THÉORIE
DU
CHOC DES CORPS.

Par M. l'Abbé GIRAULT DE KOUDOU,
Licencié en Théologie, de la Société Royale, ancien Principal du College de Cornouailles, Professeur de Philosophie en l'Université de Paris, au College Royal de Navarre.

A PARIS,
Chez la veuve BARROIS & Fils, Libraires, quai des Augustins.

M. DCC. LXX.
Avec Approbation, & Privilege du Roi.

AVANT-PROPOS.

LA matiere de cette Théorie a été traitée par grand nombre d'Auteurs : les uns n'ont appliqué le calcul qu'à certains phénomenes, & ont déduit les autres par des raiſonnemens métaphyſiques ; dans d'autres ouvrages, on emploie des conſtructions géométriques pour repréſenter les effets de la colliſion, & pour en déterminer les regles & les circonſtances.

Obligé par état d'éclaircir les différentes parties de Méchanique, j'ai cherché les principes d'où dérive tout ce qui appartient au choc des corps. J'ai réduit ces principes en formules algébriques. La généralité de ces formules, la facilité de les découvrir, l'uniformité de leur application à tous les cas particuliers, ſont les avantages qui réſultent de la méthode que j'ai ſuivie.

AVANT-PROPOS.

La troisieme Partie de cette Théorie est absolument neuve; du moins je ne connois aucun ouvrage écrit sur le même sujet. Dans les deux premieres Parties, j'ai inséré plusieurs propositions ou applications qui ne se trouvent point ailleurs : telles sont celles des n^{os}. 10, 12, 13, 15, 16, 20, 21, 26, 54, 55, 60, 61, 62, 63, & le reste de la seconde Partie, depuis le n°. 92, où les propositions sont déduites des formules générales, sans considérer séparément les différentes directions primitives des corps.

Les Auteurs qui ont écrit sur cette matiere, & qui y ont répandu des lumieres dont je me suis fait un devoir de profiter, sont MM. Bernoully, Wolf, Bezout, l'Abbé Bossut.

M. d'Alembert a un droit universel sur la reconnoissance de ceux qui cultivent les sciences : c'est dans les ouvrages de ce grand Géometre que se trouvent analysés les vrais principes de toutes les sciences; c'est à son génie qu'est due la révolution qui commence à s'accomplir, & qui rappellera à des formules algébriques toutes les questions relatives à la Méchanique, à l'Astronomie, & aux autres parties de la Physique.

EXTRAIT DES REGISTRES
de l'Académie royale des Sciences,

du 12 Juillet 1769.

MESSIEURS DUSÉJOUR & BAILLY, qui avoient été nommés pour examiner la *Théorie du choc des corps*, par M. l'Abbé GIRAULT DE KOUDOU, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé que cet ouvrage méritoit de paroître avec ſon approbation. En foi de quoi j'ai ſigné le préſent certificat. A Paris, ce 18 Août 1769. *Signé*, GRANDJEAN DE FOUCHY, Secrét. perp. de l'Académie royale des Sciences.

APPROBATION.

J'AI lu, par ordre de Monſeigneur le Chancelier, un Ouvrage intitulé, *Théorie du choc des corps*; & il m'a paru que la publication n'en pouvoit qu'être utile au Public. A Paris ce 27 Octobre 1769.

MONTUCLA.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE, à nos amés & féaux Conſeillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra : SALUT. Notre amé le sieur Abbé GIRAULT DE KEOUDOU Nous a fait exposer qu'il desireroit faire imprimer & donner au public un Ouvrage qui a pour titre, *Théorie du choc des corps*, s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Permission pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer ledit Ouvrage autant de fois que bon lui semblera, & de le faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de trois années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes, FAISONS défenses à tous Imprimeurs, Libraires, & autres personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance. A LA CHARGE que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impression dudit Ouvrage sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres ; que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725, à peine de déchéance de la présente Permission ; qu'avant de l'exposer en vente, le Manuscrit qui aura servi de copie à l'impression dudit Ouvrage, sera remis, dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très cher & féal Chevalier, Chancelier, Garde des Sceaux de France, le Sieur de MAUPEOU ; qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle dudit Sieur de MAUPEOU ; le tout à peine de nullité des Présentes. DU CONTENU desquelles Vous MANDONS & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayant causes, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. VOULONS qu'à la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, foi soit ajoutée comme à l'original. COMMANDONS au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission; & nonobstant clameur de haro, charte Normande, & lettres à ce contraires; Car tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris, le treizieme jour du mois de Décembre, l'an de grace mil sept cent soixante-neuf, & de notre regne le cinquante-cinquieme.

PAR LE ROI EN SON CONSEIL.

Signé, LE BEGUE.

Registré sur le Registre de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, Fol. 70, *conformément au Reglement de* 1723, *qui fait défenses, art.* 41, *à toutes personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter, faire afficher aucuns livres pour les vendre en leurs noms, soit qu'ils s'en disent les auteurs ou autrement, & à la charge de fournir à la susdite Chambre neuf exemplaires prescrits par l'art.* 108 *du même Réglement. A Paris, ce* 15 *Décembre* 1769. Signé, BRIASSON, Syndic.

THÉORIE

THÉORIE
DU CHOC DES CORPS.

PROPOSITIONS PRÉLIMINAIRES.

PREMIERE PROPOSITION.

I. Dans le mouvement uniforme, la meſure de la vîteſſe eſt le quotient de l'eſpace diviſé par le tems.

Démonſtration. Le corps va plus ou moins vîte, ſelon que, dans un même tems, il parcourt plus d'eſpace, ou qu'il emploie moins de tems à parcourir le même eſpace : or le quotient de l'eſpace diviſé par le tems croît ou décroît dans le même rapport; donc la vraie mesure de la vîtesse est l'espace divisé par le tems employé à le parcourir.

COROLLAIRE I.

II. Soient la vîtesse $= V$,
le tems $= T$,
l'espace $= S$;
on aura $V = \frac{S}{T}$.

COROLLAIRE II.

III. Il faut une vîtesse infinie, soit pour parcourir un espace infini dans un tems fini, soit pour parcourir un espace fini dans un tems infiniment petit.

Dém. Dans le premier cas, $V = \frac{\infty}{1} = \infty$: dans le second, $V = \frac{1}{\frac{1}{\infty}} = \infty$.

COROLLAIRE III.

IV. Une vîtesse infiniment petite suffit pour parcourir un espace fini dans un tems infini, ainsi que pour un espace infiniment petit dans un tems fini.

Dém. Dans le premier cas, $V = \frac{1}{\infty}$: dans le second, $V = \frac{\frac{1}{\infty}}{1} = \frac{1}{\infty}$.

COROLLAIRE IV.

V. De ces trois choses, V, S, T, deux étant données, il est aisé de trouver la troiſieme, puiſque l'on a ces trois équations,

$$V = \frac{S}{T},$$

$$S = VT,$$

$$T = \frac{S}{V}.$$

PROPOSITION II.

VI. Les vîteſſes de deux corps ſont entre elles directement comme les eſpaces, & réciproquement comme les tems.

Dém. Selon le n°. II, $V = \frac{S}{T}$:
par la même raiſon . . . $u = \frac{s}{t}$;
donc . . . . $V \cdot u :: \frac{S}{T} \cdot \frac{s}{t}$.

COROLLAIRE.

VII. De cette propoſition on déduira l'équation générale $sVT = Sut$, qui ſert de baſe aux différens rapports que l'on peut chercher entre les eſpaces, les tems & les vîteſſes.

PROPOSITION III.

VIII. La meſure de la force d'un corps, ou de ſon mouvement, eſt le produit de ſa maſſe par ſa vîteſſe.

Dém. Le corps ne ſauroit aller plus ou moins vîte qu'aucune de ſes parties; donc il faut répéter la vîteſſe du corps autant de fois qu'il y a de parties dans la maſſe, ou multiplier la maſſe par la vîteſſe.

COROLLAIRE I.

IX. Soit la force $= F$,
la maſſe $= M$,
la vîteſſe $= V$;
on aura l'équation $F = MV$.

COROLLAIRE II.

X. La force d'une maſſe finie ne peut être qu'infiniment petite, ſi la vîteſſe eſt infiniment petite.

Dém. Dans cette hypotheſe,

$$F = 1 \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty}.$$

C'eſt ſur ce corollaire qu'eſt fondée la différence entre la force de *percuſſion* & celle de *ſimple preſſion*.

COROLLAIRE III.

XI. Une vîteſſe finie, communiquée à une maſſe infiniment petite, ne peut produire qu'une force infiniment petite.

Dém. Dans cette hypotheſe, $M = \frac{1}{\infty}$, & $V = 1$; donc $F = \frac{1}{\infty} \times 1 = \frac{1}{\infty}$.

COROLLAIRE IV.

XII. Le *lieu géométrique* du mouvement uniforme eſt l'aire d'un rectangle, dont la hauteur exprimeroit la vîteſſe, & la baſe exprimeroit la maſſe.

Dém. L'aire de ce rectangle eſt le produit de ſa baſe par ſa hauteur; donc elle eſt égale à $MV = F$; donc, &c.

COROLLAIRE V.

XIII. De ces trois choſes, F, M, V, deux étant connues, il eſt aiſé de connoître la troiſieme, puiſque l'on a ces trois équations,

$$F = MV,$$

$$V = \frac{F}{M},$$

$$M = \frac{F}{V}.$$

COROLLAIRE VI.

XIV. On peut auſſi dire que $F = \frac{MS}{T}$.

Dém. Par la troiſieme propoſition,

$$F = MV:$$

mais (II) $V = \frac{S}{T}$;

donc, ſubſtituant, $F = \frac{MS}{T}$.

PROPOSTION IV.

XV. Les forces de deux corps sont en raison composée de leurs masses & de leurs vîtesses.

Dém. Selon la troisieme proposition,

$$F = MV,$$

&, par la même raison, $f = mu$; donc . . . $F \cdot f :: MV \cdot mu$.

COROLLAIRE I.

XVI. De cette proposition suit l'équation générale $Fmu = fMV$, qui sert à déterminer les différens rapports des forces, des masses & des vîtesses.

COROLLAIRE II.

XVII. De la même proposition, en y joignant l'article XIV, on déduira cette autre équation, $FTms = ftMS$, qui a aussi son application dans les problêmes de Dynamique.

PROPOSITION V.

XVIII. La mesure de la vîtesse relative est toujours la différence ou la somme des vîtesses absolues.

Dém. On appelle *relative* la vîtesse par laquelle un corps s'approche d'un autre : or, si les corps vont en même ſens, ils ne s'approchent l'un de l'autre que par la différence de leurs vîteſſes ; mais s'ils viennent en ſens contraire, les deux vîteſſes abſolues concourent à les approcher ; donc, &c.

COROLLAIRE I.

XIX. Si l'un des corps eſt en repos, la vîteſſe relative eſt la même que la vîteſſe abſolue.

Dém. Selon la cinquieme propoſition,

$$R = V \mp u:$$

mais, par hypotheſe, $u = 0$;
donc . . . . : . $R = V$.

COROLLAIRE II.

XX. La vîteſſe relative eſt nulle, lorſque les corps vont en même ſens & que leurs vîteſſes abſolues ſont égales.

Dém. Dans cette hypotheſe, $R = V - u$: de plus, $V = u$; donc $V - u = 0$; donc $R = 0$.

COROLLAIRE III.

XXI. Si les corps viennent en ſens contraires avec des vîteſſes égales, alors la vîteſſe relative eſt double de la vîteſſe abſolue de chaque corps.

Dém. Dans cette ſuppoſition, $R = V + u$:

pareillement $V = u$; donc $V + u = 2V = 2u$; donc $R = 2V = 2u$.

PROBLEME.

XXII. Connoiſſant les vîteſſes & la diſtance de deux corps mus ſur une même ligne, trouver le point où ils ſe rencontreront.

Solution. Soient les vîteſſes V, u,
la diſtance d.

1°. Sils vont en même ſens : ſoit l'eſpace que le premier parcourt $= x$; l'eſpace à parcourir en même tems par le ſecond ſera égal à $d + x$; &, par l'art. VII, on aura

$$V \cdot u :: d + x \cdot x;$$

donc . . $Vx - ux = ud$;

donc . . . . $x = \frac{ud}{V - u}$.

Selon cette ſol. ſi $d = 30$ pieds,
$V = 3$ p. par ſeconde,
$u = 2$,
on voit que $x = 60$ pieds.

2°. S'ils viennent en ſens contraires : ſoit x l'eſpace parcouru en vertu de u; l'eſpace décrit en vertu de V ſera $d - x$:

ainſi . . $V \cdot u :: d - x \cdot x$;

donc . . $Vx + ux = ud$;

donc . . . $x = \frac{ud}{V + u}$.

Dans l'exemple précédent, $x = 12$ pieds.

PREMIERE PARTIE.

Sur les corps ſans reſſort.

PREMIER AXIOME.

1. LORSQUE deux corps vont en même ſens, le mouvement gagné dans le choc par le plus lent, eſt perdu par le corps choquant.

AXIOME II.

2. Si les corps viennent en ſens contraires, le choc détruira dans l'un & l'autre des quantités égales de mouvement.

COROLLAIRE.

3. Après le choc, il ne reſtera que la différence des mouvemens primitifs.

THÉOREME.

4. Si deux corps ſe choquent, ou en même ſens, ou en ſens contraires, la ſomme ou la différence des mouvemens ſera la même avant & après le choc.

Démonſtration. Dans le premier cas, il n'y a point de mouvement perdu (1) : dans le ſecond cas, la même différence ſubſiſte (3); donc, &c.

COROLLAIRE.

5. Soient les maſſes M, m,
les vîteſſes V, u:
la quantité de mouvement, avant & après le choc, ſera $MV \pm mu$.

AXIOME III.

6. L'action mutuelle des corps dure juſqu'à ce qu'ils aient une même vîteſſe.

COROLLAIRE.

7. Soit cette vîteſſe commune $= c$: on aura (XIII) $c = \frac{MV \pm mu}{M + m}$.

PROBLEME I.

8. Déterminer les vîteſſes de M & de m après le choc.

Solution. Ces deux vîteſſes ſont égales (6); donc (7) chacune eſt $= \frac{MV \pm mu}{M + m}$.

PROBLEME II.

9. Déterminer la vîteſſe x perdue par M dans le choc.

Sol. Il eſt évident que M a perdu dans le choc toute ſa vîteſſe primitive, excepté ce qui lui en reſte; donc $x = V - c$: mais (7) $c = \frac{MV \pm mu}{M + m}$;

donc $x = V - \left(\frac{MV \pm mu}{M + m}\right) = \frac{mV \mp mu}{M + m}$.

COROLLAIRE.

10. Si M eſt un multiple quelconque q de m, la vîteſſe perdue dans le choc par M ſera la fraction $\frac{1}{q+1}$ de $V \mp u$.

Dém. Selon le n°. 9, $x = \frac{mV \mp mu}{M + m}$: mais, par hypotheſe, $M = mq$; donc

$$x = \frac{mV \mp mu}{mq + m} = \frac{V \mp u}{q + 1} = \frac{1}{q+1} \times (V \mp u).$$

Si, par exemple, $M = m$, la vîteſſe perdue par M ſera la demi-différence, ou la demi-ſomme des vîteſſes primitives, ſelon que les corps ſeront mus, ou en même ſens, ou en ſens contraires.

PROBLEME III.

11. Trouver la portion y de vîteſſe gagnée par m dans le choc.

Sol. 1°. Si les corps vont en même ſens avant le choc, il eſt clair que la vîteſſe gagnée par m n'eſt que l'excès de la vîteſſe commune ſur la vîteſſe primitive; donc $y = c - u$:

mais lorſque les corps vont en même ſens ; on ſait (7) que $c = \frac{MV + mu}{M + m}$;

donc $y = \frac{MV + mu}{M + m} - u = \frac{MV - Mu}{M + m}$.

2°. S'ils viennent en ſens contraires, il doit arriver la même choſe que ſi m, étant en repos, étoit frappé par M avec la ſomme des vîteſſes primitives : or, dans cette ſuppoſition, le mouvement, avant & après le choc, ſeroit (4) $MV + Mu$; donc (7) la vîteſſe de m, après le choc, ſeroit $\frac{MV + Mu}{M + m}$; donc, lorſque les corps viennent en ſens contraires, la vîteſſe de m, après le choc, eſt réellement (8) $\frac{MV + Mu}{M + m}$: or, lorſque les corps viennent en ſens contraires, la vîteſſe m, après le choc, eſt la même que la vîteſſe acquiſe dans le choc, puiſque toute ſa vîteſſe primitive eſt détruite; donc $y = \frac{MV + Mu}{M + m}$; ainſi, dans les deux cas, la vîteſſe gagnée par m ſera $y = \frac{MV \mp Mu}{M + m}$.

COROLLAIRE I.

12. Si M eſt un multiple quelconque q de m, la vîteſſe gagnée dans le choc par m ſera la fraction $\frac{q}{q + 1}$ de $V \mp u$.

Dém. Selon le n°. 11, $y = \frac{MV \mp Mu}{M+m}$: or, par hypothese, $M = mq$; donc, substituant, $y = \frac{mqV \mp mqu}{mq+m} = \frac{q}{q+1} \times (V \mp u.$

Soit, par exemple, $M = m$: dans cette supposition, la vîtesse gagnée par le corps choqué sera la demi différence, ou la demi-somme des vîtesses primitives.

Corollaire II.

13. Lorsque M est multiple de m, la somme des vîtesses perdue par M, & gagnée par m, est toujours la différence, ou la somme des vîtesses primitives.

Dém. La vîtesse perdue par M est (10)

$$x = \frac{1}{q+1} \times (V \mp u):$$

la vîtesse gagnée par m est (12)

$$y = \frac{q}{q+1} \times (V \mp u): \text{ or}$$

$$\frac{q}{q+1} \times (V \mp u) + \frac{1}{q+1} \times (V \mp u) = V \mp u;$$

donc, &c.

Premiere Regle.

14. Si m est en repos avant le choc, les deux corps auront, après le choc, des vîtesses égales.

Dém. La vîtesse de chacun, après le choc, est (8) $\frac{MV \pm mu}{m+m}$: mais, par hypothese, $u = 0$;

donc la vîtesse de chaque corps, après le choc, sera $\frac{MV}{M+m}$.

COROLLAIRE I.

15. Si m est un multiple quelconque q de M, la vîtesse de chacun, après le choc, sera la fraction $\frac{1}{q+1}$ de V.

Dém. Par hypothese, $m = Mq$: mais (14) la vîtesse de chaque corps est $\frac{MV}{M+m}$; donc substituant Mq au lieu de m, on aura

$$c = \frac{MV}{M+Mq} = \frac{V}{q+1} = \frac{1}{q+1} \text{ de } V.$$

Ainsi, m étant successivement supposée égale, double, triple, &c. ou infinie par rapport à M, les vîtesses de chaque masse, après le choc, seront successivement

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c. ou $\frac{1}{\infty}$ de V.

COROLLAIRE II.

16. Si M est un multiple quelconque q de m, la vîtesse de chaque corps, après le choc, sera la fraction $\frac{q}{q+1}$ de V.

Dém. La vîtesse de chaque corps, après le choc, est (14) $\frac{MV}{M+m}$: mais, par supposition, $M = mq$; donc, substituant,

$$c = \frac{mqV}{mq+m} = \frac{qV}{q+1} = \frac{q}{q+1} \text{ de } V.$$

Ainsi, M étant successivement supposée égale, double, triple, &c. ou infinie par rapport à m, la vîtesse commune sera successivement $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, &c. ou $\frac{1}{1}$ de V.

Regle II.

17. Si, avant le choc, les deux corps vont en même sens, après le choc ils suivront leur premiere direction avec des vîtesses égales.

Dém. Puisque les corps vont en même sens avant le choc, la vîtesse de M, après le choc, sera (8) $\frac{MV+mu}{M+m}$: pareillement celle de m sera $\frac{MV+mu}{M+m}$; donc les vîtesses seront égales & positives.

Corollaire I.

18. Si les masses sont égales, la vîtesse de chacune, après le choc, sera la demi-somme des vîtesses primitives.

Dém. La vîtesse de chaque corps, après le choc, est (17) $\frac{MV+mu}{M+m}$: mais, par hypothese, $M=m$; donc la vîtesse, après le choc, sera $\frac{MV+Mu}{2M}=\frac{V+u}{2}$.

COROLLAIRE II.

19. Dans la même supposition, la vîtesse de chaque corps, après le choc, sera moyenne proportionnelle arithmétique entre les vîtesses primitives.

Dém. La moyenne proportionnelle arithmétique entre V & u est $= \frac{V+u}{2}$.

COROLLAIRE III.

20. Dans la même hypothese, si V est un multiple quelconque q de u, la vîtesse de chaque corps, après le choc, sera la fraction $\frac{q+1}{2}$ de u.

Dém. Par la nouvelle supposition $V = uq$; donc $\frac{V+u}{2} = \frac{uq+u}{2} = \frac{q+1}{2} u$.

Ainsi, faisant successivement V double, triple, quadruple, &c. ou infini par rapport à u, la vîtesse commune sera successivement $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$, &c. ou ∞ de u.

COROLLAIRE IV.

21. Dans l'hypothese du corollaire III, si q est un nombre impair, la vîtesse de chaque corps, après le choc, sera toujours un multiple de u.

Mais

Mais si q est un nombre pair, la vîtesse commune ne pourra jamais être exprimée par un nombre entier.

Regle III.

22. Lorsque deux corps mus en sens contraires se choquent avec des mouvemens égaux, ils seront en repos après le choc.

Dém. La vîtesse de chacun, après le choc, est (8) $\frac{MV - mu}{M + m}$:

mais, par hypothese, $MV = mu$;

donc $$\frac{MV - mu}{M + m} = 0.$$

Corollaire.

23. La même chose arrivera, s'ils se rencontrent avec des masses qui soient en raison renversée des vîtesses.

Dém. Par hypothese, $M \cdot m :: u \cdot V$; donc $MV = mu$; donc, &c.

Regle IV.

24. Si les corps se rencontrent avec des forces inégales, ils suivront, après le choc, la direction du plus fort, avec des vîtesses égales.

Dém. La vîtesse de chacun, après le choc, est (8) $\frac{MV - mu}{M + m}$; donc, 1°. les vîtesses seront égales; 2°. $\frac{MV - mu}{M + m}$ ſera poſitive, puiſque $MV > mu$.

COROLLAIRE I.

25. Si les maſſes ſont égales, la vîteſſe de chacune, après le choc, ſera la demi-différence des vîteſſes primitives.

Dém. La vîteſſe de chaque corps, après le choc, eſt (24) $\frac{MV - mu}{M + m}$: mais, par ſuppoſition, $M = m$; donc la vîteſſe ſera

$$\frac{MV - Mu}{2M} = \frac{V - u}{2}.$$

COROLLAIRE II.

26. Dans la même ſuppoſition, ſi V eſt un multiple quelconque q de u, la vîteſſe commune, après le choc, ſera la fraction $\frac{q-1}{2}$ de u.

Dém. Dans la même ſuppoſition, la vîteſſe de chaque corps, après le choc, eſt $\frac{V-u}{2}$: mais, par hypotheſe, $V = uq$; donc

$$\frac{V - u}{2} = \frac{uq - u}{2} = \frac{q - 1}{2} u.$$

Ainſi, V étant ſucceſſivement ſuppoſée double, triple, quadruple, &c. ou infinie par rapport à u, la vîteſſe commune ſera

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, &c. ∞ de u.

On peut faire ici la remarque du n°. 21.

COROLLAIRE III.

27. Si les vîtesses sont égales avant le choc, la vîtesse de chaque corps, après le choc, est à chacune des vîtesses primitives, comme la différence des masses est à leur somme.

Dém. Chaque vîtesse, après le choc, est (24) $c = \frac{MV - mu}{M + m}$:

mais, par hypothese, $V = u$; donc

$$c = \frac{MV - mV}{M + m}, \text{ ou } = \frac{Mu - mu}{M + m};$$

d'où il est aisé de déduire la proportion

$$c \cdot V :: M - m \cdot M + m,$$

ou $$c \cdot u :: M - m \cdot M + m.$$

SECONDE PARTIE.

Sur les corps à reſſort.

PRINCIPES GÉNÉRAUX.

PREMIER PRINCIPE.

28. LORSQUE les corps ſont parfaitement élaſtiques, la vîteſſe perdue par le choquant M eſt $= \frac{2mV \mp 2mu}{M+m}$.

Démonſtration. Dans le cas du reſſort parfait, la vîteſſe perdue par le corps choquant eſt double de celle qu'il auroit perdue s'il avoit été ſans reſſort, puiſque le reſſort en détruit autant que le choc: or la vîteſſe que M auroit perdue, s'il avoit été ſans reſſort, eſt (9) $\frac{mV \mp mu}{M+m}$; donc, dans le cas du reſſort parfait, la vîteſſe perdue ſera

$$\frac{2mV \mp 2mu}{M+m}.$$

COROLLAIRE I.

29. Si le choqué eſt en repos avant la

collision, la vîtesse perdue par M sera égale à $\frac{2mV}{M+m}$.

COROLLAIRE II.

30. Si les deux corps sont mus avant le choc, alors la vîtesse que perd M est à celle qu'il auroit perdue si m eût été en repos, comme la différence, ou la somme des vîtesses primitives est à la vîtesse de M avant le choc.

Dém. Dans le premier cas, la vîtesse perdue par M est (28) $\frac{2mV \mp 2mu}{M+m}$; dans le second cas, elle seroit (29) $\frac{2mV}{M+m}$: or

$$\frac{2mV \mp 2mu}{M+m} \cdot \frac{2mV}{M+m} :: V \mp u \cdot V;$$

donc, &c.

THÉOREME I.

31. La vîtesse totale de M, après le choc, est $$x = \frac{MV - mV \pm 2mu}{M+m}.$$

Dém. Il est évident que M aura, après le choc, toute sa vîtesse primitive, excepté la portion qu'il en a perdue : or cette portion est (28) $\frac{2mV \mp 2mu}{M+m}$; donc

$$x = V - \left(\frac{2mV \mp 2mu}{M+m}\right) = \frac{MV - mV \pm 2mu}{M+m}.$$

COROLLAIRE.

32. Le corps M ſuivra ſa premiere direction, ſera réfléchi, ou en repos, après le choc, ſelon que $MV - mV \pm 2mu$ ſera poſitif, ou négatif, ou égal à zéro.

PRINCIPE II.

33. Dans le cas du reſſort parfait, la vîteſſe acquiſe par le choqué m eſt

$$\frac{2MV \mp 2Mu}{M+m}.$$

Dém. Dans le cas du reſſort parfait, la vîteſſe acquiſe par m eſt double de celle qu'il auroit acquiſe s'il avoit été ſans reſſort, puiſque le reſſort en produit autant que le choc : or la vîteſſe que m auroit acquiſe s'il avoit été ſans reſſort, eſt (11) $\frac{MV \mp Mu}{M+m}$; donc, dans le cas du reſſort parfait, la vîteſſe acquiſe par m ſera $\frac{2MV \mp 2Mu}{M+m}$.

COROLLAIRE I.

34. Si m eſt en repos avant le choc, la vîteſſe acquiſe ſera $\frac{2MV}{M+m}$.

COROLLAIRE II.

35. Lorſque les deux corps ſont mus avant le choc, la vîteſſe acquiſe par m eſt à celle

qu'il auroit acquiſe s'il avoit été en repos avant le choc, comme $V \mp u$ eſt à V.

Dém. Dans la premiere ſuppoſition, la vîteſſe acquiſe par m eſt (33)

$$\frac{2MV \mp 2Mu}{M+m};$$

dans la ſeconde hypotheſe, elle ſeroit (34)

$$\frac{2MV}{M+m}:$$

or $\frac{2MV \mp 2Mu}{M+m} \cdot \frac{2MV}{M+m} :: V \mp u \cdot V$; donc, &c.

Théoreme II.

36. La vîteſſe totale de m, après le choc, eſt $y = \frac{2MV \mp Mu \pm mu}{M+m}$.

Dém. Si les corps vont en même ſens avant le choc, m aura, outre ſa vîteſſe primitive, toute celle qu'il acquiert par le choc; donc ſa vîteſſe totale ſera $\frac{2MV \mp 2Mu}{M+m} + u$: s'ils viennent en ſens contraires, m n'aura que l'excès de la vîteſſe acquiſe ſur ſa vîteſſe primitive; donc ſa vîteſſe totale ſera

$$\frac{2MV \mp 2Mu}{M+m} - u;$$

donc, dans les deux cas, la vîteſſe totale de m ſera $y = \frac{2MV \mp 2Mu}{M+m} \pm u$; donc, réduiſant en fraction, $y = \frac{2MV \mp Mu \pm mu}{M+m}$.

Application des Principes généraux.

PREMIERE HYPOTHESE.

37. Je ſuppoſe le corps *m* en repos avant le choc.

COROLLAIRE I.

38. Dans cette hypotheſe, la vîteſſe de *M*, après le choc, ſera $\frac{MV - mV}{M + m}$.

Dém. La vîteſſe de *M*, après le choc, eſt (31) $\frac{MV - mV \pm 2mu}{M + m}$: mais, par hypotheſe, $u = 0$; donc cette vîteſſe ſe réduit à

$$\frac{MV - mV}{M + m}.$$

COROLLAIRE II.

39. Dans la même hypotheſe, la vîteſſe totale de *m*, après le choc, ſera $\frac{2MV}{M + m}$.

Dém. La vîteſſe de *m*, après le choc, eſt (36) $\frac{2MV \mp Mu \pm mu}{M + m}$: mais, par hypotheſe, $u = 0$; donc la vîteſſe de *m*, après le choc, devient $\frac{2MV}{M + m}$.

COROLLAIRE III.

40. Dans la même hypotheſe, la vîteſſe totale de *m*, après le choc, eſt égale à la

vîtesse acquise, puisque celle-ci est aussi (34) $\frac{2MV}{M+m}$.

Dans la supposition de m en repos avant le choc, il peut arriver trois choses : M peut être égal, plus grand, ou moindre que m.

PREMIERE REGLE.

41. Lorsque les masses sont égales, M sera en repos après le choc, & m sera mu avec toute la vîtesse primitive de M.

Dém. 1°. La vîtesse de M, après le choc, est (38) $\frac{MV - mV}{M+m}$: mais, par supposition, $M = m$; donc $\frac{MV - mV}{M+m} = 0$.

2°. La vîtesse de m, après le choc, est (39) $\frac{2MV}{M+m}$: mais, par supposition, $M = m$; donc $M + m = 2M$; donc $\frac{2MV}{M+m} = V$; ainsi la vîtesse de m, après le choc est $= V$.

COROLLAIRE I.

42. Dans une suite de globes égaux, A, B, C, D, E, F, si A agit sur B, après le choc F sera mu avec la vîtesse primitive de A; & tous les autres globes seront en repos.

Dém. Par le choc de A contre B, A reste en repos, & B prend toute la vîtesse primitive de A (41).

Pareillement, par le choc de B contre C, B est réduit au repos, & C prend toute la vîtesse de B.

La même chose arrivera dans le choc de C contre D, & ainsi des autres; donc, &c.

Ce phénomene, constaté par l'expérience, ne peut être arrêté par la contiguité des globes B, C, D, E; puisque, pendant toute l'opération du choc, les globes sont applatis, & par conséquent la contiguité nulle.

COROLLAIRE II.

43. Si le choc se fait par les deux globes A, B; alors les deux derniers E, F s'en vont, le reste étant en repos.

Dém. Par l'action de B sur C, le globe F doit s'en aller (42): pareillement, par l'action de A sur B, le globe E doit se mouvoir; donc, &c.

REGLE II.

44. Si le choquant a plus de masse que le choqué, I°. le choquant suivra toujours sa premiere direction.

Dém. La vîtesse de M, après le choc, est (38) $\frac{MV - mV}{M + m}$:

or, par hypot. $M > m$; donc $MV > mV$; ainsi la vîtesse de M, après le choc, sera positive.

45. II°. La vîtesse de M, après le choc, sera à la vîtesse primitive, comme la différence des masses est à leur somme.

Dém. La vîtesse de M, après le choc, est (38) $\frac{MV - mV}{M + m}$: or il est évident que

$$\frac{MV - mV}{M + m} \cdot V :: M - m \cdot M + m.$$

46. III°. La vîtesse de m, après le choc, sera plus grande que la vîtesse primitive de M; mais elle n'en sera jamais double.

Dém. 1°. La vîtesse de m, après le choc, est (39) $\frac{2MV}{M + m}$: mais, par supposition, $M > m$; donc $2M > M + m$; donc, &c.

2°. Si elle pouvoit valoir $2V$, on auroit alors $\frac{2MV}{M + m} = 2V$; & par conséquent

$$2MV = 2MV + 2mV:$$

or $2MV$ est nécessairement moindre que $2MV + 2mV$; donc, &c.

47. IV°. La vîtesse de m sera égale à la somme des vîtesses de M avant & après le choc.

Dém. La vîtesse de M, après le choc, est (38) $\frac{MV - mV}{M + m}$: sa vîtesse primitive est $= V$:

leur ſomme eſt $\frac{MV - mV}{M + m} + V = \frac{2MV}{M+m}$, qui (39) exprime la vîteſſe de m après le choc.

48. V°. La même vîteſſe de m, après le choc, eſt à la vîteſſe primitive de M, comme le double de M eſt à la ſomme des maſſes.

Dém. La vîteſſe de m, après le choc, eſt (39) $\frac{2MV}{M+m}$: or il eſt évident que

$$\frac{2MV}{M+m} \cdot V :: 2M \cdot M + m.$$

49. VI°. Les vîteſſes de M & de m, après le choc, ſeront entre elles comme la différence des maſſes eſt au double de M.

Dém. La proportion à démontrer eſt

$$\frac{MV - mV}{M+m} \cdot \frac{2MV}{M+m} :: M - m \cdot 2M,$$

dont l'exactitude eſt évidente.

COROLLAIRE I.

50. Si les maſſes des trois corps M, x, m décroiſſent, la vîteſſe de m, après le choc médiat, ſera plus grande qu'elle n'eût été après le choc immédiat de M.

Dém. La vîteſſe de m, après le choc immédiat de M, ſeroit (39) $\frac{2MV}{M+m}$; c'eſt-à-dire, le double du mouvement primitif du corps choquant, diviſé par la ſomme des maſſes : pareillement, quand x eſt choqué par M, sa vîtesse, après le choc, est $\frac{2MV}{M+x}$; donc son mouvement est (VIII) $\frac{2MVx}{M+x}$; & le double du mouvement de x, qui va choquer m, est $\frac{4MVx}{M+m}$; ainsi, divisant par $x+m$, la vîtesse de m, après le choc médiat, sera $\frac{4MVx}{Mx+x^2+Mm+mx}$: or cette fraction est plus grande que $\frac{2MV}{M+m}$.

Pour les comparer ensemble, je multiplie les deux termes de $\frac{2MV}{M+m}$ par $2x$; ce qui fait

$$\frac{4MVx}{2Mx+2mx}.$$

Ces deux fractions ayant maintenant même numérateur, la plus grande est celle dont le numérateur est moindre : or $(Mx+x^2+Mm+mx) < (2Mx+2mx)$; parceque, soustrayant la premiere quantité de la seconde, on trouve $2Mx+2mx-Mx-x^2-Mm-mx = Mx-x^2-Mm+mx$; différence réelle & positive, puisqu'elle est le produit de $M-x$ par $x-m$.

Corollaire II.

51. En augmentant le nombre des masses intermédiaires & décroissantes, on augmen-

tera auſſi la vîteſſe de m après le choc médiat.

Dém. Soient les corps M, x, y, z, m: la vîteſſe de y ſera plus grande après le choc de x, qu'après le choc de M (50): pareillement la vîteſſe de z ſera plus grande après le choc de y, qu'elle n'eût été après le choc de x; donc la vîteſſe de m croîtra ſans ceſſe par le choc des corps x, y, z.

PROBLEME I.

52. Déterminer le corps à interpoſer, pour que m ait la plus grande vîteſſe.

Sol. Soit le corps à interpoſer $= x$: la vîteſſe de m, après le choc de x, ſera (50)

$$\frac{4MVx}{Mx + x^2 + Mm + mx}:$$

mais, par hypotheſe, cette vîteſſe eſt un *maximum*; donc

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} 4M^2Vxdx + 4MVx^2dx + 4M^2mVdx + 4MVmxdx \\ -4M^2Vxdx - 8MVx^2dx \qquad\qquad - 4MVmxdx \end{array}\right.}{(Mx + x^2 + Mm + mx)^2} = 0;$$

donc, réduiſant & multipliant le ſecond membre par le dénominateur du premier, il reſte

$$4M^2Vmdx - 4MVx^2dx = 0;$$

donc, diviſant par $4MVdx$, on trouve

$$Mm - x^2 = 0,$$

ou $$Mm = x^2,$$

ou enfin $$M \cdot x :: x \cdot m;$$

ainſi le corps à interpoſer doit être moyen proportionnel géométrique entre M & m.

Pour s'aſſurer d'être parvenu à un *maximum* plutôt qu'à un *minimum*,

1°. Soient les maſſes $M, x, m \div\!\div 4 \cdot 2 \cdot 1$; on aura $\frac{4MVx}{Mx + x^2 + Mm + mx} = \frac{32V}{18} = \frac{16V}{9}$.

2°. Soient les maſſes $M, x, m = 4, 1, 1$; on aura $\frac{4MVx}{Mx + x^2 + Mm + mx} = \frac{16V}{10}$.

Or $\frac{16V}{10} < \frac{16V}{9}$; donc la vîteſſe de m, après le choc, eſt moindre, lorſque x n'eſt pas moyen proportionnel entre M & m; ainſi on eſt dans le cas du *maximum*, lorſque x eſt moyen proportionnel géométrique entre ces corps.

Remarque.

Après avoir découvert par l'analyſe la condition du corps à interpoſer pour obtenir le *maximum* de vîteſſe dans m, on peut auſſi employer la ſynthèſe pour démontrer la même vérité.

53. Il s'agit de faire voir que le corps x à interpoſer doit être moyen proportionnel géométrique, pour que m ait la plus grande vîteſſe.

En effet, interpoſons un autre corps z, plus grand, ou moindre que x : je dis que la vîtesse de m, après le choc de x, sera plus grande qu'après le choc de z.

Dém. La vîtesse de m, après le choc de x, est (50) $\frac{4MVx}{Mx + x^2 + Mm + mx}$: pareillement, après le choc de z, elle sera

$$\frac{4MVz}{Mz + z^2 + Mm + mz}:$$

mais, par supposition, $M \cdot x :: x \cdot m$; donc $Mm = x^2$; donc, substituant x^2 au lieu de Mm dans les deux fractions, on aura

$$1^o. \quad \frac{4MVx}{Mx + 2x^2 + mx},$$

$$2^o. \quad \frac{4MVz}{Mz + z^2 + x^2 + mz};$$

donc, divisant tous les termes de la premiere fraction par x, & tous ceux de la seconde par z, on a

$$1^o. \quad \frac{4MV}{M + m + 2x},$$

$$2^o. \quad \frac{4MV}{M + m + z + \frac{x^2}{z}}.$$

Puisque ces deux fractions ont même numérateur, elles seront entre elles réciproquement comme leurs dénominateurs : ainsi

la vîtesse de m, après le choc de x,
est à sa vîtesse après le choc de z;

comme

comme $M + m + z + \frac{x^2}{z}$
est à $M + m + 2x$,
& par conséquent
comme $Mz + mz + z^2 + x^2$
est à $Mz + mz + 2xz$:
or $Mz + mz + z^2 + x^2 > Mz + mz + 2xz$;
car, soustrayant la seconde quantité de la premiere, il reste
$Mz + mz + z^2 + x^2 - Mz - mz - 2xz = z^2 - 2xz + x^2$,
qui est une différence positive, puisqu'elle est le quarré de $x - z$, ou de $z - x$.

Corollaire.

54. Si les masses M & m sont peu différentes, on obtiendra aussi un *maximum* de vîtesse, par l'interposition d'un corps moyen proportionnel arithmétique.

Dém. Il suffit de faire voir qu'entre des grandeurs peu différentes, la moyenne proportionnelle arithmétique est égale à la géométrique, ou que les quarrés de ces moyennes proportionnelles sont égaux.

Soient les grandeurs peu différentes a, $a \pm d$: le quarré de la moyenne proportionnelle géométrique est $a^2 \pm ad$:
la moyenne proportionnelle arithmétique est égale à $a \pm \frac{d}{2}$;

donc ſon quarré ſera $a^2 \pm ad + \frac{d^2}{4}$:
or $a^2 \pm ad = a^2 \pm ad + \frac{d^2}{4}$, puiſque $\frac{d^2}{4}$ eſt à négliger, à cauſe de la petiteſſe de d.

PROBLEME II.

55. Dans une ſuite géométrique décroiſſante, où le quotient ſoit q, & le nombre des corps n, trouver la vîteſſe ω du dernier corps après le choc.

Solution. Soit la ſuite

$$\div\!\div\, mq^n \cdot mq^{n-1} \cdot mq^{n-2} \cdot mq^{n-3} \cdot mq^{n-4} \ldots mq^{n-n}.$$

Par ſuppoſition, la vîteſſe du choquant mq^n eſt $= V$.

Celle de mq^{n-1} eſt (50) égale à

$$\frac{2mq^nV}{mq^n + mq^{n-1}} = \frac{2qV}{q+1}.$$

Pour avoir celle de mq^{n-2}, ſelon le nº. 50, je multiplie $\frac{2qV}{q+1}$, vîteſſe du corps précédent, par ſa maſſe mq^{n-1} : je double cette quantité, & je diviſe le tout par la ſomme des maſſes; ce qui donne, pour la vîteſſe de mq^{n-2} après le choc, la quantité

$$\frac{\frac{2qV}{q+1} \times mq^{n-1} \times 2}{mq^{n-1} + \quad {}^{n-2}} = \frac{4q^2V}{(q+1)\times(q+1)} = \frac{4q^2V}{(q+1)^2}.$$

Par la même raiſon, celle de mq^{n-3} ſera

$$\frac{2 \times \frac{4q^2V}{(q+1)^2} \times mq^{n-2}}{mq^{n-2} + mq^{n-3}} = \frac{8q^3V}{(q+1)^3},$$

& ainſi des autres.

Donc les vîteſſes ſucceſſives forment la ſuite géométrique

$$\div\!\!\div V . \frac{2qV}{q+1} . \frac{4q^2V}{(q+1)^2} . \frac{8q^3V}{(q+1)^3} \ldots \omega,$$

dans laquelle le quotient eſt $= \frac{2q}{q+1}$.

Ainſi le dernier terme de cette ſuite exprimera la vîteſſe du dernier corps après le choc.

On ſait que dans toute ſuite géométriqu[e]

$$\omega = AQ^{n-1};$$

donc ici $\omega = V \times \frac{2^{n-1}q^{n-1}}{(q+1)^{n-1}} = \frac{2^{n-1}q^{n-1}V}{(q+1)^{n-1}}$.

Ainſi, le nombre des corps étant n, & le quotient de la ſuite géométrique décroiſſante étant q, la vîteſſe du dernier corps, après le choc, ſera

$$\omega = \frac{2^{n-1}q^{n-1}V}{(q+1)^{n-1}}.$$

D'où l'on déduit ce nouveau Théorême:

» Le produit de la vîteſſe primitive du
» choquant par la puiſſance $n-1$ du double

» du quotient de la ſuite, étant diviſé par la
» même puiſſance de $q+1$, exprime la vî-
» teſſe du dernier corps après le choc.

56. Exemple. Soient 100 maſſes décroiſſantes en progreſſion double, dont la premiere ait un dégré de vîteſſe; trouver la vîteſſe du dernier corps après le choc.

Sol. Ici $V = 1,$
$q = 2$
$n = 100:$

mais (55) $\omega = \frac{2^{n-1} q^{n-1} V}{(q+1)^{n-1}};$

donc, ſubſtituant,

$$\omega = \frac{4^{99}}{3^{99}}.$$

Le logarithme de 4 eſt 0, 6020600;
celui de 3 eſt 0, 4771213:
je ſouſtrais le ſecond du premier;
la différence eſt 0, 1249387:
je multiplie cette différence par l'expoſant 99;
le produit ſera 12, 3689313.
Mais ce logarithme eſt plus grand que celui des Tables.

Je retranche 9 de la caractériſtique; ce qui le réduit à 3, 3689313, auquel répond à peu près le nombre 2338.

Mais, parceque de la caractériſtique du logarithme j'ai retranché 9, il faut écrire neuf zéros à la ſuite du nombre trouvé 2338 ; ainſi la 99^e puiſſance de $\frac{4}{3}$ ſera

$$2338000000000;$$

& par conſéquent la vîteſſe du centieme corps, après le choc, ſera

$$\omega = 2338000000000.$$

57. Cet exemple ſuffit pour concevoir l'augmentation prodigieuſe de vîteſſe qui arrive dans le choc des corps élaſtiques, puiſqu'un ſeul dégré de vîteſſe propagée par une ſuite de 100 corps, en engendre 2338000000000 dégrés.

Corollaire I.

58. Quand tous les corps de la ſuite ſont égaux, il n'y a point d'augmentation de vîteſſe.

Dém. En ce cas, $q = 1$; donc, ſubſtituant dans l'équation de la vîteſſe finale, on trouve $\omega = \frac{2^{n-1} \times 1^{n-1} V}{(1+1)^{n-1}} = \frac{2V}{2} = V$.

Corollaire II.

59. L'augmentation de vîteſſe dans m, après le choc des corps interpoſés, dépend du nombre de ces corps, & de la grandeur du quotient qui regne dans la ſuite.

Dém. Par la ſuppoſition, $q > 1$; donc

$2q > q+1$; ainsi toutes les puissances entieres de $2q$ seront plus grandes que les puissances semblables de $q+1$.

De plus, si le nombre des corps est augmenté, la puissance $n-1$ de $2q$ sera plus grande. Donc, &c.

PROBLEME III.

60. Trouver la somme S de toutes les vîtesses qui ont existé dans chacun des corps de la suite.

Sol. La vîtesse du premier corps est $= V$:
celle du dernier est $= \frac{2^{n-1} q^{n-1} V}{(q+1)^{n-1}}$:
le nombre des termes est $= n$:
le quotient de la suite des vîtesses est $= \frac{2q}{q+1}$;
ainsi il ne s'agit que de trouver la somme d'une suite géométrique, dont on connoît les extrêmes, le quotient, & le nombre des termes.

Et comme on demande une expression générale de la somme de toutes les vîtesses, il faut exécuter toute l'opération.

On sait que, dans toute suite arithmétique, $S = \frac{\omega Q - A}{Q - 1}$;
donc, substituant les valeurs de A & Q

prises dans la question présente, on voit d'abord que

$$\omega Q = \frac{2^{n-1} q^{n-1} V}{(q+1)^{n-1}} \times \frac{2q}{q+1} = \frac{2^n q^n V}{(q+1)^n};$$

donc

$$\omega Q - A = \frac{2^n q^n V}{(q+1)^n} - V = \frac{(2^n q^n - (q+1)^n) \times V}{(q+1)^n}:$$

pareillement $Q = \frac{2q}{q+1};$

donc $Q - 1 = \frac{2q}{q+1} - 1 = \frac{q-1}{q+1};$

donc

$$\frac{\omega Q - A}{Q - 1} = \frac{(2^n q^n - (q+1)^n) \times V}{(q+1)^n} \text{ divisé par } \frac{q-1}{q+1};$$

donc

$$\frac{\omega Q - A}{Q - 1} = \frac{(2^n q^n \times (q+1) - (q+1)^n \times (q+1)) \times V}{(q+1)^n \times (q-1)};$$

donc

$$\frac{\omega Q - A}{Q - 1} = \frac{(2^n \times (q^{n+1} + q^n) - (q+1)^{n+1}) \times V}{(q+1)^n \times (q-1)};$$

ainsi $S = \frac{(2^n \times (q^{n+1} + q^n) - (q+1)^{n+1}) \times V}{(q+1)^n \times (q-1)}.$

61. Exemple. Soient les masses $\div\, 8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1$:
soit $V = 1$;

on aura $S = \frac{16 \times (32 + 16) - 243}{81} = \frac{525}{81} = 6\frac{13}{27}.$

COROLLAIRE I.

62. La vîteſſe produite par le reſſort dans le choc de ces quatre corps eſt $= 5 \frac{13}{27}$.

COROLLAIRE II.

63. La ſomme des vîteſſes des corps intermédiaires eſt $= 3 \frac{3}{27}$.

Dém. La vîteſſe du premier corps eſt, par ſuppoſition, $= 1$.

Celle du dernier corps eſt (55) $= 2 \frac{10}{27}$.

Retranchant ces deux nombres de $6 \frac{13}{27}$, il reſte $3 \frac{3}{27}$.

REGLE III.

64. Si la maſſe du corps choquant eſt moindre que celle du choqué,

1°. Le corps M ſera réfléchi.

Dém. La vîteſſe de M, après le choc, eſt (38) $\frac{MV - mV}{M + m}$:

mais, par ſuppoſition, $M < m$; donc

$$MV < mV;$$

donc la vîteſſe de M ſera négative.

65. 2°. La vîteſſe de M, après le choc, eſt à ſa vîteſſe primitive, comme la différence des maſſes eſt à leur ſomme.

Dém. Il faut faire voir que

$$\frac{MV - mV}{M + m} \cdot V :: M - m \cdot M + m;$$

ce qui eſt évident.

66. 3°. Le corps m ſuivra la direction primitive de M, & n'aura qu'une portion de la vîteſſe primitive de ce corps.

Dém. La vîteſſe de m, après le choc, eſt

(39) $$\frac{2MV}{M + m},$$

laquelle eſt poſitive, & n'eſt plus qu'une fraction de V, puiſque $M < m$.

COROLLAIRE I.

67. La différence des vîteſſes de m & M, après le choc, eſt égale à la vîteſſe primitive de M.

Dém. La différence de ces vîteſſes eſt

$$\frac{2MV}{M+m} - \left(\frac{MV - mV}{M + m}\right) = \frac{2MV - MV + mV}{M + m} = V;$$

donc, &c.

COROLLAIRE II.

68. Si, au lieu de m, on prend ſucceſſivement des corps plus grands, $m + d$, $m + d'$, $m + d''$, $m + d'''$, &c. la vîteſſe du choqué deviendra continuellement moindre.

Dém. La vîteſſe de m, après le choc, eſt

(39) $$\frac{2MV}{M + m}:$$

pareillement celle de $m + d$ seroit

$$\frac{2MV}{M+m+d};$$

celle de $m + d'$ seroit

$$\frac{2MV}{M+m+d'};$$

& ainsi de suite.

Or toutes ces fractions décroissent, puisque les dénominateurs deviennent successivement plus grands.

COROLLAIRE III.

69. La vîtesse décroît continuellement, lorsque le mouvement se propage par une suite géométrique ascendante de corps élastiques.

Dém. Soit la suite

$$\div\!\!\div M \cdot Mq \cdot Mq^2 \cdot Mq^3 \cdot Mq^4 \ldots Mq^{n-1}:$$

soit la vîtesse du premier corps $= V$: celle du second sera (39)

$$\frac{2MV}{Mq+M} = \frac{2V}{q+1}:$$

celle de Mq^2 sera (50)

$$\frac{\frac{2V}{q+1} \times Mq \times 2}{Mq^2 + Mq} = \frac{4V}{(q+1)^2}:$$

celle de Mq^3 sera

$$\frac{8V}{(q+1)^3}:$$

celle du dernier ſera égale à

$$\frac{2^{n-1}V}{(q+1)^{n-1}};$$

ainſi la ſuite des vîteſſes ſera

$$\div V \cdot \frac{2V}{q+1} \cdot \frac{4V}{(q+1)^2} \cdot \frac{8V}{(q+1)^3} \cdots \frac{2^{n-1}V}{(q+1)^{n-1}},$$

qui eſt géométrique, & dont le quotient eſt $= \frac{2}{q+1}$: or il eſt évident que cette ſuite eſt décroiſſante, puiſque le quotient $\frac{2}{q+1}$ eſt moindre que l'unité, à cauſe de $q > 1$.

Remarque.

L'on voit par ce dernier Corollaire que, dans la ſuppoſition de la troiſieme Regle, *la plus grande* vîteſſe eſt toujours la vîteſſe primitive du corps choquant. S'il y a donc un *maximum*, dans la même ſuppoſition, il ſe réduit à la diminution *la plus lente* de vîteſſe, qui a effectivement lieu dans le cas du troiſieme Corollaire : & c'eſt en ce ſens que doivent s'entendre les propoſitions de MM. Wolf & Bernoully ſur le cas du *maximmm ;* en tout autre ſens, elles ſeroient inexactes.

SECONDE HYPOTHESE.

70. *Je ſuppoſe les corps M & m mus en même ſens avant le choc.*

COROLLAIRE.

71. Dans cette hypotheſe, la vîteſſe de M, après le choc, eſt (31)

$$\frac{MV - mV + 2mu}{M + m};$$

& celle de m, après le choc, eſt (36)

$$\frac{2MV - Mu + mu}{M + m}.$$

Dans la même hypotheſe, M peut être égal, ou plus grand, ou moindre que m.

PREMIERE REGLE.

72. *Lorſque les maſſes ſont égales, il ſe fait une permutation de vîteſſes.*

Dém. Il faut faire voir que la vîteſſe de M, après le choc, ſera $= u$, & que celle de m ſera $= V$.

Or, 1°. la vîteſſe de M, après le choc, eſt (71) $\frac{MV - mV + 2mu}{M + m}$: mais, par ſuppoſition, $M = m$; donc

$$MV - mV = 0;$$

ainſi la vîteſſe de M, après le choc, ſe réduit à $\frac{2mu}{2m} = u$.

2°. La vîtesse de m, après le choc, est (71) $\frac{2MV - Mu + mu}{M + m}$;

donc, substituant M au lieu de m, on a

$$\frac{2MV - Mu + Mu}{M + m} = V.$$

Corollaire I.

73. Les deux corps suivront, après le choc, leur direction primitive, puisqu'ils seront animés de leurs vîtesses primitives.

Corollaire II.

74. Les deux corps s'écarteront, après le choc, aussi promptement qu'ils s'étoient approchés l'un de l'autre.

Regle II.

75. Si le choquant a plus de masse que le choqué,

1°. M aura, après le choc, plus de vîtesse que n'en avoit m avant la collision.

Dém. La vîtesse de M, après le choc, est (71) $\frac{MV - mV + 2mu}{M + m}$:

or cette vîtesse est plus grande que u; car, soustrayant u, on aura

$$\frac{MV - mV + 2mu}{M + m} - u = \frac{MV - mV + mu - Mu}{M + m},$$

qui est une différence réelle, puisqu'elle est le produit de $M-m$ par $V-u$, qui sont des quantités positives.

COROLLAIRE.

76. Le choquant suivra sa premiere direction.

Dém. La vîtesse de M, après le choc, est positive, puisqu'elle est plus grande que u.

77. 2°. La vîtesse de m, après le choc, sera plus grande que la vîtesse primitive de M.

Dém. La vîtesse de m, après le choc, est (71) $\frac{2MV-Mu+mu}{M+m}$:

or cette vîtesse est plus grande que V; car, si l'on en retranche V, on trouve

$$\frac{2MV-Mu+mu}{M+m}-V=\frac{MV-mV-Mu+mu}{M+m};$$

qui est une différence positive.

COROLLAIRE.

78. Le choqué suivra sa premiere direction; puisque sa vîtesse, après le choc, est positive.

REGLE III.

79. Si le corps choquant a moins de masse que le choqué,

1°. La vîteſſe de m, après le choc, ſera moindre que la vîteſſe primitive de M.

Dém. La vîteſſe de m, après le choc, eſt

(71) $$\frac{2MV - Mu + mu}{M + m}:$$

or cette quantité eſt moindre que V; car, en la retranchant de V, on aura

$$V - \left(\frac{2MV - Mu + mu}{M + m}\right) = \frac{mV - mu + Mu - MV}{M + m},$$

qui eſt une différence poſitive, puiſqu'elle eſt le produit de $V - u$ par $m - M$, qui ſont deux grandeurs réelles.

80. 2°. Le choquant ſera en repos après la colliſion, lorſque

$$mV = MV + 2mu,$$

puiſqu'en ce cas toute ſa vîteſſe, après le choc, eſt $= 0$.

Il ſera réfléchi, lorſque

$$mV > MV + 2mu;$$

car alors ſa vîteſſe, après le choc, ſera négative.

Enfin, il ſuivra ſa premiere direction, lorſque $mV < MV + 2mu$, puiſque dans cette ſuppoſition ſa vîteſſe, après le choc, eſt poſitive.

TROISIEME HYPOTHESE.

81. Je ſuppoſe que les corps M & m viennent en ſens contraires avant le choc.

COROLLAIRE.

82. Dans cette hypotheſe, la vîteſſe de M, après le choc, ſera (31)

$$\frac{MV - mV - 2mu}{M + m};$$

& celle de m, après le choc, ſera (36)

$$\frac{2MV + Mu - mu}{M + m}.$$

Dans cette troiſieme hypotheſe, il peut ſe trouver égalité de maſſes, égalité de vîteſſes primitives, ou inégalité tant entre les maſſes qu'entre les vîteſſes.

PREMIERE REGLE.

83. Si des maſſes égales ſe choquent avec des vîteſſes égales, elles ſeront réfléchies avec leurs vîteſſes primitives.

Dém. La vîteſſe de M, après le choc, eſt (82) $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$;

donc, à cauſe de $M = m$ & $V = u$, elle ſe réduit à $\frac{MV - MV - 2MV}{2M} = -V$:

pareillement

pareillement la vîteſſe de m, après le choc, eſt (82) $\frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$;

& ſubſtituant, on trouve

$$\frac{2MV + MV - MV}{2M} = + V;$$

ainſi les vîteſſes, après le choc, ſont $- V$ & $+ V$, qui ſont préciſément les vîteſſes primitives, priſes en ſens contraires.

Regle II.

84. Si les vîteſſes ſont inégales, les maſſes étant les mêmes, les corps échangeront leurs vîteſſes primitives.

Dém. La vîteſſe de m, après le choc, eſt (82) $\frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$;

qui, à cauſe de $M = m$, ſe réduit à

$$\frac{2MV}{2M} = V:$$

pareillement la vîteſſe de M, après le choc, eſt (82) $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$,

qui ſe réduit auſſi à

$$- \frac{2mu}{2m} = - u.$$

Corollaire.

85. Les deux corps ſeront réfléchis.

Dém. Le corps m ſera mu avec la vîteſſe V (84); donc il ira dans le ſens de V; ainſi il ſera réfléchi.

Pareillement M ira en ſens contraire avec la vîteſſe u; donc, &c.

Regle III.

86. Si, les vîteſſes étant les mêmes, les maſſes ſont inégales,

1°. Le corps M ſera en repos après le choc, lorſque $M = 3m$.

Il ſuivra ſa premiere direction, lorſque $M > 3m$.

Enfin il ſera réfléchi, lorſque $M < 3m$.

Dém. La vîteſſe de M, après le choc, eſt (82) $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$, qui, à cauſe de $V = u$, ſe réduit à

$$\frac{MV - 3mV}{M + m}:$$

or il eſt évident que $\frac{MV - 3mV}{M + m} = 0$, lorſque $M = 3m$; que cette fraction eſt poſitive, lorſque $M > 3m$; enfin que ſa valeur eſt négative, lorſque $M < 3m$.

87. 2°. La vîteſſe de m, après le choc, ſera fraction $\frac{3M - m}{M + m}$ de l'une des vîteſſes primitives.

Dém. La vîtesse de m, après le choc, est (82) $\frac{2MV + Mu - mu}{M+m}$,

qui, à cause de $V = u$, se réduit à

$$\frac{3MV - mV}{M+m} = \frac{3M - m}{M+m} \text{ de } V, \text{ ou de } u.$$

REGLE IV.

88. Si les vîtesses, avant le choc, sont en raison inverse des masses, les vîtesses, après le choc, seront $-V$ & u.

Dém. La vîtesse de M, après le choc, est (82) $\frac{MV - mV - 2mu}{M+m}$:

mais, par supposition, $M \cdot m :: u \cdot V$; donc

$$2MV = 2mu;$$

donc, substituant, on trouve, pour la vîtesse de M après le choc,

$$\frac{-MV - mV}{M+m} = \frac{(M+m) \times -V}{M+m} = -V.$$

De même la vîtesse de m, après le choc, est (82) $\frac{2MV + Mu - mu}{M+m}$,

qui, par une substitution pareille à la précédente, devient

$$\frac{2mu - mu + Mu}{M+m} = \frac{Mu + mu}{M+m} = u.$$

COROLLAIRE.

89. Les deux corps seront réfléchis avec leurs vîtesses primitives; puisque leurs vî-

tesses, après le choc, sont $-V$ & $+u$, qui sont en sens contraires.

REGLE V.

90. Lorsque les masses & les vîtesses sont inégales,

1°. M sera en repos après le choc, si

$$MV = (V + 2u) \times m.$$

Il suivra sa premiere direction, si

$$MV > (V + 2u) \times m.$$

Enfin il sera réfléchi, si

$$MV < (V + 2u) \times m.$$

Dém. La vîtesse de M, après le choc, est (82) $\frac{MV - mV - 2mu}{M + m}$.

Or, dans la premiere supposition, cette fraction est $= 0$.

Dans la seconde, elle est positive.

Dans la troisieme, elle est négative.

91. 2°. m sera en repos après le choc, si

$$mu = (2V + u) \times M.$$

Il suivra sa premiere direction, si

$$mu < (2V + u) \times M.$$

Enfin il sera réfléchi, si

$$mu > (2V + u) \times M.$$

Dém. La vîtesse de m, après le choc, est (82) $\frac{2MV + Mu - mu}{M + m}$;

laquelle eſt $= 0$, dans le premier cas; eſt poſitive, dans le ſecond; devient négative, dans la troiſieme ſuppoſition.

Corollaires généraux.

Des principes de cette théorie, on peut encore déduire les propoſitions ſuivantes.

PREMIERE PROPOSITION.

92. Quelles que ſoient les directions avant le choc, la ſomme des mouvemens, après le choc, ſera $= MV \pm mu$.

Dém. L'équation de la vîteſſe pour M, après le choc, eſt (31)

$$x = \frac{MV - mV \pm 2mu}{M+m};$$

donc le mouvement de ce corps ſera

$$\frac{M^2V - Mmu \pm 2Mmu}{M+m}:$$

l'équation de la vîteſſe de m, après le choc, eſt (36) $y = \frac{2MV \mp Mu \pm mu}{M+m}$;

donc le mouvement de m ſera

$$\frac{2MmV \mp Mmu \pm m^2u}{M+m}$$

ainſi la ſomme des mouvemens, après le choc, ſera

$$\frac{M^2V - MmV \pm 2Mmu + 2MmV \mp Mmu \pm m^2u}{M+m}:$$

réduisant, & achevant la division, cette somme sera $MV \pm mu$.

COROLLAIRE.

Si m est en repos avant le choc, la somme des mouvemens, après le choc, sera $= MV$.

PROPOSITION II.

93. Si l'on multiplie chaque masse par le quarré de sa vîtesse, la somme des produits sera la même avant & après le choc, quelles que soient les directions primitives de M & de m.

Dém. L'équation de la vîtesse de M, après le choc, est (31)

$$x = \frac{MV - mV \pm 2mu}{M+m};$$

donc le quarré de cette vîtesse sera

$$\frac{M^2V^2 - 2MmV^2 + m^2V^2 \pm 4MmVu \mp 4m^2Vu + 4m^2u^2}{(M+m)^2};$$

& multipliant par la masse M, on aura

$$\frac{M^3V^2 - 2MmV + Mm^2V^2 \pm 4M^2mVu \mp 4Mm^2Vu + 4Mm^2u^2}{(M+m)^2}:$$

l'équation de la vîtesse de m, après le choc, est (36) $y = \frac{2MV \mp Mu \pm mu}{M+m}$;

donc le quarré de la vîtesse sera

$$\frac{4M^2V^2 \mp 4M^2Vu + M^2u^2 \pm 4MmVu - 2Mmu^2 + m^2u^2}{(M+m)^2};$$

& multipliant par la masse m, on a

$$\frac{4M^2mV^2 \mp 4M^2mVu + M^2mu^2 \pm 4Mm^2Vu - 2Mm^2u^2 + m^3u^2}{(M+m)^2};$$

ajoutant ensemble ces deux produits, & réduisant, on aura

$$\frac{M^3V + 2M^2mV^2 + Mm^2V^2 + M^2mu^2 + 2Mm^2u^2 + m^3u^2}{M^2 + 2Mm + m^2} =$$

$MV^2 + mu^2$, qui est la somme des produits des masses par les quarrés des vîtesses primitives.

COROLLAIRE I.

94. Si m est en repos avant le choc, la somme des produits des masses par les quarrés des vîtesses, après le choc, sera égale au produit de la masse du choquant par le quarré de sa vîtesse primitive.

Dém. Si m est en repos avant le choc, tous les termes de la somme précédente dans lesquels se trouve u, se réduisent à zéro; donc la même somme se réduit à

$$\frac{M^3V + 2M^2mV^2 + Mm^2V^2}{MV + 2Mm + m^2} = MV^2;$$

donc, &c.

COROLLAIRE II.

95. Cette proposition contient un principe très utile pour la solution de plusieurs

problêmes de Dynamique : je veux dire, *la loi de la conſervation des forces vives.* Cette loi, en effet, n'exprime que l'*égalité entre les ſommes des produits des maſſes par les quarrés des vîteſſes avant & après le choc.*

PROPOSITION III.

96. Quelles que ſoient les directions primitives de M & m, la différence des vîteſſes, après le choc, eſt toujours $= V \mp u$.

Dém. La vîteſſe de m, après le choc, eſt (36) $\frac{2MV \mp Mu \pm mu}{M+m}$:

celle de M eſt (31)

$$\frac{Mu - mV \pm 2mu}{M+m};$$

donc, ſouſtrayant cette quantité de la précédente, on aura

$$\frac{2MV \mp Mu \pm mu - MV + mV \mp 2mu}{M+m} = \frac{MV + mV \mp Mu \mp mu}{M+m}$$

$= V \mp u.$

COROLLAIRE.

97. Si m eſt en repos avant le choc, la différence des vîteſſes, après le choc, égalera la vîteſſe primitive du choquant.

Dém. Cette différence (96) eſt $= V \mp u$: mais, par ſuppoſition, $u = 0$; donc la différence eſt $= V$.

PROPOSITION IV.

98. Si les deux corps M & m ſe choquent de nouveau avec leurs vîteſſes acquiſes, ils recouvreront par le ſecond choc leurs vîteſſes primitives.

Dém. L'équation de la vîteſſe de M, après le premier choc, eſt (31)

$$x = \frac{MV - Mu \pm 2mu}{M+m}:$$

celle de m ſera (36)

$$y = \frac{2MV \mp Mu \pm mu}{M+m};$$

donc, après le ſecond choc, l'équation de la vîteſſe pour M ſera

$$x' = \frac{Mx - mx \pm 2my}{M+m};$$

& pour m, l'équation ſera

$$y' = \frac{2Mx \mp My \pm my}{M+m}:$$

ſubſtituant les valeurs de x & de y dans ces deux dernieres équations, & réduiſant, on aura pour M

$$x' = \frac{M^2V + 4MmV + m^2V}{(M+m)^2} = V;$$

& pour m, on aura

$$y' = \frac{M^2u + 2Mmu + m^2u}{(M+m)^2} = u.$$

COROLLAIRE.

99. Si *m* avoit été en repos avant le premier choc, il feroit réduit au repos par le fecond choc.

TROISIEME PARTIE.

Sur les corps à reſſort imparfait.

PREMIER AXIOME.

100. DANS le choc des corps imparfaitement élaſtiques, la percuſſion ou compreſſion fait perdre au choquant M une portion de ſa vîteſſe primitive.

AXIOME II.

101. Dans les mêmes corps, la reſtitution fait perdre à M une ſeconde portion de ſa vîteſſe primitive.

COROLLAIRE.

102. La ſomme des vîteſſes perdues, tant par le choc que par la reſtitution, ſera toute la vîteſſe que perd M.

PROBLEME I.

103. Trouver la vîteſſe x que perd M par la ſeule colliſion.

Sol. Selon le nº. 9, cette vîtesse est

$$x = \frac{mV \mp mu}{M + m}.$$

COROLLAIRE.

104. Si m est en repos avant le choc, alors $x = \frac{MV}{M+m}$.

PROBLEME II.

105. Trouver la vîtesse y perdue par M, à raison de la restitution.

Sol. Quel que soit le rappprt de la force de compression à celle de restitution, je l'exprime par $\frac{q}{p}$; donc le rapport des vîtesses perdues à raison de ces deux forces sera aussi $\frac{q}{p}$: mais la vîtesse perdue à raison de la compression seule est (103)

$$\frac{mV \mp mu}{M+m};$$

donc on aura la proportion

$$p \cdot q :: \frac{mV \mp mu}{M+m} \cdot y;$$

donc $y = \frac{q}{p} \times \frac{mV \mp mu}{M+m}$.

COROLLAIRE I.

106. Cette solution contient le Théorême suivant.

» La vîtesse perdue par M à raison du » ressort seul est toujours la fraction $\frac{q}{p}$ de » celle qu'il perdroit s'il étoit sans ressort.

COROLLAIRE II.

107. Lorsque m est en repos avant le choc, la vîtesse perdue par M en vertu de son ressort est $y = \frac{q}{p} \times \frac{mV}{M+m}$.

COROLLAIRE III.

108. Dans la même supposition, si l'on fait m successivement égal, double, triple, &c. de M, les vîtesses que perd M par son ressort seront successivement

$$\frac{q}{2p}, \frac{2q}{3p}, \frac{3q}{4p}, \text{ \&c. de } V.$$

109. Mais si l'on fait M égal, double, triple, &c. de m, les vîtesses perdues seront successivement

$$\frac{q}{2p}, \frac{q}{3p}, \frac{q}{4p}, \text{ \&c. de } V.$$

PROBLEME III.

110. Déterminer toute la vîtesse t perdue par M dans le choc.

Sol. La vîtesse perdue à raison de la compression est (103)

$$x = \frac{mV \mp mu}{M+m};$$

celle que fait perdre la restitution est (105)

$$y = \frac{q}{p} \times \frac{mV \mp mu}{M+m}:$$

mais (102) $t = x + y$;

donc $t = \frac{mV \mp mu}{M+m} + \frac{q}{p} \times \frac{mV \mp mu}{M+m}$.

COROLLAIRE I.

111. Dans le cas du ressort parfait, toute la vîtesse perdue par M sera

$$\frac{2mV \mp 2mu}{M+m}.$$

Dém. Lorsque le ressort est parfait, la force de restitution est égale à celle de compression; donc $\frac{q}{p} = 1$; donc

$$\frac{q}{p} \times \frac{mV \mp mu}{M+m} + \frac{mV \mp mu}{M+m} = \frac{2mV \mp 2mu}{M+m};$$

ce qui s'accorde avec le n°. 28.

COROLLAIRE II.

112. Toute la vîtesse perdue par M est la fraction $\frac{p+q}{p}$ de celle qu'il auroit perdue s'il avoit été sans ressort.

Dém. Par le Problême du n°. 110,

$$t = \frac{mV \mp mu}{M+m} + \frac{q}{p} \times \frac{mV \mp mu}{M+m};$$

donc, réduisant au même dénominateur,

$$t = \frac{p+q}{p} \text{ de } \frac{mV \mp mu}{M+m}.$$

COROLLAIRE III.

113. Si m est en repos avant le choc, alors $t = \frac{(p+q)\times m}{p\times(M+m)}$ de V.

PROBLEME IV.

114. Trouver la vîtesse totale de M après le choc.

Sol. Il est évident que M aura, après le choc, toute sa vîtesse primitive, excepté ce qu'il en aura perdu dans le choc; donc la vîtesse totale de M, après le choc, sera

$$T = V - t:$$

mais (110)

$$t = \frac{mV \mp mu}{M+m} + \frac{q}{p} \times \frac{mV \mp mu}{M+m};$$

donc la vîtesse totale sera

$$T = V - \left(\frac{mV \mp mu}{M+m}\right) - \frac{q}{p} \times \left(\frac{mV \mp mu}{M+m}\right);$$

& réduisant le tout en fraction, l'équation de la vîtesse totale de M, après le choc, sera

$$T = \frac{p\times MV - q\times mV \pm (p+q)\times mu}{p\times(M+m)}.$$

Exemple. Soit $\frac{q}{p} = \frac{2}{3}$; c'est-à dire, soit la force de restitution à celle de compression comme 2 à 3 : alors

$$T = \frac{3MV - 2mV \pm 5mu}{3M + 3m},$$

comme dans les Expériences de Newton.

COROLLAIRE I.

115. Si m est en repos avant le choc, la vîtesse totale de M, après le choc, sera

$$\frac{p \times MV - q \times mV}{p \times (M + m)}.$$

COROLLAIRE II.

116. Lorsque le ressort est nul, la vîtesse totale de M, après le choc, sera

$$\frac{MV \pm mu}{M + m},$$

comme au n°. 8.

Dém. Selon le n°. 114,

$$T = \frac{p \times MV - q \times mV \pm (p + q) \times mu}{p \times (M + m)}:$$

or, par supposition, $q = 0$; donc

$$T = \frac{MV \pm mu}{M + m}.$$

COROLLAIRE III.

117. Dans le cas du ressort parfait, l'équation de la vîtesse totale sera, comme au n°. 31, $T = \frac{MV - mV \pm 2mu}{M + m}$, puisque dans cette supposition $q = p$.

AXIOME

AXIOME III.

118. Le corps choqué m gagne par la percussion quelque quantité de vîtesse.

AXIOME IV.

119. Le même corps gagne encore une seconde quantité de vîtesse en vertu de la restitution.

COROLLAIRE.

120. Toute la vîtesse gagnée par m sera la somme de celles qu'il acquiert, tant à raison de la percussion, qu'en vertu de son ressort.

PROBLEME I.

121. Déterminer la vîtesse y gagnée par m en vertu de la seule percussion.

Sol. Cette vîtesse est, comme au n°. 11,

$$y = \frac{MV \mp Mu}{M+m}.$$

COROLLAIRE.

122. Si m est en repos avant la collision, alors

$$y = \frac{MV}{M+m}.$$

PROBLEME II.

123. Trouver la vîtesse z gagnée par m à raison de sa restitution.

Sol. La vîtesse gagnée par m à raison de la seule percussion est (121)

$$y = \frac{MV \mp Mu}{M+m};$$

donc, conservant le rapport $\frac{q}{p}$ de la force de percussion à celle de restitution, on aura

$$p \cdot q :: \frac{MV \mp Mu}{M+m} \cdot z;$$

donc $$z = \frac{q}{p} \times \frac{MV \mp Mu}{M+m}.$$

COROLLAIRE I.

124. Cette solution nous donne le Théorême suivant.

» La vîtesse gagnée par m à raison du » ressort seul, n'est que la fraction $\frac{q}{p}$ de » celle qu'il auroit acquise par la seule per» cussion.

COROLLAIRE II.

125. Si m est en repos avant la collision, la vîtesse qu'il gagne en vertu du ressort est

$$z = \frac{q}{p} \times \frac{MV}{M+m}.$$

COROLLAIRE III.

126. Dans la même hypothese, si m est successivement égal, double, triple, &c. de M, la vîtesse gagnée par m en vertu de son ressort, sera successivement

$$\frac{q}{2p}, \frac{q}{3p}, \frac{q}{4p}, \text{\&c. de } V.$$

127. Mais si l'on fait M successivement égal, double, triple, &c. de m, les vîtesses acquises en vertu du ressort seront successivement $\frac{q}{2p}$, $\frac{2q}{3p}$, $\frac{3q}{4p}$, &c. de V.

COROLLAIRE IV.

128. En joignant ces deux articles avec les n^{os}. 108 & 109, l'on voit que, dans les mêmes cas, la somme des vîtesses, perdue par M & gagnée par m en vertu du ressort, est égale à la fraction $\frac{q}{p}$ de la vîtesse primitive; car il est évident que $\frac{q}{2p}$ de V + $\frac{q}{2p}$ de $V = \frac{q}{p}$ de V.

PROBLEME III.

129. Déterminer toute la vîtesse t gagnée par m dans le choc.

Sol. La vîteſſe gagnée à raiſon de la percuſſion eſt (121)

$$y = \frac{MV \mp Mu}{M+m}:$$

celle que m acquiert par la reſtitution eſt (123) $z = \frac{q}{p} \times \frac{MV \mp Mu}{M+m}$:

mais (120) $t = y + z$;

donc $t = \frac{MV \mp Mu}{M+m} + \frac{q}{p} \times \frac{MV \mp Mu}{M+m}$;

& réduiſant au même dénominateur, on a

$$t = \frac{p+q}{p} \times \frac{MV \mp Mu}{M+m}.$$

COROLLAIRE I.

130. Cette ſolution fournit le Théorême ſuivant.

» Toute la vîteſſe acquiſe par m n'eſt que
» la fraction $\frac{p+q}{p}$ de celle qu'il auroit ac-
» quiſe s'il avoit été ſans reſſort.

COROLLAIRE II.

131. Si m eſt en repos avant le choc, on aura $t = \frac{p+q}{p} \times \frac{MV}{M+m}$.

COROLLAIRE III.

132. Si $q = p$, qui eſt le cas du reſſort parfait, on a $t = \frac{2MV \mp 2Mu}{M+m}$;

ce qui s'accorde avec le n°. 33.

COROLLAIRE IV.

133. Si $q = 0$, ou si le ressort est nul, alors $$t = \frac{MV \mp Mu}{M+m},$$ comme dans l'article 11.

PROBLEME IV.

134. Trouver la vîtesse totale de m après le choc.

Sol. Si les corps vont en même sens avant le choc, la vîtesse totale de m, après le choc, sera la somme de sa vîtesse primitive & de toute sa vîtesse acquise; donc on aura

$$S = u + \frac{MV \mp Mu}{M+m} + \frac{q}{p} \times \frac{MV \mp Mu}{M+m}:$$

mais s'ils viennent en sens contraires, m n'aura que l'excès de la vîtesse acquise sur sa vîtesse primitive; donc alors

$$S = \frac{MV \mp Mu}{M+m} - u + \frac{q}{p} \times \frac{MV \mp Mu}{M+m};$$

donc, dans les deux cas, la vîtesse totale de m sera

$$S = \frac{q}{p} \times \left(\frac{MV \mp Mu}{M+m}\right) + \frac{MV \mp Mu}{M+m} \pm u;$$

& mettant $\pm u$ en fraction, on aura

$$S = \frac{q}{p} \times \left(\frac{MV \mp Mu}{M+m}\right) + \frac{MV \mp mu}{M+m};$$

enfin, réduisant au même dénominateur, on trouve

$$S = \frac{(p+q)\times MV \mp q\times Mu \pm p\times mn}{p\times(M+m)}.$$

Exemple. Soit $\frac{q}{p} = \frac{4}{5}$; c'est-à-dire, soient deux corps dans lesquels la force de restitution soit à celle de compression comme 4 est à 5 : alors

$$S = \frac{9\,MV \mp 4\,Mu \pm 5\,mu}{5\,M + 5\,m}.$$

COROLLAIRE I.

135. Si m est en repos avant le choc, sa vîtess totale, après la collision, sera

$$\frac{p+q}{p} \times \frac{MV}{M+m}.$$

COROLLAIRE II.

136. Si $q = p$, qui est le cas du ressort parfait, alors

$$S = \frac{2\,MV \mp Mu \pm mu}{M+m},$$

comme on l'a vu dans l'article 36.

COROLLAIRE III.

137. Si $q = 0$, qui est le cas où le ressort seroit nul, alors

$$S = \frac{MV \mp mu}{M+m};$$

ce qui s'accorde parfaitement avec l'art. 8.

CONCLUSION.

138. Pour déterminer avec précision tous les effets de la collision dans l'état réel & physique, il faut joindre à cette Théorie une Table générale des rapports de la force de compression à celle de restitution. C'est par des expériences suivies & raisonnées que l'on peut découvrir ces rapports dans les différens corps.

Pour rendre complette la théorie du choc direct, il faudroit y ajouter une quatrieme Partie sur les corps inégalement élastiques : mais cette recherche est un ouvrage digne des plus grands Géometres.

FIN.

ORIE

CORPS.

LT DE KOUDOU,
de la Société Royale,
llege de Cornouailles,
phie en l'Université
Royal de Navarre.

RIS,

IS & Fils, Libraires,
gustins.

LXX.

Privilege du Roi.

23.