30

Disquisitiones duas

alteram physicam alteram mathematicam

scripsit

Mauritius Guilelmus Grebel,

matheseos et physices praeceptor in schola Glogaviensi.

Glogaviae, typis Günteri, 1825.

32

De

metienda montium altitudine

ope barometri.

Torricelli, e celeberrimi Galilaei discipulis clarissimus, instrumenti, quod a physicis barometrum dicitur, structuram et invenit et ex aëris atmosphaerici pondere repetendam esse demonstravit. Nihilominus tamen illius temporis philosophi inveteratis opinionibus nimis addicti tantum aberant, ut errorum istum, quo naturam horrore vacui instructam putabant, expellerent, ut plura novae illi de aëris pondere doctrinae dubia excitarent, quae mox tamen ab ingenio viri cl. Pascal refutabantur. Qui quidem Perrier levirum suum permovit, ut in montem prope Clermont situm, qui Puy-de Dôme appellatur, cum barometro adscenderet. Quo facto mercurium barometro infusum primus omnium, quo altius instrumentum eveheretur, eo magis descendere observavit. Ex quo experimento facile colligitur, mercurium per pondus aëris in tubo Torricelliano suspensum esse, nec non ab aëris ut altitudine ita pondere imminuto relaxari. Eodem Marte secundo ingeniosum hoc experimentum hic illic pilis quoque aëronauticis saepius iterabatur, ita ut hodie inter omnes constet, altiori monti minorem convenire mercurii columnam. Ut paucis tantum defungar exemplis, cum in superficie maris mercurius ad $0,^{m} 76$ subsistat, idem ille in summo St. Bernhard ad $0,^{m} 57$ et in ea, quam Humboldt assecutus est, montis Chimboraço altitudine vix ad $0,^{m} 38$ in tubo elevatur.

Phaenomena explicatu, ut jam diximus, facilia; mercurius enim per elevationem in atmosphaeram ab onere stratorum ejus inferius sitorum liberatus, iisque tantum stratis, quae supra incumbunt, pressus, minus gravatur, ac antea; ergo columna quoque mercurii, quae minori aëris pressioni aequilibrium facit, brevior esse debet, ac antea. Si aër incompressibile fluidum esset, ut aqua i. e. si eandem semper materiae quantitatem eodem contineret volumine (temperatura scilicet neque aucta neque imminuta), facili negotio lex, qua mercurius in superioribus atmosphaerae regionibus e tubo Torricelliano descendit, reperiri posset. Accurata enim observatio docuit, elevatione $10,^{m} 5$ opus esse, ut mercurii in barometro altitudo $0,^{m} 001$ diminuatur, qui prope superficiem maris et ad temperaturam glaciei liquescentis altitudine $0,^{m} 76$ gaudebat. His positis, colligitur, mercurii cylindrum quemcunque cylindro ex aëre ejusdem baseos altitudinis vero 10500 tuplicis aequiponderare. Notatu dignum est, ex comparatione gravitatis specificae mercurii atque aëris, quantas physici invenerunt, idem fere concludi posse. Ita distantia quoque verticalis duorum locorum ex observatione barometri facile computari potest; multiplicando enim columnarum mercurialium differentiam metris expressam per 10500 productum aequatur differentiae altitudinum pariter metris expressae. Eadem hypothesi ipsa quoque atmosphaerae altitudo inveniri posset hac quidem ratione, ut columnam mercurialem $0,^m76$ columnae aërcae 10500tuplici mensuram praebere i. e. atmosphaeram altitudine $10500 . 0,^m76 = 7980$ metrorum gaudere poneres. Neminem autem fugit, aërem multo altius diffusum esse; mons enim Chimboraço, supra quem nubes avesque magnae volitant, hanc fere altitudinem attingit. Non mirum; aërem scilicet in calculo nostro incompressibilem posuimus, verum in rerum natura res longe aliter se habet, imo aër comprimi potest et elatere gaudet; inde fit, ut strata aëris inferiora, quae summam ponderum omnium superiorum ferunt, maxime comprimantur i. e. densissima omnium sint. In superioribus regionibus aër, cui inferiorum stratorum pondus deest, multo tenuior et specifice levior evadit, ita ut elevatio $10,^m5$ non amplius sufficiat ad diminuendam columnae mercurialis longitudinem unius millimetri. Lex igitur quoque, qua mercurius, dum elevatur, descendit, longe alia et nullo modo tam simplex est, quam supra statuimus. Fuerunt, qui experimentis eam reperire operam darent, ratio tamen melius eam aperuit, ita ut nil nisi quantitatum constantium determinationem ab observatione mutuaret. Calculus hic quoque, quem compressibilitas aëris exigit, brevi manu absolveretur, si aër ejusdem omnino esset temperaturae e. g. glaciei liquescentis, si aquae vaporibus careret, si gravitatis denique vis ubique eadem esset. Designetur enim jam elater strati atmosphaerici in altitudine x per p (elaterem per pondus metiri solemus, quo unitas superficiei premitur), porro densitas ejusdem per ϱ, habebimus ex lege Mariotte aequationem

$$p = a\varrho \qquad (1)$$

in qua a coëfficiens est constans, qui e natura aëris atmosphaerici pendet. Quaeramus jamjam relationem inter p et x. Ponimus igitur, si x mutetur in $x + dx$, p mutari in $p + dp$. Apertum est p ideo mutari, quod stratum aëris atmosphaerici, cujus a superficie terrae distantia x et cujus altitudo dx est, ad aërem comprimendum nil amplius facit; ergo dp, si quantitatis ejus absolutae rationem habeas, aequari debet ponderi columnae atmosphaericae, cujus densitas ϱ, altitudo dx est, basis unitati aequalis sit. Cum autem p decrescat, si x augeatur, habebimus aequationem differentialem

$$-dp = \varrho g dx \qquad (2)$$

in qua g vim gravitatis terrae denotat. Ad integrandam hanc aequationem necesse est, ut ϱ, quantitas scilicet variabilis, ope aequationis (1) eliminetur. Quam ob rem dividatur aequatio (2) per aequationem (1), et reperies

$$-\frac{dp}{p} = \frac{g}{a} dx$$

aequatio cujus integrale est

$$-\log p = \frac{g}{a} x + C$$

Ut quantitas constans C determinetur, designabimus per P valorem ipsius p, si $x = 0$; ita fit

$$-\log P = C$$

Substituendo hunc constantis valorem erit

$$\log P - \log p = \frac{g}{a} x \quad \text{sive} \quad \log \frac{P}{p} = \frac{g}{a} x$$

Cum hic logarithmi naturales sive Nepperiani intelligi debeant, multiplicetur aequatio inventa per modulum tabularum littera M designandum, ut ita logarithmi in Briggianos sive vulgares mutentur. Quo fit

$$\text{log. vulg.} \frac{P}{p} = \frac{gM}{a} x$$

Atqui quantitates P et p ipsum metitur barometrum, ut quibus pondera columnarum mercurialium aequilibrium faciant. Ergo si altitudines columnarum per H et h designantur erit

$$\frac{P}{p} = \frac{H}{h}$$

et aequatio, quam modo invenimus, scribi poterit

$$\text{log. v.} \frac{H}{h} = \frac{gM}{a} x$$

et resolvendo secundum x

$$x = \frac{a}{gM} \text{ log. v. } \frac{H}{h}$$

Nil restat denique nisi determinatio quantitatis constantis $\frac{a}{gM}$ sive ex observatione sive ex datis physicorum. Ut hoc fiat, aequationem (1) in auxilium vocemus, et, ubi memineris, quid p significet, apertum est: p aequari debere cylindro mercuriali, cujus basis unitas, altitudo autem h, ita ut, si mercurii densitatem δ vocamus

$$p = \delta g h = a \varrho$$

consequenter

$$a = \frac{\delta}{\varrho} g h$$

$$\text{et} \quad \frac{a}{g} = \frac{\delta}{\varrho} h$$

Si h ponimus $0,^{m}76$, ϱ erit densitas aëris ad superficiem terrae. Cum autem ratio densitatum $\frac{\delta}{\varrho}$ aequalis sit rationi gravitatum specificarum, habebimus ex nostra hypothesi

$$\frac{a}{gM} = \frac{13,597190}{0,001299075 \,.\, 0,4342945} \, 0,76$$

Posita scilicet aquae gravitate specifica $= 1$, Biot et Arago ad temperaturam glaciei liquescentis et barometri altitudinem $0,^{m}76$ invenerunt gravitates specificas

$$\text{aëris} = 0,001299075$$
$$\text{mercurii} = 13,597190$$

M autem analysis docuit esse $= 0,4342945$.

Ita valor quantitatis constantis $\frac{a}{gM}$ calculo logarithmico invenitur $= 18316,56$.*) Omissis fractionibus decimalibus, exprimitur denique x in metris hac simplici formula

$$x = 18317 \log v. \frac{H}{h}$$

Hypothesis nostra, quam fecimus simplicem, calculi genus admittebat simplex et facile. In rerum tamen natura res multo est implicatior. Nam

1) temperatura aëris atmosphaerici, quoad assurgit, neutiquam eadem est, qualem posuimus; imo secundum legem ad hunc usque diem ignotam ab inferioribus ad superiores regiones diminuitur.

2) aër non sicco gaso constat, sed fere semper plus minusve vaporum aqueorum continet, qui quidem haud spernendam vim in specificam aëris data pressione coarctati gravitatem habent; et rursus vapores aquei per varias aëris regiones lege pariter ignota distribuuntur.

3) vis gravitatis terrae in omnibus atmosphaerae partibus non eodem modo conspicua est, quae quidem ex triplici adeo causa variat:

a. ex lege enim astronomica diminuitur in ulterioribus atmosphaerae regionibus inversa quadratrica ratione distantiarum a centro terrae.

b. gravitati terrae accedit vis attractiva aëris ipsius secundum legem, quam infra laudabo.

---

*) Haec determinatio quantitatis $\frac{a}{gM}$ satis bene congruit cum ea, quam directae observationes a Ramond institutae, dederunt, quippe quibus $\frac{a}{gM}$ concluditur 18336. v. Poisson traité de mécanique tom. II. p. 440.

c. motus terrae rotatorius vim centrifugam gignit, quae vim gravitatis in superioribus regionibus magis diminuit, quam prope superficiem terrae, ut infra calculo demonstrabo.

4) temperatura denique aeque ac pondera columnarum mercurialium, quae elaterem aëris metiuntur, iisdem ex causis variant.

Quae quidem res *) calculum multo implicatiorem reddunt, quin earum priores, cum secundum leges plane ignotas vim suam habeant, calculum prorsus everterent, nisi approximationem et hypotheses probabiles loco legum admittere velimus.

Ut autem vim temperaturae et vaporum aqueorum in aërem bene perspiciamus calculoque subjiciamus, leges quasdam factaque, quae accurata physicos experimenta docuerunt, in memoriam revocabimus.

Supra jam de lege Mariotte mentionem injecimus, cujus vi volumina gasi sicci, temperatura e. g. glaciei liquescentis haud mutata, in ratione pressionum, quibus retinentur, sunt inversa i. e. si volumina per v et v', pressiones iisdem correspondentes per p et p' designantur, haec locum habebit aequatio

$$\frac{v'}{v} = \frac{p}{p'}$$

Cum autem volumina sint in ratione inversa densitatum, quas ϱ et ϱ' vocamus, et pressiones p et p' elateribus gasi aequales sint, lex Mariotte hac quoque aequatione exprimi poterit

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{p}{p'} \qquad \text{sive} \qquad p = \frac{p'\varrho}{\varrho'} = a\,\varrho$$

ut supra, denotando scilicet quantitatem cuilibet gaso constantem $\frac{p'}{\varrho'}$ per a. Porro experimenta a viris cl. Gay-Lussac et Dalton instituta, docuerunt, gasum quodcunque, pressione, qua comprehenditur, haud mutata, si temperatura t gradibus scalae centesimalis augetur, (0,00375) t voluminis sui, quo temperatura glaciei liquescentis gaudebat, augeri. Ex his ope legis Mariotte concluditur, gasum quodcunque, volumine ejus non mutato, si temperatura t gradibus augetur, (0,00375) t elateris sui augeri, quem idem volumen ejusdem gasi temperatura glaciei liquescentis habebat. Si igitur elaterem gasi in temperatura gl. liq. per p designatum, per $1 + (0{,}00375)\,t$ sive brevitatis per causa $1 + \alpha\,t$ multiplicas, habebis elaterem ejus-

*) Dubitare quis possit, an aër atmosphaericus per omnes regiones ejusdem naturae chemicae sit, cujus esse in calculo posuimus. Hanc tamen objectionem vanam esse docuit Gay-Lyssac, qui aërem ex altitudine 6500, et quod excedit, metrorum, ejusdem indolis chemicae invenit, qua prope superficiem terrae gaudet.

dem gasi ejusdem voluminis in temperatura t graduum. Consequenter aequatio (1), quae in temperatura glaciei liq. valet, in temperatura t graduum hanc induit formam

$$p = a\varrho(1 + \alpha t) \qquad (3)$$

in qua quidem, ut jam diximus, p elaterem gasi, ϱ ejus densitatem, et t ejus temperaturam significant.

Haec de aëre sicco valent; aliter res de aëre vaporibus aqueis repleto sese habent. Experimenta enim celeberrimi Dalton de vapore aqueo haec docuerunt: Cuivis temperaturae vaporis maxima quaedam densitas est, consequenter maximus quoque ejusdem elater, ut, quem si augere velles, vaporem statim liquidum redderes. Gasum vapori immistum in vaporem nullam exerçet vim eatenus, quatenus densitas et elater vaporis ipsius in quavis temperatura limitem datum superare nequit, quasi gasum prorsus non addesset. Laplace invenit maximum vaporis elaterem cum temperatura sequenti formula conjunctum esse: *)

$$F_N = 0,^m 76.\ 10^{AN + BN^2 + CN^3}$$

in qua F_N elaterem vaporis, N gradus temperaturae ejusdem infra punctum ebullitionis aquae, et A, B, C coefficientes constantes designant. Vapores, quamdiu hanc elateris limitem nondum attigerint, pressione et temperatura iisdem legibus, quibus gasa sicca, mutantur. Elater jamjam aëris, cui vapor aequeus immiscetur, duplici ratione in barometrum agit, vi scilicet elateris tum vaporis tum aëris atmosphaerici tanquam gasi sicci. Quaestio igitur eo redit, ut partem, quam elater vaporis totius elateris tenet, omni in re determinare possimus. De Saussure in hunc finem instrumentum construxit physicis hygrometrum dictum, quod aëri expositum graduum numero tensionem vaporum aëri immixtorum patefacit. Dolendum tamen est, quod conjunctio inter tensionem vaporum et gradus hygrometri correspondentes non nisi in temperatura 10° penitus perspecta sit **) Cujus tamen rei, cum instrumenti imperfectioni haud sit adscribenda, imo non nisi ex observationum paucitate pendeat, in sequenti calculo rationem non habebo, ita ut mihi ponere liceat, partem, quam vapor in aëre praesens totius ejusdem elateris habet, ex comparatione graduum hygrometri et thermometri inveniri posse, quamquam hucusque tantum in 10° temperatura experimenta viri cl. Gay-Lussac hoc admiserunt.

Quod ad densitatem vaporis aquei attinet, ejusdem viri experimentis cognitum est, eandem esse 0,62349, si densitatem aëris ejusdem elateris ejusdemque tem-

---

*) Biot traité de physique, tom. I. p. 277. — Laplace mécanique céleste, tom. IV. p. 273.

**) Biot traité de physique, tom. II. p. 207.

peraturae unitati aequalem facis. Loco numeri 0,62349 brevitatis causa $\frac{5}{8}$ scribi possit, malim tamen $\frac{1}{m}$ poni. Si igitur in universum vaporis aquei densitas $= \varrho'$, erit ex nostra denotatione

$$\varrho' = \frac{1}{m}\varrho$$

Sit porro p' elater vaporis aquei, habebimus substituendo $m\varrho'$ loco ϱ in aequationem (3), cum in caeteris vapor eodem modo se habeat, quo gasum:

$$p' = a m \varrho' (1 + \alpha t) \qquad (4)$$

Quibus ut jam calculus superstruatur, necesse esset, ut relationes, quibus inter se t et x, nec non p' et x sive t conjunctae sint, appareren. Attamen, ut jam supra commemoravi, leges, quibus tum calor tum vapor aqueus in aëre distribuuntur, ad hunc usque diem nos latent. Hoc tantummodo constat, aëris partes eo magis frigescere, quo sint a terra remotiores; quo ipso iterum concludi potest, tensionem vaporis aquei in ulterioribus atmosphaerae regionibus simili modo debilitari. Accedit tamen, quod tensio vaporis minor quoque est, quam solius temperaturae decrementum postulare videtur. Experientia enim docuit, supremam aëris partem tanta siccitate laborare, ut corpora hygrometrica e. g. papyrus et charta pergamenta tanquam ignibus exsiccata contorqueantur. Quae tamen observationes ad accuratam mutuae inter t et x, inter p' et x dependentiae determinationem neutiquam sufficiunt. Nil igitur restat, nisi ab omni calculo abstinere velis, quam ut ad hypotheses confugias.

Quod jam primo ad legem caloris distribuendi attinet, physici hucusque satis habebant t valoris constantis ponere, qui arithmetice intermedius est inter temperaturas imae et supremae stationis.*) Qua in hypothesi ne acquiescamus, haec animadvertere placet: in ima statione ubi $x = 0$ sit $t = T$, in suprema ubi $x = h$ sit $t = T - \Delta t$; quaestio jam eo redit, ut t cum x simpliciter conjungatur, ita tamen, ut valoribus in ima et suprema statione observatis satisfiat. Ponimus igitur

$$t = T - \frac{x}{h}\Delta t$$

$$\text{ergo } 1 + \alpha t = 1 + \alpha T - \frac{\alpha x}{h}\Delta t = \beta - \tau x$$

designando brevitatis causa $1 + \alpha T$ per β et $\frac{\alpha \Delta t}{h}$ per τ.

Vaporum atmosphaerae commixtorum physici eatenus tantummodo habuerunt rationem, quod coefficientem α paulisper augebant ponentes eum non 0,00375,

*) v. Poisson traité de méc. tom. II. p. 436. Biot Astronomie physique tom. III. Add. p. 20. Laplace in méc. cel. tom. IV. p. 290. aliam legem admittere videtur, nihilominus tamen idem ex ejus integratione prodiit.

ut revera est, sed numero 0,004 aequalem. Neque in hac hypothesi acquiescam, imo legem vaporum distribuendorum exhibebo, quae non solum observationibus hygrometricis in utroque columnae aërae fine institutis satisfaciat, sed etiam legi, qua temperaturam imminui posuimus, nec non formulae supra laudatae, quam Laplace pro F_N dedit, non adversetur. Cum enim superioris atmosphaerae major sit siccitas, ut jam diximus, quam inferioris, tensio vaporis p' in quacunque aëris regione, cujus altitudinem x nominavimus, hac formula poterit representari

$$p' = \Pi \left(\frac{\pi}{\Pi}\right)^{\frac{x}{h}}$$

in qua Π tensionem vaporis in ima statione ope hygrometri observatam, π eandem in suprema statione, h denique altitudinem totius columnae aëriae sive distantiam stationum denotant; brevitatis causa hanc formulam ita scribam $p' = \Pi \gamma^x$

Sit jam strati atmosphaerici humidi, cujus altitudo iterum designetur per x, elater totus q; hic ex p et p' ita componitur, ut

$$q = p + p'$$

Eadem ratione densitas ϑ hujus strati e densitatibus ϱ et ϱ' componitur, ita ut

$$\vartheta = \varrho + \varrho'$$

Designando denique, ut supra, littera g gravitatem, quae in idem stratum vim habet, prodibit:

$$-dq = \vartheta g dx$$

Ut ϑ eliminetur, aequationes (3) et (4) in auxilium voco, e quibus

$$\varrho + \varrho' = \frac{mp + q'}{am(1 + at)} = \frac{m(p + p') - (m - 1)p'}{am(1 + \alpha t)}$$

cum autem $p + p' = q$, erit

$$\vartheta = \varrho + \varrho' = \frac{mq - (m - 1)p'}{am(1 + \alpha t)}$$

et substituendo

$$-dq = \frac{mq - (m - 1)p'}{am(1 + \alpha t)} g dx$$

substitutis denique pro p' et t valoribus eorum per x expressis, evadet haec aequatio:

$$-dq = \frac{mq - (m - 1)\Pi\gamma^x}{am(\beta - \tau x)} g dx \qquad (\odot)$$

Restat, ut factorem variabilem g functione distantiae x exprimamus. Supra jam vidimus g ex triplici causa mutabilem esse. Quarum ut primam consideremus; designet (g) gravitatem in ima statione,*) cujus a centro terrae distantia sit r;

*) Quantitas constans non est, sed ob vim terrae centrifugam et figuram ejus ellipticam variat. Data autem loci cujusdam latitudine per simplicem formulam (g) determinari potest. v. Poisson traité de méc. tom. I. p. 280 et 393.

mutabitur in altitudine x i. e. in distantia $r+x$ a centro terrae, ex lege attractionis universae (g) in

$$(g)\,\frac{r^2}{(r+x)^2}$$

Quod ad alteram variationis causam attinet, inter Geometras *) constat, vim attractivam strati sphaeroidalis homogenei in punctum intra situm nihilo aequalem esse. Inde concluditur in distantia x a superficie terrae strata aëris, quae supra incumbant, gravitati terrae nil addere posse; strata vero inferiora, si terrae formam sphaericam ponas, ita agere, tanquam massa eorum in umbilico terrae concentrata esset. Astronomi praeterea docuerunt, vim corporum attractivam in ratione massarum esse. Ut igitur vim stratorum illorum attractivam computemus, oportet, ut massam eorum massae globi terrestris comparemus, distantiae $r+x$ simul ratione habita. Massa unius strati elementaris est

$$4\pi(r+x)^2\,\vartheta\,dx$$

massa igitur omnium stratorum

$$4\pi\int(r+x)^2\,\vartheta\,dx$$

integrale, quod a $x=0$ incipere debet. Densitas terrae media sit P, erit massa ejusdem

$$\tfrac{4}{3}\pi P r^3$$

Ex lege igitur astronomica vis stratorum attractiva in distantiam r esset

$$\frac{3\,(g)}{P r^3}\int(r+x)^2\,\vartheta\,dx$$

Quae tamen vis, cum non in distantiam r, sed in distantiam $r+x$ agat, multiplicanda est factore $\dfrac{r^2}{(r+x)^2}$, ita ut gravitati terrae in distantia x ab ejus superficie ob atmosphaerae ipsius attractionem haec pars accedat:

$$\frac{3\,(g)}{P r(r+x)^2}\int(r+x)^2\,\vartheta\,dx$$

Hic ut supra pro ϑ valor ejus ope q et p' expressus substituendus esset. Facile tamen provideri potest, hoc facto aequationem (⊙) in secundi ordinis aequationem differentialem degeneraturam esse. Quam ut evitemus, per approximationem integrale propositum computare malim, cum valor ejusdem non solum perexiguus, sed strata quoque aëris tam homogenea non sint, quam calculus omnibus numeris absolvendus postularet. Si igitur temperaturae et vaporum aquae in integranda hac formula rationem non ducimus, aequatione

*) Laplace méc. cel. tom. II. pag. 9.

$$x = 18317 \text{ logv. } \frac{H}{h}$$

quam supra invenimus, uti licet, ponendo tamen pro quoto $\frac{H}{h}$ quotum aequale $\frac{(\vartheta)}{\vartheta}$ (significat scilicet (ϑ) densitatem aëris in ima statione.)

Ergo $$x = 18317 \text{ logv. } \frac{(\vartheta)}{\vartheta}$$

redeundo a logarithmis ad numeros, fit

$$10^{\frac{x}{18317}} = \frac{(\vartheta)}{\vartheta} \text{ consequenter}$$

$$\vartheta = (\vartheta)\, 10^{-\frac{x}{18317}} = (\vartheta)\, 10^{-\varepsilon x}$$

designando brevitatis causa $\frac{1}{18317}$ per ε.

Substituto pro ϑ hoc valore, fit:

$$\int (r+x)^2 \vartheta\, dx = (\vartheta) \int 10^{-\varepsilon x} (r+x)^2\, dx$$

Comparemus hanc expressionem cum formula: *)

$$\int a^x x^n\, dx = \frac{a^x}{la}\left(x^n - \frac{n}{la} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(la)^2} x^{n-2} \ldots\ldots\right) + \text{const}$$

et meminerimus la designare logarithmum naturalem quantitatis a, inveniemus

$$\int 10^{-\varepsilon x} (r+x)^2\, dx = -\frac{M}{\varepsilon 10^{\varepsilon x}}\left((r+x)^2 + 2\frac{M}{\varepsilon}(r+x) + 2\frac{M^2}{\varepsilon^2}\right) + \text{const}$$

Quantitatem constantem determinare licebit, observando integrale propositum, si $x = 0$, evanescere, ergo

$$\text{const} = \frac{M}{\varepsilon}\left(r^2 + \frac{2Mr}{\varepsilon} + \frac{2M^2}{\varepsilon^2}\right)$$

substituendo denique et reducendo:

$$\frac{3(g)}{Pr(r+x)^2}\int \vartheta (r+x)^2\, dx = \frac{3(g\ (\vartheta) M}{Pr(r+x)^2 \varepsilon^3 10^{\varepsilon x}} \left\{\varepsilon^2\left(r^2 10^{\varepsilon x} - (r+x)^2\right) + 2\varepsilon M\left(r 10^{\varepsilon x} - (r+x)\right) + 2M^2 (10^{\varepsilon x} - 1)\right\}$$

Quam tamen expressionem magna terminorum copia laborantem ita non servabo, sed partes ejusdem, quae caeterarum respectu viliores sunt, rejiciam. Negligendo

*) Lacroix calc. different. tom. II. p. 89.

igitur x et $\frac{M}{\varepsilon}$ respectu r, cujus iterum summam tantum potestatem servamus, haec prodibit expressio approximata:

$$\frac{3\,(g)}{Pr\,(r+x)^2}\int \vartheta\,(r+x)^2\,dx = \frac{3(g)\,(\vartheta)\,M}{P\varepsilon r}\left(1 - 10^{-\varepsilon x}\right)$$

quae igitur vim atmosphaerae ipsius attractivam in punctum a superficie terrae distantia x remotum representat.

Tertiam denique gravitatis terrae variationem, quae e vi ejusdem centrifuga revolutionibus diuturnis orta pendet, sequenti constructione calculo subjiciam. *) Sit A C P quadrans circuli meridiani, cujus revolutione circa C P dimidia sphaerae terrestris pars gignitur, ita ut C centrum, P alter polorum fiat, et A circulum aequatorem describat. Sit porro M punctum in superficie terrae situm, cujus latitudo AM $= \Psi$. Data est in hoc terrae puncto gravitas (g) ex formula illa nota observationibus innixa. Haec gravitas duabus partibus constat, gravitate scilicet terrae quiescentis in hoc punctum, quam littera G denotabimus, et diminutione ex terrae revolutione orta. Quam vim centrifugam in hoc puncto mechanici $\frac{4\pi^2 r \cos\Psi}{T^2}$ aequalem esse docuerunt, **) denotando scilicet per T tempus revolutionis diurnae minutis secundis expressum; consequenter ex figura nostra ea vis centrifugae pars, quae directionem gravitatis habet, exprimitur $\frac{4\pi^2 r \cos\Psi^2}{T^2}$ quo fit

$$(g) = G - \frac{4\pi^2 r}{T^2}\cos\Psi^2 \qquad (♁)$$

Quaeramus jam gravitatem g' in puncto H, cujus altitudo verticalis supra M sit x. Haec simili modo duabus partibus constat, gravitate scilicet terrae quiescentis, quae in hoc puncto ex lege astronomica est $G\frac{r^2}{(r+x)^2}$, et diminutione ex terrae revolutione orta. Tota hujus puncti vis centrifuga est $4\frac{\pi^2}{T^2}(r+x)$ $\cos\Psi$ et pars ejusdem, quae in directionem gravitatis cadit, $\frac{4\pi^2}{T^2}(r+x)\cos\Psi^2$ ergo

$$g' = G\frac{r^2}{(r+x)^2} - \frac{4\pi^2}{T^2}(r+x)\cos\Psi^2 \qquad (♀)$$

eliminando G inter aequationes (♁) et (♀), reperies

*) Figuram constructionis omisimus, quippe qua simplicitatis causa facili negotio restituenda supersedere possimus.

**) Poisson traité de méc. tom. I, p. 390.

$$g' = \frac{(g) r^2}{(r+x)^2} + \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 (r+x)^2} \cos\Psi^2 - \frac{4\pi^2 (r+x)}{T^2} \cos\Psi^2$$

sive
$$g' = \frac{(g) r^2}{(r+x)^2} + \frac{4\pi^2 (r^3 - (r+x)^3)}{T^2 (r+)^2} \cos\Psi^2$$

et negligendo superiores potestates quantitates $\frac{x}{r}$ erit

$$g' = \frac{(g) r^2}{(r+x)^2} - \frac{12\pi^2 rx}{T^2 (r+x)} \cos\Psi^2$$

Pars igitur, qua gravitas per vim terrae centrifugam in altitudine x diminuitur, est
$$\frac{12\pi^2 rx}{T^2 (r+x)} \cos\Psi^2$$

Cum autem gravitas ex triplici causa, quas singulas hucusque pertractavimus, simul mutetur, erit denique

$$g = (g) \frac{r^2}{(r+x)^2} + \frac{3(g)(\vartheta) M}{P \varepsilon r} \left(1 - 10^{-\varepsilon x}\right) - \frac{12\pi^2 rx}{T^2 (r+x)} \cos\Psi^2$$

sive denotando coefficientes constantes litteris simplicioribus, erit:

$$g = (g) \frac{r^2}{(r+x^2} + (g)\eta \left(1 - 10^{-\varepsilon x}\right) - K \frac{rx}{r+x}$$

et substituendo hunc valorem quantitatis g in aequationem (⊙), evadet

$$-dq = \frac{mq - (m-1) \Pi \gamma^x}{am (\beta - \tau x)} \left\{ (g) \frac{r^2}{(r+x)^2} + (g)\eta \left(1 - 10^{-\varepsilon x}\right) - K \frac{rx}{r+x} \right\} dx$$

Cujus aequationis differentialis, quae primi et ordinis et gradus dicitur, *) integratio non nisi e quadraturis pendet, imprimis ex integrali transcendente $\int \frac{c^y}{y} dy$, ut infra probabo.

Designando enim in hac aequatione brevitatis causa

$$\frac{(g) \frac{r^2}{(r+x)^2} + (g)\eta \left(1 - 10^{-\varepsilon x}\right) - K \frac{rx}{r+x}}{a (\beta - \tau x)} \text{ per R}$$

et
$$\frac{(m-1) \Pi \gamma^x}{am (\beta - \tau x)} \left\{ (g) \frac{r^2}{(r+x)^2} + (g)\eta \left(1 - 10^{-\varepsilon x}\right) - K \frac{rx}{r+x} \right\} \text{ per Q}$$

*) Lacroix calc. diff. et integr. tom. II. pag. 254.

aequatio mutabitur in hanc

$$dq + Rp\,dx = Q\,dx$$

cujus integrale est:

$$q = e^{-\int R dx}\left(\int e^{\int R dx} Q\,dx + C\right)$$

facile autem intelligitur, esse

$$Q = \frac{m-1}{m}\,\Pi\,\gamma^x\,R$$

ergo per substitutionem

$$q = e^{-\int R dx}\left(\int e^{\int R dx}\frac{m-1}{m}\,\Pi\,\gamma^x R\,dx + C\right)$$

et ponendo quantitatem constantem $\frac{m-1}{m}\,\Pi$ ante signum integrationis

$$q = e^{-\int R dx}\left(\frac{m-1}{m}\Pi\int e^{\int R dx}\gamma^x R\,dx + C\right)$$

quae formula simplicior etiam reddi potest, observando quantitatem $\int e^{\int R dx}\gamma^x R\,dx$ non sine utilitate per partes intregrari posse; ope scilicet formulae notissimae

$$\int u dv = uv - \int v du$$

fit:

$$\int e^{\int R dx}\gamma^x R dx = e^{\int R dx}\gamma^x - \int e^{\int R dx} d.\gamma^x = e^{\int R dx}\gamma^x - l\gamma\int e^{\int R dx}\gamma^x dx$$

substituendo et reducendo efficitur denique:

$$q = \frac{m-1}{m}\left(\Pi\gamma^x - e^{-\int R dx}\,l\gamma\int e^{\int R dx}\gamma^x dx\right) + Ce^{-\int R dx} \qquad (D)$$

Ecce jam aequationem desideratam, quae commercium inter q et x exprimit. In ea quoque, cum problema ad quadraturas reductum pro soluto habendum sit, acquiescere possimus. Placet tamen viam, qua hae fieri possint, levi manu indigitare. Et primo quidem id agimus, ut integrale $\int R dx$ eruamus. Constat hoc tribus partibus, quarum singulae sunt inveniendae. Habemus scilicet ex nostra denotatione

$$\int R dx = \frac{(g)\,r^2}{a}\int\frac{dx}{(r+x)^2(\beta-\tau x)} + \frac{(g)\eta}{a}\int\frac{1-10^{\varepsilon x}}{\beta-\tau x}dx - \frac{Kr}{a}\int\frac{x dx}{(r+x)(\beta-\tau x)}$$

ut primam integralis partem reperiamus, scribam

$$\frac{dx}{(r+x)^2(\beta-\tau x)} \text{ hac forma } \frac{dx}{\tau(r+x)^2\left(\frac{\beta}{\tau}-x\right)} \text{ sive } -\frac{dx}{\tau(x+r)^2\left(x-\frac{\beta}{\tau}\right)}$$

Ut igitur $\dfrac{dx}{(x+r)^2\left(x-\frac{\beta}{\tau}\right)}$ integretur, pono ex methodo fractionum rationalium

$$\frac{dx}{(x+r)^2\left(x-\frac{\beta}{\tau}\right)}=\frac{N\,dx}{x-\frac{\beta}{\tau}}+\frac{N_1\,dx}{(x+r)^2}+\frac{N_2\,dx}{x+r}$$

Reperio $N=\dfrac{1}{\left(r+\frac{\beta}{\tau}\right)^2}$ $N_1=-\dfrac{1}{r+\frac{\beta}{\tau}}$ et $N_2=-\dfrac{1}{\left(r+\frac{\beta}{\tau}\right)^2}$

ergo

$$\frac{dx}{(x+r)^2\left(x-\frac{\beta}{\tau}\right)}=\log\left(\frac{x-\frac{\beta}{\tau}}{x+r}\right)^{\frac{1}{\left(r+\frac{\beta}{\tau}\right)^2}}+\frac{1}{\left(r+\frac{\beta}{\tau}\right)(x+r)}$$

et

$$\frac{-dx}{\tau(r+x)^2\left(x-\frac{\beta}{\tau}\right)}=\log\left(\frac{x+r}{x-\frac{\beta}{\tau}}\right)^{\frac{\tau}{(r\tau+\beta)^2}}-\frac{1}{(r\tau+\beta)(x+r)}$$

$$=\frac{1}{\beta+r\tau}\left\{\log\left(\frac{x+r}{x-\frac{\beta}{\tau}}\right)^{\frac{\tau}{r\tau+\beta}}-\frac{1}{x+r}\right\}$$

Ergo $$\frac{(g)r^2}{a}\int\frac{dx}{(r+x)^2(\beta-\tau x)}=\frac{(g)r^2}{a(r\tau+\beta)}\left\{\log\left(\frac{x+r}{x-\frac{\beta}{\tau}}\right)^{\frac{\tau}{r\tau+\beta}}-\frac{1}{x+r}\right\}$$

Quaero jam tertiam integralis partem, quae pendet ex

$$\int\frac{x\,dx}{(x+r)(\beta-\tau x)}=-\int\frac{x\,dx}{\tau(x+r)\left(x-\frac{\beta}{\tau}\right)}$$

Cum numerator radices omnes habeat inaequales, calculus facili negotio secundum regulam, quam Lacroix (traité élém. de calc. diff. et integr. 3. ed. p. 233) dedit, absolvitur. Ergo

$$\int \frac{x\,dx}{\tau(x+r)\left(x-\frac{\beta}{\tau}\right)} = \int \frac{r\,dx}{(r\tau+\beta)(x+r)} + \int \frac{\beta\,dx}{\tau(r\tau+\beta)\left(x-\frac{\beta}{\tau}\right)}$$

$$= \frac{r}{r\tau+\beta}\log(x+r) + \frac{\beta}{\tau(r\tau+\beta)}\log\left(x-\frac{\beta}{\tau}\right) = \frac{1}{r\tau+\beta}\log\left\{(x+\beta)^{r}\left(x-\frac{\beta}{\tau}\right)^{\frac{\beta}{\tau}}\right\}$$

ergo $$-\frac{Kr}{a}\int \frac{x\,dx}{(x+r)(\beta-\tau x)} = \frac{Kr}{a(r\tau+\beta)}\log\left\{(x+r)^{r}\left(x-\frac{\beta}{\tau}\right)^{\frac{\beta}{\tau}}\right\}$$

Restat vero altera integralis pars, quae pendet ex

$$\int \frac{1-10^{-\varepsilon x}}{\beta-\tau x}\,dx = \frac{1}{\tau}\int \frac{10^{-\varepsilon x}-1}{x-\frac{\beta}{\tau}}\,dx$$

$$\int \frac{10^{-\varepsilon x}-1}{x-\frac{\beta}{\tau}}\,dx = \int \frac{10^{-\varepsilon x}\,dx}{x-\frac{\beta}{\tau}} - \int \frac{dx}{x-\frac{\beta}{\tau}}$$

Integrationis causa pono $10^{-\varepsilon} = c$ et $x - \frac{\beta}{\tau} = y$, ita fit

$$\int \frac{10^{-\varepsilon x}\,dx}{x-\frac{\beta}{\tau}} = \int \frac{c^{y+\frac{\beta}{\tau}}\,dy}{y} = c^{\frac{\beta}{\tau}}\int \frac{c^{y}\,dy}{y} \;{}^{*)}$$

Denotando cum Soldner et Bessel $\int \frac{dz}{lz}$ per li. z,

*) Lacroix calc. diff. et integr. tom. III. p. 526.

$$c^{\frac{\beta}{\tau}} \int \frac{c^y dy}{y} = c^{\frac{\beta}{\tau}} \text{li.}\, c^y$$

et restituendo pro c et y valores eorum

$$c^{\frac{\beta}{\tau}} \int \frac{c^y dy}{y} = 10^{-\frac{\varepsilon\beta}{\tau}} \text{li.}\, 10^{-\varepsilon(x - \frac{\beta}{\tau})}$$

ergo $\quad \frac{1}{\tau} \int \frac{10^{-\varepsilon x} - 1}{x - \frac{\beta}{\tau}} dx = \frac{10^{-\varepsilon\frac{\beta}{\tau}}}{\tau} \text{li.}\, 10^{-\varepsilon(x - \frac{\beta}{\tau})} - \frac{1}{\tau} \log (x - \frac{\beta}{\tau})$

ita denique altera integralis quaesiti pars fit

$$\frac{(g)\eta}{a\tau} \left\{ 10^{-\frac{\varepsilon\beta}{\tau}} \text{li.}\, 10^{-\varepsilon(x - \frac{\beta}{\tau})} - \log (x - \frac{\beta}{\tau}) \right\}$$

Quarum trium partium ut summa brevius exprimatur, ponamus

$$\frac{(g) r^2 \tau}{a(r\tau + \beta)^2} + \frac{K r^2}{a(r\tau + \beta)} = A$$

$$\frac{(g) r^2 \tau}{a(r\tau + \beta)^2} - \frac{K r \beta}{a\tau(r\tau + \beta)} + \frac{(g)\eta}{a\tau} = B$$

ex inde evadit summa partium logarithmicarum

$$\log \frac{(x+r)^A}{(x - \frac{\beta}{\tau})^B}$$

Ponendo denique brevitatis causa $\frac{(g)\eta}{a\tau} 10^{-\frac{\varepsilon\beta}{\tau}} = D$ et $\frac{(g) r^2}{a(r\tau + \beta)} = E$ fit postremo

$$\int R dx = \log \frac{(x+r)^A}{(x - \frac{\beta}{\tau})^B} + D \text{ li.}\, 10^{-\varepsilon(x - \frac{\beta}{\tau})} - \frac{E}{x+r}$$

Quibus repertis jam id agendum est, ut $e^{\int R dx}\gamma^x dx$ integretur. Quae tamen integratio, omisso ipso membro D li $10^{--g\left(x--\frac{\beta}{\tau}\right)}$ ita implicatur, ut omnem fere spem integrale

$$\int e^{\int R dx}\gamma^x dx = \int \left(e^{\log\frac{(x+r)^A}{\left(x--\frac{\beta}{\tau}\right)^B}-\frac{E}{x+r}}\right)\gamma^x dx \text{ sive } = \int \frac{(x+r)^A}{\left(x--\frac{\beta}{\tau}\right)^B} e^{--\frac{E}{x+r}}\gamma^x dx$$

inveniendi abjiciamus, cui non nisi per resolutionem in series accedi posset.

Quantitas constans C aequationis (☽) ope valoris q, quem observatio, ubi $x = 0$, docuit, littera Q designandi determinatur Ita quantitas Q in hanc aequationem introducitur. Ut denique integratio usque ad $x = h$ continuetur, pro x ubique h scribendum est, et pro q valor ejus, quem observatio in ultima statione dedit, littera Q' designandus substitui debet. Ita invenitur aequatio, qua relatio inter Q, Q' et h quaesita perspicua fit. Nil igitnr jam superest, quam ut Q et Q' ope barometri observentur. Hoc tamen simplici via fieri nequit. Sit enim H altitudo barometri in ima, H' eadem ia suprema statione, certum quidem habemus, H et H' elateres aëris metiri, ita tamen, ut primo temperaturae columnarum mercurialium, secundo mutationum, quas gravitas in utraque statione subit, rationem ducamus. Sint ergo T mercurii temperatura in ima, T' eadem in suprema, (g) et $(g)'$ gravitates correspondentes, δ densitas mercurii in ima, consequentur $\delta\left(1+\frac{T-T'}{5550}\right)$ eadem in suprema, *) habebimus ut supra

$$Q = \delta\,(g)\ H \quad \text{et} \quad Q' = d\left(1+\frac{T--T'}{5550}\right)(g)'\ H'$$

Si denique miminerimus, quomodo (g) et $(g)'$ e latitudine geographica et e distantia stationum i. e. h pendeant, facili negotio Q et Q' ex aequatione (☽) eliminari poterint, ita ut aequatio finalis inde evadens relationem inter barometri et aëris altitudines patefaciat.

Laplace **) jam diu talem formulam exhibuit, ut vix ac ne vix quidem quoad applicationem accuratior esse queat. Neque propositum nobis fuit, hanc emen-

---

*) Conf. Biot Précis élém. de phys. tom. I. p. 238.

**) Méc. cel. tom. IV. p. 292.

dare; imo in hoc tantummodo animum tetendimus, ut theoriam problematis omnibus numeris absolveremus. Laplace enim vaporum aqueorum vim obiter tantum tractavit, gravitatis vero mutationes, quae ex aëre ipso et ex terrae vertigine originem ducunt, plane neglexit, ita tamen, ut praxi nullum inde damnnm fieret.

Jam igitur disquisitioni qualicunque nostrae finem imponimus. Hoc tantum nobis addere liceat, eam desiderium excitasse, ut Geometrae integrale transcendens $\int \frac{dx}{z}$ sive li. z simili modo perscrutati essent ac $\int \frac{dz}{z}$ aut $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ etc. Negari enim omnino nequit, quantitates transcendentes neutiquam adhuc ita esse perspectas, ut in affinium conjunctione nec non in dispositione independentium nil desideretur, quod imprimis in transcendentes ex aequationum differentialium integratione oriundas cadere videtur.

De

problematis indeterminatis

ſ. Diophanteis

primi gradus.

Sunt problemata analytica, quae, cum aequationes quantitatibus incognitis pauciores praebeant, et hanc ob causam solutiones innumeras admittant, indeterminata vocantur. Ponamus enim problema aliquod m aequationes et $m + n$ incognitas exhibere, patet e praeceptis algebrae n incognitas pro arbitrio determinandas esse, quo facto reliquas m incognitas inveniri posse. Ita problema indeterminatum ad solutionem determinati reducitur hac quidem ratione, ut incognitae arbitrariae i. e. quantaecunquae alias super alias solutiones exhibeant. Quibus tamen problematis adduntur saepius conditiones, quae solutionum numerum valde limitant. Excluduntur enim in omnibus problematis hujus indolis valores incognitarum negativi, in problematis primi gradus praeterea valores fracti, et in problematis superiorum graduum valores irrationales. Ita problemata indeterminata multo difficilius solvuntur, inprimis si incognitae primum gradum excedunt. Facillime tamen solvuntur aequationes, in quibus neque potentiae neque producta incognitarum inveniuntur. Liceat jam mihi novam solvendi methodum consueta multo breviorem exponere, quae omnem calculum ad merum mechanismum reducit.

Ut igitur a causa simplicissima incipiam, data sit una aequatio inter duas incognitas hujus formae:

$$ax + by = c$$

Quaestio jam eo redit, ut incognitae x et y numeris positivis et integris expressae eruantur.

Primo ponere licet, a, b et c numeros esse integros, nam, si aequatio aliter se haberet e. g.

$$\frac{a'}{p}x + \frac{b'}{q}y = \frac{c'}{r}$$

facile numeratores ejici possent multiplicando aequationem per minimum numeratorum communem dividuum.

Secundo ponamus, a et b numeros esse primos inter se, si enim divisorem communem haberent, aequatio hujus formae esset:

$$a'px + b'py = c \qquad \text{sive} \qquad a'x + b'y = \frac{c}{p}$$

quae nunquam numeris integris solvi potest, nisi c quoque per p dividi poterit.

Ponamus tertio loco:

$a < b$ quod attinet ad valores absolutos;

alioquin enim non nisi nomina incognitarum permutari deberent.

Postremo a semper positivum ponatur, alioquin aequatio proposita per -1 multiplicari deberet; b et c autem tum positivi tum negativi numeri esse possunt.

Theorema. Valores incognitarum serie arithmetica progrediuntur, cujus differentia coëfficiens alterius incognitae in aequatione data est, ita tamen ut altera series ascendat, altera descendat in universum.

Ut hoc probemus sint α et β duo valores incognitarum correspondentes, erit ex hypothesi $a\alpha + b\beta = c$

Addatur et subtrahatur huic aequationi abt, ubi t quantitatem arbitrariam denotat, erit; $a(\alpha \pm bt) + b(\beta \mp at) = c$

unde ope aequationis datae concluditur:

$$x = \alpha \pm bt \qquad y = \beta \mp at$$

$\alpha \pm bt$ et $\beta \mp at$ termini generales progressionum arithmeticarum sunt, quarum altera ascendit, dum altera descendit in universum. In universum, inquam, nam series, cujus terminus generalis $\alpha + bt$ non crescit, et series, cujus terminus generalis $\alpha - bt$ non decrescit, si b numerus negativus est.

Quibus jam positis solutionem ipsam aggrediamur hoc modo:

Quaerantur ex methodo fractionum continuarum valores approximati fractionis genuinae $\frac{a}{b}$, signorum ratione non habita, dico: ultimo valore approximato $\frac{m}{n}$ vocando solutionem problematis ubique dari.

Ut melius hoc perspiciamus, sententiam dividamus:

I. Numerus fractionum approximatarum par est,

erit ex theoria fractionum continuarum, si valores absolutos a et b spectas:

$$an - bm = 1 \qquad (1)$$

1) Sit $ax + by = c$

Apertum est, $x = cn$ et $y = -cm$ aequationi propositae satisfacere, quam scilicet ad aequationem (1) reducunt. Habemus igitur solutionem problematis numeris integris, quae tamen nondum sufficit, quia valor ipsius y negativus; ope tamen theorematis demonstrati facile valores positivi eruuntur. Ponendum enim est:

$$x = cn - bt \qquad \text{et} \qquad y = -cm + at$$

Unde ut x et y numeri positivi fiant, concluduntur limites quantitatis arbitrariae t hi:

$$t < \frac{cn}{b} \qquad \text{et} \qquad t > \frac{cm}{a}$$

qui sibi non contradicunt (quia ob aequationem (⊙) $\frac{n}{b} > \frac{m}{a}$) et omnes solutiones numero finitas dant, si pro t omnes numeros integros inter limites designatos ponas. Accidere potest, ut inter hos limites numerus integer non detur, tum problema solvi nequit.

Exemplum.

Numerum 100 in duas partes partiri, quarum altera per 9, altera per 23 dividi possit.

Facili negotio aequatio haec formatur:

$$9x + 23y = 100$$

Comparando cum aequatione $ax + by = c$, invenimus $\frac{a}{b} = \frac{9}{23}$ et valores approximatos $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{18}$, quorum ultimus $\frac{7}{18} = \frac{m}{n}$, ergo

$$x = 1800 - 23t \qquad y = 9t - 700$$
$$t < 78\tfrac{6}{23} \qquad t > 77\tfrac{7}{9}$$

t igitur tantummodo 78 sumi potest, unde $x = 6$, $y = 2$, et altera pars $= 54$, et altera $= 46$.

2) Sit $ax + by = -c$.

Patet $x = -cn$ et $y = cm$ aequationi propositae satisfacere. Habemus igitur ut supra ope theorematis nostri:

$$x = -cn + bt \qquad y = cm - at$$

ut vero hi valores positivi sint, t his limitibus coërcetur:

$$t > \frac{cn}{b} \qquad \text{et} \qquad t < \frac{cm}{a}$$

qui sibi repugnant, cum vi aequationis (⊙)

$$\frac{cm}{a} < \frac{cn}{b}$$

Solutio igitur non datur, quod per se quoque patet.

3) Sit $ax - by = c$

$x = cn$ et $y = cm$ aequationi propositae satisfaciunt, quam scilicet ad aequationem (⊙) reducunt. Ergo ut supra mutatis mutandis

$$x = cn + bt \qquad y = cm + at$$

qui valores ut semper positivi sint, hos limites quantitatis arbitrariae t dant

$$t > -\frac{cn}{b} \qquad \text{et} \qquad t > -\frac{cm}{a}$$

t igitur imo negativum poni potest; cum vero $\frac{cm}{a} < \frac{cn}{b}$ alter limitum $\frac{cn}{b}$ supervacaneus, ita ut conditio

$$t > -\frac{cm}{a}$$

sufficiat. Numerus jam solutionem infinitus est.

Exemplum.

Invenire numeros decem unitatibus differentes, quorum alter per 21, alter per 34 dividi possit.

Formatur statim aequatio

$$21x - 34y = 10$$

valores approximati fractionis $\frac{21}{34}$ sunt, $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}$, quorum ultimus $= \frac{m}{n}$, ergo

$$x = 130 + 34t \qquad y = 80 + 21t$$

$$t > -3\tfrac{17}{21} \text{ minimus ergo valor ipsius } t = -3$$

unde
$$x = 28 \mid 28 + 34 \mid 28 + 2.34 \mid 28 + 3.24 \mid \ldots.$$
$$y = 17 \mid 17 + 21 \mid 17 + 2.21 \mid 17 + 3.21 \mid \ldots.$$

et numeri quaesiti:
$$588 \mid 588 + 714 \mid 588 + 2.714 \mid 588 + 3.714 \mid \ldots.$$
$$578 \mid 578 + 714 \mid 578 + 2.714 \mid 578 + 3.714 \mid \ldots.$$

etc. in infinitum.

4) Sit $ax - by = -c$

Huic aequationi satisfaciunt $x = -cn$, $y = -cm$

ergo
$$x = -cn + bt \qquad y = -cm + at$$

limites sunt:
$$t > \frac{cn}{b} \quad \text{et} \quad t > \frac{cm}{a}$$

quorum prior retinendus, alter supervacaneus rejiciendus. Numerus solutionum pariter infinitus est.

Exemplum.

Numerum invenire, qui per 36 divisus 4, per 25 divisus 11 relinquat.

Aequatio haec formatur:

$$25x + 11 = 36y + 4 \qquad \text{sive} \qquad 25x - 36y = -7$$

Valores approximati fractionis $\frac{a}{b}$ sunt: $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{9}{13}$; ergo $\frac{m}{n} = \frac{9}{13}$, unde

$$x = -91 + 36t \qquad y = -63 + 25t$$

$$t > 2\tfrac{19}{36} \text{ minimus ergo valor ipsius } t = 3$$

ergo
$$x = 17 \mid 17 + 36 \mid 17 + 2.36 \mid 17 + 3.36 \mid \ldots.$$
$$y = 12 \mid 12 + 25 \mid 12 + 2.25 \mid 12 + 3.25 \mid \ldots.$$

numerus quaesitus $436 \mid 436 + 25.36 \mid 436 + 2.25.36 \mid 436 + 3.25.36 \mid \ldots.$ in infinitum.

II. Numerus fractionum approximatarum impar est: habebimus ex theoria fractionum continuarum, si valores quantitatum a et b absolutos spectas: $an - bm = -1$ (D)

1) Sit $ax + by = c$

Vi aequationis (D) $x = -cn$ et $y = cm$ satisfaciunt aequationi propositae, ergo ex theoremate nostro:

$$x = -cn + bt \qquad y = cm - at$$

unde limites $t > \frac{cn}{b}$ et $t < \frac{cm}{a}$

qui sibi non contradicunt, quia ob (D) $\frac{n}{b} < \frac{m}{a}$. Quot igitur numeri integri inter limites designatos continentur, tot sunt problematis solutiones.

Exemplum.

Numerum 1000 in duas partes partiri, quarum altera per 7, altera per 67 dividi possit.

Formatur aequatio $7x + 67y = 1000$

valores approximati fractionis $\frac{a}{b}$ sunt $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{19}$

ergo $x = -19000 + 67t \qquad y = 2000 - 7t$

$$t > 283\tfrac{39}{67} \quad \text{et} \quad t < 285\tfrac{5}{7}$$

duo igitur valores t sunt scilicet 284 et 285, unde

$x =$	28	95
$y =$	12	5
partes quaesitae	196	665
	804	335

2) Sit $ax + by = -c$

Simili modo ut supra formantur aequationes:

$$x = cn - bt \qquad y = -cm + at$$

sed limites sunt $t < \frac{cn}{b}$ et $t > \frac{cm}{a}$

qui sibi contradicunt, cum $\frac{n}{b} < \frac{m}{a}$. Nulla igitur datur solutio.

3) Sit $ax - by = c$

Huic aequationi satisfaciunt valores

$$x = -cn + bt \qquad y = -cm + at$$

unde limites $t > \frac{cn}{b}$ et $t > \frac{cm}{a}$

quorum prior rejici potest. Numerus igitur solutionum infinitus est.

Exemplum.

Numerum invenire, qui per 13 divisus 1, per 24 divisus 8 relinquat.

Formatur aequatio

$$13x + 1 = 24y + 8 \quad \text{sive} \quad 13x - 24y = 7$$

fractiones approximatae sunt $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{6}{11}$, ergo $m = 6$ et $n = 11$, unde

$$x = -77 + 24t \qquad y = -42 + 13t$$

$t > 3\frac{3}{13}$ minimus ergo valor ipsius t est 4,

ergo	$x = 19$	$19 + 24$	$19 + 2.24$	$19 + 3.24$	....
	$y = 10$	$10 + 13$	$10 + 2.13$	$10 + 3.13$	....
numerus quaesitus	248	$248 + 13.24$	$248 + 2.13.24$	$248 + 3.13.24$	....

in infinitum.

4) Sit denique $ax - by = -c$

Facili negotio concluditur

$$x = cn + bt \qquad y = cm + at$$

limes ergo $t > -\frac{cn}{b}$

Numerus solutionum neque minus infinitus est, atque in problemate praecedente.

Exemplum.

Numerum invenire, qui per 4 et 7 divisus 3, per 5 et 9 divisus 1 relinquat.

Aequatio haec solvenda

$$28x + 3 = 45y + 1 \quad \text{sive} \quad 28x - 45y = -2$$

Fractiones approximatae sunt: $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$, ergo $m = 5$, $n = 8$

consequenter $x = 16 + 45t \qquad y = 10 + 28t$

$t > -\frac{16}{45}$ minimus ergo valor ipsius t est 0,

ergo	$x = 16$	$16 + 45$	$16 + 2.45$	$16 + 3.45$	....
	$y = 10$	$10 + 28$	$10 + 2.28$	$10 + 3.28$	....
numerus quaesitus	451	$451 + 45.28$	$451 + 2.45.28$	$451 + 3.45.28$	...

in infinitum.

Jam igitur in omni re aequationem inter duas indeterminatas resolvere possumus. Eadem vero via plures quoque aequationes inter totidem et unam indeterminatam resolvi possunt. Sint e. g. aequationes

$$ax + by + cz = e \qquad a'x + b'y + c'z = e'$$

eliminando unam incognitarum e. g. z, habebis

$$(ac' - a'c)\,x + (bc' - b'c)\,y = ec' - e'c$$

aequationem, ex qua per methodum expositam x et y ope t expressa invenienda sunt, quae substituendo in alterutram aequationum propositarum novae aequationi inter t et z locum dabunt. Aequatio inventa eodem modo solvenda, ut z et t per novam arbitrariam t' exprimantur. Ita denique omnes incognitae x, y et z ex eadem arbitraria t' pendebunt.

Exemplum.

Sint aequationes

$$5x + 3y + 7z = 560 \qquad 25x + 9y + 49z = 2920$$

eliminando z erit $\qquad 10x + 12y = 1000$ sive $5x + 6y = 500$

ergo (II,1) $\qquad x = -500 + 6t \qquad y = 500 - 5t$

Substituendo in priorem aequationum propositarum, erit

$$-2500 + 30t + 1500 - 15t + 7z = 560$$

$$\text{sive} \quad 7z + 15t = 1560$$

ergo $\qquad z = -3120 + 15t' \qquad t = 1560 - 7t'$

$$x = 8860 - 42t'$$

$$y = -7300 + 35t'$$

limites hi concluduntur $t' > \frac{3120}{15}$, $t' > \frac{7300}{35}$, $t' < \frac{8860}{42}$ i. e. t' duplicem tantum valorem scilicet 209 et 210 habere potest.

ergo

	$x = 82$	40
	$y = 15$	50
	$z = 15$	30

Sit porro inter tres incognitas una aequatio hujus formae

$$az + by + cz = e$$

ut hanc ad aequationes praecedentes referamus, ita scribatur

$$ax + by = e - cz \qquad \text{sive} \qquad ax + by = c'$$

designando brevitatis causa $e - cz$ per c'. Resolvatur jam haec aequatio methodo superiori, ita ut x et y ope c' et arbitrariae t exprimantur. Restituendo denique pro c' valorem $e - cz$, incognitae x et y ex arbitrariis z et t pendebunt, quae tamen ita determinari debent, ut z, x et y non nisi positivos valores induant.

Exemplum.

Numerum 50 in tres partes partiri, quarum prima per 5, altera per 8, tertia per 7 dividi possit

Habemus aequationem

$$5x + 8y + 7z = 50$$

resolvatur aequatio $5x + 8y = c'$, ubi $c' = 50 - 7z$

Invenio (II,1) $\qquad x = 3c' + 8t \qquad y = 2c' - 5t$

ergo $\qquad x = -150 + 21z + 8t \qquad y = 100 - 14z - 5t$

limites hoc modo inveniuntur

$$21z + 8t > 150 \qquad 14z + 5t < 100$$

$$\text{sive} \qquad t > \frac{150 - 21z}{8} \qquad \text{et} \qquad t < \frac{100 - 14z}{5}$$

ne igitur contradictio locum habeat, esse debet

$$\frac{150 - 21z}{8} < \frac{100 - 14z}{5}$$

$$\text{sive} \qquad 750 - 105z < 800 - 112z$$

unde $\qquad 7z < 50$ sive $z < 7\frac{1}{7}$

z igitur, cum semper positivum esse debeat, septem valores scilicet 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 habere potest.

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } z = 1, \ t \text{ non nisi } 17 \\ \text{si } z = 2, \ t \ \text{- - -} \ 14 \\ \text{si } z = 3, \ t \ \text{- - -} \ 11 \end{array}\right\} \text{ esse potest}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } z = 4 \\ \text{si } z = 5 \\ \text{si } z = 6 \\ \text{si } z = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{limites quidem contradictorii non sunt, numerum tamen inte-} \\ \text{grum pro } t \text{ non admittunt.}\end{array}$$

Tres igitur sunt solutiones scilicet:

$$\begin{array}{l|l|l|} x = 7 & 4 & 1 \\ y = 1 & 2 & 3 \\ z = 1 & 2 & 3 \end{array}$$

unde partes quaesitae

$$\begin{array}{l|l|l|} 35 & 20 & 5 \\ 8 & 16 & 24 \\ 7 & 14 & 21 \end{array}$$

Haud difficile est artificium ad plures aequationes inter totidem et duas incognitas extendere. Sint e. g. duae aequationes inter quatuor incognitas

$$ax + by + cz + ev = f \qquad a'x + b'y + c'z + e'v = f'$$

eliminando unam incognitarum e. g. v., venit aequatio

$$(ae' - a'e)x + (be' - b'e)y + (ce' - c'e)z = fe' - f'e$$

ex qua, ut modo diximus, incognitae x et y ope t et z expressae inveniuntur. Quibus substitutis in alterutram aequationum propositarum habebis novam aequationem inter z, v et t, cujus ope z et v iterum per t et novam indeterminatam t' exprimantur, ita ut denique quatuor incognitae x, y, z et v ex iisdem arbitrariis t et t' pendeant, quae tamen ita sumantur, ut non nisi positivi valores incognitarum inde efficiantur.

Causa denique non difficilior fit, si tribus vel pluribus incognitis aequationes abundant. Proposita sit e g. aequatio.

$$ax + by + cz + ev = f$$

scriberes $ax + by = c'$, ponendo scilicet $f - cz - ev = c'$. Soluta deinde aequatione $ax + by = c'$, invenies x et y ex t et c' sive $f - cz - ev$ pendentes. Quantitates denique arbitrariae z, v et t ut supra determinandae sunt.

Quibus omnibus apparet, problemata indeterminata primi gradus i. e. neque potentiis neque productis incognitarum obnoxia, in omne re, si omnino solvi possint, ex methodo nostra facillime revera solvi.

squisitiones duas

30

cam alteram mathematicam

scripsit

ritius Guilelmus Grebel,

hysices praeceptor in schola Glogaviensi.

ae, typis Günteri, 1825.