

66 Zweites Kap. Entwickelung d. Krystallssysteme.

a) aus $1 h 4$ oder $5 \omega 15$ entstanden. Die ebenen Winkel bei k betragen $85^{\circ} 50' 23''$; bei h $54^{\circ} 21' 34''$; bei ω $39^{\circ} 48' 3''$. Die körperlichen Winkel der Kanten z $162^{\circ} 14' 50''$; von x $154^{\circ} 47' 28''$; von y $144^{\circ} 2' 58''$. Die Kante des umschriebenen Würfels verhält sich zu der des umschreibenden wie 4 zu 7. Die Winkel der horizontalen Projection betragen $126^{\circ} 52'$ und $143^{\circ} 8'$.

b) aus $3 h 15$ oder $3 \omega 12$ entstanden. Die ebenen Winkel bei k betragen $87^{\circ} 34' 49''$; bei h $53^{\circ} 46' 42''$; bei ω $38^{\circ} 38' 29''$. Die körperlichen Winkel der Kanten z $152^{\circ} 20' 22''$; von x $160^{\circ} 32' 13''$; von y $152^{\circ} 20' 22''$. Die Kante des umschriebenen Würfels verhält sich zu der des umschreibenden wie 5:9. Die Winkel der horizontalen Projection betragen $136^{\circ} 22' 20''$ und $133^{\circ} 37' 40''$.

c) aus $2 h 6$ oder $6 \omega 30$ entstanden. Die ebenen Winkel bei k betragen $86^{\circ} 56' 25''$; bei h $56^{\circ} 15' 4''$; bei ω $36^{\circ} 48' 31''$. Die Winkel der Kanten z $158^{\circ} 12' 48''$; von x $148^{\circ} 59' 50''$; von y $158^{\circ} 12' 48''$. Die Kante des umschriebenen Würfels verhält sich zu der des umschreibenden wie 1:2. Die Winkel der horizontalen Projection betragen $157^{\circ} 42' 50''$ und $112^{\circ} 17' 10''$.

Außerdem sind noch $1 h 7$; $3 h 11$ beim Flußspathe (G. Rose in Poggend. Annal. d. Phys. u. Chemie, 12. B. 3. St. p. 483.) und in hemiedrischen Gestalten auch $1 h 8$, $14 h 35$, $5 h 15$ (Bernhardi's Beiträge

p. 20.) bemerkt worden, und es ist wahrscheinlich, daß noch viele andere Schnittgesetze vorkommen.

Die Verbindungen des Achtundvierzig = Flächner mit dem Würfel geben, (Fig. 55.) wenn ersterer vorwaltet, Achtundvierzig = Flächner mit abgestumpften Oктаэдереcken, oder, (Fig. 54.) wenn letzterer vorwaltet, Würfel mit sechsflächiger Zuspitzung der Ecken.

Die Verbindungen mit dem Oктаэдер: Achtundvierzig = Flächner mit abgestumpften Würfelecken (Fig. 56.), oder Oктаэдер mit achtflächiger Zuspitzung der Ecken (Fig. 57.).

Die Flächen des Rhomben = Dodekaэders treten beim Achtundvierzig = Flächner als Abstumpfung der vierkantigen Ecken (Fig. 58.), die Flächen dieses bei jenem (Fig. 59.) als Zuschärfungen der Kanten auf.

Der Pyramiden = Würfel erscheint beim Achtundvierzig = Flächner als vierflächige Zuspitzung der Oктаэдереcken auf den mit x bezeichneten Kanten ruhend (Fig. 60.), dieser bei jenem als sechsflächige Zuspitzung der Würfelecken (Fig. 61.).

Die Verbindungen des Trapezoэders mit dem Achtundvierzig = Flächner werden verschieden erscheinen, je nachdem sich, bei den verschiedenen Abänderungen dieser Gestalten, die Kanten der eingeschlossenen Würfel zu einander verhalten. Die Flächen der Trapezoэder bilden Ebenen, welche von den mit z bezeichneten Kanten der Achtundvierzig = Flächner mehr oder weniger abschneiden, und werden daher hier entweder als Abstumpfung dieser Kanten (Fig. 62.), oder als dreiflächige Zuspitzung der Würfelecken, auf diesen Kanten ruhend (Fig. 63.), oder als vierflächige Zuspitzung der Oктаэдереcken (Fig. 64.), ebenfalls auf diesen Kanten

ruhend, sich zeigen. Der erste Fall tritt ein, wenn bei beiden Gestalten das Verhältniß der Kanten der umschreibenden und umschriebenen Würfel sich gleich ist, wie z. B. bei dem Trapezoëder $2 h 2$ und dem Achtundvierzig-Flächner $2 h 6$, wo bei beiden sich die Kanten des umschreibenden Würfels zum umschriebenen wie $2:1$ verhalten. Der zweite Fall tritt ein, wenn die Kante des eingeschlossenen Würfels beim Trapezoëder minder lang ist, als beim Achtundvierzig-Flächner, z. B. bei Verbindung von $3 h 3$ mit $1 h 4$. Bei $3 h 3$ verhalten sich die Würfelfanten wie $7:3$, bei $1 h 4$ wie $7:4$. Der dritte Fall wird stattfinden, wenn die Kante des eingeschlossenen Würfels beim Trapezoëder länger ist, wie z. B. bei Verbindung von $3 h 3$ mit $2 h 6$, wo bei $3 h 3$ die Würfelfanten sich wie $3:2$ bei $2 h 6$ wie $2:1$ zu einander verhalten.

Ist das Trapezoëder die vorwaltende Gestalt, so erscheinen die Flächen des Achtundvierzig-Flächners im ersten und zweiten Falle als vierflächige Zuspitzung der Trapezoëderecken, auf den Flächen ruhend (Fig. 65.); im dritten Falle als sechsflächige Zuspitzung der Würfelcken (Fig. 66.).

So wie die Trapezoëderflächen sich gegen die mit z bezeichneten Kanten des Achtundvierzig-Flächners verhalten, eben so verhalten sich die Flächen des Pyramiden-Oktäeders gegen die mit y bezeichneten Kanten. Ragen die Ecken des eingeschlossenen Würfels über die Oktäederebene bei beiden Grundgestalten gleich stark hervor (wenn der eingeschlossene Würfel bei beiden gleich

groß ist), so würden, wenn diese Verbindung in der Natur gefunden würde, die y Kanten abgestumpft erscheinen (Fig. 67.); treten sie beim Achtundvierzig²-Flächner stärker hervor (z. B. bei Verbindung von $1 h 4$ mit $1 h 1$), so bilden die Flächen des Pyramiden-Oktäeders eine dreiflächige Zuspitzung dieser Ecken, die auf den mit y bezeichneten Kanten ruht (Fig. 68.), im entgegengesetzten Falle müßten sie als Zuschärfungsflächen der Trapezoiderecken (Fig. 69.) zum Vorschein kommen. Ist aber das Pyramiden-Oktäeder die vorwaltende Gestalt, so werden im ersten und zweiten Falle die Flächen des Achtundvierzig-Flächners als achtflächige Zuspitzung der Oktäederecken (Fig. 70.), im letztern Falle als Zuschärfungen der kürzern Kanten (Fig. 71.) erscheinen.

 Zweite Abtheilung.

Hemiëdrische Körper.

§. 74.

Unter den Körpern des Tesseralsystems sind nur das Oktäeder, der Pyramiden-Würfel, das Trapezoider, das Pyramiden-Oktäeder und der Achtundvierzig-Flächner geeignet, durch Vergrößerung der Hälfte oder eines Viertheils ihrer Flächenzahl bis dahin, wo die andere Hälfte oder die übrigen drei Viertheile verschwinden, neue symmetrische Körper darzustellen.

Es gehören wenigstens vier Flächen dazu, um einen Raum allseitig zu umschließen, deshalb kann der Würfel

70 Zweites Kap. Entwicklung d. Krystallsysteme.

nicht hemiëdrisch vorkommen. Das Rhomben-Dodekaëder ist der Hemiëdrie unfähig, weil sich aus sechs Flächen desselben keine Gestalt darstellen läßt, welche drei gleich lange, sich rechtwinkelig kreuzende Achsen besitzt.

Als Beispiele des Vorkommens hemiëdrisch tetraëdraler Körper dienen Helvin, Boracit, Fahlerz, Schwefelkies und Glanzkohlent.

§. 75.

Das Oktaëder giebt durch Wachsen der abwechselnden nicht parallelen Flächen das Tetraëder. Man stelle das Oktaëder aufrecht auf eine seiner Kantenagen (Taf. IV. Fig. 72. 73.), so werden vier Flächen desselben parallel mit dieser Kantenage laufen, die vier übrigen, je zwei und zwei, derselben zugeneigt seyn. Man unterscheide ferner bei dieser Stellung eine vordere und eine hintere Seite und vergrößere zwei geneigte Flächen der vordern Seite mit zwei der Aze parallelen Flächen der hintern Seite, bis die übrigen vier Flächen verschwinden: so entsteht ein Tetraëder.

In Fig. 72. sind $\omega\omega\omega'$ die der Aze parallelen Flächen der vordern, $\omega s\omega'$ die der hintern Seite; $\omega\omega\omega$ und $\omega\omega'\omega'$ sind die geneigten Flächen der vordern, und $s\omega'\omega'$ nebst $s\omega\omega$ die der hintern Seite. Es müssen nun $\omega\omega\omega'$ und $\omega\omega\omega$ der vordern und $s\omega'\omega'$ der hintern Seite so weit vergrößert werden, bis das Tetraëder entsteht. Hier entspricht die Tetraëderfläche $h h' h'$ der Oktaëderfläche $\omega\omega'\omega'$; die Tetraëderfläche $h^* h' h'$ der Oktaëderfläche $\omega\omega\omega$, und $h h^* h'$ den Flächen $s\omega'\omega$.

Man kann aber auch (Fig. 73.) diejenigen Flächen, die wir bei dieser Ableitung haben verschwinden lassen, als diejenigen auswählen, welche durch ihr Wachsthum die andern verdrängen, und es muß daraus ebenfalls ein

Tetraëder entstehen. Diese beiden, aus einem Oktaëder ableitbaren Tetraëder kann man in ihren Verhältnissen zu einander betrachten wie rechts und links.

§. 76.

Das Tetraëder (Taf. IV. Fig. 82.) ist ein einfacher geometrischer Körper, der von vier gleichseitigen Dreiecken begränzt wird und dessen körperliche Winkel $70^{\circ} 31' 44''$ betragen. Seine sechs Kanten entsprechen den Flächendiagonalen eines umschreibenden Würfels und seine Kantenagen dessen Flächenagen. Die Eckenagen des Würfels laufen aus einer Tetraëderecke in den Mittelpunkt der gegenüberstehenden Fläche.

Die Tetraëderflächen erscheinen beim Würfel als Abstumpfungen der abwechselnden Ecken (Fig. 74.); der Mittelkry stall zwischen Tetraëder und Oktaëder ist ein Tetraëder mit abgestumpften Ecken (Fig. 76.), und bei allen übrigen Körpern des tesserale Systems bilden die Tetraëderflächen Abstumpfungen der abwechselnden Würfecken.

Die Würfelflächen geben beim Tetraëder Abstumpfungen der Kanten (Fig. 75.); die Flächen des Rhomben=Dodekaëders dreiflächige Zuspizung der Ecken, auf den Flächen ruhend (Fig. 77.); die Flächen des Pyramiden=Würfels sechsflächige Zuspizung der Ecken (Fig. 78.); die Flächen des Trapezöders Zuschärfungen der Kanten und dreiflächige Zuspizung der Ecken, die auf den Kanten ruht (Fig. 79.); die Flächen des Pyramiden=Oktaëders doppelt dreiflächige Zuspizung der Ecken, auf den Flächen ruhend (Fig. 80.); die Flächen des Achtundvierzig=Flächners zweimal sechsflächige

72 Zweites Kap. Entwicklung d. Krystallsysteme.

Zuspizung der Ecken, eine auf der andern ruhend (Fig. 81.).

§. 77.

Aus dem Pyramiden=Würfel läßt sich durch das Wachsen der abwechselnden parallelen Flächen das Pentagonal=Dodekaëder (Taf. IV. Fig. 83.) ableiten. Betrachtet man den Pyramiden=Würfel als einen Würfel, der auf jeder Fläche eine vierflächige Pyramide trägt, so werden von jeder dieser Pyramiden zwei Flächen verschwinden, und die verschwindenden Flächen der einen Pyramide haben mit den sich vergrößernden Flächen der benachbarten Pyramide immer eine Würfelfante als gemeinschaftliche Basis. Eine andere symmetrische Hemiedrie des Pyramiden=Würfels findet nicht statt.

§. 78.

Das Pentagonal=Dodekaëder (Fig. 84.) (Pyritoëder Weiß, Rieszwölfflach v. Kauer) ist ein von zwölf fünfseitigen Flächen umschlossener Körper, mit dreißig Kanten und zwanzig Ecken. Die Kanten haben zweierlei Werth, sechs (die Basen kk) können als Ueberreste der Flächen des umschreibenden Würfels angesehen werden; vier und zwanzig (hk) laufen je drei in den Ecken des eingeschlossenen Würfels (h) zusammen. In den Ecken, die sämmtlich dreifantig sind, laufen entweder (Würfелеcken h) gleichwerthige Kanten, oder (Trapezoëderecken k) Kanten von zweierlei Werth zusammen. Die ebenen Winkel sind dreierthig: derjenige (hkh), welcher der Base gegenüber-

steht (Spitz- oder Scheitelwinkel), hat seinen besondern Werth; die beiden an der Base liegenden ($h k k$) sind von diesem, so wie von den beiden übrigen ($k h k$) verschieden.

Das Pentagonal-Dodekaeder der Geometer, wo alle Ecken, Kanten und alle ebene Winkel gleichwerthig sind (die körperlichen Winkel der Kanten betragen $116^{\circ} 33' 54''$, die ebenen Winkel 108°), kommt in der Natur nicht vor, und der Schnitt, durch den es aus dem Würfel abgeleitet werden müßte, würde auf sehr hohe Zahlen (ohngefähr 199h 123) führen.

Die vorzüglichsten, bis jetzt bekannt gewordenen Abänderungen des Pentagonal-Dodekaeders sind:

a) aus $1 h 3$ ableitbar. Der körperliche Winkel der Base $h h$ $143^{\circ} 8'$; die übrigen jeder $107^{\circ} 27\frac{1}{2}'$. Der ebene Winkel $h k h$ $141^{\circ} 17'$; $h k k$ $96^{\circ} 1'$; $k h k$ $103^{\circ} 20\frac{1}{2}'$. Länge der Base zur Länge der Kante des umschreibenden Würfels wie 2:3.

b) aus $1 h 2$ ableitbar. Der körperliche Winkel der Base $h h$ $126^{\circ} 52'$; die übrigen jeder $113^{\circ} 35'$. Der ebene Winkel $h k h$ $121^{\circ} 35'$; $h k k$ $102^{\circ} 36'$; $k h k$ $106^{\circ} 36'$. Verhältniß der Base zur Würfelkante wie 1:2.

c) aus $2 h 3$ ableitbar. Der körperliche Winkel an der Base $h h$ $112^{\circ} 37'$; die übrigen $117^{\circ} 29'$. Der ebene Winkel $h k h$ $102^{\circ} 36'$; $h k k$ $110^{\circ} 18'$; $k h k$ $108^{\circ} 24\frac{1}{2}'$. Verhältniß der Base zur Würfelkante wie 1:3.

d) aus $1 h 4$ ableitbar. Der körperliche Winkel an der Base $h h$ $151^{\circ} 56'$; die übrigen $103^{\circ} 36\frac{1}{2}'$. Der ebene Winkel $h k h$ $151^{\circ} 6'$; $h k k$ $93^{\circ} 28'$; $k h k$ $100^{\circ} 59'$. Verhältniß der Base zur Würfelkante wie 3:4.

74 Zweites Kap. Entwicklung d. Krystallsysteme.

e) aus $2h7$ ableitbar. Der körperliche Winkel an der Base hh $148^{\circ} 6\frac{1}{2}'$; die übrigen $105^{\circ} 29'$. Der ebene Winkel hkh $146^{\circ} 54'$; hkk $94^{\circ} 29'$; khk $102^{\circ} 4'$. Verhältniß der Base zur Würfelkante wie $5:7$.

f) aus $4h5$ ableitbar. Der körperliche Winkel an der Base hh $102^{\circ} 41'$; die übrigen $119^{\circ} 12'$. Der ebene Winkel hkh $88^{\circ} 36\frac{3}{4}'$; hkk $116^{\circ} 33\frac{1}{4}'$; khk $109^{\circ} 8\frac{3}{8}'$. Verhältniß der Base zur Würfelkante wie $1:5$.

§. 79.

Die Verbindungen des Pentagonal-Dodekaëders mit den übrigen Körpern des tetrahedralen Systems, lassen sich aus der Art, wie sich der Pyramiden-Würfel mit ihnen verbindet, leicht folgern, und es entstehen einige Körper, die von lauter ähnlichen, scheinbar gleichwerthigen Flächen begrenzt sind, und beim ersten Anblick als einfache Körper sich darstellen.

Beim Würfel erscheint das Pentagonal-Dodekaëder als Abstumpfung der Kanten, gegen die angränzenden Würfelflächen verschieden geneigt (Fig. 85.); der Würfel beim Pentagonal-Dodekaëder als Abstumpfung der Basen (Fig. 86.).

Die Verbindungen des Oktaëders mit dem Pentagonal-Dodekaëder geben Pentagonal-Dodekaëder mit abgestumpften Würfelcken (Fig. 88.), oder Oktaëder mit zugespitzten Ecken (Fig. 87.), die Zuschärfungsflächen auf den Kanten ruhend. Der Mittelkrystall ist ein Ikosaëder, das von acht gleichseitigen Oktaëderflächen) und zwölf gleichschenkeligen (Dodekaëderflächen) Dreiecken (Fig. 89. 90.) begrenzt wird, und sich

dadurch von dem Ikosaëder der Geometer unterscheidet, dessen sämtliche Flächen gleichseitige Dreiecke bilden.

Bei dem Rhomben-Dodekaëder bilden die Flächen des Pentagonal-Dodekaëders Zuschärfungen der vierkantigen Ecken auf den Flächen ruhend (Fig. 91.); die Flächen des erstern bei letzterm Abstumpfung der Trapezoëderecken (Fig. 92.).

Das Trapezoëder zeigt sich beim Pentagonal-Dodekaëder als dreiflächige Zuspizung der Würfecken, die auf den Kanten ruht (Fig. 94.), oder als Abstumpfung der in den Würfecken sich vereinigenden Kanten (Taf. V. Fig. 95.); dieses bei jenem als Zuschärfung der Iktaëderecken auf den Kanten ruhend (Fig. 93.).

Das Pyramiden-Iktaëder verursacht beim Pentagonal-Dodekaëder dreiflächige Zuspizung der Würfecken, gegen die angränzenden Flächen verschieden geneigt (Fig. 97.); dieses bei jenem Zuschärfung der Iktaëderecken, auf den längern Kanten ruhend (Fig. 96.).

Bei dem Achtundvierzig-Flächner bilden die Flächen des Pentagonal-Dodekaëders immer Zuschärfungen der Iktaëderecken; ist aber das Pentagonal-Dodekaëder die vorwaltende Gestalt, so werden die Flächen des erstern eine verschiedene Lage annehmen, die durch das Verhältniß der Länge der Basen des Pentagonal-Dodekaëders zur Länge der Kante des eingeschlossenen Würfels beim Achtundvierzig-Flächner bestimmt wird. Ist die Base kürzer als diese Würfelfante, so vertheilen sich die Flächen des Achtundvierzig-Flächners an den Leuzitecken und Würfecken zugleich; ist sie länger, so kommen sie nur an den Würfecken des Pentagonal-Dodekaëders zum Vorschein.

Erster Fall. Man verbinde den Achtundvierzig²flächner $1h^4$ mit dem Dodekaëder $2h^3$, so verhält sich bei erstem die Kante des umschreibenden Würfels zu der des umschriebenen wie $7:4$, und bei letzterem die Kante des umschreibenden Würfels zur Base wie $3:1$ oder wie $7:2\frac{2}{3}$; mithin die eingeschlossene Würfelkante des erstern zur Base des letztern wie $4:2\frac{2}{3}$. Der Mitrelkrystall (Fig. 99.) ist ein Pentagonal-Dodekaëder an den Würfecken dreiflächig zugespitzt, die Zuspitzungsflächen auf den Flächen ruhend, die Trapezoëderecken zugeshärft. Es wird hier jedes Pentagon durch vier Flächen verkürzt, die je zwei einer Würfecke des Achtundvierzig²flächners angehören und in vier Ecken des Pentagons eintreten.

Zweiter Fall. Man verbinde den Achtundvierzig²flächner $1h^4$ mit dem Dodekaëder $1h^3$. Bei erstem verhielt sich die Kante des umschreibenden Würfels zur Kante des umschriebenen wie $7:4$, bei letztem die Kante des umschreibenden Würfels zur Base wie $3:2$ oder wie $7:4\frac{2}{3}$; mithin die eingeschlossene Würfelkante des erstern zur Base wie $4:4\frac{2}{3}$. Hier entsteht, wenn das Pentagonal-Dodekaëder vorwalter, eine sechsflächige Zuspitzung der Würfecken, wie sie Fig. 98. zeigt, wenn man sich die a Flächen größer denkt.

Das Tetraëder bewirkt beim Pentagonal-Dodekaëder der Abstumpfung der abwechselnden Würfecken (Fig. 101.); dieses bei jenem eine schief auf den Flächen ruhende dreiflächige Zuspitzung der Ecken (Fig. 100.).

§. 80.

Das Trapezoëder erlaubt keine andere Art der Hemiedrie, als die nach den abwechselnden Flächensystemen, woraus (Taf. V. Fig. 102.) das Pyramiden-Tetraëder entsteht. Man muß hier das Trapezoëder als

Oftaëder betrachten, wo jede Fläche wieder eine dreiflächige Pyramide trägt, und dann die abwechselnden Oftaëderflächen nach demselben Gesetze verschwinden lassen, wie bei der Entstehung des Tetraëders, so wird ein Tetraëder entstehen, wo jede Fläche eine dreiflächige Pyramide trägt. Bei dem Trapezöder laufen die Kanten der dreiflächigen Pyramide in die Mitte der Oftaëderkanten; da aber die Mitte der Oftaëderkante einer Tetraëderecke entspricht, so werden dieselben beim Pyramiden-Tetraëder in die Ecken laufen.

§. 81.

Das Pyramiden-Tetraëder Weiß (Trigon-Dodekaëder Naumann, Trigonal-Dodekaëder Mohs, pyramidales Dodekaëder Breithaupt, Taf. V. Fig. 103.) ist eine von zwölf gleichschenkeligen Dreiecken begrenzte Gestalt, mit achtzehn Kanten und acht Ecken. Von den Kanten entsprechen sechs ($h'h'$) den Kanten eines eingeschlossenen Tetraëders, zwölf ($h'h'$) laufen je drei aus der Flächenmitte eines umschreibenden Tetraëders in die Ecken des umschriebenen. Von den Ecken entsprechen vier (h') den Ecken eines eingeschlossenen, vier (h) den Flächenmitten eines umschreibenden Tetraëders.

Die beiden bekanntesten Abänderungen des Pyramiden-Tetraëders, die den ersten beiden Abänderungen des Trapezöders entsprechen, sind:

a) aus $2h^2$ ableitbar. Der ebene Winkel bei h beträgt $117^\circ 2' 8''$; der bei h' $31^\circ 28' 56''$. Der körperliche Winkel der Kante $h'h$ $109^\circ 28' 16''$; der Kante $h'h'$ $146^\circ 26' 33''$.

b) aus $3h3$ ableitbar. Der ebene Winkel bei h $112^{\circ} 53' 7''$; bei h' $33^{\circ} 33' 26\frac{1}{2}''$; der körperliche Winkel von $h' h'$ $129^{\circ} 31' 16''$, von $h' h'$ $129^{\circ} 31' 16''$.

Aus jedem Trapezoëder lassen sich zwei Pyramiden = Tetraëder ableiten, die sich wie rechts und links zu einander verhalten, je nachdem man einmal diese, und einmal die andern Flächensysteme wachsen oder verschwinden läßt, eben so wie das Oktaëder in zwei Tetraëder zerlegbar ist. Verbindet man ein linkes oder ein rechtes Tetraëder mit einem eben so gestellten Pyramiden = Tetraëder, so entsteht ein Tetraëder mit zugespitzten Kanten (Fig. 104); aber die Verbindung eines linken Tetraëders mit einem rechten Pyramiden = Tetraëder giebt ein Tetraëder mit dreiflächiger Zuspizung der Ecken, die auf den Kanten ruht (Fig. 105.).

Die Verbindungen des Pyramiden = Tetraëders mit den übrigen Körpern des tesseralen Systems, verhalten sich ganz so wie die Verbindungen des regelmässigen Tetraëders, wenn man jede Fläche desselben durch drei Flächen ersetzt.

§. 82.

Das Pyramiden = Oktaëder unterliegt derselben Halbierung nach Flächensystemen, wie das Trapezoëder, und der aus ihm entstehende Körper ist das Trapez = Dodekaëder (Taf. V. Fig. 106.). Da die Ecken des Pyramiden = Oktaëders der Kantenmitte eines Tetraëders entsprechen, und dem Trapez = Dodekaëder ein tetraëdrischer Umriss zu Grunde liegt, so müssen diejenigen Kanten, die beim Pyramiden = Oktaëder aus den Würfels

ecken in die Oktaëderecken laufen, bei dem aus ihm entstehenden Körper, aus der Flächenmitte eines umschreibenden Tetraëders in die Kantenmitte eines umschriebenen gehen.

§. 83.

Das Trapez-Dodekaëder (Taf. V. Fig. 107.) (Trapezoid-Dodekaëder, zweifantiges Tetragonal-Dodekaëder, trapezoidales Dodekaëder) ist eine von zwölf symmetrischen Trapezoiden umschlossene Gestalt, mit vier und zwanzig Kanten und vierzehn Ecken. Man kann es auch als Tetraëder betrachten, wo jede Fläche durch eine stumpfe dreiseitige Pyramide ersetzt ist, deren Kanten in die Mitte der Tetraëderkanten laufen. Die Kanten haben zweifachen Werth: 12 ($h'\omega$) liegen je zwei über den Tetraëderkanten und 12 ($h\omega$) laufen je drei aus dem Mittelpunkte der Fläche eines umschreibenden, nach der Kantenmitte eines umschriebenen Tetraëders. Die Ecken sind von dreierlei Werth: 4 dreifantige (h) liegen in der Flächenmitte eines umschreibenden Tetraëders; 6 vierfantige (ω), in denen sich Kanten von zweierlei Werth vereinigen, können als die Ecken eines eingeschlossenen Oktaëders betrachtet werden, und 4 vierfantige (h'), wo Kanten von gleichem Werthe sich vereinigen, entsprechen den Ecken eines eingeschlossenen Tetraëders.

Es kommt dieser Krystall selten und kaum je allein, sondern nur in Verbindung mit andern in der Natur vor, z. B. bei Schwefelkies, und es ist bis jetzt nur eine Abänderung bekannt, die aus $1h^21$ ableitbar ist. Der ebene Winkel bei h' beträgt 90° ; der bei h $118^\circ 4'$;

80 Zweites Kap. Entwicklung d. Krystallsysteme.

der bei ω $75^{\circ} 58'$. Der körperliche Winkel der Kante $h\omega$ mißt $152^{\circ} 44'$; der Kante $h'\omega$ 90° .

Die Verbindungen des Trapez-Dodekaëders mit den übrigen Körpern, lassen sich aus den Verbindungen des regelmäßigen Tetraëders leicht folgern.

§. 84.

Der Achtundvierzig-Flächner ist einer zweifachen Hemiedrie fähig, einmal nach den sechszähligen Flächensystemen, wo er das Herakis-Tetraëder giebt, und dann nach den einzelnen abwechselnden parallelen Flächen, wodurch das Tetragonoëder entsteht.

Wollte man aus dem Achtundvierzig-Flächner nach den einzelnen abwechselnden nicht parallelen Flächen eine hemiedrische Gestalt entwickeln, so würde dieselbe von 24 pentagonalen Flächen begränzt werden (Pentagonal-Trochitetaëder, gedrehtes Leucitoid), die Flächen dieser Gestalt würden sich aber nicht, den Gesetzen der Symmetrie gemäß, an den Würfecken vertheilen lassen, sondern hier nur als Verbindung zweier tetarödrischer Achtundvierzig-Flächner, oder zweier wiederum hemiedrisch getheilter Tetragonoëder, wovon der eine als rechts, der andre als links gestellt gedacht werden müßte, erscheinen.

§. 85.

Das Herakis-Tetraëder (Taf. V. Fig. 108.) (gebrochenes Pyramiden-Tetraëder Weiß, tetraëdrisches Trigonal-Trochitetaëder Mohs, scalenisches Trochitofaraëder Breithaupt) geht aus dem Achtundvierzig-Flächner hervor, wenn man ihn aus der allgemei-

nen oktaëdrischen Gestalt auf die tetraëdrische führt. Es wird von 24 ungleichseitigen Dreiecken begränzt, hat 36 Kanten und 14 Ecken. Die Kanten sind dreizwerthig: 12 (x) liegen je zwei über den Kanten eines eingeschlossenen Tetraëders, 12 (z) laufen je drei aus dem Mittelpunkte der Flächen eines umschreibenden Tetraëders in die Ecken des eingeschlossenen Oktaëders, und 12 (y) gehen je drei aus demselben Flächenmittelpunkte in die Ecken des eingeschlossenen Tetraëders. Die Ecken sind ebenfalls von dreierlei Werth: vier sechskantige (h) bilden die Mittelpunkte der Flächen eines umschreibenden, vier andere sechskantige (k) die Ecken eines umschriebenen Tetraëders; sechs vierkantige (ω) sind als Endpunkte eines umschriebenen Oktaëders zu betrachten, und entsprechen den Oktaëderecken des Acht- undvierzig = Flächners.

Den drei bekanntesten Abänderungen des Acht- undvierzig = Flächners entsprechen folgende Hexakis = Tetraëder:

a) aus $1 h^2 4$ ableitbar. Der ebene Winkel bei h $54^{\circ} 21' 34''$; bei ω $85^{\circ} 19' 19''$; bei k $40^{\circ} 19' 7''$; der körperliche Winkel der Kante z $162^{\circ} 15'$; y $144^{\circ} 3'$; x $124^{\circ} 51'$.

b) aus $3 h^5 15$ ableitbar. Der ebene Winkel bei h $53^{\circ} 46' 42''$; bei ω $82^{\circ} 17' 58''$; bei k $43^{\circ} 55' 20''$; der körperliche Winkel der Kante z $152^{\circ} 20'$; y $152^{\circ} 20'$; x $122^{\circ} 53'$.

c) aus $2 h^3 6$ ableitbar. Der ebene Winkel bei h $56^{\circ} 15' 4''$; bei ω $82^{\circ} 17' 58''$; bei k $41^{\circ} 21' 37''$;
6

82 Zweites Kap. Entwickelung d. Krystallsysteme.

der körperliche Winkel der Kante z $158^{\circ} 13'$; y $158^{\circ} 12\frac{1}{4}'$; x $110^{\circ} 55'$.

Die Verbindungen des Hexakis-Tetraëders mit den übrigen Gestalten, entsprechen denen des regelmäßigen Tetraëders und kommen vorzüglich beim Boracit vor.

§. 86.

Das Tetragonoëder (Dyakisdodekaëder Raumann, gebrochenes Pentagon-Dodekaëder Weiß, dreikantiges Tetragonal-Trochittraëder Mohs, heterogonales Trochitstaraëder Breithaupt, Ries-Vierzundzwanzigflach v. Raumert) (Taf. V. Fig. 109.) entsteht aus dem Würfel (Fig. 112.), wenn man jede Ecke durch drei Flächen ersetzt, welche gegen die angrenzenden Würfelflächen verschieden geneigt sind, und ähnelt einem Trapezoëder, dessen Trapeze aber nicht symmetrisch sind, sondern ebene Winkel von viererlei Werth besitzen. Man kann es auch als Pentagon-Dodekaëder betrachten, dessen Flächen nach einer Kante, die aus dem Gipfel in die Mitte der Base gehen, sich abdachen. Aus jedem Achtundvierzig-Flächner kann man zwei Tetragonoëder ableiten (Fig. 110. 111.), die sich zu einander verhalten wie rechts und links, je nachdem man dieselben abwechselnden Flächen vergrößert oder verschwinden läßt.

Das Tetragonoëder ist eine von 24 trapezoidalen Flächen begränzte Gestalt, mit 48 Kanten und 26 Ecken. Die Kanten haben dreierlei Werth: 24 (c) laufen je drei von den Würfecken (h) nach den Trapezoëderecken (k); 12 (a) laufen je zwei von den Oktaëderecken (w) nach den Trapezoëderecken, und können als Theil-

lungslinien der Flächen eines Pentagonal-Dodekaeders betrachtet werden; 12 kürzere (b) gehen ebenfalls je zwei aus den Oktaederecken in die Trapezoederecken und liegen ähnlich wie die Vasen der Pentagone. Die Oktaederecken und Trapezoederecken sind vierkantig und die in ihnen zusammenstoßenden Kanten von zweierlei Werth; die Würfecken sind dreikantig und die Kanten, die hier zusammenstoßen, gleichwerthig.

Es findet sich dieser Körper vorzüglich beim Schwefelkies, und den drei ersten Abänderungen des Achtundvierzig-Flächners entsprechen folgende Tetragonoeder:

a) aus 1 h 4 ableitbar. Ebene Winkel: bei A $96^{\circ} 13' 37''$; bei B $83^{\circ} 46' 23''$; bei C $113^{\circ} 34' 41''$; bei D $66^{\circ} 25' 19''$. Körperliche Winkel: der Kante a $154^{\circ} 47' 28''$; der Kante b $128^{\circ} 14' 48''$; der Kante c $131^{\circ} 38' 37''$.

b) aus 3 h 15 ableitbar. Ebene Winkel: bei A $104^{\circ} 38' 25''$; bei B $84^{\circ} 12' 32''$; bei C $113^{\circ} 21' 46''$; bei D $57^{\circ} 47' 17''$. Körperliche Winkel: der Kante a $160^{\circ} 32' 13''$; der Kante b $118^{\circ} 59' 9''$; der Kante c $131^{\circ} 4' 47''$.

c) aus 2 h 6 ableitbar. Ebene Winkel: bei A $106^{\circ} 59' 7''$; bei B $79^{\circ} 53' 50''$; bei C $116^{\circ} 6' 13''$; bei D $57^{\circ} 0' 50''$. Körperliche Winkel: der Kante a $148^{\circ} 59' 50''$; der Kante b $115^{\circ} 22' 37''$; der Kante c $141^{\circ} 47' 12''$.

Die Verbindungen, welche das Tetragonoeder mit den übrigen Körpern eingeht, ähneln den Verbindungen des Trapezoeders, nur mit verschiedener Neigung der Flächen.

Der Mittelkrystall zwischen Würfel und Tetragonoëder ist ein Triakontaëder (Fig. 113.), das von 30 rhombischen Flächen, von denen sechs dem Würfel angehören, begrenzt wird, und sich dadurch von dem Triakontaëder der Geometer, bei denen alle Flächen gleichwerthig sind, unterscheidet. Käme das Pentagonal-Dodekaëder der Geometer in der Natur vor, so würde das regelmäßige Triakontaëder bei ihm Abstumpfungen aller Kanten hervorbringen.

Bei dem Oktaëder bewirkt das Tetragonoëder vierflächige Zuspizung der Ecken (Fig. 114.), schief auf den Flächen ruhend. Diese Flächen sind aber nicht, wie bei dem regelmäßigen Trapezoëder, gleichschenkelige, sondern ungleichseitige Dreiecke.

Bei dem Rhomben-Dodekaëder erscheint das Tetragonoëder als Abstumpfung der Kanten (Fig. 115.) gegen die angränzenden Dodekaëderflächen verschieden geneigt. Bei dem Pyramidenwürfel als dreiflächige Zuspizung der Würfecken, auf den abwechselnden Flächen ruhend (Fig. 116.). Bei dem Trapezoëder als dreiflächige Zuspizung der Würfecken, schief auf den Flächen ruhend (Fig. 117.). Bei dem Pyramiden-Oktaëder als vierflächige Zuspizung der Oktaëderecken, auf den kürzern Kanten ruhend (Taf. VI. Fig. 118.).

Bei dem Tetraëder (Fig. 119.) und ähnlichen Gestalten entsteht durch das Tetragonoëder eine doppelt dreiflächige Zuspizung der Ecken, eine auf der andern und schief auf den Flächen ruhend.

Bei dem Pentagonal-Dodekaëder werden die Flächen des Tetragonoëders als dreiflächige Zuspizung der Ecken des eingeschlossenen Würfels auftreten, entweder auf den Flächen (Fig. 120.), oder auf den Kanten

(Fig. 121.) ruhend, je nachdem man beide Körper in gleichartiger Stellung befindlich, oder den einen zu dem andern in dem Verhältniß von rechts zu links gestellt betrachtet. Ist die Neigung der Flächen des Tetragonoëders übereinstimmend mit der Neigung der Dodekaëderkanten, so werden diese Flächen als Abstumpfungsflächen dieser Kanten erscheinen (Fig. 122.).

§. 87.

Sowohl das Tetragonoëder, als das Hexakis-Tetraëder sind einer nochmaligen Hemiedrie fähig: ersteres, indem man die abwechselnden dreizähligen Flächensysteme, letzteres, indem man die abwechselnden Flächen verschwinden läßt, und es entsteht daraus ein Pentagon-Tetraëder, das von zwölf Pentagonen begrenzt wird, die je drei um eine Tetraëderecke sich lagern, aber in der Natur noch nicht beobachtet worden ist.

Zweites System.

Pyramidalsystem.

Erste Abtheilung.

Homoëdrische Körper.

§. 88.

Das Pyramidalsystem (monodimetrisches System Hausmann, Tetragonal-System Breit-
haupt, viergliederiges System Weiß), dessen Kör-

per unter dem Gesetz von drei rechtwinkelig sich schneidenden Eben stehen, von denen zwei (Grundlagen $g g'$ Taf. VII. Fig. 1.) gleich lang sind, die dritte (Polaxe $p p$ Fig. 1.) in der Länge abweicht. Verbindet man die Endpunkte der Eben durch Linien, und betrachtet diese als Kanten einer Gestalt, so erhält man die *Quadratpyramide*; betrachtet man aber die Endpunkte der Eben als Mittelpunkte von senkrecht gegen dieselben stehenden Flächen, so entsteht das *quadratische Prisma* als Grundgestalt dieses Systems. Aus beiden lassen sich dadurch, daß man die gleichnamigen Ecken oder Kanten symmetrisch durch Flächen ersetzt, wiederum *Quadratpyramiden* und *quadratische Prismen*, aber auch *Zirkonpyramiden* und ihnen entsprechende *Prismen* als einfache Gestalten ableiten.

Die einfachen, hieher gehörigen Gestalten sind 8- oder 16flächig, und daher muß auch die Flächenzahl der zusammengesetzten Körper sich in diese Zahlen auflösen lassen. Aber die hier vorkommenden Prismen, die als Verbindungen von Pyramiden mit unendlich langer und unendlich kurzer Hauptaxe zu betrachten sind, geben 6- und 10flächige Körper, und veranlassen eine Abänderung dieser Regel.

Bei Substanzen, welche zu diesem Krystallsysteme gehören, muß ein Krystall durch Messung nach der Natur bekannt seyn, und dient für die Ableitung der übrigen Körper eben so als Grundlage, wie das *Oktaëder* oder der *Würfel* im *tesseralen* Systeme. Die *Prismen* eignen sich nicht zur Grundlage, weil die Größe der Flächen in der Natur abändert, und daher das Längenverhältniß der Hauptaxe zu den Grundlagen aus ihnen nicht ermittelt werden kann. Die normale Stellung der hieher gehörigen Körper ist die *aufrechte* der *Polaxe*.

Zum pyramidalen Systeme gehören folgende Mineralien: Zirkon, Idokras, Ichthyophthalm, Mesotop, Honigstein, Anhydrit, Kupferkies, Gelbbleierz, Sinterstein, Uranglimmer, Zungstein, Anatas.

§. 89.

Die Quadratpyramide (Taf. VII. Fig. 1.) (gleichschenkelige vierseitige Pyramide Mohs; viergliedriges Oктаëder oder Quadratoктаëder Bernhardt, Weiß, Hausmann; tetragonale Pyramide Breithaupt; Dipyramide Raumann) ist eine von acht gleichschenkeligen Dreiecken umschlossene Gestalt, mit zwölf Kanten und sechs Ecken. Die Kanten besitzen zweierlei Werth, 4 (die Grundkanten z) umschreiben ein Quadrat, 8 (die Polkanten x) laufen je vier in einer Pol Ecke zusammen, und treffen auch in den Ecken des Quadrates der Grundkanten ein. Die Ecken sind ebenfalls von zweierlei Werth, zwei (Polecken p) sind die Vereinigungspunkte von vier gleichwerthigen Kanten, vier (Grundecken g) verbinden zwei Grundkanten und zwei Polkanten. Quadratpyramiden, deren Polaxe kürzer ist, als die Grundaxe, werden stumpfwinkelige, wenn sie länger ist, spitzwinkelige genannt.

§. 90.

Bei ein und derselben Substanz können Quadratpyramiden von verschiedenem Werthe vorkommen, sie bilden aber dann eine Reihe, deren horizontale Projectionen, bei unveränderter Polaxe, sich zu einander verhalten wie umschreibende und umschriebene Quadrate, und die Flächen der stumpfern werden tangirende Ebenen für die Polkanten der spitzeren Pyramide bilden.

Nimmt man daher irgend eine Pyramide als gegeben oder durch Messung bekannt an, so werden die Grundkanten der nächstfolgenden spitzeren an den Grundkanten dieser Normalpyramide ein eingeschriebenes, die der nächstfolgenden stumpferen ein umschreibendes Quadrat bilden.

Es sey Fig. 2. $g'g$ die Bezeichnung der Grundkanten der Normalpyramide, so bezeichnen $\gamma\gamma$ die Grundkanten der nächstfolgenden stumpferen, bb' der nächstfolgenden spitzeren Quadratpyramide, wobei pp unverändert bleibt, und Fig. 3. stellt das Verhalten der horizontalen Projectionen derselben dar. Durch den Erfolg umschreibender oder umschriebener Quadrate erhält man die Grundkanten der folgenden Glieder, die sich immer zu einander verhalten $= \sqrt{2}:2$. Die Grundkante der einen Pyramide wird zur Grundkantenaxe der nächsten spitzeren, indem in Fig. 3. die Kante $\gamma\gamma$ gleich ist der Ase $g'g'$, und $g'g':g'g = \sqrt{2}:1$.

§. 91.

Will man die horizontale Projection für sämtliche zu einer Reihe gehörigen Glieder unverändert beibehalten, so muß man die Polaxe in demselben Verhältniß verlängern oder verkürzen, wie im vorigen Falle die Grundlagen verlängert oder verkürzt wurden, oder die Verkürzung findet in dem Verhältniß von $\sqrt{2}:1$, die Verlängerung von $1:\sqrt{2}$ statt. Es bilden daher die bei einer Substanz vorkommenden Quadratpyramiden eine Reihe, deren Polaxen bei unveränderten Grunddimensionen nach dem Verhältniß von $1:\sqrt{2}$ wachsen, oder nach dem Verhältniß der $\sqrt{2}:1$ sich verkürzen.

Die benachbarten Glieder dieser Reihe stehen stets so gegen einander, daß die Grundkantenaxe der einen zur

Grundeckenaxe der nächstfolgenden spitzeren Pyramide wird, und die Höhenlinien der Flächen der einen den Polkanten der andern entsprechen. Beide müssen gegen einander in diagonaler oder verwendeter Stellung gedacht werden, wie in Fig. 2. die Polkante pg' der Normalpyramide als Höhenlinie der Fläche $p\gamma\gamma$ betrachtet werden kann. Diejenigen Glieder aber, die durch ein Mittelglied von einander getrennt sind, befinden sich in gleichartiger Stellung, so daß eine Ebene, die man senkrecht durch die Mitte der Flächen der einen legt, auch die Flächenmitte der andern trifft, wie in Fig. 2. die Fläche phb' sich in gleichartiger Stellung mit der Fläche $p\gamma\gamma$ befindet.

§. 92.

Die Art, wie sich verschiedene Quadratpyramiden mit einer zu verbinden vermögen, hängt von ihrer Stellung gegen einander ab, und in diagonaler Stellung gegen einander befindliche müssen entweder vierflächige Zuspitzung der Polecken, auf den Kanten ruhend (Fig. 6.), oder Zuschärfungen der Kandecken, auf den Polkanten ruhend (Fig. 4.), oder Abstumpfungen der Polkanten (Fig. 5.) bei einander hervorbringen. Stehen sie aber in gleichartiger Stellung, so bildet die stumpfere bei der schärferen eine vierflächige Zuspitzung der Polecken, auf den Flächen ruhend, die schärfere bei der stumpferen eine Zuschärfung der Randkanten.

In Fig. 4 — 6. sey n die Bezeichnung der Flächen der Normalpyramide, dann wird l die Flächen der nächstfolgenden stumpferen, o die der zweiten und r die der dritten stumpferen Pyramide bezeichnen. n und o sind unter sich in gleichartiger, aber gegen l und r in verwendeter Stellung. Bezeichnet man die Normalpyramide mit dem Buchstaben P , so kann man die folgenden stumpferen Glieder mit $P-1$; $P-2$; $P-3$ u., die spitzeren

90 Zweites Kap. Entwicklung d. Krystallsysteme.

mit $P+1$; $P+2$; $P+3$ u. bezeichnen. Die mit geraden Zahlen bezeichneten Glieder, z. B. $P+2$, $P-4$ u., stehen gegen P in gleichartiger, die mit ungleichartigen Zahlen bezeichneten Glieder in verwendeter Stellung. Gebe man der Polare von P den Werth $= 1$, so ist derselbe für $P-1 = \sqrt{0,5}$; $P-2 = \sqrt{0,25}$; $P-3 = \sqrt{0,125}$; $P+1 = \sqrt{2}$; $P+2 = \sqrt{4}$; $P+3 = \sqrt{8}$ u.

Will man, wie im tetraedrischen Systeme, die Flächen der einzelnen Pyramiden durch die Zahl derjenigen Verhältnistheile bezeichnen, die von den Kanten weggeschnitten werden müssen, um die Lage der Ebene zu bestimmen, so muß man für die stumpfere Pyramide eine Polecke (p), in welcher vier gleichwerthige Kanten zusammenstoßen, auswählen. Für die spitzeren Glieder nimmt man eine Randecke (g), wo die Schnitttheile der Polkanten allein die Lage der Fläche bestimmen, indem von den beiden Grundkanten, die auch darin zusammenstoßen, zwar unter sich gleiche Theile (aa) weggenommen werden, die sich aber nicht in Zahlen ausdrücken lassen, weil die Länge der Grundkanten zu der Länge der Polkanten sehr verschiedene Verhältnisse haben kann. Die entstehende Fläche wird für die Linie, die vom Schnittpunkte einer Polkante zu dem der andern (z. B. von 1:3) läuft, als tangirende Ebene betrachtet.

Es sey die Normalpyramide $P = p$ oder $= g$, so ist

$P+1$	$P+2$	$P+3$	$P+4$	$P+5$	$P+6$
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
$\frac{aga}{3}$	$\frac{ag\infty}{3}$	$\frac{aga}{5}$	$\frac{ag\infty}{5}$	$\frac{aga}{15}$	$\frac{ag\infty}{15}$
$P-1$	$P-2$	$P-3$	$P-4$	$P-5$	$P-6$
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{12}{15}$	$\frac{7}{7}$
$\frac{2p}{\infty}$	$\frac{1p}{3}$	$\frac{3p}{6}$	$\frac{3p}{5}$	$\frac{15p}{20}$	$\frac{7p}{15}$

§. 93.

Denkt man sich die Polaxe bis ins Unendliche verlängert, so müssen endlich die Flächen der Pyramiden der senkrechten Richtung sehr nahe kommen, und als Extrem würden vier der Ape parallele Flächen erscheinen, deren senkrechter Durchschnitt ein Quadrat ist. Denkt man sich die Polaxe unendlich kurz, so werden die Pyramidenflächen der horizontalen Richtung sich nähern, und wird als Extrem die Polaxe Null, so erhält man eine horizontale Fläche, die ein Quadrat bildet. Die Verbindungen beider geben ein quadratisches Prisma, das aus vier parallelogrammen und zwei quadratischen Flächen besteht, vier gleichwerthige Seitenkanten und acht gleichwerthige Erdkanten besitzt (Fig. 7.). Da man sich aber sowohl die Pyramiden, die zu einander in gleichartiger Stellung, als auch diejenigen, welche zu diesen in verwendeter Stellung stehen, bis zu diesem Extreme fortgeführt denken kann, so erhält man zwei, zwar völlig gleiche, aber gegen einander in diagonalen oder verwendeter Stellung befindliche quadratische Prismen, deren Verbindung mit einander ein gleichwinkeliges achtseitiges Prisma (Fig. 8.) hervorbringt.

Für die Seitenflächen des Prisma's kann man die Bezeichnung $P + \infty$ und für die Endflächen $P - \infty$, oder für erstere $m \frac{1}{1} \infty$ und für letztere $1 \frac{1}{1} 1$ annehmen. Die Seitenflächen des diagonalen Prisma's erhalten die Bezeichnung $(P + \infty)$ oder $m \frac{1}{1} m$.

Die Polkanten einer Quadratpyramide müssen immer einen körperlichen Winkel von mehr als 90° und weniger

92 Zweites Kap. Entwicklung d. Krystallsysteme.

als 180° besitzen, weil dies die körperlichen Winkel der Extreme, oder der $P + \infty$ und $P - \infty$ sind. Nehmen wir beim Idofras die körperlichen Winkel der Polkante der Normalpyramide zu $129^\circ 29'$ an, so ist der körperliche Winkel der Polkante der Pyramide $+8$ schon $90^\circ 22' 8''$ und weicht daher vom Winkel des Prisma's keinen halben Grad ab. Der ebene Gipfelwinkel einer Quadratpyramide muß spitzer als 90° seyn, weil sonst alle vier Flächen in eine Ebene fallen würden, bei $P - 8$ beträgt derselbe bereits $89^\circ 56' 50''$ und die Fläche kommt der horizontalen Lage sehr nahe.

S. 94.

Die Seitenflächen des quadratischen Prisma's werden bei einer, mit ihm in gleichartiger Stellung befindlichen Pyramide Abstumpfungen der Grundkanten, bei einer in verwendeter Stellung befindlichen Pyramide Abstumpfungen der Grundecken bewirken. Sind im letztern Falle bei beiden Gestalten die Flächen gleich stark entwickelt, so entsteht das Hyacinth-Dodekaëder (Fig. 11.), das in der Zahl und im Umriss der Flächen dem Rhomben-Dodekaëder ähnelt, aber durch abweichende Werthe der Flächen, Kanten und Ecken sich unterscheidet. Sind die Prismenflächen vorwaltend, so bilden die Pyramiden vierflächige Zuspitzung der Ecken, bei gleichartiger Stellung (Fig. 9.) auf den Flächen, bei verwendeter Stellung (Fig. 10.) auf den Kanten des Prisma's ruhend.

Die Endfläche der Prismen giebt immer für die Polecken der Pyramiden Abstumpfungsflächen.

§. 95.

Die Zirkonpyramide Taf. VII. Fig. 12. (dieses tragonale Pyramide Breithaupt, Raumann; vier und vierkantiges Dioctaëder Weiß; ungleichschenkelige achtsseitige Pyramide Mohs; achtsseitige Doppelpyramide Hausmann) ist ein von sechszehn ungleichseitigen Dreiecken begränzter Körper, mit 24 Kanten und 10 Ecken. Die Polkanten besitzen zweierlei Werth, die Grundkanten sind gleichwerthig. Die Polecken sind achtkantig, die acht Grundecken vierkantig und von zweierlei Werth, indem die abwechselnden gleich sind. Die horizontale Projection giebt ein Achteck mit abwechselnden Winkeln von $126^{\circ} 52' 12''$ und $143^{\circ} 7' 48''$.

§. 96.

Aus jeder Quadratpyramide läßt sich eine Zirkonpyramide ableiten, wenn man jede Polkante durch zwei Flächen ersetzt, deren Durchschnittskante parallel mit der Polkante läuft, und deren Grundkanten man erhält, wenn man aus einer Grundecke in die Mitte der gegenüberstehenden Grundkanten Linien legt, und die Durchschnittspunkte dieser Linien als die Grundecken der abgeleiteten Zirkonpyramide betrachtet. Bei dieser Ableitungsart wird die Polage der Zirkonpyramide $= \frac{1}{3}$ der Polage der Quadratpyramide, die eine Grundeckeneage derselben wird auch $= \frac{1}{3}$ der Grundeckeneage der letzteren und die andere Grundeckeneage wird $= \frac{1}{2}$ der Grundkantenage der Quadratpyramide.

In Fig. 13 und 14. bezeichnen $p\gamma$ die Polkanten, $\gamma\gamma'$ die Grundkanten der Quadratpyramide. Man lege aus γ eine Linie nach g' und aus γ' nach g , so

werden sich dieselben in h und β schneiden. $m h$ wird $\frac{1}{2} m g''$ und $m \beta = \frac{1}{2} m \gamma$. Will man nun in den Punkt β eine Linie legen, welche parallel mit py läuft, so wird diese Linie $\pi\beta: p\gamma = m\beta: m\gamma = 1:3$ und auch $m\pi$ wird $\frac{1}{2} p m$. Man kann die aus der Normalpyramide abgeleitete Zirkonpyramide durch (P^3) oder durch $3p_6^2$ bezeichnen. Für die aus $P+1$ ableitbare Zirkonpyramide wäre dann die Bezeichnung $(P+1)^3$ oder $\frac{m}{2} \gamma \frac{m}{6}$, und für die aus $P-1$ ableitbare: $(P-1)^3$ oder $20p_4^5$.

Man kann aber auch aus jeder Quadratpyramide eine Zirkonpyramide ableiten, wenn man die Polaxe um zwei Drittheile verkürzt, und aus der Mitte der Grundkanten in ein Viertheil der benachbarten Grundkanten Linien legt, deren Durchschnittspunkte die Grunddecken der Zirkonpyramide bilden. Eine auf diese Weise aus der Stammpyramide abgeleitete Zirkonpyramide würde derjenigen Zirkonpyramide entsprechen, die nach der vorigen Ableitungsart aus $P-2$ entsteht. In Fig. 14. würden, wenn qq die Grundkanten der normalen Quadratpyramide sind, $\gamma\gamma$ die Grundkanten der Pyramide — 2 darstellen, wobei die Polaxe unverändert bleibt, und $h\beta$ bilden hier die Grundkanten einer auf diese Weise abgeleiteten Zirkonpyramide, die mit der $(P)^3$ nach der vorigen Ableitungsart einerlei ist.

Legt man Linien aus den Grunddecken nach ein Drittheil der benachbarten Grundkanten und nimmt die Durchschnittspunkte dieser Linien als Grunddecken einer Zirkonpyramide an, verkürzt ebenfalls die Polaxe um zwei Drittheil, so läßt sich auf diese Weise die $(P-1)^3$ ableiten. Nehmen wir in Fig. 14. $g'g'$ als die Grundkanten der normalen Quadratpyramide an, so ist, bei unveränderter Polaxe $\gamma\gamma'$ die Bezeichnung der Grund-

kanten von $P-1$ und $b\beta$ bilden die Grundkanten der auf diese Weise abgeleiteten Zirkonpyramide.

Es läßt sich ferner aus jeder Quadratpyramide eine Zirkonpyramide ableiten, wenn man aus der Mitte der Grundkanten in $\frac{1}{2}$ der benachbarten Grundkanten Linien legt, und deren Durchschnittspunkte als Grundecken der Zirkonpyramide annimmt, die Polaxe aber unverändert beibehält. Die auf diese Weise erhaltene Zirkonpyramide stimmt mit derjenigen überein, welche man bei der ersten Ableitungsart aus $P+1$ erhält.

§. 97.

Da man aus jeder Quadratpyramide eine Zirkonpyramide ableiten kann, so müssen die bei einer Substanz vorkommenden Zirkonpyramiden ebenfalls eine Reihe bilden, die der Reihe der Quadratpyramiden entspricht, und deren Polaxen bei gleicher horizontaler Projection sich zu einander verhalten wie $1:\sqrt{2}$ oder wie $2:\sqrt{2}$. Die sich zunächst stehenden Glieder befinden sich ebenfalls in verwendeter Stellung gegen einander, so daß die stumpfern Polkanten der einen Zirkonpyramide den schärferen Polkanten der nächstfolgenden entsprechen.

In Fig. 14. bezeichnet b die schärferen Grundecken der aus der Quadratpyramide $\gamma\gamma$ abgeleiteten Zirkonpyramide, β die stumpferen Grundecken derselben. c ist die Bezeichnung der stumpferen Grundecken und k der schärferen Grundecken einer aus der Quadratpyramide $g g$ abgeleiteten Zirkonpyramide.

§. 98.

Wenn zwei Zirkonpyramiden, die sich in verwendeter Stellung gegen einander befinden, sich verbinden,

so wird die spitzere bei der stumpferen als vierflächige Zuspitzung der stumpferen Grunddecken, auf den Flächen ruhend, oder die stumpfere bei der spitzeren als achtflächige Zuspitzung der Polecken erscheinen, aber diese Pyramiden sind noch nicht für sich allein oder vollständig in der Natur beobachtet, sondern nur in Verbindung mit andern Gestalten.

Bei der Verbindung von zwei in gleichartiger Stellung befindlichen Zirkonpyramiden erscheint die schärfere bei der stumpferen als Zuschärfung der Grundkanten, letztere bei ersterer als achtflächige Zuspitzung der Polecken auf den Flächen ruhend.

Bei der Quadratpyramide bilden die Flächen der zunächst aus ihr ableitbaren Zirkonpyramide Zuschärfungen der Polkanten; die Flächen der andern Zirkonpyramiden geben entweder vierflächige Zuspitzungen der Grunddecken (Fig. 15.), oder achtflächige Zuspitzung der Polecken. Ist die Zirkonpyramide die vorwaltende Gestalt, so werden die Flächen der Quadratpyramide Zuschärfungen der abwechselnden Grunddecken, oder vierflächige Zuspitzung der Polecken, auf den abwechselnden Kanten ruhend, hervorbringen. Ob die schärferen oder die stumpferen Ecken oder Kanten von dieser Veränderung getroffen werden, hängt davon ab, ob die Quadratpyramide, welche diese Veränderung bewirkt, gegen die Quadratpyramide, aus welcher die Zirkonpyramide durch Zuschärfung der Polkanten abgeleitet ist, sich in gleichartiger oder in verwendeter Stellung befindet.

Bei den quadratischen Prismen bilden die Zirkonpyramiden Zuschärfungen der Ecken (Fig. 16.). Ist aber die Pyramide die vorwaltende Gestalt, so veran-

lassen die Seitenflächen der Prismen Abstumpfungen der abwechselnden Grunddecken, und diese werden an den schärferen oder an den stumpferen Grunddecken eintreten, je nachdem das eintretende Prisma zur gleichartigen, oder zur verwendeten Stellung gehört.

In Fig. 17. sind β die schärfern, β die stumpferen Kanten der Zirkonpyramide, die Prismenflächen P gehören einem in gleichartiger, die mit D bezeichneten Flächen einem in verwendeter Stellung befindlichen Prisma an. Fig. 18. 19. zeigen die Verbindungen beider Prismen mit der Zirkonpyramide und der Quadratpyramide zugleich.

§. 99.

So wie zu der Quadratpyramide sich das Quadratprisma verhält, so verhält sich zu der Zirkonpyramide das Zirkonprisma (gleichkantiges ungleichwinkeliges achtsseitiges Prisma), dessen körperliche Winkel der Seitenkanten abwechselnd $126^{\circ} 52'$ und $143^{\circ} 8'$ betragen. Die Seitenflächen desselben bilden bei den quadratischen Prismen Zuschärfungen der Seitenkanten, bei den gleichwinkelligen achtsseitigen Prismen Abstumpfungen der Seitenkanten, bei den Grundpyramiden Zuschärfungen der Grunddecken, auf den Grundkanten ruhend.

In Fig. 20. bezeichnen r die Flächen des Zirkonprisma's, P und D die der beiden in verwendeter Stellung gegen einander befindlichen quadratischen Prismen, g die Flächen der Zirkonpyramide, n die der Quadratpyramide und p ist die allen Prismen gemeinschaftliche Endfläche.

Für die Seitenflächen des Zirkonprisma's würde die Bezeichnung $(P + \infty)^3$ oder $1 \frac{m}{g} 2$, und für die des verwendeten Prisma's $\left[(P + \infty)^3 \right]$ oder $1 \frac{m}{g} 3$ seyn.

Zweite Abtheilung.

Hemiëdrische Körper.

§. 100.

Die hemiëdrischen Gestalten kommen in diesem Systeme nur selten vor, und fast stets nur andern homöëdrischen Gestalten untergeordnet, wodurch sie um so leichter erkennbar werden. Die Quadratpyramide giebt durch Wachsen der abwechselnden nicht parallelen Flächen das gleichschenkelige Tetraëder (Fig. 21.) (tetragonales Sphenoëder Breithaupt, Hausmann, viergliederiges Tetraëder Weiß, irreguläres Tetraëder Hausmann), welches dem regelmäßigen Tetraëder zwar ähnelt, aber nicht von vier gleichseitigen, sondern von vier gleichschenkeligen Dreiecken umschlossen wird, und dessen Kanten zweierlei Werth besitzen, indem zwei (x) als Basen der gleichschenkeligen Dreiecke, vier (y) als ihre Schenkel zu betrachten sind. Man trifft diese Gestalt bisweilen beim Kupferkies.

§. 101.

Die Zirkonpyramide ist einer dreifachen Hemiëdrie fähig:

1) Man lasse die abwechselnden nicht parallelen Flächenpaare wachsen, so entsteht das tetragonale Skalenoëder (achtflächiges Bipyramid Hausmann) Fig. 22., das von acht ungleichseitigen Dreiecken begränzt wird, und dessen Grundkanten nicht in einer Ebene liegen, sondern abwechselnd auf und ab steigen. Die Grunddecken bilden zwar in der hori-

zontalen Projection ein Quadrat, liegen aber nur je zwei und zwei in einer Ebene.

Man lasse in Fig. 12. entweder die mit g oder die mit g' bezeichneten Flächen wachsen, so entsteht das tetragonale Skalenoëder Fig. 22.

2) Man lasse die abwechselnden nicht parallelen Flächen wachsen, so entsteht das tetragonale Trapezoëder (Fig. 23.), das als vierseitige Doppelpyramide, die Flächen der obern auf den Kanten der untern ruhend, betrachtet werden kann. Es wird dieser Krystall von acht symmetrischen Trapezen begrenzt, die Vorkanten sind gleichwerthig, eben so die im Zickzack laufenden Grundkanten. Von den Kandecken liegen je vier in einer Ebene und beschreiben ein Quadrat. Die horizontale Projection ist ein gleichwinkeliges und gleichkantiges Achteck.

3) Man lasse die abwechselnden parallelen Flächen wachsen, so entsteht wieder eine Quadratpyramide, die aber gegen die normale Quadratpyramide nicht in gleichartiger oder diagonalen Stellung befindlich ist, sondern in abnormer Stellung sich befindet, und mit der Benennung *abnorme Quadratpyramide* bezeichnet werden kann.

Wenn in Fig. 17. in der obern Hälfte die mit g , in der untern Hälfte die mit g' bezeichneten Flächen verschwinden, so werden nach Fig. 25. die abwechselnden Grundkanten $h\beta$ in c zusammenstoßen, und das Quadrat $c c c c$ bilden. $g g$ sind die Grundkanten einer homöodrischen Quadratpyramide, gegen welche die Grundkanten der normalen Quadratpyramide ein umschreibendes Quadrat bilden würde, aber gegen keins dieser beiden Quadrate liegen die Grundkanten der abnormen Quadratpyramide in diagonalen oder gleichartiger Stellung,

100 Zweites Kap. Entwicklung d. Krystallsysteme.

sondern lassen sich nur aus dem Grundkantenschnitt $1g3$ oder $1\gamma 2$ ableiten.

Als Beispiele für das Auftreten der halben Flächenzahl der Zirkonpyramide dienen Lungstein und Kupferkies.

Man könnte sich noch eine Hemiëdrie der Zirkonpyramide nach den abwechselnden parallelen Flächenpaaren denken, und daraus müßte eine rhombische Pyramide entstehen. Es würde aber dann die eine Grunddeckenare kürzer werden als die andere, und dieser Körper würde dem Charakter des Systems widersprechen, und kann daher nicht vorkommen.

§. 102.

Jede dieser hemiëdrischen Gestalten kann man sich durch Verlängerung der Polaxe ins Unendliche in Prismen übergehend denken, deren Endflächen der horizontalen Projection ihrer Stammgestalt entsprechen würden. Das gleichschenkelige Tetraëder und das tetragonale Skalenöder würden auf ein quadratisches Prisma, das zu dem ursprünglichen Quadratprisma in gleichartiger oder diagonalen Stellung sich befände, das tetragonale Trapezoëder auf ein gleichwinkeliges achtfseitiges Prisma und die abnorme Quadratpyramide auf ein Quadratprisma in abnormer Stellung hinführen.



Drittes System.

Prismatisches System.

Erste Abtheilung.

Homoëdrische Körper.

§. 103.

Das prismatische System (trimetrisches System Hausmann; rhombisches System Breithaupt, Naumann, und für einzelne Unterabtheilungen klinometrisches, diklinometrisches und triklinometrisches System Naumann; zwei und zweigliederiges, zwei und eingliederiges, ein und eingliederiges System Weiß) enthält diejenigen Körper, welche unter dem Gesetz von drei rechtwinkelig gegen einander stehenden Axen von verschiedener Länge stehen, und in deren Grunddecken sich ein Rhombus oder Parallelogramm verzeichnen läßt, doch giebt es mehrere hemiädrische Gestalten, deren horizontale Projection nur rhomboidische Figuren zulassen.

Es hängt von der Willkühr des Beobachters ab, welche der drei Axen er als Hauptaxe betrachten will, in so fern er nur die einmal angenommene Hauptaxe für alle bei einer Substanz vorkommenden Körper gleichmäßig beibehält. Bei denjenigen Substanzen, bei denen ein einzelner Durchgang der blätterigen Textur sich auszeichnet vorfindet, wählt man diesen, der Analogie mit den übrigen Systemen gemäß, als denjenigen aus, welcher einer Fläche entspricht, die senkrecht gegen die Hauptaxe steht *).

*) Mohs betrachtet ihn aber gewöhnlich als denjenigen, der senkrecht gegen die kürzere Grundaxe gedacht werden muß.

Verbindet man die Endpunkte der Axen durch Linien, und betrachtet diese als Kanten eines Körpers, so erhält man als Grundgestalt die Rhombenpyramide; betrachtet man aber diese Endpunkte als Witzelpunkte von senkrecht gegen dieselben stehenden Flächen, so entsteht das Oblongprisma. Aus beiden lassen sich dadurch, daß man die gleichnamigen Kanten oder Ecken symmetrisch durch Flächen ersetzt, Oblongpyramiden und rhombische Prismen, oder auch wiederum Rhombenpyramiden und Oblongprismen, so wie ferner Topaspyramiden und ihnen entsprechende Prismen als einfache Gestalten ableiten.

Die einfachen hieher gehörigen Gestalten sind acht- oder sechszehnflächig, und daher müßte auch die Flächenzahl der zusammengesetzten Körper sich in diese Zahlen auflösen lassen, wenn nicht die vorkommenden Prismen, die als Verbindungen von Pyramiden mit unendlich langer und unendlich kurzer Axe zu betrachten sind, so wie die hemiedrisch und tetartoedrisch auftretenden Körper eine Abweichung von dieser Regel veranlassen.

Bei Substanzen, welche zu diesem Krystallsystem gehören, muß ein Krystall durch Messung so weit bekannt seyn, daß sich das Verhältniß der drei Axen gegen einander ausmitteln läßt.

Zum prismatischen Systeme gehören sehr viele Substanzen, aber fast alle zeigen homoedrische und hemiedrische Gestalten zugleich, oder nur letztere. Als Beispiele für das Vorkommen homoedrischer Gestalten dienen vorzüglich Chrysolith, Topas, Baryt, Eclésiin, Schwefel, Lievrit, Weiß Bleierz, Bleivitriol.

§. 104.

Die Rhombenpyramide (Zaf. VIII. Fig. 4.) (Rhombenoctaëder Hausmann; ungleichschenkelige vierseitige Pyramide Mohs; zwei und zweigliedriges Oктаëder Weiß), wird von acht ungleichseitigen Dreiecken begrenzt, und ihre Grundkanten, die in einer Ebene liegen, beschreiben einen Rhombus. Man unterscheidet bei ihr die Polecken (p), die stumpfen Grundecken (y) und die scharfen Grundecken (x), welche sämmtlich die Vereinigungspunkte von vier Kanten sind, aber die Kanten besitzen zweierlei Werth, so daß die gegenüberstehenden gleichen Werth haben. Eben so unterscheidet man die stumpferen Polkanten (py), die schärfern Polkanten (px) und die Grundkanten (xy). Es haben daher die Ecken und Kanten dreierlei Werth, die Flächen sind gleichwerthig und die horizontale Projection ist ein Rhombus.

§. 105.

Um aus einer Rhombenpyramide die nächstfolgenden Rhombenpyramiden, die bei einer Substanz noch vorkommen können, zu bestimmen, behalte man die Polaxe unverändert bei, und verzeichne, um den Rhombus der horizontalen Projection ein umschreibendes, oder in ihm ein umschriebenes Parallelogramm, so werden im erstern Fall die Ecken des Parallelogramms die Mittelpunkte der Seiten der horizontalen Projection der nächstfolgenden stumpfern Rhombenpyramide bestimmen, im letztern Falle aber die Seiten als umschreibend für den Rhombus der horizontalen Projection der nächstfolgenden spizern Pyramide anzusehen seyn. Bei dieser Ableitungsart verkürz-

zen sich die Grundagen in dem Verhältniß von 2 : 1, oder verlängern sich in dem Verhältniß von 1 : 2. Will man die horizontale Projection unverändert beibehalten, so wird die Polaxe in dem Verhältniß von 1 : 2 verlängert, oder von 2 : 1 verkürzt. Es kommen jedoch auch noch Rhombenpyramiden vor, die nach diesem Schnittgesetze nicht abgeleitet werden können, aber als hemisdrische Gestalten zu betrachten sind.

Man nehme in Fig. 1 und 9. die Linien xy als die Grundkanten der Stammpyramide an, so bezeichnen gg die Seiten des umschriebenen Parallelogramms und δλ die Grundkanten der nächstfolgenden stumpfern Rhombenpyramide; zz würden die Seiten des eingeschriebenen Parallelogramms und ψη die Eckpunkte der horizontalen Projection der nächstfolgenden spitzern Rhombenpyramide seyn.

Man bezeichne die Stammpyramide mit P, so werden die folgenden spitzern Pyramiden durch P + 1; P + 2 ꝛ. die stumpfere durch P - 1; P - 2 ꝛ. bezeichnet. Nennen wir aber die Polecke p, die Kantecke y oder x, die stumpfere Polkanten t, die schärferen l, die Handkanten r, so erhalten wir folgende Bezeichnungen für die Abschnittsheile, welche die Flächen der abgeleiteten Pyramiden an den Kanten der Stammpyramide hervorbringen.

$$P = \begin{array}{c} l & t & l \\ tpt & \text{oder} & ryr & \text{oder} & rxr \\ l & & t & & l \end{array}$$

$$P - 1 \quad P - 2 \quad P - 3 \quad P - 4$$

$$\begin{array}{c} l\frac{1}{2} \\ tpt\frac{1}{2} \\ l \end{array} \quad \begin{array}{c} l\frac{2}{3} \\ tpt\frac{2}{3} \\ l \end{array} \quad \begin{array}{c} l\frac{3}{4} \\ tpt\frac{3}{4} \\ l \end{array} \quad \begin{array}{c} l\frac{4}{5} \\ tpt\frac{4}{5} \\ l \end{array}$$

$$P + 1 \quad P + 2 \quad P + 3 \quad P + 4$$

$$\begin{array}{c} l\frac{1}{2} \\ ryr\frac{1}{2} \\ t \end{array} \quad \begin{array}{c} t\frac{2}{3} \\ ryr\frac{2}{3} \\ t \end{array} \quad \begin{array}{c} l\frac{3}{4} \\ ryr\frac{3}{4} \\ t \end{array} \quad \begin{array}{c} l\frac{4}{5} \\ ryr\frac{4}{5} \\ t \end{array}$$

Man kann auch für die spitzern Pyramiden statt y die Ecke x setzen und den Buchstaben t in l umwandeln; die Schnitttheile bleiben dieselben.

§. 106.

Wenn sich mehrere Rhombenpyramiden mit einander verbinden, so wird die stumpfere bei der spitzern als vierflächige Zuspitzung der Polecken auf den Flächen ruhend, die schärfere bei der stumpfern als Zuschärfung der Grundkanten auftreten, und alle diese Rhombenpyramiden befinden sich in gleichartiger Stellung zu einander. Als Extrem der spitzern Pyramiden kann man die Seitenflächen eines rhombischen Prisma's, die als Abstumpfungsfächen der Grundkanten erscheinen, und als Extrem der stumpfen Pyramiden die Endflächen dieser Prismen ansehen; für die erstern würde die Bezeichnung $P + \infty$ oder $r y \infty$, für die letztern

$P - \infty$ oder $1 \underset{1}{p} 1$ anzunehmen seyn.

§. 107.

Ersetzt man die Polkanten der Rhombenpyramide durch Flächen, welche für dieselben tangirende Ebenen bilden, so erhält man die Oblongpyramide Fig. 2. (Rectanguläroctaeder Hausmann, zwei und zweiflächiges Octaeder Weiß), welche von acht gleichschenkeligen Dreiecken begrenzt wird. Diese Dreiecke besitzen aber zweierlei Werth, so daß immer die gegenüberstehenden gleich sind. Die Grundkanten beschreiben ein Parallelogramm und haben zweierlei Werth, indem

die gegenüberstehenden gleich sind, die Polkanten sind gleichwerthig. Die Polecken bilden die Vereinigungspunkte für vier gleichwerthige Kanten, die Grundecken vereinigen Kanten von dreierlei Werth.

Es sey Fig. 1. der Grundschnitt und Fig. 2. die Seitenansicht einer Oblongpyramide, so werden *g* die Grundecken, *p* die Polecken, *y* die langen Grundkanten, *x* die kurzen Grundkanten, *z* die Polkanten bezeichnen. In Fig. 2. laufen in *p* vier *z* Kanten, in *g* aber zwei *z* Kanten, eine *y* Kante und eine *x* Kante zusammen.

§. 108.

Man kann aus jeder Rhombenpyramide eine Oblongpyramide ableiten, wenn man um die Grundkanten derselben ein rechtwinkeliges Parallelogramm beschreibt und die Ecken desselben als Grundecken der Oblongpyramide betrachtet, die Polage aber unverändert beibehält. Eben so läßt sich aus dem umschriebenen Parallelogramm der Rhombenpyramide eine zweite Oblongpyramide ableiten, deren Grundkantenagen die Hälfte der Grundkantenagen der vorigen betragen. Es wird daher bei jeder Substanz eine Reihe Oblongpyramiden möglich seyn, die sich aus den vorhandenen Rhombenpyramiden ableiten läßt, und deren Grundkanten, oder Grundagen nach dem Verhältniß von 1:2 sich verlängern oder von 2:1 sich verkürzen, während die Polage unverändert bleibt. Will man aber die horizontale Projection unverändert beibehalten, so erhält man dieselbe Reihe, wenn die Polage in dem Verhältniß von 1:2 oder von 2:1 verlängert oder verkürzt wird. Alle zu einer Reihe gehörigen Oblongpyramiden befinden sich in gleichartiger Stellung gegen einander,

und es wird daher die stumpfere bei der schärfern, als vierflächige Zuspitzung der Polecken, auf den Flächen ruhend, die schärfere bei der stumpfern als Zuschärfung der Grundkanten auftreten.

Es sey in Fig. 1. durch die Linien x und y das Parallelogramm gegeben, das die Grundkanten einer Oblongpyramide bildet, so wird das Parallelogramm der nächstfolgenden spitzern Oblongpyramide durch die Grundkanten ψ und η gebildet. Hier ist $\eta = \frac{1}{2}y$ und $\psi = \frac{1}{2}x$. In Fig. 3. ist für zwei zunächst auf einander folgende Oblongpyramiden die horizontale Projection unverändert beibehalten, $p'p'$ bezeichnen die Polecken der stumpfern, pp die der spitzern Pyramide, gg die gemeinschaftlichen Grundkanten. pp' ist $= \frac{p^m}{2}$ und $p'm = 2.p'm$. Die Kanten der eingeschlossenen Rhombenpyramide bilden für die Flächen der Oblongpyramide die Höhen, die Grundkantenaxen die Grundkantenaxen. Bezeichnet man die um die normale Rhombenpyramide umschriebene Oblongpyramide mit Pr , so kann man die übrigen Glieder durch $Pr+1$; $Pr+2$ oder $Pr-1$; $Pr-2$ u. bezeichnen. Für Pr kann man auch die Bezeichnung $\frac{1}{2}p \frac{1}{2}$ annehmen, wo $Pr-1 = \frac{1}{2}p \frac{1}{2}$ und

$$Pr+1 = r \frac{1}{2} \times r \frac{1}{2} \text{ zur Bezeichnung erhielt.}$$

Wenn man nur diejenigen Körper als einfache Gestalten gelten lassen will, die von lauter gleichwerthigen Flächen begränzt werden, so ist die Oblongpyramide keine einfache Gestalt, und wird daher von mehreren Krystallographen nur als Hülfsgestalt betrachtet. Auch treten oft nur die breiten oder nur die schmalen Flächen allein auf, und die fehlenden werden durch die Flächen einer Oblongpyramide von anderer Polaxenlänge ersetzt, wodurch zwar wieder eine Oblongpyramide entsteht, die aber kein einzelnes Glied der Reihe ausmacht, und deshalb

sind auch die in der Natur vorkommenden Oblongpyramiden selten geeignet, als Grundkörper für die Berechnung bei einer Substanz angenommen zu werden. Aber dessen ungeachtet ist die Oblongpyramide, den Gesetzen der Ableitung gemäß, als ein völlig selbstständiger, von der Natur unmittelbar gegebener einfacher Körper, von demselben Werthe wie die übrigen einfachen Gestalten zu betrachten.

§. 109.

Wenn die Oblongpyramide sich mit der Rhombenpyramide verbindet, so wird die nächst ableitbare bei letzterer Abstumpfung der Polkanten, letztere bei ersterer Zuschärfungen der Grunddecken, auf den Polkanten ruhend, veranlassen. Stumpfer Oblongpyramiden bringen vierflächige Zuspizung der Polecken auf den Kanten ruhend, schärfere aber Zuschärfungen der Grunddecken auf den Polkanten ruhend hervor. Das Rhombenprisma verursacht bei der Oblongpyramide Abstumpfung der Grunddecken, letztere bei ersterer Abstumpfung aller Ecken.

In Fig. 5. bezeichnen M die Flächen der Rhombenpyramide, s die Flächen von $P-1$ und L die schmalen, T die breiteren Flächen derjenigen Oblongpyramide, welche für M als umschreibende ($P r$) anzunehmen ist. Diese Bezeichnungen gelten auch für die übrigen Figuren dieses Systems.

§. 110.

Der Oblongpyramide entspricht das Oblongprisma, das von rechtwinkligen Parallelogrammen begrenzt ist, und dessen Flächen dreierlei Werth be-

figen. Die Endkanten haben zweierlei Werth, die Seitenkanten sind gleichwerthig. Bei der Oblongpyramide bildet es Abstumpfungen der Grundkanten und der Pol-ecken, bei der Rhombenpyramide Abstumpfungen aller Ecken, bei dem rhombischen Prisma Abstumpfungen der Seitenkanten, und der Mittelkrystall ist ein achtsseitiges Prisma, mit zweifachem Werthe der Seitenkanten, so daß immer die abwechselnden Paare gleich sind.

In Fig. 6. bezeichnen R die Flächen des rhombischen Prisma's, F die schmalen, Q die breiten Seitenflächen des Oblongprisma's.

§. 111.

Die Topaspyramide *) (Fig. 8. 10.) wird von sechszehn ungleichseitigen Dreiecken begränzt, und besitzt vierundzwanzig Kanten und zehn Ecken, ist daher in Hinsicht der Zahl der Kanten, Ecken und Flächen der Zirkonpyramide gleich, unterscheidet sich aber von ihr durch den verschiedenen Werth dieser Theile. Es sind nämlich die Kanten von fünffachem Werthe, in dem dreierlei Polkanten und zweierlei Grundkanten vorhanden sind. Von den Polkanten sind vier abwechselnde und je zwei und zwei gegenüberstehende (p b . p x . p y in Fig. 10.), von den Grundkanten die abwech-

*) Die Topaspyramide betrachten die meisten Schriftsteller nicht als einfache Gestalt, sondern als Combination zweier rhombischen Pyramiden, wo in Fig. 8. die Flächen der einen mit O, die der andern mit N bezeichnet sind. Nach den §. 11 u. f. aufgestellten Ableitungs-Gesetzen muß sie aber hier als einfache Gestalt aufgeführt werden.

selnden Paare (xb und yb) unter sich gleich. Die Grunddecken haben dreierlei Werth, vier (b in Fig. 10.) sind die Vereinigungspunkte der Kanten pb ; bx und by ; zwei (x) vereinigen die Kanten px und xb und zwei (y) vereinigen die Kanten py und yb . Die Flächen bilden zwei Flächensysteme, indem die abwechselnden parallelen Flächenpaare (OO und NN in Fig. 8. oder pyb und pxb in Fig. 10.) unter sich gleich sind. Die horizontale Projection (ybx in Fig. 9.) ist ein Rechteck mit zwei stumpfen, vier weniger stumpfen und zwei noch spitzeren Winkeln.

Die Topaspyramide ist noch nicht vollständig für sich allein in der Natur beobachtet worden, sondern immer nur hemiëdrisch und in Verbindung mit andern Gestalten, wie bei dem Topase, beim Baryt, Cymophan u. a.

§. 112.

Die Topaspyramide entsteht aus der Rhombenpyramide, wenn man jede Polkante der letztern durch zwei Flächen ersetzt, deren Durchschnittskanten parallel mit den Polkanten der Rhombenpyramide laufen, und deren Grundkanten man erhält, wenn man aus jeder Grundkante in ein Drittheil der gegenüberstehenden Grundkante Linien legt, und die Durchschnittspunkte dieser Linien als Grunddecken der abgeleiteten Zirkonpyramide betrachtet. Bei dieser Ableitungsart wird die Polaxe der Topaspyramide $= \frac{1}{2}$ der Polaxe der Rhombenpyramide, und in demselben Verhältniß verkürzen sich auch die Grunddeckenagen der Rhombenpyramide. Die dritte Grunddeckenaxe der Topaspyramide beträgt dann $\frac{2}{3}$ der Grundkantenaxe der Rhombenpyramide.

Drittes System. Prismatisches System. 111

Man nehme in Fig. 9. $\delta\lambda$ als Grundkante der Rhombenpyramide; δt so wie $\lambda\omega = \frac{1}{2}\delta\lambda$, so werden die Durchschnittspunkte der Linien λt und $\delta\omega$ oder die Grunddecken der Topaspyramide y , b , und x seyn. Hier ist $xm = \frac{1}{2}\delta m$, und $ym = \frac{1}{2}\lambda m$. Die dritte halbe Ase hm ist $= \frac{1}{2}t\lambda' = \frac{1}{2}\delta\lambda$ und die ganze Ase $hb' = \frac{2}{3}\delta\lambda$ oder $\frac{2}{3}gs$. Die Polaxe verkürzt sich dabei auch um $\frac{1}{2}$. Man kann die auf diese Art aus der Stammpyramide abgeleitete Topaspyramide durch $(P)^2$ oder durch $\frac{1}{4}P\frac{t}{3}$ bezeichnen, und für die übrigen Glieder

$$(P-1)^2 \text{ oder } (P+1)^2 \text{ zc.}$$

Man kann aber auch aus jeder Rhombenpyramide eine Topaspyramide ableiten, wenn man auf die eben angegebene Art die horizontale Projection der Topaspyramide entwickelt, die Polaxe aber unverändert behält. Die auf diese Art abgeleitete Topaspyramide entspricht derjenigen, die aus $P+1$ auf die vorige Art sich entwickeln läßt, oder der $(P+1)^2$.

Nehmen wir in Fig. 9. xy als Grundkanten der Stammpyramide an, so sind $\beta\psi$ und $\beta\eta$ die Grundkanten von $(P)^2$, wobei auch die Polaxe um $\frac{1}{2}$ verkürzt wird. Will man dieselbe Topaspyramide aber erhalten, ohne die Polaxe zu verkürzen, so müssen auch die Grundaren in demselben Verhältniß von 1:2 sich verlängern und bx nebst by würden die Grunddecken derselben darstellen.

Aus der Oblongpyramide erhält man die Topaspyramide, wenn man aus der Mitte der Grundkanten Linien in ein Viertel der benachbarten Grundkanten legt, und die Durchschnittspunkte dieser Linien als Grunddecken der Topaspyramide betrachtet. Auch hier verkürzt man die Polaxe um $\frac{1}{2}$, oder behält sie unver-

ändert bei, je nachdem man $(P)^2$ oder $(P+1)^2$ erhalten will.

In Fig. 9. schneidet die Linie λt das Parallelogramm gg , welches die horizontale Projection einer Oblongpyramide bildet, die Kante gg in der Mitte x und die Kante gg' wird von der Linie $\delta\omega$ in der Mitte y getrossen. Es schneidet aber die Linie λt die Kante gg' in o oder in $\frac{1}{4}$, und die Linie $\delta\omega$ die Kante gg ebenfalls in $\frac{1}{2}$ bei $*$. Fig. 10. stellt die in der Oblongpyramide eingeschlossene Topaspyramide bei unveränderter Polaxe dar.

§. 113.

Da man aus jeder Rhombenpyramide eine Topaspyramide auf die angegebene Weise ableiten kann, so werden sämmtliche bei einer Substanz vorkommende Topaspyramiden eine Reihe bilden, deren Polaxen, bei unveränderter horizontaler Projection, eben so wie die Polaxen der Rhombenpyramiden in dem Verhältniß von 1:2 sich verlängern, oder von 2:1 sich verkürzen. Will man die Polaxe unverändert beibehalten, so kann man die Grunddecken nach diesem Verhältnisse verlängern oder verkürzen.

§. 114.

Die Verbindungen der Topaspyramide mit der Rhombenpyramide veranlassen, wenn erstere vorwaltet, bei ihr entweder Abstumpfungen der abwechselnden Polkanten (der Kanten $p b$), oder vierflächige Zuspitzung der Polecken auf den abwechselnden Kanten ($p b$) ruhend, oder Zuschärfungen der abwechselnden Grunddecken (b) auf den Polkanten ruhend. Es hängt dies von dem Größenverhältniß der Polaxen beider Gestalten gegen

Drittes System. Prismatisches System. 113

einander ab. Eben so wird, wenn die Rhombenpyramide die vorwaltende Gestalt ist, die Topaspyramide bei ihr als Zuschärfung der Polkanten, oder als achtsflächige Zuspizung der Polecken, oder als vierflächige Zuspizung der Grunddecken auftreten.

§. 115.

Die Verbindungen der Topaspyramide mit der Oblongpyramide veranlassen dieselben Abstumpfungen, Zuspizungen und Zuschärfungen, die aber nicht dieselben Kanten der Topaspyramide treffen, sondern die mit py und px bezeichneten Polkanten.

§. 116.

Den Topaspyramiden entsprechen ungleichkantige und ungleichwinkelige achtsseitige Prismen, wo die Endkanten zweierlei, die Seitenkanten dreierlei Werth besitzen.

Zweite Abtheilung.

Hemiëdrische Körper.

§. 117.

Es herrscht in diesem Systeme eine Neigung zum Verschwinden einzelner Flächen oder mancher Flächenpaare vor, und häufig so, daß, wenn man die verdrängenden Flächen allein verfolgt und nicht das Hinzutreten der Flächen anderer Gestalten mit in Anrechnung

bringt, kein allseitig umschlossener Raum entsteht. Gewöhnlich verbinden sich mehrere hemiedrische Gestalten mit einander, oder auch hemiedrische mit homoedrischen, und es gehen aus diesen Verbindungen scheinbar unsymmetrische Körper, oder wenigstens unsymmetrische Veränderungen an Kanten und Ecken hervor.

Die Mannigfaltigkeit der hier vorkommenden hemiedrischen Gestalten, und die Stetigkeit, die sie bei den meisten Substanzen zeigen, haben mehrere Krystallographen veranlaßt, besondere Krystallsysteme zu errichten, die aber immer nur einen bestimmten Formkreis hieher gehöriger hemiedrischer oder tetartoedrischer Körper umfassen. So umfaßt das zwei- und eingliedrige System von Weiß die mehresten hieher gehörigen hemiedrischen, und sein ein- und eingliedriges System die tetartoedrischen Gestalten. Auch das von Naumann aufgestellte klinorhombische, klinorhomboidische und disklinorhomboidische System enthalten insgesamt nur Körper, die nach den Gesetzen der Hemiedrie sich aus den Grundgestalten des prismatischen Systems ableiten lassen. Als Beispiele für das Vorkommen hemiedrischer Gestalten gelten vorzüglich Amphibol, Augit, Epidot, Axinit, Feldspath, Chrysoberyll, Kupferlasur, Kupfervitriol, Sphen, Wolfram, Fraueneis.

§. 118.

Die Rhombenpyramide würde, wenn die abwechselnden nicht parallelen Flächen wachsen, ein Tetraeder geben, dessen Flächen ungleichseitige Dreiecke sind, aber diese Hemiedrie ist bis jetzt noch nicht in der Natur beobachtet, sondern sie kommt nur in Verbindung mit andern, theils hemiedrischen, theils homoedrischen Gestalten hemiedrisch vor. Die wichtigsten hieher gehörigen Fälle sind:

1) Zwei Rhombenpyramiden, jede halbflächig, verbinden sich mit einander, so daß von jeder die parallelen Flächenpaare verschwunden sind, und die vorhandenen Flächenpaare der einen Pyramide an die Stelle der fehlenden der andern Pyramide treten. Man kann sowohl die in der schärfern Polkante, als auch die in der stumpfern Polkante zusammenstoßenden Flächen als ein zusammen gehöriges Flächenpaar betrachten. Diese hemidrische Verbindung giebt rhombische Pyramiden mit schiefer Aze, im ersten Falle (Taf. VIII. Fig. 18., wo M die Flächen der einen, m die der andern hemidrischen Rhombenpyramide bezeichnen) wird die Abweichung der Polage p^* vom Mittelpunkte in die lange Grunddiagonale xx , im zweiten Falle (Taf. IX. Fig. 19.) in die kurze Grunddiagonale yy fallen. Kommt nicht leicht allein, wohl aber in Verbindung mit Prismenflächen bei Amphibol, Augit, Feldspath, Stilbit vor.

2) Eine halbflächige Rhombenpyramide, von welcher nur die abwechselnden parallelen Flächen vorhanden sind, verbindet sich mit einer Oblongpyramide, von welcher nur die spizigeren oder nur die stumpferen Flächen vorkommen, woraus eine rhomboidische Pyramide entsteht, deren Grundkanten zweierlei Werth besitzen, indem zwei gegenüberstehende der rhombischen Pyramide, die zwei andern der Oblongpyramide angehören, z. B. bei Fraueneis.

In Fig. 20. bezeichnen pg die Polkanten, gg die Grundkanten der Oblongpyramide, px und py die Polkanten, xy die Grundkanten der Rhombenpyramide. Beide halbflächig verbunden geben die rhomboidische Pyramide, deren Polkanten pz , py und ps , die Grundkanten zy und ys bezeichnen. Die Fläche pzy ist die

erweiterte Fläche der Rhombenpyramide pxy , die Fläche pys stammt von der Fläche der Oblongpyramide pgs .

3) Eine halbflächige Rhombenpyramide, von welcher nur die parallelen Flächenpaare vorhanden sind, verbindet sich mit einer viertheilflächigen Oblongpyramide. Es verschwinden hier zwei Flächenpaare der Rhombenpyramide und werden jedes durch eine Fläche der Oblongpyramide ersetzt. Dadurch entsteht ein schiefes rhombisches Prisma, Fig. 21., dessen Flächen T von der Oblongpyramide, M von der Rhombenpyramide abstammen. Die Kanten besitzen vierfachen Werth, zwei zz entsprechen den spitzen Ecken x , zwei πy den stumpferen Vorkanten der Rhombenpyramide; vier yz und vier πz sind die Verbindungskanten der Oblongpyramide und Rhombenpyramide. Dies Prisma führt auch die Benennung *Gen dyoëder* nach *Weiß*, und kommt, jedoch in Verbindung mit dem rhombischen Prisma bei dem basaltischen Amphibol vor.

4) Eine halbflächige Rhombenpyramide, von welcher nur die parallelen Flächenpaare vorhanden sind, verbindet sich mit dem vollständigen rhombischen Prisma, wo sie Zuschärfungen der Enden, die Zuschärfungskante schief gegen die Hauptaxe laufend, bildet (Fig. 22.). Findet sich bei Amphibol. Verkürzt sich das Prisma so weit, daß die Grundkanten des obern Flächenpaares der Pyramide mit denen des untern Flächenpaares in eine Ebene zu liegen kommen (Fig. 22^a), so nimmt der ganze Krystall das Ansehen einer schiefartigen rhombischen Pyramide an, wie man dieselbe bei der unter dem Namen *Pyrgom* bekannten Abänderung des *Mugits* im *Gassathale* findet.

5) Eine halbflächige Rhombenpyramide, von welcher nur die parallelen Flächen vorhanden sind, verbindet sich mit dem halbflächigen Rhombenprisma, so daß zwei und zwei verschwundene Flächen der Rhombenpyramide durch je eine Fläche des Prisma's ersetzt werden. Hier entsteht Fig. 23. ebenfalls ein Hendyoëder, oder ein schiefes geschobenes vierseitiges Prisma, wo die Endfläche, welche hier R bildet, auf der Kante ruht.

§. 119.

Das rhombische Prisma kann nur in Verbindung mit Pyramiden oder mit andern Prismen halbflächig vorkommen. Mit dem vollständigen Oblongprisma giebt das halbflächige rhombische Prisma ein sechsseitiges Prisma Fig. 24., dessen Seitenkanten dreierlei Werth haben, so daß die gegenüberstehenden gleich sind und zwei davon ($g'g'$) rechte Winkel besitzen. Die Kanten $g'g'$ gehören dem Oblongprisma an, die übrigen sind die Verbindungslinien der Flächen des Oblongprisma's mit denen des rhombischen Prisma's. Ist aber, wie in Fig. 25., das Oblongprisma auch nur halbflächig vorhanden, so entsteht ein rhomboidisches Prisma, wo zwei gegenüberstehende Flächen R dem rhombischen Prisma, die zwei andern F dem Oblongprisma angehören. Hier sind die Endkanten r von den Endkanten f verschieden. Beide Arten von Prismen kommen beim Epidot vor.

§. 120.

Die Oblongpyramide tritt überhaupt selten vollzählig auf, sondern in der Regel hemiedrisch oder



tetartoëdrisch, in einzelnen Fällen selbst dreiviertheilförmig. Im letztern Falle verschwinden zwei einander diagonal gegenüberstehende Flächen, und es entsteht ein schiefes rhombisches Prisma, die Endfläche auf einer Kante ruhend (Hendyoëder) Taf. VIII. Fig. 11., mit vierfachem Werthe der Kanten und dreifachem Werthe der Ecken. Man kann sowohl zwei diagonal gegenüberstehende breite Flächen der Oblongpyramide, als zwei schmalere verschwinden lassen, und darnach wird die Endfläche des Prismas auf den stumpferen oder schärferen Seitenkanten des Prismas ruhend erscheinen. Die vier Flächen gleichen Werthes bei diesem Prisma sind die vier gleichwerthigen, vergrößerten Flächen der Oblongpyramide, und bilden die Seitenflächen des Prismas, die beiden andern Flächen werden als Endflächen betrachtet. Man unterscheidet bei dem Prisma die oberen Ecken e , den verschwundenen Flächen der Oblongpyramide entsprechend, die unteren Ecken p , die ehemaligen Polecken, und die horizontalen Ecken g , welche die Grunddecken der Oblongpyramide bildeten.

Es sey in Fig. 11. pg die Bezeichnung der Kanten der Oblongpyramide, so wird, wenn die Flächen pgg' alle vier, von den Flächen pgg oder $pg'g'$ nur die diagonal gegenüberstehenden wachsen, das Prisma entstehen, dessen Ecken mit p ; g ; e bezeichnet sind. Hier bilden die Flächen $epg'g'$ die Seitenflächen, $epgg$ oder $ep'g'g'$ die Endflächen. Die Seitenkanten sind pe und gg' ; bei den Endkanten ist der Werth eg vom Werthe pg verschieden, e ist die Bezeichnung für die oberen, p und p' für die unteren, gg oder $g'g'$ für die horizontalen Ecken. Es kommt dieses Hendyoëder beim Topas vor, und unterscheidet sich von dem Hendyoëder Taf. IX. Fig. 21. (S. 118. n. 3.) durch seine verschiedene Lage gegen die Hauptaxe.

§. 121.

Für sich allein kommt die Oblongpyramide kaum halbflächig vor, und würde dann beim Verschwinden der abwechselnden diagonalen Flächen ein Tetraëder geben, dessen Flächen zwar gleichschenkelige Dreiecke bilden, aber zweierlei Werth besitzen. In Verbindung mit andern, theils homoëdrischen, theils hemiëdrischen Körpern tritt sie aber sehr häufig auf. Die wichtigsten hieher gehörigen Fälle sind:

1) Die breiteren Flächen einer Oblongpyramide verbinden sich mit den schmälern Flächen einer andern Oblongpyramide, so daß also zwei hemiëdrische Oblongpyramiden sich mit einander verbinden. Es würde hier wieder eine Oblongpyramide entstehen, deren Polecken in Linien sich auszögen, die aber, da die Größe der Flächen in der Natur abändert, auch als vollständige Oblongpyramide, deren Polecken nur Punkte bilden, vorkommen kann. Eine solche dihemieëdrische Oblongpyramide (Ditetraëder) wird jedoch nicht in die Reihe der, nach der Berechnung bei einer Substanz vorkommenden Oblongpyramiden passen, und das Verhältniß ihrer Hauptaxe zu den Randaxen läßt sich nicht nach den §. 108. angegebenen Regeln bestimmen. Dergleichen Ditetraëder kommen bei Baryt, Kupferlasur u. vor.

2) Eine dreiviertheilflächige Oblongpyramide verbindet sich mit einer einviertheilflächigen Oblongpyramide, giebt eine Oblongpyramide mit schiefer Axe.

In Taf. VIII. Fig. 12. sey $p e g$ die Bezeichnung derselben dreiviertheilflächigen Oblongpyramide, welche Fig. 11. darstellt. Mit ihr verbinde sich die flache Oblongpyramide, die in der Figur eingeschlossen gezeichnet ist, so daß die

Fläche L in die Stelle der Ecke p trete, dann wird $e'g$ die Bezeichnung der längeren und eg die Bezeichnung der kürzeren Polkanten einer durch diese Verbindung entstandenen schiefen Oblongpyramide seyn. Ist bis jetzt kaum beobachtet.

3) Eine halbflächige Oblongpyramide mit einem vollzähligen Oblongprisma verbunden, Fig. 13., bildet ein Oblongprisma mit zugespitzten Enden, die Zuschärfungsflächen L auf den Seitenflächen F ruhend. Bei Cymophan. Es ähnelt diese Gestalt, wenn man Q als Endfläche, L und F als Seitenflächen betrachtet, auch der Verbindung eines rhombischen Prisma's mit einem halbflächigen Oblongprisma.

4) Eine viertheilflächige Oblongpyramide mit dem Oblongprisma verbunden, Fig. 14., giebt ein schiefes Oblongprisma, die Endfläche auf einer Seitenfläche ruhend. Bei Feldspath.

5) Eine halbflächige Oblongpyramide mit dem rhombischen Prisma verbunden, Fig. 15., erscheint als Rhombenprisma mit zugespitzten Enden, die Zuschärfung auf den Kanten ruhend. Bei Hornblende. Wird hier das Prisma so niedrig, daß die Ecken x mit den Ecken x' zusammenstoßen (z. B. bei Arsenikkies), so erhält der Körper wieder das Ansehen einer Oblongpyramide, deren Polecken die aus der Vereinigung von x mit x' entstandenen Ecken bilden.

6) Eine viertheilflächige Oblongpyramide L mit dem rhombischen Prisma R vereinigt, liefert ein schiefes rhombisches Prisma, die Endfläche auf einer Kante ruhend (Hendyöeder) Fig. 16. Bei Laumonit.

7) Eine halbflächige Oblongpyramide und ein halbflächiges Oblongprisma (Fig. 17.) bilden ein rhombisches

Prisma, dessen Seitenflächen T der Oblongpyramide, die Endflächen F dem Oblongprisma angehören. Bei Kupferlasur, Phehnt.

§. 122.

Die Oblongprismen können nur in Verbindung mit Pyramiden oder andern Prismen halbflächig vorkommen. Mit den rhombischen Prismen bilden sie ungleichwinkelige sechsseitige Prismen, entweder (wenn die breiten Flächen auftreten) mit zwei schärferen und vier stumpferen, oder (wenn die schmälern Flächen vorkommen sind) mit vier schärferen und zwei stumpferen Seitenkanten, z. B. Staurolith, Augit.

§. 123.

Die hemiedrischen Körper der Topaspyramide und der ihr entsprechenden Prismen ähneln den hemiedrischen Körpern der Zirkonpyramide und deren Prismen, und geben vier verschiedene Gestalten:

1) Man lasse die abwechselnden, nicht parallelen Flächenpaare wachsen (also in Taf. VIII. Fig. 8. oben die mit N, unten die mit O bezeichneten Flächen, oder umgekehrt), so entsteht ein tetragonales Skalenoëder, dem Fig. 22. des pyramidalen Systems ähnlich, aber die Flächen der obern Hälfte von denen der untern Hälfte verschieden. Kommt kaum vor.

2) Man lasse die abwechselnden, nicht parallelen Flächen wachsen (in Fig. 8. die mit N' und O' bezeichneten Flächen), so entsteht ein tetragonales Trapezoëder, dem Fig. 23. des pyramidalen Systems ähnlich, aber auch mit zweifachem Werthe der Flächen.

3) Man lasse die abwechselnden parallelen Flächen wachsen (in Fig. 8. oben die mit N' und O' , unten die mit N und O bezeichneten Flächen), so wird eine rhombische Pyramide entstehen, die in abnormer Stellung sich gegen die Stammpyramide befindet.

4) Man lasse die abwechselnden parallelen Flächenpaare wachsen (in Fig. 8. entweder die mit N und N' oder die mit O und O' bezeichneten Flächen), so bilden sie eine rhombische Pyramide, die von der homoëdrischen ursprünglichen rhombischen Pyramide sich dadurch unterscheidet, daß sie eine Deckenage der horizontalen Projection mit ihr gemein hat, während die andere um die Hälfte verkürzt, oder um das Doppelte verlängert ist. Man kann aus jeder Topaspyramide zwei rhombische Pyramiden ableiten, je nachdem man diese oder jene Art der Flächen verschwinden läßt, und die lange oder kurze Diagonale der horizontalen Projection der Stammpyramide der Verkürzung oder Verlängerung unterwirft.

Man nehme in Fig. 7. $\eta\beta$ und $\psi\beta$ als die Grundkanten einer Topaspyramide, xy als Grundkanten der zu ihr gehörigen Rhombenpyramide, so würden, wenn wir die Grundkanten $\eta\beta$ verschwinden lassen, ψy die Grundkanten der hemiëdrischen Topaspyramide seyn; und läßt man die Grundkanten $\psi\beta$ verschwinden, so umschreiben ηx den Rhombus der horizontalen Projection oder die Grundkanten einer hemiëdrischen Topaspyramide. Im ersten Falle bleibt ym unverändert und ψm ist $\frac{1}{2}xm$, im letzten Falle bleibt xm unverändert und ηm ist $\frac{1}{2}ym$. Man kann daher aus jeder Rhombenpyramide eine hemiëdrische Topaspyramide unmittelbar ableiten, wenn man die Polaxe und eine Grunddeckenage unverändert beibehält, die andere Grunddeckenage aber um die Hälfte verkürzt, oder um das Doppelte

verlängert. Man kennt bis jetzt die Topaspyramide in der Natur kaum anders als in diesen halbflächigen Gestalten, wo sie aber häufig z. B. bei Topas, Varyt u. a., jedoch auch nicht leicht allein, sondern nur in Verbindung mit Prismen und andern Gestalten vorkommt, und tangirende Ebenen für die Verbindungskanten der Oblongpyramide mit der Rhombenpyramide bildet.

Viertes System.

Hexagonalsystem.

§. 124.

Die Körper des Hexagonalsystems (sechsgliederiges System Weiß, rhomboëdrisches System Mohs, monotrimetrisches System Hausmann) stehen unter dem Gesetz von vier Axen, von denen drei (Randagen) gleich lang sind und sich unter 60° und 120° schneiden, die vierte (Hauptaxe) ist länger oder kürzer und schneidet die Randagen sämmtlich im Mittelpunkte unter einem und demselben Winkel. Als einfache vollständige Körper gehören hieher die Hexagonalpyramide und die Dodekagonpyramide, denen gleichwinkelige sechsseitige Prismen und abwechselnd gleichwinkelige zwölfseitige Prismen zur Seite stehen.

Die einfachen hieher gehörigen homoëdrischen und hemiëdrischen Körper sind sechs-, zwölf- oder vierundzwanzigflächig, und daher muß auch die Flächenzahl der zusammengesetzten Gestalten sich in diesen Zahlen auflösen lassen. Doch bringen die Endflächen der Prismen,

da, wo sie vorkommen, noch eine Uebersahl von zwei Flächen hervor.

Die horizontale Projection der hieher gehörigen Körper bildet entweder ein regelmäßiges Sechseck, wo also Halbmesser und Seite gleich lang sind, und Taf. IX. Fig. 2. die Seite der horizontalen Projection $h h'$ sich zur Diagonale $h' h'$ wie $1 : \sqrt{3}$ verhält; oder ein gleichwinkeliges Dreieck, das als hemiëdrische Figur des regelmäßigen Hexagons zu betrachten ist.

Auch in diesem Systeme muß ein einfacher Krystall durch Messung vollständig bekannt seyn, um die übrigen aus ihm berechnen zu können.

Bei denjenigen Substanzen, welche zu diesem Systeme gehören, findet man entweder die homoëdrischen oder die hemiëdrischen Gestalten entschieden vorwaltend: für die ersteren, wohin Corund, Quarz, Witherit, Apatit, Phosphorblei u. a. gehören, ist dann die Hexagonal-Pyramide; für die letzteren, wohin Schörl, Kalk, Eisenspath, Galmei u. a. gehören, das Rhomboëder die vorzüglich charakterisirende Gestalt.

Homoëdrische Körper.

§. 125.

Die Hexagonal-Pyramide (Dihexaëder und sechsgliederige Doppelpyramide Weiß, gleichschenkelige sechsseitige Pyramide und Dirhomoëder Mohs, ebenrandiges Pyramidal-Dodekaëder Leonhard, Triangular-Dodekaëder Hauy, Bipyramidal-Dodekaëder Hausmann, Hexagonal-Pyramide Raumann) Taf. IX. Fig. 1. wird von zwölf gleichschenkeligen Dreiecken umschlossen, hat achtzehn Kanten und acht Ecken. Die Flächen sind gleichwerthig; die Kanten haben zweierlei

Werth: sechs a a' liegen in einer Ebene und beschreiben ein regelmäßiges Sechseck (Grundkanten), die übrigen zwölf (Polskanten) pa' und pa laufen je sechs in einer Ecke p zusammen. Von den Ecken sind sechs a und a' vierkantig und die Vereinigungspunkte von zwei Grundkanten und zwei Polskanten (Grundecken); zwei p (Polecken) sind sechskantig und die Vereinigungspunkte von sechs Polskanten.

Ein Schnitt durch alle Grundkanten gelegt, giebt ein regelmäßiges Sechseck, ein Schnitt durch vier einander gegenüberstehende Polskanten einen Rhombus.

Hexagonalpyramiden, deren körperlicher Winkel der Polskanten mehr als $131^{\circ} 48' 32''$ beträgt (wo die Polare kürzer ist als die Mandaren), werden stumpfe, wo er weniger beträgt, spitz genannt. Bei der stumpfsten Hexagonalpyramide muß der ebene Polwinkel noch spitzer als 60° seyn, weil bei 60° die Polare = 0 wird und die Flächen in eine Ebene zusammenfallen.

§. 126.

Man hat bei den Substanzen zweierlei Arten von Hexagonalpyramiden zu berücksichtigen, die sich durch ihre Stellung gegen einander unterscheiden, und deren jede als Stammpyramide für eine besondere Reihe von andern Pyramiden betrachtet werden kann. Man kann der einen Art den Namen Quarzpyramide, der andern den Namen Dirhomböder beilegen, und erstere durch P , letztere durch D bezeichnen.

§. 127.

Ist bei einer Substanz eine Quarzpyramide durch Beobachtung oder durch Berechnung aus einem andern Körper bekannt, so werden sämmtliche bei dieser Substanz vorkommenden Quarzpyramiden eine Reihe bilden, deren Grundagen in dem Verhältniß von 1:2 sich verlängern, oder im Verhältniß von 2:1 sich verkürzen. Alle Glieder dieser Reihe stehen in gleichartiger Stellung mit einander und die Diagonalen der horizontalen Projectionen verhalten sich zu einander, wie die Seiten umschriebener Dreiecke zu den Seiten umschreibender, oder wie 1:2.

Es sey in Fig. 5. die horizontale Projection einer Quarzpyramide durch die Ecken h und h' bestimmt, so bilden hh und $h'h'$ die Diagonalen, aus denen sich die Dreiecke hhh und $h'h'h'$ darstellen. Zieht man in jedes dieser Dreiecke ein umschriebenes Dreieck, so erhält man die Dreiecke ccc und $c'c'c'$, welche als Diagonalen der horizontalen Projection cc' der nächstfolgenden spitzern Quarzpyramide anzusehen sind. cc' ist $= \frac{1}{2} hh'$ und $cm = \frac{1}{2} hm$. Bei dieser Ableitungsart bleibt die Polaxe unverändert; will man aber die horizontale Projection unverändert heibehalten, so verkürzt oder verlängert man in demselben Verhältnisse die Polaxe.

Wenn mehrere Quarzpyramiden sich mit einander verbinden, so bildet die schärfere bei der stumpfern Zuspitzungen der Grundkanten, die stumpfere bei der schärfern sechsflächige Zuspitzung der Polecken auf den Flächen ruhend.

§. 128.

Das Dirhomböeder verhält sich zur Quarzpyramide wie eine umschreibende Hexagonal-Pyramide zur umschriebenen, und seine Flächen bilden berührende Ebenen für die Polkanten der Quarzpyramide, so wie seine horizontale Projection ein umschreibendes Sechseck für das Sechseck der horizontalen Projection der letztern Art bildet. Da aus jeder Quarzpyramide ein Dirhomböeder abgeleitet werden kann, so wird es eine Reihe von Dirhomböedern geben, deren Glieder sich eben so zu einander verhalten, wie die Glieder einer Reihe von Quarzpyramiden. Alle Dirhomböeder befinden sich in gleichartiger Stellung unter einander, aber in verschiedener Stellung zu den Quarzpyramiden, und ihre Polkanten verlängern oder verkürzen sich in dem Verhältniß von 1:2 oder von 2:1.

In Fig. 1 und 2. sind aa' die Grundkanten des Dirhomböeders hh' ; die der Quarzpyramide und die Flächen paa' bilden für die Kanten ph berührende Ebenen. Da nun hh' die Hälfte der Diagonale aa' bildet, und die Diagonale aa' sich zu aa' wie die $\sqrt{3}:1$ verhält, so verhält sich auch $aa':hh' = 2:\sqrt{3}$. In Fig. 2. sind die Grundkanten der nächstfolgenden spitzern Quarzpyramide mit cc' bezeichnet und hh' sind die Grundkanten des umschreibenden Dirhomböeders und $= \frac{1}{2}aa'$.

Die Verbindungen der Dirhomböeder unter sich geschehen wie die Verbindungen der Quarzpyramiden. Die Verbindungen der Dirhomböeder mit den Quarzpyramiden (Fig. 7.) verursachen Zuspitzungen der Polecken auf den Polkanten ruhend, oder Abstumpfungen der Polkanten, oder Zuschärfungen der Kandecken, auf den Polkanten ruhend.

Bezeichnet man die Kandecke einer Quarzpyramide, die man als Stammpyramide annimmt, durch h , und

128 Zweites Kap. Entwicklung d. Krystallsysteme.

das Schnittgesetz für die einzelnen Flächen der übrigen Pyramiden durch Zahlen, welche die Schnitttheile an den Kanten bestimmen, wo h die Polkantenschnitte, $n h$ die Randkantenschnitte angeben, so erhalten wir für die einzelnen Flächen der $P + 1$ die Bezeichnung $3 h \infty$ oder $\frac{1}{2} h \infty$; für die einzelnen Flächen der $P + 2$ die Bezeichnung $\frac{1}{3} h \infty$ oder $15 h \infty$.

Nennt man die Polecke p , und bezeichnet die Schnitttheile der Polkanten durch $m p m$, so ist die Bezeichnung für die einzelnen Flächen der $P - 1$ dann $\frac{3}{2} p \frac{3}{2}$ oder $3 p 3$; für $P - 2$ $\frac{3}{4} p \frac{3}{4}$ oder $15 p 15$. Für die einzelnen Flächen des umschreibenden Dirhomboiders kann man $\frac{1}{2} h \frac{1}{2}$ oder auch $1 p 1$ wählen.

§. 129.

Denkt man sich eine Hexagonal-Pyramide mit unendlich langer Polaxe, verbunden mit einer andern mit unendlich kurzer Polaxe, so erhält man ein gleichwinkeliges sechsseitiges Prisma (Hexagonal-Prisma), dessen Seitenflächen Parallelogramme, die Endflächen unregelmäßige Sechsecke bilden, und dessen körperliche Winkel der Seitenkanten 120° betragen. Da man aber dergleichen Prismen sowohl aus der Quarzpyramide, als aus dem Dirhomb

boëder herleiten kann, so wird es zweierlei, zwar unter sich gleiche, aber durch ihre Stellung verschiedene Hexagonal-Prismen geben, die in Verbindung mit einander ein gleichwinkeliges zwölfseitiges Prisma darstellen. Die Seitenflächen desjenigen Hexagonal-Prisma's, die bei der Quarzpyramide Abstumpfungen der Grundkanten geben, geben bei dem Dirhomböeder Abstumpfungen der Grunddecken.

In Fig. 6. ist P die Bezeichnung der Flächen der Quarzpyramide; $P-1$ der nächst stumpfern Quarzpyramide, $P+\infty$ bezeichnet die Flächen des aus ihr ableitbaren Prisma's und $D+\infty$ die Flächen des aus dem Dirhomböeder ableitbaren Prisma's.

Es kommen auch noch Hexagonal-Pyramiden und ihnen entsprechende Prismen vor, die in halbverwendeter oder abnormer Stellung gegen die Quarzpyramiden sowohl als gegen die Dirhomböeder und die aus beiden ableitbaren Prismen stehen, diese sind aber hemiëdrische Gestalten, aus der Dodekagonpyramide ableitbar.

§. 130.

Die Dodekagon-Pyramide (Didodekaëder, Sechs und Sechskantner Weiß; Dipyramide und ungleichschenkelige zwölfseitige Pyramide Mohs, dihexagonale Pyramide Breithaupt, Raumann, doppelt zwölfseitige Pyramide Hausmann) Taf. IX. Fig. 8^a wird von vier und zwanzig ungleichseitigen Dreiecken begrenzt, hat vierzehn Ecken und sechs und dreißig Kanten. Man kann sie als zwölfseitige Doppelpyramide betrachten, deren Grundkanten in einer Ebene liegen, und ein abwechselnd gleichwinkeliges Zwölfeck beschreiben. Die Kanten besitzen dreierlei Werth, zwölf (xy) liegen in einer Ebene (Grundkanten), vier und zwanzig

(Polekanten) laufen je zwölf in einer Polecke zusammen und die abwechselnden (p_x und p_y) sind gleich. Von den Ecken bilden zwei (p) die Polecken und sind die Vereinigungspunkte für zwölf zweierleiwertige Kanten, zwölf (x und y) sind die Vereinigungspunkte von vier Kanten, und die abwechselnden besitzen gleichen Werth.

Die Grundkanten beschreiben ein Achteck, mit abwechselnden Winkeln von $141^\circ 47' 12''$ und $158^\circ 12' 48''$.

Es kommt die Dodekagon-Pyramide kaum je für sich allein in der Natur vor, sondern nur in Verbindung mit dem Prisma oder mit Hexagonal-Pyramiden, oder in ihren hemiädrischen Gestalten.

§. 131.

Die Dodekagon-Pyramide läßt sich aus der Hexagonal-Pyramide ableiten, wenn man aus den Grundecken der letztern in die Mitte (bei den Rhomboëdern) oder in ein Viertel (bei den Quarzpyramiden) der benachbarten, schief gegenüberstehenden Grundkanten Linien legt, und die Durchschnittspunkte dieser Linien als Grundecken der Dodekagon-Pyramide betrachtet, die Polaxe aber unverändert beibehält. Da aus jeder Hexagonal-Pyramide sich auf diese Weise eine Dodekagon-Pyramide ableiten läßt, so wird es eine Reihe von Dodekagon-Pyramiden geben, deren Glieder eben so, wie die Glieder der Reihe der Hexagonal-Pyramiden, bei unveränderter horizontaler Projection, ihre Hauptaxen in dem Verhältniß von 1:2 verlängert oder von 2:1 verkürzt haben.

Es sey in Fig. 8. für die Grunddecken eines Dodekaeders die Bezeichnung a und für die Grunddecken der Quarzpyramide h gewählt, so werden Linien, die man aus a nach der Mitte h der benachbarten schief gegenüberstehenden Grundkanten legt, sich in x und y schneiden, und dadurch die Grunddecken der Dodekagon-Pyramide bilden. Man erhält dieselbe Dodekagon-Pyramide, wenn man aus den Grunddecken h der Quarzpyramide Linien in ω oder in ein Viertel der benachbarten schief gegenüberstehenden Grundkante legt, in beiden Fällen aber die Polaxe unverändert beibehält.

§. 132.

Wenn mehrere Dodekagon-Pyramiden mit einander in Verbindung in der Natur beobachtet würden, so würden die stumpferen bei den spitzeren als zwölfblättrige Zuspitzungen der Polecken, auf den Flächen ruhend, die spitzeren bei den stumpferen als Zuschärfungen der Grundkanten vorkommen. Die Verbindungen der Dodekagon-Pyramiden mit Hexagonal-Pyramiden verursachen bei letzteren vierblättrige Zuspitzungen der Grunddecken oder zwölfblättrige Zuspitzung der Polecken.

Bezeichnet man die aus der normalen Hexagonal-Pyramide abgeleitete Dodekagon-Pyramide mit (P), so ist (P + 1) oder (P - 1) die Bezeichnung der aus P + 1 oder P - 1 abgeleiteten Dodekagonpyramide. Will man aber die Schnitttheile der Kanten der Hexagonal-Pyramide durch Zahlen ausdrücken, so erhält man für die einzelne Fläche von (P) die Bezeichnung $2 \frac{9}{1} h$ oder $5 \frac{10}{2} a$; für die einzelne Fläche von (P + 1) die Bezeichnung $7 \frac{10}{4} h$ oder $2 \frac{2}{1} a$.

132 Zweites Kap. Entwicklung d. Krystallsysteme.

Bei dem sechsseitigen Prisma bewirkt die Dodekagon=Pyramide (Fig. 12.) Zuschärfung der Ecken, dieses bei ihr Abstumpfung der Polecken und der abwechselnden Grundecken.

§. 133.

Der Dodekagon=Pyramide entspricht das Dodekagon=Prisma, dessen zwölf Seitenflächen Parallelogramme, die Endflächen abwechselnd gleichwinkelige Zwölfecke bilden. Die körperlichen Winkel der Seitenkanten betragen $141^{\circ} 47' 12''$ und $158^{\circ} 12' 48''$. Bei dem Hexagonal=Prisma erscheint es als Zuschärfung der Seitenkanten, dieses bei ihm als Abstumpfung der abwechselnden Seitenkanten. Bei den Hexagonal=Pyramiden bildet es Zuschärfungen der Grundecken auf den Grundkanten ruhend, und Abstumpfungen der Polecken, bei den Dodekagon=Pyramiden Abstumpfungen der Grundkanten und Polecken.

Hemiëdrische Körper.

§. 134.

Die Hexagonal=Pyramide ist auf doppelte Weise der Hemiëdrie fähig, je nachdem man die abwechselnden nicht parallelen, oder die abwechselnden parallelen Flächen vergrößert. Die erste Ableitungsart giebt eine triëdrische Pyramide, die zweite das Rhomboëder.

§. 135.

Das Triëder (tab. IX. fig. 13.), (gleichschenkelige dreiseitige Pyramide Mohs, trigonale Pyra-

mide Raumann,) wird von sechs gleichschenkeligen Dreiecken begrenzt, hat neun Kanten und fünf Ecken. Die Grundkanten ii , deren drei sind, beschreiben ein gleichseitiges Dreieck, und liegen in einer Ebene, die senkrecht gegen den Mittelpunkt der Hauptaxe steht. Man kann diese Gestalt auch als eine dreiseitige Doppelpyramide betrachten, die Flächen der einen auf denen der andern ruhend, sie kommt aber kaum je für sich allein in der Natur vor.

§. 136.

Das Rhomboëder (Kautenschach v. Kaumer) (tab. IX. fig. 14.) wird von sechs gleichen rhombischen Flächen umschlossen, besitzt acht Ecken und zwölf Kanten. Sechs Ecken (Kandeecken) liegen je drei (n oder n') in einer Ebene, welche die Hauptaxe rechtwinkelig schneidet, und sind die Vereinigungspunkte von zwei Randkanten und einer Polkante; zwei (Polecken) sind die Vereinigungspunkte von drei Polkanten. Die um die Polecken herum gelagerten ebenen Winkel sind alle gleichwerthig, die um die Kandeecken gelagerten besitzen zweierlei Werth. Die Kanten sind zwar alle gleich lang, aber von zweierlei Werth, sechs (Randkanten, pn und $\pi n'$) bilden ein Zickzack, sechs (Polkanten, nn') laufen je drei in einer Polecke zusammen.

Legt man aus den Kandeecken Linien in die Mitte der gegenüberstehenden Flächen (aus n in r oder aus n' in r' in Fig. 14.), so schneiden diese die Polaxe rechtwinkelig und theilen sie in drei gleich große Theile (pl' , $l'l$ und $l\pi$), und derjenige Theil einer solchen Linie, der von der Polaxe bis an die Kandeecke geht (ln), bildet den

184 Zweites Kap. Entwicklung d. Krystallsysteme.

Halbmesser der horizontalen Projection des Rhomboëders und verhält sich zum Halbmesser der horizontalen Projection der Hexagonalpyramide (des Dirhomoëders) wie $1 : \sqrt{0,75}$. Derjenige Theil, der von der Polaxe bis in die Mitte der Fläche geht ($1r$), ist die Hälfte des Vorigen.

Die horizontalen Flächendiagonalen ($n n$ oder $n' n'$) liegen je drei in einer Ebene und bilden ein gleichseitiges Dreieck mit einander, dessen Seiten sich zum Halbmesser der horizontalen Projection mit $\sqrt{3} : 1$ verhalten. Zwei geneigte Flächendiagonalen ($p n'$ oder πn) und eine horizontale Flächendiagonale bilden zusammen ein gleichschenkeliges Dreieck. Zwei gegenüberstehende geneigte Flächendiagonalen ($p n'$ und πn) geben mit zwei gegenüberstehenden parallelen Polkanten ($p n$ und $\pi n'$) ein Rhomboïd ($p n \pi n$).

Der körperliche Winkel der Standkante ist der Nebenwinkel des körperlichen Winkels der Polkante. Letzterer muß mehr als 60° und weniger wie 180° betragen, weil sonst die Polkante entweder parallel mit der Axe oder senkrecht gegen dieselbe stehen würde. Wäre derselbe 90° , so würden die Ständeckenaren gleich lang mit der Polaxe seyn, und der so gestaltete Körper wäre dann ein Würfel.

Ist die Polaxe länger als die Ständeckenare, so nennt man das Rhomboëder spitzig, im entgegengesetzten Falle stumpf, bei erstern beträgt der ebene Polwinkel weniger, bei letztern mehr als 90° .

§. 137.

Man kann aus einem Rhomboëder, dessen Avenverhältnisse bekannt sind, unmittelbar die nächst folgenden Glieder ableiten, wenn man in die Polkanten be-

rührende Ebenen legt und diese allseitig zum Durchschnitt bringt, oder die Kandecken durch Flächen ersetzt, deren Begrenzungslinien durch eine horizontale und zwei geneigte Flächendiagonalen gebildet werden. Im ersten Falle erhält man das nächststehende stumpfere, im letzteren Falle das nächststehende spitzere Rhomboëder und die Polage bleibt unverändert, während der Halbmesser der horizontalen Projection sich im Verhältniß von 1:2 verlängert, oder im Verhältniß von $1:\frac{1}{2}$ sich verkürzt. Will man aber die horizontale Projection unverändert beibehalten, so verkürzt oder verlängert man die Polage in demselben Verhältnisse, und sämmtliche zu einer Substanz gehörigen Rhomboëder bilden eine Reihe, bei deren Gliedern die Polage im Verhältniß von 1:2 sich verlängert oder im Verhältniß von 2:1 sich verkürzt. Bezeichnet man ein Glied dieser Reihe mit R und setzt den Werth des Halbmessers der horizontalen Projection = 1, so ist bei den nächstfolgenden spitzeren Gliedern die Bezeichnung $R + 1$ und der Werth des horizontalen Halbmessers = $\frac{1}{2}$; bei $R + 2 = \frac{1}{4}$; bei $R + 3 = \frac{1}{8}$; für die stumpferen Glieder der Reihe haben wir bei $R - 1$ den Werth des Halbmessers der horizontalen Projection = 2; bei $R - 2 = 4$; bei $R - 3 = 8$ c. Benachbarte Glieder stehen in verwendeter Stellung gegen einander, die durch ein Zwischenglied von einander entfernten in gleichartiger Stellung.

In Fig. 10. nehme man die Ecke n" durch die Fläche p n n' weg, so wird, wenn alle Kandecken auf dieselbe Art durch Flächen ersetzt werden, das Rhomboëder entstehen, dessen Kandecken mit r bezeichnet sind, und welches in verwendeter Stellung sich gegen das Stammrhomboëder, dessen Kandecken mit n bezeichnet sind, befindet. Nimmt man dagegen das Rhomboëder mit den

136 Zweites Kap. Entwicklung d. Krystallsysteme.

Randdecken r als Stammrhomboëder an, so bilden die Flächen des Rhomboëders $p n n'$ tangirende Ebenen für die Polkanten pr . Es ist hier $pr = \frac{1}{2} p n'$ und $r l' = \frac{1}{2} n' l$.

Bezeichnet man die Polecke des Stammrhomboëders durch p , die Randecke durch n , und drückt den Verhältnistheil, der von jeder der drei darin zusammenlaufenden Kanten weggenommen werden muß, um die Fläche eines andern Rhomboëders zu bilden, durch Zahlen aus, so erhalten wir folgende Bezeichnungen:

$R + 1$	$R + 2$	$R + 3$
$\overset{1}{1} n 1$	$\overset{1}{3} n 3$	$\overset{2}{3} n 3$
$R - 1$	$R - 2$	$R - 3$
$\overset{\infty}{1} p 1$	$\overset{1}{2} p 2$	$\overset{3}{2} p 2$

§. 138.

Die aus der Quarzpyramide, durch Wachsen der abwechselnden parallelen Flächen ableitbaren Rhomboëder, welche selten vorkommen, verhalten sich unter einander eben so, wie sich die aus dem Dirhomboëder ableitbaren Rhomboëder unter einander verhalten. Sie erhalten die Bezeichnung $\frac{P}{2}$ und werden als Hemipyramiden betrachtet.

Es giebt auch Rhomboëder, die sich weder aus dem Dirhomboëder, noch aus der Quarzpyramide durch Hemiedrie unmittelbar herleiten lassen, sondern als terädrische Gestalten der Dodekagon-Pyramide zu betrachten sind.

Wenn mehrere Rhomboëder mit einander in Verbindung treten, so müssen folgende Veränderungen derselben eintreten:

1) Bei zwei nächstfolgenden Gliedern der Reihe erscheint das stumpfere bei dem spitzern (z. B. $R - 1$ bei R) als Abstumpfung der Polkanten, die Abstumpfungsfäche gegen die benachbarten Rhomboëderflächen gleich geneigt; das spitzere bei dem stumpfern (z. B. R bei $R - 1$) als Abstumpfung der Kandecken, von jeder Kante gleich viel wegnehmend.

2) Bei zwei weiter von einander entfernten Gliedern, die beide in verwendeter Stellung gegen einander stehen, wird das stumpfere bei dem spitzern als dreiflächige Zuspizung der Polecken auf den Kanten ruhend, das spitzere bei dem stumpfern als Abstumpfung der Kandecken, von den Randkanten weniger wegnehmend als von den Polkanten zum Vorschein kommen.

3) Bei zwei weiter von einander entfernten Gliedern, die beide in gleichartiger Stellung sich befinden, bildet das stumpfere bei dem spitzern eine dreiflächige Zuspizung der Polecken, auf den Flächen ruhend, das schärfere bei dem stumpfern Abstumpfung der Kandecken, von den Randkanten mehr wegnehmend als von der Polkante.

In Fig. 15. stammen die großen achtfseitigen, mit R bezeichneten Flächen von dem Stammrhomboëder, die lang gezogenen, mit $R - 1$ bezeichneten Flächen, welche tangirende Ebenen für die Polkanten des Stammrhomboëders bilden, von dem nächstfolgenden stumpfern, die trapezoidalen Flächen, von dem nächstfolgenden spitzern Rhomboëder, und die niedrigen Pentagone, welche

als dreiflächige Zuspitzung der Polecken zum Vorschein kommen, von dem $R - 2$. Fig. 16. giebt die Verbindung zweier in gleichartiger Stellung befindlicher spitzer Rhomboëder an. Die Flächen des $R + 4$ nehmen von den Randkanten des $R + 2$ die Hälfte (nr), von den Polkanten nur $\frac{1}{2}$ (nf) weg.

§. 140.

Die Verbindungen des Rhomboëders mit der Hexagonal-Pyramide kommen selten in der Natur vor. Ist das Rhomboëder spitzer als die Hexagonal-Pyramide, so veranlaßt es Abstumpfung der abwechselnden Grunddecken; ist es stumpfer, dreiflächige Zuspitzung der Polecken. Die Hexagonal-Pyramide verursacht bei dem Rhomboëder Zuschärfung der Randdecken oder sechsflächige Zuspitzung der Polecken.

§. 141.

Bei dem Hexagonal-Prisma giebt das Rhomboëder dreiflächige Zuspitzung der Enden, theils (bei dem aus dem Dirhomoëder ableitbaren Prisma) auf den abwechselnden Seitenflächen, theils (bei dem Quarzprisma) auf den abwechselnden Seitenkanten ruhend. Wenn hier die Rhomboëderflächen mit den Prismenflächen in ein gleiches Größenverhältniß treten, so entsteht im erstern Falle ein dem Pentagonal-Dodekaëder (Fig. 17.), im zweiten Falle (Fig. 18.) ein dem Rhomben-Dodekaëder ähnlicher Krystall, nur daß die Flächen, Kanten und Ecken verschiedene Werthe haben. Tritt die Endfläche des Prisma's allein auf, so bewirkt sie eine Abstumpfung der Polecken des Rhomboëders, und wenn diese Fläche so groß wird, daß sie die Rand-

ecken des Rhomboëders berührt (Taf. X. Fig. 19.), so entsteht ein, einem Oктаëder ähnlicher Krystall.

In Fig. 17., wo h die Flächen des Prisma's bezeichnet, wird der Krystall von 12 pentagonalen Flächen begrenzt, aber die Flächen haben zweierlei Werth, indem die Hälfte dem Rhomboëder, die andere Hälfte dem Prisma angehört; die Ecken p , a und r , so wie die Kanten pr , ar , rr , besitzen dreierlei Werth. In Fig. 18., wo f die Flächen des Quarzprisma's bezeichnet, besitzen ebenfalls die Flächen zweierlei, die Ecken (p , h , n) und Kanten dreierlei Werth, indem von letzteren (pn) sechs als Polkanten des Rhomboëders, sechs als Seitenkanten des Prisma's und zwölf als Verbindungskanten der Flächen des Rhomboëders und der Flächen des Prisma's zu betrachten sind. In Fig. 19., wo o die Endfläche des Prisma's bezeichnet, erhält der Krystall, wenn man ihn senkrecht auf die von r nach r' gehende Axe stellt, das Ansehen eines Oктаëders, aber die Flächen haben zweierlei Werth, und um jede Ecke lagern sich vier Flächen, von denen drei gleichwerthig sind, die vierte einen verschiedenen Werth besitzt.

§. 142.

Die Dodekagon-Pyramide ist mehrerer Hemiëdrischer Zerlegungen fähig, und giebt, wenn man die Flächen paarweise verschwinden läßt, bei ebenrandiger Hemiëdrie die Anomogon-Pyramide, bei scalenoëdrischer Hemiëdrie, die Kalkpyramide. Durch das Verschwinden einzelner abwechselnder Flächen entsteht als ebenrandige Gestalt eine Hexagonal-Pyramide, und als scalenoëdrische Gestalt das dihexagonale Trapezoëder. Aus beiden letztern lassen sich durch nochmalige Hemiëdrie neue Gestalten ableiten.

Die Anomogon = Pyramide (Taf. X. Fig. 20 und 21.) entsteht aus der Dodekagon = Pyramide, wenn man die abwechselnden parallelen Flächenpaare verschwinden läßt, so daß die abwechselnden Flächenpaare der obern mit denen der untern Hälfte der Pyramide in einer Kante zusammenstoßen, welche rechtwinkelig gegen die Mitte der Hauptaxe liegt. Sie wird von zwölf ungleichseitigen Dreiecken begränzt, besitzt achtzehn Kanten und acht Ecken. Man kann sie auch als abwechselnd gleichwinkelige, sechsseitige, ebenrandige Doppelpyramide betrachten. Die Polkanten haben zweierlei Werth px und pa , die Grundkanten xa umschreiben ein ungleichwinkeliges Sechseck, wo immer die abwechselnden Winkel gleich sind, und die gleichwerthigen Ecken als Ecken eines eingeschlossenen gleichseitigen Dreiecks betrachtet werden können. Die Ecken haben dreierlei Werth, sechs vierkantige (a und x) sind die Grundecken, zwei sechskantige (p) die Polecken. Man kann aus jeder Dodekagon = Pyramide zwei Anomogon = Pyramiden ableiten, je nachdem man diese oder jene Flächenpaare verschwinden läßt. Bei der einen werden die Winkel der horizontalen Projection $141^{\circ} 47' 12''$ und $98^{\circ} 12' 48''$, bei der andern $158^{\circ} 12' 48''$ und $81^{\circ} 47' 12''$ betragen. Bis jetzt ist jedoch die Anomogon = Pyramide noch nicht in der Natur gefunden worden.

Die Verbindung einer Anomogon = Pyramide mit unendlich langer Axe mit einer Anomogon = Pyramide mit unendlich kurzer Axe würde das Anomogon = Prisma geben. Man kann es auch unmittelbar aus dem Dodekagon = Prisma durch Hemiedrie ableiten.

§. 144.

Die Kalkpyramide Fig. 22. (Drei- und Drei-
Kantner, dreikantiges Dodekaeder Weiß, ungleich-
schenkelige sechsseitige Pyramide Mohs, Bipyramoide
Hausmann, hexagonales Scalenöder Breit-
haupt) entsteht aus der Dodekagon-Pyramide durch
Wachsen der abwechselnden parallelen Flächenpaare.
Sie wird, wie die Anomogon-Pyramide, von zwölf
ungleichseitigen Dreiecken begränzt und hat ebenfalls
achtzehn Kanten und acht Ecken, aber die Grundkanten
liegen nicht in einer Ebene, sondern bilden ein Zickzack,
und auch die Grunddecken liegen nicht in einer, sondern
in zwei Ebenen, wo sie je drei als Gränzpunkte eines
gleichseitigen Dreiecks zu betrachten sind. Die Polkan-
ten besitzen zweierlei Werth, die abwechselnden sind
gleich, die Grundkanten sind unter sich gleichwerthig,
eben so die Grunddecken. Aus jeder Dodekagon-Pyra-
mide sind zwei unter sich gleiche Kalkpyramiden ableit-
bar, die sich gegen einander verhalten, wie rechts und
links.

Man lasse in Fig. 23. die schattirten Flächenpaare ver-
schwinden, so werden die wachsenden Flächen in den mit
 y bezeichneten Ecken sich schneiden, und hier ihre gemein-
schaftliche Verbindungskante $n n'$ bilden, welche diagonal
gegen den Winkel bei y läuft. Die drei mit n bezeichne-
ten Ecken begränzen unter sich ein gleichwinkeliges Drei-
eck, eben so die mit n' bezeichneten, letzteres steht aber
gegen ersteres eben so in veränderter Stellung, wie in
Fig. 5. das Dreieck $h h h$ gegen das Dreieck $h' h' h'$, und
die horizontale Projection giebt ein gleichwinkeliges
Sechseck.

Da aus jeder Dodekagon-Pyramide eine Kalkpyra-
mide als hemiedrische Gestalt ableitbar ist, so ist bei

jeder Substanz eine Reihe Kalkpyramiden denkbar, welche der Reihe der vorhandenen Dodekagon-Pyramiden entspricht. Bezeichnet man die Dodekagon-Pyramide durch (P), so ist die entsprechende Bezeichnung der Kalkpyramide $\left(\frac{P}{2}\right)$, und für die einzelnen Glieder $\left(\frac{P}{2} + 1\right)$ $\left(\frac{P}{2} - 1\right)$ u. Da aber die erstere kaum vorkommt, so bezeichnet man auch die Kalkpyramide durch (P), ohne die Hemiedrie durch einen Divisor zu bemerken.

Wenn mehrere Kalkpyramiden sich mit einander verbinden, so giebt die spizere bei der stumpfern Zuschärfung der Grundkanten, die stumpfere bei der spizern Zuschärfung der abwechselnden Polkanten, oder sechsflächige Zuspizung der Polecken, die Flächen paarweise um die abwechselnden Polkanten gelagert.

§. 145.

Die Kalkpyramide erscheint bei der Hexagonal-Pyramide entweder als sechsflächige Zuspizung der Polecken, die Zuspizungsflächen paarweise um die abwechselnden Polkanten gelagert, oder als Zuschärfung der Randecken, auf zwei neben einander liegenden Flächen ruhend, je nachdem die Hexagonal-Pyramide stumpfer oder spiziger ist, als die Kalkpyramide.

Fig. 24. stellt die Hexagonal-Pyramide in Verbindung mit einer spizern (welche die Zuschärfung der Randecken bewirkt) und mit einer stumpfern (von welcher die Zuspizung der Polecken herrührt) Kalkpyramide dar.

Bei dem Rhomboëder tritt die spitzere Kalkpyramide als Zuschärfung der Grundkanten oder Grunddecken auf, die stumpfere als Zuschärfung der Polkanten oder als sechsflächige Zuspitzung der Polecken, deren Flächen sich paarweise um die Polkanten herumlagern. Bei dem Prisma bewirkt sie Zuschärfung der abwechselnden Ecken (Fig. 26.), oder, wenn das Prisma gegen das vorige in verwendeter Stellung gedacht wird, eine schiefe Abstumpfung der abwechselnden Eckenpaare (Fig. 25.), die Abstumpfungsf lächen auf den Prismenflächen ruhend.

Will man aus dem Rhomboëder unmittelbar eine Kalkpyramide ableiten, so hat man mehrere Ableitungsarten. Die nächst ableitbare spitzere Kalkpyramide entsteht, wenn man jede Handdecke n durch zwei Flächen ersetzt, von denen jede die Polkante ganz, eine Handkante ganz und die andere Handkante zur Hälfte ($1\ n^2$) wegnimmt. In Fig. 27. ersetze man die Ecke n'' durch die Flächen $p\ n'z$, von denen jede die Polkante $p\ n'$ und die eine Handkante $n'n''$ ganz, die andere Handkante $n'n''$ nur zur Hälfte ($n''z$) wegnimmt. Die Kante, in welcher beide Flächen sich schneiden, ist $p\delta$. Verföhrt man an allen Handdecken auf gleiche Weise, so erhält man die Kalkpyramide, deren Polkanten mit $p\delta$, die Handkanten mit $\delta\delta'$ bezeichnet sind. Die Polkanten $p\delta$ oder $p\delta'$, welche durch das Zusammenstoßen zweier zu benachbarten Ecken gehörigen Flächen entstehen, sind zwei Drittheil der geneigten Flächendiagonale des Stammrhomboëders (indem $p\delta : \delta n'' = n'n'' : n''z$ oder $= 2:1$ und daher $p\delta : p n'' = 2:3$), und die Dimensionen der horizontalen Projection der Kalkpyramide verhalten sich zu den horizontalen Projectionen des Rhomboëders in Hinsicht ihrer Längen wie 2:3. Man wird dieselbe Kalkpyramide erhalten, wenn man die horizontale Projection

des Rhomboëders unverändert beibehält, die Polaxe aber in dem Verhältniß von 2:3 verlängert.

Will man aus einem Rhomboëder eine Kalkpyramide ableiten, die in der Reihe der spitzern Glieder um ein Glied weiter entfernt ist, als die vorige, so ersetze man jede Randkante durch zwei Flächen, deren jede eine Polkante ganz, eine Randkante zur Hälfte, und die andere Randkante bis in das Unendliche wegnehmend gedacht wird ($1n''^{\infty}$). In Fig. 28. ersetze man die Randkante $n'n''$ durch die Flächen $p'z'zn'$ und $pn''z''$, von denen die erste die Polkante $p'n'$ ganz, die Randkante $n'n'$ halb und die Randkante $n'n''$ bis in das Unendliche wegnimmt, und die zweite sich eben so gegen die Kanten pn'' und $n''n$ verhält. Die gemeinschaftliche, durch den Durchschnitt beider Flächen gebildete Kante qq läuft parallel mit $n'n''$. Verföhrt man auf diese Weise an allen Randkanten ein Drittheil der Länge der Rhomboëderkanten besitzen, und deren Dimensionen der horizontalen Projection, bei unveränderter Polaxe, ein Drittheil der Länge der Dimensionen der horizontalen Projection des Rhomboëders besitzen. Behält man aber die horizontale Projection des Rhomboëders unverändert bei, so erhält man diese Kalkpyramide, wenn man die Polaxe in dem Verhältniß von 1:3 verlängert, und aus den Polrecken Linien nach den Grunddecken legt (Fig. 22).

Um aus einem Rhomboëder eine stumpfere Kalkpyramide abzuleiten, wird jede Polkante durch zwei Flächen ersetzt, deren jede eine Polkante ganz, die andere ein Drittheil, die dritte bis in das Unendliche ($1p^{\infty}3$) wegnimmt. Man kann auch eine Randkante ganz, von der andern ein Drittheil und die Polkante bis in das Unendliche ($1r^{\infty}3$) weggenommen betrachten, um dieselbe Fläche zu erhalten. Wenn man in Fig. 29. das $R+1$ zu Grunde legt und aus der Randdecke r' eine Linie nach

z (wo $rz = \frac{1}{3}rr'$) zieht, und von z nach z' (wo $pz' = rz$), so erhält man durch die drei Punkte r' z z' die Lage der entstehenden Fläche. Zwei auf diese Weise um die Polkante pr gelagerte Flächen haben als gemeinschaftliche Durchschnittskante die Linie $q'q'$ in Fig. 30, welche parallel mit pr läuft. Alle diese Kanten schneiden sich in π und π' , und die zu benachbarten Polkanten gehörigen Flächen erhalten als gemeinschaftliche Durchschnittskanten die Linien r' z' oder r z''. Die Linie r z'' schneidet sich aber mit den Linien $q'q'$ in δ' und π' und bestimmt dadurch die Polecken und Kandecken der Kalkpyramide, welche mit derjenigen Kalkpyramide, die wir in Fig. 27. aus dem Stammrhomboëder nach dem Schnittgesetz $1n2$ ableiteten, übereinstimmt.

§. 147.

Das dihexagonale Trapezoëder (Fig. 31.), das man auch als sechsseitige Doppelpyramide, die Flächen der einen auf den Kanten der andern ruhend, betrachten kann, entsteht aus der Dodekagon-Pyramide durch Wachsen der abwechselnden nicht parallelen Flächen. Es wird von zwölf symmetrischen Trapezoïden begränzt und besitzt vier und zwanzig Kanten und vierzehn Ecken. Die Kanten sind von dreierlei Werth: zwölf (Polkanten) laufen je sechs in einer Ecke zusammen, zwölf (Grundkanten) bilden ein Zickzack und sind abwechselnd länger (x) und kürzer (y). Die Ecken haben zweifachen Werth: zwei (Polecken) sind die Vereinigungspunkte von sechs gleichwerthigen Kanten, zwölf (Kandecken) die Vereinigungspunkte von vier dreierleiwerthigen Kanten. Die Kandecken liegen je sechs in einer Ebene, so daß die abwechselnden unter sich ein re-

regelmäßiges Hexagon beschreiben. Die horizontale Projection ist ein abwechselnd gleichwinkeliges Zwölfeck.

Läßt man in Fig. 31. die schattirten Flächen der Dodekagon-Pyramide verschwinden, so entsteht das dihexagonale Trapezoëder, dessen Polkanten mit $p'a$ und $p'a'$ bezeichnet sind. Die Grundkanten desselben entsprechen den Grundkanten der Dodekagon-Pyramide und seine Polkanten den verschwundenen Flächen. In der Natur ist diese Gestalt noch nicht vollständig aufgefunden worden, sondern in Verbindung mit dem Prisma. Hier bewirkt sie eine Abstumpfung aller Ecken, die Flächen schief auf den Prismenflächen ruhend, aber alle nach einer Seite hingewender, jedoch auf der obern Seite des Prisma's entgegengesetzt, wie auf der untern (Fig. 32.). Bei dem Verkrystall erscheinen auf diese Weise die Flächen des dihexagonalen Trapezoëders in Verbindung mit den Flächen der Quarzpyramide und des Prisma's.

§. 148.

Eine Hexagonal-Pyramide in abnormer Stellung gegen die Stammpyramide bildet sich aus der Dodekagonpyramide durch Wachsen der abwechselnden parallelen Flächen. Wenn man die abwechselnden Grundkanten einer Dodekagon-Pyramide nach beiden Seiten so weit verlängert, bis sie unter sich zusammenstoßen, so bilden diese Zusammenstoßpunkte unter sich ein regelmäßiges Hexagon und die Grunddecken der abnormen Hexagonal-Pyramide.

Man lasse bei der Dodekagon-Pyramide Fig. 33. die schattirten Flächen wachsen, so entsteht die Hexagonal-Pyramide Fig. 34., deren Grunddecken mit φ bezeichnet sind, und wo a die Lage der Grunddecken der normalen Hexagonal-Pyramide anzeigt. Wenn man in Fig. 20. die abwechselnden Grundkanten xy bis φ und φ' verlän-

gert, so erhält man ihre horizontale Projection und das Verhalten von φ gegen α . Man kann jede Dodekagon-Pyramide in zwei abnorme Hexagonal-Pyramiden zerlegen, die sich wie rechts zu links gegen einander verhalten, und der Reihe der Dodekagon-Pyramiden entspricht einer Reihe abnormer Hexagonal-Pyramiden. Tritt die abnorme Hexagonal-Pyramide mit dem Prisma in Verbindung, so bewirkt sie, wie die vorigen, eine schiefe Abstumpfung aller Ecken, aber an den obern Ecken eben so gewendet, wie an der untern (Fig. 85.).

§. 149.

Die hemiedrischen Gestalten der Dodekagon-Pyramide sind aber einer nochmaligen hemiedrischen Zerlegung fähig, und die daraus ableitbaren Körper können als tetartoedrische Gestalten der Dodekagon-Pyramide betrachtet werden. Man erhält Rhomboëder in abnormer Stellung aus der abnormen Hexagonal-Pyramide, durch Wachsen der abwechselnden parallelen Flächen, auf dieselbe Weise, wie das Stammrhomboëder aus der normalen Hexagonal-Pyramide entsteht. Dasselbe Rhomboëder entsteht aus der Kalkpyramide, wenn die abwechselnden parallelen Flächen wachsen.

Ein abnormes Ditrionder muß aus der abnormen Hexagonal-Pyramide entstehen, wenn die abwechselnden nicht parallelen Flächen wachsen.

§. 150.

Das ditrigonale Trapezoëder (Fig. 86.), die hemiedrische Gestalt des dihexagonalen Trapezoëders, das sich auch aus der Kalkpyramide durch Wachsen der abwechselnden nicht parallelen Flächen ableiten

läßt, wird von sechs Trapezoiden begrenzt, und besitzt zwölf Kanten und acht Ecken. Die Kanten haben dreierlei Werth: sechs Polkanten, drei längere stumpfere und drei kürzere schärfere, im Zickzack gegen einander laufende sind Randkanten. Die beiden Polecken vereinigen drei gleichwerthige Polkanten, in die sechs Randecken laufen drei Kanten von dreierlei Werth zusammen.

In Fig. 36. zeigen die schattirten Flächen der eingezeichneten Kalkpyramide die verschwundenen Flächen an, und der Vergleich der vergrößerten Flächen, mit den gleichliegenden Flächen in Fig. 23 und 31., belehrt über die Ableitungsgart des ditrigonalen Trapezoëders aus der Dodekagon-Pyramide und aus dem dihexagonalen Trapezoëder.

Bei allen diesen tetartoëdrischen Gestalten kann man eben so wie bei den hemiëdrischen zwei, zwar unter sich gleiche, aber wie rechts zu links sich gegen einander verhaltende Gestalten unterscheiden.

§. 151.

Aus allen hemiëdrischen und tetartoëdrischen Gestalten der Dodekagon-Pyramide kann man dadurch, daß man die Polaxe in das Unendliche sich verlängert denkt, die Seitenflächen von Prismen mit gleicher horizontaler Projection, und durch Verlängerung der Randaxen in das Unendliche die Endflächen dieser Prismen ableiten. Es entstehen auf diese Weise hexagonale und trigonale Prismen, in abnormer Stellung gegen die übrigen hexagonalen und trigonalen Prismen.

Drittes Kapitel.

Beispiele für die Berechnung der Krystalle.

§. 152.

Da die Krystalle sich nach bestimmten Gesetzen mit einander verbinden und theils die Flächen des einen gegen die Flächen des andern eine bestimmte Lage annehmen, theils die Axen in einem bestimmten Verhältnisse sich verlängern und verkürzen; so lassen sich nach den Regeln der Trigonometrie und Stereometrie aus einem, als in seinen Größen bekannt angenommenen Körper, die Verhältnisse der übrigen Körper, die sich mit ihm zu verbinden vermögen (zu demselben Systeme gehören), berechnen. Im tesserale Systeme sind der Würfel und das Oktaëder als geometrisch einfache Körper gegeben und in ihren Verhältnissen bekannt, in den übrigen Systemen muß eine einfache Gestalt durch Messung bestimmt werden, und dient dann für die Berechnung der übrigen als Grundlage.

Es giebt verschiedene Methoden und Formeln, um die Verhältnisse der Krystalle gegen einander zu berechnen, die mehr oder weniger mathematische Kenntnisse voraussetzen. Bei den hier folgenden Berechnungen wird nur die Kenntniß der ebenen Geometrie vorausgesetzt. Diese Berechnungsart gewährt für den Unterricht den Vortheil, daß sie nothwendig zu dem genauen Studium der wechselseitigen Verhältnisse und Ableitungen der Körper führt, und den Zusammenhang derselben unter einander deutlich macht. Besondern Vortheil gewähren dabei die Schnitte,

150 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

die dadurch entstehen, daß man sich Ebenen durch die Krystalle gelegt denkt, deren Linien und Winkel in Betracht kommen.

Z e s s e r a l s y s t e m.

§. 153.

Der Würfel ist als ein von sechs gleichen Quadraten umschlossener Körper bekannt. Seine Flächenlagen laufen parallel und sind gleich lang mit den Kanten, seine Kantenlagen mit den Flächendiagonalen. Nimmt man die Flächenlage $= 1$, so ist die Kantenlage oder Flächendiagonale $= \sqrt{2}$ und seine Eckenlage $= \sqrt{3}$. Der diagonale Durchschnitt desselben ist daher ein Parallelogramm, dessen Seiten sich zu einander verhalten wie $1 : \sqrt{2}$. Die Flächendiagonalen eines Quadrates schneiden sich unter rechten Winkeln, mithin auch die Kantenlagen paralleler Kanten. Drei Flächendiagonalen unpaarer Kanten bilden bei dem Würfel ein gleichseitiges Dreieck und schneiden sich unter 60° , eben so die Lagen unpaarer Kanten.

Um den Winkel zu finden, den die Eckenlagen mit den Kanten oder Flächenlagen bilden, nenne man die Kante K ; die Flächendiagonale D ; die Eckenlage E ; so erhält man ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Hypotenuse E ist, dann wird $\text{tang. } D : \text{rad. } K = D : K$ oder $\text{tang. } D = \frac{\text{rad. } \sqrt{2}}{1} [\text{log. rad.} + \text{log. } \sqrt{2} - 1 = 10,1505150 = \text{log. tang. } D = 54^\circ 44' 8''$, welches der gesuchte Winkel ist.

152 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

die Höhe der Flächen des Oktaeders . . . = $\frac{\sqrt{6}}{4}$

die Flächenagen des Oktaeders . . . = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

§. 155.

Das Rhomben-Dodekaeder (Taf. VI. §. 123.) ist ein von zwölf rhombischen Flächen begränzter Körper, dessen lange Flächendiagonalen die Kanten eines Oktaeders, die kurzen Flächendiagonalen die Kanten eines Würfels beschreiben, die Kanten dieser beiden Körper kreuzen sich in ihrer Mitte rechtwinkelig, und es verhält sich die Oktaederkante zur Würfelkante, wie die Seite eines umschreibenden Quadrats zur Seite eines umschriebenen, oder wie $1 : \frac{\sqrt{2}}{2}$ (wie $\omega : kk$ in §. 123^b).

Giebt für die ebenen Winkel die Formel: $\text{tang. } \frac{1}{2}h = \frac{\text{rad. } 2}{\sqrt{2}} = \log. 10,1505150$, der $= 54^{\circ} 44' 8''$ giebt, und $\frac{1}{2}\omega$ als Cosinus beträgt $35^{\circ} 15' 52''$. Die ebenen Winkel des Rhomben-Dodekaeders betragen daher $109^{\circ} 28' 16''$ und $70^{\circ} 31' 44''$. Der Werth der Kante ωh ergibt sich $= \omega k^2 + h k^2 = \frac{\sqrt{6}}{4}$ und einer durch die vierkantigen Ecken gelegten Aye $= \sqrt{2}$.

Um den Winkel der Kanten zu finden, verlängere man ωh bis x , wo davon abgehende Perpendikel in ω' und ω' eintreffen und $\omega' x \omega'$ der gesuchte Winkel ist. $k x \omega'$ ist dessen Hälfte und $x \omega'$ findet sich $= \frac{\omega \omega \sin. \frac{1}{2}\omega}{\sin. \text{tot.}}$ oder $= \frac{1 \cos. 54^{\circ} 44' 8''}{\sin. \text{tot.}} = \log. 0,7614400$.

Im rechtwinkeligen Dreieck $k x \omega'$ ist nun bekannt $k \omega' = \frac{1}{2}$ und $x \omega'$; der Sinus des Winkels $k x \omega'$ wird

$$\frac{\sin. \text{tot. } k \omega'}{x \omega'} = \log. 9,9375300 = 60^\circ$$
 und der ganze Kantenvinkel ist dadurch zu 120° bestimmt.

§. 156.

Der Pyramidenwürfel (Fig. 124.) wird von vier und zwanzig gleichschenkeligen Dreiecken begrenzt und seine horizontale Projection (die durch die Linien ωx gebildet wird) ist ein gleichkantiges abwechselnd gleichwinkeliges Achteck. Die Kanten $h h$ bilden die Kanten eines eingeschlossenen Würfels, und Linien, welche die benachbarten, mit ω bezeichneten Ecken verbinden, die Kanten eines eingeschlossenen Oktaeders.

Es sey durch Messung der Kantenvinkel bei $x = 126^\circ 52' 12''$ gefunden, so wird der Winkel $x \omega x = 143^\circ 7' 48''$ betragen. Setzen wir die Kante des eingeschlossenen Würfels $h h$, welche $= x x = 2$ und $z x = 1$, so ist $\omega x = \frac{z x \cdot \sin. \text{tot.}}{\sin. 71^\circ 33' 54''} = \log. 1,0228790$. Da $h x = z x = 1$, so ist $\text{tang. } h = \frac{\text{rad. } \omega x}{h x} = \log. 10,0228790 = 46^\circ 30' 30''$ und der ebene Winkel ($h \omega x$) als $\cos.$ beträgt $43^\circ 29' 30''$ und der Winkel $h \omega h = 86^\circ 59'$.

Um den Winkel der Kanten $h \omega$ zu erlangen, errichte man auf einer derselben aus λ abgehende Perpendikel, welche in h' und h' eintreffen, so ist $h' \lambda h'$ der gesuchte Winkel und $h' \lambda r$ dessen Hälfte. Die Linie $h' h'$ findet sich als Flächendiagonale des eingeschlossenen Würfels, und ist, da wir dessen Kante zu 2 angenommen haben, $= \sqrt{8}$, woraus $r h'$ als dessen

154 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

Hälfte = $\frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$ sich ergibt. Die Formel *)

$$\text{ist: } \sin. \frac{1}{2} \lambda = \frac{\sin. \text{tot.}^2 \cdot r h'}{h h' \cdot \sin. 46^\circ 30 \frac{1}{2}'}$$

$$\log. \sin. \text{tot.}^2 + \log. r h' = 20,1505150$$

$$- \log. h h' (= \log. 2.) = 3010300$$

$$19,8494850$$

$$- \log. \sin. 46^\circ 30 \frac{1}{2}' = 9,8606234$$

$$\log. \sin. \frac{1}{2} \lambda = 9,9888616 = 77^\circ 4' 44''$$

Der ganze Winkel der Kante ωh beträgt darnach $154^\circ 9' 28''$.

Um das Schnittgesetz dieses Pyramidenwürfels für den Würfel aufzusuchen, verzeichne man in Fig. 124^b den Durchschnitt nach der Flächenmitte eines umschreibenden Würfels $\omega x \omega$. Die Linie $x \omega$ wird verlängert, bis sie in k eintrifft. Der Winkel $x \omega z$ ist bekannt als $\frac{1}{2} x \omega x = \frac{143^\circ 7' 48''}{2} = 71^\circ 33' 54''$, und $\alpha \omega k$ ist der Winkel des Cosinus, mithin $18^\circ 26' 6''$. Die Linie $\alpha \omega$ ver-

*) Für diese Formel liefern folgende Gleichungen die Auflösung:

$$\sin. \frac{1}{2} \lambda : \sin. \text{tot.} = r h' : \lambda h'; \text{ oder } \sin. \frac{1}{2} \lambda = \frac{\sin. \text{tot.} \cdot r h'}{\lambda h'}$$

$$\lambda h' : h h' = \sin. 46^\circ 30 \frac{1}{2}' : \sin. \text{tot.}; \text{ oder } \lambda h' = \frac{h h' \cdot \sin. 46^\circ 30 \frac{1}{2}'}{\sin. \text{tot.}}$$

also auch

$$\sin. \frac{1}{2} \lambda : \lambda h' = \frac{\sin. \text{tot.} \cdot r h'}{\lambda h'} : \frac{h h' \cdot \sin. 46^\circ 30 \frac{1}{2}'}{\sin. \text{tot.}}$$

oder

$$\sin. \frac{1}{2} \lambda = \frac{\sin. \text{tot.}^2 \cdot r h'}{h h' \cdot \sin. 46^\circ 30 \frac{1}{2}'}$$

hält sich nun zu $k\alpha$ wie die Cotangente von $18^\circ 26' 6''$ zum Radius, oder $\alpha\omega = \frac{k\alpha \cdot \cot. 18^\circ 26' 6''}{\text{rad.}}$ [$k\alpha = 1$

gesetzt, erhalten wir

$$\log. \cot. 18^\circ 26' 6'' \quad 10,4771213$$

$$- \text{rad.} \quad 10,$$

$$\log. \alpha\omega = 0,4771213 = 3$$

$k\alpha$ verhält sich daher zu $\alpha\omega = 1:3$.

Das Verhältniß der halben Kante des eingeschlossenen Würfels xz zur halben Kante des umschreibenden $\alpha\omega$ lehren folgende Gleichungen

$$ks = \alpha\omega$$

$$xz : ks = \omega x : \omega k$$

$$\omega x : xk = \omega\alpha : \alpha k = 3:1; \quad \omega x : \omega k = 3:4$$

$$\text{also auch } xz : \omega\alpha = 3:4.$$

§. 157.

Das Trapezoëder (Fig. 125.) läßt sich aus dem Oktaëder herleiten, wenn man die Flächen des Oktaëders durch Flächen ersetzt, deren Eckpunkte von zwei benachbarten Kanten des Oktaëders gleichviel und von den beiden diesen entgegengesetzten Kanten auch gleichviel, aber doch einen andern Theil wegnehmen. In Fig. 125 a. nimmt die Fläche $\pi\pi dd$ einen Theil der Oktaëderfläche ooo' weg, einen kleinern Theil von der Fläche $oo*o''$; hier ist od ein Fünftheil $o\pi$. Soll aber das Trapezoëder vollständig entstehen, so muß die Fläche $\pi\pi dd$ so weit vergrößert werden, bis sie sich mit allen zu benachbarten Ecken gehörigen, nach demselben Schnittgesetze gebildeten Flächen im Mittelpunkte der Flächen des Oktaëders schneidet. Der Mittelpunkt

156 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

einer Oktaëderfläche h liegt in ein Drittel der Höhe; es muß daher die Fläche $\pi\pi\delta\delta$ so weit vergrößert werden, bis die Linie $\pi\pi$ den Mittelpunkt h schneidet, und man erhält dann die Fläche $ppss$, wo $op = \frac{2}{3} oo$ und $os = \frac{1}{3} op$ beträgt. Nimmt man $oo = 15$, so ist $op = 10$ und $os = 2$. Das auf diese Weise gebildete Trapezöeder giebt Fig. 125 b. und seine horizontale Projection, oder den Durchschnitt nach den Oktaëderkanten Fig. 125 c., wo sich die Ecklage des Oktaëders $o^*o' = \sqrt{450}$ angiebt, indem $o^*o'^2 = o^*o^2 + oo'^2 = 15^2 + 15^2$.

Die Kanten der horizontalen Projection $k\omega$ erhält man durch folgende Gleichungen:

$$op = 10; os = 2; ps = \sqrt{104}$$

$$pk : ps = pr : po; pr = 10 - 7\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

$$pk : \sqrt{104} = 2\frac{1}{2} : 10 = 1 : 4; pk = \frac{\sqrt{104}}{4}$$

$$s\omega : \omega p = so : op = 1 : 5; s\omega = \frac{1}{5} ps$$

$$k\omega = ps - (\frac{1}{5} + \frac{1}{4}) = \frac{\sqrt{104} \cdot 7}{12} = \log. 1,7744334 = 5,948855.$$

Die eine Flächendiagonale der Trapeze kk' Fig. 125 b. erhält man durch eine Linie, die man von einer Trapezöederecke k nach der gegenüberstehenden legt (kk in Fig. 125 c.), indem vier dergleichen Flächendiagonalen um jede Oktaëderecke ein Quadrat beschreiben, dessen Ecklage die erwähnte Linie bildet.

In Fig. 125 c. haben wir

$$kk : pp = \omega k : \omega p; \omega p = sp - s\omega; = sp - \frac{1}{5}; = \frac{4}{5} sp$$

$$\omega k : \omega p = \frac{7}{12} : \frac{5}{12}$$

$$kk = \frac{pp \cdot 7 \cdot 6}{12 \cdot 5} = \frac{pp \cdot 7}{10}; pp : o^*o' = 2 : 3$$

$$pp = \frac{\sqrt{450} \cdot 2}{3}; kk = \frac{\sqrt{450} \cdot 2 \cdot 7}{3 \cdot 10} = \frac{\sqrt{450} \cdot 7}{15}$$

Da nun die Flächendiagonale kk' zu der Linie kk sich verhält, wie die Kante eines Quadrats zur Seitenlänge desselben, oder wie $1 : \sqrt{2}$; so wird $kk' = \frac{\sqrt{450.7}}{15.\sqrt{2}}$; und da $15.\sqrt{2} = \sqrt{450}$, so ist $kk' = 7$.

Diese beiden Größen sind hinreichend, um den ebenen Winkel bei ω zu bestimmen, denn in Fig. 125 b. bildet $\omega kk'$ ein gleichschenkeliges Dreieck, dessen Seiten bekannt sind, und ein auf der Mitte von kk' errichteter Perpendikel wird in ω eintreffen und diesen Winkel theilen. $\frac{1}{2}kk'$ giebt den Sinus des gesuchten Winkels und $k\omega$ den sinus totus.

$$\sin. \frac{1}{2}\omega = \frac{\sin. \text{tot. } \frac{1}{2}kk'}{k\omega}$$

$$\log. \sin. \text{tot. } + \log. 3,5 = 11,5440680$$

$$- \log. k\omega = 1,7744334$$

$$\log. \sin. \frac{1}{2}\omega = 9,7696346 = 36^\circ 2' 23\frac{1}{2}''.$$

Giebt für den ganzen ebenen Winkel bei ω $72^\circ 4' 47''$.

Die andere Flächendiagonale der Trapeze ωh läßt sich finden, wenn man den Flächendurchschnitt des Oктаëders oqm (Fig. 125 d.) bildet, wo $\omega h^2 = \omega x^2 + hx^2$ wird.

$$hx : qm = oh : oq = 2 : 3; hx = \frac{qm \cdot 2}{3};$$

$$qm = ok' = \frac{1}{2}oo = \frac{1}{2}5 \text{ (S. Fig. 125 b.)}$$

$$hx = \frac{15.2}{2.3} = \frac{15}{3} = 5 = \sqrt{25}.$$

158 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

$$\omega x = \omega m - (\omega \omega + x m); \quad \omega \omega : \omega t = s \omega : s p = 1:6$$

$$\omega t = \frac{2}{3} \omega * \omega'$$

$$\omega \omega = \frac{\sqrt{450.2}}{3.6} = \frac{2}{3} \omega * \omega' = \frac{2}{3} \omega m$$

$$x m = \frac{2}{3} \omega m = \frac{2}{3} \omega * \omega'$$

$$\omega m - \frac{2}{3} \omega * \omega'$$

$$\begin{aligned} \omega x &= \frac{2}{3} \sqrt{450} - \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{450}\right) = \frac{2}{3} \sqrt{450} - \frac{2}{3} \sqrt{450} \\ &= \frac{12 \cdot \sqrt{450}}{54} = \frac{\sqrt{450.2}}{9} = \sqrt{22,222\dots} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega h &= \sqrt{25} + \sqrt{22,222\dots} = \sqrt{47,22222} \\ &= \log. 1,8370732 = 6,871843. \end{aligned}$$

Bildet man nun das Dreieck $\omega k h$ so sind in demselben gegeben, $k \omega$, ωh und der Winkel $k \omega h$, der $36^\circ 2' 23\frac{1}{2}''$ beträgt. Zieht man nun diesen Winkel von 180° ab, so bleiben $143^\circ 57' 36\frac{1}{2}''$. Dieser Winkel halbiert, beträgt $71^\circ 58' 48\frac{1}{4}''$. Nennen wir diesen halbirten Winkel M , so ist $\frac{\text{tang. } M (\omega h - k \omega)}{\omega h + k \omega} = \text{tang. } N$ und der Winkel $\omega k h$ wird $= M + N$; der Winkel $\omega k h = M - N$.

$$\log. \text{ tang. } 71^\circ 58' 48\frac{1}{4}'' = 10,4877101$$

$$\omega h - k \omega = 0,922988 = \log. 0,9651961$$

$$\hline 11,4529062$$

$$\omega h + k \omega = 12,820698 = \log. 2,1079116$$

$$\hline \log. \text{ tang. } N = 9,3449946$$

Der $\log. \text{ tang. } N$ entspricht dem Winkel von $12^\circ 28' 44''$ und $M + N$ oder der Winkel $\omega k h$ wird $84^\circ 27' 32\frac{1}{4}''$, der Winkel $\omega h k = M - N = 59^\circ 30' 4\frac{1}{4}''$.

Das Dreieck $k h k$ ist ein gleichschenkeliges Dreieck, und wird durch die Linie ωh halbiert, so daß der Winkel $k h k = 2 \cdot k h \omega = 119^\circ 0' 8\frac{1}{2}''$ beträgt, und damit sind alle ebenen Winkel des Trapezoëders gefunden.

Der Winkel der Kante $k'\omega$ findet sich, wenn man von derselben Perpendikel fällt, die in k und k' eintreffen. Da $kk : kk'$ sich wie $\sqrt{2} : 1$ verhält, und der ebene Winkel $\omega kk' = \cos. \frac{1}{2} \omega = 53^\circ 57' 36\frac{1}{2}''$; so erhalten wir nach derselben Methode, nach welcher bei dem Pyramidenwürfel die Kantenwinkel berechnet wurden, die Formel

$$\begin{aligned} \sin. \frac{1}{2} k\omega &= \frac{\sin. \text{tot.}^2 \sqrt{2}}{2 \cdot \sin. 53^\circ 57' 36\frac{1}{2}''} \\ \log. \sin. \text{tot.}^2 + \log. \sqrt{2} &= 21,1505150 \\ - \log. 2 & \quad \quad \quad 1,3010800 \\ \hline & \quad \quad \quad 19,8494850 \\ \log. \sin. 53^\circ 57' 36\frac{1}{2}'' & \quad \quad \quad 9,9077180 \\ \hline \sin. \frac{1}{2} k\omega &= 9,9417670 = 60^\circ 59' 15'' \end{aligned}$$

und der ganze Winkel der Kante $k\omega$ beträgt $121^\circ 58' 30''$.

Der Winkel der Kante kh wird gefunden, wenn man dieselbe bis π verlängert (Fig. 125 b.), wo von ihr abgehende Perpendikel in k' und k eintreffen, wo $k\pi z$ die Hälfte des Kantenwinkels ist. Im Dreieck $k\pi k'$ ist bekannt der Winkel $\pi k k' = \cos. \frac{1}{2} khk = \cos. 59^\circ 30' 4\frac{1}{4}'' = 30^\circ 29' 55\frac{1}{4}''$; $kk' = 2$ angenommen werden und fungirt als $\sin. \text{tot.}$ für den rechten Winkel $k\pi k'$.

Im Dreieck $k'\pi z$ ist bekannt $zk' = \frac{1}{2} k k'$ und πk fungirt als $\sin. \text{tot.}$ für den rechten Winkel bei z .

Die Formel ist $\sin. \frac{1}{2} \pi = \frac{\sin. \text{tot.}^2 1}{2 \cdot \sin. 30^\circ 29' 55\frac{1}{4}''}$

160 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

$$\begin{array}{r} \log. \sin. \text{tot.}^2 + \log. 1. = 21,0000000 \\ - \log. 2. = 1,3010300 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19,6989700 \\ 9,7054536 \end{array}$$

$$\log. \sin. 30^\circ 29' 55\frac{1}{4}'' \quad \log. \sin. \frac{1}{2} \pi = 9,9935164 = 80^\circ 7' 27''.$$

Der ganze Winkel der Kante h k ergibt sich daher zu $160^\circ 14' 54''$.

Die Kante des eingeschlossenen Würfels h h verhält sich zur halben Ecknagel des umschreibenden Oktaeders wie $oh : oq = 2 : 3$ und ist $= \frac{\sqrt{490}}{3}$; die Ecknagel des eingeschlossenen Oktaeders oder die Flächenagel des umschreibenden Würfels $\omega \omega'$ ist gleich $o^* o' = \frac{2}{9} = \frac{\sqrt{490.7}}{9}$; es verhält sich daher die Kante des umschriebenen Würfels zur Flächenagel oder Kante des umschreibenden wie $\frac{1}{3} : \frac{2}{9}$ oder wie $3 : 7$.

Um den Werth der Kante k h zu erfahren, setze man $kh : \frac{1}{2} k k' = \sin. \text{tot.} : \sin. 59^\circ 30' 4\frac{1}{4}''$ oder $kh = \frac{\sin. \text{tot. } 3,5}{\sin. 59^\circ 30' 4\frac{1}{4}''}$, wo man denselben $= \log. 1,6086949$ oder $= 4,06158$ findet.

Wenn bei einem Trapezoeder das Schnittgesetz für den Würfel oder für das Oktaeder gegeben ist, so läßt sich aus einem Schnittgesetze das andere leicht finden, wenn man die beiden ungleichen benachbarten Zahlen addirt, und die kleinere von der größern wieder abzieht. Bei vorstehender Berechnung ist für das Oktaeder das Schnittgesetz $1 \omega 5$ angenommen, giebt für den Würfel das Schnittgesetz $5 + 1 h 5 + 1 = 6 h 6$ oder $3 h 3$.

Aus dem Schnittgesetz für den Würfel $3h^3$ würde sich für das Oктаëder ergeben $3 + 1 \frac{3+1}{3-1} 3 - 1 = 4 \frac{4}{2} 2$.

§. 158.

Bei einem Pyramiden-Oктаëder (Fig. 126.) sey durch Messung der ebene Winkel bei $h = 116^\circ 10' 44''$ und der ebene Winkel ω als halber Nebenwinkel $= 31^\circ 54' 38''$ bekannt, so lassen sich daraus die Kantenwinkel sowohl, wie die verschiedenen Liniengrößen finden. Wir wollen dabei die Oктаëderage $\omega\omega = 4$ und die Oктаëderkante $\omega o = \sqrt{8}$ annehmen.

Verlängert man die Linie ωh bis λ , wo deren abgehende Perpendikel in o und o eintreffen, so ist $o\lambda o'$ der volle Winkel der Kante ωh , und $o\lambda k$ dessen Hälfte. Nach der schon beim Trapezoëder und Pyramidenwürfel angewendeten Formel ist $\sin. \frac{1}{2} \lambda =$

$$\frac{\sin. \text{tot.}^2 k o}{\omega o \cdot \sin. 31^\circ 54' 38''} \cdot \text{Da } k o = \frac{1}{2} \omega o, \text{ so verhält sich } k o : \omega o = 1 : 2.$$

$$\log. \sin. \text{tot.}^2 + \log. 1. = 21,0000000$$

$$- \log. 2. \qquad \qquad \qquad 1,3010300$$

$$19,6989700$$

$$- \log. \sin. 31^\circ 54' 38'' = 9,7231218$$

$$\log. \sin. \frac{1}{2} \lambda = 9,9758482 = 71^\circ 4' 5''.$$

Der volle Winkel der Kante ωh ist $= o\lambda o' = 142^\circ 8' 10''$.

Der Werth der Linie $\omega h = o h$ ergibt sich in dem rechtwinkligen Dreieck $o h k$, (wo $h o = \sin. \text{tot.}$)

$$\text{durch die Formel } h o = \frac{k o \cdot \sin. \text{tot.}}{\cos. 31^\circ 54' 38''}.$$

162 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

$$\log. \frac{\sqrt{8}}{2} + \log. \sin. \text{tot.} = 11,1505150$$

$$- \log. \cos. 31^{\circ} 54' 38'' = 9,9288433$$

$$\log. \omega h = 1,2216717 = 1,665983 = \sqrt{2,775514}.$$

Zieht man das Quadrat von ok vom Quadrate von oh ab, so erhält man für $hk = \sqrt{0,775514} = \log. 0,9447948 = 0,880632$.

Der Werth der Linie ωk oder der Höhe der Flächen des eingeschlossenen Oktaeders wird $\omega o^2 - ok^2 = \sqrt{6} = 2,44949$.

Um den Winkel der Kante oo' zu erhalten, suche man erst den Winkel $hk\omega$, der sich aus der Länge der Seiten des Dreiecks ergibt. Man hat hier

$$\omega h = 1,665983$$

$$k\omega = 2,449490$$

$$hk = 0,880632$$

$$4,996105 = \omega h + k\omega + hk$$

$$\frac{1}{2} (\omega h + k\omega + hk) = 2,498052 = P$$

Die Formel ist $\cos. \frac{1}{2} k = \sqrt{\frac{R^2 P (P - \omega h)}{k\omega \cdot hk}}$

$$\log. \text{rad.}^2 + \log. P = \log. 21,3976014$$

$$\log. P - \omega h = 0,9201594$$

$$22,3177608$$

$$\log. = \sqrt{11,1588804}$$

$$\log. k\omega = 1,3890756$$

$$\log. hk = 0,9447948$$

$$2,3338704 = \log. k\omega \cdot hk$$

$$1,1669352 = \log. \sqrt{(k\omega \cdot hk)}$$

$$\log. \sqrt{R^2 \cdot (P - \omega h)} = 11,1588804$$

$$- \log. \sqrt{k \omega \cdot h k} = 1,1669352$$

$$\log. \cos. \frac{1}{2} k = 9,9919452 = \cos. 11^\circ 0' 37''.$$

Giebt für den ganzen Winkel $\omega k h$ $22^\circ 0' 7''$. Addirt man diesen Winkel zu dem Winkel $\omega k m$, so hat man den halben Winkel der Kanten $\omega \omega$ oder $\omega \omega$. Der Winkel $\omega k m$ ist aber der halbe Winkel der Kante eines Oктаeders, und beträgt darnach $54^\circ 44' 8''$, und der Winkel $h k m$ ist $= 76^\circ 44' 15''$; der volle Winkel $h k h$ wird $153^\circ 28' 30''$.

Um die Kante des eingeschlossenen Würfels $h h$ zu erhalten, deren Hälfte $x h$ ist, setze man $x h : k h = \sin. 76^\circ 44' 15'' : \sin. \text{tot.}$

$$\log. k h = 0,9447948$$

$$+ \log. \sin. 76^\circ 44' 15'' = 9,9882597$$

$$\hline 10,9330545$$

$$- \log. \text{rad.} = 10,$$

$$\log. k h = 0,9330545 = 0,857145$$

$$\text{und } h h = 2 \cdot k h = 1,714290.$$

Die Kante oder Flächenage des umschriebenen Würfels $h h$ verhält sich daher zur Kante oder Flächenage des umschreibenden $\omega \omega$ wie $1,71429 : 4$ oder wie $3 : 7$.

§. 159.

Der Achtundvierzig = Flächner (Fig. 127.) entsteht aus dem Würfel, wenn jede Ecke durch sechs Flächen ersetzt wird, deren auf jede Würfelkante vier kommen, wovon zwei zu der einen, zwei zu der andern Ecke hingeneigt sind. Die zwei an einer Würfelkante neben einander liegenden Flächen verhalten sich zu ein-

ander wie rechts und links ($f' h i$ und $f' q u$ in Fig. A), die zwei zu einer Würfecke geneigten, zu denen, die der andern Ecke zugeneigt sind, wie entgegengesetzt. ($b' g v$ und $b' l x$ zu $f' h i$ und $f' q u$).

Jede Fläche wird durch einen Schnitt entstanden gedacht, der von drei Würfelkanten ungleiche Theile wegnimmt, wie z. B. die Fläche $f h' i'$ in Fig. B, die Kante $h f$ ganz, von der Kante $a b$ die Hälfte und von der Kante $b c$ ein Viertel wegnimmt (Schnittgesetz $1 h 4$).

Jede Fläche muß sich mit ihrer benachbarten Fläche kreuzen und mit ihr eine gemeinschaftliche Durchschnittskante bilden. Es sind aber für jede Fläche drei benachbarte Flächen gegeben, und daher für jede drei Durchschnittskanten, wodurch die Gestalt der Flächen selbst als dreiseitig bestimmt wird.

Die Flächen, mit welcher jede einzelne Fläche zum Durchschnitt kommt, sind: 1) die zu derselben Ecke geneigte und zu derselben Kante gehörige Fläche ($f' h i$ mit $f' q u$ in Fig. A und C); 2) die zu derselben Kante, aber zu der andern Ecke gehörige Fläche ($f' h i$ mit $b' v g$ in Fig. D); 3) die zu derselben Ecke, aber zur benachbarten Kante gehörige Fläche ($f' h i$ mit $a' i m$ in Fig. E).

Soll aber aus dem Würfel dadurch, daß man die Ecken oder Kanten durch Flächen ersetzt, ein neuer, einfacher, regelmäßer Körper entstehen, so müssen diese Flächen eine solche Ausdehnung erhalten, daß die Flächen des Würfels gänzlich durch sie verdrängt werden, und dies wird dann geschehen, wenn in alle Mittelpunkte der Würfel Flächen Durchschnitte fallen, und von jeder Fläche eine Begrenzungslinie durch diesen Mittelpunkt läuft.

Für die nachfolgende Berechnung, die wir in einzelnen Aufgaben theilen, ist das Schnittgesetz $1 h^2 4$ gewählt, und die Länge der Kante des umschreibenden Würfels $= 4$, folglich die Flächendiagonale $= \sqrt{32}$ und die Eckenage $= \sqrt{48}$ festgesetzt.

Erste Aufgabe. Die Ausdehnung der Flächen zu bestimmen, wenn eine Begrenzungslinie den Mittelpunkt der Würfelfläche treffen soll.

In Fig. B. ist $h' i' f$ eine Fläche nach dem Schnittgesetz $1 h^2 4$ gebildet, indem $bf = 4$; $bh' = 2$; $bi' = 1$. Die Linie $h' f$ liegt dem Mittelpunkte r am nächsten und wird ihn daher bei fortgesetzter Vergrößerung der Fläche am ersten erreichen. Um diese Vergrößerung zu erlangen, muß der Punkt n , wo die Linie $h' f$ die Linie r^* schneidet, bis r vorgerückt werden. Nun ist $rn = r^* - n^*$ aber $r^* = h'b = 2$. Folgende Gleichungen bestimmen rn

$$n^* : h'b = f^* : fb = 2 : 4.$$

$$n^* = \frac{1}{2} h'b = 1.$$

$$rn = r^* - n^* = 2 - 1 = 1.$$

Um zu erfahren, wie weit h' vorgerückt werden müsse, darf man nur $h'b$ durch rn verlängern, so wird $hb = h'b + rn = 3$ und hr wird parallel und gleichlang mit $h'n$.

In eben dem Maasse, wie h' nach h vorschreitet, müssen auch die Schnittpunkte f und i' vorschreiten, und da $bh' : bh$ wie $2 : 3$, so werden sich $f : f'$ und $i' : i$ eben so verhalten.



166 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

$$bf (=4) : bf' = 2 : 3; bf' = 6$$

$$bi' (=1) : bi = 2 : 3; bi = 1\frac{1}{2}.$$

Die Linien $f'h$, $f'i$ und hi bestimmen sich aus der Länge der Würfelkanten; denn

$$f'h^2 = f'b^2 + bh^2 = 6^2 + 3^2; f'h = \sqrt{45}$$

$$f'i^2 = f'b^2 + bi^2 = 6^2 + 1\frac{1}{2}^2; f'i = \frac{\sqrt{153}}{2}$$

$$hi^2 = bh^2 + bi^2 = 3^2 + 1\frac{1}{2}^2; hi = \frac{\sqrt{45}}{2}$$

Zweite Aufgabe. Die Durchschnittslinien derjenigen Flächen zu finden, die zu derselben Ecke und Kante gehören (Fig. C).

Die Durchschnittslinien der Flächen $f'hi$ und $f'qu$ ist $f't$ und $f't^2 = f'b^2 + bi^2$

$$bt : b\omega = bi : bq; (bq = hb = 3; bi = 1\frac{1}{2})$$

$$b\omega = \frac{1}{2} bd = \frac{\sqrt{32}}{2} = \sqrt{8}$$

$$bt = \frac{b\omega}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$$

$$f'b = 6^2$$

$$f't = \sqrt{38}.$$

Dritte Aufgabe. Die Durchschnittslinien derjenigen Flächen zu finden, die zu einerlei Kante aber zweierlei Ecken gehören (Fig. D).

Diese Durchschnittslinie ist ro und $ro : hi = f' : f'b = 4 : 6$.

$$ro = \frac{hi \cdot 4}{6} = \frac{\sqrt{45} \cdot 4}{12} = \frac{\sqrt{45}}{3} = \sqrt{5}.$$

Vierte Aufgabe. Die Durchschnittslinien derjenigen Flächen zu finden, die zu einer Ecke aber zu benachbarten Kanten gehören (Fig. E).

Diese Durchschnittslinie ist ri und $ri^2 = rb^2 + bi^2$; rb als halbe Flächendiagonale ist $\sqrt{8}$ und $bi = 1\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{9}}{2}$; daher $ri = \frac{\sqrt{41}}{2}$.

Fünfte Aufgabe. Die Punkte zu bestimmen, wo die Durchschnittslinien der Flächen die Eckenagen des Würfels schneiden.

Die Linie $f't$ (Fig. F) schneidet die Eckenage des Würfels in a und auch die Kantenage in λ , es sind daher zu bestimmen die Linien $\mu\lambda$; μa und $a\lambda$.

$$\begin{aligned} \mu\lambda &= \mu* - \lambda*; \mu* = \omega b = \sqrt{8} \\ \lambda* : tb &= f' : f'b = 2 : 3; \lambda* = \frac{2}{3} tb \\ tb &= \frac{1}{2} \omega b = \sqrt{2} \\ \lambda* &= \frac{1}{3} \omega b \\ \mu\lambda &= \frac{2}{3} \mu* = \frac{\sqrt{8} \cdot 2}{3} \end{aligned}$$

Um μa zu erhalten, ziehe man die Linie bz , wo $\lambda y = tb = \frac{1}{2} \omega b$. Hier verhält sich $\mu a : a b = \mu\lambda : \lambda y = \frac{2}{3} : \frac{1}{2}$ und also auch $\mu a : \mu b = \mu\lambda : \mu y = \frac{2}{3} : \frac{7}{6} = 4 : 7$

$\mu a = \frac{4}{7} \mu b$. Die Linie μb ist die halbe Eckenage des Würfels, daher $= \frac{\sqrt{48}}{2} = \sqrt{12}$ und $\mu a = \frac{\sqrt{12} \cdot 4}{7}$.

Aus diesen Gleichungen ergibt sich auch $a\lambda : b y$ wie $4 : 7$; $b y$ ist $= t\lambda$ und $t\lambda = \frac{1}{3} t f' = \frac{\sqrt{38}}{3}$

$$a\lambda = \frac{\sqrt{38} \cdot 4}{3 \cdot 7}$$

168 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

Die Linie ro schneidet (Fig. D) die Kantenage ρ^* in λ und $r\lambda' : \lambda'o = r* : *o$; $r* = 2$; $*o = \frac{2}{3} bi = 1\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$;

$$r\lambda' : \lambda'o = 2 : 1 \text{ und } r\lambda' : ro = 2 : 3;$$

$$r\lambda' = \frac{ro \cdot 2}{3} = \frac{\sqrt{5} \cdot 2}{3}.$$

Es ist aber λ^* in Fig. D $= \lambda^*$ in Fig. F, da bei beiden der Punkt λ durch die Linie tf' bestimmt wird, und $\alpha\lambda$ und $r\lambda$ treffen in dem gemeinschaftlichen Punkte λ zusammen.

Um $r\alpha'$ in Fig. E zu finden, zeichne man Fig. H, wo $\omega'r = bi = 1\frac{1}{3}$ und $\omega'b = ri = \frac{\sqrt{41}}{2}$.

$$r\alpha' : \omega'b = \mu r : \mu \omega'$$

$$\mu r = 2; \omega'r = 1\frac{1}{3}; \mu r : \mu \omega' = 2 : 3\frac{1}{2} = 4 : 7;$$

$$r\alpha' = \frac{4}{7} \omega'b = \frac{\sqrt{41} \cdot 4}{14} = \frac{\sqrt{41} \cdot 2}{7}.$$

Es ist aber auch $\mu\alpha' : \mu b = \mu r : \mu \omega' = 4 : 7$, und daher $= \mu\alpha$ in Fig. F, so daß die Linie $r\alpha'$ mit $\alpha\lambda$ in dem gemeinschaftlichen Punkte α der Eckenage zusammentrifft.

Hiedurch sind nun alle Werthe der Kanten des Achte- und vierzig-Flächners gefunden und verhalten sich zu einander wie die $\frac{\sqrt{41} \cdot 2}{7} : \frac{\sqrt{5} \cdot 2}{3} : \frac{\sqrt{38} \cdot 4}{21}$.

Die Kante des eingeschlossenen Würfels wird durch die Länge der Linie $\alpha\alpha$ in Fig. F bestimmt, und $\alpha\alpha : bf = \mu\alpha : \mu b = 4 : 7$.

Sechste Aufgabe. Die Winkel der horizontalen Projection zu finden.

170 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

$$\sin. A = \frac{\sqrt{R^2 P (A+B-C) (A+C-B) (B+C-A)}}{2BC}$$

$$\text{Es ist nun } A = \frac{\sqrt{38.4}}{21} = 1,174174 = \log. 1,0697325$$

$$B = \frac{\sqrt{5.2}}{3} = 1,490711 = \log. 1,1733937$$

$$C = \frac{\sqrt{41.2}}{7} = 1,829464 = \log. 1,2623239$$

$$A + B + C = P = 4,494349 = \log. 1,6526668$$

$$\text{Ferner } A + B - C = 0,835421 = \log. 0,9219054$$

$$A + C - B = 1,512927 = - 1,1798174$$

$$B + C - A = 2,146001 = - 1,3316300$$

$$\text{Siczu log. } P = - 1,6526668$$

$$= \log. 5,0860196$$

$$\log. \sqrt{} = 2,5430098$$

$$- \log. 2 = 3010300$$

$$2,2419798$$

$$+ \log. R = 10$$

$$12,2419798$$

$$- \log. BC = 2,4357176$$

$$\log. \sin. a = 9,8062622 = 39^\circ 48' 3''$$

$$= \text{dem Winkel } r.$$

Für sin. B gilt die nämliche Formel, nur wird der Divisor 2 AC.

$$\log. 12,2419798$$

$$- \log. AC \quad 2,3320564$$

$$\log. \sin. b = 9,9099234 = 54^\circ 21' 34'' = \text{Winkel } \alpha.$$

Für sin. C wird der Divisor 2 AB.

$$\log. 12,2419798$$

$$- \log. AB \quad 2,2431262$$

$$\log. \sin. c = 9,9988536 = 85^\circ 50' 20'' \text{ Winkel } \lambda.$$

Addirt man diese drei Winkel zusammen, wo sie $179^{\circ} 59' 57''$ betragen, so ergibt sich für alle drei Winkel gemeinschaftlich noch ein kleiner Rechnungsfehler von $3''$, der auf kleinen Verschiedenheiten der letzten Decimalstelle der Logarithmen beruht, aber für die Anwendung kry- stallographischer Messungen völlig unbedeutend ist.

Achte Aufgabe. Bestimmung der Winkel der Kanten.

Wenn man auf der Kante A Perpendikel errichtet, welche in r und s eintreffen, so ist $r\xi s$ (Fig. K) der Kantenwinkel.

Im Dreieck $r\xi\lambda$ sind bekannt:

$$r\lambda \text{ (s. 5te Aufg.)} = \frac{\sqrt{5} \cdot 2}{3} \text{ und sin. tot.}$$

$$\text{der Winkel } r\lambda\xi \text{ (s. 7te Aufg.)} = 85^{\circ} 50' 20''$$

$$\text{der Winkel } r\xi\lambda = 90^{\circ}$$

$$\text{Es ist daher } r\xi = \frac{r\lambda \cdot \sin. 85^{\circ} 50' 20''}{\sin. \text{tot.}}$$

$$\log. r\lambda = 1,1733937$$

$$\log. \sin. 85^{\circ} 50\frac{2}{3}' = 9,9988536$$

$$\hline 11,1722473$$

$$- \log. \sin. \text{tot. } 10$$

$$\hline \log. r\xi = 1,1722473$$

Im Dreieck $r\xi\beta$ sind nun bekannt:

$$r\xi = \sin. \text{tot. und } \log. 1,1722473$$

$$r\beta = \frac{1}{2} rs = \text{der halben Kante des eingeschlossenen Oктаeders} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Es ist daher } \sin. \frac{1}{2}\xi = \frac{\sin. \text{tot. } \sqrt{2}}{r\xi}$$

172 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

$$\begin{array}{r} \log. \sin. \text{tot.} + \log. \sqrt{2} = 11,1505150 \\ - \log. + r\xi \qquad \qquad \qquad 1,1722473 \end{array}$$

$$\log. \sin. \frac{\xi}{2} = 9,9782677 = 72^\circ 1' 29''.$$

Der ganze Winkel der Kante A = $144^\circ 2' 58''$.

Bei der Kante B fälle man von derselben (Fig. L) Perpendikel, die in α und α eintreffen, so ist $\alpha\xi\alpha$ der gesuchte Winkel und $\alpha\xi\beta$ dessen Hälfte.

$$\alpha\xi = \frac{\alpha\lambda \cdot \sin. 80^\circ 50' 20''}{\sin. \text{tot.}}$$

$$\log. \alpha\lambda \text{ (s. 7te Aufg.)} = 1,0697323$$

$$\log. \sin. 80^\circ 50' 20'' = 9,9988536$$

$$\log. \alpha\xi = 11,0685861 - 10$$

$$\sin. \frac{\xi}{2} = \frac{\sin. \text{tot.} \alpha\beta}{\alpha\xi}$$

$\beta\alpha$ ist die halbe Kante des eingeschlossenen Würfels $\alpha\alpha$ (s. 5te Aufg.) und als solche = $\frac{4}{14}$ der Kante des umschreibenden Würfels oder = $\frac{4 \cdot 4}{14} = \frac{8}{7} = \log. 1,0579920$.

$$\log. \sin. \text{tot.} + \log. \alpha\beta = 11,0579920$$

$$- \log. \beta\alpha \qquad \qquad \qquad = 1,0685861$$

$$\log. \sin. \frac{\xi}{2} = 9,9894059 = 77^\circ 23' 45''.$$

Der ganze Winkel der Kante B = $154^\circ 47' 30''$.

Bei der Kante C fällt man auf gleiche Weise Perpendikel nach ζ und λ , wo $\zeta\xi\lambda$ (Fig. M) den gesuchten Winkel, $\lambda\xi\beta$ dessen Hälfte giebt.

$$\xi\lambda = \frac{\alpha\lambda \cdot \sin. 54^\circ 21' 34''}{\sin. \text{tot.}}$$

$$\log. \sin. 54^\circ 21' 34'' = 9,9099234$$

$$\log. \alpha\lambda \qquad \qquad \qquad = 1,0697325$$

$$\log. \xi\lambda = 10,9796559 - 10.$$

$$\sin. \frac{1}{2} \xi = \frac{\sin. \text{tot. } \beta\lambda}{\xi\lambda}$$

$$\beta\lambda \text{ ist} = \frac{1}{2} \xi\lambda.$$

Um $\xi\lambda$ zu finden, vergleiche man Fig. J, wo $\zeta\zeta'$ und $\lambda''\lambda'$ gleichlang sind und in der Mitte sich rechtwinkelig kreuzen; daher verhält sich $\xi\lambda : \zeta\zeta'$ oder zu $\lambda''\lambda' = \sqrt{2} : 2$. Die Linie $\lambda''\lambda'$ ergibt sich aus Fig. G, wo $\lambda''\lambda' : oo' = r\lambda : ro = 2 : 3$ (s. 5te Aufgabe), und $\lambda''\lambda'$ ist $= \frac{2}{3} oo'$, oder da $oo = bf = 4$, so ist $\lambda''\lambda' = \frac{8}{3}$.

$$\xi\lambda = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3}; \beta\lambda = \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{3} = \log. 0,9744237$$

$$\log. \sin. \text{tot. } \xi + \log. \beta\lambda = 10,9744237$$

$$- \log. \xi\lambda \quad \quad \quad 9796559$$

$$\log. \sin. \frac{1}{2} \xi = 9,9947678 = 81^\circ 7' 26''.$$

Der ganze Winkel der Kante C $= 162^\circ 14' 52''$.

§. 160.

Die Verhältnisse der hemiedrischen Körper des tetrahedralen Systems ergeben sich aus ihrer Ableitung von den homoedrischen Körpern. Bei dem Tetraeder sind alle Kanten gleichwerthig, alle Flächen daher gleichseitige Dreiecke, und der Winkel der Kanten ist der Nebenwinkel des Winkels der Kante des Oktaeders und daher $70^\circ 31' 44''$. Die Kante des Stamm-Oktaeders verhält sich zur Kante des abgeleiteten Oktaeders wie 1 : 2. Bei den übrigen hemiedrischen Körpern bleiben mehrere Winkel und auch das Verhältniß des umschriebenen und umschreibenden Würfels unverändert, und geben dadurch die Hülfsmittel zur Berechnung an die Hand.

Pyramidal-System.

§. 161.

In dem Pyramidal-Systeme muß eine einfache Gestalt ganz oder doch theilweise in ihren Größen als durch Beobachtung bekannt vorausgesetzt werden, um die übrigen Körper, ihrer Ableitung gemäß, daraus berechnen zu können. Nehmen wir beim Idoctras den Winkel der Polkante der normalen Quadratpyramide ($g' \times g'$ in Taf. VII. Fig. 1.), durch Messung zu $129^\circ 29'$ gefunden an, setzen wir den Werth der Grundkante $= 4$ und den der Grunddeckenage dem gemäß $= \sqrt{32}$ an, so haben wir die nöthigen Bestimmungen, um die übrigen Verhältnisse berechnen zu können.

Berechnung der ebenen Winkel.

Im Dreieck $m \times g'$ Fig. 1. sind bekannt

$$mg' = \frac{\sqrt{32}}{2} = \sqrt{8}$$

$$\text{Winkel } mxg' = \frac{129^\circ 29'}{2} = 64^\circ 44' 30''$$

$$\text{Winkel } xmg' = 90^\circ$$

$$\text{Daraus ergibt sich } xg' = \frac{mg' \cdot \sin. \text{ tot.}}{\sin. 64^\circ 44' 30''}$$

$$\log. \sin. \text{ tot.} + \log. \sqrt{8} = 11,4515450$$

$$- \log. \sin. 64^\circ 44' 30'' = 9,9563540$$

$$\log. xg' = 1,4951910 = 3,12745.$$

Im Dreieck $g \times g'$ sind jetzt bekannt

$$gg' = 4$$

$$xg' = 3,12745$$

$$\text{Winkel } gxg' = 90^\circ.$$

$$\text{Also sin. des Winkels bei } g = \frac{\text{sin. tot. } xg'}{gg'}$$

$$\log. \text{ sin. tot. } + \log. xg' = 11,4951910$$

$$- \log. 4. = 1,6020600$$

$$\log. \text{ sin. } g = 9,8931310 = 51^\circ 25' 53''.$$

Da die Fläche pgg' ein gleichschenkeliges Dreieck bildet, wo die Winkel bei g und g' gleich sind und jeder $51^\circ 25' 53''$ beträgt, so ist der ebene Winkel bei $p = 180^\circ - 2 \cdot 51^\circ 25' 53''; = 77^\circ 8' 14''$.

§. 162.

Bestimmung der Höhe der Flächen und der Länge der Kante und Polaxe.

In Fig. 2. ist pb die Höhe der Flächen und bg die halbe Grundkante oder $= 2$. Der Winkel pbg ist $= 90^\circ$, daher $pb = \frac{bg \cdot \text{tang. } g}{\text{rad.}}$.

$$\log. bg = \log. 2. = 1,3010300$$

$$\log. \text{ tang. } 51^\circ 25' 53'' = 10,0983276$$

$$\log. pb = \log. 11,3993576 - 10 = 2,50817 = \sqrt{6,290934}$$

Für die Kante giebt die Formel $pg^2 = pb^2 + bg^2$ die Größe an, und $pg = \sqrt{10,290934} = 3,20794$. Auch kann man setzen $pg = \frac{pb \cdot \text{sin. tot.}}{\text{sin. } 51^\circ 25' 53''}$, wo man $pg = \log. 1,5062266 = 3,20794$ erhält.

176 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

Die halbe Polaxe $p m$ Fig. 1. ergibt sich aus der Formel $p m^2 = p g^a - g m^2$, und da $g m = \sqrt{8}$, so ist $p m = \sqrt{2,290934}$ und $p p = \sqrt{9,163736}$. Will man aber die Grundkante $g g' = 1$ annehmen, so wird $p p = \frac{\sqrt{9,163736}}{4} = \sqrt{0,572733}$.

§. 163.

Berechnung des Winkels der Grundkante.

Dieser Kantenwinkel wird in Fig. 2. durch das gleichschenkelige Dreieck $p b p$ bestimmt, und da die Werthe von $p p$ und $p b$ bekannt sind, so wird, wenn man den Winkel bei b halbiert, die Hälfte von $p p$ ($= p m$) zu $p b$ sich verhalten wie der sinus des halben Winkels bei b zum sin. tot.

$$\sin. \frac{1}{2} b = \frac{\sin. \text{tot. } p m}{p b}$$

$$\log. \sin. \text{tot.} + \log. p m = 11,1800063$$

$$- \log. p b \quad \quad \quad 1,3993576$$

$$\log. \sin. \frac{1}{2} b \quad \quad \quad \frac{9,7806487}{=} = 37^\circ 7' 5''.$$

Der ganze Winkel der Grundkante ist $= 74^\circ 14' 10''$.

§. 164.

Berechnung der Winkel von P—1.

In Fig. 2. ist $p \gamma \gamma$ eine Fläche der nächstfolgenden stumpferen Quadratpyramide und ihre Grundkante $\gamma \gamma$ ist $=$ der Grunddeckenage $g' g'$ der Normalpyramide,

$= \sqrt{32}$ und γg als die Hälfte $= \sqrt{8}$. Die Polkante pg der Normalpyramide wird zur Höhe der Flächen der $P-1$ und $\text{tang. } \gamma = \frac{\text{rad. } pg}{\gamma g}$

$$\begin{aligned} \log. \text{rad.} + \log. pg &= 11,5062266 \\ - \log. \sqrt{8} &= 1,4515450 \\ \log. \text{tang. } \gamma &= 10,0546816 = 48^\circ 35' 51''. \end{aligned}$$

Da nun der ebene Winkel $p\gamma g = 48^\circ 35' 51''$, so ist der ebene Winkel bei $p = 82^\circ 48' 18''$.

Da die Länge der Kante $\gamma\gamma$ auch die Länge der Eckenage $\gamma\gamma'$ zu $32^2 + 32^2$ also $= \sqrt{64}$ ergibt, und ihre Hälfte $= \sqrt{16}$, so läßt sich für den halben Winkel der Polkante, den wir y nennen wollen, die Formel anwenden:

$$\sin. y = \frac{\sin. \text{tot.}^2 4}{\sqrt{32} \cdot \sin. 48^\circ 35' 51''} \text{ oder } = \frac{\sin. \text{tot.}^2}{\sqrt{2} \cdot \sin. 48^\circ 35' 51''}$$

gibt $70^\circ 30' 39''$ und für den ganzen Winkel der Polkante $141^\circ 1' 18''$.

Der halbe Winkel der Randkante ist gleich dem Winkel pgm in Fig. 1. und $\text{tang. } g : \text{rad.} = pm : gm$
oder $\text{tang. } g = \frac{\text{rad. } \sqrt{2,290984}}{\sqrt{8}} = 28^\circ 9' 9''$, und der ganze Grundkantenvinkel pgp beträgt $56^\circ 18' 18''$.

§. 165.

Berechnung der Winkel der Pyramide + 1.

Die Grundkanten dieser Pyramide bilden bb' in Fig. 2., und da wir $gg' = 4$ und $gb' = 2$ angenommen haben, so beträgt (s. Fig. 3.) bb' die Hälfte

178 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

von $g'g'$ oder $\sqrt{8}$, und die Grunddeckenage $b'b'$ wird
 $= g'g' = 4$.

Nehmen wir in den beiden Dreiecken pgb' und
 $p'b'r$ die Linie pb als gemeinschaftlichen Kreis halbmess-
 ser an, so wird gb' die Tangente des ebenen Winkels
 gpb' und $b'r$ oder $\frac{1}{2}b'b'$ der Sinus des Winkels $b'pr$.
 Es ist daher $\sin. b'pr = \frac{\text{cotang. } 51^\circ 25' 53'' \cdot \frac{1}{2}b'b'}{gb'}$ oder
 $\sin. b'pr = \frac{\text{cotang. } 51^\circ 25' 53'' \cdot \sqrt{2}}{2} = 34^\circ 19' 18''$.

Der Winkel $p'b'r$ als Winkel des $\cosin.$ ist nun 55°
 $40' 42''$ und der Winkel $b'pb = 68^\circ 38' 36''$.

Die Kantenwinkel ergeben sich aus den ebenen Win-
 keln und der Länge der Grunddeckenage und der Grund-
 kantenage. Die halbe Polaxe giebt die Tangente des hal-
 ben Winkels der Grundkante, wenn man die halbe
 Grundkantenage als Radius annimmt, und da die halbe
 Grundkantenage $= \frac{bb'}{2} = br = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$, so
 ist die gesuchte tang. $= \frac{\text{rad. } pm}{\sqrt{2}} = 46^\circ 56' 37''$
 und der ganze Grundkantenwinkel $93^\circ 53' 14''$.

Der halbe Winkel der Polkante bestimmt sich aus
 dem Verhalten der halben Grunddeckenage $mb' = 2$
 zur Grundkante $b'b = \sqrt{8}$ durch folgende Formel:

$$\sin. \frac{1}{2}pb = \frac{\sin. \text{tot.}^2 2}{\sqrt{8} \cdot \sin. 55^\circ 40' 42''} = 58^\circ 53' 26''$$

und der volle Winkel der Polkante ist $117^\circ 46' 52''$.

§. 166.

Berechnung der Kanten und Axen der Zirkonpyramide.

Die Zirkonpyramide läßt sich aus der Quadratpyramide durch Zuschärfung der Polkanten bilden. Man ziehe (Fig. 14. A) vom Mittelpunkte λ der Polkante $p\gamma'$ Linien nach γ und γ'' und aus den Grundecken γ'' und γ Linien in die Mitte der Linien $\lambda\gamma$, so werden dieselben in der Kantenage $\lambda\lambda'$ zum Durchschnitt kommen und den Mittelpunkt der Polkante der Zirkonpyramide $\pi\beta$ bestimmen, die mit $p\gamma'$ parallel läuft. Die Flächen $\pi\beta\gamma$ und $\pi\beta\gamma''$ bilden tangirende Ebenen für die Linien $t'\gamma$ und $t\gamma''$. Es verhält sich nun $t'r$ zu $r\gamma$ wie $t'\lambda$ zu $\lambda\gamma$ oder wie $\frac{1}{2}:1$ und $r\gamma$ ist $\frac{2}{3}t'\gamma$. So ist auch $\lambda r = \frac{1}{3}\lambda\lambda'$ oder $\frac{2}{3}\lambda m$ und $\pi\beta = \frac{1}{3}p\gamma'$ und $m\beta = \frac{1}{3}m\gamma'$; so wie $\gamma''\beta = \frac{2}{3}\gamma''g$ und $p\pi = \frac{2}{3}pm$.

Legt man auf diese Weise in jede Polkante zwei Flächen, so müssen auch die zu benachbarten Polkanten gehörigen Flächen mit einander zum Durchschnitt kommen, und der eine Durchschnittspunkt ist die Polecke π , der andere ergibt sich aus Fig. 14. als b und wird $= \frac{1}{2}mg$, weil $mb:g\gamma = g'm:g'g = 1:2$ sich verhält.

Nehmen wir die Grundkante der normalen Quadratpyramide $= 4$ und die halbe Polaxe $pm = \sqrt{2,290934}$ (s. §. 162.) an, so ist

$$\pi m = \frac{1}{3}pm = \frac{\sqrt{2,290934}}{3} = \sqrt{0,254548}.$$

$$mb = 1$$

180 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

$$m\beta = \frac{2}{3} m\gamma = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$b g''^2 = m b^2 + b g'' = \sqrt{5}$$

$$b\beta = \frac{2}{3} b g'' = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\pi\beta^2 = \pi m^2 + m\beta^2 = \frac{\sqrt{10,290934}}{3}$$

$$\pi b^2 = \pi m^2 + m b^2 = \sqrt{1,254548}.$$

§. 167.

Berechnung der Winkel der horizontalen Projection der Zirkonpyramide.

In Fig. 14. ist im rechtwinkligen Dreieck $m b g''$ die Linie $m g'' = 2$ und bildet die Tangente des Winkels bei b , und $m b = 1$ den Radius, daher

$$\text{tang. } b = \text{rad. } 2 = 10,3010300 = 63^\circ 26' 6''$$

Der Winkel $\beta b\beta$ ist zweimal dem Winkel $m b\beta$ und $= 126^\circ 52' 12''$. Der Nebenwinkel davon beträgt $53^\circ 7' 48''$, und addirt man zu diesem 90° , so erhält man für den Winkel $b\beta b$ $143^\circ 7' 48''$. Diese Winkel sind auch die Winkel der Seitenkanten des Zirkonprisma's.

§. 168.

Berechnung der ebenen Winkel der Zirkonpyramide.

Die Flächen der Zirkonpyramide bilden ungleichseitige Dreiecke, deren Seiten bekannt sind. Bezeichnen wir die Seite πb mit b , die Seite $\pi\beta$ mit β und die

Seite $b\beta$ mit q , nennen wir ferner $\frac{1}{2}(b+\beta+q)$
 $= P$; so ist $\sin. \frac{1}{2} \pi = \sqrt{\frac{R^2 (P-b)(P-\beta)}{b\beta}}$.

Es ist nun nach voriger Berechnung

$$b = \sqrt{1,254548} = 1,120066 = \log. 1,0492436$$

$$\beta = \frac{\sqrt{10,29034}}{3} = 1,069315 = \log. 1,0291061$$

$$q = \frac{\sqrt{5}}{3} = 0,745356 = \log. 0,8723637$$

$$b + \beta + q = 2,934737$$

$$P = 1,467369$$

$$P - b = 0,347303 = \log. 0,5407076$$

$$P - \beta = 0,398054 = \log. 0,5999420$$

$$R^2 = 10, = \log. 20,0000000$$

$$R^2 (P-b)(P-\beta) = 21,1406496$$

$$\log. \sqrt{} = 10,5703248$$

$$- \log. \sqrt{b\beta} = 1,0391748$$

$$\log. \sin. \frac{1}{2} \pi = 9,5311500 = 19^\circ 51' 40''$$

$$\log. b + \log. b\beta = 2,0783497$$

$$\log. \sqrt{b\beta} = 1,0391748$$

Es ist daher der volle ebene Winkel $b\pi\beta = 39^\circ 43' 21''$. Sucht man nach derselben Formel die andern beiden ebenen Winkel, so ergibt sich der Winkel $\pi b\beta$ zu $66^\circ 28' 1''$ und der Winkel $\pi\beta b$ zu $73^\circ 48' 38''$.

§. 169.

Berechnung der Kantenwinkel der Zirkonpyramide.

Wenn man in Fig. 12. von der Kante πb Perpendikel fällt, die in β und β eintreffen, so ist $\beta y \beta$ der Winkel dieser Kante. In dem Dreieck $\beta y \beta$ ist die Linie $\beta \beta$ (s. Fig. 14.) $= \frac{1}{3} \gamma' \gamma = \frac{4}{3}$, und ihre Hälfte

182 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

der Sinus des halben Winkels bei y , wobei die Linie $y\beta$ zum $\sin. \text{tot.}$ wird. Im Dreieck $b y \beta$ ist bekannt die Linie $b\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$, der Winkel bei $b = 66^\circ 28' 1''$ und $y\beta$ bildet hier den Sinus des Winkels bei b .

$$\sin. \frac{x}{2} y = \frac{\sin. \text{tot.}^2 \frac{x}{2} \beta \beta}{b \beta \cdot \sin. 66^\circ 28' 1''} \text{ oder } = \frac{\sin. \text{tot.}^2 2}{\sqrt{5} \cdot \sin. 66^\circ 28' 1''}$$

$$\begin{aligned} \log. \sin. \text{tot.}^2 + \log. 2 &= 21,3010300 \\ - \log. \sqrt{5} &= 1,3494850 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &19,9515450 \\ - \log. \sin. 66^\circ 28' 1'' &= 9,9622893 \end{aligned}$$

$$\log. \sin. \frac{x}{2} y = 9,9892557 = 77^\circ 18' 27\frac{1}{2}''.$$

Giebt für den Winkel $\beta y \beta$ $154^\circ 36' 55''$.

Verfährt man bei der Kante $\pi\beta$, wo $b\omega b$ den Winkel bildet und $b b = \frac{1}{2} g g'' = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$ ist, eben so, so erhält man die Formel:

$$\sin. \frac{x}{2} \omega = \frac{\sin. \text{tot.}^2 \sqrt{2} \cdot 3}{\sqrt{5} \cdot 2 \cdot \sin. 73^\circ 48' 38''} = 81^\circ 3' 44''$$

giebt für den vollen Winkel $\beta \omega \beta$ $162^\circ 7' 28''$.

Der halbe Winkel der Grundkante ist $\pi s m$ und da $\pi m = \sqrt{0,254548}$, so erhält man die Formel:

$$\sin. \frac{x}{2} s = \frac{\sin. \text{tot.}^2 \pi m}{\pi \beta \cdot \sin. \beta} = 29^\circ 25' 35\frac{1}{2}''$$

giebt für den vollen Winkel $\pi s \pi$ $58^\circ 51' 11''$.

§. 170.

Berechnung des Winkels der von oben gegen unten abwechselnden Flächen.

Um den Winkel zu bestimmen, den in Fig. 17. die Fläche g der obern Pyramide mit der Fläche g der untern Pyramide macht, erweitere man in Fig. 13. die um β herumliegenden vier Flächen so weit, bis eine rhombische Pyramide gebildet wird, deren Grundkanten in einer Ebene liegen. Dies ist dann der Fall, wenn die Begränzungskanten πh nach $\pi \gamma$ fortgerückt werden, und Fig. 13 a. stellt diese rhombische Pyramide dar. Legt man nun senkrecht auf die Ecke β eine Linie, die parallel mit der Linie $\pi \gamma'$ läuft, und fällt von dieser Perpendikel auf die Linie $\pi \gamma'$, so ist der Winkel, in welchem diese Perpendikel zusammenstoßen, der gesuchte Winkel.

In Fig. 13 a. ist $z\beta m$ die Hälfte des gesuchten Winkels, und es sind in diesem Dreiecke bekannt:

$$zm = \frac{1}{2} \pi \gamma$$

$$\pi \gamma = \gamma \pi m^2 + \gamma m \gamma^2$$

$$\pi \mu \text{ (f. §. 166.)} = \sqrt{0,254548}$$

$$m \gamma \text{ (f. §. 161.)} = \sqrt{8}$$

$$\pi \gamma = \sqrt{8,254548}$$

$$zm = \frac{1}{2} \pi \gamma = \sqrt{2,063637}$$

$$\beta m \text{ (f. §. 166.)} = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\text{der Winkel } \beta m z = 90^\circ.$$

184 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

Daraus ergibt sich die Formel:

$$\text{tang. } \frac{1}{2} \beta = \frac{\text{rad. } z m}{\beta m}$$

$$\text{log. rad. } + \text{log. } z m = \text{log. } 11,1573166$$

$$- \text{log. } \beta m = \text{log. } 9744237$$

$$\text{log. tang. } \frac{1}{2} \beta = \frac{10,1828929}{10,1828929} = 56^\circ 43' 22''.$$

Der volle Winkel beträgt daher $113^\circ 26' 44''$.

Prismatisches System.

§. 171.

Für das prismatische System sey der Topas als Beispiel gewählt, und es sey in Fig. 6. die Neigung der Fläche M gegen R $135^\circ 27' 30''$ und von R gegen R' $124^\circ 19'$. Daraus ergibt sich die Neigung der Fläche M gegen M' oder der Winkel der Grundkante der Rhombenpyramide $= 180^\circ - 2 \cdot \cos. 135^\circ 27' 30'' = 90^\circ 55'$. Die Länge der halben Polaxe der Rhombenpyramide (Fig. 4. p m) nehmen wir $= 1$ und die Winkel der horizontalen Projection bei y sind $=$ dem Winkel von R auf R' $= 124^\circ 19'$.

§. 172.

Bestimmung der Mandaren und Kanten der Rhombenpyramide.

Man vergleiche in Fig. 1 und 4. die horizontale Projection xy und falle von der Grundkante auf die Mitte der Polaxe einen Perpendikel rm, so ist der Winkel pr m die Hälfte des Winkels der Grund-

Kante der Rhombenpyramide und als solcher $\equiv \frac{1}{2} 90^\circ 55'$
 $\equiv 45^\circ 27' 30''$. Es verhält sich nun $r m : p m = \cotang.$
 $45^\circ 27' 30'' : \text{rad. oder } r m = \frac{1. \cotang. 45^\circ 27' 30''}{\text{rad.}}$

$$\begin{aligned} \log. \cotang. 45^\circ 27' 30'' &= 9,9930514 \\ + \log. 1 &= 1, \end{aligned}$$

$$\log. r m = 0,9930514$$

$$r m = 0,9841275 = \sqrt{0,968507.}$$

Es verhält sich ferner $m y : r m = \sin. \text{ tot.}$
 $\sin. \frac{1}{2} y$

$$\log. r m + \log. \sin. \text{ tot.} = 10,9930514$$

$$- \log. \sin. \frac{1}{2} y = \log. 62^\circ 9' 30'' = 9,9465709$$

$$\log. m y = 1,0464805$$

$$m y = 1,112963 = \sqrt{1,238685.}$$

Um $m x$ zu finden, setze man $m x : m y = \text{tang.}$
 $62^\circ 9' 30''$
 $\text{rad. oder } m x = \frac{m y \cdot \text{tang. } 62^\circ 9' 30''}{\text{rad.}}$

$$\log. \text{tang. } 62^\circ 9' 30'' = 10,2772263$$

$$+ \log. m y = 1,0464805$$

$$\log. m x = 1,3237068$$

$$m x = 2,107205 = \sqrt{4,440313.}$$

Es ist nun

$$\text{die Grundkante } x y = m x^2 + m y^2 = \sqrt{5,678998}$$

$$\text{die Polkante } p y = p m^2 + m y^2 = \sqrt{2,238685}$$

$$\text{die Polkante } p x = p m^2 + m x^2 = \sqrt{5,440313.}$$

§. 173.

Bestimmung der ebenen Winkel der Rhombenpyramide.

Man suche in Fig. 4. zuerst die Linie $p r$, die rechtwinkelig gegen $x y$ steht, und da $p r^2 = p m^2 + r m^2$,

186 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

so ergiebt sich $pr = \sqrt{1,968507} = 1,40303 =$
 $\log. 1,1470684.$

Für den ebenen Winkel bei y gilt nun die Formel:

$$\sin. y = \frac{\sin. \text{tot. } pr}{p y}$$

$$\log. \sin. \text{tot.} + \log. pr = 11,1470684$$

$$- \log. p y = 1,1749965$$

$$\log. \sin. y = 9,9720719 = 69^\circ 40' 18''.$$

Für den ebenen Winkel bei x haben wir

$$\sin. x = \frac{\sin. \text{tot. } pr}{p x}$$

$$\log. \sin. \text{tot.} + \log. pr = 11,1470684$$

$$- \log. p x = 1,3678119$$

$$\log. \sin. x = 9,7792565 = 36^\circ 58' 45''.$$

Zieht man den Winkel x nebst dem Winkel y von 180° ab, so erhält man den ebenen Winkel bei $p = 73^\circ 20' 57''.$

§. 174.

Bestimmung der Kantenwinkel der Rhombenpyramide.

Fällt man von einem Punkte der Kante $p y$ Perpendikel, die in x und x eintreffen, so ist der Winkel, unter dem diese Perpendikel in der Kante zusammenstoßen, für diese Kante der gesuchte Winkel, den wir mit λ bezeichnen. Legt man eben so von der Kante $p x$ Perpendikel nach y und y , so erhält man den Winkel dieser Kante, den wir mit ρ bezeichnen wollen.

Für λ gilt die Formel:

$$\sin. \frac{x}{2} \lambda = \frac{\sin. \text{tot.}^2 \cdot x \cdot m}{x \cdot y \cdot \sin. y}$$

log. sin. tot. ² + log. m x	=	21,3237068
— log. x y	=	1,3771358
		19,9465710
— log. sin. 69° 40' 18"	=	9,9720719
		log. sin. $\frac{x}{2} \lambda = 9,9744991 = 70^\circ 33' 14''$

$\lambda = 141^\circ 6' 28''$.

Für ρ gilt die Formel:

$$\sin. \frac{x}{2} \rho = \frac{\sin. \text{tot.}^2 \cdot m \cdot y}{x \cdot y \cdot \sin. x}$$

log. sin. tot. ² + log. m y	=	21,0464805
— log. x y	=	1,3771358
		19,6693447
— log. sin. 37° 27' 3"	=	9,7792119
		log. sin. $\frac{x}{2} \rho = 9,8901338 = 50^\circ 56' 24''$

$\rho = 101^\circ 52' 48''$.

Den Winkel der Grundkante x y haben wir §. 171. zu 90° 55' gefunden.

§. 175.

Bestimmung von P + 1.

Behält man alle Größen der horizontalen Projection unverändert bei, und multiplicirt die Polage p m mit 2, so erhält man für P + 1 folgende Werthe:

$p m = 2 = \sqrt{4}$
 $p y = \sqrt{5}, 238685$
 $p x = \sqrt{8}, 440313$
 $p r = \sqrt{4}, 968507.$

188 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

Für den ebenen Winkel bei y ist die Formel

$$\sin. y = \frac{\sin. \text{tot. } p r}{p y} = \log. 9,9885019' = 76^{\circ} 52' 25''.$$

Für den ebenen Winkel bei x

$$\sin. x = \frac{\sin. \text{tot. } p r}{p x} = \log. 9,8849337 = 50^{\circ} 6' 25''$$

Bleibt für den ebenen Winkel bei p $53^{\circ} 1' 10''$.

Der halbe Winkel der Grundkante ($\frac{1}{2} r$) ergibt sich aus der Gleichung

$$\text{tang. } \frac{1}{2} r = \frac{\text{rad. } 2}{m r} = \log. 10,8079786 = 63^{\circ} 48'.$$

Der ganze Winkel der Grundkante x y mißt daher $127^{\circ} 36'$.

Der halbe Winkel der Polkante p y oder $\frac{1}{2} \lambda$ ist

$$\sin. \frac{1}{2} \lambda = \frac{\sin. \text{tot.}^2 m x}{x y \cdot \sin. y} = \log. 9,9580691 = 65^{\circ} 13' 32''$$

$$\lambda = 130^{\circ} 27' 4''.$$

Der halbe Winkel der Polkante p x oder $\frac{1}{2} \rho$ ist

$$\sin. \frac{1}{2} \rho = \frac{\sin. \text{tot.}^2 m y}{x y \cdot \sin. x} = \log. 9,7844110 = 37^{\circ} 29' 46''$$

$$\rho = 74^{\circ} 59' 32''.$$

§. 176.

Bestimmung von P — 1.

Man behalte auch hier alle Größen der horizontalen Projection unverändert bei, und dividire die Polage p m durch 2, wo man folgende Werthe erhält:

$$\begin{aligned}
 pm &= \frac{r}{2} = \sqrt{0,25} \\
 py &= \sqrt{1,488685} \\
 px &= \sqrt{4,690313} \\
 pr &= \sqrt{1,218507}.
 \end{aligned}$$

Setzt man bei diesen Größen dieselbe Berechnungsart zu Grunde, wie in den vorigen beiden Fällen, so erhält man

$$\begin{aligned}
 \text{den ebenen Winkel bei } y &= \log. \sin. 9,9615126 = 66^\circ 14' \\
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \alpha &= \text{---} \text{---} 9,7073132 = 30^\circ 38' 37'' \\
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} p &= 480^\circ - (\alpha + y) = 85^\circ 7' 23'' \\
 \text{der Winkel der Kante } xy &= 53^\circ 52' 1'' \\
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} py &= 150^\circ 6' 46'' \\
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} px &= 132^\circ 46' 42''.
 \end{aligned}$$

§. 177.

Bestimmung der ebenen Winkel der Oblongpyramide.

Die Grundkanten einer umschreibenden Oblongpyramide entsprechen den Grundkanten der umschriebenen Rhombenpyramide und gg in Fig. 1. ist $= yy$, so wie $gg' = xx$. Die halbe Grundkante mg dient für das Parallelogramm $myxg$ als Diagonale und ist daher der andern Diagonale xy oder der Grundkante der Rhombenpyramide gleich. Die Höhen der Flächen der Oblongpyramide px und py in Fig. 2. entsprechen den Polkanten der umschriebenen Rhombenpyramide.

Es gehen daraus folgende Werthe für die Kanten und Aegen der Oblongpyramide Fig. 2. hervor:

$$\begin{aligned}
 pm &\text{ bleibt unverändert} = 1 \\
 \text{die Grundkante } gg &= yy = 2. \quad my = \sqrt{4,954740}; \quad gx = my \\
 \text{---} \text{---} \text{---} \quad gg' &= xx = 2. \quad mx = \sqrt{17,761252}; \quad g'y = mx
 \end{aligned}$$

190 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

die halbe Grunddeckenare $mg = xy = \sqrt{5,678998}$

die Kantenlänge $pg = \sqrt{(pm^2 + mg^2)} = \sqrt{6,678998}$;

die Flächenhöhe $px = \sqrt{5,440313}$ (§. 172.)

die Flächenhöhe $py = \sqrt{2,238685}$ (§. 172.).

Für den ebenen Winkel pgx bildet px die Tangente gx ($= my$) den Radius

$$\text{tang. } g = \frac{\text{rad. } px}{gx}$$

$$\text{log. rad. } + \text{ log. } px = 11,3678119$$

$$- \text{ log. } gx = 1,0464805$$

$$\text{log. tang. } g = 10,3213314 = 64^\circ 29' 28''.$$

Da das Dreieck pgg gleichschenkelig ist, so sind die Winkel bei g einander gleich und der ebene Winkel bei p , als deren Ergänzung zu 180° beträgt $51^\circ 1' 4''$.

Für den ebenen Winkel pgg' bildet py die Tangente und gy ($= mx$) den Radius.

$$\text{tang. } g = \frac{\text{rad. } py}{gy}$$

$$\text{log. rad. } + \text{ log. } py = 11,1749965$$

$$- \text{ log. } gy = 1,3237068$$

$$\text{log. tang. } g = 9,8512897 = 35^\circ 22' 36''.$$

Der ebene Winkel bei p beträgt nun in diesem gleichschenkeligen Dreiecke $109^\circ 14' 48''$.

§. 178.

Bestimmung der Kantenwinkel der Oblongpyramide.

Für den halben Winkel x der Grundkante gg in Fig. 2. bildet pm den Sinus; px den sin. tot.

$$\sin. \frac{x}{2} = \frac{\sin. \text{tot. } p m}{p x}$$

$$\log. \sin. \text{tot.} + \log. p m = 11,0000000$$

$$- \log. p x = 1,8678119$$

$$\log. \sin. \frac{x}{2} = 9,6321881 = 25^{\circ} 23' 14''$$

giebt für den vollen Winkel bei x $50^{\circ} 46' 28''$.

Für den halben Winkel y der Grundkante $g g'$ bildet $p m$ den Sinus; $p y$ den $\sin. \text{tot.}$

$$\sin. \frac{y}{2} = \frac{\sin. \text{tot. } p m}{p y}$$

$$\log. \sin. \text{tot.} + \log. p m = 11,0000000$$

$$- \log. p y = 1,1749965$$

$$\log. \sin. \frac{y}{2} = 9,8250035 = 41^{\circ} 56' 23''$$

giebt für den vollen Winkel bei y $83^{\circ} 52' 46''$.

Um den Winkel der Polkante zu finden, errichte man auf ihr Perpendikel aus λ , wo der eine in g' eintrifft. Der andere, ebenfalls von λ ausgehend, wird, da $g g$ kürzer ist als $g g'$, die Kante $g g$ nur dann treffen, wenn man dieselbe sich bis n verlängert denkt, und $n \lambda g'$ ist der gesuchte Winkel. Man bedarf zu dessen Berechnung die Kenntniß der Größe der Linien $\lambda g'$, λn und $n g'$.

λg verhält sich zu $g g'$ wie der Sinus des Winkels $P g g'$ ($= 35^{\circ} 22' 36''$) zum $\sinus \text{ totus}$.

$$\log. \sin. 35^{\circ} 22' 36'' = 9,7626405$$

$$+ \log. g g' = 1,6247368$$

$$\hline 11,3873773$$

$$- \log. \sin. \text{tot.} = 10$$

$$\hline \log. \lambda g' = 1,3873773$$

$$\lambda g' = 2,43993 = \sqrt{5,953255}$$

192 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

Um λn zu finden, suche man λg , und da $\lambda g^2 = g'g^2 - \lambda g'^2$ oder $= \sqrt{17,761252} - \sqrt{5,953255}$; so ist $\lambda g = \sqrt{11,807997} = \log. 1,5360880$.

Es verhält sich aber λn zu λg wie die Tangente des Winkels pgx ($= 64^\circ 29' 28''$) zum Radius.

$$\begin{aligned} \log. \text{tang. } 64^\circ 29' 28'' &= 10,3213314 \\ + \log. \lambda g &= 1,5360880 \end{aligned}$$

$$\frac{11,8574194}{10}$$

$$- \log. \text{rad.}$$

$$\log. \lambda n = 1,8574194$$

$$\lambda n = 7,20144 = \sqrt{51,86076}.$$

Addirt man λg^2 zu λn^2 , so erhält man $ng^2 = 63,668757$ und $ng^2 + g'g^2$ ist $= g'n^2 = 81,43$; $g'n = \sqrt{81,43} = 9,02385$.

Addirt man die Größen der Linien $\lambda g'$, λn und ng' , halbt das Product, und nennt diese Hälfte P ; so ist der Sinus des halben Winkels bei $\lambda = \sqrt{\frac{R^2(P - \lambda g')(P - \lambda n)}{\lambda g' \cdot \lambda n}}$

$$P = 9,33261$$

$$P - \lambda g' = 6,89268 = \log. 1,8383381$$

$$P - \lambda n = 2,13117 = \log. 1,3286179$$

$$\log. P - \lambda g' \cdot P - \lambda n = 3,1670060$$

$$\log. \sqrt{} = 1,5835030$$

$$\lambda g' \cdot \lambda n = \log. 3,2447967$$

$$\log. \sqrt{} = 1,6223983$$

$$\log. \text{rad.} + \log. \sqrt{(P - \lambda g')(P - \lambda n)} = 11,5835030$$

$$- \log. \sqrt{\lambda g' \cdot \lambda n} = 1,6223983$$

$$\log. \sin. \frac{\lambda}{2} = 9,9611047 = 66^\circ 6' 40\frac{1}{2}''$$

gibt für den ganzen Winkel der Polkante $132^\circ 13' 21''$.

§. 179.

Bestimmung der Kanten und Axen einer Topaspyramide.

Will man aus der Stammpyramide die dazu gehörige Topaspyramide nach §. 113. ableiten, so werden in Fig. 7., wo xy die Grundkanten der Stammpyramide sind, $\psi\beta$ und $y\beta$ die Grundkanten der Topaspyramide bilden, wobei auch die Polaxe sich um die Hälfte verkürzt. Man wird dieselbe Topaspyramide erhalten, wenn man in Fig. 9. die Grundkanten der Topaspyramide bx und by in den Rhombus $\delta\lambda$ der horizontalen Projection der P-1 einschreibt, die Polaxe aber unverändert = 1 beibehält. Hier bleibt auch der Werth von xm , ym , px und py unverändert, und nur die Größe der Grundkanten bx und by , die Größe der halben Grunddeckenaxe bm und die Polkante pb sind zu berechnen.

Wenn man die Polaxe unverändert beibehält, so ist der Werth von $\delta\lambda$ in Fig. 9. = $2 \cdot xy$, δm = $2 \cdot mx$, λm = $2 \cdot my$, gm = xy .

Es ist $bm : xy = \lambda m : \lambda y = 2 : 3$

$$bm = \frac{xy \cdot 2}{3} = \frac{\sqrt{5,678998} \cdot 2}{3}$$

= $\log. 1,2010445 = 1,58871 = \sqrt{2,5240}$.

Eben so ist $bx : \lambda x = my : \lambda y = 1 : 3$

$bx = \frac{\lambda x}{3}$, und da $\lambda x^2 = \lambda m^2 + x m^2 = 4,954740 + 4,440313$ oder = $\sqrt{9,395053}$; so ist $bx = \sqrt{1,04389477} = 1,021711 = \log. 1,0093280$.

194 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

Ferner wird $y b : y \delta = y m : y \lambda' = 1 : 3$

$$y b = \frac{y \delta}{3}; \text{ und da } y \delta^2 = y m^2 + m \delta^2 =$$

$$1,238685 + 17,761252 = \sqrt{18,999931}, \text{ so ist}$$

$$y b = \sqrt{2,111104} = 1,452964 = \log. 1,1622548.$$

$$\text{Die Poffante } p b \text{ wird } = \sqrt{(p m^2 + b m^2)} =$$

$$\sqrt{3,5240} = 1,87723 = \log. 1,2735179.$$

§. 180.

Bestimmung der Winkel der horizontalen Projection der Topaspyramide (Fig. 9.)

Für den halben Winkel bei x bildet λm die Tangente, $m x$ den Radius

$$\text{tang. } \frac{1}{2} x = \frac{\text{rad. } \lambda m}{m x}$$

$$\log. \text{ rad. } + \log. \lambda m = 11,3475105$$

$$- \log. m x = 1,3237068$$

$$\log. \text{ tang. } \frac{1}{2} x = 10,0238037 = 46^\circ 34' 10''$$

Der ganze Winkel beträgt $93^\circ 8' 20''$.

Für den halben Winkel bei y bildet δm die Tangente, $y m$ den Radius

$$\text{tang. } \frac{1}{2} y = \frac{\text{rad. } \delta m}{y m}$$

$$\log. \text{ rad. } + \log. \delta m = 11,6247368$$

$$- \log. y m = 1,0464805$$

$$\log. \text{ tang. } \frac{1}{2} y = 10,5782563 = 75^\circ 12' 24''$$

Der ganze Winkel beträgt $150^\circ 24' 48''$.

Addirt man in dem Trapeze $y b x m$ den Winkel $b y m = 75^\circ 12' 24''$ mit dem Winkel $b x m =$

46° 34' 10" und mit dem Winkel $xmy = 90^\circ$ zusammen, und zieht dies Product, welches 211° 46' 34" beträgt, von vier rechten Winkeln, oder von 360° ab, so erhält man den Winkel $ybx = 148^\circ 13' 26''$. Diese Winkel der horizontalen Projection bleiben für alle bei dem Topas vorkommenden Topaspyramiden dieselben, und sind auch die Winkel des Topasprisma's, das jedoch in der Natur eben so wie die Pyramiden fast nur in hemiedrischen Gestalten vorkommt.

§. 181.

Bestimmung der ebenen Winkel der Topaspyramide.

Da sowohl bei den Flächen pxb als pyb (Fig. 10.), welche ungleichseitige Dreiecke bilden, alle Begrenzungslinien gegeben sind, so erhält man, wenn bei jeder Fläche die Begrenzungslinien addirt werden, und die Hälfte dieser Summe die Bezeichnung P erhält, für die Berechnung der ebenen Winkel folgende Formeln:

Im Dreieck pyb

$$\sin. \frac{1}{2} y = \sqrt{\frac{R^2(P-py)(P-by)}{py \cdot by}} = 39^\circ 31' 33''$$

$$\sin. \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{R^2(P-pb)(P-by)}{pb \cdot by}} = 25^\circ 44' 47''$$

$$\sin. \frac{1}{2} p = \sqrt{\frac{R^2(P-pb)(P-py)}{pb \cdot py}} = 24^\circ 43' 40''$$

Die vollen ebenen Winkel betragen: $y = 79^\circ 3' 6''$; $b = 51^\circ 29' 34''$; $p = 49^\circ 27' 20''$.

Im Dreieck $p x b$

$$\sin. \frac{x}{p} = \sqrt{\frac{R^2 (P - px)(P - bx)}{px \cdot bx}} = 25^\circ 48' 7''$$

$$\sin. \frac{b}{p} = \sqrt{\frac{R^2 (P - pb)(P - bx)}{pb \cdot bx}} = 51^\circ 34' 23''$$

$$\sin. \frac{x}{b} = \sqrt{\frac{R^2 (P - pb)(P - px)}{pb \cdot px}} = 12^\circ 37' 30''$$

Die vollen ebenen Winkel betragen: $x = 51^\circ 36' 14''$; $b = 103^\circ 8' 46''$; $p = 25^\circ 15'$.

§. 182.

Bestimmung der Winkel der Topaspyramide.

A. Der Polkante bp .

Man bilde nach Fig. 26. aus den beiden Flächen $x b p$ und $b y p$, welche $b p$ als gemeinschaftliche Kante haben, ein Prisma, indem man von x und von y aus Linien parallel mit $p b$ zieht, und aus p Linien parallel mit $b x$ und $b y$ legt, wodurch die Flächen $x x' b p$ und $b p y y'$ entstehen. Denkt man sich die parallelen Gegenflächen eben so zu Prismenflächen erweitert, und herangerückt, so entsteht das Prisma, dessen Endkanten in Fig. 26. mit $x b$, $x \beta$, $b y$ und βy bezeichnet sind. Verlängert man nun die Seitenkante dieses Prisma's $p b$ bis dahin, wo ein Perpendikel von x aus gefällt sie schneidet, was in λ der Fall ist, und verlängert man ferner die Seitenkante $y y'$ ebenfalls bis dahin, wo ein von λ aus abgehender Perpendikel sie schneidet, was in ξ der Fall ist, so giebt $x \lambda \xi$ den gesuchten Winkel.

In dem schiefen rhomboidischen Prisma, dessen Endkanten $x b \beta y$ sind, haben wir gegeben:

die Kante bx (§. 179.) = $\sqrt{1,0438947}$ = $\log. 1,0093280$
 die Kante yb (§. 179.) = $\sqrt{2,1111040}$ = $\log. 1,1622548$
 die Flächendiagonale xy (§. 172.) = $\sqrt{5,678998}$ = $\log. 1,3771358$
 den ebenen Winkel pbx (§. 181.) = $51^\circ 29' 34''$
 den ebenen Winkel pbx (§. 181.) = $103^\circ 8' 46''$
 den ebenen Winkel $xb\lambda$ als Nebenwinkel des vorigen = $76^\circ 51' 14''$.

Es lassen sich daraus finden $x\lambda$, $\lambda\xi$, $x\xi$

$$x\lambda = \frac{xb \cdot \sin. 76^\circ 51' 14''}{\sin. \text{tot.}}$$

$$\begin{aligned} \log. \sin. 76^\circ 51' 14'' &= 9,9884668 \\ + \log. xb &= 1,0093280 \\ \hline \log. x\lambda &= 10,9977948 - 10 \end{aligned}$$

$$\lambda\xi = *y = \frac{by \cdot \sin. 51^\circ 29' 34''}{\sin. \text{tot.}}$$

$$\begin{aligned} \log. \sin. 51^\circ 29' 34'' &= 9,8935008 \\ + \log. by &= 1,1622548 \\ \hline \log. \lambda\xi &= 11,0557556 - 10 \end{aligned}$$

Um $x\xi$ zu finden, welches = $\sqrt{xy^2 - \lambda\xi^2}$,
 suche man ξy , welches = $\lambda b + b*$

$$\lambda b = \frac{x\lambda \cdot \text{rad.}}{\text{tang. } 76^\circ 51' 14''}$$

$$\begin{aligned} \log. x\lambda + \log. \text{rad.} &= 10,9977948 \\ - \log. \text{tang. } 76^\circ 51' 14'' &= 10,6316093 \\ \hline x\lambda = \log. & 0,3661855 = 0,2323730 \end{aligned}$$

$$b* = \frac{by \cdot \cosin. 51^\circ 29' 34''}{\sin. \text{tot.}}$$

$$\begin{aligned} \log. \cosin. 51^\circ 29' 34'' &= 9,7942184 \\ + \log. by &= 1,1622548 \\ \hline \log. b* &= 10,9564732 = 10 \end{aligned}$$

gibt für $b*$ die Zahl 0,9046345, und dazu den
 Werth von $x\lambda$ mit 0,232373 addirt, so beträgt für
 ξy der Werth 1,1370075, oder auch $\xi y =$

198 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

$\sqrt{1,292786}$. Zieht man dies Quadrat von xy^2 ab, so bleibt für $x\xi$ $\sqrt{4,386212}$.

Da nun in dem Dreiecke $x\lambda\xi$ alle Seiten bekannt sind, so lassen sich daraus, auf die schon oft gezeigte Art die Winkel berechnen und man erhält für den Winkel $x\lambda\xi$ $158^\circ 24''$.

B. Der Polkanten px .

Es sey der Winkel dieser Polkante $b s b$ (Taf. VIII. Fig. 10.). In diesem gleichschenkeligen Dreiecke sind gegeben:

der Winkel $pxb = 51^\circ 36' 14''$ (§. 181.)

der Winkel $bsx = 90^\circ$

die Linie $bx = 1,021711 = \log. 1,0093280$ (§. 179.)

die Linie $bb = \frac{2}{3} g'g'$; denn ein Perpendikel von xm nach b gezogen, verhält sich zu gx wie mb zu mg oder zu xy (da $mg = xy = 2 : 3$ (§. 179.)). So wie sich die halben Linien verhalten, verhalten sich auch die ganzen, und da $g'g'$ (§. 177.) $= \sqrt{4,95474}$, so ist $bb = \sqrt{2,2021066} = \log. 1,1714192$.

Die Formel ist: $\sin. \frac{1}{2} s = \frac{\sin. \text{tot.}^2 \frac{1}{2} bb}{bx \cdot \sin. 51^\circ 36' 14''}$

$\log. \sin. \text{tot.}^2 + \log. \frac{1}{2} bb = 20,8703892$

$- \log. bx = 1,0093280$

19,8610612

$- \log. \sin. 51^\circ 36' 14''$

9,8941695

$\log. \sin. \frac{1}{2} s = 9,9668917 = 67^\circ 54' 37''$

gibt für den vollen Winkel der Polkante px $135^\circ 49' 14''$.

C. Der Polkanten py.

Es sey der Winkel dieser Kante $b\phi b$ (Taf. VIII. Fig. 10.). In diesem gleichschenkeligen Dreiecke sind gegeben

der Winkel $pyb = 79^\circ 3' 6''$ (§. 181.)

der Winkel $b\phi y = 90^\circ$

die Linie $by = \sqrt{2,111104} = \log. 1,1622548$
(§. 179.)

die Linie $bb' = \frac{2}{3}gg'$, denn $bb':gg' = bb':g'g'$.

Da gg' nach §. 177. $= xx = \sqrt{17,761252}$,

so ist $bb' = \sqrt{7,8938897} = \log. 1,4486455$.

Die Formel ist: $\sin. \frac{1}{2} \phi = \frac{\sin. \text{tot.}^2 \frac{1}{2} bb'}{by \cdot \sin. 79^\circ 3' 6''}$

$\log. \sin. \text{tot.}^2 + \log. \frac{1}{2} bb' = 21,1476155$

$- \log. by = 1,1622548$

$\frac{19,9853607}{9,9920225}$

$- \log. \sin. 79^\circ 3' 6''$

$9,9920225$

$\log. \sin. \frac{1}{2} \phi = 9,9933382 = 79^\circ 59' 27''$

giebt für den vollen Winkel der Polkante py $159^\circ 58' 54''$.

D. Der Grundkanten bx.

Man errichte auf der Grundkante bx einen Perpendikel, der in p eintrifft und welcher in Fig. 10. pp genannt sey, so ist ppp der gesuchte Winkel und ppm seine Hälfte.

Um pp zu finden, setze man in dem rechtwinkligen Dreiecke ppx , wo der Winkel bei x (§. 181.)

$51^\circ 36' 14''$ beträgt, $pp = \frac{px \cdot \sin. 51^\circ 36' 14''}{\text{rad.}} =$

$\log. 1,2619814$.

200 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

In dem rechtwinkligen Dreiecke $p\rho m$ haben wir nun $p m : p\rho = \sin. \frac{1}{2} \rho : \sin. \text{tot.}$ und $\sin. \frac{1}{2} \rho = \frac{\sin. \text{tot. } p m}{p\rho}$. Die halbe Polare $p m$ ist §. 171. = 1 angenommen, und der $\log. \sin. \frac{1}{2} \rho$ wird = 9,6380186, welcher dem Winkel von $25^{\circ} 45' 19''$ entspricht, wozu durch der volle körperliche Winkel bei ρ sich zu $51^{\circ} 30' 38''$ ergibt.

E. Der Grundkanten by .

Man errichte eben so wie auf der Grundkante bx einen Perpendikel, der in p eintrifft und den wir $p v$ nennen wollen; dann ist $p v p$ der gesuchte Winkel und $p v m$ seine Hälfte. Der Winkel $p y v$ beträgt (§. 181.) $79^{\circ} 3' 6''$ und $p y$ (§. 173.) hat als $\log. 1,1749965$.

$$p v = \frac{p y \cdot \sin. y}{\text{rad.}} = \log. 1,1670190.$$

Im rechtwinkligen Dreiecke $p v m$ haben wir $\sin. \frac{1}{2} v = \frac{\sin. \text{tot. } p m}{p v} = \log. 9,8329810$, welcher dem Winkel von $42^{\circ} 54' 5''$ entspricht und der volle Winkel bei v beträgt darnach $85^{\circ} 48' 10''$.

§. 183.

Bestimmung der Rhombenpyramiden, welche durch Hemiëdrie der Topaspyramide entstehen.

Nach der §. 123. 4. angegebenen Ableitungsart lassen sich aus jeder Topaspyramide zwei rhombische Pyramiden ableiten. In Taf. VIII. Fig. 9. würden, bei unveränderter Polare, δy die Grundkanten der einen,

λx die Grundkanten der andern seyn, bei der erstern bleibt der Werth der Polkanten py , bei der letztern der Werth der Polkanten px der Lospaspyramide unverändert.

Legen wir die Grundkanten δy zu Grunde, so erhalten wir diese Grundkante aus dem Werthe von my (§. 172.) und von $\delta m = 2 \cdot mx$ (§. 179.), indem $\delta y^2 = \delta m^2 + my^2$

$$my = \sqrt{1,238685}$$

$$\delta m = \sqrt{17,761252}$$

$$\delta y = \sqrt{18,999937} = 4,358892 = \log. 1,6393760.$$

Die unverändert gebliebene Polkante py ist nach §. 172. $= \sqrt{2,238685} = \log. 1,1749965$ und hat nach §. 182 C. den Winkel von $159^\circ 58' 54''$.

Der Winkel der horizontalen Projection $\delta y \delta'$ beträgt nach §. 180. $150^\circ 24' 48''$, der Winkel $y \delta y'$ ist sein Nebenwinkel und daher $= 29^\circ 35' 12''$.

Die Polkante $p\delta$ ist $= \sqrt{18,761252}$, indem $p\delta^2 = pm^2 + \delta m^2$.

Der ebene Winkel einer Fläche dieser Pyramide bei y bleibt gleich dem ebenen Winkel pyb der Lospaspyramide $= 79^\circ 3' 6''$ (§. 181.).

Der Winkel der Grundkanten ist derselbe, welchen die Grundkanten by der Lospaspyramide besitzen und $= 85^\circ 48' 10''$ (§. 182 E.). Auch der auf der Grundkante aufgerichtete, in p eintreffende Perpendikel (pv in Fig. 10.) bleibt unverändert.

Bezeichnen wir die Fläche einer solchen hemiëdrischen Lospaspyramide mit $py\delta$ und ihre Höhe mit pv , so haben wir in diesem Dreiecke

202 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle:

den ebenen Winkel bei $y = 79^{\circ} 3' 6''$

den ebenen Winkel bei δ durch die Formel $\sin. \delta = \frac{\sin. \text{tot. } p \vee}{p \delta} = 19^{\circ} 49' 29''$

den ebenen Winkel bei p als Ergänzungswinkel der beiden vorigen zusammen zu 180° und $= 81^{\circ} 7' 25''$.

Der halbe Winkel der Polkante $p\delta$, den wir δ nennen wollen, ergibt sich aus der Formel $\sin. \delta = \frac{\sin. \text{tot.}^2 \text{ my}}{\delta y \sin. 19^{\circ} 49' 29''} = 48^{\circ} 50' 20\frac{1}{2}''$, wodurch der volle Winkel dieser Polkante zu $97^{\circ} 40' 41''$ bestimmt wird.

Berechnet man nach derselben Methode diejenige Zopaspyramide, deren horizontale Projection in Fig. 10. durch $\lambda x \lambda' x$ bezeichnet ist, und nennen ihre Flächen $p x \lambda$, so erhalten wir folgende Werthe:

den ebenen Winkel $x p \lambda = 79^{\circ} 52' 52''$

den ebenen Winkel $x \lambda p = 48^{\circ} 30' 54''$

den ebenen Winkel $\lambda x p = 51^{\circ} 36' 14''$ (§. 181.)

den ebenen Winkel $x \lambda x = 86^{\circ} 51' 40''$ (Nebenwinkel von $93^{\circ} 8' 20''$ §. 180.)

den Winkel der Kante $p x = 135^{\circ} 49' 14''$ (§. 182 B.)

den Winkel der Kante $\lambda x = 51^{\circ} 30' 38''$ (§. 182 D.)

den Winkel der Kante $p \lambda = 133^{\circ} 11' 26''$.

Hexagonalsystem.

Homoödrische Gruppe.

§. 184.

Für sie diene der Apatit als Beispiel, dessen Stamm-
pyramide Winkel der Polkanten von $142^\circ 20'$ besitzt,
und den Werth der Grundkante $h h'$, welcher gleich ist
dem Werthe der halben Grunddeckenage $m h$ setzen wir
 $= 1$, woraus sich der Werth der halben Grundkanten-
age $m f = m h^2 - h f^2 = 1^2 - \frac{1}{2}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ergibt.

§. 185.

Bestimmung der ebenen Winkel.

Man falle in Taf. IX. Fig. 3. von der Polkante ph'
Perpendikel aus λ nach h , so ist $h \lambda h$ der Winkel von
 $142^\circ 20'$ und $\mu \lambda h$ dessen Hälfte oder $71^\circ 10'$ und die
Linie hh ist gleichlang mit der Grundkantenage $f'f'$ Fig. 2.
und $= \sqrt{3}$, woraus sich $\mu h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ergibt.

Für den ebenen Winkel bei h gilt die Formel:

$$\sin. h' = \frac{\sin. \text{tot.}^2 \mu h}{h h' \cdot \sin. \lambda} \text{ oder } = \frac{\sin. \text{tot.}^2 \sqrt{3}}{2 \cdot \sin. 71^\circ 10'}$$

log. sin. tot. ² + log. $\sqrt{3}$	=	21,2385606
— log. 2	=	1,3010300
	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	19,9375306
— log. sin. $71^\circ 10'$	=	9,9761030
	<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	log. sin. $h' = 9,9614276 = 66^\circ 12' 27''$

204 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

Das Dreieck $p h h'$ ist gleichschenkelig und der ebene Winkel bei h' gleich dem Winkel bei h , woraus sich der ebene Winkel bei $p = 2$ mal dem Winkel des Cosinus von $66^\circ 12' 27''$ oder $= 47^\circ 35' 6''$ ergibt.

§. 186.

Bestimmung der Kanten und Aren.

Die Höhe der Flächen $p f$ in Fig. 3. bildet für den ebenen Winkel bei h' die Tangente, und $h'f = \frac{1}{2} h h' = 0,5$

$$p f = \frac{0,5 \cdot \text{tang. } 66^\circ 12' 27''}{\text{rad.}}$$

$$\log. \text{ tang. } 66^\circ 12' 27'' = 10,3556637$$

$$+ \log. 0,5 = 6989700$$

$$11,0546337$$

$$- \log. \text{ rad.} = 10$$

$$\log. p f = 1,0546337$$

$$p f = 1,134054 = \sqrt{1,286078}.$$

Für $p h'$, weil $p h'^2 = p f^2 + h'f^2$ erhalten wir $\sqrt{1,536078}$, und für $p m$, da $p m^2 = p h^2 - m h^2 = \sqrt{0,536078}$.

§. 187.

Bestimmung des Winkels der Grundkanten.

In Fig. 3. ist $p f m$ der halbe Winkel der Grundkante, $p m$ seine Tangente, $m f$ der Radius.

$$\text{tang. } f = \frac{\text{rad. } p m}{m f}$$

$$\text{log. rad. } + \text{log. } p m = 10,8646140$$

$$- \text{log. } m f \quad \underline{0,9375306}$$

$$\text{log. tang. } f = 9,9270834 = 40^\circ 12' 45''$$

giebt für den vollen Winkel $80^\circ 25' 30''$.

§. 188.

Ableitung anderer, in gleichartiger Stellung befindlicher Pyramiden.

Wenn man in der horizontalen Projection der Stammpyramide alle Diagonalen des Hexagons zieht, so erhält man zwei gleichseitige Dreiecke $h h h$ und $h' h' h'$ Fig. 5. Schreibt man in jedes dieser Dreiecke ein anderes ein, so bilden die Ecken dieser Dreiecke $c' c' c'$ und $c c c$ die Eckpunkte der horizontalen Projection desjenigen Hexagons, das die Grundkanten der nächst ableitbaren Quarzpyramide bildet. Da nun c und c' die Mittelpunkte der Linien $h' h'$ und $h h$ sind, und $c' c'$ zu $h h = h c'$ zu $h h = 1:2$, so ist auch $c' m = \frac{1}{2} h' m$ und $c' c = \frac{1}{2} h' h$.

Bei dieser Ableitungsweise bleibt die Polage unverändert, und die Grunddeckenagen und Grundkanten verkürzen sich bei den spitzern Pyramiden im Verhältniß von $2:1$ oder verlängern sich bei den stumpfern im Verhältniß von $1:2$.

Da wir nun für die Stammpyramide den Werth der Grundkante $h' h$ und des Halbmessers $h m = 1$, den der Polage $= \sqrt{0,536078}$ angenommen haben; so ist $c' c = c m = \frac{1}{2} = \sqrt{0,25}$, und die Polkante $p c$ der spitzern Pyramide Fig. 4. wird $= \sqrt{0,786078}$.

206 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

Für den halben ebenen Polwinkel gilt die Formel:

$$\sin. \frac{1}{2} p = \frac{\sin. \text{tot. } \frac{1}{2} c c'}{p c} \text{ oder } = \frac{\sin. \text{tot. } \sqrt{0,25}}{2 \cdot \sqrt{0,786078}}$$

$$\log. \sin. \text{tot.} + \log. 0,5 = 10,6989700$$

$$- \log. 2. \qquad \qquad \qquad 3010300$$

$$\hline 10,3979400$$

$$- \log. \sqrt{0,786078} \qquad \qquad \qquad = 9477328$$

$$\log. \sin. \frac{1}{2} p = 9,4502072 = 16^\circ 22' 40\frac{1}{2}''$$

Der ebene Winkel bei c ist der Winkel des Cosinus und als solcher $= 73^\circ 37' 19\frac{1}{2}''$.

Für den Winkel der Polkante pc , den wir λ nennen wollen, ist die Formel anwendbar:

$$\sin. \frac{1}{2} \lambda = \frac{\sin. \text{tot.}^2 \sqrt{3}}{2 \cdot \sin. c} = 64^\circ 30' 32''$$

Der volle Winkel beträgt $129^\circ 1' 4''$.

Für den halben Winkel der Grundkante, den wir d bezeichnen wollen, bildet pm die Tangente und md (Fig. 2.) $= \frac{1}{2} mf$ den Radius.

$$\text{tang. } \frac{1}{2} d = \frac{\text{rad. } pm}{\frac{1}{2} mf} = 59^\circ 23' 59''$$

Der volle Winkel beträgt $118^\circ 47' 58''$.

Um die stumpfere Pyramide zu erhalten, behält man die Polage unverändert bei, und verdoppelt die Größe der Grundkanten und Grundlagen. Die Grundkante und Grundflächenlage wird dann $= 2$, die Polkante $= \sqrt{4,536078}$, die halbe Grundkantenlage $= \sqrt{5}$.

Für den halben ebenen Polwinkel ist die Formel:

$$\sin. \frac{1}{2} p = \frac{\sin. \text{tot. } 1}{\sqrt{4,536078}} = 28^\circ 0' 12\frac{1}{2}''$$

Der ebene Randwinkel wird $61^\circ 59' 47\frac{1}{2}''$.



Für den halben Winkel der Polkante erhalten wir nach der Formel $\sin. \frac{1}{2} \lambda = \frac{\sin. \text{tot.}^2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sin. 61^\circ 59' 47\frac{1}{2}''} = 78^\circ 46' 25''$.

Die Tangente des halben Winkels der Grundkante wird $= \frac{\text{rad. p m}}{2 \cdot \text{mf}} = 22^\circ 54' 53''$.

§. 189.

Ableitung der in verwendeter Stellung befindlichen Pyramiden (Dihomböeder).

Mit der Reihe der Hexagonalpyramiden, deren Grundlagen sich im Verhältniß von 1:2 verlängern, oder wie 2:1 sich verkürzen, läuft eine andere Reihe Hexagonalpyramiden parallel, deren Flächen für die Polkanten der erstern tangirende Ebenen bilden, und deren Grundkanten diagonal gegen die Grundkanten der erstern stehen. Wenn in Fig. 1. und 2. h'h die Grundkanten der Stammpyramide bilden, so ist a'a die Bezeichnung der Grundkanten der zu ihr gehörigen verwendeten Pyramide. Die Polage bleibt bei dieser Ableitung unverändert.

Um den Werth der Grundkanten a a' und A gen a m dieser verwendeten Pyramiden aus dem Werthe der Grundkanten der Stammpyramide, wo h'h und h m = 1 sind, zu finden, setze man in Fig. 2.

$$a m : h m = h m : f m \text{ oder } a m : 1 = 1 : \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$a m = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{1,3333 \dots} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{3}$$

208 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

Da nun in Fig. 1. die Grundkanten der Stamm-
pyramide mit $h h'$, die der verwendeten Pyramide mit
 $a a'$ bezeichnet sind, und sowohl $p h'$ nach §. 186. =
 $\sqrt{1,536078}$, als auch $a h' = \frac{1}{2} a m = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nach
S. 207. bekannt sind; da ferner für den halben ebenen
Polwinkel $a p h'$ die Tangente durch $a h'$ der Radius
durch $p h'$ gebildet wird: so ist die Tangente des halben
ebenen Polwinkels $= \frac{\text{rad. } a h'}{p h'}$.

$$\log. \text{rad.} + \log. \frac{1}{\sqrt{3}} = 10,7614394$$

$$- \log. \sqrt{1,536078} = 1,0932066$$

$$\log. \text{tang. } \frac{1}{2} p = 9,6682328 = 24^{\circ} 58' 40''$$

Der volle ebene Polwinkel der verwendeten Pyra-
mide $a p a'$ beträgt daher $49^{\circ} 57' 20''$, und der ebene
Winkel bei a als Winkel des Cosinus von $24^{\circ} 58' 40''$
beträgt $65^{\circ} 1' 20''$.

Nennen wir den Winkel der Polkante λ , so ist

$$\sin. \frac{1}{2} \lambda = \frac{\sin. \text{tot.}^2 \sqrt{3}}{2 \cdot \sin. 65^{\circ} 1' 20''} = 72^{\circ} 49' 11\frac{1}{2}''$$

und der volle Winkel der Polkante wird $145^{\circ} 38' 23''$.

Man kann aus dieser Pyramide auf dieselbe Weise
stumpfer und spitzere Hexagonalpyramiden berechnen,
wie aus der Stammpyramide, indem man die Polage
unverändert beibehält, und die Grundkanten und Grund-
kanten in dem Verhältniß von 1:2 verlängert, oder im
Verhältniß von 2:1 verkürzt. Wenn in Fig. 2. $a a'$
die Grundkante der verwendeten Pyramide und $= \frac{2}{\sqrt{3}}$
ist, so stellt $b b'$ die Grundkante der nächst spitzern dar,
und $b b'$ wird $= \frac{1}{2} a a' = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bezeichnen wir die Stammpyramide durch P, die daraus ableitbare in verwendeter oder diagonaler Stellung befindliche Pyramide (das Dirhomböeder) durch D und die aus beiden Pyramiden ableitbaren Rhomböeder durch R, so lassen sich nach der angegebenen Ableitungsart beim Apatit folgende Pyramiden und Rhomböeder berechnen.

Ebener Polwinkel.	Winkel der Polkante.
P = 47° 35' — R. 105° 49' — P. 142° 20' — R. 110° 5 $\frac{1}{2}$ '	
D = 49° 57 $\frac{1}{3}$ ' — R. 108° 49 $\frac{1}{2}$ ' — D. 145° 38 $\frac{1}{3}$ ' — R. 118° 28'	
P-1 = 56° 5 $\frac{1}{2}$ ' — R. 115° 50 $\frac{1}{2}$ ' — P. 157° 32 $\frac{1}{2}$ ' — R. 141° 35 $\frac{1}{2}$ '	
D-1 = 56° 55 $\frac{1}{3}$ ' — R. 116° 49 $\frac{1}{2}$ ' — D. 160° 12 $\frac{1}{4}$ ' — R. 145° 21 $\frac{1}{3}$ '	
P-2 = 58° 55 $\frac{1}{3}$ ' — R. 118° 54 $\frac{1}{3}$ ' — P. 168° 7 $\frac{1}{3}$ ' — R. 159° 22'	
D-2 = 59° 11' — R. 119° 10 $\frac{1}{4}$ ' — D. 169° 40' — R. 162° 3 $\frac{1}{2}$ '	
P-3 = 59° 43 $\frac{1}{2}$ ' — R. 119° 43 $\frac{1}{2}$ ' — P. 173° 58 $\frac{1}{3}$ ' — R. 169° 33'	
D+1 = 36° 4' — R. 88° 39 $\frac{1}{2}$ ' — D. 131° 13 $\frac{1}{2}$ ' — R. 88° 40'	
P+1 = 32° 45 $\frac{1}{2}$ ' — R. 82° 48 $\frac{1}{4}$ ' — P. 129° 1' — R. 83° 36 $\frac{1}{2}$ '	
D+2 = 21° 8' — R. 58° 28' — D. 123° 31' — R. 69° 55'	
P+2 = 19° 39 $\frac{1}{2}$ ' — R. 52° 19' — P. 123° 1 $\frac{1}{2}$ ' — R. 67° 42 $\frac{1}{4}$ '	
D+3 = 11° 5 $\frac{1}{2}$ ' — R. 32° 30' — D. 120° 56 $\frac{1}{2}$ ' — R. 62° 46 $\frac{1}{3}$ '	
P+3 = 9° 39 $\frac{1}{2}$ ' — R. 28° 25 $\frac{1}{2}$ ' — P. 120° 42 $\frac{1}{2}$ ' — R. 62° 6'.	

§. 190.

Verwandlung der Hexagonal-Pyramiden in Rhomböeder.

Aus jeder Hexagonal-Pyramide entsteht durch Verschwinden der abwechselnden nicht parallelen Flächen ein Rhomböeder. Zeilen wir in Fig. 9. aus der Stammpyramide das Rhomböeder ab, dessen Polkanten durch

210 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

$p d$ und πd , die Randkanten durch $d d$ bezeichnet sind, und wo die Randecken der Stammpyramide h in die Mitte der Randkanten des Rhomboëders fallen, so erhalten wir für das Rhomboëder

die horizontale Flächendiagonale $d' d = 2 \cdot h' h = 2$

die geneigte Flächendiagonale $p d = \frac{4}{3} p f$, indem
 $p f : p d = 3 : 4$.

Nach §. 186. haben wir die Höhe der Flächen der Quarzpyramide $p f = \sqrt{1,286078}$ und $=$ dem $\log.$ 1,0546337 gefunden, und der $\log.$ von $p d$ wird darnach $= 1,1795724$.

$p s$ ist $\frac{1}{2} p d$ und $\varepsilon d = \frac{1}{2} d' d$. Im Dreieck $p s d$ bilden für den ebenen Winkel bei d die Linie $p s$ die Tangente und εd den Radius. Da aber $p s : \varepsilon d = p d : d' d$ sich verhalten, so kann man die Werthe von $p d$ und $d' d$ beibehalten, ohne sie zu halbiren, und
 $\text{tang. } d = \frac{\text{rad. } p d}{d' d}$

$$\begin{aligned} \log. p d \log. \text{rad.} &= 11,1795724 \\ - \log. 2 & \quad \quad \quad 1,3010300 \\ \hline \end{aligned}$$

$$\log. \text{tang. } d = 9,8785424 = 37^\circ 5' 26''$$

$$\text{der Winkel des Cosinus } \varepsilon p d = 52^\circ 54' 34''$$

$$\text{der volle ebene Winkel } p d d \text{ beträgt } 74^\circ 10' 52''$$

$$- - - - d' p d - 105^\circ 49' 8''.$$

Um aus einer Hexagonal-Pyramide, deren Höhe der Flächen und Grundkanten bekannt sind, das Rhomboëder abzuleiten, gilt die Formel:

$$\text{tang. des halben ebenen Randwinkels des Rhomboëders ist} = \frac{\text{rad. Flächenhöhe der Hexagonal-P.}}{\frac{1}{2} \text{ Grundkante der Hex. P.}}$$



oder noch kürzer:

tang. des halben ebenen Polwinkels des Rhomboëders
ist =

3. tang. des halben ebenen Polwinkels der Hex. Pyr.

§. 191.

Ableitung der horizontalen Projection einer Dodekagon-Pyramide (Fig. 8.).

Man ziehe von den Grunddecken a des Rhomboëders Linien nach der Mitte h der zunächst schief gegenüberstehenden Grundkante, so bilden die Punkte x und y , wo sich diese Linien schneiden, die Ecken der horizontalen Projection der Dodekagon-Pyramide. Da die Linie $hm = hh' = 1$ angenommen ist und ma rechtwinkelig gegen mh steht, auch der Werth von $ma = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{3}$ bekannt ist, so wird ha als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $amh = \sqrt{hm^2 + \sqrt{ma^2}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

Die Linie mx verhält sich zu xa wie aa' zu $ah' = 1 : \frac{1}{2}$ und daher $mx : ma = 1 : \frac{1}{2} = 2 : 3$.
Da $ma = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{3}$, so wird $mx = \frac{\sqrt{3} \cdot 4}{9} = \sqrt{0,592592592592...} = \log. 0,8863781$.

Es verhält sich ferner $a'x : xh' = mx : xa$ und $a'x = \frac{2}{3} a'h' = \frac{\sqrt{21} \cdot 2}{9}$.

Um my zu finden, bilde man den Rhombus $ma\psi a'$, wo $m\psi = 2 \cdot mh' = 2$ ist, dann wird

212 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

$$m y : y \psi = x m : m a' = 2 : 3 \text{ und } m y \text{ ist } = \frac{2}{3} m \psi = \frac{2}{3} = \sqrt{0,64}.$$

Es verhält sich auch in diesem Rhombus $x y : x a' = m y : m \psi$, und $x y$ ist $= \frac{2}{3} x a' = \frac{\sqrt{21 \cdot 2 \cdot 2}}{9 \cdot 5} = \sqrt{0,165925925} = 0,40734 = \log. 0,6099571$.

Die Linie $x x$ läßt sich als die Seite eines gleichwinkligen Sechsecks betrachten, dessen Halbmesser $m x$ bildet, und da hier Seite und Halbmesser gleich lang sind, so wird $x x = m x = \frac{\sqrt{3 \cdot 4}}{9}$.

$$\text{Eben so ist } y y = m y = \frac{2}{3} = 0,80 = \sqrt{0,64}.$$

Der Winkel bei y läßt sich in dem gleichschenkeligen Dreieck $x y x$ am leichtesten finden, wenn man die Linie $x x$ halbirte und das rechtwinklige Dreieck $y \varepsilon x$ bildet, wo $\varepsilon x = \sin.$ des Winkels von $\frac{1}{2} y$ und $y x$ den $\sin.$ tot. bildet:

$$\sin. \frac{1}{2} y = \frac{\sin. \text{ tot. } \frac{1}{2} x x}{x y} = 70^{\circ} 53' 36''$$

$$\text{Eben so ist } \sin. \frac{1}{2} x = \frac{\sin. \text{ tot. } \frac{1}{2} y y}{x y} = 79^{\circ} 6' 24''.$$

Der volle Winkel $x y x$ beträgt daher $141^{\circ} 47' 12''$ und $y x y$ $158^{\circ} 12' 48''$.

Will man aus der Quarzpyramide eine Dodekagonpyramide ableiten, so lege man aus jeder Grunddecke h in ein Viertel ω der zunächst schief gegenüberstehenden Kante die Linien, wo man dieselben Werthe und Durchschnittspunkte erhält.

§. 192.

Bestimmung der Kanten und ebenen Winkel
der Dodekagon-Pyramide.

Legt man in Fig. 8^a. aus der Polecke Linien in die Ecken x und y der horizontalen Projection, so erhält man die Polkanten p x und p y der Dodekagon-Pyramide, und x y sind die Grundkanten.

Da nach §. 186. die halbe Polage = $\sqrt{0,536078}$ ist, die Grundeckengrenzen m x und m y im vorigen §. bestimmt worden sind, so beträgt

$$p y^2 = p m^2 + m y^2; \quad p y = \sqrt{1,176078} = 1,084472 \\ = \log. 1,0852185$$

$$p x^2 = p m^2 + m x^2; \quad p x = \sqrt{1,188670} = 1,067085 \\ = \log. 1,0281994$$

$$x y = \sqrt{0,1659259} = 0,40734 \\ = \log. 0,6099571$$

Im Dreieck p x y, wo alle Seiten bekannt sind, erhalten wir, wenn man diese Seiten addirt, das Produkt halbirte und mit P bezeichnet:

$$\sin. \frac{1}{2} y = \sqrt{\frac{R^2 (P - p y) (P - x y)}{p y \cdot x y}} = \log. 9,7926893 = 38^\circ 20' 50''$$

$$\sin. \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{R^2 (P - p x) (P - x y)}{p x \cdot x y}} = \log. 9,8147476 = 40^\circ 44' 57''$$

$$\sin. \frac{1}{2} p = \sqrt{\frac{R^2 (P - p y) (P - p x)}{p y \cdot p x}} = \log. 9,2768232 = 10^\circ 54' 15''$$

der volle Winkel y beträgt daher $76^\circ 41' 40''$

— — — x — — — $81^\circ 29' 54''$

— — — p — — — $21^\circ 48' 26''$

§. 193.

Bestimmung der Kantenwinkel der Dodekagon-
Pyramide.

Fällt man in Fig. 8^a von dem Punkte λ der Kante $p x$ Perpendikel, welche in y und y' eintreffen, so ist $y \lambda y'$ der Winkel dieser Kante. Die Linie yy' bildet in Fig. 8. die Seite eines gleichwinkligen Hexagons, dessen Halbmesser my ist, und yy wird daher $= my$, welches wir §. 191. $= 0,8$ fanden.

Die Formel ist:
$$\sin. \frac{1}{2} \lambda = \frac{\sin. \text{tot.}^2 \frac{1}{2} y y'}{x y \cdot \sin. x} = 83^\circ 9' 50''$$

gibt für den vollen Kantenwinkel $166^\circ 19' 40''$.

Für die Polkante $p y$ bildet $x \pi x$ den Winkel und $x x$ ist $= m x = \frac{\sqrt{3} \cdot 4}{9}$.

Die Formel ist:
$$\sin. \frac{1}{2} \pi = \frac{\sin. \text{tot.}^2 \frac{1}{2} x x}{x y \cdot \sin. y} = 76^\circ 12' 56''$$

gibt für den vollen Winkel $152^\circ 25' 52''$.

Der halbe Winkel der Grundkante ist $p \beta m$. Da $p \beta$ senkrecht gegen $x y$ steht, so ist $p \beta = \frac{p x \cdot \sin. x}{\sin. \text{tot.}}$

$$\begin{array}{r} \log. \sin. 81^\circ 29' 54'' = 9,9952014 \\ + \log. p x = 1,0281994 \\ \hline 11,0234008 \\ - \log. \sin. \text{tot.} = 10 \\ \hline \log. p \beta = 1,0234008 \end{array}$$

Im Dreieck $p \beta m$ bildet die halbe Polaxe $p m$ den $\sin.$ des Winkels $p \beta m$ und $p \beta$ den $\sin. \text{tot.}$

$$\sin. p \beta m = \frac{\sin. \text{tot.} p m}{p \beta} = 43^\circ 55' 44''$$

gibt für den vollen Winkel $87^\circ 51' 28''$.

Hemiëdrische Gruppe.

§ 194.

Sei sie diene der kohlensaure Kalk zum Beispiel, dessen Stammrhomboëder Kantenvinkel von $105^{\circ} 5'$ und $74^{\circ} 55'$ besitzt. Die horizontale Flächendiagonale nn' Taf. IX. Fig. 10. nehmen wir $= \sqrt{3}$, wo die Seite der horizontalen Projection $nn' = 1$ ist. Es sind nun zu bestimmen: die ebenen Winkel, die geneigte Flächendiagonale, die Axen.

§. 195.

Bestimmung der ebenen Winkel, und Flächendiagonalen.

Man verlängere die eine Polkante pn in Fig. 10. bis dahin, wo von ihr abgehende Perpendikel in n'' und n^* eintreffen, was in λ der Fall ist, so ist $n''\lambda n^*$ der Winkel von $105^{\circ} 5'$ und $n''\lambda r$ dessen Hälfte $= 52^{\circ} 32' 30''$; so wie auch $n''r = \frac{1}{2} nn' = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Im Dreieck $\lambda rn''$ sind jetzt bekannt: $\lambda n''$ als sin. tot. und $n''r$ als sin. von $52^{\circ} 32' 30''$. Im Dreieck $n\lambda n''$, wo $n\lambda$ die verlängerte Polkante ist, und der Winkel bei λ 90° beträgt, bildet $\lambda n''$ den sin. des Winkels pn'' und nn'' den sin. tot. Es ist aber $\lambda n'' = \frac{r n'' \cdot \text{sin. tot.}}{\text{sin. } 52^{\circ} 32' 30''}$

$$\log. r n'' \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \log. \text{sin. tot.} = 10,9875306$$

$$- \log. \text{sin. } 52^{\circ} 32' 30'' = 9,8997084$$

$$\log. \lambda n'' = 1,0878222$$



216 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

Im Dreieck $n \lambda n''$ hat man $\sin. n = \frac{\sin. \text{tot. } \lambda n''}{n n''}$

$$\begin{array}{r} \log. \sin. \text{tot.} + \log. \lambda n'' = 11,0378222 \\ \log. n n'' (\sqrt{3}) = 1,2385606 \\ \hline \log. \sin. n = 9,7992616 = 39^\circ 2' 30'' \end{array}$$

Der ebene Randwinkel des Stammrhomboëders $p n n'$ ist darnach $2 \cdot 39^\circ 2' 30''$ oder $78^\circ 5'$ und der ebene Polwinkel $n p n''$ als Nebenwinkel $101^\circ 55'$.

Man kann auch für die Berechnung der ebenen Winkel jedes Rhomboëders aus den Kantenwinkeln desselben die Formel brauchen: $\sin. \text{des halben ebenen Randwinkels} = \frac{\sin. \text{tot.}^2}{2}$ dividirt durch den $\sin. \text{des halben Polkantenwinkels}$.

Aus den ebenen Winkeln ergibt sich die halbe geneigte Flächendiagonale $pr:rn = \text{tang. } 39^\circ 2' 30'' : \text{rad.}$, und da sich die halben Flächendiagonalen eben so zu einander verhalten, wie die ganzen Flächendiagonalen, so wird

$$p n' = \frac{\sqrt{3} \cdot \text{tang. } 39^\circ 2' 30''}{\text{rad.}}$$

$$\begin{array}{r} \log. \text{tang. } 39^\circ 2' 30'' = 9,090149 \\ + \log. \sqrt{3} = 1,2385606 \\ \hline \log. p n' = 11,1475755 - 10 \\ p n' = \log. 1,1475755 = \sqrt{1,973108} = 1,404673. \end{array}$$

§. 196.

Bestimmung der Kanten und Aren.

Im Dreieck $p r n$, wo $p n$ die Polkante bezeichnet, kann man $p n^2 = p r^2 + r n^2$ finden, oder auch $p n : p r = \sin. \text{tot.} : \sin. 39^\circ 2' 30''$. In beiden Fällen erhält man $p n = 1,115023 = \sqrt{1,243277} = \log. 1,0472839$. Da alle Flächen des Rhom-

boeders Rhomben sind, so haben auch die Randkanten $n'n'$ dieselbe Länge, wie die Polkanten.

Die Polage pp' kann man sich zusammengesetzt denken aus den Theilen pl und lp' und für jeden dieser Theile den Werth besonders suchen, wobei $n'l$ als senkrecht von pp' ausgehend und daher = dem Halbmesser der horizontalen Projection, mithin = 1 vorausgesetzt wird. Im rechtwinkligen Dreieck pln' ist $pn' = \sqrt{1,973108}$, und zieht man davon das Quadrat von $n'l$ ab, so bleibt $pl = \sqrt{0,973108} = \log. 0,9940805 = 0,986462$. Im rechtwinkligen Dreieck $n'l p'$ ist $n'p' = pn = \sqrt{1,243277}$, und zieht man davon ebenfalls 1^2 ab, so bleibt für lp' der Werth von $\sqrt{0,243277} = \log. 0,6930505 = 0,493231$, woraus sich $lp' = \frac{1}{2} pl = \frac{1}{2} pp'$ ergibt und pp' wird = $1,479693 = \log. 1,1701718 = \sqrt{2,189493}$.

Die Randage $n'n$, welche die Polage bei m im Mittelpunkte schneidet und deren Hälfte $n'm$ bildet, berechnet sich durch die Summe der Quadrate von $n'l$ und ml . Da $mp' = \frac{1}{2} pp'$ und $lp' = \frac{1}{2} pp'$ ist, so ist $ml = \frac{1}{2} pp' - \frac{1}{2} pp' = \frac{1}{2} pp' = 0,2466155 = \sqrt{0,0608192}$, und die halbe Randage $n'm$ ist = $\sqrt{1,0608192}$.

s. 197.

Ableitung spitzerer und stumpferer Rhomboeder aus dem Stammrhomboeder.

Die Mittelpunkte der Flächen eines Rhomboeders bilden die Randecken des nächst ableitbaren spitzern

Rhomboëders. In Fig. 10., wo r die Kanten des spitzen Rhomboëders darstellen, ist die Polkante pr des abgeleiteten Rhomboëders = der halben geneigten Flächendiagonale pn' des Stammrhomboëders, und die horizontale Flächendiagonale rr des erstern verhält sich zur horizontalen Flächendiagonale $n'n'$ des letztern wie $pr : pn' = 1 : 2$.

Wir haben daher für $R + 1$

$$\text{die Polkante } pr = \frac{1}{2} pn' = 0,7023370 = \sqrt{0,493277}$$

$$\text{die horizontale Flächendiagonale } rr = \frac{1}{2} n'n' = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{die geneigte Flächendiagonale } pr' = \sqrt{(pn'^2 - n'r'^2)} = \sqrt{1,223108}.$$

Für den halben ebenen Polwinkel ist die Formel anwendbar: $\sin. rps = \frac{\sin. \text{tot. } rs}{pr} = \frac{\sin. \text{tot. } \sqrt{3}}{4 \cdot \sqrt{0,493277}} = 38^\circ 3' 47''$.

Man kann auch als allgemeine Formel annehmen: der Sinus des halben ebenen Polwinkels des spitzen Rhomboëders ist = tang. des halben ebenen Polwinkels des stumpfern Rhomboëders dividirt durch 2, in diesem Falle also $\sin. rps = \frac{\text{tang. } npr}{2}$. Um aus einem Rhomboëder das nächst stumpfere abzuleiten, darf man nur den sin. des halben ebenen Polwinkels mit 2 multipliciren, um die tang. des halben ebenen Polwinkels des stumpfern Rhomboëders zu erhalten. Vergleicht man in Fig. 10. das Dreieck npr mit dem Dreieck psr , welche beide Dreiecke rechtwinkelige sind, so ist

pr für das erste Dreieck der Radius, für das zweite der sin. tot. und rs ist $\frac{1}{2} r n$, daher $\text{tang.} : \text{sin.} = 2 : 1$.

Berechnen wir daraus die halben ebenen Polwinkel, die wir mit $\frac{1}{2} p$ bezeichnen, für die Rhomboëderreihe des kohlen-sauren Kalkes, so erhalten wir folgende Werthe:

das Stammrhomboëder halber ebener Polwinkel
= 50° 57' 30"

$$R+1 \text{ sin. } \frac{1}{2} p = \frac{\text{tang. } 50^{\circ} 57' 30''}{2} = 38^{\circ} 3' 47''$$

$$R+2 \text{ sin. } \frac{1}{2} p = \frac{\text{tang. } 38^{\circ} 3' 47''}{2} = 23^{\circ} 2' 59''$$

$$R+3 \text{ sin. } \frac{1}{2} p = \frac{\text{tang. } 23^{\circ} 2' 59''}{2} = 12^{\circ} 17'$$

$$R-1 \text{ tang. } \frac{1}{2} p = 2 \cdot \text{sin. } 50^{\circ} 57' 30'' = 57^{\circ} 13' 41\frac{1}{2}''$$

$$R-2 \text{ tang. } \frac{1}{2} p = 2 \cdot \text{sin. } 57^{\circ} 13' 41\frac{1}{2}'' = 59^{\circ} 15' 44''$$

Um aus den ebenen Winkeln eines Rhomboëders den Winkel der Polkante, den wir λ nennen wollen, zu bezeichnen, gilt die Formel:

$$\text{sin. } \frac{1}{2} \lambda = \frac{\text{sin. tot.}^2}{2 \cdot \text{cos. des halben ebenen Polwinkels}}$$

Diese Formel auf $R+1$ angewendet, giebt

$$\text{sin. } \frac{1}{2} \lambda = \frac{\text{sin. tot.}^2}{2 \cdot \text{cos. } 38^{\circ} 3' 47''}$$

$$\log. \text{ sin. tot.}^2 = 20,0000000$$

$$- \log. 2 = 3010300$$

$$19,6989700$$

$$- \log. \text{ cos. } = 9,8961583$$

$$\log. \text{ sin. } \frac{1}{2} \lambda = 9,8028117 = 39^{\circ} 25' 26\frac{1}{2}''$$



§. 196.

Ableitung der Hexagonal-Pyramiden aus dem Rhomboëder.

Wenn man aus einem Rhomboëder Fig. 11. aus den Polecken p Linien pa in die Mitte der Randkanten legt, so bilden diese die Polkanten derjenigen Hexagonal-Pyramide, welche als Verbindung zweier gleichartigen in verwendeter Stellung gegen einander befindlichen Rhomboëder angesehen werden kann, und die Benennung *Dirhomoëder* führt. Indessen kommen auch Rhomboëder vor, die durch diese Ableitungsart auf die Quarzpyramide führen, und die Berechnungsmethode ist für beide Fälle gleich. Bei dem kohlenfauren Kalke tritt der erste Fall ein, und in Fig. 11. bezeichnet paa' die Fläche des Dirhomoëders. Hier haben wir $ha' : rn = n'a : n'n = 1 : 2$ und daher $ha' = \frac{1}{2} rn$. Es ist ferner $rt : ha' = pr : ph = 2 : 3$ und $rt = \frac{2}{3} ha'$ oder auch $rt = \frac{1}{3} rn$. Die Linie rn bildet für den Winkel rpn die Tangente, wenn pr als Radius angenommen wird, und auch rt bildet für den halben ebenen Polwinkel des Dirhomoëders rpt die Tangente. Wird daher die Tangente des halben ebenen Polwinkels eines Rhomboëders durch 3 dividirt, so erhält man die Tangente des halben ebenen Polwinkels des Dirhomoëders. Bei dem kohlenfauren Kalke ist die Hälfte des ebenen Polwinkels $50^\circ 57' 30''$.

$$\log. \text{ tang. } 50^\circ 57' 30'' = 10,0909851$$

$$- \log. 3 = 4771213$$

$$\log. \text{ tang. } = 9,6138638 = 22^\circ 20' 37''$$

Es beträgt mithin der ebene Winkel $ap a'$ $44^\circ 41' 14''$ und der ebene Winkel $pa a'$ $67^\circ 39' 28''$.

Der Winkel der Polkante des Dirhomböders, den wir λ nennen wollen, findet sich nach §. 189. durch die Formel $\sin. \frac{1}{2} \lambda = \frac{\sin. \text{tot.}^2 \sqrt{3}}{2 \cdot \sin. 67^\circ 39' 28''} = 69^\circ 26' 35''$, und der volle Winkel beträgt daher $138^\circ 53' 10''$.

Bei jeder Hexagonal-Pyramide verhält sich nach Fig. 2. die halbe Grundkante ha zur halben Grunddiagonale hm wie $1:\sqrt{3}$. Nimmt man nun in Fig. 11. ph für das Dreieck pha als Radius, für das Dreieck phm als $\sin. \text{tot. an.}$, so erhalten wir den halben Winkel der Grundkante des Dirhomböders durch die Formel: $\cos. h = \text{tang. } 22^\circ 20' 37'' \cdot \sqrt{3} = 44^\circ 36' 35''$.

§. 199.

Ableitung der nächststehenden spitzeren Kalkpyramide aus dem Rhomböder.

Wenn man in Fig. 27. die Kandecke des Stammrhomböders n'' durch die beiden Flächen pzn ersetzt, wo $n''z = \frac{1}{2} n'n''$, und auf diese Weise bei allen Kandecken verfährt, so entsteht die Kalkpyramide, deren Polkanten mit pd die Randkanten durch dd' bezeichnet sind.

1. Bestimmung der Polkanten.

Die Polkante $p'd$ verhält sich zu $d n''$ wie $n'a'' : n''z = 2:1$ und $p'd$ ist $\frac{2}{3} p'n''$. Die Linie $p'n''$ ist aber die geneigte Flächendiagonale des Stammrhomböders, die wir oben (§. 195.) $= 1,404673$ gefunden haben,

222 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

mithin erhalten wir für $p'd$ den Werth von 0,936449
 $\equiv \log. 0,9714842$.

Die Polkante $p\delta$ oder $p'd$ ergibt sich aus Fig. 37.,
 wo $p\delta^2 = p\tau^2 + \tau\delta^2$.

Es ist $\tau\delta : l'n = p'd : p'n = 2 : 3$, und da
 $l'n$ der Halbmesser der horizontalen Projection des
 Stammrhomboëders $= 1$, so ist $\tau\delta = \frac{2}{3} =$
 $\sqrt{0,444444\dots}$.

Eben so verhält sich $p'\tau : p'l = 2 : 3$, und da
 $p'l = \frac{2}{3}$ der Polaxe pp' , so ist $p'\tau = \frac{pp' \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3}$
 $= \frac{4}{9} pp'$, und für $p\tau$ bleibt daher $\frac{5}{9} pp' =$
 0,675767115889. Der Werth der Polkante $p\delta$ er-
 giebt sich daraus $= \sqrt{1,1202115603} = 1,05840$.

2. Bestimmung der ebenen Winkel.

In der Fläche $pn'd$ Fig. 27. sind gegeben:

pn' = der geneigten Flächendiagonale des Stamm-
 rhomboëders und $= 1,404673$

$p\delta = 1,05840$

$\delta n'^2 = n'r^2 + \delta r^2$, und da $n'r$ = der halben hor-
 zontalen Flächendiagonale des Stammrhomboë-
 ders $= \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{0,75}$ und δr = der halben
 geneigten Flächendiagonale $n''r$, weniger $n''\delta$,
 welches ein Drittel derselben ausmacht, oder
 $\delta r = \frac{1}{2} n''p' - \frac{1}{3} n''p' = \frac{1}{6} n''p' =$
 $\sqrt{0,054808475366}$, so wird $\delta'n =$
 $\sqrt{0,804808475366} = 0,8971112$.

Da nun in dem Dreieck $p n' d$ die Seiten gegeben sind, so lassen sich daraus die Winkel berechnen und man erhält

$$\begin{aligned} \text{für den Winkel } p d n' \text{ den log. cosin. } & 9,9998607 = 91^\circ 27' 4'' \\ p n' d \text{ den log. sin. } & 9,8769350 = 48^\circ 52' 20'' \\ n' p d \text{ den log. sin. } & 9,8051314 = 39^\circ 40' 36'' \end{aligned}$$

Der letzte Winkel ist der ebene Polwinkel der Kalkpyramide, und da die Längenmaße von $p d$ und $p d'$ bekannt sind, so lassen sich auch daraus die ebenen Winkel bei d und d' berechnen. Man bestimme den halben Nebenwinkel des ebenen Polwinkels (von $39^\circ 40' 36''$), welcher $70^\circ 9' 42''$ beträgt und nenne ihn μ , so giebt die Formel $\frac{\text{tang. m } (p d - p d')}{p d + p d'}$ den Logarithmus 9,2290353, welcher der Tangente von $9^\circ 37' 2''$ angehört. Der Winkel $p d' d$ beträgt nun $70^\circ 9' 42'' + 9^\circ 37' 2'' = 79^\circ 46' 44''$, und der Winkel $p d d'$ $70^\circ 9' 42'' - 9^\circ 37' 2'' = 60^\circ 32' 40''$.

3. Bestimmung der Randkanten ($d d'$ in Fig. 27).

Man errichte auf der Linie $p d$ einen Perpendikel aus ω , der in d' eintrifft, so ist dieser Perpendikel $d' \omega = \frac{p d \cdot \sin. 39^\circ 40' 36''}{\sin. \text{ tot.}} = \text{log. } 0,7766156$. Es verhält sich nun $d' d$ zu $d' \omega$ wie der $\sin. \text{ tot.} : \sin. 60^\circ 32' 40''$ oder $d' d = \frac{d' \omega \cdot \sin. \text{ tot.}}{\sin. 60^\circ 32' 40''}$ wodurch man für $d' d$ den logar. 0,8367284 erhält, welcher der Zahl 0,686639 entspricht.

224 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

4. Bestimmung des Winkels der Polkante $p\delta$.

Legt man in Fig. 27. aus dem Punkte ω der Polkante $p\delta$ Perpendikel, die in δ' und δ eintreffen, so ist $\delta'\omega\delta$ der gesuchte Winkel.

In dem gleichschenkeligen Dreiecke $\delta'\omega\delta$ sind nun bekannt:

$\delta'\delta' = \frac{2}{3} n'n'$, indem $\delta'\delta' : n'n'$ wie $p\delta' : p'n' = 2 : 3$. Die Linie $n'n'$ ist die horizontale Flächendiagonale des Stammrhomboëders und als solche (§. 194.) $= \sqrt{3}$, woraus $\delta'\delta'$ sich $= \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{3}$ und $\frac{1}{2} \delta'\delta'$ sich $= \frac{\sqrt{3}}{3}$ ergibt.

$\delta'\omega$ (§. 199. 3.) $= \log. 0,7766156$.

Aus diesen drei Seiten lassen sich die Winkel berechnen; da aber das Dreieck gleichschenkelig ist, so ist auch $\sin. \frac{1}{2} \omega = \frac{\sin. \text{tot. } \frac{1}{2} \delta'\delta'}{\delta'\omega}$ oder $= \frac{\sin. \text{tot. } \sqrt{3}}{3 \cdot \delta'\omega} = 74^\circ 56' 27''$, was für den vollen Winkel $149^\circ 53' 54''$ giebt.

5. Bestimmung des Winkels der Polkante $p\delta'$.

Man lege von der Polkante $p\delta'$ aus einem Punkte, den wir α nennen wollen, Perpendikel nach δ und δ' , so ist $\delta\alpha\delta'$ der gesuchte Winkel. Da eine Linie von δ nach δ' gelegt $= \delta'\delta' = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{3}$ und ihre Hälfte $= \frac{\sqrt{3}}{3}$, der ebene Winkel bei δ' (§. ob. 2.) $= 79^\circ 46' 44''$ und die Randkante $\delta\delta'$ (§. ob. 3.) $= 0,686639$,

so ist nach der Formel, $\sin. \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin. \text{tot.}^2 \sqrt{3}}{3. \delta \delta'. \sin. 79^\circ 46' 44''}$
 das Resultat $58^\circ 41' 34''$ und der volle Winkel dieser
 Polkante beträgt $117^\circ 23' 8''$.

6. Bestimmung des Winkels der Grund-
 kanten $\delta \delta'$.

Man lege in jede Polecke eine Linie $\lambda \lambda$ in Fig. 38.,
 die parallel mit einander und parallel mit einer Grund-
 kante laufen. Aus den Endpunkten δ und δ' dieser
 Grundkante errichte man Perpendikel $\delta \lambda$ und $\delta' \lambda$, wel-
 che die Linien $\lambda \lambda$ ebenfalls unter rechten Winkeln tref-
 fen, dann ist $\lambda \delta' \lambda'$ der gesuchte Winkel der Grund-
 kante $\delta \delta'$.

In dem Dreieck $\lambda \delta' \lambda'$ lassen sich finden:

$\lambda \delta'$ als $\sin.$ für den Winkel $\delta' p \lambda$. Der Winkel
 $p \delta' \lambda$ ist der Ergänzungswinkel des Winkels $p \delta' \delta$ zu
 90° und der Winkel $\delta' p \lambda$ ist = dem Winkel $p \delta' \delta$ =
 $79^\circ 46' 44''$ (s. ob. 2.). Die Kante $p \delta'$ haben wir
 (s. ob. 1.) = 0,936449 gefunden. Es ist nun $\lambda \delta'$
 = $\frac{p \delta'. \sin. 79^\circ 46' 44''}{\sin. \text{tot.}}$ = $\log. 0,9645368$.

Da die Flächen $\lambda \lambda \delta \delta'$ und $\lambda \lambda' \delta \delta'$ unter sich gleich
 und rechtwinkelige Parallelogrammen sind, so ist auch
 $\delta' \lambda' = \lambda \delta'$.

Legt man nun aus λ in δ'' und aus λ' in δ'' eben-
 falls Linien, so werden diese den vorigen gleich, und es
 entsteht der Rhombus $\lambda \delta' \lambda' \delta''$, dessen eine Diagonale
 $\delta' \delta''$ bereits bekannt (s. ob. 4.) und = $\frac{\sqrt{3} \cdot 2}{3}$, so wie
 ihre Hälfte $\delta'' = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ist.

226 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

Es verhält sich $\delta' * : \delta' \lambda = \sin. \frac{1}{2} \lambda : \sin. \text{tot.}$
 und $\sin. \frac{1}{2} \lambda = \frac{\sin. \text{tot.} \delta' *}{\delta' \lambda}$

$$\begin{array}{r} \log. \sin. \text{tot.} + \log. \sqrt{3} = 11,2385606 \\ - \log. 3 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 4771213 \end{array}$$

$$10,7614393$$

$$- \log. \delta' \lambda$$

$$9645368$$

$$\log. \sin. \frac{1}{2} \lambda = 9,7969025 = 38^\circ 47' 25''$$

Der volle Winkel $\delta' \lambda \delta''$ beträgt $77^\circ 34' 50''$ und der Winkel $\lambda \delta' \lambda'$ als Nebenwinkel $102^\circ 25' 10''$.

Berechnet man auf gleiche Weise aus dem auf das Stammrhomboëder nächstfolgenden spitzeren Rhomboëder (aus $R + 1$), dessen ebener Polwinkel $76^\circ 7\frac{3}{4}'$ beträgt, die Kalkpyramide, so werden ihre ebenen Winkel $24^\circ 16\frac{5}{8}'$, $54^\circ 39\frac{1}{2}'$ und $101^\circ 4\frac{3}{4}'$ und die Kantewinkel $104^\circ 38'$, $144^\circ 24'$ und $132^\circ 58'$ betragen. Die Kanten derseiben ist die Kanten des Stammrhomboëders, der Werth der einen Polkante ist = 2,21188, der der andern = 2,661185, der Werth der Polaxe 4,439073. Man kann diese Kalkpyramide aus dem Stammrhomboëder unmittelbar ableiten, wenn man (Fig. 22.) die Polaxe desselben mit drei multiplicirt und aus den Pol-ecken Linien nach den Kanten des Stammrhomboëders zieht, welche die Polkanten der Kalkpyramide geben.

§. 200.

Ableitung der nächststehenden stumpferen Kalkpyramide aus dem Rhomboëder.

Wenn wir in Fig. 29 und 30. aus dem $R + 1$, auf die §. 146. angegebene Art, die nächststehende stumpfere Kalkpyramide ableiten, so müssen wir dieselbe Kalkpyramide erhalten, die als nächststehendes spitzeres

Glied aus dem Stammrhomboëder hervorgeht. Er setzt man jede Polkante durch zwei Flächen, deren Durchschnittslinie $\rho\rho$ in Fig. 30. bildet, so sind die Punkte π und π' , wo dieselben die Hauptaxe schneiden, die Polecken der Kalkpyramide, und Linien, die von den Randecken des Rhomboëders nach den Polecken der Kalkpyramide ($\pi r'$ oder $r\pi'$) laufen, bestimmen da, wo sie sich mit den vorigen Linien kreuzen (δ und δ') die Randecken der Kalkpyramide, deren Polkanten mit $\pi\delta$ und $\pi\delta'$ und deren Randkanten mit $\delta\delta'$ bezeichnet sind.

Um in Fig. 29. im Dreiecke $\rho\pi r'$ den ebenen Winkel bei π zu finden, suche man die Länge der Linien $\pi\rho$, $\pi r'$ und $\rho r'$, wobei $pz' = \frac{1}{3} pr$ und $r\rho = \frac{1}{4} r p'$ als bekannt vorausgesetzt wird.

$$\pi\rho : pr = p'\rho : p'r = 3 : 4; \text{ daher } \pi\rho = \frac{3}{4} pr$$

$$\pi r' = \pi l^2 + l r'^2$$

$$\pi l = pl - p\pi$$

$$pl \text{ (f. §. 196.)} = \frac{2}{3} pp' = \frac{8}{12} pp'$$

$$p\pi = \frac{1}{4} pp', \text{ indem } p\pi : pp' = r\rho$$

$$: r p' = 1 : 4 \text{ und } p\pi = \frac{1}{4} p' p$$

$$\pi l = \frac{5}{12} pp'$$

$$l r' = \frac{1}{2} l n'$$

$\rho r'$ findet sich aus dem Quadrate der halben horizontalen Flächendiagonale und dem Quadrate des Theils ρs der geneigten Flächendiagonale, welcher letztere $= \frac{1}{4} r p'$.

Da nach §. 197. $pr = 0,7023370$, so ist $\pi\rho = 0,5267527$, wozu der Logarithmus $0,7216068$ gehört.

Nach §. 196. ist $pp' = \sqrt{2,189493}$ und $\frac{5}{12} pp' = \sqrt{0,3801203}$ und $l r' = 0,5$ oder $= \sqrt{0,25}$,

228 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

gibt $\pi r' = \sqrt{0,6301203} = 0,793801$, wozu der Logarithmus 0,8997118 gehört.

Ein Viertel der geneigten Flächendiagonale ist nach §. 197. $= \frac{\sqrt{1,223103}}{4}$ und die Hälfte der horizontalen Flächendiagonale $= \frac{\sqrt{3}}{4}$, woraus $\rho r' = \frac{\sqrt{4,223103}}{4} = \sqrt{0,2639455} = 0,513756$, wozu als Logarithmus 0,7107571 gehört.

Berechnet man aus der Länge dieser Linien die Winkel des Dreiecks $\pi \rho r'$, so erhält man den Winkel bei $\pi = 39^\circ 40' 36''$.

In dem Dreieck $\pi \delta \delta'$ nach Fig. 30. ist $\pi \delta' = z' r = \frac{2}{3} p r$ und $\pi \delta = \frac{2}{3} \pi r'$, indem $\pi \delta : \pi r' = \rho' \rho' : \rho' r' = 2 : 3$. Da nun in Fig. 29. in dem Dreieck $p \delta$ der Winkel bei $\pi = 39^\circ 40' 36''$, der eine Schenkel $p \delta' = \frac{2}{3} p r = 0,4682245 = \log. 0,6704542$ und der andere Schenkel $p \delta = \frac{2}{3} \pi r' = 0,529201 = \log. 0,7236205$, so lassen sich daraus die andern beiden Winkel berechnen und der Winkel bei δ' wird $79^\circ 46' 44''$ und der Winkel bei $\delta = 60^\circ 32' 40''$ betragen, übereinstimmend mit den §. 199. 2. gefundenen Winkeln.

Bestimmung der Dodekagon-Pyramide.

Wenn man aus der §. 198. aufgefundenen Hexagonal-Pyramide, deren Grundseite $aa' = \frac{1}{2} n n =$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$, nach der §. 191 — 193. angegebenen Berechnungsmethode die Dodekagon-Pyramide ableitet, und Fig. 8 und 8^a) auf Taf. IX. zu Grunde legt, so erhält man bei dem kohlen-sauren Kalke für die aus dem Stammrhomboëder zunächst ableitbare Dodekagon-Pyramide folgende Werthe:

$$mx = \frac{2}{3} ma = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad mh' = \frac{\sqrt{36}}{8} = \frac{6}{8}$$

$$my = \frac{4}{3} mh' = 0,6 = \sqrt{0,36}$$

$$m\beta = 0,5669460 = \sqrt{0,32142820}$$

die Grundkante xy = 0,3055050 (log. 0,4850183)

die Polkante px = 0,9384586 (log. 0,9724156)

die Polkante py = 0,9525604 (log. 0,9788929)

die Höhe der Flächen pβ = 0,9320954 (log. 0,9694603)

die Linie yy = my und ihre Hälfte = 0,3

die Linie xx = mx und ihre Hälfte = $\frac{\sqrt{3}}{6}$

Daraus ergeben sich folgende Winkel:

der ebene Winkel bei x = 83° 19' 26" (log. 9,9970447)

— — — — y = 78° 6' 5" (log. 9,9905674)

— — — — p = 18° 34' 29" (log. 9,5031701)

der Winkel der Kante px = 162° 44' 46"

py = 149° 53' 54"

xy = 105° 4' 26".

§. 202.

Ableitung der abnormen Hexagonal-Pyramide aus der Dodekagon-Pyramide.

Man lasse in Fig. 8. von den Grundkanten der Dodekagon-Pyramide xy die abwechselnden so wachsen, bis die dazwischen liegenden verschwinden, so werden

230 Drittes Kap. Berechnung der Krystalle.

die Punkte, in denen die gewachsenen Grundkanten zusammenstoßen, die Grunddecken der abnormen Hexagonal-Pyramide bilden, die in Fig. 20. durch Φ bezeichnet sind. Man errichte nun in Fig. 20. auf $\Phi\Phi'$ den Perpendikel βm , welchen wir S. 201. (gleich der Linie βm in Fig. 8^a) = 0,56695 gefunden haben. Das Dreieck $\Phi m \Phi'$ ist gleichseitig, jeder Winkel beträgt 60° und Φm verhält sich zu βm wie der sin. tot. zum sin. 60° , und $\Phi m = \frac{\text{sin. tot. } \beta m}{\text{sin. } 60^\circ}$

$$\begin{aligned} \log. \text{ sin. tot. } + \log. \beta m &= 10,7535420 \\ - \log. \text{ sin. } 60^\circ &= 9,9375306 \end{aligned}$$

$$\log. \varphi m = 0,8160114 = \sqrt{0,428571}.$$

Es ist das Quadrat der Polkante $p\Phi = pm^2 + \Phi m^2 = \sqrt{0,975944}$, wozu der Logarithmus 0,9947124 gehört.

Da nun nach Fig. 20. die Grundkante der Hexagonalpyramide $\Phi\Phi'$ dem Halbmesser der horizontalen Projection Φm gleich ist, so sind in der Hexagonal-Pyramide alle Kanten gegeben, woraus nach der Formel $\text{sin. } \frac{1}{2} p = \frac{\text{sin. tot. } \frac{1}{2} \varphi \varphi'}{p \varphi}$ der halbe ebene Polwinkel der Hexagonal-Pyramide sich zu $19^\circ 21'$ und der ebene Randwinkel Φ als Winkel des Cosinus sich zu $70^\circ 39'$ ergibt.

Die Winkel der Polkante, den wir λ nennen wollen, ist nach der S. 219. aufgeführten Formel, (wo $\text{sin. } \frac{1}{2} \lambda = \frac{\text{sin. tot. }^2 \sqrt{3}}{2 \cdot \text{sin. } \varphi} = 66^\circ 37' 2''$) $133^\circ 14' 4''$; der Winkel der Grundkante bleibt unverändert $105^\circ 4' 26''$.

Leitet man aus dieser abnormen Hexagonal-Pyramide, durch Wachsen der abwechselnden parallelen Flächen das abnorme Rhomboëder ab (s. S. 190.), so giebt die tang. des halben ebenen Polwinkels der Hexagonal-Pyramide durch 3 multiplicirt, die Tangente des halben ebenen Polwinkels des Rhomboëders. Der volle ebene Polwinkel dieses abnormen Rhomboëders beträgt $92^{\circ} 59' 10''$ und der Polantentwinkel $93^{\circ} 9'$.

[Faint, mostly illegible text and mathematical notes, possibly bleed-through from the reverse side of the page.]



Viertes Kapitel.

Beispiele für das Vorkommen der Krystalle
bei Mineralien.

Mineralien, dem tesseralen Systeme angehörig.

§. 203.

Demant. Die am häufigsten vorkommende Krystallformen sind das Pyramiden-Oктаeder und der Achtundvierzig-Flächner, nächstdem das Oktaeder. Die Kanten des letztern sind fast immer gerundet, weshalb das Pyramiden-Oktaeder als Rhomben-Dodekaeder mit convexen Flächen erscheint. Auch kommen die Flächen des Rhomben-Dodekaeders und des Würfels vor. Von den Flächen des Oktaeders werden bisweilen die abwechselnden, nicht parallelen größer, wodurch eine Annäherung an das Tetraeder erfolgt, und der Achtundvierzig-Flächner wird, wenn die den Oktaederflächen entsprechenden Flächensysteme auf gleiche Weise abwechselnd überhand nehmen, zum Hexakis-Tetraeder. In hemitropischen Zwillingen finden sich Oktaeder, Pyramiden-Oktaeder und Achtundvierzig-Flächner, der Schnitt immer senkrecht auf eine Flächenaxe des Oktaeders gerichtet (Taf. XI. Fig. 1.). Die Textur läuft parallel den Flächen eines Oktaeders,

nimmt aber an den Wölbungen, welchen die Flächen der Krystalle mit oktaëdrischen Umrisen unterworfen sind, keinen Antheil.

§ 204.

Spinell. Das Oktaëder erscheint häufig vollkommen, zeigt aber auch häufig eine Neigung zur Vergrößerung einzelner Flächen, ohne Annäherung zum Tetraëder. Wachsen die abwechselnden parallelen Flächen, so entsteht ein von vier Trapezen und vier gleichseitigen Dreiecken begränzter Körper, der einem Quadratprisma mit zugespitzten Enden ähnelt; wachsen zwei parallele Flächen, so entsteht ein von zwei gleichwinkligen Hexagonen und sechs Trapezen begränzter Körper, den man ohne die Winkel gemessen zu haben, für ein Rhomboëder mit sehr stark abgestumpften Polecken halten möchte. Die Flächen des Rhomben-Dodekaëders, so wie die des Trapezoëders, oft auch beide zugleich, erscheinen bisweilen an den Kanten und Ecken des Oktaëders. Von allen diesen Gestalten finden sich hemitropische Zwillinge, deren Schnitt senkrecht auf die Flächenlage des Oktaëders geht. Die Lectur parallel den Flächen des Oktaëders ist nur bei dem Zink-Spinell deutlich.

§. 205.

Helvin. Das Tetraëder ist die vorwaltende, oft allein sich zeigende Krystallgestalt, doch kommt auch mitunter die andere Hälfte der Flächen des Oktaëders als Abstumpfungsfächen der Ecken des Tetraëders zum Vorschein, und, wiewohl selten, findet man die Flächen des Rhomben-Dodekaëders als dreifächige

Zuspitzung der Tetraëderecken. Durchgänge sind zwar noch nicht beobachtet, aber man trifft zuweilen die Tetraëderflächen parallel mit den Kanten gestreift, woraus sich auf Durchgänge schließen läßt, die entweder parallel den Flächen des Oktaëders oder parallel den Flächen des Würfels gehen.

§. 206.

Granat. Vollständig erscheinen bei ihm Rhomben-Dodekaëder und Trapezoëder, auch beide häufig in Verbindung mit einander, bald die eine, bald die andere Gestalt vorwaltend. Untergeordnet erscheinen die Flächen des Achtundvierzig-Flächners, des Pyramidenwürfels und, wiewohl sehr selten, die des Würfels. Bei dem Rhomben-Dodekaëder bemerkt man bisweilen vier, mit einer durch zwei vierkantige Ecken gelegten Aye parallel laufende Flächen, vergrößert, so daß diese vier Flächen Hexagone, die übrigen Rhomben bilden, und der Krystall das Ansehen einer Quadratpyramide in Verbindung mit dem in verwendeter Stellung befindlichen Quadratprisma erhält. Auch findet man bisweilen sechs, einer durch zwei dreikantige Ecken gelegten Aye parallel laufende Flächen vergrößert, wodurch der Krystall der Verbindung eines Rhomboëders mit dem Hexagonal-Prisma ähnlich wird.

Durchgänge werden nicht sichtbar. Der in Piemont mit weißem Aagit und Glimmer vorkommende Granat zeigt auf den Flächen, die dem Trapezoëder angehören, eine Streifung, welche parallel mit den Kanten des Dodekaëders läuft, und auf Durchgänge mit den Dodekaëderflächen gleichlaufend, hinweisen würde. Dagegen kommen in England Krystalle vor,

welche nicht nur die Flächen des Würfels, sondern auch mit ihnen gleichlaufende Durchgänge zeigen, und die Streifung mancher Dodekaëder nach der kurzen Diagonale weist ebenfalls auf diese Theilbarkeit hin. Haüy trennt deshalb die letzteren Abänderungen als besondere Gattung, unter dem Namen Aplom. Der schaalige Granat aus Grönland, zu welchem der böhmische Pyrop gehören dürfte, eignet sich vielleicht auch zu einer besondern Gattung, denn außer daß die schaalige Absonderung, wie sie bei ihm vorkommt, nicht leicht weiter bei einem Fossile des tesseralen Systems gefunden wird, so besißt auch die hiesige Sammlung ein kleines Stückchen von der Härte des übrigen Granats, mit einem specifischen Gewicht von 3,78, das einen, aber sehr ausgezeichneten Durchgang darbietet und daher auf ein einziges Krystallsystem hinweist. Bei dem Granat von Haddam in Connecticut scheint ein gleiches Verhalten statt zu finden. Ist die Angabe, daß Pyrop einfache Strahlenbrechung besitze, auch wirklich über allen Zweifel sicher? Oder hat Hoffmann Recht, wenn er ihm doppelte Strahlenbrechung zuschreibt?

Am Hessonit aus Ceylon glaubt Haüy Durchgänge, die sich unter $102^{\circ} 40'$ schnitten, wahrgenommen zu haben, wiewohl nicht vollkommen deutlich. Wären es unvollkommene einzelne Krystallflächen gewesen, oder ihnen entsprechende einzelne Absonderungsflächen, so wäre der Winkel an einer Combinationskante des Würfels und Achtundvierzig-Flächners allerdings diesem sehr nahe kommend. Die in Piemont vorkommenden, neuerdings dem Hessonit beigezählten Krystalle gaben bei den Untersuchungen mit dem Re-

flections-Goniometer an den Kanten, in denen die hexagonalen Flächen sich vereinigen, $146\frac{1}{2}^{\circ}$, wodurch sie sich als Trapezoëderflächen beurfunden.

§. 207.

Analzim. Das Trapezoëder findet sich vollständig, der Würfel nur in Verbindung mit den Trapezoëderflächen, und wenn Thomsons Carcolith hieher gehört, auch mit den Oktaëderflächen, aber kaum für sich allein. Durchgänge werden kaum jemals erkennbar, und weisen dann theils auf den Würfel, theils auf das Oktaëder hin. Fast eben so beschränkt auf zwei einfache Gestalten, aber nicht auf Würfel und Trapezoëder, sondern auf Rhomben-Dodekaëder und Trapezoëder, ist der *Sodalit*, indeß die Theilbarkeit nach den Flächen des Dodekaëders ist vollkommen. Auf das Trapezoëder allein beschränkt sich der Formkreis des *Leuzits*, bei dem nur durch den Schimmer bei Kerzenlicht sich Durchgänge, parallel den Flächen des Würfels und Rhomben-Dodekaëders, verrathen. *Lazurstein* und *Saun* sind nur selten in Krystallen beobachtbar, und die Frage ist noch nicht erledigt, ob der Mineralog. berechtigt sey, sie nur als Abänderungen von einander zu betrachten. Es sollen bei ihnen außer den Flächen des Rhomben-Dodekaëders auch die Flächen des Oktaëders und Würfels vorkommen.

§. 208.

Boracit. Für die Verbindungen des Tetraëders mit den Flächen mehrerer homoëdrischen Körper, besonders mit Würfel und Rhomben-Dodekaëder, giebt

es nicht leicht ein lehrreicherer Beispiel, als den Boracit. Völlig einfache Krystalle kommen hier sehr selten vor und sind dann Rhomben-Dodekaëder, gewöhnlich sind aber noch die Flächen des Würfels und Tetraëders mit vorhanden, sehr selten treten untergeordnet noch die Flächen des Pyramiden-Tetraëders und des Achteck-Flächners auf. Die in frühern Zeiten bei Lüneburg gefundenen Krystalle hatten den Würfel oder das Rhomben-Dodekaëder als vorwaltende Gestalt; bei den vor wenig Jahren aufgefundenen Krystallen waltet größtentheils das Tetraëder vor, und nicht selten kommen auch wiederum die verschwundenen Flächen des Oktaëders zum Vorschein, und es finden sich dann Oktaëder in Verbindung mit den Flächen des Würfels und Rhomben-Dodekaëders, bei denen jedoch immer vier Flächen größer sind, als die übrigen. Man trifft auch Rhomben-Dodekaëder mit rauhen, concaven Flächen, wo die Kanten als schmale Leisten hervorstehen. Bei diesen gleichsam halb verwitterten Krystallen bemerkt man beim Zerschlagen die Neigung in feilförmige, mit dem schmalen Ende am Mittelpunkte des Krystalls versammelte Bruchstücke zu springen, aber Durchgänge sind dabei nicht wahrzunehmen.

Bemerkenswerth ist bei dem Boracit, daß zufällig durch einander gewachsene Krystalle selten, wirkliche Zwillingkrystalle noch gar nicht beobachtet sind. Unter einer sehr zahlreichen Reihe von Krystallen, die unser Museum Herrn Stadtschreiber H e y e r in Lüneburg verdankt, befinden sich sehr wenige Exemplare, die aus zwei durcheinander gewachsenen Individuen bestehen, aber eine besondere Regel für die Durchwachsung ist dabei nicht ersichtlich.

§. 209.

Flußspath. Der Würfel ist hier die vorherrschende Krystallgestalt, die häufig ohne alle Veränderung angetroffen wird, aber doch selten so, daß die Flächen alle Quadrate wären, sondern bei weitem am gewöhnlichsten haben die Würfel das Ansehen von quadratischen Prismen, oder von Oblongprismen. Sehr selten erscheinen Oktaëder, Rhomben-Dodekaëder und Pyramiden-Würfel vollständig und für sich allein, wohl aber in Verbindung mit dem Würfel, und untergeordnet auch die Flächen des Trapezoëders und Achtundvierzig-Flächners, so daß also alle homoëdrischen Gestalten des tesseralen Systems bei ihm vorhanden sind, aber keine hemiëdrische Gestalt. Auch Zwillingkrystalle Taf. XI. Fig. 2. kommen vor, wo man zwei Würfel sich so mit einander verwachsen denken muß, daß sie eine Eckene gemeinschaftlich besitzen, und wenn man die Würfel in dieser Stellung als Rhomboëder betrachtet, so steht das eine in verwendeter Stellung gegen das andere, wo dann die Randkanten beider in der Mitte sich kreuzen, und die Flächen des einen haben eine solche Lage, daß sie von den Randecken des andern die beiden Randkanten in der Mitte schneiden, die Polkante aber erst in der Polecke treffen. Schneidet man bei einem solchen Kreuzkrystall alle auspringenden Winkel weg, so würde daraus eine Hexagonal-Pyramide entstehen. Ganz vollendet, so daß genau die Polagen beider Würfel sich decken, findet man diese Kreuzkrystalle selten, oft ist ein Krystall kleiner als der andere, und gewöhnlich stehen die Polecken beider etwas von einander ab, so daß diese Polagen zwar parallel mit einander stehen, aber sich

nicht decken. Berücksichtigt man nur den Winkel, unter dem die Flächen beider Würfel sich schneiden, so wird man aber fast überall, wo Flußspathkrystalle sich durchwachsen, dieselben beobachten können.

Man darf die wirklichen Oktaëder und Rhomben-
Dodekaëder des Flußpaths nicht mit denen verwechseln, die nur als besondere krystallinische Zusammenhäufung von Würfeln zu betrachten sind, und durch ihre rauhen Flächen sich auszeichnen. Bobershau, Zinnwald und Altenberg im sächsisch-böhmischen Erzgebirge liefern diese merkwürdigen Zusammenhäufungen, und bei den Oktaëdern ist dann oft auf jeder Ecke ein kleiner, besonders ausgebildeter Würfel sichtbar.

Auch die Farbenvertheilung steht mitunter bei dem Flußspath in besonderer Beziehung zu der Krystallgestalt. Die schönen Zwillinge von Stanhope in Durham erscheinen bei auffallendem Lichte blau, bei durchfallendem Lichte grün. In Illinois in Nordamerika finden sich gelbe oder weiße Würfel, deren Kanten violblau gefärbt sind, wo also die Farbe die Lage der Dodekaëderflächen annimmt. Eben da kommen Würfel vor, die ein rothes Oktaëder einschließen. Bei Breitenbrunn in Sachsen zeigten zerschlagene blaßgrüne Oktaëder die Zeichnung eines violblauen, nur durch Linien angegebenen gleichwinkeligen Achtecks, oder den Durchschnitt eines Würfels mit den Flächen des Rhomben-Dodekaëders, und wo in einem Krystall mehrere Farben zugleich vorkommen, wird man häufig eine regelmäßige Farbenvertheilung treffen.

Durchgänge parallel den Flächen des Oktaëders, sind fast stets deutlich vorhanden, obgleich das Oktaëder als Krystall sehr selten vorkommt. Blaß rosenrothe

Würfel von Badenweiler zeigen eine diesen Durchgängen entsprechende deutliche gitterförmige Streifung nach beiden Diagonalen. Selten und nur unvollkommen werden Durchgänge sichtbar, die den Flächen des Würfels entsprechen. In dem grünen Flußspathe von Alstonmoore in England und dem violblauen von St. Gallen in Steyermark sind die Durchgänge nach den Flächen der Dodekaëder ziemlich deutlich. Die Streifung der Krystalle von Stanhope zeigt auch auf Durchgänge parallel den Würfelflächen hin.

§. 210.

Bei weitem die mehresten gediegenen Metalle gehören dem tesseralen Systeme an, wie gediegen Gold, gediegen Silber, Amalgam, gediegen Kupfer, gediegen Wismuth und gediegen Spießglanz, nur das Spießglanzsilber, die Tellurerze und vielleicht gediegen Arsenik machen eine Ausnahme davon. Ueberhaupt ist bei den metallischen Fossilien das tesserale System häufiger als die andern Systeme, und nur bei den gesäuerten metallischen Fossilien, bei denen überhaupt der äußere Charakter der Metallität am meisten zurückgedrängt ist, kommt es sehr selten vor. Ja es herrscht hier nicht einmal große Mannichfaltigkeit, weder in Hinsicht der vorkommenden einfachen Gestalten, noch in Hinsicht der Combinationen, wiewohl für jedes Metall ein eigenthümlicher Formenkreis, von dem der andern verschieden, sich nachweisen läßt.

§. 211.

Fahlerz. Vollständig und für sich allein kommen vor Tetraëder und Pyramiden-Tetraëder, unter-

geordnet die Flächen des Würfels und Rhomben-Dodekaeders. Wenn oktaëdrische Gestalten sich finden, so erscheinen diese als Verbindungen zweier Tetraëder, die sich wie rechts zu links gegen einander verhalten, indem die Flächen des einen Tetraeders rauh, die des andern glänzend sind. Auch bei den Pyramiden-Tetraedern kann man rechts gewendete und links gewendete unterscheiden, indem die erstern an dem glattflächigen Tetraëder Zuschärfungen der Kanten, die letzteren dreiflächige Zuspitzungen der Ecken, auf den Kanten ruhend, verursachen. Die Flächen des Rhomben-Dodekaeders erscheinen, besonders bei den Kapnickcr Krystallen, häufig dem Tetraëder untergeordnet, die Würfelflächen sehr selten. Auch kommen Zwillingkrystalle vor, die den Kreuzkrystallen angehören, wo zwei Tetraëder eine Kantenlage gemeinschaftlich haben, aber in verwendeter Stellung sich gegen einander befinden, so daß diejenigen Kanten beider, die eine gemeinschaftliche Kantenlage besitzen, sich unter rechten Winkeln schneiden (Taf. XI. Fig. 4.). Die Streifung der Tetraëderflächen parallel mit den Kanten verräth Durchgänge parallel den Tetraëderflächen.

§. 212.

Schwefelkies. Die am gewöhnlichsten, oft ohne irgend eine Veränderung vorkommenden Krystallgestalten sind der Würfel und das Pentagonal-Dodekaëder, untergeordnet erscheinen aber alle einfachen Gestalten des tesseralen Systems; wiewohl mehrere nur in hemiëdrischen Gestalten. Hexaëder, Oktaëder, Rhomben-Dodekaëder, Pyramiden-Oktaëder und Trapezoëder, kommen nur homoëdrisch, Pyramidenwür-

fel und Achtundvierzig-Flächner fast nur hemiedrisch vor. Die Flächen des Rhomben-Dodekaeders, Pyramiden-Oktaeders und Trapezoeders werden selten beobachtet und immer nur den Flächen des Würfels, Oktaeders oder Pentagonal-Dodekaeders untergeordnet. Sowohl von dem hemiedrischen Pyramidenwürfel (Pentagonal-Dodekaeder) als von dem hemiedrischen Achtundvierzig-Flächner (Tetragonoeder) finden sich mehrere, verschiedenen Schnittgesetzen entsprechende Abänderungen, und von den meisten auch wieder die in paralleler und die in verwendeter Stellung gegen einander befindlichen Gestalten. Die Hemiedrie nach den Flächen des Oktaeders oder nach den diesen Flächen entsprechenden Flächensystemen findet kaum Statt; doch scheint das Trapez-Dodekaeder vorzukommen, was eine Ausnahme von dieser Regel begründen würde. Da aber durch unregelmäßige Vergrößerung der Flächen des Pentagonal-Dodekaeders nicht selten an einer oder der andern Würfecke desselben Flächen anderer Gestalten verdrängt worden sind, die an den übrigen vorkommen, und die aufgewachsenen Krystalle des Schwefelkieses selten mehr als zwei oder drei Würfecken sichtbar werden lassen, so möchte auch diese Ausnahme nur als zufällig oder scheinbar anzunehmen seyn.

Unter den Verbindungen dieser verschiedenen Gestalten sind mehrere, welche dadurch, daß alle Flächen einander ähnlich sind, das Ansehen einfacher Gestalten annehmen. Dahin gehören das Ikosaeder als Verbindung des Pentagonal-Dodekaeders mit dem Oktaeder; das Triakontaeder als Verbindung des Tetragonoeders mit dem Würfel; ein von sechsunddreißig Pentagonen umschlossener Körper als Verbindung eines Tetrago-

noëders mit dem Pentagonal-Dodekaëder, wenn man auf Taf. VI. Fig. 121. die mit t' bezeichneten Flächen vergrößert.

Sowohl Würfel als Pentagonal-Dodekaëder kommen mit unregelmäßig vergrößerten Flächen vor, insbesondere trifft man bei letzterm drei um eine Würfel-ecke gelagerte Flächen, und die an der entgegengesetzten Ecke liegenden vergrößert, wodurch der Krystall das Ansehen eines Rhomboëders mit abgestumpften Randecken annimmt, und von sechs Pentagonen und sechs Dreiecken begrenzt wird.

Als Zwillinge sind nur Kreuzkrystalle bekannt, und sowohl Würfel als Pentagonal-Dodekaëder kommen auf diese Weise vor. Die Verbindungen der Würfel finden nach demselben Gesetze Statt, wie beim Flußspathe (Taf. XI. Fig. 2.), und bei dem Pentagonal-Dodekaëder kreuzen sich die Basen beider Individuen rechtwinkelig. Sind hier die Basen durch die Flächen des Würfels abgestumpft, so entsteht ein von Flächen gebildetes Kreuz, Taf. XI. Fig. 3. (Krystall des eisernen Kreuzes. Weiß, Magaz. d. Berlin. Gesellsch. naturf. Freunde. VIII. 24.), wie besonders bei Lösingfeld im Lippechen und in der Gegend von Preuß. Minden. Auch hier ist beiden Krystallen eine Eckenage des Würfels gemeinschaftlich.

Die Theilbarkeit findet nach den Flächen des Würfels mitunter recht deutlich, auch mitunter nach den Flächen des Oktaëders Statt. Die erstere kündigt sich durch die Streifung, die bei dem Würfel parallel den Combinationsecken des Pentagonal-Dodekaëders und Würfels, bei dem Pentagonal-Dodekaëder senkrecht gegen die Basen geht, an; die letztere wird bei dem Pentago-

244 Viertes Kap. Vorkommen der Krystalle.

nal = Dodekaëder durch Streifen, welche Grundlinien für die Dreiecke an den Würfecken bilden, sichtbar.

Es verdient noch besonderer Beobachtung, ob diejenigen Schwefelkiese, in welchen ein Antheil Schwefel durch Selen vertreten wird, nicht besondere Eigenthümlichkeiten in ihrem Formenkreise darbieten.

§. 213.

Bleiglanz. Der Würfel und das Oktaëder sind die bei weitem am gewöhnlichsten, theils allein, theils in Verbindung mit einander vorkommenden Gestalten; untergeordnet erscheinen Rhomben = Dodekaëder, Pyramiden = Oktaëder und Trapezoëder, nach Bernhar di auch der Achtundvierzig = Flächner. Diese Gestalten treten aber immer homoëdrisch auf, und wiewohl einzelne Flächen sich vergrößern oder verkleinern, so geschieht dies doch nie in der Art, daß eine Hinneigung zu einer symmetrischen Hemiedrie daraus hervoringe. Der Würfel nimmt sehr häufig durch Vergrößerung von vier Flächen das Ansehen eines quadratischen Prismas an, und tritt das Oktaëder mit ihm in Verbindung, so müssen durch dessen Flächen die kleinen Flächen des Würfels früher verdrängt werden, als die größern, und der ganze Krystall erhält das Ansehen eines quadratischen Prismas mit vierflächiger, auf den Kanten ruhender Zuspizung der Enden (ähnlich Tab. 90. Fig. 40. Hauy). Auch bei dem Oktaëder bemerkt man oft die Vergrößerung von vier, mit einer Randkantenage parallel laufenden Flächen, die sich in Trapeze umwandeln, wodurch der Krystall einem rhombischen Prisma mit Zuspizung der Ecken, die Zuspizung

flächflächen auf den scharfen Kanten ruhend, ähnlich wird. Aus dieser Vergrößerung, welche bewirkt, daß bisweilen nur vier Ecken des Würfels, welche zwei diagonal gegenüber liegende Kanten begränzen, abgestumpft sind, während die vier übrigen unverändert bleiben, ist der von Werner als breite ungleichwinkelige sechsseitige Säule mit zugespitzten Enden beschriebene Krystall zu erklären, wo die breiten Seitenflächen und die Zuschärfungsflächen vom Würfel, die vier schmälern Seitenflächen vom Oktaëder abstammen. Vergrößern sich bei dem Oktaëder nur zwei einander parallele Flächen, so nimmt der Krystall das Ansehen einer sechsseitigen Tafel mit abwechselnd schief angelegten Randflächen an. Die Flächen des Pyramiden-Oktaëders kommen nie am Würfel allein zum Vorschein, sondern nur in Verbindung mit den Flächen des Oktaëders und oft auch überdies des Rhomben-Dodekaëders. Auch die Trapezöeder-Flächen finden sich nur dann, wenn das Oktaëder die vorwaltende Gestalt ist. Zwillinge finden sich sowohl vom Würfel wie vom Cubo-Oktaëder, den Kreuzkrystallen des Flußspathes ähnlich (z. B. bei Klausthal), doch kommen auch hemitropische Krystalle, denen des Spinells ähnlich, vor.

Die Textur parallel den Flächen des Würfels ist sehr deutlich und offen, doch verräth die Streifung der Würfelflächen nach den Diagonalen, so wie die Streifung nach den Längen-Diagonalen der Rhomben-Dodekaëder auch noch Durchgänge parallel den Flächen des Oktaëders. Nicht selten sind die Texturflächen gebogen, so wie auch die Flächen der Würfel und Oktaëder mitunter concav oder convex, rauh und glatt, und die Kanten zuweilen wie angeschmolzen vorkommen.

Das Selenblei von Zilkerode am Harze, hat gleiche Farbe, gleiche Härte und gleiche Durchgänge mit dem Bleiglanze, ist bis jetzt aber noch nicht krystallisirt vorgekommen.

Die körnige Absonderung geht in manchen Stücken in stängelige Absonderung, und verursacht durch abnehmende Größe endlich einen dichten Bruch, ohne Spuren einer Textur (Bleischweif). Das Weißgiltigerze dürfte aber als selbstständige Gattung zu betrachten seyn, da die neuerdings aufgefundenen Krystalle auf das Tetraëder führen. Ein im hiesigen Museum befindliches Stück von licht bleigrauer Farbe, aus Krystallen bestehend, die sich als tafelförmige Oktaëder (zwei parallele Flächen vorwaltend groß) ergaben, welche gruppenweise auf zelligem Quarze mit Schwefelkiesesitzen, hat eine offenblättrige Textur parallel den Flächen des Oktaëders und zeigt sich vor dem Löthrohre als eine Verbindung von Schwefelblei, mit Schwefelspießglanz und Schwefelsilber, mithin in vieler Hinsicht dem Weißgiltigerze verwandt. Der angebliche, jedoch mir zweifelhafte Fundort ist Bräunsdorf bei Freiberg.

Manche Bleierde ist ein, durch Entweichen des Schwefels in kohlensaures erdiges Bleioxyd umgewandelter Bleiglanz.

Mineralien, dem pyramidalen Systeme
angehörig.

§ 214.

Zirkon. Die Polkantenwinkel der Stamm-
pyramide betragen nach Mohs $123^{\circ} 19'$, die Grund-
kantenwinkel $84^{\circ} 20'$, und dies ist auch die am gewöhn-
lichsten, jedoch nicht allein, sondern in Verbindung mit
Prismen und andern Pyramiden vorkommende Gestalt,
die nicht leicht gänzlich fehlt, wie z. B. in den Krystal-
len von Ohlapian in Siebenbürgen nach Mohs. So-
wohl das Prisma, das durch Abstumpfung der Grund-
kanten, als dasjenige, das durch Abstumpfung der
Grunddecken entsteht, auch wohl beide zugleich, kommen
bei ihr vor, besonders bei den ceplanischen Krystallen,
die selten andere Flächen zeigen. Außerdem kommen,
namentlich in Nordamerika an mehreren Orten, die
Flächen der $P - 1$ als Abstumpfungen der Polkanten,
und die Flächen der $P + 2$ als Abstumpfungen der Com-
binationskanten zwischen Prisma und Stamm-
pyramide vor, welche besonders deutlich an den oft halb-
zölligen Krystallen von Imensee bei Miasl in Drenburg be-
merklich sind. Von der $P + 1$ finden sich bisweilen
Flächen an den Krystallen von Laurwigen, als Abstum-
pfungen der Ecken, welche die Polkanten mit den Pris-
menkanten bilden. Die Zirkonpyramide ist bei den
Krystallen von Ohlapian vollständig ausgebildet vorhan-
den, und nur mit dem Quadratprisma verbunden; bei
den norwegischen Krystallen und auch bei mehreren
nordamerikanischen erscheinen ihre Flächen nur an den
Ecken, welche die Flächen der Quadratpyramide mit

den Prismenflächen bilden, kaum aber daß bis jetzt die Flächen des Zirkonprisma's beobachtet worden wären. Von Zirkonpyramiden sind mehrere Abänderungen, den verschiedenen Quadratpyramiden entsprechend, bekannt.

Wahre hemiëdrische Gestalten scheinen bei dem Zirkon nicht vorzukommen, jedoch vergrößern sich bei der Stammpyramide gewöhnlich einzelne Flächen, und es gibt Quadratprismen mit zugeschärften Enden, wenn zwei entgegengesetzte Flächen der Quadratpyramide verschwunden sind; es entspricht aber die Vergrößerung der Flächen an einem Ende keinesweges einer symmetrischen Vergrößerung am entgegengesetzten Ende.

Blätterdurchgänge werden nicht leicht sichtbar, außer dann und wann, wiewohl unvollkommen, nach den Flächen des Quadratprisma's, von welchen die mitunter bemerkbare Längsstreifung der Flächen des diagonalen Quadratprisma's herrührt.

Zu berücksichtigen ist ferner, daß die Krystalle des Zirkons immer einzeln, eingewachsen in verschiedenen Gebirgsarten, z. B. im Sphenit bei Laurwigen, am Schuylkill in Pensylvanien, im Granit bei Baltimore, am Schooleys-Gebirge, im Gneus an der Saualpe in Kärnthen, bei Trenton in Neu-Jersey, im Basalt bei Königswinter im Siebengebirge, am Puy in haute Loire, oder lose im Sande, wie auf Ceylon, bei Ohlapian, bei Bilin u., vorkommen.

§. 215.

Vesuvian. Der Polkantenwinkel der Stammpyramide beträgt $129^{\circ} 29'$, der Grundkantenwinkel $74^{\circ} 14'$. Auch bei ihm ist die Stammpyramide in Verbindung mit dem ihr zugehörigen Prisma und dem

diagonalen Prisma bei weitem die gewöhnlichste Krystallgestalt, und die übrigen Flächen kommen seltner und nur untergeordnet vor, aber doch unterscheidet sich die Krystallreihe von der des Zirkons außer den abweichenden Winkeln auch dadurch, daß die Endfläche der Prismen als Abstumpfungsfäche der Polecke der Pyramiden selten (wie z. B. bei manchen piemontesischen Krystallen) ganz fehlt, daß die Flächen des Zirkonprisma's häufig vorkommen, und die Reihe der vorkommenden abgeleiteten Gestalten ausgedehnter ist. Außer der Stammpyramide, deren Flächen bei Hauy Tab. 72 und 73 mit c bezeichnet sind, kommen noch vor: $P-1$ (o bei H.); $P-2$ (n); $P+1$; $P+2$; $P+4$ (r) und vier verschiedene Zirkonpyramiden (x. s. z. bei H. und a bei Mohs). Man hat sowohl aufgewachsene als eingewachsene Krystalle, zu ersteren gehören die vom Vesuv, von Christiansund, aus Finnland, Piemont u. a., zu letzteren die aus Kamtschatka und vom Baikalsee. Im Fassathale finden sich mit berggrünem Augit verwachsene Krystalle von gelblichbrauner Farbe, die man bei dem ersten Anblick für Rhombendodekaëder mit abgestumpften Kanten ansprechen und für Granat halten möchte, welche aber eine Verbindung der Stammpyramide mit der ihr zugehörigen Zirkonpyramide und dem diagonalen Prisma sind. Bei dem stängeligen Vesuvian von Haslau bei Eger (Egeran) sind die Enden selten erkennbar, und die Prismenflächen sehr ausgedehnt; wird aber die Spitze der Prismen sichtbar, so bemerkt man die Pyramidenflächen sehr klein, mitunter ganz fehlend und von der Endfläche des Prisma's verdrängt. Eigenthümliche Gruppierungen der Krystalle sind, außer der stangen-

förmigen Zusammenhäufung des stängeligen Vesuvians noch nicht beobachtet, eben so wenig Zwillingkrystalle. Die Längstreifung der Prismenflächen zeigt auf Durchgänge parallel den Prismenflächen, die aber schwer zu entblößen sind.

Der Ehlenit, der in niedrigen quadratischen Prismen, ohne alle andere Flächen am Muzoniberge im Fassathale vorkommt, und in Hinsicht der chemischen Zusammensetzung, so wie auch in Härte und Schwere dem Vesuvian nahe kommt, scheint doch, theils durch die bemerkbare Verkürzung der Polaxe, theils durch seinen Wassergehalt vom Vesuvian wesentlich unterschieden zu seyn.

§ 216.

Albin. Es scheint ziemlich annehmbar zu seyn, daß Werner's Albin und Ichthyophthalm eine Gattung ausmachen und bei der Stammpyramide der Grundkantenwinkel 121° , der Winkel der Polkante $104^{\circ} 2'$ beträgt. Die einfachsten davon aufgefundenen Krystalle sind die vollkommenen quadratischen Prismen, welche auf der Ferroer Insel Naalfoe auf Stilbit vorkommen, welcher in den Blasenräumen eines Mandelsteins liegt (Brewster's Tessalit). Die auf Kalkstein von Cziclowa im Bannate zeigen bereits die Flächen der Stammpyramide als Abstumpfungsflächen der Ecken. Bei den Krystallen, die auf Natrolith aufgewachsen in den hohlen Räumen des Klingsteins bei Auhig in Böhmen einbrechen, ist die Stammpyramide die vorwaltende Gestalt, aber die Grunddecken sind immer abgestumpft (Hyazinth-Dodekaëder), die Polecken oft. Eben so verhalten sich die schönen, durchsichtigen, auf

Gängen mit Strahlkies bei Andreasberg aufgefundenen Krystalle. Bei den mit Kalkspath in Mandelstein vorkommenden Krystallen von der Seiseralpe in Tyrol ist die Endfläche der Prismen sehr vorwaltend, sie erscheinen als rechtwinkelige vierseitige Tafeln mit zugeschärften Rändern und abgestumpften Ecken, und gleichgestaltet ist der Albin, der in faserigem Phehnit im Fassathale in Tyrol sich findet, doch ist bei letzterem noch bemerkenswerth, daß bei ihm ein durchsichtiger Krystall zu Grunde liegt, auf den sich nach den Polen zu undurchsichtige, perlmutterartig glänzende Masse aufgelegt hat; auch sind hier die großen Tafelflächen nicht wie bei den vorigen glatt und glänzend, sondern rauh und matt. Es kommen indeß noch Pyramiden verschiedenen Werthes und auch das Zirkonprisma vor, aber höchst selten dasjenige Quadratprisma, das Abstumpfungen der Grundkanten der Stammpyramide bildet. Die schottischen und Faroer-Inseln bieten mannichfaltige Combinationen der verschiedenen einfachen Gestalten dar. Zwillingkrystalle oder eigenthümliche Gruppierungen der Krystalle kennt man noch nicht, ob sie gleich häufig Drusen bilden; auch sind dieselben immer aufgewachsen, jedoch so, daß die größte Zahl der sie umschließenden Flächen sichtbar wird und oft nur eine Kante oder Ecke die Verbindung mit dem Muttergesteine bewirkt.

Ein Durchgang der Textur senkrecht auf die Polaxe ist deutlich vorhanden; zwei andere, parallel den Flächen des quadratischen Prisma's, sind undeutlich, verrathen sich aber durch die Längstreifung dieser Flächen.

§. 217.

Kupferkies. Es ist lange Zeit, und selbst noch von Haüy, der Kupferkies zu denjenigen Körpern gezählt worden, welche dem tesseralen Systeme angehören, und die Kantenwinkel der Stammpyramide ($109^{\circ} 53'$ der Polkantenwinkel, $108^{\circ} 40'$ der Grundkantenswinkel) stehen denen des regelmäßigen Oktaeders so nahe, daß nur scharfe Messungen mit dem Reflexionsgoniometer den Unterschied anzugeben vermögen. Auch ähneln die hemiedrisch vorkommenden Krystalle, so wie die Zwillingkrystalle, denen des regelmäßigen Oktaeders, und die Verbindungen der $P-1$ mit demjenigen Prisma, welches Abstumpfungen ihrer Grunddecken bildet, weicht in seinen Kantenwinkeln nur $30'$ von denen des Rhomboidal-Dodekaeders ab. Aber das Vorkommen von Pyramiden mit Grundkantenswinkeln von $126^{\circ} 11'$ (die $P+1$), von $140^{\circ} 31'$ (die $P+2$), so wie die Art, wie sich die einfachen Gestalten mit einander verbinden, setzen für die Krystallformen des Kupferkieses das pyramidale System entscheiden fest. Größtentheils finden sich die Pyramiden hemiedrisch, als Tetraeder mit gleichschenkelig-dreieitigen Flächen, bei denen aber doch die verschwindenden Flächen noch mehr oder minder starke Abstumpfungen der Ecken bilden, und da diese Krystalle selten einzeln, sondern größtentheils auf und durch einander gewachsen, meistens auch als Zwillinge, und wiederum als Zusammenhäufungen von Zwillingen vorkommen, so wird das durch ihre Erkennung oft sehr schwer. Besonders deutliche homoedrische Krystalle brechen mit Braunspath, Kalkspath und Bleiglanz auf junge hohe Birke und Ehur-

prinz bei Freiberg; von hemisdrischen Krystallen sind die vom Ramberg bei Daaden im Sarnschen ausgezeichnet. Auch Neudorf bei Harzgerode, Klausthal, Cornwallis, Schapbach im Kinzigthale u. a. liefern mitunter deutliche Krystalle, doch kommt im Allgemeinen der Kupferkies weit häufiger verb als krystallisirt vor. Die Zwillinge sind Hemitropien; die von der Stammpyramide, denen des Spinells auffallend ähnlich (Taf. XI. Fig. 1.), bei andern aber muß man sich den Schnitt durch die Mitte zweier paralleler Polkanten und zwei Grunddecken gelegt denken (ähnlich Taf. XI. Fig. 5.), so daß die Schnittfläche parallel mit der tangirenden Ebene einer Polkante läuft, (nennt man die Polecke p , so würde $1 \frac{p}{2} \infty$ die Bezeichnung des Schnittgesetzes seyn,) und beide Hemitropien kommen oft eine neben der andern in einem Stücke vor.

Durchgänge sind selten deutlich, am deutlichsten noch diejenigen, die parallel mit den Flächen von $P+1$ laufen, und diesen gemäß trifft man auch die Streifung bei einigen Flächen an.

§. 218.

Zinnstein. Die Stammpyramide besitzt Polkantenwinkel von $133^{\circ} 26'$ und Grundkantenwinkel von $67^{\circ} 59'$, die nächstfolgende spitzere Pyramide Polkantenwinkel von $121^{\circ} 35'$ und $87^{\circ} 17'$, beide Pyramiden kommen jedoch sehr selten allein, sondern fast stets in Verbindung mit den ihnen angehörigen Prismen vor, und besonders walten die Seitenflächen desjenigen Prisma's vor, das bei der Stammpyramide Abstumpfung der Randdecken bildet. Ueberdies bemerkt man in

manchen Krystallen noch Flächen einer Zirkonpyramide und des Zirkonprisma's, höchst selten Abstumpfung der Polecken, und die letztern rauh und matt. Diese Krystalle, obgleich sie nur aufgewachsen und an einem Ende ausgebildet sich finden, lassen sich leicht erkennen, da ihre Flächen selten mehr als viererlei Werth besitzen, und sie auch häufiger neben- als durcheinander gewachsen sind. Aber sehr gewöhnlich sind hemitropische Zwillinge, deren Entzifferung nicht selten Schwierigkeiten verursacht, und welche gewöhnlich so mit dem Muttergestein verwachsen sind, daß nur wenige Flächen vollständig sichtbar werden. Bei der Stammpyramide geht der Schnitt parallel mit einer Fläche durch die Mitte einer Flächenaxe ($\frac{1}{2} p \frac{1}{2} \infty$), bei $P + 1$ wird er darnach die Mitte zweier paralleler Polkanten und die dazwischen liegenden Wandecken ($2 p 2$) treffen, aber nach der mehr oder minder starken Entwicklung der Prismenflächen wandeln sich die durch die Pyramidenflächen gebildeten einspringenden Winkel nach und nach in ausspringende Winkel um, und die ausspringenden Winkel werden durch einspringende ersetzt. Die Flächen desjenigen Prisma's, das bei der Stammpyramide Abstumpfung der Grundkanten bildet, fallen an zwei entgegengesetzten Ecken des Zwillinges bei beiden Individuen in eine Ebene, und bilden eine gemeinschaftliche Fläche, die ihre Zwillingnatur nur hie und da durch die gebrochene Streifung verräth. In Taf. X. Fig. 5 — 8, wo n die Flächen der $P + 1$; D die Flächen des normalen Quadratprisma's; P die Flächen des diagonalen Prisma's; p die Polecke der Quadratpyra-

mitte und $n'D'P'p'$ die gleichnamigen Theile des andern Individuums bezeichnen, sieht man, wie der einspringende Winkel an der Kante a durch die wachsenden Flächen P allmählig verdrängt wird, und dagegen der einspringende Winkel b sich bildet.

Die ausgezeichneten einfachen Krystalle kommen aus den Zinngruben von Cornwallis, die Zwillinge sind in Sachsen und Böhmen die herrschende Gestalt. Durchgänge werden parallel den Flächen beider Prismen, wiewohl unvollkommen sichtbar, verrathen sich auch bei manchen Krystallen durch die senkrechte Streifung der Prismenflächen. Andere Durchgänge, parallel den Flächen der Stammpyramide, veranlassen eine Streifung dieser Flächen, die mit den Kanten parallel läuft.

§. 219.

Zungstein. Die Winkel der Polkanten der Stammpyramide betragen $100^{\circ} 8'$ von $P-1$: $107^{\circ} 26'$ von $P-2$: $117^{\circ} 29'$; die Stammpyramide und die $P-1$ finden sich nicht selten vollständig ohne weitere Veränderung, oder auch in Verbindung mit einander, die Flächen der $P-2$ nur als Abstumpfungen der Polkanten bei $P-1$, oder als vierflächige Zuspitzung der Polecken, auf den Flächen ruhend, bei der Stammpyramide. Seitenflächen der Prismen hat man bis jetzt nicht aufgefunden; aber die Fläche senkrecht auf die Axe, wiewohl gewöhnlich drusig oder rauh, giebt den Pyramiden oft das Ansehen von Tafeln mit zugescharften Rändern. Von Zirkonpyramiden erscheinen bisweilen die Flächen als Zuschärfungen der Polkanten sowohl bei der Stammpyramide, als bei $P-1$, aber

noch öfter treten sie nur hemiedrisch auf, so daß sie als Flächen abnormer Quadratpyramiden anzusehen sind. Die Krystalle sind aufgewachsen, und mitunter häufen sie sich wieder zu Pyramiden von gleicher Gestalt an, auch finden sich Kreuzkrystalle. Die deutlichsten Durchgänge gehen parallel den Flächen der Stammpyramide, und werden auch durch die Streifung sichtbar, minder deutlich, doch bei größern Krystallen erkennbar sind die, parallel mit den Flächen von $P - 1$. Die größten Krystalle kommen von Schlackenwalde in Böhmen, vollständiger ausgebildet sind aber gewöhnlich die von Zinnwald in Böhmen und von Carrook in Cumberland; bei den erstern bemerkt man mitunter durch Vergrößerung von vier parallelen Flächen, statt der Polecken, Kanten.

Mineralien, dem prismatisches System angehörig.

§. 220.

Topas. Es giebt wenig Körper des prismatischen Systems, die, bei eben so großer Mannigfaltigkeit der Formen, so wenig Schwierigkeiten in der Bestimmung derselben darbieten. Die hier auftretenden und in Verbindung mit einander vorkommenden Gestalten sind: das rhombische Prisma, das hemiedrische Topasprisma, das Oblongprisma, und die diesen Prismen entsprechenden Pyramiden. Das rhombische Prisma hat Seitenkantenwinkel von $124^{\circ} 19'$ und $55^{\circ} 41'$, wonach die Seitenkantenwinkel des Topasprisma's $150^{\circ} 24\frac{5}{6}'$; $148^{\circ} 13\frac{5}{12}'$ und $93^{\circ} 8\frac{1}{3}'$ betragen würden. Dies Topasprisma läßt sich hemiedrisch auf zwei

rhombische Prismen zurückführen, von welchen das eine Seitenkantenwinkel von $150^{\circ} 24\frac{2}{3}'$ und $29^{\circ} 35\frac{1}{3}'$, das andere von $93^{\circ} 8\frac{1}{3}'$ und $86^{\circ} 51\frac{2}{3}'$ besitzen würde. Fast nie finden sich diese beiden letztern rhombischen Prismen zugleich vor, sondern gewöhnlich nur das letztere, wiewohl in einigen Fällen auch das erstere bemerkt worden ist, und das ursprüngliche rhombische Prisma ist immer damit in Verbindung. Von dem Oblongprisma werden bisweilen die schmalen Seitenflächen, als Abstumpfungsfächen der scharfen Seitenkanten des hemiedrischen Topasprisma's, seltner die breiten Seitenflächen, als Abstumpfungsfächen der stumpfen Seitenkanten des Stammprisma's sichtbar. Es sind kaum bis jetzt Fälle beobachtet worden, wo ein Prisma allein, ohne Verbindung mit einem andern Prisma beobachtet worden wäre, aber eben so wenig kennt man bis jetzt den völligen Mangel aller Pyramidenflächen, wiewohl die Endfläche dieser Prismen nur selten gänzlich von den Pyramidenflächen verdrängt wird.

Die rhombische Stammpyramide, deren Polkantenwinkel $141^{\circ} 7'$; $101^{\circ} 52'$ und die Grundkantenwinkel $90^{\circ} 55'$ betragen, ist in Verbindung mit rhombischen Prismen, aber sonst ohne weitere Veränderung besonders bei den brasilianischen Krystallen bemerkt worden; bei den Krystallen von andern Fundorten kommen fast immer noch andere Pyramidenflächen mit vor, und die P — 1, so wie P + 1 werden kaum anders als in Verbindung mit der Stammpyramide angetroffen. Von denjenigen Rhombenpyramiden, welche als hemiedrische Gestalten der Topaspyramide zu betrachten sind, ist diejenige, deren Grundkanten einen Rhombus

mit Winkeln von $93^{\circ} 8\frac{1}{2}'$ und $86^{\circ} 51\frac{2}{3}'$ bilden würdigen, die noch am häufigsten und fast allein vorkommende ist aber bis jetzt nur da beobachtet worden, wo außer den Flächen verschiedener Prismen, auch Flächen von rhombischen Pyramiden und Oblongpyramiden zugleich auftreten.

Von Oblongpyramiden kommen die Flächen derjenigen, welche tangirende Ebenen für die Polkanten der Rhombenpyramide $+1$ bilden, am gewöhnlichsten vor, doch nicht leicht anders als in Verbindung mit Prismen und rhombischen Pyramiden, wiewohl bisweilen so weit vorherrschend, daß die Flächen der letzteren fast verdrängt sind. Oft sind nur diejenigen Flächen vorhanden, die Abstumpfungen der schärfern Polkanten der Rhombenpyramiden bilden, und da kennt man auch spitzere und stumpfere Oblongpyramiden, während von dem andern Flächenpaare nur die erwähnte Abänderung sich zeigt. Auch kommen mit Quarz verwachsen kleine weiße schiefe rhombische Prismen, angeblich in Böhmen, vor, die als dreiviertelflächige Oblongpyramiden zu betrachten seyn dürften.

Man findet die Krystalle größtentheils aufgewachsen, nicht selten so, daß sie auf einer Seitenfläche des Prisma's ruhen und beide Enden sichtbar werden, die sächsischen gewöhnlich einzeln, die sibirischen in und durch einander gewachsen, doch ohne bestimmte Regel und nirgends eine Andeutung zur Zwillingsgestalt. Ein Durchgang senkrecht auf die Aze ist bei allen Krystallen offen und lebhaft glänzend; zwei andere, parallel den Flächen des Oblongprisma's, werden nie recht deutlich sichtbar, sind aber durch die Längsstreifung der Prismenflächen angedeutet. Die ausgezeichnetsten Krystalle

kommen aus Sibirien, wo die Flächen der Oblongpyramide sehr vorwalten; aus Brasilien, wo die Flächen der Stammpyramide die Endflächen der Prismen gänzlich verdrängen; aus Sachsen, wo die größte Mannigfaltigkeit der Pyramidenflächen beobachtbar ist; auch Kleinasien, Neuholland, England, Schottland und andere Gegenden liefern Topaskrystalle. Derbe Massen sind selten, der Physalit von Zinbo bei Zahlun und von Chursdorf bei Penig in Sachsen, so wie der Pyksnit von Alttenberg gehören dahin.

§ 221.

Uragonit. Eine durch ihre Neigung zu Zwillingsgestalten, welche einfachen Krystallen ähneln und sich wieder unter sich verbinden, ausgezeichnete Substanz. Nimmt man die, besonders in Verbindung mit Brauneisenstein und Mangan bei Iberg, Isfeld, Ramsdorf vorkommende, spige Rhombenpyramide mit Polkantenwinkeln von $113^{\circ} 44'$ und $93^{\circ} 43'$ und Grundkantenwinkeln von $120^{\circ} 10'$ als Stammpyramide an, so würde das rhombische Prisma Seitenkantenwinkel von $102^{\circ} 43' 42''$ und $77^{\circ} 16' 18''$ besitzen, und aus diesem ein Topasprisma mit Winkeln von $136^{\circ} 26'$; $115^{\circ} 56'$ und $146^{\circ} 34'$ hervorgehen, welches hemiedrisch in ein rhombisches Prisma von $136^{\circ} 26'$ und $43^{\circ} 34'$ und in ein anderes rhombisches Prisma von $115^{\circ} 56'$ und $64^{\circ} 4'$ zerlegt werden kann. Von allen diesen kommt jedoch nur das letztere Prisma, gewöhnlich mit den breiten Flächen des Oblongprisma's in Verbindung, in der Natur vor. Unter den Pyramidenflächen sind die breiten Flächen einer Oblongpyramide, die im Pole unter $109^{\circ} 28'$ zusammen-

stoßen (Pr — 1), die gewöhnlichsten, und mit dem vorliegenden Krystall zusammen giebt Fig. 10. die Darstellung. Es ruhen hier zwar die breiten Flächen der Oblongpyramide und auch die des Oblongprisma's auf den schärfern Kanten eines rhombischen Prisma's, aber dieses ist ein hemiedrisches Topasprisma, welches gegen das ursprüngliche rhombische Prisma eine solche Stellung hat, daß die scharfen Kanten des einen den stumpfen des andern entsprechen, wie die Zeichnung Fig. 18. nachweist. Untergeordnet treten noch auf die Flächen stumpferer und schärferer Oblongpyramiden, auch die einer Topaspyramide, die letztere nur hemiedrisch. Die Endfläche der Prismen zeigt sich bisweilen nur als feine Abstumpfung der Zuschärfung, bisweilen aber verdrängt sie alle Pyramidenflächen.

Höchst mannichfaltig sind die Gruppierungen, welche diese Krystalle mit einander bilden, und die verschiedenen Fundorte zeigen darin besondere Eigenthümlichkeiten. Die mit Eisenstein und Manganerzen zusammenbrechenden rhombischen Pyramiden erscheinen gewöhnlich spießig, und wenn Prismenflächen vorwalten, nadel förmig, und büschelförmig, garbenförmig oder stangenförmig zusammengehäuft; doch ist bei manchen, zumal bei den größern, ein Zusammenwachsen parallel mit den Hauptaxen nicht zu verkennen. Die deutlichsten Zwillinge, in hemitopischen Gestalten, kommen in der Gegend von Bilin in Böhmen auf einem Gange im Basaltgebirge, welches überhaupt häufig Aragonit auf Klüften und in Blasenräumen führt, vor. Nimmt man auf Taf. X. Fig. 10. als eine Verbindung des hemiedrischen Topasprisma's mit Oblongpyramide und Oblongprisma, beide ebenfalls hemiedrisch an, und

nehmen wir die Seitenkantenwinkel des Prisma's in einfachen Zahlen bei $b = 116^\circ$ bei $a = 122^\circ$ an, so wird, wenn wir $a'' a' = \frac{1}{2} b' b$ setzen und den Schnitt von a' nach dem diagonal gegenüberstehenden a' führen, Fig. 11. den hemitropischen Zwilling darstellen, wo die Seitenkantenwinkel des Prisma's alle auspringend sind, drei abwechselnde 116° , zwei 122° und einer 128° betragen. Die Schnittfläche läuft hier parallel mit einer Fläche des hemiedrischen Topasprisma's. Nimmt aber die Fläche des Oblongprisma's eine größere Ausdehnung an, so daß $a'' a'$ mehr als $\frac{1}{2} b' b$ beträgt, so bildet sich am Prisma ein einspringender Winkel, und Fig. 12. stellt diesen Zwilling dar. Vereinigen sich zwei Zwillinge, so entsteht der Krystall Fig. 13., wo die zwischen $a' a'$ liegenden einspringenden Winkel oft sehr klein werden.

Eine andere, ebendasselbst häufig vorkommende Verbindung ist die, wo der Krystall bei dem ersten Anblick kein Zwilling zu seyn scheint, und dem Krystall Fig. 10. vollkommen gleicht, nur daß die Flächen des Oblongprisma's größere Ausdehnung haben. Bei genauerer Betrachtung bemerkt man aber auf der Oberfläche feine Linien, die, wenn man sie als Begrenzungslinien von Flächen betrachtet, den Krystall in drei ungleiche Theile theilen. Fig. 14. stellt die Grundansicht eines solchen Krystalls dar, wo $a' a'$ und $c' c'$ diese Linien sind, und welcher als Drilling betrachtet werden kann. Das eine Individuum, dessen Ecken mit $b a c m a' a'$ bezeichnet sind, ist nicht nur vollständig vorhanden, sondern die Fläche $m b a a'$ erweitert sich noch bis c' und giebt die Fläche $c' m b a$. Das zweite Individuum, dessen Ecken mit $a' c' d a' c' d$ bezeichnet sind, liefert die Fläche

$a'cdm$ und der Flächentheil dmc' erweitert sich bis a' , so daß er die Fläche $dma'c'$ bildet. Von dem dritten Individuum, dessen Ecken die Bezeichnung $b'a'a'mc'a'$ haben, erscheinen die Flächen $a''a'b'd$ und $b'da'c'$. Man trifft auch Fälle, wo das erste Individuum durch einen hemitropischen Zwilling ersetzt ist, wie Fig. 15. die Grundansicht darstellt. Hier ist $a''a'c'a'$ der übrig gebliebene Theil des mittleren Individuums, der sich zu dem im vorigen Falle übrig gebliebenen Theile wie rechts zu links verhält. Mitunter trifft man auch die Theilung nach beiden Richtungen an.

Die in Aragonien bei Molina in Gyps und bei Castenes im Dep. des Landes in buntem Mergel vorkommenden Aragonitkrystalle sind als eine Zusammensetzung von hemiedrischen Topasprismen in abänderlicher Zahl, jedoch so, daß sie immer wieder ein sechsseitiges Prisma darstellen, zu betrachten, ja diese Topasprismen bestehen wieder aus einer Zusammensetzung paralleler, dicht an einander schließender, kleiner Topasprismen, und sind daher nur als krystallinische Zusammenhäufung zu betrachten. Ist die Endfläche der Prismen so vollkommen, daß sie alle Pyramidenflächen verdrängt hat, so erscheinen auch diese Zusammensetzungen mit einer vollständigen Endfläche; sind aber die Flächen der Oblongpyramiden vorhanden, so sind die Endflächen mit lauter keilförmigen Erhabenheiten bedeckt, deren Schärpen der radialen Richtung nahe kommen. Legt man nun, wie Fig. 19. darstellt, mehrere Prismen so zusammen, daß sie sich nur mit Kanten oder Flächen berühren, so wird um die Hauptaxe herum ein hohler Raum entstehen, der sich dadurch

ausgleichen läßt, daß man einzelne Flächen benachbarter Krystalle so weit sich vergrößernd denkt, bis sie zum Durchschnitt mit einander kommen und ihn ausfüllen. Häufig scheint dieser leere Raum durch andere, verschieden gruppirte und sich kreuzende Aragonitkrystalle ausgefüllt zu seyn. Legt man aber einzelne Topasprismen so, daß sie alle mit einer stumpfen Seitenkante an der Hauptaxe des zusammengesetzten Prismas anschließen, so werden sie sich durchschneiden und gemeinschaftliche Durchschnittslinien erhalten, jedoch keinen hohlen Raum zwischen sich lassen. Diese Ansicht scheint sich durch die Richtung der Schärpen der keilförmigen Erhabenheiten in mehreren Fällen zu bestätigen. In Fig. 17. bilden die beiden hemiedrischen Topasprismen, deren scharfe Ecken mit cc , die stumpfen mit mb bezeichnet sind, einen hemitropischen Zwilling. An sie schließt beiderseits ein Krystall an, dessen scharfe Ecken mit dd die stumpfen mit em bezeichnet sind, und die Durchschnittslinien sind fm . Den noch übrig bleibenden leeren Raum füllt der Krystall, dessen scharfe Ecken mit gg , die stumpfen mit hm bezeichnet sind, und dessen Durchschnittslinien mit den vorigen Krystallen in m bilden. In Fig. 16. sind $bmcc$, $ymdd$, $hmgg$, zml , $wmkk$ die Bezeichnungen für die Ecken der einzelnen Krystalle, und om und fm ihre Durchschnittslinien. Fig. 17. und 19. sind sich in Hinsicht der Winkel des zusammengesetzten Prismas gleich, und bei beiden finden sich fünf ausspringende Winkel von 116° , einer von 128° und zwei einspringende Winkel von 174° .

Durchgänge der Textur, oder Streifung der Krystallflächen, woraus dieselben sich folgern ließen, sind selten beobachtbar, sondern durch muscheligen oder un-

ebenen Bruch verdrängt; doch bemerkt man mitunter unvollkommene Durchgänge parallel den Flächen des hemiedrischen Topasprisma's, und des Oblongprisma's, auch deutet eine, wiewohl höchst feine, schiefe Streifung der Flächen des Topasprisma's bei einigen böhmischen Krystallen auf Durchgänge parallel mit den Flächen der Oblongpyramide.

§. 222.

Wolfram. Ueber die, diesem Mineral zukommende Krystallgestalt sind die Ansichten der Schriftsteller getheilt, indem Weiß und nach ihm Steffens den Wolfram in das pyramidale System, Mohs und Haüy ihn dem prismatischen Systeme einreihen. Sieht man nur auf die Winkel, und darf man annehmen, daß die bisher bekannten Messungen genau sind, so findet man allerdings Pyramiden, bei denen die über einander liegenden Flächen unter $98^{\circ} 12' 48''$, die neben einander stehenden unter $115^{\circ} 22' 56''$ gegen einander geneigt sind und auf eine Quadratpyramide führen; auch finden sich Winkel von $63^{\circ} 26' 6''$, welche den Winkeln entsprechen, die ein tetartoedrisches Zirkonprisma mit dem hemiedrischen Quadratprisma bilden würde. Aber eben diese, sonst im pyramidalen Systeme nicht vorkommenden Hemiedrien, so wie die entschiedene Neigung zweier gegenüberstehenden Flächen, sich auszubreiten und die Pyramidenecken in Schärfen zu verwandeln, machen es wahrscheinlicher, daß der Wolfram in das prismatische System gehöre. Nimmt man dazu, daß nur selten die Krystallflächen ohne alle Unebenheiten vorkommen, wodurch die Messungen so sehr schwer die nöthige Genauigkeit erhalten, so wird man versucht,

lieber einen kleinen Fehler in der Angabe der Winkelmaße zu vermuthen. Ein Krystall des Museums, der eine ziemlich genaue Messung der ebenen Winkel der Pyramidenflächen zuließ, gab für den einen Randwinkel $56\frac{1}{4}^{\circ}$, für den andern 57° ; wäre diese Messung richtig, so würden sich die Verhältnisse der Hauptaxe zu den Randaxen wie $1 : \sqrt{0,782} : \sqrt{0,75152}$, die Winkel der Polkanten der Oblongpyramide zu $115^{\circ} 43'$, die Grundkantenwinkel zu $98^{\circ} 9'$ und $97^{\circ} 2'$ ergeben.

Legen wir die letztere Ansicht zu Grunde, so sind die am gewöhnlichsten vorkommenden Krystalle des Wolframs Oblongpyramiden, von denen nicht nur die Stammpyramide vollzählig, sondern auch die nächst stumpfere und nächst schärfere Oblongpyramide, jedoch gewöhnlich nur mit den breiten Flächen auftretend, vorkommen. Auch die Flächen einer rhombischen Pyramide, der normalen Rhombenpyramide angehörig, kommen, wiewohl meist untergeordnet, vor. Von den Prismenflächen sind die breiten Flächen des Oblongprisma's vorwaltend, nächstdem die eines tetartoëdrischen Topasprisma's; mitunter kommen auch die schmalen Flächen des Oblongprisma's, seltner die des Rhombenprisma's zum Vorschein. Abstumpfungen der Polecken werden nicht leicht bemerkt. Hemitropische Zwillingkrystalle werden oft beobachtet, und die Theilungslinie läuft parallel mit der Hauptaxe durch die Flächenmitte der Oblongpyramide (Fig. 20. $pabp'\beta\alpha$), wo durch der Zwilling Fig. 21. entsteht, wo L die schmalen, T die breiten Flächen der Oblongpyramide, Q die breiten Flächen des Oblongprisma's, n diejenigen des tetartoëdrischen Topasprisma's bezeichnen. Man trifft alle diese Krystalle nur aufgewachsen, auch einzeln

durch einander gewachsen, nicht leicht aber in Drusen an, und bei manchen wiederholen sich die Krystallflächen im Innern so, als wenn mehrere Krystalle in einander geschachtelt wären, und selbst bei den derben Stücken bemerkt man in der Regel glänzende, leicht zu entblößende Absonderungsflächen.

Von den Durchgängen ist besonders einer, senkrecht auf die Polaxe deutlich, und wird auch durch starke Streifung der Flächen der spitzen Oblongpyramide und der breiten Flächen des Oblongprisma's äußerlich kenntlich; minder deutlich sind die Durchgänge parallel den Flächen der Oblongpyramide und des Oblongprisma's, verrathen sich aber durch Streifung der offenen Texturfläche.

Die schönsten Krystalle liefert das sächsisch-böhmische Erzgebirge, wo sie mit Zinnsteinen einbrechen. Derbe Massen sind in Frankreich zu Puy les mines, in England in Cornwallis, auf Rona in den Hebriden, bei Strassberg am Harze, in Sibirien und in Nordamerika aufgefunden. Nach der dunkler oder heller braunen Farbe des Strichpulvers kann man, wie Breithaupt richtig bemerkt, zwei verschiedene Arten des Wolframs unterscheiden. Zu der mit hellerem Strich gehört der französische und anhaltische Wolfram, und es ist nicht unmöglich, daß auch chemische und krystallinische Unterschiede Statt finden.

§. 223.

Augit. Das Eigenthümliche der Krystallreihe des Augits besteht vorzüglich darin, daß die rhombischen Pyramiden nur halbflächig, die Oblongpyramiden viertheilflächig, dagegen die rhombischen Prismen und

selbst die Oblongprismen gewöhnlich vollzählig auftreten. Nehmen wir das gewöhnlich vorkommende rhombische Prisma, dem auch die deutlichsten Durchgänge entsprechen, als das eigentliche Rhombenprisma an, (welches Seitenkantenwinkel von $87^{\circ} 42' 26''$ und $92^{\circ} 17' 34''$ besitzt), und die auf der schärfern Seitenkante ruhende und mit ihr einen Winkel von $106^{\circ} 43' 25''$ bildende Fläche der Oblongpyramide zur Bestimmung der Polaxe an, so ergiebt sich das Verhältniß der Polaxe zu den Randaxen wie $1 : \sqrt{12} : \sqrt{11,0768}$. Die regelmäßige Rhombenpyramide würde dann Polkantenwinkel von $149^{\circ} 5\frac{1}{2}'$ und $147^{\circ} 47\frac{3}{4}'$ und Grundkantenwinkel von $90^{\circ} 28\frac{3}{4}'$ besitzen, ist aber bis jetzt noch nicht in der Natur beobachtet. Die nur selten ganz fehlenden beiden Flächen, welche als Zuschärfung der Enden der Prismen, mit schief gegen die Axe laufender Zuschärfungskante erscheinen, und unter 120° gegen einander geneigt sind, (die mit s bei Hauy bezeichneten Flächen,) gehören dann einer rhombischen Pyramide an, welche als hemiedrische Topaspyramide zu betrachten ist, und aus der zu Grunde gelegten Rhombenpyramide, durch Verkürzung der kürzern Randaxe um die Hälfte, abzuleiten ist. Durch Verkürzung der längern Randaxe um die Hälfte, entsteht eine rhombische Pyramide oder hemiedrische Topaspyramide mit Polkantenwinkeln von $150^{\circ} 50'$ und $123^{\circ} 7'$ (die mit γ bei Hauy bezeichneten Flächen), und es finden sich überhaupt mehrere hemiedrische Topaspyramiden, welche durch Verkürzungen oder Verlängerungen theils der kürzern, theils der längern Randaxen abzuleiten sind, jedoch immer so, daß von jeder an jedem Pole der Prismen nur zwei Flächen zum Vorschein kommen. Ver-

binden sich zwei verschiedene rhombische Pyramiden so mit einander, daß jede hemiedrisch mit Flächenpaaren auftritt, und die Flächen der einen die Stelle der verschwundenen Flächen der andern einnehmen, so entsteht eine rhombische Pyramide mit schiefer Polage, die Abweichung in der Richtung einer Randlage liegend (Die Flächen ϑ und ζ bei Hauy).

Die Oblongpyramide kommt fast nur tetartoedrisch vor, und fehlt in der Regel ganz. Auch die Fläche senkrecht auf der Aze wird selten und auch dann nur in geringer Ausdehnung beobachtet. Dagegen sind Prismenflächen, besonders die des ursprünglichen Rhombenprisma's und die des Oblongprisma's immer vorhanden, bald die des erstern, bald die des letztern vorwaltend. Auch finden sich nicht selten Zwillinge, theils wahre Kreuzkrystalle (Hauy Tab. 69. Fig. 119.), theils Hemitropien, wo die Schnittfläche nach der längeren Diagonale des Rhombenprisma's geht (Hauy Tab. 67. Fig. 98^b).

Durchgänge finden sich parallel den Flächen des Rhombenprisma's, des Oblongprisma's und parallel mit einer Fläche einer Oblongpyramide, aber von verschiedener Deutlichkeit, nicht selten ganz durch muscheligem oder unebenen Bruch verdrängt. Häufig sind die Durchgänge nach den Flächen des rhombischen Prisma's am vollständigsten entwickelt, mitunter auch der mit der Fläche einer Oblongpyramide gleichlaufende.

In Hinsicht auf Abweichungen in Farbe, Durchsichtigkeit, Absonderung, die wieder mit besondern Reihen der Krystallgestalten und eigenthümlichen geognostischen Verhältnissen zusammenzuhängen scheinen, bietet der Augit mehrere Abänderungen dar, die viel-

leicht, wenn sie mit bestimmten Verschiedenheiten der Winkel der Durchgänge zusammenfielen, als besondere Substanzen betrachtet werden könnten. Die im Basalt in Böhmen vorkommenden schwarzen Krystalle sind um und um ausgebildet, die Textur ist ziemlich deutlich, die Flächen des Rhombenprisma's und des Oblongprisma's sind gleich stark entwickelt, und außer den Flächen der ursprünglichen hemiedrischen Topaspyramide kommen nur selten andere vor. Die Krystalle von der Monzoni-Alpe in Tyrol, in Mandelstein eingewachsen, ähneln den böhmischen, bei ihnen ist aber die Fläche senkrecht auf die Aze deutlich. Die aufgewachsenen gras-, lauch- und berggrünen, zum Theil auch ungefärbten Krystalle aus dem Fassathale, von denen manche hohe Grade der Durchsichtigkeit besitzen, zeigen Pyramiden von verschiedenem Werthe: die Prismenflächen verkürzen sich oft so, daß die Grundkanten der obern halben Pyramide mit denen der untern halben Pyramide in einer Ebene liegen, und zwei Seitenkanten der Prismen in Ecken sich verwandeln, wodurch der ganze Krystall das Ansehen einer schiefartigen rhombischen Pyramide gewinnt. (Hauy Tab. 66. Fig. 88.). Bei den aufgewachsenen, fast ungefärbten, halbdurchsichtigen Krystallen, welche mit Granat und krystallisirtem Talke in Piemont brechen, ist das Oblongprisma vorwaltend, und die Enden zeigen gewöhnlich eine vierflächige, auf den Kanten ruhende Zuspizung, die von einer schiefartigen rhombischen Pyramide abstammt. So zeigen auch der Augit, der mit Bleiglantz bei Sahla in Schweden und mit Kupferfies bei Drierfoi in Finnland bricht, der körnige von Arendal und aus Nordamerika u. s. w. ihre Besonderheiten. Der Jeffersonit von New Jersey, der

Jedenbergit von Lunaberg, der Hypersthen von Labrador und selbst der Pikrosmin von Presnig in Böhmen reihen sich ebenfalls an den Augit an, und möchten vielleicht größtentheils mit ihm unmittelbar verbunden werden können.

§. 224.

Strahlkies. Bei ihm sind Oblongpyramiden theils vollzählig, theils nur mit Flächen des einen Werts auftretend, verbunden mit den Flächen des Rhombenprisma's, selten mit der Fläche senkrecht auf die Hauptaxe, die vorherrschenden Gestalten. Nimmt man mit Hauy das Verhältniß der Hauptaxe zu den übrigen Axen $= \sqrt{12} : \sqrt{9} : \sqrt{5}$, so erhält man als Grundkörper eine Rhombenpyramide, deren Polkantenwinkel $115^{\circ} 53'$ und $89^{\circ} 10'$, die Grundkantenwinkel $125^{\circ} 16'$ messen. Die umschreibende Oblongpyramide (Pr) besitzt dann Grundkantenwinkel von $114^{\circ} 19'$ und $98^{\circ} 13'$, die umschriebene (Pr+1) von $133^{\circ} 10'$ und $144^{\circ} 14'$. Bei ersterer beträgt der Polkantenwinkel $110^{\circ} 48'$ und sie ist (da der Unterschied des Winkels nicht viel über 1° beträgt), ohne scharfe Messung, leicht mit dem regelmäßigen Oktaëder zu verwechseln. Für Pr—1 würden die Grundkantenwinkel $75^{\circ} 31'$ und 60° , für Pr—2 dieselben $32^{\circ} 14'$ und $45^{\circ} 34'$, dagegen für Pr+2 $161^{\circ} 13'$ und $155^{\circ} 1'$ betragen. Die Winkel der Seitenkanten des rhombischen Prisma's messen $106^{\circ} 36'$ und $73^{\circ} 24'$. Am gewöhnlichsten finden sich die Flächen von Pr (die Flächen l und y bei Hauy), nächstdem die schmalen Flächen von Pr—2 (r bei Hauy). Das Prisma ist immer kurz, so daß, bei der Verbindung mit den

schmalern Flächen der Oblongpyramide, die scharfen Seitenkanten des Prisma's oft verschwinden, und der Krystall wieder einer Oblongpyramide ähnelt, deren Grundkanten durch die stumpfen Seitenkanten des Prisma's und dessen Zuschärfungskanten gebildet werden.

Sehr häufig findet man die Krystalle des Strahlkieses in besondern Zusammenhäufungen, denen man die Namen Zellkies, Kammkies, Speerkies zc. beigelegt hat. Bei dem Zellkies sind äußerst kleine Krystalle, jedoch wie es scheint, ohne bestimmte Richtungen ihrer Axen gegen einander, so zusammengehäuft, daß dünne Platten gebildet werden, die sich theils rechtwinkelig, theils unter unbestimmten Winkeln kreuzen. Bei dem Kammkies liegt das Rhombenprisma in Verbindung mit den schmalen Flächen von $Pr = 2$ zu Grunde, und denkt man sich mehrere solcher Prismen so mit einander verwachsen, daß alle ihre Axen parallel stehen, so werden die scharfen Kanten der Prismen am Rande vorragende Schärfen bilden, und dem Rande ein gezacktes Ansehen geben (Taf. X. Fig. 20.). Bei dem Speerkies vereinigen sich fünf Individuen zu einer fünfseitigen Pyramide, deren horizontale Projection vier Winkel von $106^{\circ} 36'$ (die stumpfen Winkel des Rhombenprisma's) und einen von $113^{\circ} 36'$ besitzt, wo aber gewöhnlich noch einspringende Winkel an den Randecken sichtbar werden. Um sich ein deutliches Bild von der Zusammensetzung dieser Fünflinge zu machen, nehme man in Fig. 21. die mit 1 bezeichneten Ecken als die Ecken des Durchschnittes des Rhombenprisma's an, das man durch die Linie zz halbt, und die mit 2 bezeichneten Ecken würden die Ecken des Durchschnittes eines zweiten Rhombenprisma's seyn,

das ebenfalls durch die Linie zz halbirt wird. Der aus beiden entstehende Zwilling hat die scharfen Ecken 1^*1 und 2^*2 als ausspringende und an den Punkten ihrer Durchschnittslinien z einspringende Winkel. So wie sich der Rhombus 1 zum Rhombus 2 verhält, so verhält sich dieser wieder zu einem Rhombus, dessen Ecken mit 3 bezeichnet sind, wo yy die gemeinschaftliche Durchschnittslinie bildet. Dies Verhältniß pflanzt sich fort vom Rhombus 3 zum Rhombus 4 und von diesem zum Rhombus 5. Wäre der stumpfe Winkel dieser Rhomben 108° , so würde auch wieder Rhombus 5 zu Rhombus 1 dasselbe Verhalten beobachten; da aber derselbe $136^\circ 36'$ beträgt, so wird der Winkel bei w verschieden von dem Winkel bei z und y seyn. (Letztere betragen jeder $360^\circ - 2 \cdot 106^\circ 36' = 146^\circ 48'$, ersterer $139^\circ 48'$.) Der ganze Fünfling würde das Ansehen eines fünfstrahligen Sterns, dessen Spitzen die mit $*$ bezeichneten Zahlen bilden, annehmen; und von dem Rhombus 1 würde nur das Trapez $zmw1^*$, von dem Rhombus 2 der Rhombus $my2^*z$ übrig bleiben. Denkt man sich nun die benachbarten Flächen so wachsend, daß ihre Durchschnittslinien zm , mw , my u. sich verlängern, bis die einspringenden Winkel bei w , z , y u. ausgeglichen sind, so entsteht ein Pentagon, dessen Seiten parallel mit den kurzen Diagonalen der Rhomben laufen. Gewöhnlich ist aber diese Ausgleichung nicht vollständig geschehen, und es bleiben die in der Figur mit punktirten Linien bezeichneten einspringenden Winkel an den Ecken übrig. Das Rhombenprisma in Verbindung mit den schmalen Flächen von Pr und $P - \infty$ giebt dann den Fig. 22. dargestellten Krystall. Nicht selten erscheinen

die einzelnen Individuen wieder nach derselben Art zusammengesetzt, wie der Kammkies, wo dann die einspringenden Winkel der Ecken sich mehrmals wiederholen.

Bisweilen gehen selbst diese Zünflinge solche Verbindungen ein, daß der Zünfling als Individuum gedacht, aufs Neue den Gesetzen der Zwillingkrystallisation unterworfen wird. Einen Fall, wo zwei vollständige Zünflinge sich mit einander verbinden, stellt Fig. 23. dar, in der Natur sind beide aber gewöhnlich so mit einander vereinigt, daß die einspringenden Winkel sehr klein, und die Rinnen, welche die Pyramidenflächen mit einander bilden, nur als Linien sichtbar werden. Einen andern Fall, den Mohs darstellt, giebt Fig. 24., wo der Zünfling wieder als hemitropischer Zwilling auftritt.

Es giebt außerdem noch mehrere besondere Zusammenhäufungen, theils von einzelnen Krystallen, theils von Zünflingen, durch welche pyramidenförmige, keilförmige u. a. Gestalten hervorgehen.

Bei den krystallisirten Abänderungen sind Durchgänge der blätterigen Textur selten wahrzunehmen, sondern in dichtem Bruch, eben oder uneben von feinem Korne, verschlungen, doch deutet die Streifung, die man gewöhnlich bei P—2 findet, auf einen Durchgang senkrecht auf die Hauptaxe hin. Bei den derben Abänderungen fehlt zwar bisweilen jede Spur von Textur (Leberkies), öfters aber wird eine excentrisch strahlige Textur, gewöhnlich mit nierförmiger, kugelförmiger u. Gestalt verbunden, sichtbar, die zwei Durchgänge, parallel den Seitenflächen des Rhombenprism-

ma's darzubieten scheint, und sich mitunter in stängelige Absonderung verläuft. Die von einigen Schriftstellern angeführten Hexagonalprismen des Leberkieses sind Asterkrystalle.

Einfache Krystalle sind besonders auf Gängen im ältern Gebirge, wie bei Freiberg, Clausthal, Schemnitz zu Hause, doch finden sie sich auch im Braunkohlengebirge bei Almerode in Hessen, Löplitz in Böhmen u. Der Kammfies kommt vorzüglich von Clausthal und aus Derbyshire. Der Speerfies ist hauptsächlich dem Braunkohlengebirge eigen, und Littmitz in Böhmen so wie Falkenberg bei Ellenbogen liefern ausgezeichnete Exemplare, doch scheint er auch auf Gängen einzubrechen.

Mineralien, dem Hexagonal-Systeme angehörig.

§. 225.

Quarz. Eine Hexagonal-Pyramide mit Polkantenwinkeln von $133^{\circ} 49'$ und Grundkantenwinkeln von $103^{\circ} 21'$, welche das Verhalten der Polaxe zur Randaxe wie $\sqrt{6} : \sqrt{5}$ ergibt, und hemiedrisch auf ein Rhomboëder mit Polkantenwinkeln von $94^{\circ} 25'$ zurückzuführen ist *), ist diejenige Krystallgestalt, die

*) Nach Hauy beträgt der Polkantenwinkel der Hexagonal-Pyramide $133^{\circ} 48'$, nach Mohs $133^{\circ} 38'$, nach Malus $133^{\circ} 45'$, nach Kupfer $133^{\circ} 44'$, nach Wackernagel $133^{\circ} 43'$. Breithaupt (Zahrb. für Chem. und Phys. 1829, VIII.) nimmt diese Pyramide als eine Verbindung

fast niemals fehlt, und in einigen Fällen für sich ganz allein, gewöhnlich aber mit den Seitenflächen des Hexagonalprisma's, die Abstumpfungen der Grundkanten bildet, verbunden vorkommt. Sie zeigt eine besondere Eigenthümlichkeit in dem verschiedenen Größenverhältniß ihrer Flächen, das auch auf die Prismenflächen übergeht, indem einzelne Flächen sich sehr vergrößern, während die andern sich verkleinern, ohne daß die Symmetrie immer dabei beobachtbar ist, und bei den Prismen diejenige Pyramide, welche das eine Ende begränzt, oft eine andere Ausdehnung der einzelnen Flächen zeigt, als die des andern Endes.

Bisweilen wächst eine Fläche so, daß die fünf übrigen fast verschwinden (Hay Tab. 56. F. 8.), und ein Prisma mit schiefer Endfläche entsteht; bisweilen wachsen zwei neben einander liegende, und wenn dies

von zwei Rhomboëdern an, von denen das eine Polkantenwinkel von $94^{\circ} 27'$, das andere von $94^{\circ} 28\frac{1}{2}'$ besitzet, und welche nach den bisher bekannten Ableitungsgesetzen nicht aus einander ableitbar sind. Man wird aber selten in der Natur Krystallflächen finden, die so vollkommene Ebenen sind, daß die Messung mit hinreichender Genauigkeit auf $\frac{1}{4}$ bis auf $\frac{1}{2}$ Grad möglich würde, und selbst unsere besten Reflexionsgoniometer bieten in der Anwendung manche Schwierigkeit zur genauen Bestimmung dar. Das Auskunftsmittel, aus den über einen Winkel gemachten Beobachtungen das Mittel der Abweichungen auszuwählen, ist nicht zu empfehlen, sondern derjenige Winkel ist wahrscheinlich der richtige, der durch die meisten Beobachtungen bestätigt wird. Gesezt aber auch, diese Winkelabweichung finde bei dem Quarze wirklich Statt, so ist noch immer die Frage, ob dieselbe nicht als zufällig, d. h. keinem bestimmten, durchgreifenden Gesetze unterworfen, anzusehen sey?

an beiden Enden mit parallelen Flächen geschieht, so werden vier Flächen des Prisma's sehr klein, zwei sehr groß (Hauy Tab. 56. Fig. 7.), es giebt aber auch Fälle, wo 3 — 4 — 5 theils neben einander liegende, theils verschieden abwechselnde Flächen wachsen oder kleiner werden. Die Neigung von drei abwechselnden, parallelen Flächen, sich auszudehnen und ein Rhomboëder zu bilden, ist jedoch häufig entschieden vorherrschend.

Außer der Stammpyramide finden sich noch mehrere spitzere Hexagonalpyramiden, in gleichartiger Stellung, jedoch nur in Verbindung mit der Stammpyramide und dem Prisma, wo sie Abstumpfungen der Kanten, welche die Pyramidenflächen mit den Prismenflächen bilden, verursachen, aber mehrentheils kommen diese Pyramiden nur mit einzelnen Flächen und nicht immer an beiden Enden des Prisma's vor. So enthält der Krystall, den Taf. X. Fig. 25. darstellt, die Flächen der $P+5$ (γ) hemiedrisch, aber nur nach einer Polecke zusammengeneigt, und unterscheidet sich dadurch von Hauy's hyperoxide Tab. 57. Fig. 13., wo diese Flächen an beiden Polen sich finden. In dem Krystall Fig. 26. erscheinen die Flächen der $P+5$ als dachförmige Vorsprünge an den Seitenflächen der Prismen, sich mehrmals wiederholend.

Von denjenigen Pyramidenflächen, welche in diagonaler Stellung gegen die Flächen der vorigen Hexagonalpyramiden befindlich sind, kommen diejenigen, welche für die Polkanten der $P+1$ tangirende Ebenen bilden (s bei Hauy), und ein Dirhomböeder mit Winkeln von $125^{\circ} 53'$ und $130^{\circ} 56'$ geben, als kleine rhombische Flächen an den Ecken, in welchen die Kan-

ten der Stammpyramide und der Prismen zusammenstoßen, vor, doch sind sie gewöhnlich nur an den abwechselnden Ecken vorhanden, wo sie einem Rhomboëder mit Volkantenwinkeln von $76^{\circ} 2'$ entsprechen. Ja sie sind oft nur an einer oder zwei Ecken bemerklich, je nachdem die Ausdehnung der Flächen der Stammpyramide größer oder geringer ausfällt. Auch sind, wie wohl nur in wenigen Fällen, die Abstumpungsflächen der Volkanten der Stammpyramide (t bei Hauy) beobachtet.

Nicht selten werden auch die Flächen von dihexagonalen Trapezoëdern (x und u bei Hauy) bemerklich, und zwar sowohl in dem Sinne von rechts als von links gewendet, aber doch immer nur in geringer Ausdehnung, und als kleine trapezoidale Flächen, welche sich an die Prismenecken anlegen.

Die Fläche senkrecht auf die Axe ist bis jetzt noch nicht beobachtet, auch die Flächen des in diagonaler Stellung befindlichen Prisma's und des Dodekagon-Prisma's scheinen kaum vorzukommen.

Die Krystalle des Quarzes finden sich selten einzeln eingewachsen und ringsum ausgebildet, wie in manchen Porphyrten, in Gyps, Kalkstein etc., sondern gewöhnlich aufgewachsen und Drusen bildend, in mannichfaltigen Gruppierungen, selten in Zwillingen. Von den letztern sind die gepaarten Krystalle (gestielte Krystalle) am gewöhnlichsten, doch finden sich auch hemitropische Zwillinge, die Theilung theils parallel mit einer Prismenfläche, theils senkrecht auf die Axe.

Durchgänge werden sehr selten bemerklich, nur dann und wann bemerkt man Durchgänge parallel den

Flächen der Stammpyramide, von denen vielleicht die Querstreifung der Prismenflächen herrührt. Die abwechselnden sollen leichter zu erhalten seyn, doch ist die Streifung auf allen Prismenflächen gleich deutlich. Bisweilen zeigen sich auch Spuren von Durchgängen parallel den Prismenflächen.

Von den zahlreichen Fundorten des Quarzes, mit den ihm zugehörigen, unter den Namen Bergkrystall, Amerhyt, Eisenkiesel, Chalcedon, Hornstein zc. bekannten Abänderungen, genüge es hier, einige für besondere Krystallgestalten anzugeben. Berühmt sind die prachtvollen Bergkrystalle, die auf gangartigen Weizungen in dem südeuropäischen Alpengebirge, auf Madagaskar, in Sibirien zc., vorkommen. Die hemisdrische Stammpyramide, ohne andere Flächen, zeigt besonders der blaue Chalcedon von Treſtian in Siebenbürgen, und auch wohl, wenn schon unvollkommen ausgebildet, der krystallisirte bunte Sandstein bei Stuttgart, in Grönland u. a. D. Einzelne, rings um, oder doch bei weitem zum größten Theile ausgebildete Krystalle finden sich im Marmoroscher Comitatz in Ungarn und auf Ceylon im Flußsande, in Gyps eingewachsen bei Lüneburg. Manche jüngere Sandsteine erscheinen unter dem Vergrößerungsglase als ein Conglomerat von kleinen Quarzpyramiden; doch besitzen diese Krystalle fast immer unausgebildete Stellen. Die Flächen des diehexagonalen Trapezoëders werden an den in Dauphiné auf Gängen und in der Zipfer Starostei in Ungarn einbrechenden Bergkrystallen vorzüglich deutlich wahrgenommen. Die Abstumpfungsfächen der Polkanten der Stammpyramide sind an Obersteiner Krystallen beobachtet, die von P + 5 an Dauphinéer und Schnecken-

steiner Exemplaren. Die gestielten Bergkrystalle liefert vorzüglich die Schweiz, die hemitropischen Zwillinge Brasilien, Ceylon, Sachsen u. a. D.

§. 226.

Apatit. Der Krystallkreis des Apatits hat, wenn man von den Winkeln der Pyramiden abstrahirt, viele Aehnlichkeit mit dem Krystallkreise des Quarzes, hier wie dort sind Hexagonal-Pyramiden mit den Flächen des Prisma's verbunden, die letzteren in der Regel sehr ausgedehnt, die vorherrschenden Gestalten; aber, die bei dem Apatit sehr selten fehlende Fläche senkrecht auf die Polaxe, so wie das häufige Vorkommen diagonalen Flächen, und endlich der fast gänzliche Mangel hemiedrischer Krystalle unterscheiden ihn. Nehmen wir eine Hexagonal-Pyramide, deren Polantenwinkel $142^{\circ} 20'$, die Randkantenwinkel $80^{\circ} 25'$ messen, als Stammpyramide an, so ist diese Pyramide nebst $P - 1$ und $P + 1$, in Verbindung mit den Flächen des Hexagonalprisma's und der Fläche senkrecht auf die Axe die gewöhnlichste Krystallgestalt. Bisweilen trifft man nur eine Art von Pyramidenflächen (Hauy Tab. 26. Fig. 3. 4.), bisweilen zwei (Tab. 27. Fig. 12. 13.), selten alle drei (Fig. 14.) mit einander verbunden an. Nur von der Stammpyramide kommen Fälle vor, wo die Fläche senkrecht auf die Axe völlig fehlt (Tab. 26. Fig. 2.). Untergeordnet, und nur mit den vorigen verbunden, finden sich die Flächen eines Dierhomboeders als tangirende Ebenen für die Polanten von $P + 1$ (die Flächen s bei Hauy) oder die Flächen einer Dodekagon-Pyramide (v bei Hauy). Auch die Seitenflächen des in diagonalen Stellung befindlichen

Hexagonalprisma's (e bei Hauy) zeigen sich nur als Abstumpungsflächen der Seitenkanten des ursprünglichen Prisma's. Als hemiedrische Gestalten erscheinen, wiewohl selten und sehr untergeordnet, die Flächen von Hexagonal-Pyramiden und Hexagonalprismen, die sich in abnormer Stellung befinden. Man trifft diese Krystalle größtentheils aufgewachsen und ohne bestimmte Regel durch einander gewachsen. Die Durchgänge laufen parallel den Flächen des Hexagonal-Prisma's; derjenige, der parallel der Endfläche geht, ist gewöhnlich minder deutlich, als die übrigen, doch sind die Durchgänge überhaupt nicht ausgezeichnet, und größtentheils durch muscheligen oder unebenen Bruch verdrängt. Die Prismen zeigen deutliche Längsstreifung.

Die einfachsten Krystalle, gewöhnlich die Stammspyramide mit den Seitenflächen des Prisma's, brechen in einem eisenschüssigen Kalksteine am Cap de Gates in Spanien, und zeichnen sich durch Durchsichtigkeit und ölgrüne Farbe aus (Spargelstein). Sehr ausgezeichnete Krystalle liefern die Zinnsteingänge Sachsens. In Gebirgsarten, besonders in Granit, Hornblendgestein, Talk eingesprengt trifft man vorzüglich die derben Abänderungen, doch auch sehr deutliche Krystalle, wie am Gotthard, an mehreren Orten in den vereinigten Staaten Nordamerikas.

Es sind noch zwei verschiedene Mineralien vorhanden, die in Hinsicht der Krystallisationsreihe und der Durchgänge dem Apatit sehr nahe stehen: der Beryll und das phosphorsaure Blei. Bei dem Beryll sind die Pyramidenflächen weit weniger entwickelt, und größ-

tentheils durch die Fläche senkrecht auf die Aye verdrängt, auch giebt es weit weniger einfache Gestalten, und die Kantenwinkel der Stammpyramide betragen $151^{\circ} 9'$ und $98^{\circ} 2'$. Bei dem phosphorsauren Blei ist ebenfalls die Reihe der Krystalle weit kleiner, die Streifung der Prismenflächen horizontal, nicht vertikal, und Durchgänge fast gar nicht wahrnehmbar. Die Winkel weichen dagegen sehr wenig ab, doch erlaubt die Convergenz der Krystallflächen selten eine hinreichend scharfe Bestimmung.

§. 227.

Kalkstein. So mannichfaltig auch die Krystallgestalten des blätterigen Kalksteins (Kalkspathes) sind, so bietet doch ihre Zurückführung auf einfache Gestalten in der Regel keine besondern Schwierigkeiten dar, da man es fast nur mit Rhomboëdern, Kalkpyramiden und Hexagonalprismen und deren Verbindungen unter einander zu thun hat. Nimmt man ein Rhomboëder mit Polkantenwinkeln von $105^{\circ} 5'$ als Stammgestalt an, so erhalten wir, wenn wir die Polsecke durch p , die Kandecke durch n bezeichnen, folgende spitzere Rhomboëder: $R+1$ (f bei Hauy)

$$1n1 = 78^{\circ} 50' 53''; R+2(m) 3n3 = 65^{\circ} 49' 41''; R+3; 5n5 = 61^{\circ} 33' 22''.$$

Jedoch kommen nicht allein diese Rhomboëder, sondern auch noch Zwischenglieder vor, die aus andern Schnittgesetzen ableitbar sind, und Hauy führt noch auf: $2n2$ (φ bei Hauy) $= 95^{\circ} 27' 32''; 4n4(h) = 88^{\circ} 17' 52'';$

$3n3$ (5) = $63^{\circ} 50' 46''$; $9n9$ (i) $60^{\circ} 36' 5''$;
 $9n9$ (k) = $60^{\circ} 30' 58''$. Nehmen wir die Polaxe
 bei unveränderter horizontaler Projektion = 1, so fin-
 den folgende Verhältnisse des Wachsens Statt: bei
 $\phi = \frac{1}{2}$; $h = \frac{3}{2}$; $f = 2$; $m = 4$; $5 = 5$; $R + 3$
 $= 8$; $i = 13$; $k = 14$. Das gewöhnlich vorkom-
 mende stumpfere Rhomboëder $R - 1$ (g bei Hauy)
 entsteht aus dem Kantenschnitt $1p_{\infty}$ und hat Polkan-
 tenwinkel von $134^{\circ} 57'$; zwischen ihm und dem Stamm-
 rhomboëder gibt es noch ein stumpfes Rhomboëder
 $1n1$ mit $\frac{3}{2}$ Polaxenlänge und Polkantenwinkeln von
 $127^{\circ} 41' 36''$ (d) und ein anderes $1n1$ mit $\frac{4}{3}$ Pol-
 axenlänge und Polkantenwinkeln von $115^{\circ} 6' 30''$ (l).
 Noch mannichfaltiger ist die Reihe der vorkommenden
 Kalkpyramiden, die auf sehr verschiedene Weise abzu-
 leiten sind. Am gewöhnlichsten ist die Kalkpyramide,
 die aus dem Stammrhomboëder durch dreifache Ver-
 längerung der Hauptaxe bei unveränderten Randkanten
 (Fig. 5. r. metastatique bei Hauy) abzuleiten ist,
 und deren Polkantenwinkel $144^{\circ} 24' 28''$ und 104°
 $37' 51''$ betragen. Nicht selten erscheint auch eine
 Kalkpyramide (x) mit Polkantenwinkeln von $92^{\circ} 10'$
 und $153^{\circ} 19' 10''$, welche die Randkanten mit $R + 1$
 gemeinschaftlich, aber die doppelte Länge seiner Polaxe
 hat, und eine andere (y) mit Polkantenwinkeln von
 $109^{\circ} 1' 22''$ und $134^{\circ} 27' 33''$, welche die Randkan-
 ten des Stammrhomboëders, aber die fünffache Länge
 der Polaxe desselben besitzt. Sehr selten kommen He-
 xagonalpyramiden zum Vorschein. Das aus dem

Stammrhomboeder unmittelbar abzuleitende Dichomboeder, das in Verbindung mit dem Prisma (Hauy Tab. 10. Fig. 64.) vorkommt, besitzt Polkantenwinkel von $138^{\circ} 53' 10''$ und Grundkantenwinkel von $89^{\circ} 13' 9''$. Eine andere Hexagonal-Pyramide (δ) mit Polkantenwinkeln von $121^{\circ} 13' 12''$ und Grundkantenwinkeln von $157^{\circ} 55' 16''$ ist als umschriebene Quarzpyramide aus einem Rhomboeder ableitbar, dessen Polaxe sechsmal die Länge der Polaxe des Stammrhomboeders besitzt. Von Prismenflächen sind fast nur die Flächen von Hexagonal-Prismen, welche Abstumpfungen der Rhomboederecken bilden, bekannt, doch kommen in seltenen Fällen auch die Flächen des Quarzprisma's als Abstumpfungen der Randkanten der Rhomboeder vor. Wenn bei den Verbindungen der Seitenflächen der Prismen mit den Rhomboedern die Flächen beider Gestalten gleich groß entwickelt sind, so entsteht im erstern Falle ein dem Pentagonal-Dodekaeder, im letztern Falle ein dem Rhomben-Dodekaeder ähnlicher Krystall. Treten die Rhomboeder mit der Endfläche des Prismas allein in Verbindung, und ist die daraus hervorgehende Abstumpfung der Polecken so weit fortgesetzt, daß sie die Kandecken des Rhomboeders berührt, so wird der Krystall einem Oktaeder ähnlich.

Die Krystalle des Kalkspathes kommen selten einzeln und kaum anders als aufgewachsen vor. Bei den Gruppen bemerkt man mehrere Arten besonderer Zusammenhäufung, und insbesondere reihen sie sich öfters so zusammen, daß sie wieder einen Krystall darstellen. Niedrige Hexagonal-Prismen (Tafeln) legen sich auf einander, daß sie ein einziges Prisma, kleine Rhomboeder so, daß sie ein größeres Rhomboeder bilden.

Nicht sehr häufig trifft man Zwillinge, theils gepaarte Krystalle, theils Hemitropien. Unter den gepaarten Krystallen sind die von Bräunsdorf bei Freiberg, wo eine Kalkpyramide der Aye nach ein Hexagonalprisma mit dem stumpfen Rhomboëder durchwächst, und die niedrigen weißen Prismen von Andreasberg, wo ein dreiseitiger schwarzer Mittelkern die Anwesenheit des Rhomboëders verräth, vorzüglich ausgezeichnet. Unter den Hemitropien ist diejenige der Kalkpyramide, wo der Schnitt senkrecht auf die Mitte der Hauptaxe geht, und wo die abwechselnden Randecken einspringende Winkel zeigen (Taf. XI. Fig. 25.) besonders bemerkenswerth, doch finden auch Schnitte parallel mit den Flächen des Stammrhomboëders und des $R - 1$ Statt.

Die ungemein deutlichen Durchgänge laufen parallel mit den Flächen des Stammrhomboëders. Von ihnen rühret die Streifung parallel der langen Flächendiagonale bei den flachen Rhomboëdern, die schiefe Streifung mancher Kalkpyramiden und der Quarzprismen her. Der Durchgang senkrecht auf die Aye wird zwar nicht leicht vollkommen spaltbar, verräth sich aber bei Krystallen durch seinen Perlmutterglanz. Auch drei Durchgänge parallel den Flächen des $R - 1$ kommen mitunter erkennbar vor, und veranlassen bei dem Stammrhomboëder Streifung parallel der horizontalen Flächendiagonale. Vom Harze kommen derbe Massen mit vierfachem gleichwerthigem Durchgange der Blätter, welcher von einer Zwillingkrystallisation abzuleiten ist. Man denke sich ein Rhomboëder (Taf. XI. Fig. 26.) durch einen Schnitt getheilt, der parallel mit einer Fläche läuft, und die obere Hälfte (Fig. 27.) um 90° gedreht, so daß die Polecke p über eine Randecke zu stehen

kommt, so werden zwei Durchgänge parallel laufen, der dritte aber in jeder Hälfte eine besondere Richtung annehmen; und wenn man in Fig. 28. nicht zwei Hälften, sondern zwei vollständige Individuen sich durchwachsend denkt, so wird der dunkle Mittelkörper der, beiden Individuen gemeinschaftliche Theil seyn, in welchem vier Durchgänge, von denen sich alle benachbarten unter $105^{\circ} 5'$ und $74^{\circ} 55'$ schneiden, vorhanden sind.

Die Absonderung ist gewöhnlich krystallinisch-förmig, mitunter stängelig, seltener schaalig. Man bemerkt auch bei den dicken Massen Aneinanderfügung der abgetrennten Stücke nach den Gesetzen der Zwillingkrystalle, und manche Streifung nach der horizontalen Diagonale des Stammrhomboëders rührt von den abwechselnden Lagen solcher Zusammenhäufungen her. (Mohs II. Fig. 127. 128.).

Bei einem so vielfach verbreiteten Minerale, wie der Kalkspath ist, lassen sich dessen Fundorte nicht alle nennen, und es genügt die Orte zu bezeichnen, die sich durch Reichthum oder Eigenthümlichkeit der Krystallisation auszeichnen. Vorzüglich sind es die Erzgänge der ältern Gebirge, welche die Krystalle liefern, wie am Harze (Andreasberg), im sächsischen und böhmischen Erzgebirge (Freiberg, Gersdorf, Magen, Joachimsthal), in England (Derbyshire, Cumberland), Frankreich (Lyon), Ungarn, Nordamerika, Mexiko.

Bemerkenswerth ist es, daß der Kalkspath so oft für ganz fremdartige Mineralien die Gestalt zu Asterkrystallen gegeben hat, wie die Zwillingkrystalle der Kalkpyramide in Grau-Manganerz bei Isfeld, in Roth-Eisenstein im Siegenschen, die rhomboëdrischen Aster-

Krystalle im Galmey bei Aachen, bei Lindenberg im Siegenschen, in Chalcedon in Ungarn, in Hornstein bei Schneeberg zc. beweisen. Die Entstehung dieser Asterskrystalle ist nicht vollständig erklärt, indem die Annahme, daß sie in Eindrückcn gebildet wären, in der Stellung und Durchkreuzung dieser Krystalle manchen Widerspruch findet. Sollte nicht ein ähnlicher Proceß, wie derjenige, der die Umwandlung organischer Körper in Steinmassen bedingt, hier Statt gefunden haben?

An den Kalkspath reihen sich in Hinsicht auf Krystallgestalt eine Menge kohlen-saure Fossilien, wie Brauns-
spath, Eisenspath, Zinkspath zc. an, aber außer der verschiedenen Härte und Schwere und kleinen Abweichungen in den Winkeln, ist auch der Kreis ihrer Krystallgestalten weit beschränkter, und das Stammrhomboëder, das bei dem Kalkstein eine sehr seltne Erscheinung ist, bildet die hier am häufigsten vorkommende Gestalt.

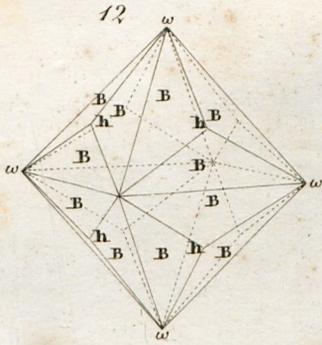
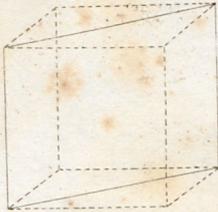
Halle,
gedruckt in der Gebauerschen Buchdruckerei,

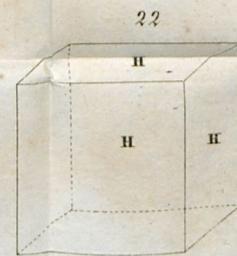
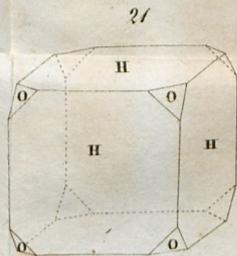
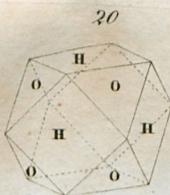
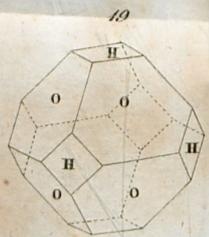
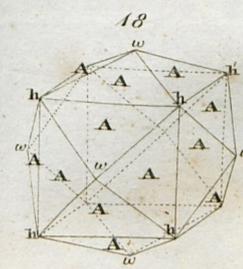
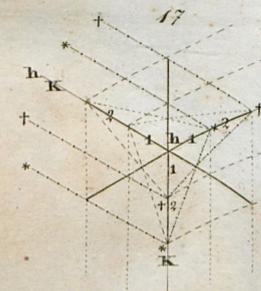
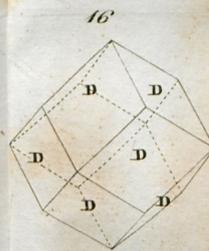
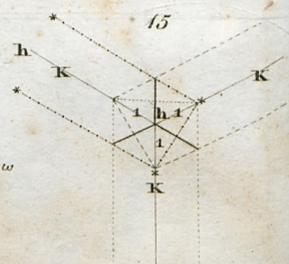
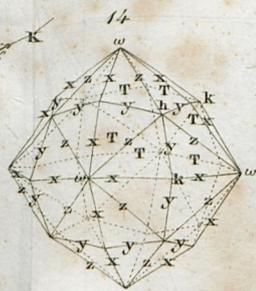
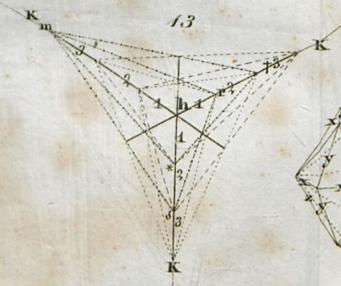
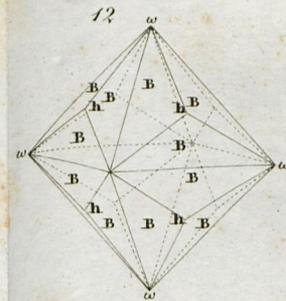
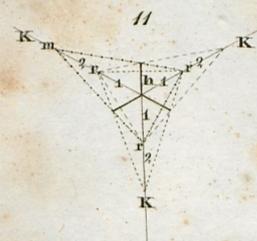
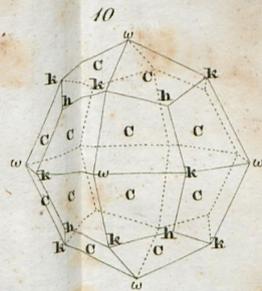
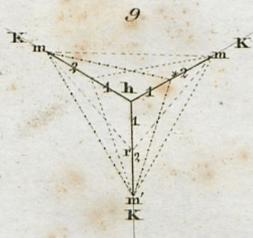
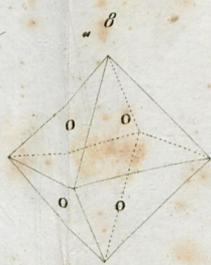
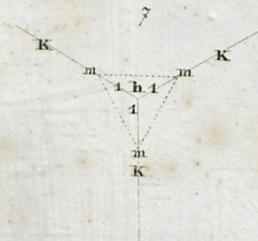
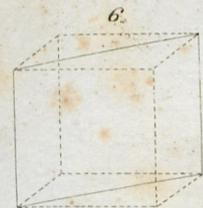
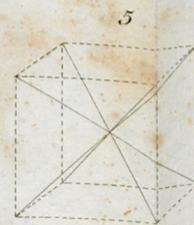
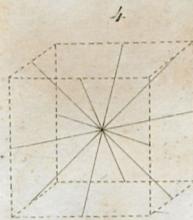
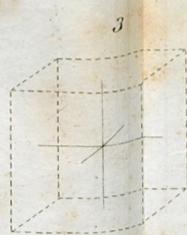
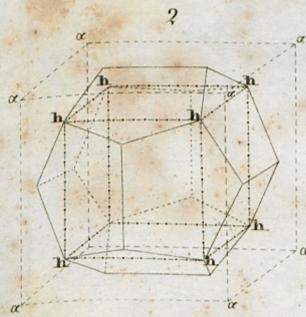
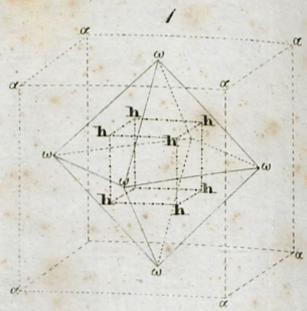




Taf. I.

6.

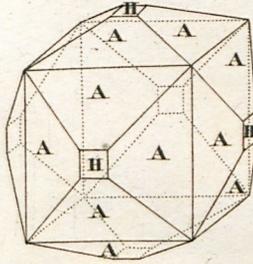
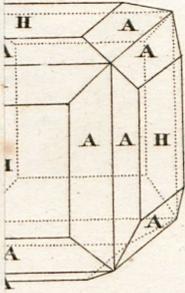




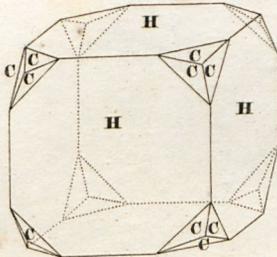
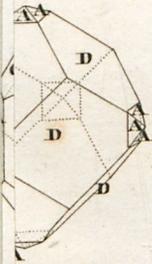




38



34

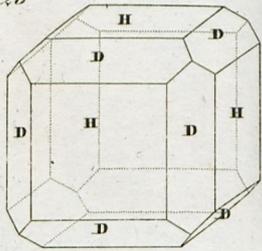


39

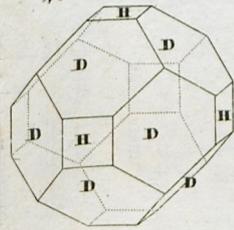
40



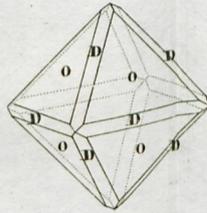
23



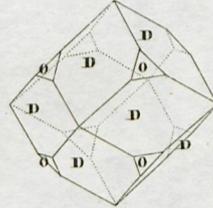
24



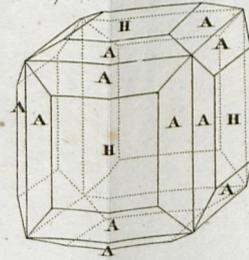
25



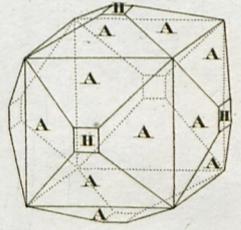
26



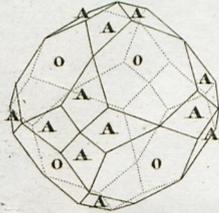
27



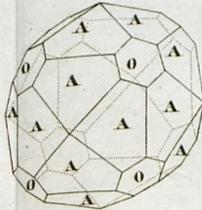
28



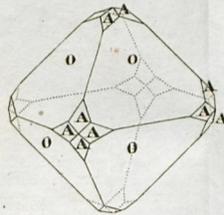
29



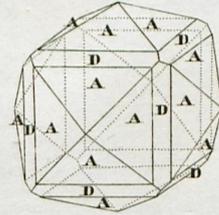
30



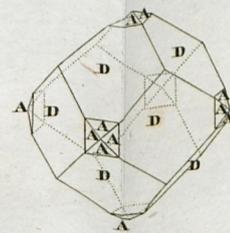
31



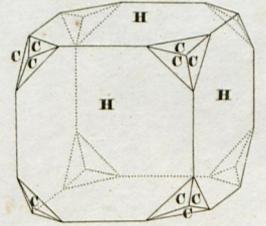
32



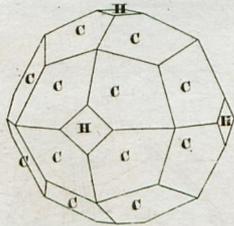
33



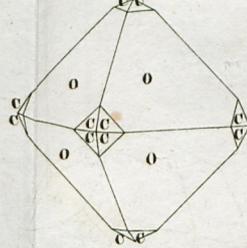
34



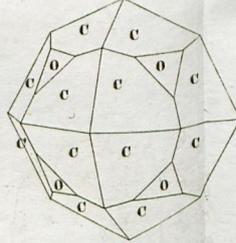
35



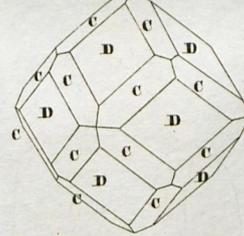
36



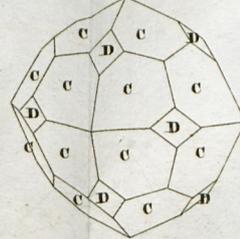
37



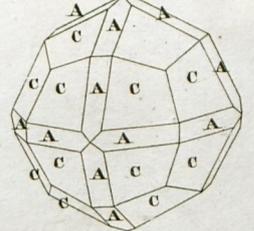
38



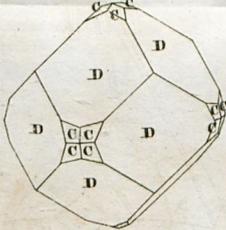
39



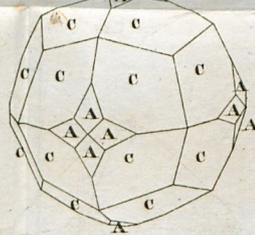
40



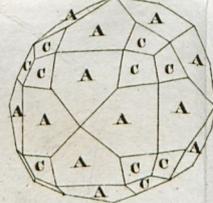
41



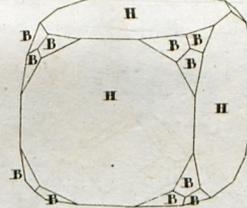
42



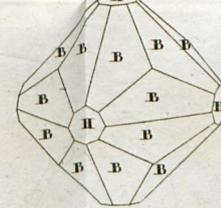
43



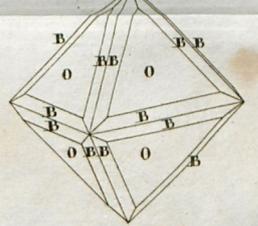
44

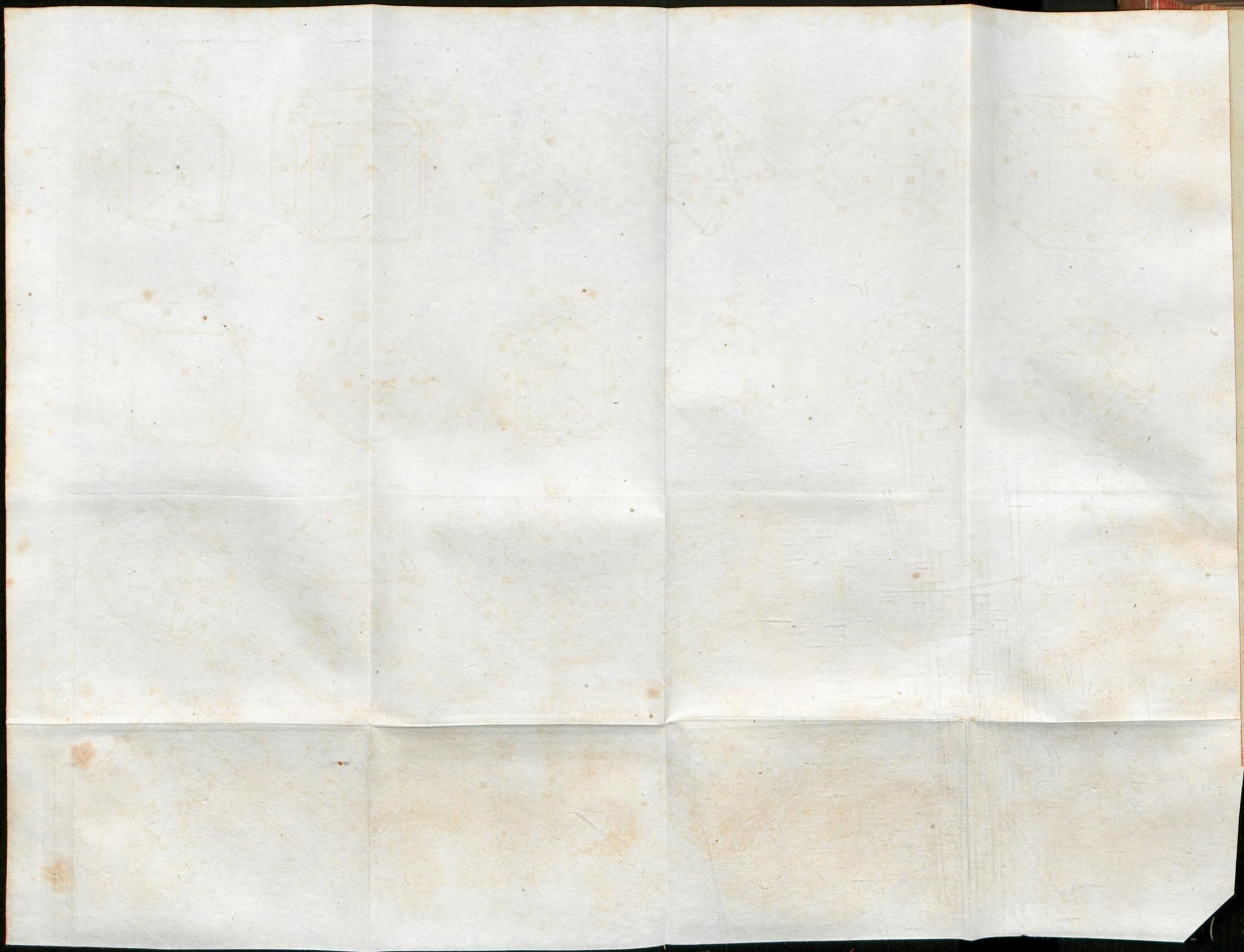


45



46



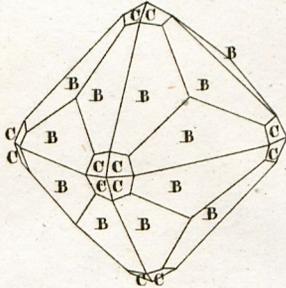




52

Taf. III.

48

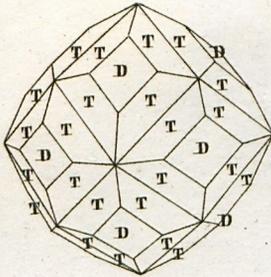


4

II

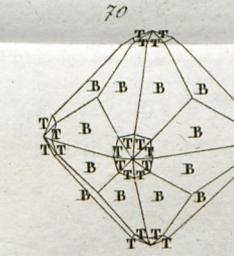
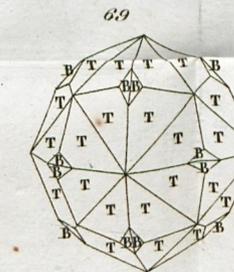
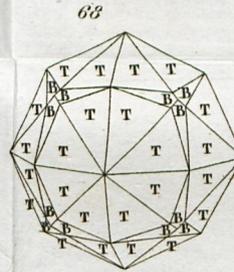
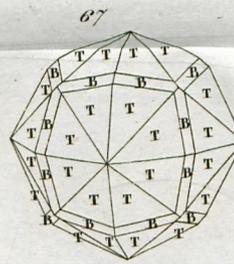
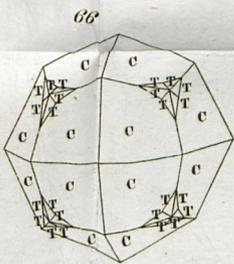
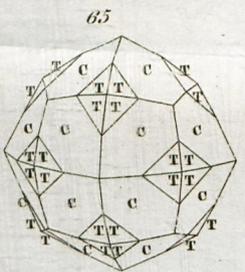
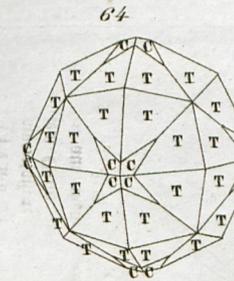
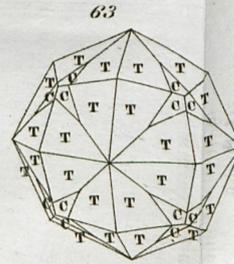
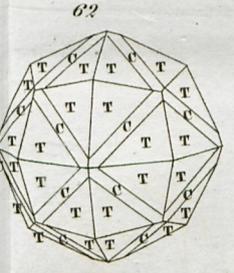
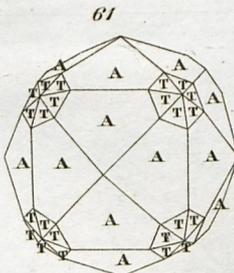
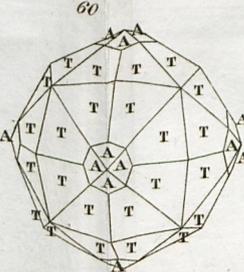
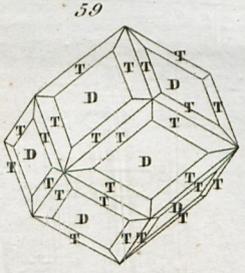
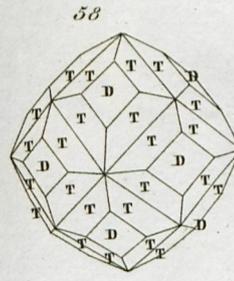
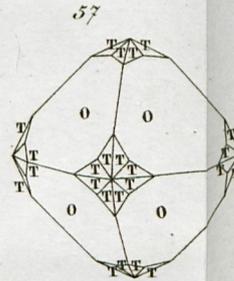
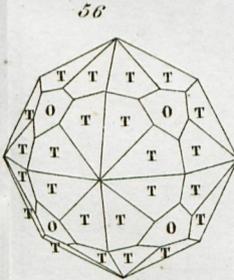
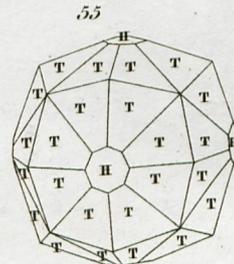
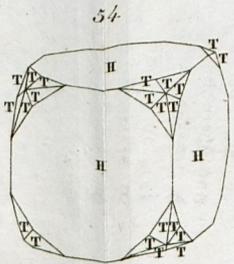
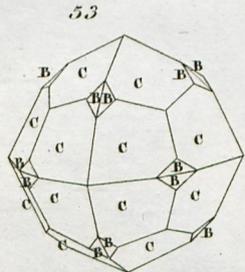
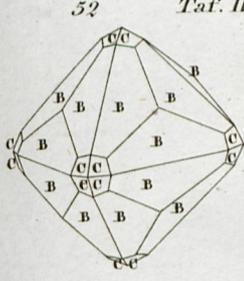
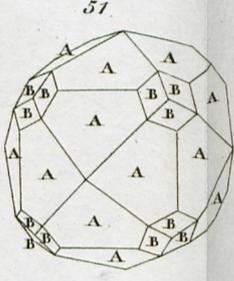
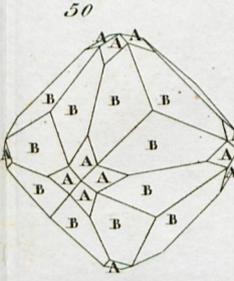
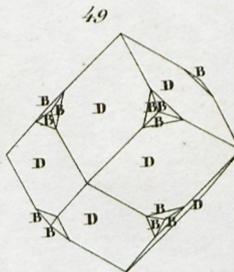
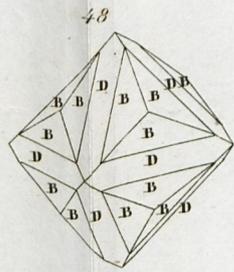
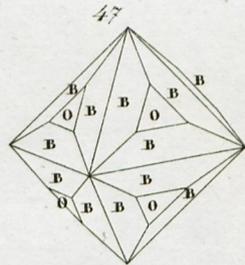


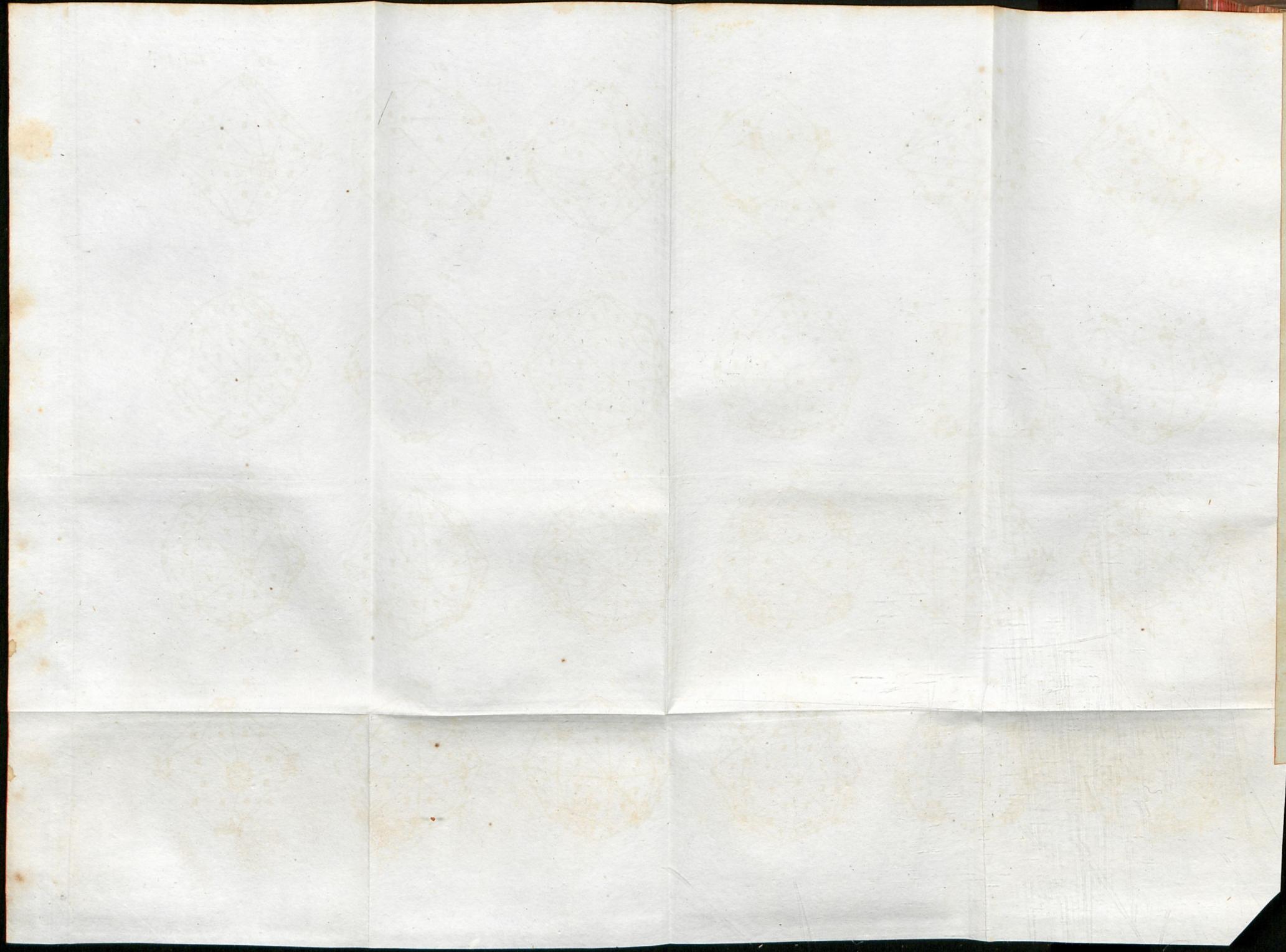
58



64

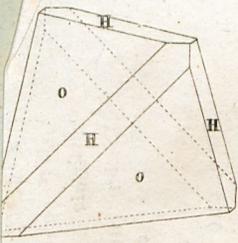




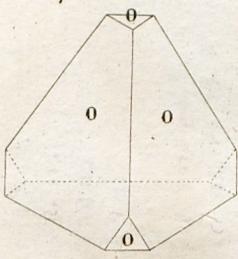




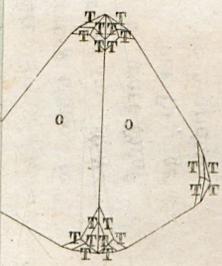
75



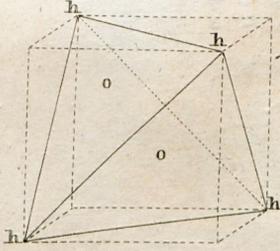
76



81



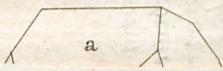
82

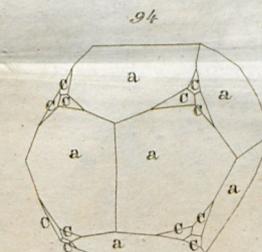
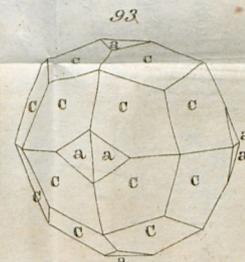
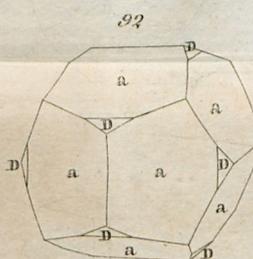
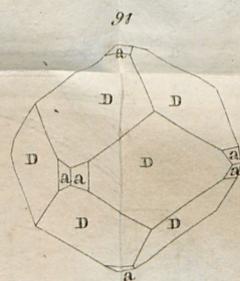
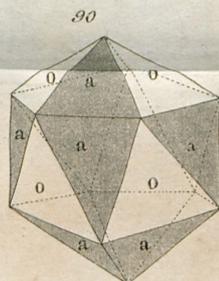
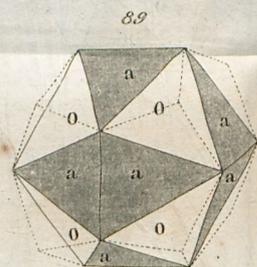
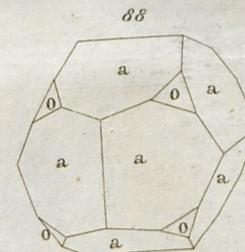
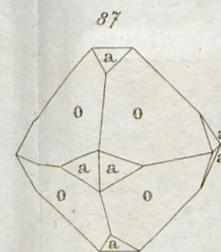
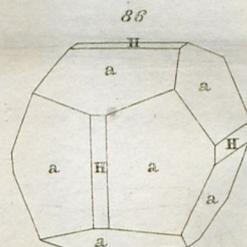
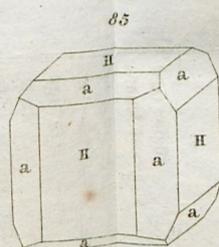
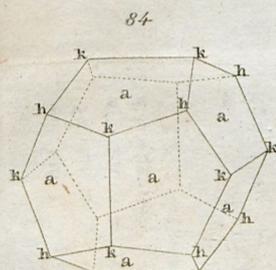
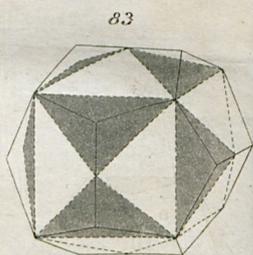
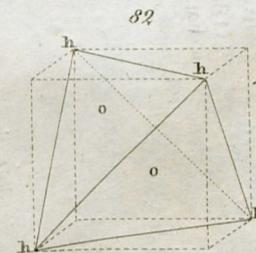
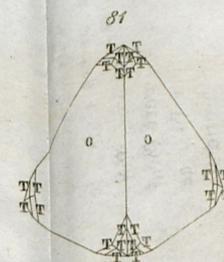
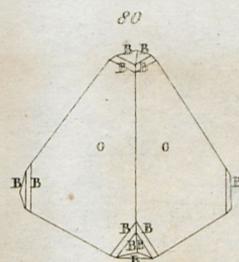
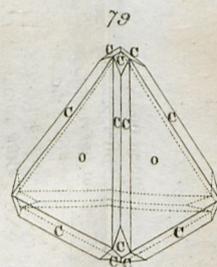
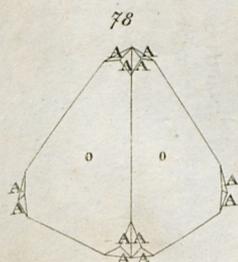
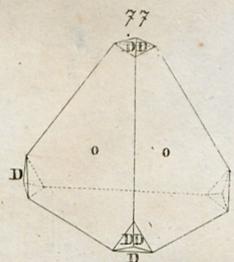
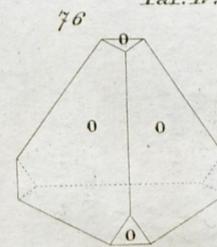
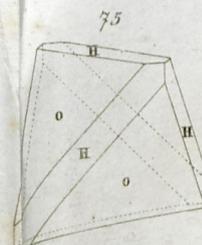
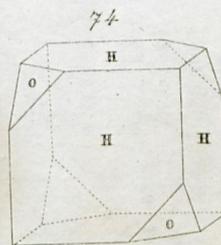
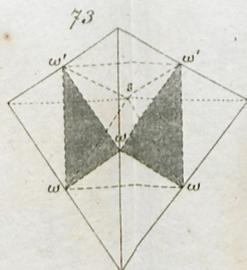
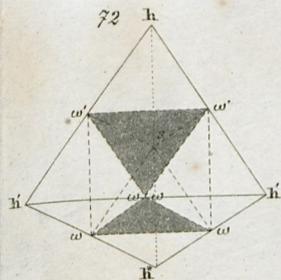
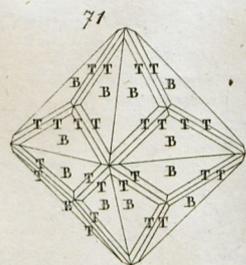


87



88

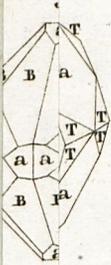
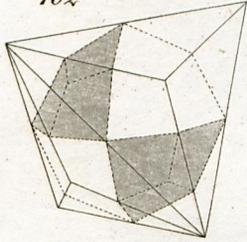




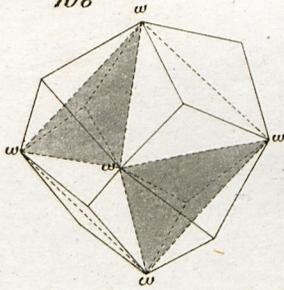




102

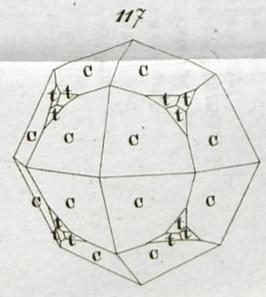
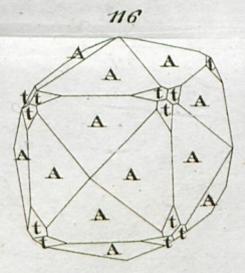
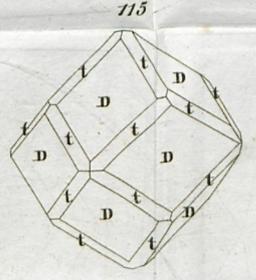
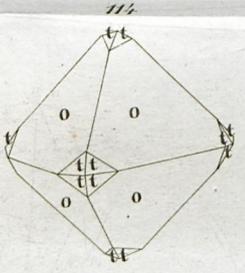
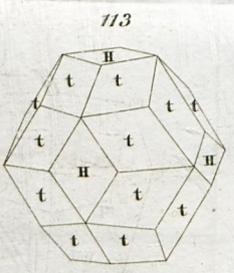
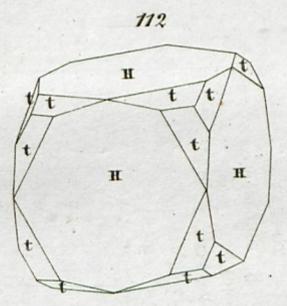
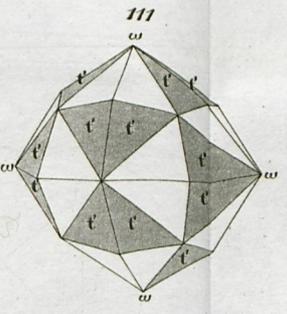
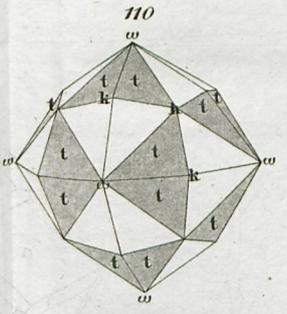
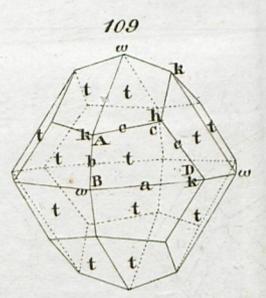
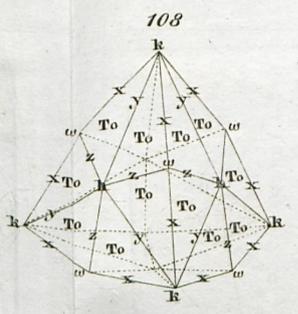
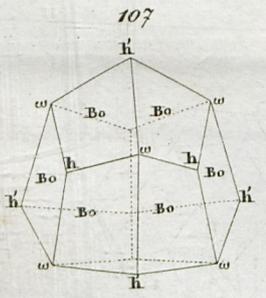
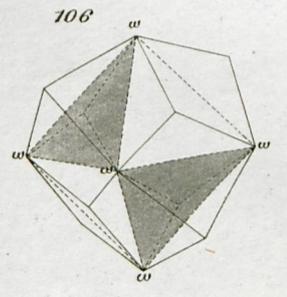
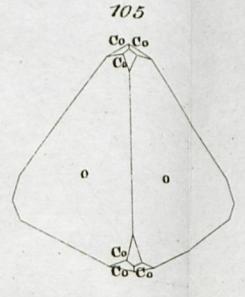
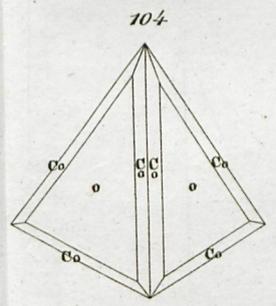
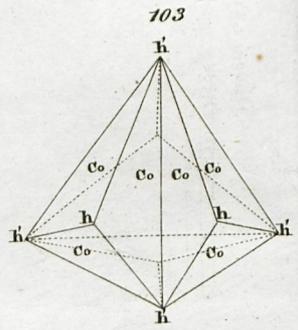
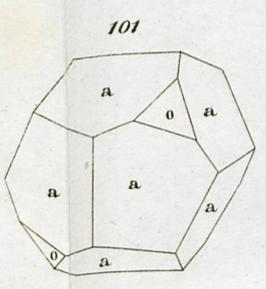
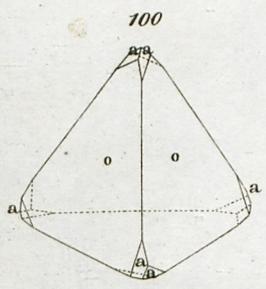
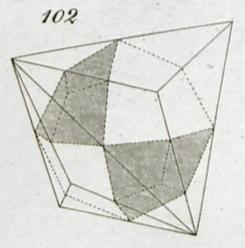
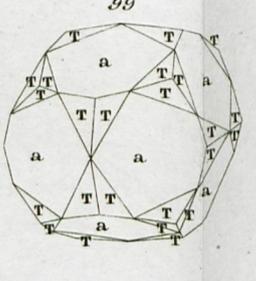
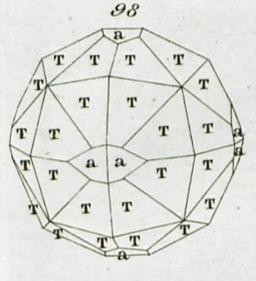
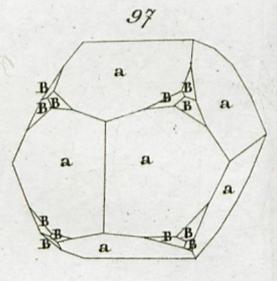
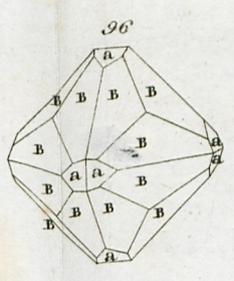
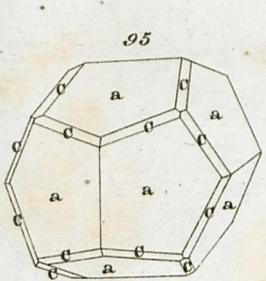


106



112



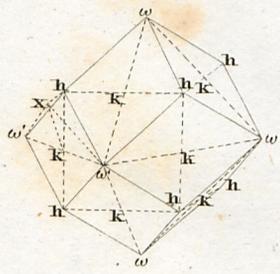




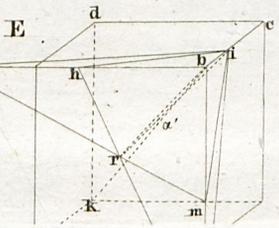
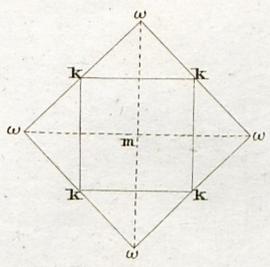


Taf. VI.

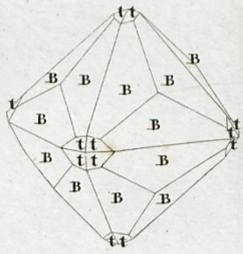
123^a



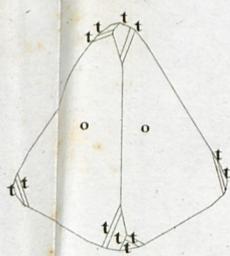
123^b



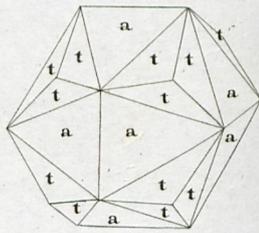
118



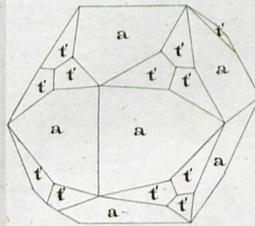
119



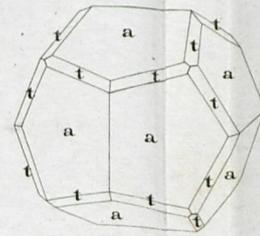
120



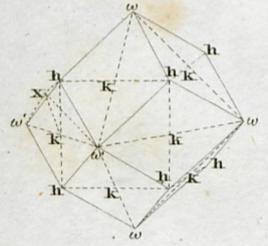
121



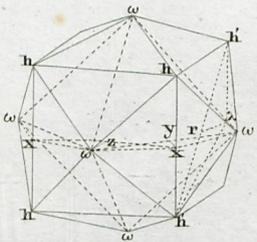
122



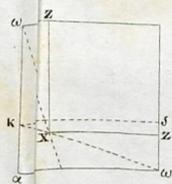
123^a



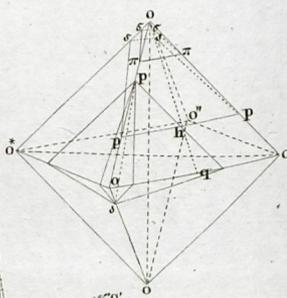
124^a



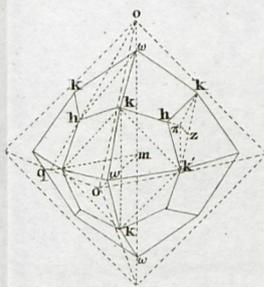
124^b



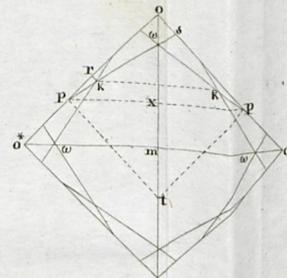
125^a



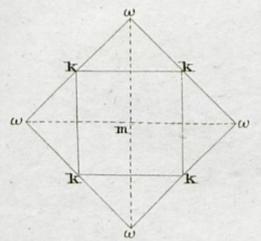
125^b



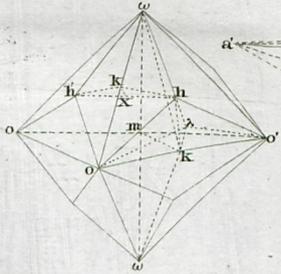
125^c



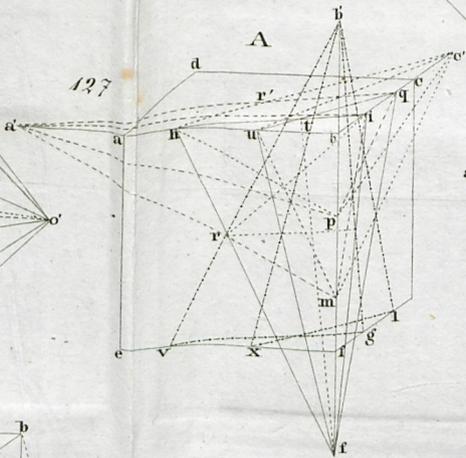
123^b



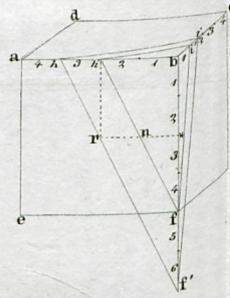
126



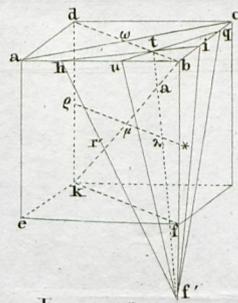
127



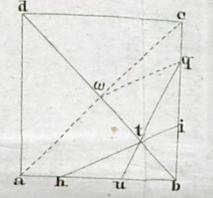
B



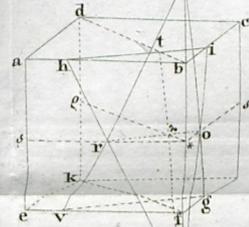
C 1



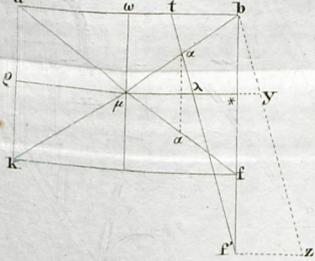
C 2



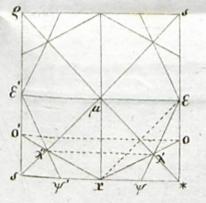
D



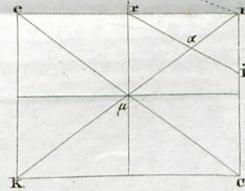
F'



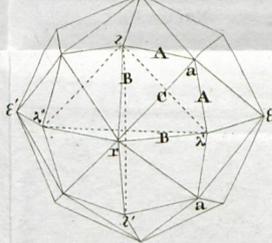
G



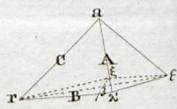
H



I



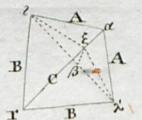
K



L



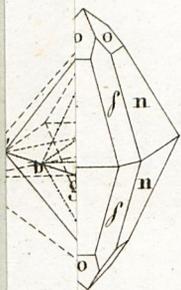
M



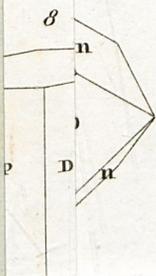
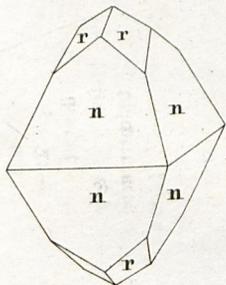




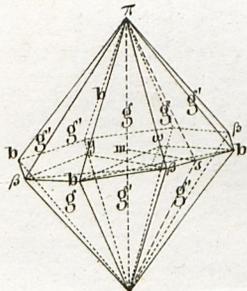
Taf. VII.

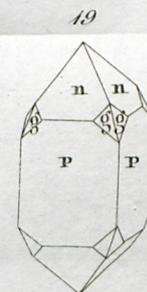
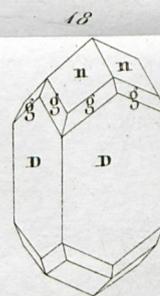
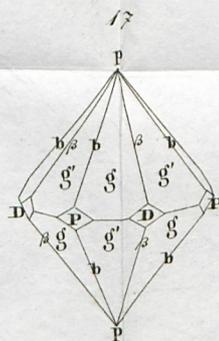
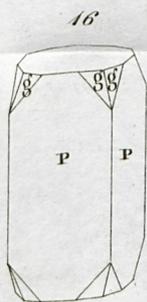
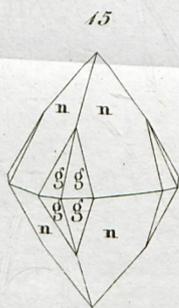
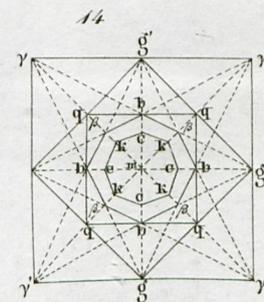
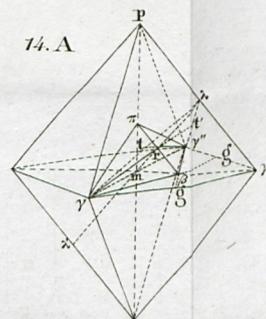
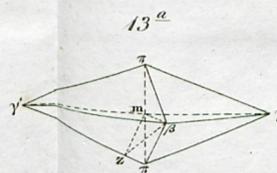
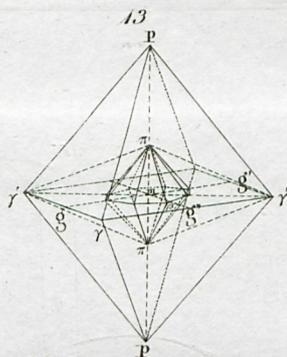
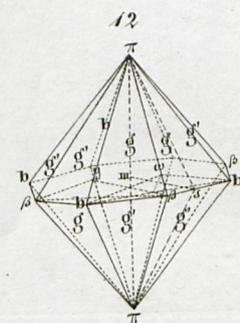
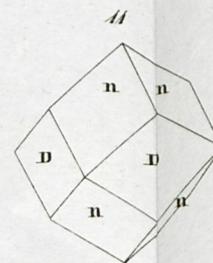
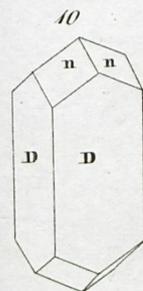
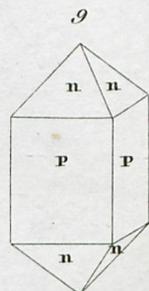
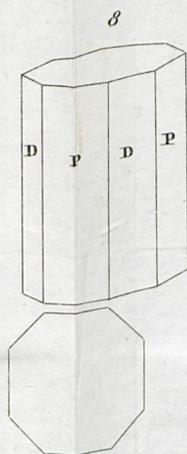
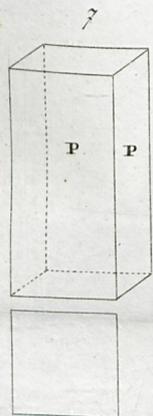
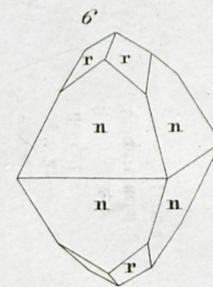
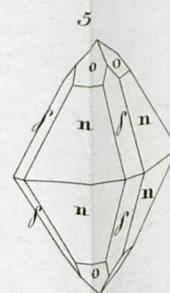
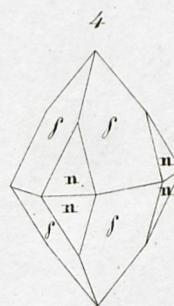
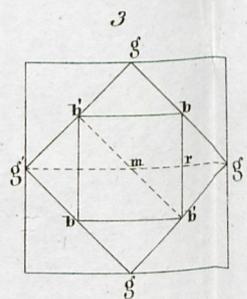
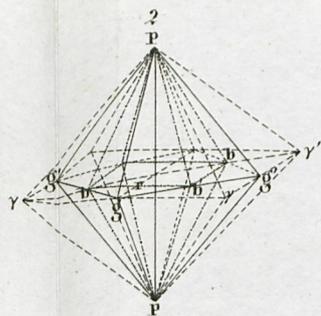
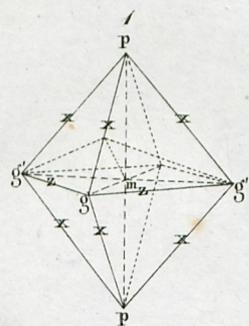


6



12



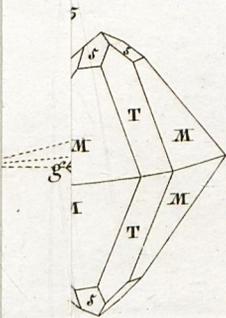
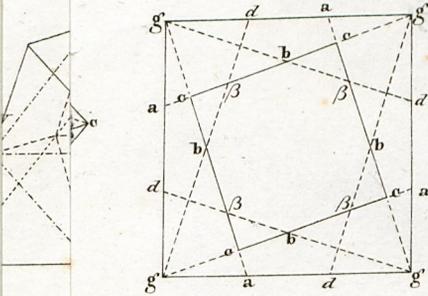




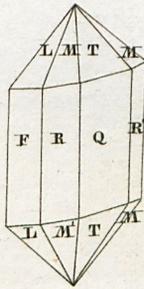


Taf. VIII.

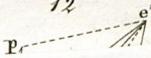
25



6

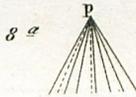
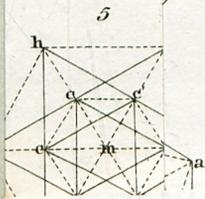
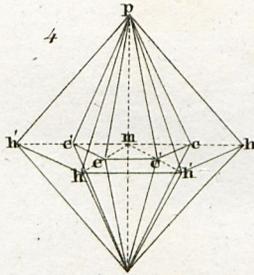
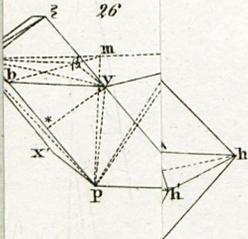
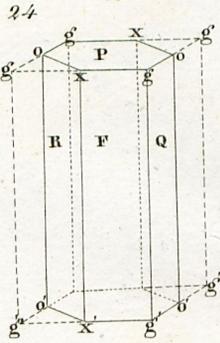
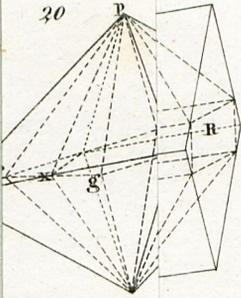


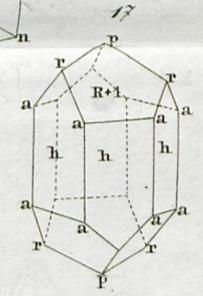
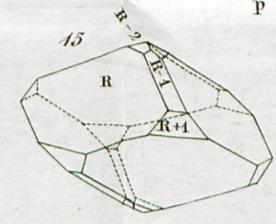
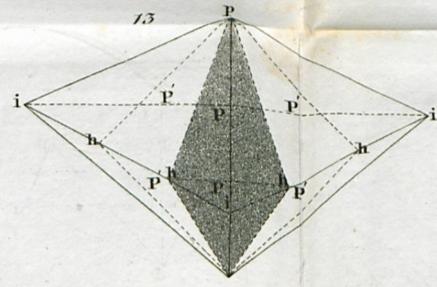
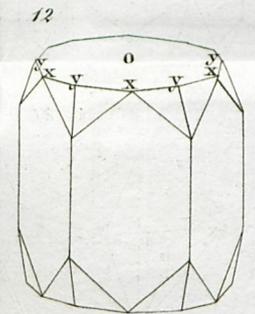
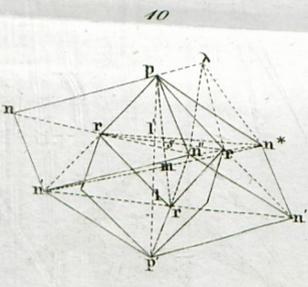
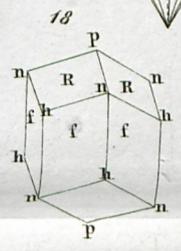
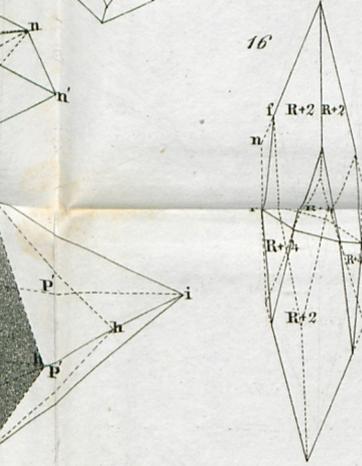
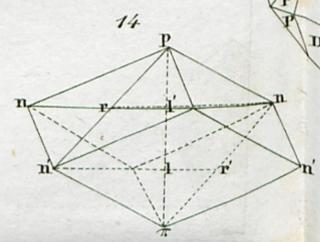
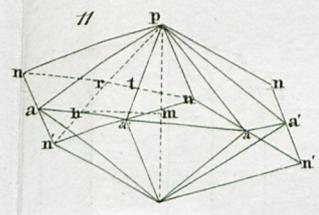
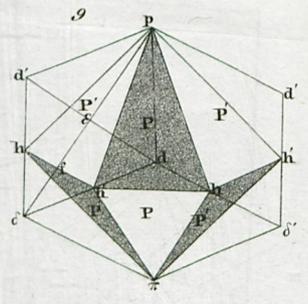
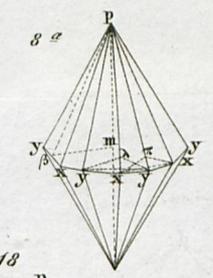
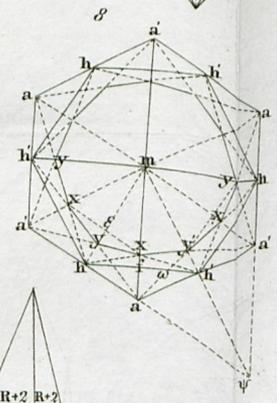
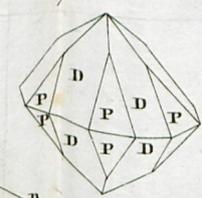
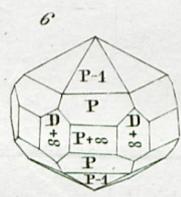
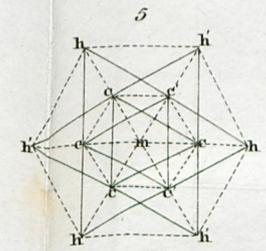
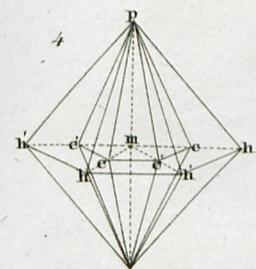
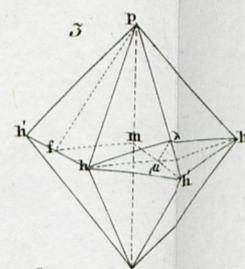
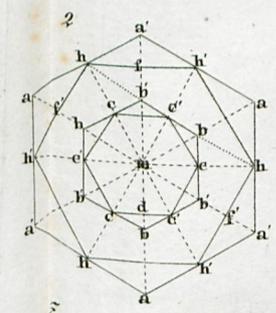
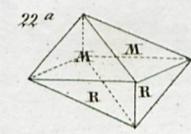
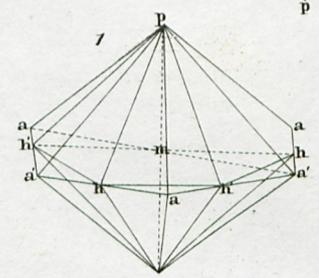
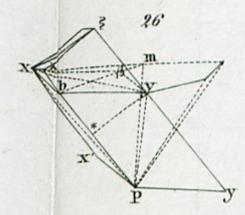
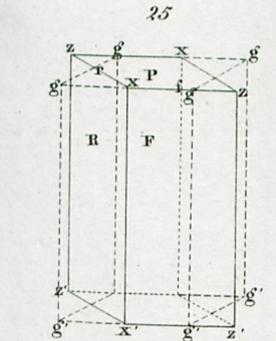
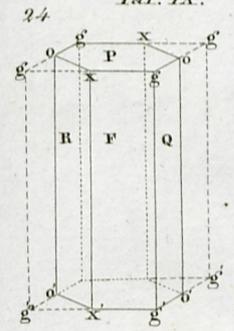
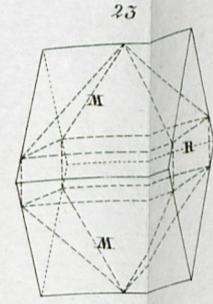
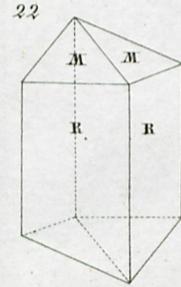
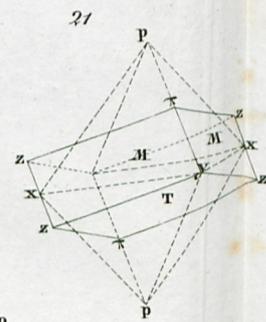
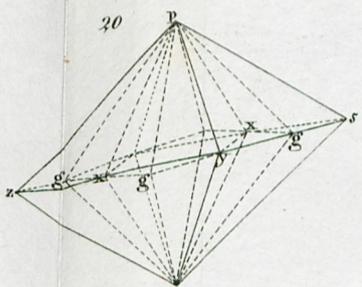
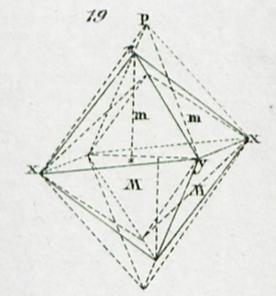
12











J.G. Sturm sc.



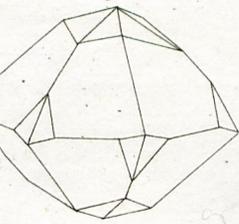




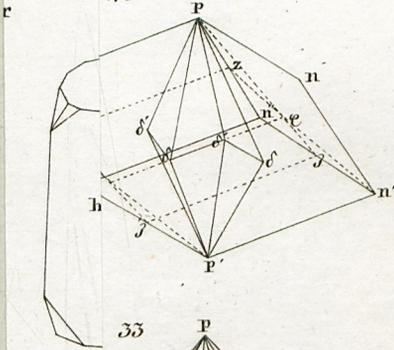
21



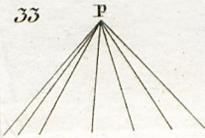
24



28

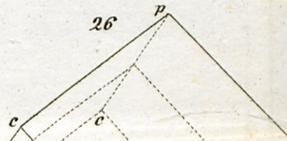
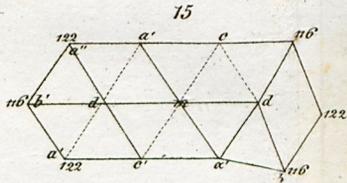
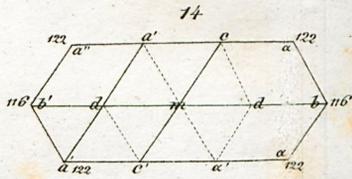
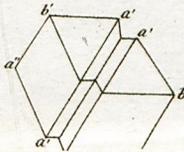
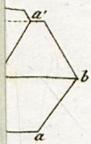
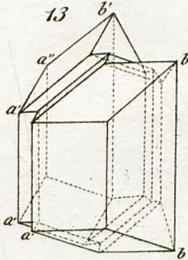
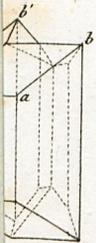
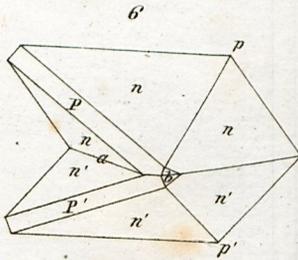
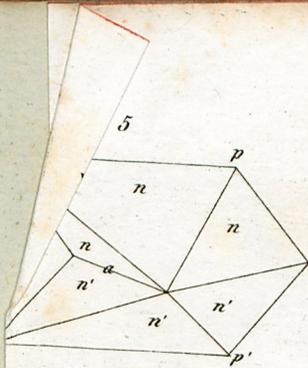


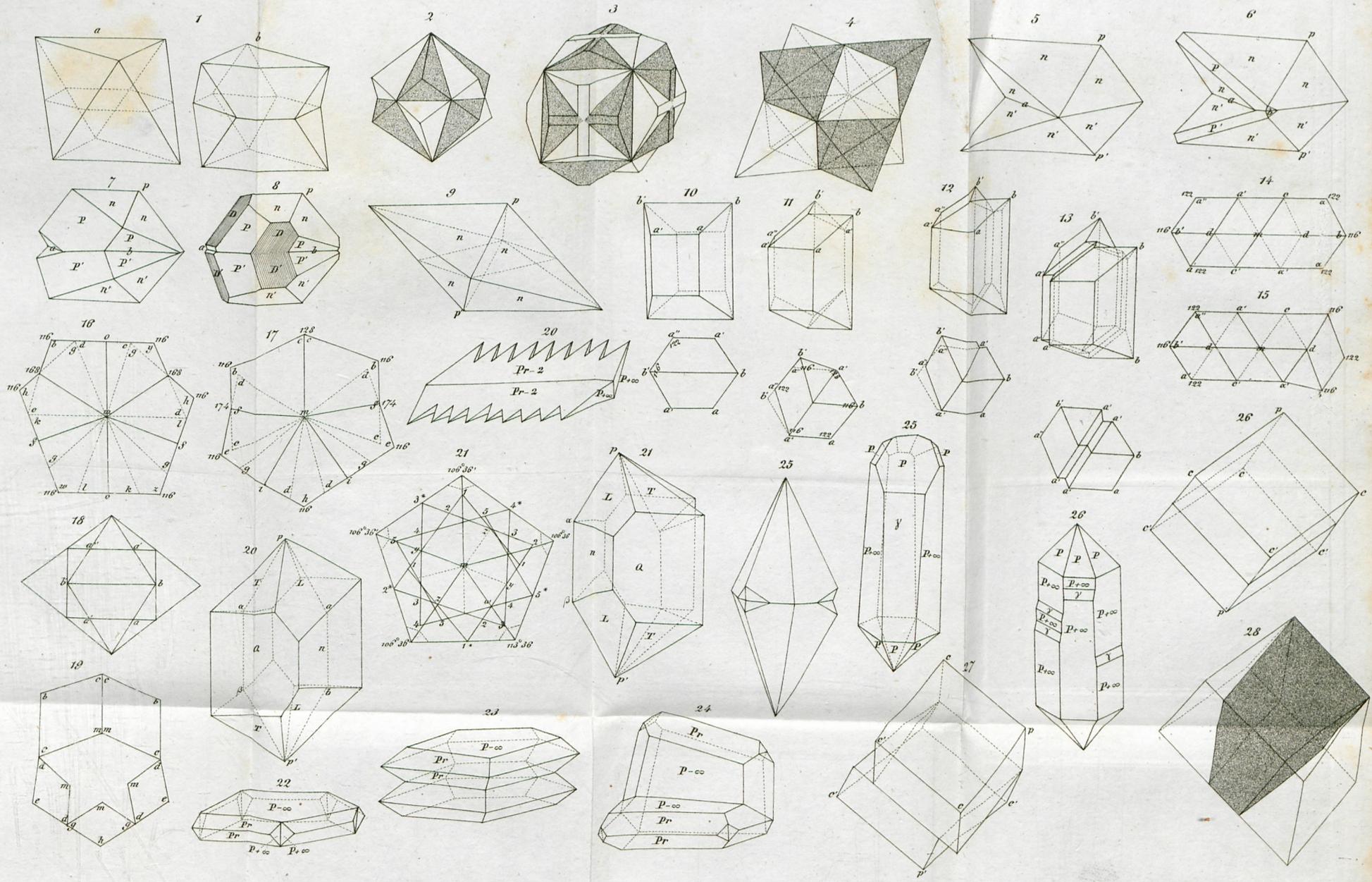
35

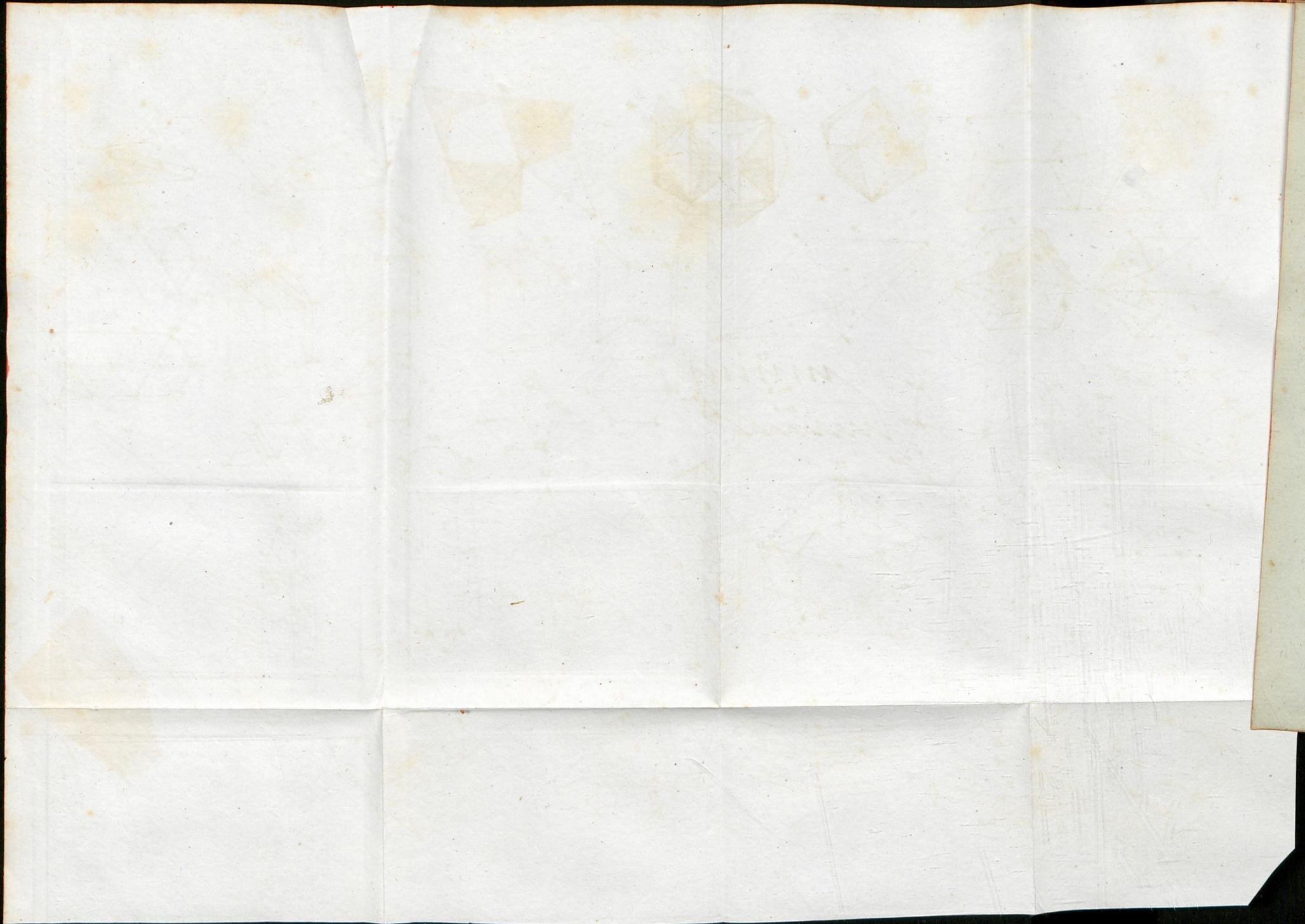


















S

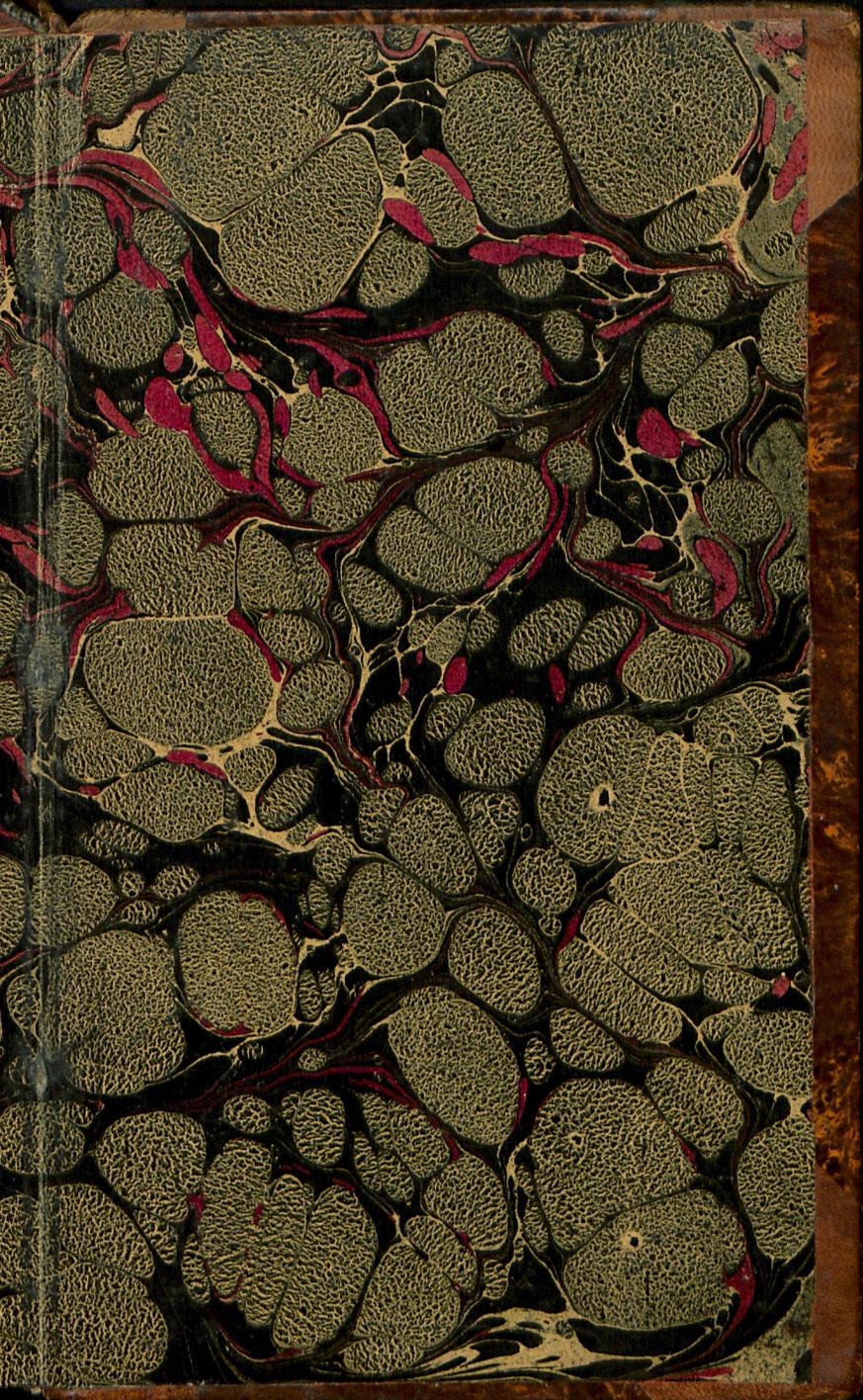
X27 36088

QVD Ger G

— Sa 3209a









Grundriß
der
Kry stallkunde.

Für
Vorträge und Privatunterricht
bearbeitet

von
E. F. Germar,
Doktor der Philosophie, ord. Professor der Mineralogie,
mehrerer gelehrten Gesellschaften Mitgliede.

Farbkarte #13

B.I.G.

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black