

Quantenkorrekturen im Hypermultiplettsektor von Typ II Stringtheorien

Dissertation



zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt der

Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät

der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

von

Herrn Holger Günther

geb. am: 30.7.1969 in: Bochum

Gutachter

1. Prof. Dr. Jan Louis
2. Prof. Dr. Richard Grimm
3. Dr. habil. Klaus Behrndt

Halle (Saale), 3.7.2000

Danksagung

An erster Stelle gilt mein Dank Herrn Prof. J. Louis für den Vorschlag des Themas, die Betreuung der Arbeit und seine ständige Bereitschaft, über sich ergebende Probleme zu diskutieren.

Den Mitarbeitern der Arbeitsgruppe Quantenfeldtheorie, R. Böhm, M. Haack, C. Herrmann, M. Klein, M. Marquart und T. Mohaupt, danke ich für die vielen Gespräche, die mir halfen, den Gegenstand meiner Arbeit besser zu durchdringen. Herrn Prof. R. Grimm und seiner Arbeitsgruppe am CPT Marseille danke ich für die mir während meines dortigen Aufenthaltes erwiesene Gastfreundschaft. Dieser Aufenthalt wurde vom DAAD unterstützt.

Ich wurde von der Landesgraduierföderung Sachsen-Anhalt mit einem Stipendium unterstützt.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Grundlagen der Stringtheorie	1
1.2	Niederenergie Effektive Wirkungen	5
1.3	$N = 2$ Supergravitation	7
1.4	Calabi-Yau Kompaktifizierungen	8
1.5	Dualitäten	15
1.6	Ergebnisse und Gliederung der Arbeit	17
2	Das universelle Hypermultiplett	19
2.1	Einleitung	19
2.2	Die klassische Wirkung	20
2.3	Der Ansatz für die quantenkorrigierte Metrik	23
2.4	Die Störungsreihe	26
2.5	Quantenkorrekturen in der ersten Ordnung	29
2.6	Quantenkorrekturen in allen Ordnungen	31
2.7	Das Nichtrenormierungstheorem	35
3	Eine Realisierung der Mirrorsymmetrie	37
3.1	Einleitung	37
3.2	Die IIA Theorie	38
3.3	Der Limes großer komplexer Strukturen	41
3.4	Die IIB Theorie	43
3.5	Die Abbildung	45
3.6	Die Brechung der $SL(2, \mathbb{Z})$	47
4	Quantenkorrekturen im allgemeinen Fall	49
4.1	Einleitung	49
4.2	Der Limes zum universellen Hypermultiplett	49
4.3	Bekannte Quantenkorrekturen	53
4.4	Der Ansatz für die quantenkorrigierte Wirkung	55
4.5	Probleme der geometrischen Untersuchung I	59
4.6	Probleme der geometrischen Untersuchung II	64
5	Zusammenfassung	67

A Geometrie	69
A.1 Einleitung	69
A.2 Komplexe Strukturen auf reellen Vektorräumen	70
A.3 Fast komplexe und komplexe Mannigfaltigkeiten	71
A.4 Kählermannigfaltigkeiten	72
A.5 Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten	74
A.6 Quaternionen und quaternionische Strukturen	76
A.7 Quaternionische Kählermannigfaltigkeiten	77
A.8 Holonomiegruppen	80
A.9 Eigenschaften quaternionischer Kählermannigfaltigkeiten	82
A.10 Konstruktion fast quaternionischer Strukturen	83
A.11 Bestimmung von Vielbeinen und Spinkonnexion	87
B Peccei-Quinn Invarianten I	91
C Peccei-Quinn Invarianten II	95

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Grundlagen der Stringtheorie

Die Stringtheorie [1–3] geht von der Annahme aus, daß nicht Punktteilchen, sondern eindimensional ausgedehnte Objekte (die Strings) die fundamentalen Konstituenten der Materie sind.

Während seiner Bewegung in der Zeit füllt ein String eine (1+1)-dimensionale *Weltfläche* M aus, die in einen höherdimensionalen *Zielraum* eingebettet ist, im einfachsten Fall in einen D -dimensionalen Minkowskiraum.

In Analogie zum relativistischen Punktteilchen, das sich auf Weltlinien extremaler Länge bewegt, wird vom relativistischen String gefordert, daß er das Volumen seiner Weltfläche extremalisiert. Für den bosonischen String erhält man damit folgende Wirkung

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \eta_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu. \quad (1.1)$$

Hierbei sind τ und σ Koordinaten auf der Weltfläche M , ($\partial_1 = \frac{\partial}{\partial\tau}$) und ($\partial_2 = \frac{\partial}{\partial\sigma}$) die entsprechenden partiellen Ableitungen, die $X^\mu(\tau, \sigma)$ beschreiben die Einbettung von M in den (D -dimensionalen) Minkowskiraum mit Metrik $\eta_{\mu\nu}$. Auf der Weltfläche wird eine Metrik γ_{ab} definiert, γ^{ab} ist ihre Inverse, γ ihre Determinante. Schließlich ist α' eine Konstante der Massendimension -2 , die benötigt wird, um die Wirkung dimensionslos zu machen¹.

Durch Variation der obigen Wirkung nach der Weltflächenmetrik (γ_{ab}) erhält man die algebraische Bewegungsgleichung

$$\sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} = \sqrt{-h} h^{ab}, \quad (1.2)$$

wobei h_{ab} die durch die Einbettung in den Minkowskiraum auf der Weltfläche induzierte Metrik

$$h_{ab} = \eta_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \quad (1.3)$$

¹In der gesamten Arbeit werden Einheiten verwandt, in denen $c = \hbar = 1$ gilt.

und h ihre Determinante bezeichnet. Setzt man (1.2) und (1.3) in (1.1) ein, findet man

$$\mathcal{S}' = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M \sqrt{-h} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \text{Vol}(M). \quad (1.4)$$

Die Störungsentwicklung eines wechselwirkenden Strings erhält man durch die Summation über die Topologien der Weltfläche. Die Korrelationsfunktionen werden durch das Pfadintegral

$$\langle \dots \rangle = \sum_{\text{Topologien}} \int_M \mathcal{D}X \mathcal{D}h \dots e^{-\mathcal{S}} \quad (1.5)$$

berechnet, wobei \dots die interessierende Operatoreinsetzung bezeichnet. In Abbildung 1.1 sind die ersten beiden Terme der Störungsreihe der Stringzweipunkt-funktion für eine Theorie geschlossener Strings dargestellt.

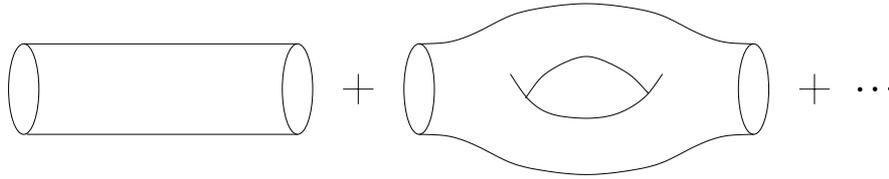


Abbildung 1.1: Die ersten beiden Terme in der topologischen Entwicklung der Stringzweipunkt-funktion.

Die Wirkung (1.1) zeigt, daß die Bewegung eines Strings in einem D -dimensionalen Minkowskiraum durch eine zweidimensionale Quantenfeldtheorie mit D Skalarfeldern beschrieben wird.

Die Berechnung einer Stringamplitude besteht aus zwei Entwicklungen. Zum einen wird sie gemäß (1.5) in Schleifen entwickelt, zum anderen muß der Beitrag zu jeder Schleifenordnung in der durch (1.1) gegebenen Quantenfeldtheorie auf der Weltfläche (bestimmter Topologie) berechnet werden, wobei dies i.A. wiederum nur störungstheoretisch möglich ist.

Das Spektrum der zweidimensionalen Theorie gliedert sich in Darstellungen der D -dimensionalen Poincarégruppe. Für die bosonische Stringtheorie enthält das Spektrum ein Tachyon². Um diese Inkonsistenz zu vermeiden, ist es notwendig, die zweidimensionale Weltflächentheorie durch Fermionen zu ergänzen, die mit den Bosonen Supersymmetriemultipletts bilden. Damit die Amplituden (1.5) als unitäre Streuamplituden in der Raumzeit aufgefaßt werden können, muß die Theorie auf der Weltfläche (super)-konform invariant sein. Hieraus folgt insbesondere, daß die Dimension der Raumzeit, in der sich ein String bewegen kann, höchstens zehn sein darf. Im zehndimensionalen Minkowskiraum ergeben sich für Theorien geschlossener Strings folgende Möglichkeiten: die IIA

²Ein Tachyon ist ein Teilchen negativen Massenquadrats.

und die IIB Stringtheorie, in denen rechts- und linkslaufende Weltflächenfermionen auftreten, sowie den $E_8 \times E_8$, und den $SO(32)$ -heterotischen String. Letztere besitzen nur in eine Richtung laufende Weltflächenfermionen. Alle diese Theorien haben Raumzeit-Spektren, die sich in Multipletts der zehndimensionalen Supergravitation ordnen. Dabei sind die Typ II Strings invariant unter 32 Superladungen. In ihrem Raumzeitspektrum finden sich jeweils zwei Gravitini, die im Fall des IIB Strings gleiche, im Fall des IIA Strings unterschiedliche Chiralität haben. Da die Weltfläche der betrachteten Stringtheorien geschlossen ist, müssen Randbedingungen gestellt werden. Bosonische Felder auf der Weltfläche müssen periodisch sein³. Für die Weltflächenfermionen hingegen gibt es zwei Möglichkeiten: entweder sind sie periodisch (Ramond Randbedingungen), diese entsprechen Raumzeit-Fermionen, oder antiperiodisch (Neveu-Schwarz Randbedingungen), diese entsprechen Raumzeit-Bosonen. Die Raumzeitzustände sind Tensorprodukte aus den Zuständen der rechts- und linkslaufenden Sektoren, weshalb Raumzeitbosonen entweder aus dem Ramond-Ramond- (RR) oder dem Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz- (NSNS) Sektor stammen können. Die heterotischen Strings sind invariant unter 16 Superladungen; in ihrem Raumzeitspektrum findet sich ein Gravitino und ein Multiplett von Gaugini, das die adjungierte Darstellung der jeweiligen Eichgruppe bildet.

Die masselosen bosonischen Zustände dieser Theorien sind in Tabelle 1.1 zusammengefaßt. Dabei ist $g_{\mu\nu}$ symmetrisch, alle anderen Felder mit mehreren Indi-

Theorie	bosonisches Spektrum	
IIA	NS-NS	$g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi$
	R-R	$A_\mu, C_{\mu\nu\rho}$
IIB	NS-NS	$g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}^1, \phi$
	R-R	$l, B_{\mu\nu}^2, C_{\mu\nu\rho\sigma}^*$
Heterotisch	$g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi, A_\mu^a$	

Tabelle 1.1: Die masselosen bosonischen Spektren der konsistenten Theorien geschlossener Strings

zes sind vollständig antisymmetrisch; es handelt sich um p -Form Eichfelder. Der * an der im IIB-Spektrum auftretenden Vierform deutet an, daß nur der selbstduale Anteil ihrer Feldstärke dynamisch ist. Die Vektoren in den heterotischen Theorien bilden die adjungierte Darstellung der jeweiligen Eichgruppe.

Jede dieser Theorien enthält in ihrem Spektrum einen Skalar ϕ , das Dilaton, ein Zweiformfeld $B_{\mu\nu}$, sowie ein symmetrisches Tensorfeld $g_{\mu\nu}$, das Graviton. Dieses koppelt bei niedrigen Energien wie der metrische Tensor der allgemeinen Relativitätstheorie. *Jede der konsistenten Theorien geschlossener Strings enthält also eine Quantentheorie der Gravitation.*

Zusätzlich zu den masselosen Anregungen enthält das Spektrum jeder Stringtheorie noch unendlich viele massive Moden, welche in Einheiten der Planckmasse

³Sie führen nicht zu masselosen Bosonen im Raumzeitspektrum.

quantisiert sind.

Eine Theorie, in der die Raumzeit durch den zehndimensionalen Minkowski-Raum beschrieben wird, ist phänomenologisch ausgeschlossen. Die Wirkung (1.1), die einen String in zehn flachen Dimensionen beschreibt, stellt allerdings nur die einfachste Möglichkeit zur Konstruktion einer Stringtheorie dar.

Statt die Propagation eines Strings im flachen Raum zu untersuchen, kann man folgende Verallgemeinerung von (1.1) betrachten⁴ [4] ($d^2\sigma = d\tau d\sigma$):

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma \sqrt{-\gamma} \{ (\gamma^{ab} G_{\mu\nu}(X) + \varepsilon^{ab} B_{\mu\nu}(X)) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \alpha' \Phi(X) \mathcal{R} \}. \quad (1.6)$$

Diese Wirkung beschreibt die Bewegung eines Strings im Hintergrund eines symmetrischen Tensorfeldes, der Metrik $G_{\mu\nu}(X)$ der Raumzeit, eines antisymmetrischen Tensorfeldes $B_{\mu\nu}(X)$ und eines Skalarfeldes $\Phi(X)$. Diese Felder sind kohärente Zustände derjenigen masselosen Moden, die in jeder der Theorien geschlossener Strings auftreten (Tabelle 1.1). Im Folgenden werden Hintergründe betrachtet, in denen $B_{\mu\nu}(X)$ verschwindet und $\Phi(X) = \Phi_0$ konstant ist. Da das Integral über den Ricciskalar in zwei Dimensionen eine topologische Invariante, die Eulercharakteristik χ der Weltfläche M , ist, enthält die Wirkung (1.6) einen Term

$$\frac{\Phi_0}{4\pi} \int_M d^2\sigma \sqrt{-\gamma} \mathcal{R} = \Phi_0 \chi. \quad (1.7)$$

Die Summe über Topologien in (1.5) ist in den Theorien geschlossener Strings eine Summe über Riemannsche Flächen verschiedener Genera g . Für diese gilt $\chi = 2(g - 1)$ und man findet

$$\langle \dots \rangle = e^{-2\Phi_0} \sum_{g=0}^{\infty} (e^{2\Phi_0})^g \int_M \mathcal{D}X \mathcal{D}\gamma \dots e^{-\mathcal{S}}, \quad (1.8)$$

wobei \mathcal{S} die Wirkung (1.6) ohne den Term (1.7) ist. Da g die Anzahl der Schleifen eines Stringgraphen zählt, sagt die obige Gleichung, daß die Stringstörungstheorie eine Entwicklung in der Stringkopplungskonstanten

$$g_s := e^{\Phi_0} \quad (1.9)$$

ist⁵.

Ein phänomenologisch ernstzunehmendes Szenario erhält man, wenn man Strings untersucht, die sich in einer Raumzeit bewegen, die das Produkt aus einem vierdimensionalen Minkowski-Raum und einer kompakten Mannigfaltigkeit

⁴Wie zu (1.1) muß auch zu dieser Wirkung ein fermionischer Sektor addiert werden, um eine konsistente Theorie zu erhalten.

⁵Nicht $e^{2\Phi_0}$, da eine Schleife die Emission und nachfolgende Reabsorption eines Strings beschreibt.

ist, deren charakteristische Skala klein genug ist, um bisher experimentell nicht aufgelöst worden zu sein.

Da (1.8) nur dann unitäre Raumzeitamplituden liefert, wenn (1.6) zu einer konform invarianten Quantentheorie führt, sind die möglichen Hintergrundmetriken eingeschränkt. Diese wirken in (1.6) als Kopplungsfunktionen der Skalare; notwendig für konforme Invarianz ist daher, daß ihr β -Funktional verschwindet. Dies kann störungstheoretisch in der Weltflächentheorie berechnet werden. Die Kopplungskonstante der Weltflächentheorie ist $\sqrt{\alpha'}$. Ihr Wert kann allerdings durch eine Skalierung der Hintergrundmetrik geändert werden, so daß der dimensionslose Entwicklungsparameter durch $\frac{\sqrt{\alpha'}}{R}$ gegeben ist, wobei R die charakteristische Skala der kompakten Mannigfaltigkeit ist. Eine große Mannigfaltigkeit entspricht damit kleiner Kopplung auf der Weltfläche. In niedrigster Ordnung erhält man die Bedingung, daß die kompakte Mannigfaltigkeit sechsdimensional und Ricci-flach sein muß. In höheren Ordnungen wird die zweite Bedingung modifiziert: Ricci-flache Hintergründe sind nur im Limes großen Volumens der kompakten Mannigfaltigkeit Lösungen der Bewegungsgleichungen.

1.2 Niederenergie Effektive Wirkungen

Die massiven Moden eines Strings können bei den experimentell zur Verfügung stehenden Energien nicht angeregt werden. Ebenso reichen diese Energien nicht aus, um die eindimensionale Struktur des Strings aufzulösen. Stringtheorie wird bei niedrigen Energien also durch eine effektive Quantenfeldtheorie der masselosen Anregungen beschrieben. Die massiven Moden des Strings manifestieren sich in dieser Theorie als effektive Wechselwirkungen der masselosen Moden, die durch das Umlaufen ersterer in den Schleifen entstehen. *Die effektive Wirkung einer Stringtheorie ist definiert als die Wirkung, deren klassische Streuamplituden die S-Matrix-Elemente der masselosen Anregungen der Stringtheorie reproduziert.*⁶ Die effektive Wirkung [5] ist, entsprechend den S-Matrix-Elementen, gegeben als eine Reihe sowohl in der Stringkopplungskonstanten, als auch in der Weltflächenkopplungskonstanten. Für die experimentell zugänglichen Energien E ist aber die Entwicklung im kleinen Parameter $\frac{E}{M_{Pl}}$ von Interesse. Da jede Raumzeitableitung gerade einen solchen Faktor zur Wirkung beiträgt, werden die Streuamplituden der masselosen Zustände durch die ersten Terme der Entwicklung der effektiven Wirkung in der Anzahl von Ableitungen gut approximiert. Diesen Anteil der effektiven Wirkung nennt man die *Niederenergie-Effektive-Wirkung* (NEW). Da die Entwicklung in die Anzahl der Ableitungen weder der Entwicklung in String- noch der in Weltflächenschleifen entspricht, ist auch die NEW als eine Reihe in den entsprechenden Kopplungskonstanten gegeben.

Die NEWen der in Abschnitt 1.1 besprochenen Theorien geschlossener Strings sind (zu niedrigster Ordnung in Raumzeit und Weltfläche) gegeben durch die IIA, bzw. IIB Supergravitation (für die entsprechenden Stringtheorien), sowie

⁶Die effektive Wirkung ist klassisch. Die von ihr reproduzierten S-Matrix-Elemente der Stringtheorie enthalten Quantenkorrekturen.

die zehndimensionale Supergravitation mit 16 Superladungen, gekoppelt an eine ($SO(32)$ oder $E_8 \times E_8$) Super-Yang-Mills-Theorie (heterotischer String). Das Spektrum der IIA-Supergravitation enthält neben den in Tabelle 1.1 angegebenen Bosonen noch zwei Majorana-Weyl-Spinoren (λ^i) und zwei Gravitini (Ψ_μ^i) jeweils entgegengesetzter Chiralität. Das fermionische Spektrum der IIB Supergravitation besteht aus den gleichen Feldern, mit jeweils identischer Chiralität; in den Niederenergietheorien der heterotischen Stringtheorien tritt einer der Spinoren und ein Gravitino auf, sowie ein Multiplett von Gaugini, das die adjungierte Darstellung der jeweiligen Eichgruppe bildet.

Der Teil der Wirkung der IIA Supergravitation, der nur die bosonischen Felder (vgl. Tabelle 1.1) enthält, ist gegeben durch [3]

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{IIA} &= \mathcal{S}_{NSNS} + \mathcal{S}_{RR} + \mathcal{S}_{CS}, \\ \mathcal{S}_{NSNS} &= -\frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} e^{-2\Phi} (\mathcal{R} - 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho}), \\ \mathcal{S}_{RR} &= -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{24} \tilde{F}_{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{F}^{\mu\nu\rho\sigma} \right), \\ \mathcal{S}_{CS} &= -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int d^{10}x \frac{1}{2!4!4!} \varepsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_{10}} B_{\mu_1\mu_2} F_{\mu_3\mu_4\mu_5\mu_6} F_{\mu_7\mu_8\mu_9\mu_{10}}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

wobei $F_{\mu\nu}$ bzw. $F_{\mu\nu\rho\sigma}$ die Feldstärken der Eins- bzw. Dreiform aus dem RR-Sektor bezeichnen. $H_{\mu\nu\rho}$ ist die Feldstärke der NSNS Zweiform, und \tilde{F} ist gegeben durch

$$\tilde{F}_{\mu\nu\rho\sigma} = \partial_{[\mu} C_{\nu\rho\sigma]} - A_{[\mu} C_{\nu\rho\sigma]}. \quad (1.11)$$

Aus der Forderung, daß diese Wirkung die klassischen S-Matrix-Elemente der IIA Stringtheorie reproduzieren muß, folgt die Beziehung

$$\kappa_{10}^2 \propto (\alpha')^4 e^{2\Phi_0}. \quad (1.12)$$

Wie man die Proportionalitätskonstante fixieren kann, wird in [6] diskutiert.

Da die Streuamplituden der Stringtheorie i.A. nicht zu allen Ordnungen der Störungstheorie (weder in der Raumzeit, noch auf der Weltfläche) bekannt sind, kann man i.A. auch die effektive Wirkung nicht exakt bestimmen. Allerdings sind die Terme mit bis zu zwei Ableitungen durch Symmetrien oft so stark eingeschränkt, daß die NEW berechnet werden kann. Dies ist der Grund für das große Interesse an Stringtheorien mit $N=2$ Supersymmetrie in vier Dimensionen [7]. In Theorien mit einer höheren Anzahl von Superladungen gelten Nichtrenormierungstheoreme, sie sind durch ihre klassischen Wirkungen exakt bestimmt [8, 9]. Theorien mit weniger Superladungen werden untersucht, lassen aber i.A. zu viele Möglichkeiten für Quantenkorrekturen, so daß diese mit den heute zur Verfügung stehenden Techniken nicht bestimmt werden können. Theorien mit $N=2$ Supersymmetrie hingegen erhalten Quantenkorrekturen, schränken sie aber so stark ein, daß die realistische Hoffnung besteht, sie berechnen zu können. Allerdings scheinen sie, da in ihnen keine chiralen Fermionen auftreten können, phänomenologisch von eingeschränktem Interesse zu sein. Ihre Untersuchung soll das Verständnis

möglicher Quantenkorrekturen der Stringtheorie erweitern und dient der Vorbereitung des Studiums realistischerer Theorien mit $N = 1$ Supersymmetrie.

Diesem Aspekt der Stringtheorie ist die vorliegende Arbeit gewidmet. Nachdem das Interesse an diesem Untersuchungsgegenstand begründet wurde, dient der Rest der Einleitung dazu, die grundlegenden Eigenschaften dieser Theorien anzugeben, sowie das detaillierte Szenario meiner Untersuchung vorzustellen.

1.3 $N = 2$ Supergravitation

Die $N = 2$ Supersymmetriealgebra in vier Dimensionen lautet [10]:

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha^i, \bar{Q}_j^\beta\} &= 2\sigma^\mu_{\alpha\beta} P_\mu \delta_j^i, \\ \{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} &= \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{ij} Z, \quad \{\bar{Q}_i^\alpha, \bar{Q}_j^\beta\} = \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{ij} \bar{Z}. \\ \alpha, \beta &= 1, 2; \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Die Q_α^i sind die Generatoren der Supersymmetrietransformationen, sie sind Weyl-spinoren, α, β bezeichnen ihre Spinorindizes, die i, j unterscheiden die beiden Supersymmetrien. Die Q_α^i und die \bar{Q}_j^β bilden zusammen acht fermionischen Generatoren dieser Algebra. Eine $N = 2$ supersymmetrische Theorie ist also invariant unter acht Superladungen. Die P_μ sind die Generatoren der Translationen der Poincarégruppe, ε ist der vollständig antisymmetrische Tensor in zwei Dimensionen (A.59), und Z ein Generator, der mit allen anderen Generatoren der Algebra vertauscht, die *zentrale Ladung*. Weiterhin vertauschen die Q_α^i 's mit den P_μ , ihre Kommutatoren mit den Generatoren der Lorentztransformationen entsprechen ihrem Transformationsverhalten als Spinoren.

Die masselosen Darstellungen dieser Algebra erhält man, indem man sie in ein System transformiert, in dem der Impulsgenerator die Form $P = (-E, 0, 0, E)$ hat und aus den Q 's Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren konstruiert. Dieses Verfahren ist ausführlich in [10] beschrieben.

Die für die NEWen der Typ II Stringtheorien relevanten masselosen Multipletts sind:

1. Das Supergravitationsmultiplett. Es besteht aus dem Spin 2 Graviton, zwei Spin 3/2 Gravitini und einem Spin 1 Graviphoton.
2. Das Vektormultiplett [11]. Es besteht aus einem Vektor, zwei Weyl-Fermionen und einem komplexen Skalar.
3. Das Vektor-Tensor-Multiplett [12–14]. Es besteht aus einem antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe, einem Vektor, zwei Weyl-Fermionen und einem reellen Skalar.
4. Das Hypermultiplett [15]. Es besteht aus zwei Weyl-Fermionen und vier reellen Skalaren.
5. Das Tensormultiplett [16]. Es besteht aus einem antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe, zwei Weyl-Fermionen und drei reellen Skalaren.

6. Das Doppel-Tensor-Multiplett⁷. Es besteht aus zwei antisymmetrischen Tensoren zweiter Stufe, zwei Weyl-Fermionen und zwei reellen Skalaren.

In vier Dimensionen hat ein antisymmetrischer Tensor nur einen dynamischen Freiheitsgrad und kann zu einem Skalar dualisiert werden. Das Vektor-Tensor-Multiplett ist dual zum Vektormultiplett, das Tensor- und das Doppel-Tensor-Multiplett sind dual zum Hypermultiplett. Die explizite Durchführung der Dualisierung wird in Abschnitt 2.2 beschrieben.

Durch die Supersymmetrie sind die Kopplungskonstanten von Bosonen und Fermionen voneinander abhängig. Man kann die Kopplungen der Fermionen stets aus denen der Bosonen rekonstruieren, weshalb in dieser Arbeit grundsätzlich nur die bosonischen Anteile der Wirkungen untersucht werden.

Die kinetischen Terme der Skalare in supersymmetrischen Theorien sind durch nichtlineare σ -Modelle [17] gegeben. Dies bedeutet, daß man die Skalare ϕ^a als Abbildungen der Raumzeit in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit \mathcal{M} mit Metrik h auffassen kann. Diese Abbildung induziert eine Metrik h^* in der Raumzeit; die Lagrangedichte der Skalare ist gegeben durch die Spur dieser Metrik

$$\mathcal{S}_{\text{Skalare}} = - \int d^4x \sqrt{-g} h^{*\mu}{}_{\mu} = - \int d^4x \sqrt{-g} h_{ab} \frac{\partial \phi^a}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial \phi^b}{\partial x^{\mu}}. \quad (1.14)$$

Aufgrund der oben beschriebenen Dualitäten kann man annehmen, daß alle Skalare entweder in Vektor- oder in Hypermultipletts sitzen. Die Geometrie ihrer Kopplungen ist durch Supersymmetrie stark eingeschränkt. Zum einen können Vektormultipletts nicht an neutrale Hypermultipletts koppeln [18]. Da in dieser Arbeit keine geladenen Hypermultipletts betrachtet werden, bedeutet dies, daß die Zielraum-Mannigfaltigkeit des σ -Modelles faktorisiert:

$$\mathcal{M}_{N=2} = \mathcal{M}_V \otimes \mathcal{M}_H. \quad (1.15)$$

Zum anderen sind auch die Geometrien der beiden Faktoren eingeschränkt: \mathcal{M}_V ist eine spezielle Kählermannigfaltigkeit [19], \mathcal{M}_H ist eine quaternionische Mannigfaltigkeit mit skalarer Krümmung [20]

$$\mathcal{R} = -8n(n+2), \quad (1.16)$$

wobei n die Zahl der Hypermultipletts ist. Die spezielle Kählergeometrie wird in Abschnitt 3.2 beschrieben. Eine Einführung in die quaternionische Geometrie findet sich in Anhang A.

1.4 Calabi-Yau Kompaktifizierungen

Nun ist zu untersuchen, welche Stringtheorien vierdimensionale $N=2$ Supergravitation als ihre Niederenergiwirkung haben. In Abschnitt 1.1 wurden die konsistenten Theorien geschlossener Superstrings in zehn Dimensionen vorgestellt

⁷Es ist noch keine off-shell Darstellung dieses Multipletts gefunden worden.

und es wurde angegeben, daß diese in unter entweder 32 oder 16 Superladungen invariant sind. Außerdem wurde gezeigt, daß sich aus ihnen vierdimensionale Stringtheorien konstruieren lassen, indem man die Strings in einer Raumzeit propagieren läßt, die das Produkt eines vierdimensionalen Minkowskiraumes \mathcal{M}_4 und einer sechsdimensionalen Ricci-flachen kompakten Mannigfaltigkeit \mathcal{K}_6 ist. Die Forderung nach einer bestimmten Anzahl von Superladungen in vier Dimensionen bedeutet eine zusätzliche Bedingung an die kompakte Mannigfaltigkeit, die in diesem Abschnitt hergeleitet wird.

Zu niedrigster Ordnung in der (Raumzeit) Störungstheorie erhält man die vierdimensionale NEW durch *dimensionale Reduktion* der zehndimensionalen. Dieses Verfahren ist ein Grenzfall der *Kaluza-Klein-Reduktion*, die nun vorgestellt wird. Es entspricht der aus dem Standardmodell bekannten spontanen Symmetriebrechung, angewandt auf Theorien, die Gravitation beinhalten; in Analogie spricht man auch von *spontaner Kompaktifizierung*. Im Standardmodell entwickelt man die Theorie nicht um die klassische Lösung, in der alle Felder verschwinden, sondern um eine klassische Lösung mit nichtverschwindendem Higgsfeld. Dadurch wird die $SU(2) \times U(1)_Y$ auf die $U(1)_{em}$ gebrochen; das störungstheoretische Spektrum enthält statt masseloser massive Eichbosonen.

Bei der Kaluza-Klein-Reduktion von Gravitationstheorien [21] betrachtet man die Entwicklung um klassische Lösungen, die nicht maximal symmetrisch sind. Im hier betrachteten Fall um $\mathcal{M}_4 \times \mathcal{K}_6$ statt um \mathcal{M}_{10} ⁸.

Die so erhaltene Störungstheorie ist nicht unter der zehndimensionalen Lorentzgruppe invariant. Um das Spektrum der vierdimensionalen Theorie zu bestimmen, betrachtet man kleine Fluktuationen um den Grundzustand und bestimmt ihre Bewegungsgleichungen bis zur linearen Ordnung. Man erhält, da \mathcal{K}_6 kompakt ist, eine endliche Anzahl masseloser Zustände, sowie unendlich viele massive Zustände, deren Massen in Einheiten der inversen Skala von \mathcal{K}_6 quantisiert sind. Betrachtet man nun den Limes, in dem die Skala der kompakten Mannigfaltigkeit gegen Null geht, so erhält man eine vierdimensionale Theorie, in der nur noch die masselosen Felder auftreten. Dies ist der Limes dimensionaler Reduktion.

Masselose Skalare tauchen immer dann in Kaluza-Klein-Reduktionen auf, wenn der betrachtete Hintergrund einer kontinuierlichen Familie angehört. In diesem Fall gibt es einen benachbarten Hintergrund gleicher Energie, so daß in dieser Richtung das Potential für die Fluktuationen verschwindet. Diese masselosen Skalare entsprechen den Goldstone-Bosonen spontan gebrochener globaler Symmetrien. Man bezeichnet sie als die *Moduli* der betrachteten Familie von Hintergründen. So tritt z.B. in jeder Kompaktifizierung auf einem Kreis ein masseloser Skalar auf; der entsprechende Modulus des Kreises ist sein Radius.

Explizit wird nun das Beispiel der Kompaktifizierung der IIA Supergravitation auf einer Mannigfaltigkeit der Form $\mathcal{M}_4 \times \mathcal{K}_6$ beschrieben. Die Koordinaten der

⁸Es ist auch möglich, weiteren Feldern, z.B. dem antisymmetrischen Tensor der IIA Supergravitation, nichtverschwindende Vakuumerwartungswerte zu geben. Hier wird aber nur die einfachste Möglichkeit beschrieben. Fermionfelder müssen im Grundzustand immer verschwinden.

kompakten Mannigfaltigkeit werden mit y^m ($m = 1, \dots, 6$), die des Minkowskiraumes mit x^μ ($\mu = 1, \dots, 4$) und die der zehndimensionalen Mannigfaltigkeit mit X^M ($M = 1, \dots, 10$) bezeichnet. Der betrachtete Grundzustand ist gegeben durch

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & G_{mn} \end{pmatrix}, \quad \Phi = \Phi_0, \quad (1.17)$$

wobei $\eta_{\mu\nu}$ die Metrik des vierdimensionalen Minkowskiraumes ist. Alle anderen Felder verschwinden. Dies ist eine Lösung der IIA Supergravitation (1.10), wenn G_{mn} Ricci-flach ist⁹.

Wie bestimmt man nun die zusätzlichen Bedingungen an \mathcal{K}_6 , die aus der Forderung erhaltener Superladungen in vier Dimensionen folgen? Im betrachteten Hintergrund verschwinden die Erwartungswerte der Fermionen. Ihre Supersymmetrietransformationen sind gegeben durch $\delta\Psi = \{Q, \Psi\}$, wobei Q eine Superladung und Ψ das betrachtete Fermionfeld bezeichnen. Ein Hintergrund ist genau dann invariant unter einer Supersymmetrietransformation, wenn die Vakuumerwartungswerte der Supersymmetrietransformationen der Fermionen verschwinden¹⁰.

Die Supersymmetrietransformationen der Spinoren (λ^i) der IIA Supergravitation verschwinden im Hintergrund (1.17), die der beiden Gravitini (Ψ_μ^i) lauten (die Klammern $\langle \dots \rangle$ bedeuten, daß der Ausdruck \dots im betrachteten Grundzustand ausgewertet wird):

$$\langle \delta\Psi_M^i \rangle = \langle \mathcal{D}_M \eta^i \rangle \stackrel{!}{=} 0, \quad (1.18)$$

wobei η^i die Parameter der Supersymmetrietransformationen sind; die kovariante Ableitung \mathcal{D}_M wird mit der Spinkonnexion gebildet.

Um (1.18) zu lösen, macht man den Ansatz

$$\eta^i(x, y) = \eta_4^i(x) \varepsilon(y), \quad (1.19)$$

wobei die $\eta_4^i(x)$ zwei vierkomponentige Spinoren auf \mathcal{M}_4 sind und $\varepsilon(y)$ ein vierkomponentiger Spinor auf \mathcal{K}_6 ist. Die Gleichung (1.18) zerfällt nun in

$$\langle \mathcal{D}_\mu \eta_4^i(x) \rangle = 0, \quad \langle \mathcal{D}_m \varepsilon(y) \rangle = 0. \quad (1.20)$$

Die erste Gleichung ist im Minkowskiraum für jeden konstanten Spinor erfüllt. Die zweite Gleichung stellt die gesuchte Bedingung an \mathcal{K}_6 dar. Ein Hintergrund der Form (1.17) führt zu Supersymmetrie in der vierdimensionalen Theorie, wenn die kompakte Mannigfaltigkeit kovariant konstante Spinoren zuläßt. Solche Spi-

⁹Dies war zu erwarten, da in diesem Limes die α' -Korrekturen der Stringtheorie vernachlässigt werden.

¹⁰Die Vakuumerwartungswerte der Supersymmetrietransformationen der Bosonen verschwinden, da sie fermionisch sind

noren nennt man *Killing-Spinoren*¹¹. Hat die interne Mannigfaltigkeit gerade n Killing-Spinoren, so folgt aus (1.19), daß die vierdimensionale Theorie unter $8n$ Superladungen invariant ist. Um eine $N = 2$ Supergravitation zu erhalten, muß \mathcal{K}_6 also genau einen Killing-Spinor besitzen.

Ist ein Spinor auf \mathcal{K}_6 kovariant konstant, so folgt die Integrabilitätsbedingung

$$[\mathcal{D}_m, \mathcal{D}_n] \varepsilon(y) = 0, \quad \implies \quad \mathcal{R}_{mnr s} \Gamma^{rs} \varepsilon(y) = 0 \quad (1.21)$$

($\Gamma^{\rho\sigma}$ sind die Erzeugenden der Spinordarstellung von $\mathfrak{so}(6)$). Dies bedeutet, daß eine Projektion des Riemann tensors der Mannigfaltigkeit verschwinden muß, also ihre Holonomiegruppe eingeschränkt ist. Im vorliegenden Fall findet man, daß ihre Holonomiegruppe $SU(3)$ sein muß [22, 23], \mathcal{K}_6 also eine *Calabi-Yau Mannigfaltigkeit* ist. Holonomiegruppen und Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten werden in den Abschnitten A.8 und A.5 des Anhangs eingeführt. Einführungen in Stringtheorie auf Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten findet man in [1, 24, 25].

In der IIB Theorie treten ebenfalls zwei Gravitini auf. Der Unterschied zur IIA Theorie besteht darin, daß sie in zehn Dimensionen die gleiche Chiralität haben. Da die Chiralität der Gravitini in die obige Argumentation nicht eingeht, ist sie auch für diese Theorie gültig. Damit hat auch die IIB Stringtheorie, kompaktifiziert auf einer Calabi-Yau Mannigfaltigkeit, vierdimensionale $N = 2$ Supergravitation als ihren Niederenergielimes.

Anders liegt der Fall bei der heterotischen Stringtheorie. Ihr zehndimensionales Spektrum enthält nur ein Gravitino. Nach (1.19) bedeutet dies, daß sie in vier Dimensionen zu einer $N = 2$ Supergravitation führt, wenn sie auf einer Mannigfaltigkeit mit zwei Killing-Spinoren kompaktifiziert wird. Solche Mannigfaltigkeiten haben $SU(2)$ -Holonomie. Das einfachste Beispiel ist gegeben durch das Produkt der einzigen vierdimensionalen Calabi-Yau Mannigfaltigkeit, der $K3$, und einem Zwei-Torus T^2 .

Nun muß das Spektrum der vierdimensionalen Theorie bestimmt werden (ich folge der Darstellung in [27]). Dazu ordnet man zuerst die Felder der zehndimensionalen Theorie in Darstellungen der vierdimensionalen Poincarégruppe. Da Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten komplex sind, werden statt der Koordinaten y^m nun $z^i, \bar{z}^{\bar{i}}$ ($i, \bar{i} = 1, \dots, 3$) benutzt (vgl. (A.19)). Man findet (Felder, die durch komplexe Konjugation miteinander verbunden sind, werden nicht aufgeführt, so findet man g_{ij} in der Liste, nicht aber $g_{\bar{i}\bar{j}}$) im NSNS-Sektor:

$$\begin{aligned} \Phi &\implies \Phi, \\ g_{MN} &\implies g_{ij}, \quad g_{\bar{i}\bar{j}}, \quad g_{i\mu}, \quad g_{\mu\nu}, \\ B_{MN} &\implies B_{ij}, \quad B_{\bar{i}\bar{j}}, \quad B_{i\mu}, \quad B_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

¹¹Killing-Spinoren entsprechen Killing-Vektoren in der folgenden Weise. Der Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ einer an Gravitation gekoppelten Theorie ist gegeben durch die Ableitung ihrer Lagrangedichte nach der Metrik. Er ist i.A. nur kovariant erhalten. Besitzt die betrachtete Raumzeit einen Killing-Vektor (ξ^μ), so ist $\xi^\mu T_{\mu\nu}$ ein erhaltener Strom. Betrachtet man eine an Supergravitation gekoppelte Theorie, so kann man auch die Variation der Wirkung nach den Gravitini betrachten. Der so erhaltene Strom ist wiederum kovariant konstant und seine Kontraktion mit einem Killing-Spinor liefert einen erhaltenen Strom.

und im RR-Sektor:

$$\begin{aligned} A_M &\implies A_i, A_\mu, \\ C_{MNL} &\implies C_{ijk}, C_{ij\bar{k}}, C_{\mu ij}, C_{\mu i\bar{j}}, C_{\mu\nu i}, C_{\mu\nu\rho}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Nicht alle diese Felder haben masselose Moden in der vierdimensionalen Theorie. Die weitere Vorgehensweise läßt sich am einfachsten am Beispiel des Dilatons veranschaulichen. Man betrachtet dazu eine Fluktuation um den Grundzustand ($\Phi = \Phi_0 + \phi$) und bestimmt deren Masse aus der linearisierten Bewegungsgleichung. Diese lautet

$$\square_{10}\phi = 0, \quad (1.23)$$

wobei der zehndimensionale Laplaceoperator¹²

$$\square_{10}\phi = \frac{1}{\sqrt{|g_{10}|}} \partial_M (\sqrt{|g_{10}|} g^{MN} \partial_N \phi) \quad (1.24)$$

mit der Hintergrundmetrik (1.17) gebildet wird. Diese ist blockdiagonal, so daß der Laplaceoperator in zwei Teile zerfällt, und die Gleichung (1.23) lautet

$$\square_4\phi(x, z, \bar{z}) + \Delta_6\phi(x, z, \bar{z}) = 0. \quad (1.25)$$

Auf einer kompakten Mannigfaltigkeit existiert ein diskretes System von Eigenfunktionen des Laplaceoperators (wie z.B. die Kugelflächenfunktionen auf der S^2)

$$\Delta_6 Y_{(a)}(z, \bar{z}) = m_{(a)}^2 Y_{(a)}(z, \bar{z}). \quad (1.26)$$

Man kann zeigen, daß die auftretenden Eigenwerte proportional zur inversen Skala der kompakten Mannigfaltigkeit sind. Macht man nun den Ansatz $\phi(x, z, \bar{z}) = \phi_4(x) Y_{(a)}(z, \bar{z})$, so erhält man aus (1.25)

$$(\square_4 + m_{(a)}^2)\phi_4(x) = 0. \quad (1.27)$$

Die Massen der vierdimensionalen Skalare sind also durch die Eigenwerte des Laplaceoperators von \mathcal{K}_6 gegeben. Insbesondere erhält man genau dann masselose Skalare, wenn auf dieser Mannigfaltigkeit harmonische Funktionen ($\Delta_6 Y = 0$) existieren. Die Anzahl harmonischer Funktionen ist durch die Hodgezahl $h^{(0,0)}$ der betrachteten Mannigfaltigkeit gegeben. Da diese die Zusammenhangskomponenten der Mannigfaltigkeit zählt, gibt es genau eine solche Funktion. Im Spektrum der vierdimensionalen Theorie findet sich also genau ein Skalar, der vom zehndimensionalen Dilaton herrührt.

Die Verallgemeinerung dieser Rechnung zeigt, daß die anderen Felder genau dann masselose Anregungen in vier Dimensionen haben, wenn ihr interner Anteil

¹²Ich bezeichne den Laplaceoperator in Räumen mit Lorentzsignatur durch \square , in Räumen euklidischer Signatur mit Δ .

in harmonische Differentialformen auf der Calabi-Yau Mannigfaltigkeit entwickelt werden kann. Die Anzahl der harmonischen Differentialformen vom Grad (p, q) ist durch die Hodgezahl $h^{(p,q)}$ gegeben (Hodgezahlen werden in Abschnitt A.5 eingeführt).

Daraus, daß für Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten die Hodge-Zahlen $h^{(1,0)}$ und $h^{(2,0)}$ verschwinden (A.31), kann man sofort schließen, daß die Felder

$$g_{i\mu}, \quad B_{ij}, \quad B_{i\mu}, \quad A_i, \quad C_{\mu ij}, \quad C_{\mu vi} \quad (1.28)$$

nicht im vierdimensionalen masselosen Spektrum auftreten. Die Felder, die keinen internen Index haben, müssen, wie das Skalarfeld im obigen Beispiel, in die eindeutige harmonische Nullform entwickelt werden. Es gibt also in der vierdimensionalen Theorie je genau ein Feld folgenden Typs:

$$g_{\mu\nu}, \quad B_{\mu\nu}, \quad A_\mu, \quad C_{\mu\nu\rho}. \quad (1.29)$$

Da ein Dreiformeichfeld in vier Dimensionen keinen dynamischen Freiheitsgrad hat, wird $C_{\mu\nu\rho}$ im folgenden vernachlässigt¹³.

Sei nun V_{ij}^α eine Basis der $h^{(1,1)}$ (1,1)-Formen, $\Phi_{aij\bar{k}}$ eine Basis der $h^{(2,1)}$ (2,1)-Formen und Ω_{ijk} die (3,0)-Form auf der Calabi-Yau Mannigfaltigkeit. In diese Basen können die folgenden Felder entwickelt werden [27]

$$\begin{aligned} g_{i\bar{j}} &= -iM^\alpha V_{ij}^\alpha, & B_{i\bar{j}} &= a^\alpha V_{ij}^\alpha, & C_{\mu i\bar{j}} &= A_\mu^\alpha V_{ij}^\alpha, \\ C_{ij\bar{k}} &= c^\alpha \Phi_{aij\bar{k}}, & C_{ijk} &= c^0 \Omega_{ijk}. \\ \alpha &= 1, \dots, h^{(1,1)}, & a &= 1, \dots, h^{(1,2)}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

In der vierdimensionalen Theorie findet man also $2(h^{(1,1)} + h^{(2,1)} + 1)$ Skalare und $h^{(1,1)}$ Vektoren.

Einen Sonderfall bildet das Feld g_{ij} . Es ist nicht antisymmetrisch in seinen Indizes, weshalb ihm keines der angegebenen Basiselemente entspricht. Die Kombination

$$\bar{b}_{aij} := \frac{i}{|\Omega|^2} G^{\bar{l}\bar{l}} G^{k\bar{k}} \bar{\Phi}_{a\bar{l}k\bar{i}} \Omega_{jlk} \quad \text{mit} \quad |\Omega|^2 := \frac{1}{3!} G^{\bar{i}\bar{i}} G^{\bar{j}\bar{j}} G^{k\bar{k}} \Omega_{ijk} \bar{\Omega}_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} \quad (1.31)$$

hat die richtige Indexstruktur. Die Entwicklung $g_{ij} = \bar{Z}^a \bar{b}_{aij}$ ergibt noch einmal $2h^{(2,1)}$ Skalare.

Das vierdimensionale masselose Spektrum lautet also im NSNS Sektor: $(2h^{(1,1)} + 2h^{(2,1)} + 1)$ Skalare $(M^\alpha, a^\alpha, Z^a, \bar{Z}^a, \phi)$, ein antisymmetrischer $(B_{\mu\nu})$ und ein symmetrischer Tensor $(g_{\mu\nu})$. Der RR Sektor besteht aus $2(h^{(2,1)} + 1)$ Skalaren $(c^\alpha, \bar{c}^\alpha, c^0, \bar{c}^0)$ und $h^{(1,1)} + 1$ Vektoren (A_μ^α, A_μ) .

¹³Die Felder, die mit dem Dreiformeichfeld ein Supersymmetriemultipllett bilden, können dynamisch sein [26]. Für die Ableitung des Spektrums der vierdimensionalen Theorie ist dies ohne Bedeutung. Die technischen Details der Kompaktifizierung der IIA Supergravitation auf einer Calabi-Yau Mannigfaltigkeit findet man in [27].

Das Spektrum gruppiert sich wie folgt zu Multipletts der $N = 2$ Supergravitation:

Ein Gravitationsmultiplett	$(g_{\mu\nu}, A_\mu)$
Ein Tensormultiplett	$(B_{\mu\nu}, \phi, c^0, \bar{c}^0)$
$h^{(1,1)}$ Vektormultipletts	$(A_\mu^\alpha, M^\alpha, a^\alpha)$
$h^{(2,1)}$ Hypermultipletts	$(Z^a, \bar{Z}^a, c^a, \bar{c}^a)$

Das Tensormultiplett wird auch *universelles Tensormultiplett* genannt, da es unabhängig von der Topologie in jeder Calabi-Yau-Kompaktifizierung der IIA Supergravitation auftritt. Das zu ihm duale Hypermultiplett heißt *universelles Hypermultiplett*.

Die entsprechende Analyse der IIB Supergravitation [28] liefert das folgende Spektrum (hier werden nur die Komponenten der zehndimensionalen Felder (Tabelle 1.1) angegeben, die masselose vierdimensionale Moden haben, nicht die Entwicklung in harmonische Formen auf der Calabi-Yau)¹⁴

Ein Gravitationsmultiplett	$(g_{\mu\nu}, C_{\mu i j k})$
Ein Doppel-Tensor-Multiplett	$(B_{\mu\nu}^I, \phi, l), \quad I=1,2.$
$h^{(2,1)}$ Vektormultipletts	$(C_{\mu i j \bar{k}}, g_{i j}, g_{\bar{i} \bar{j}})$
$h^{(1,1)}$ Tensormultipletts	$(C_{\mu\nu i \bar{j}}, B_{\bar{i} \bar{j}}^I, g_{\bar{i} \bar{j}}), \quad I=1,2.$

Die masselosen Skalarfelder, die Fluktuationen der Metrik entsprechen, haben eine geometrische Interpretation [29]. Sie sind die Moduli der Familie von Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten, denen der betrachtete Hintergrund angehört. Fluktuationen mit gemischten ($i\bar{j}$) bzw. gleichen ($i j, \bar{i} \bar{j}$) Indizes entsprechen dabei Variationen der metrischen bzw. der komplexen Struktur der Mannigfaltigkeit. Deformationen mit gleichen Indizes führen zu einer Metrik, die nicht mehr hermitesch ist. Diese kann durch eine Variablentransformation wieder in eine hermitesche Form (A.21) überführt werden. Da holomorphe Variablentransformationen die Indexstruktur eines Tensors nicht ändern, muß diese Transformation nichtholomorph sein. Dies bedeutet aber, daß die variierte Metrik hermitesch bzgl. einer anderen komplexen Struktur ist. Die Fluktuationen entsprechen den $h^{(2,1)}$ inäquivalenten Deformationen der komplexen Struktur der Mannigfaltigkeit. Die Variationen mit gemischten Indizes ändern die Werte der Komponenten der Metrik und damit das Volumen der Mannigfaltigkeit bzw. bestimmter Untermannigfaltigkeiten. Sie entsprechen den $h^{(1,1)}$ Deformationen der Kählerform der Metrik.

Aus den oben angegebenen Spektren der vierdimensionalen Theorien sieht man, daß die Moduli der komplexen Struktur im Fall der IIA Theorie in Hypermultipletts sitzen, die der Kählerform in Vektormultipletts. In der IIB Theorie kehrt sich diese Zuordnung um. Dies erlaubt folgende Aussagen über die möglichen Korrekturen zu den entsprechenden Wirkungen:

Da die Kopplungskonstante der Weltflächentheorie durch die inverse Skala der Calabi-Yau Mannigfaltigkeit gegeben ist, sind Weltflächenkorrekturen im Limes

¹⁴Die Selbstdualitätsbedingung an die Feldstärke der Vierform $C_{M N K L}^*$ führt dazu, daß die Felder $C_{\mu\nu i \bar{j}}$ und $C_{i j \bar{i} \bar{j}}$, $C_{\mu i j k}$ und $C_{\mu i \bar{j} \bar{k}}$, sowie $C_{\mu i j \bar{k}}$ und $C_{\mu \bar{i} \bar{j} k}$ nicht unabhängig sind.

großen Volumens vernachlässigbar. Das Volumen der Calabi-Yau wird durch ihre Kählermoduli beschrieben. Diese sitzen im Fall der IIA Theorie in Vektormultipletts. Der Hypermultiplettsektor ist daher unabhängig vom Volumen und kann keine Weltflächenkorrekturen erhalten. Andererseits wird die Raumzeit-Störungstheorie durch das Dilaton kontrolliert, das in einem (dem universellen) Hypermultiplett sitzt. Damit kann der Vektormultiplettsektor keine Quantenkorrekturen erhalten.

In der IIB Theorie hingegen sitzen sowohl Dilaton als auch die Kählermoduli in Hypermultipletts. Daher kann der Vektormultiplettsektor weder Weltflächen- noch Quantenkorrekturen erhalten: Er ist durch die klassische Wirkung exakt bestimmt. Der Hypermultiplettsektor hingegen erhält beide Arten von Korrekturen. Da Weltflächenkorrekturen die Bewegungsgleichungen der Stringtheorie so modifizieren, daß Ricci-flache Mannigfaltigkeiten sie nicht mehr lösen, kann man den Hypermultiplettsektor in diesem Fall nur im Limes großen Volumens der Calabi-Yau Mannigfaltigkeit durch die Kaluza-Klein Reduktion erhalten.

Die Ableitung des vierdimensionalen Spektrums des heterotischen Strings, kompaktifiziert auf $K3 \times T^2$ kann nicht so elementar wie im Fall der Typ II Theorien durchgeführt werden, da einfache Hintergründe der Form (1.17) nicht zu konsistenten Theorien führen. Um Anomaliefreiheit zu garantieren, muß der betrachtete Hintergrund eine nichttriviale Eichfeldkonfiguration auf der $K3$ enthalten. Hier reicht es festzustellen, daß das heterotische Dilaton immer in einem Vektormultiplett sitzt, wohingegen die Kählermoduli von $K3$ und Torus den Hypermultipletts angehören. Erstere erhalten somit Quantenkorrekturen, letztere Weltflächenkorrekturen.

Um die Wirkung der IIA Theorie in vier Dimensionen zu erhalten, setzt man nun die obigen Entwicklungen (1.30) in die zehndimensionale Wirkung (1.10) ein und führt die Integration über die Calabi-Yau Mannigfaltigkeit aus. Die entstehende Wirkung ist für den Hypermultiplettsektor in (4.1) angegeben.

1.5 Dualitäten

Bis vor wenigen Jahren war die oben dargestellte störungstheoretische Herangehensweise an die Stringtheorie die einzig mögliche. Die einzelnen konsistenten Stringtheorien erschienen als voneinander unabhängige Realisierungen der zugrundeliegenden Idee, Punktteilchen durch ausgedehnte Objekte zu ersetzen. Insbesondere waren nur die Bereiche des Parameterraumes der Stringtheorie einer Untersuchung zugänglich, in denen die Stringkopplungskonstante klein ist.

Dieses Bild hat sich durch die Entdeckung der Stringdualitäten [6, 30] grundlegend gewandelt. Von einer Dualität spricht man, wenn scheinbar verschiedene Theorien tatsächlich die gleiche Physik beschreiben. Ein einfaches Beispiel ist schon in Abschnitt 1.3 beschrieben worden: ein Zweiformfeld und ein Skalar beschreiben in vier Dimensionen den gleichen dynamischen Freiheitsgrad.

Das einfachste Beispiel aus der Stringtheorie ist durch die *T-Dualität* gegeben: Der IIA String, kompaktifiziert auf einem Kreis, entspricht dem IIB String,

kompaktifiziert auf einem Kreis mit dem inversen Radius. Ebenso entsprechen sich der $SO(32)$ und der $E_8 \times E_8$ heterotische String.

Die T-Dualität ist ein Beispiel für eine perturbative Dualität: sie gilt in allen Ordnungen der Störungstheorie. Ein Beispiel für eine nichtperturbative Dualität ist durch die $SL(2, \mathbb{Z})$ -Symmetrie des zehndimensionalen IIB Strings gegeben. Sie wirkt auf die Zustände der NEW (siehe Tabelle 1.1) gemäß¹⁵

$$\lambda \mapsto \lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}, \quad (\lambda := l + ie^{-\phi}), \quad B_{\mu\nu}^I \mapsto B_{\mu\nu}'^I = \Lambda^I{}_J B_{\mu\nu}^J, \quad (1.32)$$

wobei

$$\Lambda = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad (1.33)$$

Die anderen Felder sind invariant. (1.32) enthält ($c = 1, b = -1$) die Transformation $e^{-\phi} \mapsto -e^{\phi}$, die die Stringkopplung invertiert, also keine perturbative Symmetrie sein kann. Unter dieser Abbildung wird der fundamentale String auf einen solitonischen Zustand der Theorie, den *D-String* abgebildet. Insbesondere sieht man, daß der Limes starker Kopplung der IIB Stringtheorie durch eine schwach gekoppelte IIB Stringtheorie beschrieben wird. Die IIB Theorie ist selbstdual.

Es ist gelungen, die Limes starker Kopplung aller konsistenten Stringtheorien zu bestimmen. Mit Ausnahme des IIA Strings und des heterotischen $E_8 \times E_8$ Strings sind sie wiederum durch schwach gekoppelte Stringtheorien gegeben. Die stark gekoppelte Phase des IIA Strings wird durch eine elfdimensionale Theorie beschrieben, von der nur bekannt ist, daß ihre Niederenergiethorie durch elfdimensionale Supergravitation gegeben ist. Die vermutete zugrundeliegende Quantentheorie wird *M-Theorie* genannt [31].

Es wird vermutet, daß alle in Abschnitt 1.4 beschriebenen vierdimensionalen Stringtheorien verschiedene störungstheoretische Formulierungen einer Theorie sind. Die Äquivalenz zwischen der IIA und der IIB Theorie wird *Mirrorsymmetrie* genannt [24, 32]. Vergleicht man die Spektren der Niederenergiethorien, so stellt man fest, daß sie übereinstimmen, wenn man die Hodgezahlen $h^{(1,1)}$ und $h^{(2,1)}$ vertauscht. Die Aussage der Mirrorsymmetrie ist, daß die IIA Theorie, kompaktifiziert auf einer Calabi-Yau Mannigfaltigkeit CY_3 mit Hodgezahlen $(h^{(1,1)}, h^{(2,1)})$, äquivalent ist zur IIB Theorie, kompaktifiziert auf der sog. Mirror-Calabi-Yau \widetilde{CY}_3 mit Hodgezahlen $(\tilde{h}^{(1,1)} = h^{(2,1)}, \tilde{h}^{(2,1)} = h^{(1,1)})$. Diese Dualität ist eine perturbative Dualität, die Verallgemeinerung der T-Dualität von Toruskompaktifizierungen auf Calabi-Yau-Kompaktifizierungen.

Die Dualität zwischen den vierdimensionalen Typ II Theorien und den heterotischen Theorien kann nicht perturbativ sein. In den ersteren sitzt das Dilaton in einem Hypermultiplett, in den letzteren gehört es einem Vektormultiplett an. Das jeweilige Dilaton wird auf einen geometrischen Modulus der anderen Theorie

¹⁵Die Wirkung ist klassisch unter der größeren Gruppe $SL(2, \mathbb{R})$ invariant, die aber durch Quantenkorrekturen auf die $SL(2, \mathbb{Z})$ gebrochen wird.

abgebildet, so daß starke Kopplung auf der einen Seite mit gewissen geometrischen Eigenschaften auf der anderen Seite identifiziert wird, aber vom Wert der Kopplung der anderen Theorie unabhängig ist.

Ein möglicher Einwand gegen diese Dualität besteht darin, daß in Kompaktifizierungen des heterotischen Strings nichtabelsche Eichbosonen auftreten können, die im perturbativen Spektrum des Typ II Strings fehlen. Es konnte aber gezeigt werden, daß in den entsprechenden Punkten des Modulraumes auf der Typ II Seite die Calabi-Yau Mannigfaltigkeit singular wird: Die Volumina bestimmter Untermannigfaltigkeiten verschwinden. Dies führt dazu, daß um diese Untermannigfaltigkeit gewickelte p-Branen (solitonische Zustände) masselos werden. Die zusätzlichen masselosen Zustände sind gerade nichtabelsche Vektormultipletts.

Da keine nichtperturbative Formulierung der Stringtheorie bekannt ist, können die Dualitäten, die Theorien starker und schwacher Kopplung miteinander verbinden, nicht bewiesen werden. Allerdings ist es möglich, sie nichttrivialen Tests zu unterziehen. Ein Beispiel ist die gerade angesprochene Identifikation nichtstörungstheoretischer Zustände, die bekannten störungstheoretischen Zuständen der dualen Theorie entsprechen.

Ein weiterer Test besteht in der Abbildung der entsprechenden NEWen. Für die besprochene Dualität von IIA/ CY_3 , IIB/ \widetilde{CY}_3 und Het/ $K3 \times T^2$ ist dies im Vektormultiplettsektor gelungen.

Die Untersuchungen im Hypermultiplettsektor hingegen stehen noch an ihrem Anfang. Weit davon entfernt, die Abbildung zwischen den dualen Theorien angeben zu können, ist nicht einmal die vollständige quantenkorrigierte Wirkung in nur einer der Theorien bekannt. Ansätze zur Bestimmung des Hypermultiplettsektors von Het/ $K3 \times T^2$ finden sich in [33], Aspekte der Dualität werden in [34] untersucht, nichtstörungstheoretische Aspekte des Hypermultiplettsektors in [35–39]. In [40] findet sich eine Untersuchung mit Hilfe von Superraummethoden.

1.6 Ergebnisse und Gliederung der Arbeit

Der Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung der störungstheoretischen Quantenkorrekturen des Hypermultiplettsektors der auf einer Calabi-Yau Mannigfaltigkeit kompaktifizierten Typ IIA Stringtheorie. Dabei verfolge ich folgende Strategie: Anstatt explizit Streuamplituden der Stringtheorie zu berechnen und aus ihnen die NEW abzuleiten, soll letztere aus bekannten Stringrechnungen und den Symmetrien der Stringstörungstheorie bestimmt werden.

Im folgenden Kapitel wird der einfachste Fall, in dem nur das universelle Hypermultiplett (vgl. Seite 14) auftritt, behandelt. Man erhält ihn, indem man eine Calabi-Yau Mannigfaltigkeit mit eindeutiger komplexer Struktur ($h^{(1,2)} = 0$) betrachtet. Dieser Fall war von Strominger [41] untersucht worden. Ihm gelang es, die 1-Schleifen Korrektur zu bestimmen. Ebenfalls konnte er eine zu allen Ordnungen korrigierte Wirkung angeben, die allen Symmetrieforderungen genügt. Mir ist es gelungen zu zeigen, daß diese Wirkung durch die geforderten Symme-

trien *eindeutig* festgelegt ist. Durch die Dualisierung dieses Hypermultipletts zu einem Tensormultiplett, was, wie in Abschnitt 1.4 gesehen, die natürliche Feldbasis der Stringtheorie ist, konnte ich zeigen, daß die scheinbar zu allen Ordnungen der Störungstheorie auftretenden Quantenkorrekturen sich zu einer 1-Schleifen-Korrektur des Riemantensors zusammenfassen lassen. Damit ist es mir gelungen, ein Nichtrenormierungstheorem für das universelle Tensormultiplett zu beweisen: Es erhält Korrekturen nur zur ersten Ordnung der Störungstheorie [42].

Im darauffolgenden Kapitel wird die klassische Wirkung einer auf einer allgemeinen Calabi-Yau Mannigfaltigkeit CY_3 kompaktifizierten IIA Theorie vorgestellt. Auch die entsprechende Wirkung des Hypermultiplettsektors der IIB Theorie, kompaktifiziert auf der Mirror-Calabi-Yau \widetilde{CY}_3 , wird angegeben. Mir ist es gelungen, die explizite Abbildung zwischen den beiden Wirkungen anzugeben. Diese war vorher nur in einem Spezialfall gefunden worden [43]. Da der Hypermultiplettsektor der IIB Theorie Weltflächenkorrekturen erhält, ist die geometrische Kompaktifizierung nur im Limes großen Volumens der Calabi-Yau gültig. Durch die Abbildung auf die IIA Theorie, die keine Weltflächenkorrekturen erhält, war es möglich, auch die IIB Theorie bei beliebiger Weltflächenkopplung anzugeben. Insbesondere konnte gezeigt werden, daß die im Limes großen Volumens vorhandene $SL(2, \mathbb{Z})$ -Symmetrie der IIB Theorie durch Weltflächenkorrekturen gebrochen wird [28].

Im letzten Kapitel wird die Frage der störungstheoretischen Quantenkorrekturen der Wirkung mit einer beliebigen Anzahl von Hypermultipletts erörtert. Hier ist es mir gelungen, den allgemeinsten Ansatz für die Wirkung anzugeben, der alle geforderten Symmetrien außer der $N = 2$ Supersymmetrie respektiert. Um diesen Ansatz weiter einzuschränken, wäre zu untersuchen, unter welchen Bedingungen das durch ihn beschriebene σ -Modell eine quaternionische Mannigfaltigkeit als Zielraum hat. Es wird beschrieben, warum die Untersuchung der quaternionischen Geometrie in diesem Fall einen ungleich größeren Aufwand verlangt, als im Fall des universellen Hypermultipletts.

In einem Anhang werden schließlich die notwendigen geometrischen Konzepte eingeführt. Insbesondere wird detailliert darauf eingegangen, wie man bei einer gegebenen Mannigfaltigkeit überprüft, ob sie quaternionisch ist.

Zwei weitere Anhänge enthalten technische Details der Kapitel 2 und 4.

Kapitel 2

Das universelle Hypermultiplett

2.1 Einleitung

In diesem Kapitel wird der einfachste Hypermultiplettsektor, der in einer Calabi-Yau-Kompaktifizierung der IIA Stringtheorie auftreten kann, untersucht. Man erhält ihn, indem man eine Calabi-Yau Mannigfaltigkeit mit eindeutiger komplexer Struktur ($h^{(1,2)} = 0$) wählt. Da der Vektormultiplettsektor in diesem Abschnitt nicht betrachtet wird, enthält die vierdimensionale Niederenergietheorie nur das universelle Hypermultiplett (vgl. Seite 14).

Im ersten Abschnitt wird die klassische Wirkung des universellen Hypermultipletts vorgestellt. Dabei wird gezeigt, wie man zwischen dem Tensor- und dem Hypermultiplettbild wechselt. Ebenfalls werden die Peccei-Quinn-Symmetrien der Wirkung angegeben.

In den folgenden Abschnitten werden die Quantenkorrekturen zu dieser Wirkung bestimmt. Die Strategie, nach der ich hierbei vorgehe, wurde zuerst von Strominger [41] angegeben. Er konnte zeigen, daß ein bekannter Term der Ein-Schleifen-Korrektur durch die Symmetrien der Störungstheorie eindeutig zur gesamten Ein-Schleifen-Wirkung ergänzt werden kann. Außerdem konnte er eine Metrik angeben, die Korrekturen zu allen Ordnungen der Störungstheorie erhält und allen Symmetrieforderungen genügt.

Man stellt zunächst einen Ansatz für die Störungsentwicklung der Metrik auf, der noch nicht supersymmetrisch ist, aber den anderen Symmetrieanforderungen genügt. Dies geschieht in Abschnitt 2.3.

Danach ist zu prüfen, welche zusätzlichen Bedingungen sich durch die Supersymmetrie ergeben. Diese Forderung bedeutet, daß die Wirkung durch ein σ -Modell mit quaternionischer Metrik beschrieben wird. Dies wird mittels einer Störungsrechnung untersucht; insbesondere wird lediglich gefordert, daß die Wirkung an der n -ten Ordnung supersymmetrisch bis auf Beiträge höherer Ordnungen ist. Der Ansatz für die Störungsreihe findet sich in Abschnitt 2.4.

Das von Strominger [41] erzielte Resultat wird in Abschnitt 2.5 noch einmal hergeleitet. Zum einen wird es im folgenden Abschnitt als Induktionsvoraussetzung benötigt, zum anderen erlaubt es die Illustration der benötigten Techniken an einem einfachen Beispiel.

In Abschnitt 2.6 zeige ich, daß die von Strominger vorgeschlagene Wirkung die eindeutige Wirkung ist, die alle geforderten Symmetrien respektiert. Damit ist es mir gelungen, alle störungstheoretischen Quantenkorrekturen des universellen Hypermultipletts explizit zu bestimmen.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitel zeige ich schließlich, daß die scheinbar zu allen Ordnungen auftretenden Quantenkorrekturen im dualen Tensormultiplettbild einer Ein-Schleifen-Korrektur des Ricciskalars entsprechen. Damit ist es mir gelungen für das universelle Tensormultiplett ein Nichtrenormierungstheorem zu beweisen: Es erhält keine störungstheoretischen Korrekturen nach der ersten Ordnung.

2.2 Die klassische Wirkung

In Abschnitt 1.4 wurde das masselose Spektrum einer Typ IIA Calabi-Yau-Kompaktifizierung hergeleitet. Die vierdimensionale Wirkung wurde allerdings noch nicht angegeben. Um diese zu erhalten, setzt man die Entwicklungen (1.30) in die zehndimensionale Wirkung (1.10) ein und führt die Integration über die Calabi-Yau Mannigfaltigkeit aus¹. Wählt man eine Calabi-Yau Mannigfaltigkeit mit $h^{(1,2)} = 0$, so besteht das vierdimensionale Spektrum nur aus dem Gravitationsmultiplett und dem universellen Tensormultiplett (und dem hier nicht betrachteten Vektormultiplettsektor). Die Wirkung lautet [27] (man vergleiche auch Abschnitt 4.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & - \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ e^{-2\phi} \left(\frac{1}{2} \mathcal{R} - 2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{6} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right) + \partial_\mu C \partial^\mu \bar{C} \right\} \\ & + \frac{1}{6} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} H_{\mu\nu\rho} (\bar{C} \partial_\lambda C - C \partial_\lambda \bar{C}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Die obige Wirkung ist in einer Feldbasis angegeben, die es erlaubt, die Ordnung der Stringstörungstheorie abzulesen. Alle Terme des NSNS-Sektors treten mit einem Faktor $e^{-2\phi}$ auf, was zeigt, daß die Wirkung im klassischen Limes bestimmt wurde. Man nennt diese Feldbasis das *Stringbild*. Insbesondere tritt auch der Ricci-Skalar mit diesem Faktor multipliziert auf, also nicht mit der Standardnormierung des Einstein-Hilbert-Termes. Die Feldbasis, in der der Ricci-Skalar seine Standardnormierung hat, nennt man *Einsteinbild*. Man erhält sie durch eine *Weyl-Reskalierung* der Metrik. Unter $g_{\mu\nu} \mapsto \Lambda^{-2} \hat{g}_{\mu\nu}$ transformieren [27]

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \Lambda^2 \hat{g}^{\mu\nu}, \quad \sqrt{-g} = \Lambda^{-4} \sqrt{-\hat{g}}, \\ \sqrt{-g} \Lambda^2 \mathcal{R}(g) &= \sqrt{-\hat{g}} (\mathcal{R}(\hat{g}) + 6(\partial_\mu \ln \Lambda)^2). \end{aligned} \quad (2.2)$$

¹Im RR Sektor muß eine andere Basis der Entwicklung gewählt werden, weshalb die in der Wirkung auftretenden Felder C_0, \bar{C}_0 Linearkombinationen der in der Entwicklung auftretenden Felder c_0, \bar{c}_0 sind. Die in (1.30) gewählte Basis erlaubt eine einfachere Bestimmung des vierdimensionalen Spektrums.

Für die Transformation in das Einsteinbild wird $\Lambda = e^{-\phi}$ gewählt. Damit wird aus (2.1) (der Hut an der reskalierten Metrik wird weggelassen):

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & - \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{R} + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{6} e^{-4\phi} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} + e^{2\phi} \partial_\mu C \partial^\mu \bar{C} \right\} \\ & + \frac{1}{6} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} H_{\mu\nu\rho} (\bar{C} \partial_\lambda C - C \partial_\lambda \bar{C}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die Quantenkorrekturen zu dieser Wirkung sollen mit Hilfe der quaternionischen Geometrie bestimmt werden. Um diese Methoden anwenden zu können, muß das antisymmetrische Tensorfeld in einen Skalar dualisiert werden. Hierzu betrachtet man den das Tensorfeld enthaltenden Teil der Wirkung

$$\mathcal{S}_H = -\frac{1}{6} \int d^4x \sqrt{-g} e^{-4\phi} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{12} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} H_{\mu\nu\rho} (a_\lambda - \bar{a}_\lambda), \quad (2.4)$$

wobei abgekürzt wurde

$$a_\lambda := 2C \partial_\lambda \bar{C}. \quad (2.5)$$

Da $H_{\mu\nu\rho} = \partial_{[\mu} B_{\nu\rho]}$ die Feldstärke eines Zweiformfeldes ist, erfüllt es die Bianchi-Identität

$$\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \partial_\lambda H_{\mu\nu\rho} = 0 \quad (2.6)$$

und ist invariant unter den Eichtransformationen

$$B_{\nu\rho} \mapsto B_{\nu\rho} + \partial_{[\nu} \Lambda_{\rho]}. \quad (2.7)$$

Mit der Definition

$$H^\lambda := \frac{1}{6\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} H_{\mu\nu\rho} \quad (2.8)$$

lautet die Wirkung (2.4)

$$\mathcal{S}_H = - \int d^4x \sqrt{-g} \left(e^{-4\phi} H^\lambda H_\lambda - \frac{1}{2} H^\lambda (a_\lambda - \bar{a}_\lambda) \right) \quad (2.9)$$

und die Bianchi-Identität (2.6)

$$\mathcal{D}_\lambda H^\lambda = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda (\sqrt{-g} H^\lambda) = \frac{1}{6\sqrt{-g}} \partial_\lambda \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} H_{\mu\nu\rho} = 0. \quad (2.10)$$

Diese kann nun mittels eines Lagrangemultiplikators D zur Bewegungsgleichung erhoben werden:

$$\mathcal{S}_H = - \int d^4x \sqrt{-g} \left(e^{-4\phi} H^\lambda H_\lambda - \frac{1}{2} H^\lambda (a_\lambda - \bar{a}_\lambda) + i D \mathcal{D}_\lambda H^\lambda \right). \quad (2.11)$$

Eine Verschiebung des Lagrangemultiplikators $D \mapsto D + a$ ändert die Wirkung um eine totale Ableitung: Die Eichsymmetrie (2.7) des Zweiformfeldes ist zu einer *Peccei-Quinn-Symmetrie* des Skalarfeldes geworden. Den zur Zweiform dualen Skalar D nennt man auch *Axion*.

Die in (2.11) auftretenden H^λ sind nicht mehr durch ein Zweiformfeld (2.8) gegeben. Erst Variation nach dem Lagrangemultiplikator liefert die Gleichung (2.10), die durch $H^\lambda = (\sqrt{-g})^{-1} \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \partial_\mu B_{\nu\rho}$ gelöst wird. Statt diese Variation durchzuführen, kann man in (2.11) aber auch partiell integrieren:

$$\mathcal{S}_H = - \int d^4x \sqrt{-g} (e^{-4\phi} H^\lambda H_\lambda + H^\lambda (-i\partial_\lambda D - \frac{1}{2}(a_\lambda - \bar{a}_\lambda))). \quad (2.12)$$

In der entstandenen Wirkung ist statt D nun H^λ ein Hilfsfeld, das mittels seiner algebraischen Bewegungsgleichung

$$H_\lambda = \frac{e^{4\phi}}{2} (i\partial_\lambda D + \frac{1}{2}(a_\lambda - \bar{a}_\lambda)) \quad (2.13)$$

aus (2.12) eliminiert werden kann. Man findet

$$\mathcal{S}_H = \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} e^{4\phi} (i\partial_\lambda D + \frac{1}{2}(a_\lambda - \bar{a}_\lambda))^2. \quad (2.14)$$

Weiter gilt

$$\frac{1}{2}(a_\lambda + \bar{a}_\lambda) = \bar{C} \partial_\lambda C + C \partial_\lambda \bar{C} = \partial_\lambda (C \bar{C}), \quad (2.15)$$

woraus folgt, daß

$$\begin{aligned} & -\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{e^{4\phi}}{4} (i\partial_\mu D + \frac{1}{2}(a_\mu - \bar{a}_\mu))^2 \\ &= - \left| \partial_\mu \phi + \frac{e^{2\phi}}{2} (i\partial_\mu D + \frac{1}{2}(a_\mu + \bar{a}_\mu) - a_\mu) \right|^2 \\ &= - \frac{e^{4\phi}}{4} \left| \partial_\mu (e^{-2\phi} + iD + C \bar{C}) - a_\mu \right|^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dies legt die Feldredefinition

$$S = e^{-2\phi} + iD + C \bar{C} \quad (2.17)$$

nahe. Es gilt dann

$$e^{-2\phi} = \frac{1}{2} (S + \bar{S} - 2C \bar{C}), \quad (2.18)$$

und die Wirkung des universellen Hypermultipletts lautet:

$$\mathcal{S} = - \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{R} + \frac{|\partial_\mu S - 2\bar{C} \partial_\mu C|^2}{(S + \bar{S} - 2C \bar{C})^2} + 2 \frac{(\partial_\mu C)(\partial^\mu \bar{C})}{(S + \bar{S} - 2C \bar{C})} \right\}, \quad (2.19)$$

bzw. mit der Abkürzung (2.18)

$$\mathcal{S} = - \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{R} + e^{4\phi} \left| \frac{\partial_\mu S}{2} - \bar{C} \partial_\mu C \right|^2 + e^{2\phi} (\partial_\mu C) (\partial^\mu \bar{C}) \right\}. \quad (2.20)$$

Sie ist invariant unter 3 Peccei-Quinn-Transformationen mit den reellen Parametern α, β und γ :

$$S \mapsto S + i(\alpha - 2\beta\gamma) + 2(\gamma - i\beta)C + \gamma^2 + \beta^2, \quad C \mapsto C + \gamma + i\beta. \quad (2.21)$$

Die Metrik der Zielraummannigfaltigkeit des durch (2.20) beschriebenen σ -Modells (1.14) ist durch

$$h = e^{4\phi} \left(\frac{dS}{2} - \bar{C} dC \right) \otimes_S \left(\frac{d\bar{S}}{2} - C d\bar{C} \right) + e^{2\phi} dC \otimes_S d\bar{C} \quad (2.22)$$

gegeben, wobei \otimes_S den symmetrischen Anteil des Tensorproduktes der beiden Formen bezeichnet.

Man führt nun folgende Basis von Formen ein

$$u := \frac{1}{\sqrt{2}} e^\phi dC, \quad v := \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2\phi} \left(\frac{dS}{2} - \bar{C} dC \right). \quad (2.23)$$

Man beachte, daß diese Formen, wie auch ϕ (2.18) invariant unter (2.21) sind. Mit (2.23) lautet (2.22)

$$h = 2(u \otimes_S \bar{u} + v \otimes_S \bar{v}). \quad (2.24)$$

Daß diese Metrik quaternionisch ist, wurde in [44] und in der hier angegebenen Feldbasis in [41] gezeigt. Der Beweis verläuft analog den Rechnungen in den Abschnitten 2.5 und 2.6 und soll deshalb hier nicht noch einmal angeführt werden.

2.3 Der Ansatz für die quantenkorigierte Metrik

In diesem Unterabschnitt werden die Bedingungen der Stringstörungstheorie und die sich daraus ergebenden Einschränkungen an mögliche (störungstheoretische) Korrekturen der Metrik des universellen Hypermultipletts aufgelistet. Die hier angeführten Bedingungen wurden zuerst von Strominger [41] angegeben, der sie benutzte, um die Korrekturen erster Ordnung der Störungstheorie zu (2.20) zu bestimmen.

Der allgemeine (noch nicht eingeschränkte Ansatz) für die Störungsreihe der σ -Modellmetrik ist

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{h}_{nab} e^a \otimes_S e^b, \quad (2.25)$$

wobei die e^a eine Basis der Einsformen auf der Zielmannigfaltigkeit des σ -Modelles bilden. Die \hat{h}_{nab} sind zu diesem Zeitpunkt beliebige Funktionen in S, \bar{S}, C und \bar{C} ; $\hat{h}_{0ab}e^a \otimes_S e^b$ ist die im vorigen Abschnitt diskutierte klassische Metrik.

Die klassische Metrik ist invariant unter drei Peccei-Quinn-Symmetrien (2.21). Eine (α) wirkt auf den Imaginärteil von S , also nach (2.17) auf den zum antisymmetrischen Tensor dualen Skalar (2.18). Diese Symmetrie entspricht der Eichsymmetrie des Tensorfeldes und gilt deshalb zu allen Ordnungen der Störungstheorie. Die beiden anderen Peccei-Quinn-Symmetrien wirken auf Felder aus dem RR-Sektor. Von Symmetrien in diesem Sektor ist ebenfalls bekannt, daß sie störungstheoretisch erhalten bleiben. Die erste Forderung an die Metrik lautet also, daß sie zu allen Ordnungen invariant unter den Symmetrien (2.21) sein soll. Die Formen u, v (2.23) sind invariant unter (2.21), so daß es natürlich ist, sie als die Basis, in die die Metrik (2.25) entwickelt wird, zu wählen.

$$e^1 = u, \quad e^2 = v, \quad e^3 = \bar{v}, \quad e^4 = \bar{u}. \quad (2.26)$$

Als Bedingung bleibt dann, daß auch die Entwicklungskoeffizienten \hat{h}_{nab} invariant unter den Peccei-Quinn-Transformationen sein müssen.

Der Entwicklungsparameter der Stringstörungstheorie ist der Vakuumerwartungswert des Dilatons. Relativ zum Term nullter Ordnung hat der Term n -ter Ordnung der Störungstheorie einen Faktor $e^{2n\phi}$. Unter Verschiebungen des Dilatons $\phi \mapsto \phi - \ln \lambda$ wird er mit λ^{-2n} skaliert. Diese Verschiebung des Dilatons entspricht in der gewählten Koordinatenbasis (2.18) den Skalierungen

$$S \mapsto \lambda^2 S, \quad C \mapsto \lambda C. \quad (2.27)$$

Die Formen u, v sind unter diesen Skalierungen invariant. Folglich muß sich der n -Schleifen-Term der Metrik wie

$$\hat{h}_{nab} \mapsto \lambda^{-2n} \hat{h}_{nab} \quad (2.28)$$

verhalten. Der Term

$$\hat{h}_{nab}e^a \otimes_S e^b = e^{2n\phi} h_{nab}e^a \otimes_S e^b \quad (2.29)$$

hat das gewünschte Verhalten, wenn die h_{nab} ebenfalls invariant unter den Skalierungen sind. Da $e^{2n\phi}$ außerdem invariant unter den Peccei-Quinn-Symmetrien ist, müssen es die h_{nab} ebenfalls sein. Die einzigen Funktionen, die invariant sowohl unter den Peccei-Quinn-Symmetrien (2.21) als auch unter den Skalierungen (2.27) sind, sind die konstanten (dies wird in Anhang B bewiesen). Es gilt also $h_{nab} \in \mathbb{C}$.

Weiter ist bekannt, daß nichtverschwindende Stringamplituden immer eine gerade Anzahl von RR-Feldern (C und \bar{C}) haben. Die Anzahl der RR-Felder in $e^{2n\phi}$ ist gerade, die in v ebenfalls, wohingegen u nur ein einzelnes enthält. In der Entwicklung des n -Schleifen-Termes müssen also die Koeffizienten von $u \otimes_S v, u \otimes_S \bar{v}, \bar{u} \otimes_S v$ und $\bar{u} \otimes_S \bar{v}$ verschwinden.

Außerdem ist die Stringstörungstheorie paritätsinvariant. Die Paritätstransformation ändert das Vorzeichen des NSNS Axions ($\text{Im}S$, vgl. (2.17)), d.h. sie ist durch die Transformation $S \mapsto \bar{S}$ gegeben. Unter dieser Transformation sind ϕ und u invariant, wohingegen für v gilt

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2\phi} \left(\frac{1}{2} dS - \bar{C} dC \right) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2\phi} \left(\frac{1}{2} d\bar{S} - \bar{C} dC \right) \neq v. \quad (2.30)$$

Hieraus folgt, daß die Koeffizienten von $v \otimes_S v$ und $\bar{v} \otimes_S \bar{v}$ verschwinden müssen, wohingegen $v \otimes_S \bar{v}$ erlaubt bleibt.

Da die Wirkung reell sein muß, hat man außerdem die Bedingung, daß die Koeffizienten von $u \otimes_S u$ und $\bar{u} \otimes_S \bar{u}$ komplex konjugiert zueinander sein müssen, wohingegen die von $u \otimes_S \bar{u}$ und $v \otimes_S \bar{v}$ reell sind.

Zusammenfassend wurde in diesem Unterabschnitt gezeigt, daß der allgemeinste Ansatz für die quantenkorigierte Metrik des universellen Hypermultipletts, der mit den Symmetrien der Stringstörungstheorie verträglich ist, folgende Form hat:

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} e^{2n\phi} \left(\lambda_n u \otimes_S \bar{u} + \kappa_n v \otimes_S \bar{v} + \mu_n u \otimes_S u + \bar{\mu}_n \bar{u} \otimes_S \bar{u} \right),$$

$$\lambda_n = h_{n14}, \quad \kappa_n = h_{n23}, \quad \mu_n = h_{n11}, \quad \bar{\mu}_n = h_{n44}. \quad (2.31)$$

Es bleibt zu überprüfen, welche zusätzlichen Einschränkungen an diese Metrik durch die Forderung, daß sie eine quaternionische Mannigfaltigkeit beschreibt, gestellt werden. Die quaternionische Geometrie ist im Anhang A ausführlich beschrieben. Hier seien die wichtigsten Begriffe zusammengestellt.

Man wählt eine Vielbeinform (V^a) (A.89)

$$h = V^{aT} \eta_{ab} \otimes_S V^b, \quad (2.32)$$

wobei die Tangentialraummetrik lautet (A.59)

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Für die klassische Metrik (2.24) findet man z.B.²

$$V^T = (u, v, -\bar{v}, \bar{u}). \quad (2.34)$$

Die Spinkonnexion Ω (A.77),

$$dV + \Omega \wedge V = 0, \quad (2.35)$$

²Das Vielbein ist nur bis auf eine $\mathfrak{sp}(1) \times \mathfrak{sp}(1)$ Rotation bestimmt.

nimmt auf einer reell vierdimensionalen quaternionischen Mannigfaltigkeit ihre Werte in $\mathfrak{sp}(1) \times \mathfrak{sp}(1)$ an (A.93):

$$\begin{aligned} \Omega &= p \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_2 \otimes q, \quad p = -i \begin{pmatrix} p^3 & p^1 - ip^2 \\ p^1 + ip^2 & -p^3 \end{pmatrix}, \quad q = -i \begin{pmatrix} q^3 & q^1 - iq^2 \\ q^1 + iq^2 & -q^3 \end{pmatrix}, \\ &= -i \begin{pmatrix} (p^3 + q^3) & (p^1 - ip^2) & (q^1 - iq^2) & 0 \\ (p^1 + ip^2) & -(p^3 - q^3) & 0 & (q^1 - iq^2) \\ (q^1 + iq^2) & 0 & (p^3 - q^3) & (p^1 - ip^2) \\ 0 & (q^1 + iq^2) & (p^1 + ip^2) & -(p^3 + q^3) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Aus den Vielbeinen konstruiert man die drei Hyperkählerformen (A.73)

$$J^a = -i(\eta V)^T \wedge (\sigma^a \otimes \mathbb{1}_2)V. \quad (2.37)$$

Die auftretenden Tensorprodukte sind in der hier betrachteten Basis durch

$$(\sigma^a \otimes \mathbb{1}_2) = \begin{pmatrix} \sigma^a & 0 \\ 0 & \sigma^a \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

gegeben. Die Mannigfaltigkeit ist quaternionisch, wenn die Krümmung der $\mathfrak{sp}(1)$ -Konnexion (A.83),

$$F^a = dp^a + \varepsilon^{abc} p^b \wedge p^c, \quad (2.39)$$

gleich den negativen Hyperkählerformen ist (A.84):

$$F^a = -J^a. \quad (2.40)$$

2.4 Die Störungsreihe

In diesem Unterabschnitt werden die Methoden der Störungsrechnung vorgestellt, mit denen in den folgenden Abschnitten die vollständige perturbative Metrik des universellen Hypermultipletts hergeleitet wird.

Ebenso wie die Metrik (2.31) wird auch das Vielbein in eine Störungsreihe in $e^{2\phi}$ entwickelt

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n, \quad V_n = e^{2n\phi} \widehat{V}_n. \quad (2.41)$$

Für die Metrik gilt dann

$$h = \left(\sum_{n=0}^{\infty} V_n^T \right) \eta \otimes_S \left(\sum_{n=0}^{\infty} V_n \right), \quad (2.42)$$

bzw.

$$e^{2n\phi} h_n = \sum_{m=0}^n V_m^T \eta \otimes_S V_{n-m}. \quad (2.43)$$

Ein Vielbein, das zur geforderten Form der Metrik (2.31) führt, ist gegeben durch

$$V_n = e^{2n\phi} \begin{pmatrix} \gamma_n u + \bar{\alpha}_n \bar{u} \\ \beta_n v \\ -\beta_n \bar{v} \\ \alpha_n u + \gamma_n \bar{u} \end{pmatrix}, \quad \alpha_n \in \mathbb{C}, \quad \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}. \quad (2.44)$$

Man findet für die Metrik (2.43)

$$\begin{aligned} h_n = & 2 \left(\sum_{m=0}^n (\gamma_m \gamma_{n-m} + \alpha_m \bar{\alpha}_{n-m}) \right) u \otimes_S \bar{u} + 2 \left(\sum_{m=0}^n \beta_m \beta_{n-m} \right) v \otimes_S \bar{v} \\ & + 2 \left(\sum_{m=0}^n \gamma_m \alpha_{n-m} \right) u \otimes_S u + 2 \left(\sum_{m=0}^n \gamma_m \bar{\alpha}_{n-m} \right) \bar{u} \otimes_S \bar{u}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Vergleich mit (2.31) liefert

$$\begin{aligned} \lambda_n &= 2 \sum_{m=0}^n (\gamma_m \gamma_{n-m} + \alpha_m \bar{\alpha}_{n-m}), & \kappa_n &= 2 \sum_{m=0}^n \beta_m \beta_{n-m}, \\ \mu_n &= 2 \sum_{m=0}^n \gamma_m \alpha_{n-m}, & \bar{\mu}_n &= 2 \sum_{m=0}^n \gamma_m \bar{\alpha}_{n-m}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Das angegebene Vielbein hat, wie die Metrik, an jeder Ordnung vier reelle Parameter, schränkt also den Ansatz (2.31) nicht ein. Wie man leicht sieht, erfüllt es auch die Bedingung (A.64).

Die Spinkonnexion wird ebenfalls in eine Störungsreihe entwickelt

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n, \quad \Omega_n = e^{2n\phi} \widehat{\Omega}_n. \quad (2.47)$$

Bestimmt wird sie aus der Bedingung, daß das Vielbein kovariant konstant sein soll (2.35). Diese lautet in der n -ten Ordnung (vgl. (A.94))

$$dV_n^a + \sum_{m=0}^{n-1} \Omega_m^a{}_b \wedge V_{n-m}^b + \Omega_n^a{}_b \wedge V_0^b = 0. \quad (2.48)$$

Vergleicht man dies mit (A.94), so sieht man, daß man die in (A.101) angegebene Formel zur Berechnung der Spinkonnexion weiterhin benutzen kann, wenn man nur die Definition der 2-Form R^a (A.96) abändert zu (Um Verwechslungen mit der Ordnung der Störungstheorie zu vermeiden, werden in den folgenden beiden Formeln die Koordinatenindizes der Mannigfaltigkeit mit griechischen Buchstaben bezeichnet.)

$$R_{n\nu\mu}^a f^\mu \wedge f^\nu := dV_n^a + \sum_{m=0}^{n-1} \Omega_m^a{}_b \wedge V_{n-m}^b. \quad (2.49)$$

Man erhält dann

$$\Omega_{n\mu}{}^a{}_b = \frac{1}{2}\eta^{ac}V_{0c}{}^\nu V_{0b}{}^\lambda \eta_{ef}(V_{0\mu}{}^e R_{n\lambda\nu}^f + V_{0\nu}{}^e R_{n\lambda\mu}^f + V_{0\lambda}{}^e R_{n\mu\nu}^f). \quad (2.50)$$

Hier treten nur Vielbeine nullter Ordnung auf, da nur diese den n -ten Ordnungsterm der Krümmung in (2.48) multiplizieren. An (2.49) sieht man, daß die Krümmungen und Vielbeine der ersten $(n-1)$ Ordnungen bekannt sein müssen, um die der n -ten zu berechnen.

Da gezeigt wurde, daß die Vielbeine zu allen Ordnungen durch die in (2.23) eingeführten 1-Formen und ϕ ausgedrückt werden können, reicht es deren äußere Ableitungen zu kennen, um die Spinkonnexion zu allen Ordnungen berechnen zu können. Man findet

$$\begin{aligned} d\phi &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(v + \bar{v}), \\ du &= \frac{1}{\sqrt{2}}u \wedge (v + \bar{v}), \\ dv &= \sqrt{2}(v \wedge \bar{v} + u \wedge \bar{u}). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Um die Bedingung der quaternionischen Geometrie (2.40) in der Störungsrechnung formulieren zu können, müssen noch die Hyperkählerformen und die Krümmung der $\mathfrak{sp}(1)$ -Konnexion entwickelt werden:

$$\begin{aligned} J^a &= \sum_{n=0}^{\infty} J_n^a, & J_n^a &= e^{2n\phi} \hat{J}_n^a. \\ F^a &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^a, & F_n^a &= e^{2n\phi} \hat{F}_n^a. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Für die Hyperkählerformen (2.37) gilt

$$J_n^a = -i \sum_{m=0}^n (\eta V_m)^T \wedge (\sigma^a \otimes \mathbb{1}_2) V_{n-m}, \quad (2.53)$$

für die Krümmungen der $\mathfrak{sp}(1)$ -Konnexion (2.39)

$$F_n^a = dp_n^a + \sum_{m=0}^n \varepsilon^{abc} p_m^b \wedge p_{n-m}^c. \quad (2.54)$$

Zu überprüfen ist, daß

$$F_n^a = -J_n^a \quad (2.55)$$

erfüllt ist.

Man beachte, daß hier nicht gezeigt wird, daß die Metrik Ordnung für Ordnung quaternionisch ist. Die Hyperkählerformen J_n^a die zu konstruieren wären,

um zu zeigen, daß die durch $(V = \sum_{m=0}^n V_m)$ gegebenen Metrik quaternionisch ist, lauten

$$J_n^a = i \left(\eta \left(\sum_{m=0}^n V_m^T \right) \right) \wedge (\sigma^a \otimes \mathbb{1}_2) \left(\sum_{k=0}^n V_k \right). \quad (2.56)$$

Im Gegensatz zu (2.53) enthalten sie Terme mit $m+k > n$. Solche Terme werden ebenso bei der Berechnung von Ω_n (2.48) vernachlässigt.

Die Bestimmung der quantenkorrigierten Metrik erfolgt nun in zwei Schritten: Im nächsten Abschnitt wird das Vielbein zur ersten Ordnung bestimmt. Diese Rechnung wurde schon in [41] durchgeführt. Danach zeige ich mittels vollständiger Induktion, daß die ebenfalls in [41] vorgeschlagene, zu allen Ordnungen korrigierte Metrik tatsächlich die einzige Metrik der Form (2.31) ist, die quaternionisch ist. Dazu wird das Ein-Schleifen-Ergebnis als Induktionsanfang benötigt, da der Schritt von der nullten zur ersten Ordnung der Störungstheorie ein anderer ist, als von der n -ten zur $(n+1)$ -ten.

2.5 Quantenkorrekturen in der ersten Ordnung

Um Vielbein und Konnexion an der Ein-Schleifen-Ordnung zu berechnen, müssen zuerst die entsprechenden klassischen Größen bekannt sein. Aus (2.34) und (2.50) erhält man

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}(v - \bar{v}) & -\sqrt{2}u & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\bar{u} & -\sqrt{2}(v - \bar{v}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}(v - \bar{v}) & -\sqrt{2}u \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\bar{u} & \frac{1}{\sqrt{2}}(v - \bar{v}) \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

bzw.

$$p_0^1 = -\frac{i}{\sqrt{2}}(u - \bar{u}), \quad p_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + \bar{u}), \quad p_0^3 = \frac{i}{2\sqrt{2}}(v - \bar{v}). \quad (2.58)$$

Der Ansatz für das Vielbein bei ersten Ordnung ist (2.44)

$$V_1 = e^{2\phi} \begin{pmatrix} \gamma_1 u + \bar{\alpha}_1 \bar{u} \\ \beta_1 v \\ -\beta_1 \bar{v} \\ \alpha_1 u + \gamma_1 \bar{u} \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

woraus man für die Matrix R (2.49) findet

$$R_1 = \sqrt{2}e^{2\phi} \begin{pmatrix} (2\gamma_1 - \beta_1)u \wedge v + \gamma_1 u \wedge \bar{v} + 2\bar{\alpha}_1 \bar{u} \wedge v + \bar{\alpha}_1 \bar{u} \wedge \bar{v} \\ \beta_1 v \wedge \bar{v} + (\beta_1 - \gamma_1)u \wedge \bar{u} \\ \beta_1 v \wedge \bar{v} + (\beta_1 - \gamma_1)u \wedge \bar{u} \\ \alpha_1 u \wedge v + 2\alpha_1 u \wedge \bar{v} + \gamma_1 \bar{u} \wedge v + (2\gamma_1 - \beta_1)\bar{u} \wedge \bar{v} \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

und die Konnexion

$$\Omega_1 = \sqrt{2}ae^{2\phi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(v - \bar{v}) & \frac{1}{2}u & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\bar{u} & (v - \bar{v}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(v - \bar{v}) & \frac{1}{2}u \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\bar{u} & -\frac{1}{2}(v - \bar{v}) \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Strominger [41] konnte durch Vergleich mit der bekannten \mathcal{R}^4 -Korrektur [45–47] der zehndimensionalen NEW den Wert der Konstanten a bestimmen. Es gilt

$$a = \frac{c_1 \chi}{80\pi^3}. \quad (2.68)$$

Hierbei ist χ die Eulerzahl der Calabi-Yau Mannigfaltigkeit (A.30) und c_1 eine Zahl. Laut [47] gilt

$$c_1 = \frac{1}{3 \cdot 2^6 \pi^5}. \quad (2.69)$$

2.6 Quantenkorrekturen in allen Ordnungen

Die im vorigen Abschnitt hergeleiteten Ergebnisse waren schon von Strominger [41] angegeben worden. Er hatte ebenfalls bemerkt, daß die Korrekturen zur Metrik nicht nach der ersten Ordnung abbrechen können, da sie nur bis auf Terme höherer Ordnung quaternionisch ist. Er stellte weiter die Vermutung auf, daß die Metrik zu jeder Ordnung Störungsrechnung Beiträge erhält und gab eine solche Metrik an, die mit allen Bedingungen der Störungsrechnung verträglich ist. In diesem Abschnitt werde ich mittels vollständiger Induktion zeigen, daß diese Metrik tatsächlich die einzige ist, die diesen Bedingungen genügt.

Die von Strominger [41] vorgeschlagene Metrik ist

$$h = 2(1 + ae^{2\phi})^{-1}u \otimes_S \bar{u} + 2(1 + ae^{2\phi})^{-2}v \otimes_S \bar{v}, \quad (2.70)$$

ein zugehöriges Vielbein ist

$$V = \begin{pmatrix} (1 + ae^{2\phi})^{-1/2}u \\ (1 + ae^{2\phi})^{-1}v \\ -(1 + ae^{2\phi})^{-1}\bar{v} \\ (1 + ae^{2\phi})^{-1/2}\bar{u} \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

Dies kann man in Taylorreihen in $e^{2\phi}$ entwickeln und erhält dann die

Behauptung. Die Metrik des universellen Hypermultipletts ist zu allen Ordnungen der Störungstheorie gegeben durch

$$h = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{2\phi})^n (-1)^n (u \otimes_S \bar{u} + (n+1)v \otimes_S \bar{v}). \quad (2.72)$$

Ein zugehöriges Vielbein ist

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{2\phi})^n \begin{pmatrix} \binom{-1/2}{n} u \\ (-1)^n v \\ -(-1)^n \bar{v} \\ \binom{-1/2}{n} \bar{u} \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

Zu ihm gehört folgende Spinkonnexion

$$\Omega = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{2\phi})^n \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(-1)^n(v - \bar{v}) & -\binom{-1/2}{n} u & 0 & 0 \\ \binom{-1/2}{n} \bar{u} & -(-1)^n(v - \bar{v}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n(v - \bar{v}) & -\binom{-1/2}{n} u \\ 0 & 0 & \binom{-1/2}{n} \bar{u} & \frac{1}{2}(-1)^n(v - \bar{v}) \end{pmatrix}. \quad (2.74)$$

Wie leicht zu sehen ist, wurde die Behauptung für $n = 0, 1$ in den vorangegangenen Unterabschnitten bereits bestätigt. Im folgenden sei angenommen, daß sie für die ersten n Ordnungen schon bewiesen ist. Der Ansatz für das Vielbein in der $(n + 1)$ -ten Ordnung ist (2.44)

$$V_{n+1} = e^{2(n+1)\phi} \begin{pmatrix} \gamma_{(n+1)} u + \bar{\alpha}_{(n+1)} \bar{u} \\ \beta_{(n+1)} v \\ -\beta_{(n+1)} \bar{v} \\ \alpha_{(n+1)} u + \gamma_{(n+1)} \bar{u} \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

Im folgenden wird der Index $(n + 1)$ an den $\alpha, \bar{\alpha}, \beta$ und γ weggelassen, da die Parameter des Ansatzes (2.44) zu niedrigeren Ordnungen schon durch den Induktionsansatz bestimmt sind, wohingegen die höherer Ordnungen in der Rechnung nicht auftreten, so daß keine Verwechslungsgefahr besteht.

Es kann nun die Matrix R (2.49) in der $(n + 1)$ -ten Ordnung bestimmt werden

$$\begin{aligned} R_{n+1}^a &= dV_{n+1}^a + \sum_{m=0}^n \Omega_m^a{}^b \wedge V_{n+1-m}^b, \\ R_{n+1}^1 &= \sqrt{2} e^{2(n+1)\phi} \{ ((n+2)\gamma - \beta + a^{n+1}A) u \wedge v + (n+2)\bar{\alpha}\bar{u} \wedge v \\ &\quad + ((n+1)\gamma + a^{n+1}A) u \wedge \bar{v} + (n+1)\bar{\alpha}\bar{u} \wedge \bar{v} \}, \\ R_{n+1}^2 &= \sqrt{2} e^{2(n+1)\phi} \{ (\beta - \gamma + a^{n+1}B) u \wedge \bar{u} + ((n+1)\beta - a^{n+1}C) v \wedge \bar{v} \}, \\ R_{n+1}^3 &= \sqrt{2} e^{2(n+1)\phi} \{ (\beta - \gamma + a^{n+1}B) u \wedge \bar{u} + ((n+1)\beta - a^{n+1}C) v \wedge \bar{v} \}, \\ R_{n+1}^4 &= -\sqrt{2} e^{2(n+1)\phi} \{ (n+1)\alpha u \wedge v + ((n+1)\gamma + a^{n+1}A) \bar{u} \wedge v \\ &\quad + (n+2)\alpha u \wedge \bar{v} + ((n+2)\gamma - \beta + a^{n+1}A) \bar{u} \wedge \bar{v} \}, \end{aligned} \quad (2.76)$$

wobei gesetzt wurde

$$A := -\frac{1}{2}((-1)^n + 2(n+1)\binom{-1/2}{n+1}),$$

$$B := \left((-1)^n + 2\binom{-1/2}{n+1}\right), \quad C := -(-1)^n n. \quad (2.77)$$

Benötigt wurden die Identitäten der Binomialkoeffizienten

$$\sum_{m=1}^n \binom{-1/2}{m} \binom{-1/2}{n+1-m} = (-1)^{n+1} - 2\binom{-1/2}{n+1}, \quad (2.78)$$

$$\sum_{m=1}^n (-1)^m \binom{-1/2}{n+1-m} = (-1)^n - \binom{-3/2}{n} = (-1)^n + 2(n+1)\binom{-1/2}{n+1}.$$

Aus (2.76) und (2.50) erhält man die Konnexion ($\widehat{\Omega}_n = e^{-2n\phi}\Omega_n$) (die Rechnung wurde mit MAPLE V durchgeführt):

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{\Omega}_{n+1} = \begin{pmatrix} (\gamma - \beta - \frac{1}{2}a^{n+1}B)(v - \bar{v}) & -((n+1)\gamma + a^{n+1}(A + \frac{1}{2}B))u - (n+2)\bar{\alpha}\bar{u} & & \\ (n+2)\alpha u + ((n+1)\gamma + a^{n+1}(A + \frac{1}{2}B))\bar{u} & -((n+1)\beta - a^{n+1}C)(v - \bar{v}) & & \dots \\ -(n+1)\alpha u - ((n+2)\gamma - \beta + a^{n+1}(A - \frac{1}{2}B))\bar{u} & 0 & & \\ 0 & -(n+1)\alpha u - ((n+2)\gamma - \beta + a^{n+1}(A - \frac{1}{2}B))\bar{u} & & \\ ((n+2)\gamma - \beta + a^{n+1}(A - \frac{1}{2}B))u + (n+1)\bar{\alpha}\bar{u} & 0 & & \\ \dots & ((n+2)\gamma - \beta + a^{n+1}(A - \frac{1}{2}B))u + (n+1)\bar{\alpha}\bar{u} & & \\ \dots & ((n+1)\beta - a^{n+1}C)(v - \bar{v}) & -((n+1)\gamma + a^{n+1}(A + \frac{1}{2}B))u - (n+2)\bar{\alpha}\bar{u} & \\ (n+2)\alpha u + ((n+1)\gamma + a^{n+1}(A + \frac{1}{2}B))\bar{u} & -(\gamma - \beta - \frac{1}{2}a^{n+1}B)(v - \bar{v}) & & \end{pmatrix}, \quad (2.79)$$

bzw.

$$\begin{aligned} p_{n+1}^1 &= \frac{i}{\sqrt{2}}e^{2(n+1)\phi} \left((n+2)\alpha - (n+1)\gamma - a^{n+1}(A + \frac{1}{2}B) \right) u \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{2}}e^{2(n+1)\phi} \left((n+2)\bar{\alpha} - (n+1)\gamma - a^{n+1}(A + \frac{1}{2}B) \right) \bar{u}, \\ p_{n+1}^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{2(n+1)\phi} \left((n+2)\alpha + (n+1)\gamma + a^{n+1}(A + \frac{1}{2}B) \right) u \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{2(n+1)\phi} \left((n+2)\bar{\alpha} + (n+1)\gamma + a^{n+1}(A + \frac{1}{2}B) \right) \bar{u}, \\ p_{n+1}^3 &= \frac{i}{\sqrt{2}}e^{2(n+1)\phi} \left(n\beta + \gamma - a^{n+1}(C + \frac{1}{2}B) \right) (v - \bar{v}). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Hieraus werden nun die $\mathfrak{sp}(1)$ -Krümmungen (2.54) ($\widehat{F}_n^a = e^{-2n\phi}F_n^a$) bestimmt:

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{n+1}^1 &= i \left\{ \left((n+2)^2\alpha + n\beta - ((n+1)^2 - 1)\gamma - (n+2)a^{n+1}(A + \frac{1}{2}B) - a^{n+1}C \right) u \wedge v \right. \\ &\quad + \left((n+1)(n+2)\alpha - n\beta - ((n+1)(n+2) + 1)\gamma - (n+1)a^{n+1}(A + \frac{1}{2}B) + a^{n+1}C \right) u \wedge \bar{v} \\ &\quad + \left(n\beta + ((n+1)(n+2) + 1)\gamma - (n+1)(n+2)\bar{\alpha} + (n+1)a^{n+1}(A + \frac{1}{2}B) - a^{n+1}C \right) \bar{u} \wedge v \\ &\quad \left. + \left(-n\beta + ((n+1)^2 - 1)\gamma - (n+2)^2\bar{\alpha} + (n+2)a^{n+1}(A + \frac{1}{2}B) + a^{n+1}C \right) \bar{u} \wedge \bar{v} \right\}, \\ \widehat{F}_{n+1}^2 &= \left\{ \left((n+2)^2\alpha - n\beta + ((n+1)^2 - 1)\gamma + (n+2)a^{n+1}(A + \frac{1}{2}B) + a^{n+1}C \right) u \wedge v \right. \\ &\quad + \left((n+1)(n+2)\alpha + n\beta + ((n+1)(n+2) + 1)\gamma + (n+1)a^{n+1}(A + \frac{1}{2}B) - a^{n+1}C \right) u \wedge \bar{v} \\ &\quad + \left(n\beta + ((n+1)(n+2) + 1)\gamma + (n+1)(n+2)\bar{\alpha} + (n+1)a^{n+1}(A + \frac{1}{2}B) - a^{n+1}C \right) \bar{u} \wedge v \\ &\quad \left. + \left(-n\beta + ((n+1)^2 - 1)\gamma + (n+2)^2\bar{\alpha} + (n+2)a^{n+1}(A + \frac{1}{2}B) + a^{n+1}C \right) \bar{u} \wedge \bar{v} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{n+1}^3 = i \left\{ \left(2n\beta - (4n+2)\gamma - 4a^{n+1}\left(A + \frac{1}{2}B\right) - 2a^{n+1}\left(C - \frac{1}{2}B\right) \right) u \wedge \bar{u} \right. \\ \left. + \left(2(n+2)n\beta + 2(n+2)\gamma - 2(n+2)a^{n+1}\left(C + \frac{1}{2}B\right) \right) v \wedge \bar{v} \right\}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Für die Hyperkählerformen (2.53) ($\widehat{J}_n^a = e^{-2n\phi} J_n^a$) findet man

$$\begin{aligned} -\widehat{J}_{n+1}^1 &= i \left(\alpha u \wedge v - (\beta + \gamma - 2a^{n+1}A) u \wedge \bar{v} \right. \\ &\quad \left. + (\beta + \gamma - 2a^{n+1}A) \bar{u} \wedge v - \bar{\alpha} \bar{u} \wedge \bar{v} \right), \\ -\widehat{J}_{n+1}^2 &= \left(\alpha u \wedge v + (\beta + \gamma - 2a^{n+1}A) u \wedge \bar{v} \right. \\ &\quad \left. + (\beta + \gamma - 2a^{n+1}A) \bar{u} \wedge v + \bar{\alpha} \bar{u} \wedge \bar{v} \right), \\ -\widehat{J}_{n+1}^3 &= i \left((2\beta + a^{n+1}C) v \wedge \bar{v} - (2\gamma - a^{n+1}B) u \wedge \bar{u} \right). \end{aligned} \quad (2.82)$$

Die Bedingung $F^3 = -J^3$ liefert nun die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2(n^2 + 2n - 1)\beta + 2(n+2)\gamma &= (2n+5)a^{n+1}C + (n+2)a^{n+1}B, \\ n\beta &= 2n\gamma + a^{n+1}(2A + B + C) \end{aligned} \quad (2.83)$$

Setzt man die zweite in die erste ein, so erhält man (2.84)

$$(4n^3 + 10n^2)\gamma = -a^{n+1}(4(n^2 + 2n - 1)A + (n^2 + 2n - 2)B - (n+2)C),$$

oder (2.77)

$$\gamma = a^{n+1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ n+1 \end{pmatrix}. \quad (2.85)$$

Dies wiederum in die zweite eingesetzt liefert

$$\beta = a^{n+1}(-1)^{n+1}. \quad (2.86)$$

Der Vergleich der $u \wedge v$ -Terme von $F^1 = -J^1$ liefert

$$\left((n+2)^2 - 1 \right) \alpha = -n\beta + \left((n+1)^2 - 1 \right) \gamma + (n+2)a^{n+1}\left(A + \frac{1}{2}B\right) + a^{n+1}C, \quad (2.87)$$

der der $u \wedge v$ -Terme von $F^2 = -J^2$ hingegen

$$\left((n+2)^2 - 1 \right) \alpha = +n\beta - \left((n+1)^2 - 1 \right) \gamma - (n+2)a^{n+1}\left(A + \frac{1}{2}B\right) - a^{n+1}C. \quad (2.88)$$

Es können nur dann beide Gleichungen erfüllt sein, wenn

$$\alpha = 0 \quad (2.89)$$

gilt. Setzt man (2.85), (2.86) und (2.89) in die Ansätze für das Vielbein (2.75) und die Konnexion (2.79) ein, so erhält man den Term $(n+1)$ -ter Ordnung aus (2.73) bzw. (2.74), womit die Behauptung von Seite 31 bewiesen ist und die Korrekturen zu allen Ordnungen der Störungsrechnung für das universelle Hypermultiplett bestimmt sind.

2.7 Das Nichtrenormierungstheorem

Es ist bekannt [48], daß in der vierdimensionalen IIA Theorie der Einstein-Hilbert-Term eine 1-Schleifen-Korrektur erhält. Sie lautet im Tensormultipllett- und Stringbild (vgl. (2.1))

$$e^{-2\phi}\mathcal{R} \mapsto (e^{-2\phi} + b)\mathcal{R}. \quad (2.90)$$

Um die vollständige $N=2$ supersymmetrische Wirkung zu erhalten, benutzt man, daß $e^{-2\phi}$ und

$$e^{-2\hat{\phi}} := e^{-2\phi} + b \quad (2.91)$$

unter Supersymmetrie gleich transformieren. Die gesuchte Wirkung erhält man demnach, indem man in der klassischen Wirkung ϕ durch $\hat{\phi}$ ersetzt:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{1L} = & - \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ e^{-2\hat{\phi}} \left(\frac{1}{2} \mathcal{R} - 2 \partial_\mu \hat{\phi} \partial^\mu \hat{\phi} + \frac{1}{6} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right) + \partial_\mu C \partial^\mu \bar{C} \right\} \\ & + \frac{1}{12} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} H_{\mu\nu\rho} (\bar{C} \partial_\lambda C - C \partial_\lambda \bar{C}). \end{aligned} \quad (2.92)$$

Es gilt

$$e^{-2\phi} \partial_\mu \phi = e^{-2\hat{\phi}} \partial_\mu \hat{\phi} \quad \implies \quad \partial_\mu \hat{\phi} = \frac{e^{-2\phi}}{e^{-2\phi} + b} \partial_\mu \phi. \quad (2.93)$$

Dies eingesetzt in die Wirkung (2.92) liefert

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{1L} = & - \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ (e^{-2\phi} + b) \left(\frac{1}{2} \mathcal{R} - 2 \frac{e^{-4\phi}}{(e^{-2\phi} + b)^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{6} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right) \right. \\ & \left. + \partial_\mu C \partial^\mu \bar{C} \right\} + \frac{1}{12} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} H_{\mu\nu\rho} (\bar{C} \partial_\lambda C - C \partial_\lambda \bar{C}). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Nun wird zum Einsteinbild übergegangen und das Tensorfeld zu einem Skalar dualisiert. Die Rechnung entspricht der in Abschnitt 2.2. Man erhält

$$\mathcal{S} = - \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{R} + \frac{|\partial_\mu S - 2\bar{C} \partial_\mu C|^2}{(S + \bar{S} - 2C\bar{C} + 2b)^2} + 2 \frac{(\partial_\mu C)(\partial^\mu \bar{C})}{(S + \bar{S} - 2C\bar{C} + 2b)} \right\}. \quad (2.95)$$

Dies ist aber gerade die in Abschnitt 2.6 hergeleitete Wirkung für das zu allen Ordnungen korrigierte universelle Hypermultipllett, wobei gilt (vgl. (2.68))

$$b = \frac{1}{2} a = \frac{c_1 \chi}{160 \pi^3}. \quad (2.96)$$

Damit habe ich folgendes Nichtrenormierungstheorem bewiesen:

Theorem. Der universelle Sektor der Typ IIA Stringtheorie, kompaktifiziert auf einer Calabi-Yau Mannigfaltigkeit, erhält keine perturbativen Quantenkorrekturen nach der ersten Ordnung. Die Ein-Schleifen-Korrektur ist die supersymmetrische Ergänzung einer Korrektur zum Einstein-Hilbert-Term. Die vollständige perturbative Wirkung ist gegeben durch (2.94), (2.95) und (2.96).

Dies löst auch die scheinbare Unstimmigkeit auf, die dadurch gegeben ist, daß die Wirkung im Hypermultiplettbild nicht wie erwartet zu jeder Ordnung der Störungstheorie supersymmetrisch ist. Tatsächlich gibt es Korrekturen nur zur ersten Ordnung und diese sind supersymmetrisch. Bei der Dualisierung ins Hypermultiplettbild wird das Dilaton in einigen Termen invertiert (2.13) und so werden höhere Korrekturen vorgetäuscht.

Man beachte, daß die störungstheoretisch korrigierte Wirkung aus der klassischen Wirkung durch eine Verschiebung der inversen Stringkopplung (d.h. eine Feldredefinition) hervorgeht (2.91). Es wird vermutet, daß dies zu nichttrivialen Konsequenzen führt, sobald auch nichtstörungstheoretische Korrekturen betrachtet werden [38, 41].

Kapitel 3

Eine Realisierung der Mirrorsymmetrie

3.1 Einleitung

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird die klassische Wirkung des Hypermultiplettsektors der auf einer beliebigen Calabi-Yau Mannigfaltigkeit CY_3 kompaktifizierten Typ IIA Stringtheorie angegeben. Um sie zu erhalten, wird die *c-map* [23] eingeführt.

Eine Aussage der Mirrorsymmetrie (vgl. Abschnitt 1.5) ist, daß diese Wirkung auch durch die Kompaktifizierung der IIB Stringtheorie auf der Mirror-Calabi-Yau \widetilde{CY}_3 erhalten werden kann. Diese Aussage wird in diesem Kapitel bestätigt.

Die durch letztere Kompaktifizierung erhaltene Wirkung wird im zweiten Abschnitt dieses Kapitels angegeben. Der Hypermultiplettsektor dieser Theorie erhält Weltflächenkorrekturen (Abschnitt 1.4). Diese modifizieren die Bewegungsgleichungen der Stringtheorie. Insbesondere sind Ricci-flache Mannigfaltigkeiten nur dann Lösungen, wenn die Weltflächenkorrekturen vernachlässigt werden können. Dies ist im Limes großen Volumens von \widetilde{CY}_3 der Fall. Nur in diesem Limes kann die Wirkung des Hypermultiplettsektors durch die Kompaktifizierung bestimmt werden. Um die Wirkungen der IIA und der IIB Theorie vergleichen zu können, muß auf der IIA Seite der entsprechende Limes durchgeführt werden. Dies ist der Limes „großer komplexer Strukturen“. Die Wirkung der IIA Theorie in diesem Limes wird angegeben. Es ist mir gelungen, die Abbildung zwischen den beiden Wirkungen und damit eine explizite Realisierung der Mirrorsymmetrie zu finden. Diese Abbildung wird in Abschnitt 3.5 hergeleitet.

In der IIA Theorie sind die Korrekturen außerhalb dieses Limes bekannt. Mit Hilfe der gefundenen Abbildung können daher die Weltflächenkorrekturen zur IIB Theorie untersucht werden. Ein Ergebnis dieser Untersuchung ist, daß die $SL(2, \mathbb{Z})$ Symmetrie der zehndimensionalen Wirkung (1.32), die im Limes großen Volumens auch eine Symmetrie der vierdimensionalen Wirkung ist, durch Weltflächenkorrekturen gebrochen wird [28]. Dies ist der Gegenstand von Abschnitt 3.6.

3.2 Die IIA Theorie

In der Einleitung (Abschnitt 1.5) wurde neben der Mirrorsymmetrie eine weitere Beziehung zwischen der IIA und der IIB Stringtheorie angeführt: die T-Dualität. Der IIA String, kompaktifiziert auf einem Kreis S_R mit Radius R , ist äquivalent zum IIB String, kompaktifiziert auf einem Kreis $S_{1/R}$ mit Radius $1/R$. Damit ist der IIA String auf $S_R \times CY_3$ äquivalent zum IIB String auf $S_{1/R} \times CY_3$. Nun kann die Reihenfolge der Kompaktifizierungen umgekehrt werden¹ und durch Mirrorsymmetrie sind schließlich die beiden Kompaktifizierungen des IIA Strings auf $S_R \times CY_3$ und $S_{1/R} \times \widetilde{CY}_3$ äquivalent.

Kompaktifiziert man die IIA Theorie zuerst auf CY_3 erhält man eine Wirkung mit $h^{(1,2)} + 1$ Hypermultipletts. Diese wird durch die folgende Kompaktifizierung auf S_R nicht verändert. Kompaktifiziert man hingegen zuerst auf \widetilde{CY}_3 so erhält man eine Wirkung mit $\tilde{h}^{(1,1)} = h^{(1,2)}$ Vektormultipletts. Nach der folgenden Kompaktifizierung auf $S_{1/R}$ erhält man aus ihnen ebenfalls $h^{(1,2)} + 1$ Hypermultipletts². Nach dem oben gesagten entsprechen sich die entstehenden Wirkungen. Diese Ableitung der Wirkung der Hypermultipletts aus der der Vektormultipletts nennt man die *c-map*. Das obige Argument ist heuristisch, streng abgeleitet wurde diese Abbildung für den klassischen Limes [23]. Bei der expliziten Durchführung der Abbildung folge ich [44].

Die Lagrangedichte der $\tilde{h}^{(1,1)}$ Vektormultipletts ($\hat{A}_\mu^a, Z^a, \bar{Z}^a$) in vier Dimensionen lautet [44]

$$(\sqrt{-g})^{-1} \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \mathcal{R} - G_{ab} \partial_\mu Z^a \partial^\mu \bar{Z}^b + \frac{1}{4} R_{ij} F_{\mu\nu}^i F^{j\mu\nu} + \frac{1}{4} I_{ij} F_{\mu\nu}^i \tilde{F}^{j\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Die Indizes vom Beginn des Alphabets (a, b, c, \dots) laufen von 1 bis $\tilde{h}^{(1,1)} = h^{(1,2)}$ und kennzeichnen die Vektormultipletts. Die Indizes aus der Mitte des Alphabets (i, j, k, \dots) laufen von 0 bis $h^{(1,2)}$; der Index Null entspricht dem Graviphoton. $\tilde{F}^{i\mu\nu}$ ist der zu $F^{i\mu\nu}$ duale Feldstärketensor

$$\tilde{F}^{i\mu\nu} := \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}^i. \quad (3.2)$$

Die Wirkung (3.1) ist bestimmt durch eine Funktion F von $h^{(1,2)} + 1$ (komplexen) Variablen x^i . Diese Funktion ist holomorph ($F(x, \bar{x}) = F(x)$) und homogen vom Grad zwei ($F(\lambda x) = \lambda^2 F(x)$). Für die Ableitungen von F führt man folgende Abkürzungen ein

$$F_i := \frac{\partial F}{\partial x^i}, \quad F_{ij} := \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}. \quad (3.3)$$

Die Z^a sind die zu den x^i gehörenden inhomogenen Koordinaten

$$Z^i := \frac{x^i}{x^0} \quad (Z^0 = 1). \quad (3.4)$$

¹Da die Mannigfaltigkeiten $S \times CY_3$ und $CY_3 \times S$ isomorph sind.

²In drei Dimensionen ist ein Vektor dual zu einem Skalar. Das zusätzliche Hypermultiplett entsteht durch die Kompaktifizierung des Gravitationsmultipletts.

Der Zielraum des σ -Modells der Skalare der Vektormultipletts wird durch die spezielle Kählergeometrie [19, 49–53] beschrieben. Dies bedeutet, daß die Metrik G_{ab} Kähler ist (A.24)

$$G_{ab} = \frac{\partial^2 K}{\partial Z^a \partial \bar{Z}^b}, \quad (3.5)$$

wobei das Kählerpotential selbst durch die Ableitungen der Funktion F bestimmt ist:

$$K = -\ln(x^i \bar{F}_i(\bar{x}) + \bar{x}^i F_i(x)). \quad (3.6)$$

Hierbei sind die x^i gemäß (3.4) als Funktionen der Z^a aufzufassen. Man nennt F das *Präpotential* der speziellen Kählermetrik G_{ab} ³. Auch die Kopplungen der Vektorfelder sind durch das Präpotential F bestimmt.

$$\begin{aligned} R_{ij} = \operatorname{Re} \mathcal{N}_{ij} &= \frac{1}{2} (\mathcal{N}_{ij} + \bar{\mathcal{N}}_{ij}), & I_{ij} = \operatorname{Im} \mathcal{N}_{ij} &= \frac{1}{2i} (\mathcal{N}_{ij} - \bar{\mathcal{N}}_{ij}), \\ \mathcal{N}_{ij} &= \frac{1}{4} \bar{F}_{ij} - \frac{(NZ)_i (ZN)_j}{(ZNZ)}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

wobei

$$N_{ij} = \frac{1}{4} (F_{ij} + \bar{F}_{ij}), \quad (NZ)_i = N_{ij} Z^j, \quad (ZNZ) = Z^i N_{ij} Z^j. \quad (3.8)$$

Um zu garantieren, daß die kinetischen Terme in (3.1) nach unten beschränkt sind, muß G positiv und R negativ definit sein.

Die Kopplungsfunktionen in (3.1) lauten als Funktion der Z^a

$$\begin{aligned} K &= -\ln(-2ZN\bar{Z}), \\ G_{ab} &= -\frac{1}{(ZN\bar{Z})} \left(N_{ab} - \frac{(N\bar{Z})_a (ZN)_b}{(ZN\bar{Z})} \right), \\ R_{ij} &= \frac{1}{2} \left(N_{ij} - \frac{(NZ)_i (ZN)_j}{(ZNZ)} - \frac{(N\bar{Z})_i (\bar{Z}N)_j}{(\bar{Z}N\bar{Z})} \right), \\ R^{-1ij} &= 2 \left(N^{-1ij} - \frac{Z^i \bar{Z}^j + \bar{Z}^i Z^j}{(ZN\bar{Z})} \right), \\ I_{ij} &= -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{4} (\bar{F}_{ij} - F_{ij}) - \frac{(NZ)_i (ZN)_j}{(ZNZ)} + \frac{(N\bar{Z})_i (\bar{Z}N)_j}{(\bar{Z}N\bar{Z})} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Statt $F(x)$ kann man eine Funktion der inhomogenen Koordinaten einführen

$$f(Z) = (x^0)^{-2} F(x). \quad (3.10)$$

³Die bekanntere, manifest symplektisch invariante Form der Gleichung (3.6) erhält man durch die Ersetzung $F \rightarrow iF$.

Mit Hilfe der Mirrorsymmetrie (der Vektormultiplettsektor der IIB Theorie erhält weder Quanten- noch Weltflächenkorrekturen) konnte sie für jede Calabi-Yau-Kompaktifizierung bestimmt werden⁴. Sie lautet [54, 55]:

$$f(Z) = \frac{i}{3!} \kappa_{abc} Z^a Z^b Z^c + c\chi\zeta(3) + \sum_{d_a} n_{d_a} \text{Li}_3(e^{-2\pi d_a Z^a}). \quad (3.11)$$

Dabei ist c eine Normierungskonstante, $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad (3.12)$$

$\text{Li}_3(x)$ die dritte polylogarithmische Funktion

$$\text{Li}_3(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}, \quad (3.13)$$

die κ_{abc} , χ und n_{d_a} sind topologische Daten der Calabi-Yau Mannigfaltigkeit; sie werden in Abschnitt A.5 erläutert. Die Summe der Polylogarithmen sind Korrekturen durch *Weltflächeninstantonen*.

Um die Wirkung der Hypermultipletts zu erhalten, muß (3.1) auf einem Kreis kompaktifiziert werden. Aus dem vierdimensionalen Graviton $g_{\mu\nu}$ erhält man das dreidimensionale $g_{\mu\nu}^3$, einen Vektor B_μ und einen Skalar ϕ , aus den Vektoren \hat{A}_μ^i jeweils einen Vektor A_μ^i und einen Skalar ξ^i . Die Vektoren sind in drei Dimensionen dual zu Skalaren. Die Skalare, die zu den A_μ^i dual sind, werden mit $\tilde{\xi}_i$ bezeichnet, der zu B_μ duale Skalar mit $\tilde{\phi}$.

Nach Kompaktifizierung und Dualisierung erhält man folgende Wirkung [44]:

$$\begin{aligned} (\sqrt{-g})^{-1} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \mathcal{R} - G_{a\bar{b}}(Z, \bar{Z}) \partial^\mu Z^a \partial_\mu \bar{Z}^b - (\partial_\mu \phi)^2 \\ & - \frac{1}{4} e^{4\phi} (\partial_\mu \tilde{\phi} + \xi^i \partial_\mu \tilde{\xi}_i - \tilde{\xi}_i \partial_\mu \xi^i)^2 + \frac{1}{2} e^{2\phi} \partial_\mu \xi^i R_{ij} \partial^\mu \xi^j \\ & + \frac{1}{2} e^{2\phi} (I_{ik} \partial^\mu \xi^k + \partial^\mu \tilde{\xi}_i) R^{-1ij} (I_{jl} \partial_\mu \xi^l + \partial_\mu \tilde{\xi}_j). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Diese Wirkung soll mit dem Hypermultiplettsektor einer auf CY_3 kompaktifizierten IIA Theorie verglichen werden. Die Zielraummannigfaltigkeit des durch den Hypermultiplettsektor beschriebenen σ -Modells ändert sich bei der Kompaktifizierung von vier nach drei Dimensionen nicht. Das bedeutet, daß die Wirkung der Hypermultipletts in vier Dimensionen mit (3.14) identisch ist (wenn man die Vektorindizes wieder von 1 bis 4 laufen läßt, die 3 an der Determinante der Metrik wurde schon weggelassen). Allerdings ist die Interpretation der Felder eine andere. In (3.1) entsprachen die $\tilde{h}^{(1,1)}$ Felder Z^a den Moduli der Kählerform von \widetilde{CY}_3 . In (3.14) entsprechen sie den $h^{(2,1)}$ Moduli der komplexen Struktur von CY_3 .

⁴Genauer: Ihre allgemeine Form konnte bestimmt werden. Die eingehenden topologischen Daten sind nicht für jede Calabi-Yau bekannt.

Die in (3.14) auftretenden Skalare $(\xi^i, \tilde{\xi}_i, \tilde{\phi})$ sind entweder durch dimensionale Reduktion oder Dualisierung aus Vektorfeldern hervorgegangen. Deren Eichsymmetrien sind dabei zu Peccei-Quinn-Symmetrien der Skalare geworden. Mit den reellen Parametern $(\alpha, \beta_i, \gamma^i)$ lauten sie:

$$\xi^i \mapsto \xi^i + \gamma^i, \quad \tilde{\xi}_i \mapsto \tilde{\xi}_i + \beta_i, \quad \tilde{\phi} \mapsto \alpha + \beta_i \xi^i + \gamma^i \tilde{\xi}_i. \quad (3.15)$$

3.3 Der Limes großer komplexer Strukturen

Da die IIB Theorie nur im Limes großen Volumens durch die Kompaktifizierung auf der Mirror-Calabi-Yau \widetilde{CY}_3 erhalten werden kann, muß vor dem Vergleich der beiden Theorien der entsprechende Limes auf der IIA Seite durchgeführt werden.

Dieser besteht darin, die Werte der Moduli der komplexen Struktur Z^a groß werden zu lassen. In diesem Limes wird das Präpotential (3.11) durch den kubischen Term dominiert. Es lautet also

$$f(Z) = \frac{i}{3!} \kappa_{abc} Z^a Z^b Z^c, \quad \left(F(x) = \frac{i}{3!} \frac{\kappa_{abc} x^a x^b x^c}{x^0} \right). \quad (3.16)$$

Man beachte, daß nach der Herleitung im vorigen Abschnitt die κ_{abc} die Tripelschnittzahlen von \widetilde{CY}_3 sind!

Um die Größen G_{ab} , R_{ij} und I_{ij} in diesem Limes anzugeben, verwendet man die Abkürzungen

$$(\kappa Z Z Z) = \kappa_{abc} Z^a Z^b Z^c, \quad (\kappa Z Z)_a = \kappa_{abc} Z^b Z^c, \quad (\kappa Z)_{ab} = \kappa_{abc} Z^c. \quad (3.17)$$

Die Real- bzw. Imaginärteile der Z^a erhalten ihre naheliegende Bezeichnung

$$X^a := \operatorname{Re}(Z^a) = \frac{1}{2} (Z^a + \bar{Z}^a), \quad Y^a := \operatorname{Im}(Z^a) = \frac{1}{2i} (Z^a - \bar{Z}^a). \quad (3.18)$$

Man findet

$$F_{ij} = i \begin{pmatrix} \frac{1}{3} (\kappa Z Z Z) & -\frac{1}{2} (\kappa Z Z)_b \\ -\frac{1}{2} (\kappa Z Z)_a & (\kappa Z)_{ab} \end{pmatrix},$$

$$N_{ij} = \frac{i}{12} \begin{pmatrix} (\kappa Z Z Z) - (\kappa \bar{Z} \bar{Z} \bar{Z}) & -\frac{3}{2} ((\kappa Z Z)_b - (\kappa \bar{Z} \bar{Z})_b) \\ -\frac{3}{2} ((\kappa Z Z)_a - (\kappa \bar{Z} \bar{Z})_a) & 3\kappa_{abc} (Z^c - \bar{Z}^c) \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

woraus man wiederum erhält

$$(NZ)_0 = -\frac{i}{24} \kappa_{abc} (Z^a Z^b Z^c - 3Z^a \bar{Z}^b \bar{Z}^c + 2\bar{Z}^a \bar{Z}^b \bar{Z}^c) = \frac{1}{6} (\kappa Y Y Y) + \frac{i}{2} (\kappa X Y Y),$$

$$(NZ)_a = \frac{i}{8} \kappa_{abc} (Z^b - \bar{Z}^b) (Z^c - \bar{Z}^c) = -\frac{i}{2} (\kappa Y Y)_a,$$

$$(N\bar{Z})_0 = \frac{i}{24} \kappa_{abc} (2Z^a Z^b Z^c - 3Z^a Z^b \bar{Z}^c + \bar{Z}^a \bar{Z}^b \bar{Z}^c) = \frac{1}{6} (\kappa Y Y Y) - \frac{i}{2} (\kappa X Y Y),$$

$$(N\bar{Z})_a = -\frac{i}{8} \kappa_{abc} (Z^b - \bar{Z}^b) (Z^c - \bar{Z}^c) = \frac{i}{2} (\kappa Y Y)_a,$$

$$\begin{aligned}
(ZNZ) &= \frac{i}{12}\kappa_{abc}(Z^a - \bar{Z}^a)(Z^b - \bar{Z}^b)(Z^c - \bar{Z}^c) = \frac{2}{3}(\kappa YYY), \\
(\bar{Z}N\bar{Z}) &= \frac{i}{12}\kappa_{abc}(Z^a - \bar{Z}^a)(Z^b - \bar{Z}^b)(Z^c - \bar{Z}^c) = \frac{2}{3}(\kappa YYY), \\
(ZN\bar{Z}) &= -\frac{i}{24}\kappa_{abc}(Z^a - \bar{Z}^a)(Z^b - \bar{Z}^b)(Z^c - \bar{Z}^c) = -\frac{1}{3}(\kappa YYY). \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Damit lautet das Kählerpotential

$$K = -\ln\left(\frac{i}{12}\kappa_{abc}(Z^a - \bar{Z}^a)(Z^b - \bar{Z}^b)(Z^c - \bar{Z}^c)\right) = -\ln\left(\frac{2}{3}(\kappa YYY)\right) \tag{3.21}$$

und die Metrik

$$G_{ab} = -\frac{3}{2}\left(\frac{(\kappa Y)_{ab}}{(\kappa YYY)} - \frac{3}{2}\frac{(\kappa YY)_a(\kappa YY)_b}{(\kappa YYY)^2}\right). \tag{3.22}$$

R und I sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(\kappa XXX) & \frac{1}{2}(\kappa XX)_b \\ \frac{1}{2}(\kappa XX)_a & -(\kappa X)_{ab} \end{pmatrix}, \\
R &= -\frac{1}{24}(\kappa YYY)\begin{pmatrix} 1 - 4G_{ab}X^aX^b & 4G_{ab}X^a \\ 4G_{ab}X^b & -4G_{ab} \end{pmatrix}, \\
R^{-1} &= -24(\kappa YYY)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & X^b \\ X^a & -\frac{1}{4}G^{-1ab} + X^aX^b \end{pmatrix}. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von (3.23) in (3.14) erhält man die Lagrangedichte in diesem Limes:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{-g})^{-1}\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\mathcal{R} - G_{ab}\partial_\mu Y^a\partial^\mu Y^b - G_{ab}\partial_\mu X^a\partial^\mu X^b - (\partial_\mu\phi)^2 \\
&\quad - \frac{1}{8}e^{2\phi}V(\partial_\mu\xi^0)^2 - \frac{1}{2}e^{2\phi}VG_{ab}(X^a\partial_\mu\xi^0 - \partial_\mu\xi^a)(X^b\partial^\mu\xi^0 - \partial^\mu\xi^b) \\
&\quad - \frac{1}{2}e^{2\phi}V^{-1}G^{-1ab}\left(\partial_\mu\tilde{\xi}_a + \frac{1}{8}(\kappa XX)_a\partial_\mu\xi^0 - \frac{1}{4}(\kappa X)_{ac}\partial_\mu\xi^c\right) \times \\
&\quad \quad \quad \left(\partial^\mu\tilde{\xi}_b + \frac{1}{8}(\kappa XX)_b\partial^\mu\xi^0 - \frac{1}{4}(\kappa X)_{bd}\partial^\mu\xi^d\right) \\
&\quad - 2e^{2\phi}V^{-1}\left(\partial_\mu\tilde{\xi}_0 + X^a\partial_\mu\tilde{\xi}_a + \frac{1}{24}(\kappa XXX)\partial_\mu\xi^0 - \frac{1}{8}(\kappa XX)_a\partial_\mu\xi^a\right)^2 \\
&\quad - \frac{1}{4}e^{4\phi}(\partial_\mu\tilde{\phi} + \xi^i\partial_\mu\tilde{\xi}_i - \tilde{\xi}_i\partial_\mu\xi^i)^2. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Es wurde hierbei die Abkürzung $V = \frac{1}{6}(\kappa YYY)$ eingeführt⁵.

In diesem Limes gibt es $h^{(1,2)}$ zusätzliche Peccei-Quinn-Symmetrien [56]. Im Gegensatz zu den in (3.15) aufgeführten sind hier nur die infinitesimalen Transformationen bekannt. Mit den reellen Parametern η^a lauten sie

$$\begin{aligned}
\delta X^a &= \eta^a, & \delta Y^a &= 0, & \delta\xi^0 &= 0, \\
\delta\xi^a &= \eta^a\xi^0, & \delta\tilde{\xi}_a &= \frac{1}{4}\kappa_{abc}\eta^b\xi^c, & \delta\tilde{\xi}_0 &= -\eta^a\tilde{\xi}_a. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

⁵Diese Größe wird nach der Abbildung auf die IIB-Theorie mit dem Volumen der Mirror-Calabi-Yau identifiziert werden.

3.4 Die IIB Theorie

Das Spektrum der IIB Theorie wurde in Abschnitt 1.4 angegeben. Hier ist zu beachten, daß auf der Mirror-Calabi-Yau \widetilde{CY}_3 von CY_3 kompaktifiziert wird, in der Wirkung also $\tilde{h}^{(1,1)} = h^{(2,1)}$ Tensormultipletts $(C_{\mu\nu}^a, b^{1a}, b^{2a}, v^a)$ auftreten. Führt man die Kompaktifizierung durch [28], so erhält man unter Vernachlässigung des Vektormultiplettsektors⁶.

$$\begin{aligned}
(\sqrt{-g})^{-1} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \mathcal{R} - \frac{1}{4} e^{2\phi_B} V (\partial_\mu l)^2 - (\partial_\mu \phi_B)^2 - \frac{1}{6} e^{-3\phi_B} V^{\frac{1}{2}} H_{\mu\nu\rho}^I M_{IJ} H^{J\mu\nu\rho} \\
& - G_{ab} \partial_\mu v^a \partial^\mu v^b - e^{\phi_B} V^{\frac{1}{2}} G_{ab}(v) \partial_\mu b^{Ia} M_{IJ} \partial^\mu b^{Jb} \\
& - \frac{2}{3} e^{-2\phi_B} V G_{ab} (F_{\mu\nu\rho}^a + \varepsilon_{IJK} H_{\mu\nu\rho}^J b^{Ia}) (F^{b\mu\nu\rho} + \varepsilon_{IJK} H^{J\mu\nu\rho} b^{Ib}) \\
& - \frac{i}{12\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \kappa_{abc} \varepsilon_{IJK} (F_{\mu\nu\rho}^a b^{Ib} \partial_\sigma b^{Jc} - \frac{2}{3} \varepsilon_{KLM} H_{\mu\nu\rho}^I b^{Ja} b^{Kb} \partial_\sigma b^{Lc}).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Hierbei wurde gesetzt

$$\begin{aligned}
M_{IJ} := & \frac{1}{\text{Im}\lambda} \begin{pmatrix} |\lambda|^2 & -\text{Re}\lambda \\ -\text{Re}\lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda := l + iV^{-\frac{1}{2}} e^{-\phi_B}, \\
V = & \frac{1}{6} \kappa_{abc} v^a v^b v^c.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Die κ_{abc} sind die Tripelschnittzahlen der Calabi-Yau \widetilde{CY}_3 (A.32). Die Metrik G_{ab} ist gegeben durch

$$G_{ab} = -V^{-1} \kappa_{abc} v^c + \frac{1}{4} V^{-2} \kappa_{abc} v^c v^d \kappa_{bef} v^e v^f. \tag{3.28}$$

Die $F_{\mu\nu\rho}^a$ und $H_{\mu\nu\rho}^I$ sind Feldstärken der Zweiformfelder:

$$F_{\mu\nu\rho}^a = \partial_{[\mu} C_{\nu\rho]}^a, \quad H_{\mu\nu\rho}^I = \partial_{[\mu} B_{\nu\rho]}^I. \tag{3.29}$$

Die Symmetrien der Wirkung (3.26) sind gegeben durch die Eichtransformationen der Tensorfelder (mit Parametern $\Sigma_\nu^a, \Omega_\nu^I$)

$$\delta C_{\mu\nu}^a = \partial_{[\mu} \Sigma_{\nu]}^a, \quad \delta B_{\mu\nu}^I = \partial_{[\mu} \Omega_{\nu]}^I, \tag{3.30}$$

und Peccei-Quinn-Transformationen (mit Parametern c^{Ia})

$$\delta b^{Ia} = c^{Ia}, \quad \delta C_{\mu\nu}^a = -\varepsilon_{IJK} c^{Ia} B_{\mu\nu}^J, \tag{3.31}$$

Den $SL(2, \mathbb{Z})$ -Transformationen der zehndimensionalen Theorie (1.32) induzieren folgende Transformationen der vierdimensionalen [28]:

⁶In [28] ist der genaue Zusammenhang zwischen den in (3.26) auftretenden und den in der Tabelle auf Seite 14 angegebenen Feldern zu finden.

Für die $B_{\mu\nu}^I$ und Skalare b^{Ia} gilt

$$\begin{pmatrix} B_{\mu\nu}^1 \\ B_{\mu\nu}^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{\mu\nu}^1 \\ B_{\mu\nu}^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b^{1a} \\ b^{2a} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^{1a} \\ b^{2a} \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

Die $C_{\mu\nu}^a$ sind invariant, die Transformationen der anderen Felder lauten

$$v^a \mapsto v^a |c\lambda + d|, \quad e^{-2\phi_B} \mapsto \frac{e^{-2\phi_B}}{|c\lambda + d|}, \quad l \mapsto \frac{(al + b)(cl + d) + acV^{-1}e^{-2\phi_B}}{|c\lambda + d|^2}. \quad (3.33)$$

Die Transformationen (3.32) und (3.33) sind Symmetrien der Lagrangedichte (3.26). Die $SL(2, \mathbb{Z})$ wird also durch die Kompaktifizierung im Limes großen Volumens nicht gebrochen.

Um den Vergleich mit der Wirkung (3.24) durchführen zu können, müssen die in (3.26) auftretenden Tensoren zu Skalaren dualisiert werden. Dies geschieht wie in Abschnitt 2.2 durch Addition von $(\tilde{h}^{(1,1)} + 2)$ Lagrangemultiplikatoren (g_a, h_I) zu (3.26) und anschließender partieller Integration

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} H_{\mu\nu\rho}^I \partial_\sigma h_I + i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu\rho}^a \partial_\sigma g_a. \quad (3.34)$$

Die Felder $H_{\mu\nu\rho}^I, F_{\mu\nu\rho}^a$ werden nun mittels ihrer algebraischen Bewegungsgleichungen eliminiert. Man erhält [28]

$$\begin{aligned} (\sqrt{-g})^{-1} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \mathcal{R} - \frac{1}{4} e^{2\phi_B} V (\partial_\mu l)^2 - (\partial_\mu \phi_B)^2 - G_{ab} \partial_\mu b^{1a} \partial^\mu b^{1b} \\ & - G_{ab} \partial_\mu v^a \partial^\mu v^b - e^{2\phi_B} V G_{ab} (\partial_\mu b^{2a} - l \partial_\mu b^{1a}) (\partial^\mu b^{2b} - l \partial^\mu b^{1b}) \\ & - \frac{e^{2\phi_B}}{16V} G^{-1ab} \left(\partial_\mu g_a - \frac{1}{2} \kappa_{acd} \varepsilon_{IJ} b^{Ic} \partial_\mu b^{Jd} \right) \left(\partial^\mu g_b - \frac{1}{2} \kappa_{bef} \varepsilon_{KL} b^{Ke} \partial^\mu b^{Lf} \right) \\ & - \frac{1}{4} e^{2\phi_B} V^{-1} \left(\partial_\mu h_2 - b^{1a} (\partial_\mu g_a - \frac{1}{6} \kappa_{abc} \varepsilon_{IJ} b^{Ib} \partial_\mu b^{Jc}) \right)^2 \\ & - \frac{1}{4} e^{4\phi_B} \left(\partial_\mu h_1 + l \partial_\mu h_2 - (lb^{1a} - b^{2a}) (\partial_\mu g_a - \frac{1}{6} \kappa_{abc} \varepsilon_{IJ} b^{Ib} \partial_\mu b^{Jc}) \right)^2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Aus den Eichsymmetrien (3.30) sind Peccei-Quinn-Symmetrien (mit Parametern σ_a und ω_I) der dualen Skalare geworden:

$$\delta g_a = \sigma_a, \quad \delta h_I = \omega_I. \quad (3.36)$$

Die Peccei-Quinn-Symmetrien (3.31) sind durch die Dualisierung unhandlicher geworden:

$$\delta b^{Ia} = c^{Ia}, \quad \delta g_a = \frac{1}{2} \kappa_{abc} \varepsilon_{IJ} c^{Ib} b^{Jc}, \quad \delta h_I = -\varepsilon_{IJ} (c^{Ja} g_a + \frac{1}{6} \kappa_{abc} \varepsilon_{KL} b^{Ja} c^{Kb} b^{Lc}). \quad (3.37)$$

Unter den $SL(2, \mathbb{Z})$ -Transformationen sind die g_a wie die $C_{\mu\nu}^a$ invariant, während die h_I , um die Invarianz der Wirkung zu garantieren, kontragredient zu den $B_{\mu\nu}^I$ transformieren

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

3.5 Die Abbildung

Vergleicht man die Wirkungen (3.24) und (3.35), so findet man sofort die Identifikationen

$$\phi = \phi_B, \quad Y^a = v^a, \quad X^a = b^{1a}. \quad (3.39)$$

Die erste dieser Gleichungen sagt aus, daß Mirrorsymmetrie eine störungstheoretische Symmetrie der Stringtheorie ist.

Nach dieser Identifikation haben beide Wirkungen die gleiche funktionale Struktur in ϕ und Y^a . Insbesondere stimmen die Metriken (3.22) und (3.28) überein. Die Abbildung der anderen Variablen findet man durch den Vergleich der Terme, die in den beiden Wirkungen die gleiche Abhängigkeit von ϕ und Y^a haben.

Begonnen wird mit den Termen proportional zu $e^{2\phi}V$, woraus man folgende Bedingung abliest:

$$-\frac{1}{4}(\partial_\mu l)^2 \stackrel{!}{=} -\frac{1}{8}(\partial_\mu \xi^0)^2 \implies \partial_\mu(\sqrt{2}l \mp \xi^0) \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.40)$$

Sie wird gelöst durch

$$\xi^0 = \sqrt{2}l. \quad (3.41)$$

Hierzu ist anzumerken, daß die Integrationskonstante vernachlässigt werden konnte, da ξ^0 invariant unter einer Peccei-Quinn-Symmetrie (3.15) ist. Das obere Vorzeichen wurde willkürlich gewählt; wie sich zeigen wird, legt dies schon alle anderen Vorzeichenwahlen fest. Es folgen die Terme proportional zu $e^{2\phi}VG_{ab}$:

$$X^a \partial_\mu \xi^0 - \partial_\mu \xi^a \stackrel{!}{=} \pm \sqrt{2}(l \partial_\mu b^{1a} - \partial_\mu b^{2a}). \quad (3.42)$$

Setzt man die schon erhaltenen Resultate ein (3.39,3.41),

$$\partial_\mu \xi^a \stackrel{!}{=} \sqrt{2}b^{1a} \partial_\mu l \mp \sqrt{2}l \partial_\mu b^{1a} \pm \sqrt{2} \partial_\mu b^{2a}, \quad (3.43)$$

so sieht man, daß sich die Terme auf der linken Seite nur bei Wahl des unteren Vorzeichens zu einer vollständigen Ableitung zusammenfassen lassen. Man erhält schließlich

$$\xi^a = \sqrt{2}l b^{1a} - \sqrt{2}b^{2a}. \quad (3.44)$$

Nun die $e^{2\phi}V^{-1}G^{-1ab}$ Terme:

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \tilde{\xi}_a + \frac{1}{8}(\kappa X X)_a \partial_\mu \xi^0 - \frac{1}{4}(\kappa X)_{ab} \partial_\mu \xi^b \\ & \stackrel{!}{=} \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \partial_\mu g_a \mp \frac{\sqrt{2}}{8} \kappa_{abc} b^{1b} \partial_\mu b^{2c} \pm \frac{\sqrt{2}}{8} \kappa_{abc} b^{2b} \partial_\mu b^{1c} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Wieder setzt man den schon bekannten Teil der Abbildung in die obere Gleichung ein:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \tilde{\xi}_a &= \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \partial_\mu g_a + \frac{\sqrt{2}}{8} \partial_\mu (l \kappa_{abc} b^{1b} b^{1c}) \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}}{4} b^{1b} \partial_\mu b^{2c} \mp \frac{\sqrt{2}}{8} b^{1b} \partial_\mu b^{2c} \pm \frac{\sqrt{2}}{8} b^{2b} \partial_\mu b^{1c}.\end{aligned}\quad (3.46)$$

Es muß das untere Vorzeichen gewählt werden, man erhält

$$\tilde{\xi}_a = -\frac{\sqrt{2}}{4} g_a + \frac{\sqrt{2}}{8} l \kappa_{abc} b^{1b} b^{1c} - \frac{\sqrt{2}}{8} \kappa_{abc} b^{1b} b^{2c} \quad (3.47)$$

Nun die Terme proportional zu $e^{2\phi} V^{-1}$:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \tilde{\xi}_0 + X^a \partial_\mu \tilde{\xi}_a - \frac{1}{8} (\kappa X X)_a \partial_\mu \xi^a + \frac{1}{24} (\kappa X X X) \partial_\mu \xi^0 \\ \stackrel{!}{=} \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \partial_\mu a_2 \mp \frac{\sqrt{2}}{4} b^{1a} \partial_\mu g_a \pm \frac{\sqrt{2}}{24} \kappa_{abc} b^{1a} b^{1b} \partial_\mu b^{2c} \mp \frac{\sqrt{2}}{24} \kappa_{abc} b^{1a} b^{2b} \partial_\mu b^{1c}.\end{aligned}\quad (3.48)$$

Einsetzen der schon erhaltenen Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned}\partial_\mu \tilde{\xi}_0 \stackrel{!}{=} \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \partial_\mu h_2 - \frac{\sqrt{2}}{24} \partial_\mu (l \kappa_{abc} b^{1a} b^{1b} b^{1c}) \\ + \frac{\sqrt{2}}{8} \kappa_{abc} b^{1a} b^{2b} \partial_\mu b^{1c} \mp \frac{\sqrt{2}}{24} \kappa_{abc} b^{1a} b^{2b} \partial_\mu b^{1c} \pm \frac{\sqrt{2}}{24} \kappa_{abc} b^{1a} b^{1b} \partial_\mu b^{2c},\end{aligned}\quad (3.49)$$

so daß die Wahl des oberen Vorzeichens erzwungen ist. Man findet

$$\tilde{\xi}_0 = \frac{\sqrt{2}}{4} h_2 - \frac{\sqrt{2}}{24} l \kappa_{abc} b^{1a} b^{1b} b^{1c} + \frac{\sqrt{2}}{24} \kappa_{abc} b^{1a} b^{1b} b^{2c}.\quad (3.50)$$

Es bleiben die Terme proportional zu $\frac{1}{4} e^{4\phi}$. Auf der IIA-Seite lauten sie

$$\begin{aligned}\partial_\mu \tilde{\phi} + \xi^0 \partial_\mu \tilde{\xi}_0 - \tilde{\xi}_0 \partial_\mu \xi^0 + \xi^a \partial_\mu \tilde{\xi}_a - \tilde{\xi}_a \partial_\mu \xi^a \\ = \partial_\mu \tilde{\phi} + \frac{1}{2} (l \partial_\mu h_2 - h_2 \partial_\mu l) + \frac{1}{2} (b^{2a} \partial_\mu g_a - g_a \partial_\mu b^{2a}) \\ - \frac{1}{2} (l b^{1a} \partial_\mu g_a - g_a \partial_\mu (l b^{2a})) + \frac{1}{4} \kappa_{abc} b^{2a} b^{2b} \partial_\mu b^{1c} \\ - \frac{1}{3} l \kappa_{abc} b^{2a} b^{1b} \partial_\mu b^{1c} + \frac{1}{12} l \kappa_{abc} b^{1a} b^{1b} \partial_\mu b^{2c} - \frac{1}{12} \kappa_{abc} b^{1a} b^{1b} b^{2c} \partial_\mu l.\end{aligned}\quad (3.51)$$

Der Vergleich mit den IIB-Termen liefert

$$\begin{aligned}\partial_\mu \tilde{\phi} = \pm \partial_\mu h_1 - \frac{1}{2} (l \partial_\mu h_2 - h_2 \partial_\mu L) \pm l \partial_\mu h_2 - \frac{1}{2} (b^{2a} \partial_\mu g_a - g_a \partial_\mu b^{2a}) \pm b^{2a} \partial_\mu g_a \\ + \frac{1}{2} (l b^{1a} \partial_\mu g_a - g_a \partial_\mu (l b^{2a})) \mp l b^{1a} \partial_\mu g_a - \frac{1}{4} \kappa_{abc} b^{2a} b^{2b} \partial_\mu b^{1c} \\ \pm \frac{1}{6} \kappa_{abc} b^{2a} b^{2b} \partial_\mu b^{1c} \mp \frac{1}{6} \kappa_{abc} b^{1a} b^{2b} \partial_\mu b^{2c} + \frac{1}{3} l \kappa_{abc} b^{2a} b^{1b} \partial_\mu b^{1c} \mp \frac{1}{6} l \kappa_{abc} b^{2a} b^{1b} \partial_\mu b^{1c} \\ - \frac{1}{12} l \kappa_{abc} b^{1a} b^{1b} \partial_\mu b^{2c} \pm \frac{1}{6} l \kappa_{abc} b^{1a} b^{1b} \partial_\mu b^{2c} + \frac{1}{12} \kappa_{abc} b^{1a} b^{1b} b^{2c} \partial_\mu l,\end{aligned}\quad (3.52)$$

woraus man wiederum abliest, daß das obere Vorzeichen zu wählen ist. Man erhält schließlich:

$$\tilde{\phi} = h_1 + \frac{1}{2}lh_2 + \frac{1}{2}b^{2a}g_a - \frac{1}{2}lb^{1a}g_a - \frac{1}{12}\kappa_{abc}b^{1a}b^{2b}b^{2c} + \frac{1}{12}l\kappa_{abc}b^{1a}b^{1b}b^{2c}. \quad (3.53)$$

Die so erhaltenen Transformationen sind nichtlinear und man würde folglich nicht erwarten, sie invertieren zu können. Betrachtet man sie allerdings genauer, so stellt man fest, daß die nichtlinearen Terme gerade die sind, in denen Felder auftreten, die auf beiden Seiten der Abbildung miteinander identifiziert wurden (3.39). Die Felder, die sich unter der Abbildung nichttrivial verhalten, werden linear ineinander transformiert. Es ist dann ein Leichtes, die inverse Abbildung zu finden; sie lautet:

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{\sqrt{2}}\xi^0, \\ b^{2a} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X^a\xi^0 - \xi^a), \\ g_a &= -\frac{4}{\sqrt{2}}\tilde{\xi}_a + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\kappa X\xi)_a, \\ h_2 &= \frac{4}{\sqrt{2}}\tilde{\xi}_0 + \frac{1}{6\sqrt{2}}(\kappa X X\xi), \\ h_1 &= \tilde{\phi} - \xi^i\tilde{\xi}_i + \frac{1}{6}(\kappa X\xi\xi) - \frac{1}{12}\xi_0(\kappa X X\xi). \end{aligned} \quad (3.54)$$

3.6 Die Brechung der $SL(2, \mathbb{Z})$

Im vorangehenden Abschnitt wurde die Abbildung zwischen den Typ IIA und den Typ IIB Variablen im Limes großen Volumens/großer komplexer Struktur hergeleitet. Aufgrund der Mirrorsymmetrie weiß man, daß die klassischen Grenzfälle der beiden Theorien äquivalent sind. In der Typ IIA Theorie ist die klassische Wirkung exakt bestimmt worden (3.14), (3.11). Mittels der gefundenen Abbildung kann nun auch die IIB Theorie außerhalb des Limes großen Volumens untersuchen. Insbesondere ist es möglich, das Schicksal der $SL(2, \mathbb{Z})$ -Symmetrie (3.32,3.33,3.38) der IIB Theorie beim Verlassen des Limes zu studieren.

Die $SL(2, \mathbb{Z})$ wirkt auf λ (3.27,3.33) gemäß

$$\lambda \mapsto \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}. \quad (3.55)$$

Die beiden Erzeugenden dieser Transformation sind

$$\lambda \mapsto \lambda + 1, \quad \lambda \mapsto -\frac{1}{\lambda}. \quad (3.56)$$

Die erste Transformation entspricht nach (3.54) in den IIA Variablen gerade der Peccei-Quinn Symmetrie⁷ von ξ^0 (3.15). Dies ist somit eine Peccei-Quinn-

⁷Auch auf der IIB Seite ist diese Symmetrie kontinuierlich, da die klassische Wirkung invariant unter der $SL(2, \mathbb{R})$ ist. Die Brechung auf die $SL(2, \mathbb{Z})$ geschieht durch nichtperturbative Korrekturen.

Symmetrie aus dem RR Sektor⁸ und gilt zu allen Ordnungen der Stringstörungstheorie.

Es bleibt, die Wirkung des zweiten Generators auf die IIA Variablen finden. Dazu drückt man mit Hilfe der gefundenen Abbildung (3.41,3.44,3.47,3.50,3.53) die IIA Variablen durch die IIB Variablen aus, bestimmt mittels (3.33) und (3.38) deren Transformationsverhalten und übersetzt dies mit Hilfe der inversen Abbildung (3.54) wieder in die IIA Variablen. Man findet

$$\begin{aligned}
e^{-2\phi} &\mapsto \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}e^{-2\phi}}{\sqrt{((\xi^0)^2 + 2V^{-1}e^{-2\phi})}}, & (3.57) \\
Y^a &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{((\xi^0)^2 + 2V^{-1}e^{-2\phi})} Y^a, \\
X^a &\mapsto -\frac{1}{\sqrt{2}} (X^a \xi^0 - \xi^a), \\
\xi^0 &\mapsto -\frac{2\xi^0}{((\xi^0)^2 + 2V^{-1}e^{-2\phi})}, \\
\xi^a &\mapsto -\sqrt{2} X^a + \sqrt{2} \frac{\xi^0 (X^a \xi^0 - \xi^a)}{((\xi^0)^2 + 2V^{-1}e^{-2\phi})}, \\
\tilde{\xi}_a &\mapsto \tilde{\xi}_a - \frac{1}{4} (\kappa X \xi)_a + \frac{1}{8} \xi^0 (\kappa X X)_a - \frac{\xi^0 \kappa_{abc} (X^b \xi^0 - \xi^b) (X^c \xi^0 - \xi^c)}{8((\xi^0)^2 + 2V^{-1}e^{-2\phi})}, \\
\tilde{\xi}_0 &\mapsto -\frac{\sqrt{2}}{4} (\tilde{\phi} - \xi^i \tilde{\xi}_i) + \frac{\sqrt{2}}{48} ((\kappa X \xi \xi) - \xi^0 (\kappa X X \xi) + (\xi^0)^2 (\kappa X X X)) \\
&\quad - \frac{\sqrt{2} \xi^0 \kappa_{abc} (X^a \xi^0 - \xi^a) (X^b \xi^0 - \xi^b) (X^c \xi^0 - \xi^c)}{48 ((\xi^0)^2 + 2V^{-1}e^{-2\phi})}, \\
\tilde{\phi} &\mapsto \sqrt{2} \left(2\tilde{\xi}_0 - X^a \tilde{\xi}_a - \frac{1}{6} (\kappa X X \xi) + \frac{1}{24} \xi^0 (\kappa X X X) \right) \\
&\quad + \frac{\xi^0 \left(\tilde{\phi} - \xi^i \tilde{\xi}_i + 2(X^a \xi^0 - \xi^a) \tilde{\xi}_a + \frac{1}{3} (\kappa X \xi \xi) - \frac{1}{6} \xi^0 (\kappa X X \xi) - \frac{1}{12} (\xi^0)^2 (\kappa X X X) \right)}{\sqrt{2}((\xi^0)^2 + 2V^{-1}e^{-2\phi})},
\end{aligned}$$

Man sieht an der zweiten Gleichung, daß die Calabi-Yau Moduli Y^a in Terme transformieren, die das Dilaton enthalten. Betrachtet man die Weltflächeninstantonbeiträge zum Präpotential (3.11), so sieht man, daß dieses in eine Funktion transformiert, die beliebig hohe Potenzen von $e^{-2\phi}$ enthält. Diese können in der klassischen Wirkung nicht durch andere Terme kompensiert werden, so daß hiermit gezeigt ist, daß der zweite Generator der $SL(2, \mathbb{Z})$ durch Weltflächenkorrekturen gebrochen wird [28]. Es ist allerdings möglich, daß diese Symmetrie wiederhergestellt wird, sobald man auch Korrekturen der Raumzeit-Störungstheorie betrachtet.

⁸Daß die ξ^i und die $\tilde{\xi}_i$ dem RR Sektor angehören, wird in Abschnitt 4.2 gezeigt werden, wenn die Wirkung der IIA Theorie noch einmal durch die Calabi-Yau-Kompaktifizierung hergeleitet wird.

Kapitel 4

Quantenkorrekturen im allgemeinen Fall

4.1 Einleitung

In diesem Kapitel werden die perturbativen Quantenkorrekturen zum Hypermultiplettsektor der IIA Theorie, kompaktifiziert auf einer Calabi-Yau Mannigfaltigkeit mit beliebigem $h^{(2,1)}$, untersucht.

Für den universellen Sektor sind die Quantenkorrekturen bereits in Kapitel 2 bestimmt worden. In der in (3.14) benutzten Felddbasis ist dieser Sektor allerdings nicht leicht zu identifizieren. Im folgenden Abschnitt ist dargestellt, wie man diese Aufgabe löst.

Auch für die allgemeine Wirkung sind Teile der Quantenkorrekturen bekannt. Antoniadis, Ferrara, Minasian und Narain [57] konnten die 1-Schleifen-Korrektur zu den kinetischen Termen der Calabi-Yau Moduli (in einem bestimmten Limes) bestimmen. Diese bekannte (und eine naheliegende) Korrektur werden in Abschnitt 4.3 eingeführt.

In Abschnitt 4.4 wird die allgemeinste Form der Metrik angegeben, die invariant unter den Symmetrien der Stringstörungstheorie, aber noch nicht supersymmetrisch ist. Um eine möglichst eingeschränkte Wirkung zu erhalten, erfolgt diese Untersuchung im Limes großer komplexer Struktur (in diesem Limes ist die Wirkung invariant unter $h^{(2,1)}$ zusätzlichen Peccei-Quinn-Symmetrien (3.25)).

Leider ist es nicht gelungen, die zusätzlichen Einschränkungen, die sich durch die Forderung nach quaternionischer Geometrie des σ -Modells ergeben, zu bestimmen. Warum dies nicht möglich war, wird in den letzten beiden Abschnitten dieses Kapitels erläutert.

4.2 Der Limes zum universellen Hypermultiplett

In Abschnitt 3.2 ist bereits die Wirkung des Hypermultiplettsektors der IIA Stringtheorie, die auf einer Calabi-Yau Mannigfaltigkeit mit beliebigem $h^{(2,1)}$ kompaktifiziert wurde, angegeben worden (3.14).

Eine der Bedingungen, die an die möglichen Quantenkorrekturen zu dieser Wirkung gestellt werden, ist, daß sie die quantenkorigierte Wirkung des universellen Hypermultipletts als Grenzfall enthalten. Allerdings ist nicht klar, wie man diesen Limes in der Feldbasis von (3.14) durchführt.

Die Wirkung des universellen Hypermultipletts wurde in Abschnitt 2.2 bestimmt, indem die in Abschnitt 1.4 beschriebene Calabi-Yau Kompaktifizierung auf einer Calabi-Yau mit $h^{(2,1)} = 0$ durchgeführt wurde. Kompaktifiziert man nun auf einer Calabi-Yau mit beliebigem $h^{(2,1)}$, so erhält man den gesuchten Limes, indem man die zusätzlich erhaltenen Felder konstant setzt.

Um dies zu tun, setzt man die Entwicklungen (1.30) in die zehndimensionale Wirkung (1.10) ein und führt die Integration über die Calabi-Yau Mannigfaltigkeit aus¹. Man erhält für die Wirkung des Hypermultiplettsektors in vier Dimensionen [27]

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & - \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ e^{-2\phi} \left(\frac{1}{2} \mathcal{R} - 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + G_{\bar{a}\bar{b}} \partial^\mu Z^{\bar{a}} \partial_\mu \bar{Z}^{\bar{b}} + \frac{1}{6} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right) \right. \\ & \left. - R^{-1ij} \left(\partial_\mu C_i - \frac{1}{2} (\partial_\mu \mathcal{N})_{ik} R^{-1kl} (C_l + \bar{C}_l) \right) \left(\partial^\mu \bar{C}_j - \frac{1}{2} (\partial^\mu \bar{\mathcal{N}})_{im} R^{-1mn} (C_n + \bar{C}_n) \right) \right\} \\ & + \frac{1}{12} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} H_{\mu\nu\rho} \left\{ (C_i + \bar{C}_i) R^{-1ij} \left(\partial_\lambda C_j - \frac{1}{4} \partial_\lambda \mathcal{N}_{jk} R^{-1kl} (C_l + \bar{C}_l) \right) \right. \\ & \left. - (C_i + \bar{C}_i) R^{-1ij} \left(\partial_\lambda \bar{C}_j - \frac{1}{4} \partial_\lambda \bar{\mathcal{N}}_{jk} R^{-1kl} (C_l + \bar{C}_l) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die Größen G_{ab}, R_{ij}, I_{ij} entsprechen den in (3.9) angegebenen. Wie sie mit Integralen über die Calabi-Yau Mannigfaltigkeit identifiziert werden, ist in [27] dargestellt.

Wie in (3.14) laufen die Indizes (i, j, k, \dots) von Null bis $h^{(2,1)}$, die Indizes (a, b, c, \dots) von Eins bis $h^{(2,1)}$.

Weyl-Reskalierung und Dualisierung ins Hypermultiplettbild werden wie in Abschnitt 2.2 durchgeführt. Lediglich der topologisch an das Dreiformfeld gekoppelte Strom hat sich geändert. Statt (2.5) hat man nun

$$a_\lambda := (C_i + \bar{C}_i) R^{-1ij} \left(\partial_\lambda C_j - \frac{1}{4} \partial_\lambda \mathcal{N}_{jk} R^{-1kl} (C_l + \bar{C}_l) \right). \quad (4.2)$$

Aus (2.15) wird

$$\begin{aligned} (a_\lambda + \bar{a}_\lambda) &= (C_i + \bar{C}_i) R^{-1ij} \partial_\lambda (C_j + \bar{C}_j) \\ &\quad - \frac{1}{4} (C_i + \bar{C}_i) R^{-1ij} \partial_\lambda (\mathcal{N}_{jk} + \bar{\mathcal{N}}_{jk}) R^{-1kl} (C_l + \bar{C}_l) \\ &= (C_i + \bar{C}_i) R^{-1ij} \partial_\lambda (C_j + \bar{C}_j) - \frac{1}{2} (C_i + \bar{C}_i) R^{-1ij} \partial_\lambda R_{jk} R^{-1kl} (C_l + \bar{C}_l) \\ &= (C_i + \bar{C}_i) R^{-1ij} \partial_\lambda (C_j + \bar{C}_j) + \frac{1}{2} (C_i + \bar{C}_i) \partial_\lambda R^{-1ij} (C_j + \bar{C}_j) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\lambda \left((C_i + \bar{C}_i) R^{-1ij} (C_j + \bar{C}_j) \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

¹Wie in Abschnitt 2.2 bemerkt, muß im RR Sektor eine andere Basis der Entwicklung gewählt werden, als in (1.30) angegeben. Die Felder C_i, \bar{C}_i sind Linearkombinationen der Felder c_i, \bar{c}_i .

Damit ändert sich die Definition des Feldes S (2.17) zu

$$S = e^{-2\phi} + iD - \frac{1}{4}(C_i + \bar{C}_i)R^{-1ij}(C_j + \bar{C}_j). \quad (4.4)$$

Statt (2.18) gilt

$$e^{-2\phi} = \frac{1}{2}(S + \bar{S} + \frac{1}{2}(C_i + \bar{C}_i)R^{-1ij}(C_j + \bar{C}_j)). \quad (4.5)$$

Schließlich erhält man die Lagrangedichte [27, 44]

$$\begin{aligned} (\sqrt{-g})^{-1} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \mathcal{R} - G_{a\bar{b}} \partial^\mu Z^a \partial_\mu \bar{Z}^b \\ & - \frac{|\partial_\mu S + (C_i + \bar{C}_i)R^{-1ij} \partial_\mu C_j - \frac{1}{4}(C_i + \bar{C}_i)R^{-1ik} (\partial_\mu \mathcal{N})_{kl} R^{-1lj} (C_j + \bar{C}_j)|^2}{(S + \bar{S} + \frac{1}{2}(C_i + \bar{C}_i)R^{-1ij}(C_j + \bar{C}_j))^2} \\ & + \frac{(\partial_\mu C_i - \frac{1}{2}(\partial_\mu \mathcal{N})_{ik} R^{-1kl} (C_l + \bar{C}_l)) R^{-1ij} (\partial^\mu \bar{C}_j - \frac{1}{2}(\partial^\mu \bar{\mathcal{N}})_{im} R^{-1mn} (C_n + \bar{C}_n))}{(S + \bar{S} + \frac{1}{2}(C_i + \bar{C}_i)R^{-1ij}(C_j + \bar{C}_j))}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Es bleibt anzugeben, wie die beiden Wirkungen (3.14) und (4.6) aufeinander abgebildet werden. Dies geschieht durch folgende Transformationen [44]:

$$\begin{aligned} \xi^i &= \frac{1}{2} R^{-1ij} (C_j + \bar{C}_j), \\ \tilde{\xi}_i &= -\frac{i}{2} (C_i - \bar{C}_i) - \frac{1}{2} I_{ij} R^{-1jk} (C_k + \bar{C}_k), \\ e^{-2\phi} &= \frac{1}{2} (S + \bar{S}) + \frac{1}{4} (C_i + \bar{C}_i) R^{-1ij} (C_j + \bar{C}_j), \\ \tilde{\phi} &= \frac{1}{2i} (S - \bar{S}) + \frac{1}{4i} (C_i R^{-1ij} C_j - \bar{C}_i R^{-1ij} \bar{C}_j). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Aus der dritten Gleichung und (4.5) sieht man, daß die Felder ϕ in beiden Koordinatenbasen übereinstimmen. Die inverse Transformation ist durch

$$\begin{aligned} C_i &:= \mathcal{N}_{ij} \xi^j + i\tilde{\xi}_i, \\ S &:= e^{2\phi} + i\tilde{\phi} - \mathcal{N}_{ij} \xi^i \xi^j - i\tilde{\xi}^i \tilde{\xi}_i, \\ &= e^{2\phi} + iD - \frac{1}{4} (C_i + \bar{C}_i) R^{-1ij} (C_j + \bar{C}_j) + \frac{1}{4} (\bar{C}_i R^{-1ij} \bar{C}_j - C_i R^{-1ij} C_j), \end{aligned} \quad (4.8)$$

gegeben.

Mittels (4.7) und (4.8) lassen sich die Peccei-Quinn-Symmetrien (3.15) der Wirkung (3.14) in der neuen Feldbasis bestimmen. Man findet

$$S \mapsto S + i\alpha - 2C_i \gamma^i - \mathcal{N}_{ij} \gamma^i \gamma^j, \quad C_i \mapsto C_i + i\beta_i + \mathcal{N}_{ij} \gamma^j. \quad (4.9)$$

Setzt man nun die Felder $Z^a, \bar{Z}^a, C_a, \bar{C}_a$ konstant, erhält man aus (4.6)

$$\begin{aligned} (\sqrt{-g})^{-1} \mathcal{L} = & -\frac{|\partial_\mu S + (C_i + \bar{C}_i)R^{-1i0}\partial_\mu C_0|^2}{(S + \bar{S} + \frac{1}{2}(C_i + \bar{C}_i)R^{-1ij}(C_j + \bar{C}_j))^2} \\ & + \frac{(R^{-1})^{00}(\partial_\mu C_0)(\partial^\mu \bar{C}_0)}{(S + \bar{S} + \frac{1}{2}(C_i + \bar{C}_i)R^{-1ij}(C_j + \bar{C}_j))}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

Die auftretenden Konstanten C_a, R^{-1ij} absorbiert man durch folgende Feldredefinition ($(R^{-1})^{00}$ ist negativ)

$$\begin{aligned} S & \mapsto S' - (C_i + \bar{C}_i)R^{-1i0}C_0 - \frac{1}{2}(C_a + \bar{C}_a)R^{-1ab}(C_b + \bar{C}_b), \\ C & \mapsto \sqrt{\frac{-2}{(R^{-1})^{00}}}C'. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Damit lautet (4.10)

$$(\sqrt{-g})^{-1} \mathcal{L} = -\frac{|\partial_\mu S' - 2(C'_0 + \bar{C}'_0)\partial_\mu C'_0|^2}{(S' + \bar{S}' - (C'_0 + \bar{C}'_0)^2)^2} - \frac{2(\partial_\mu C'_0)(\partial^\mu \bar{C}'_0)}{(S' + \bar{S}' - (C'_0 + \bar{C}'_0)^2)}, \quad (4.12)$$

Führt man noch die Redefinition

$$S' \mapsto S'' + C_0^2 \quad (4.13)$$

durch², so erhält man aus (4.12) die in (2.19) angegebene Wirkung des universellen Hypermultipletts.

Die Peccei-Quinn-Symmetrien sind in der in (3.14) benutzten Felddbasis einfacher realisiert (3.15) als in der in (4.6) benutzten (4.9). Da diese Symmetrien, wie im Fall des universellen Hypermultipletts (Abschnitt 2.3), eine entscheidende Rolle bei der Einschränkung möglicher Quantenkorrekturen spielen, ist die in (3.14) benutzte Basis besser geeignet, um diese Korrekturen zu untersuchen. Es bleibt anzugeben, wie der Limes zum universellen Hypermultiplett in dieser Basis durchgeführt wird. Die NSNS Felder (Z^a, \bar{Z}^a) stimmen in beiden Basen überein. Im gesuchten Limes gilt damit weiterhin $\partial_\mu Z^a = \partial_\mu \bar{Z}^a = 0$. Die RR Felder der beiden Basen werden gemäß (4.8) ineinander überführt. Den Grenzfall des universellen Hypermultipletts erhält man demnach, indem man fordert

$$\begin{aligned} \partial_\mu C_a & = \partial_\mu (\mathcal{N}_{aj}\xi^j + i\tilde{\xi}_a) = \mathcal{N}_{aj}\partial_\mu \xi^j + i\partial_\mu \tilde{\xi}_a = 0 \quad \text{und} \\ \partial_\mu \bar{C}_a & = \partial_\mu (\bar{\mathcal{N}}_{aj}\xi^j - i\tilde{\xi}_a) = \bar{\mathcal{N}}_{aj}\partial_\mu \xi^j - i\partial_\mu \tilde{\xi}_a = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Real- und Imaginärteil dieser Gleichungen müssen einzeln verschwinden. Es folgt:

$$R_{ai}\partial_\mu \xi^i = 0, \quad I_{ai}\partial_\mu \xi^i + \partial_\mu \tilde{\xi}_a = 0. \quad (4.15)$$

²Sie muß durchgeführt werden, da in (2.3) die vollständige Ableitung $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}H_{\mu\nu\rho}(C\partial_\sigma C - \bar{C}\partial_\sigma \bar{C})$ weggelassen wurde. Das Hinzufügen/Weglassen von vollständigen Ableitungen zur Wirkung im Tensormultiplettbild entspricht einer Feldredefinition im Hypermultiplettbild.

Im Rest dieses Kapitels wird nur noch in der Feldbasis von (3.14) gearbeitet. Insbesondere wird dabei der topologisch an das Dreiformfeld koppelnde Strom (4.2) in der Basis der $\xi^i, \tilde{\xi}_i$ benötigt. Wegen (4.8) gilt $(C_i + \bar{C}_i) = 2R_{ij}\xi^j$ und man findet

$$\begin{aligned} a_\lambda &= 2(R_{ij}\xi^j)R^{-1ik}(\partial_\lambda C_k - \frac{1}{2}\partial_\lambda \mathcal{N}_{kl}R^{-1lm}R_{mn}\xi^n) \\ &= 2\xi^i(\partial_\lambda(\mathcal{N}_{ij}\xi^j + i\tilde{\xi}_i) - \frac{1}{2}\partial_\lambda \mathcal{N}_{ij}\xi^j) \\ &= 2i\xi^i\partial_\lambda \tilde{\xi}_i + \partial_\lambda(\xi^i \mathcal{N}_{ij}\xi^j). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Wegen der Bianchi-Identität des Dreiformfeldes (2.6) führt der zweite Term nur zur Addition einer totalen Ableitung zur Wirkung. Er wird im folgenden weggelassen. Der komplex konjugierte Strom lautet nach partieller Integration

$$\bar{a}_\lambda = 2i\tilde{\xi}_i\partial_\lambda \xi^i. \quad (4.17)$$

4.3 Bekannte Quantenkorrekturen

Antoniadis, Ferrara, Minasian und Narain [57] ist es gelungen, bei konstantem Dilaton und Axion ($\partial_\mu S = \partial_\mu \bar{S} = 0$) und verschwindenden RR Feldern, die Ein-Schleifen-Korrektur zur Wirkung (4.6) zu bestimmen. Sie lautet im Stringbild

$$(\sqrt{-g})^{-1} \mathcal{L} = -\frac{1}{2}(e^{-2\phi} + b)\mathcal{R} - (e^{-2\phi} - b)G_{ab}\partial_\mu Z^a \partial^\mu \bar{Z}^b. \quad (4.18)$$

Die Korrektur zum Ricci-Skalar ist die aus (2.94) bekannte, b ist durch (2.96) gegeben. In der Korrektur zur Metrik tritt b mit dem umgekehrten Vorzeichen auf. Im Gegensatz zum universellen Hypermultiplett kann die Lagrangedichte (4.18) deshalb nicht durch eine Variablenredefinition auf die klassische Form gebracht werden. Zur Erleichterung der Rechnung wird die Redefinition trotzdem ausgeführt: $e^{-2\hat{\phi}} = e^{-2\phi} + b$. Der Hut am neuen Feld wird sofort wieder weggelassen, da das alte Feld im Rest dieses Abschnitts nicht mehr auftreten wird. Die Korrektur (4.18) lautet nun

$$(\sqrt{-g})^{-1} \mathcal{L} = -\frac{1}{2}e^{-2\phi}\mathcal{R} - (e^{-2\phi} - 2b)G_{ab}\partial_\mu Z^a \partial^\mu \bar{Z}^b. \quad (4.19)$$

Insbesondere sind die möglichen Quantenkorrekturen zu (4.6) nun dadurch eingeschränkt, daß man im Limes des universellen Hypermultipletts dessen klassische Wirkung erhalten muß.

Die Korrektur (4.19) legt eine weitere nahe (es wird immer noch der Limes verschwindender RR-Felder betrachtet, Dilaton und Axion müssen aber nicht mehr konstant sein). Man betrachte folgende Wirkung

$$\begin{aligned} (\sqrt{-g})^{-1} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2}e^{-2\phi}\mathcal{R} + 2\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - (e^{-2\phi} - 2b)G_{ab}\partial_\mu Z^a \partial^\mu \bar{Z}^b \\ &\quad - \frac{1}{6}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho} + \frac{2b}{12}(\sqrt{-g})^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}H_{\mu\nu\rho}(K_a\partial_\lambda Z^a - \bar{K}_a\partial_\lambda \bar{Z}^a). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Hierbei ist

$$K_a = \frac{\partial K}{\partial Z^a}, \quad \bar{K}_a = \frac{\partial K}{\partial \bar{Z}^a}, \quad (4.21)$$

und K das Kählerpotential (3.5) der speziellen Kählermetrik G_{ab} .

Man führt nun, wie in Abschnitt 2.2, den Übergang in das Einsteinbild und die Dualisierung des Tensorfeldes durch. Der an den Tensor gekoppelte Strom (vgl. (2.5)) ist hier

$$a_\lambda = 2bK_a \partial_\lambda Z^a, \quad (4.22)$$

so daß aus (2.15)

$$\frac{1}{2}(a_\lambda + \bar{a}_\lambda) = b\partial_\lambda K \quad (4.23)$$

wird. Die Wirkung (4.20) lautet nach der Dualisierung

$$\begin{aligned} (\sqrt{-g})^{-1} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \mathcal{R} - (1 - 2be^{2\phi}) G_{ab} \partial_\mu Z^a \partial^\mu \bar{Z}^b \\ & - \frac{e^{4\phi}}{4} \left| \partial_\mu (e^{-2\phi} + iD + bK) - 2bK_a \partial_\mu Z^a \right|^2. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Man definiert nun statt (4.4)

$$S = e^{-2\phi} + iD + bK, \quad (4.25)$$

bzw.

$$e^{-2\phi} = \frac{1}{2}(S + \bar{S} - 2bK). \quad (4.26)$$

Nach Einsetzen von (4.25) lautet die Metrik des durch (4.24) beschriebenen σ -Modells

$$h = \left(1 - \frac{4b}{S + \bar{S} - 2bK}\right) G_{ab} dZ^a \otimes_S d\bar{Z}^b + \frac{|dS - 2bK_a dZ^a|^2}{(S + \bar{S} - 2bK)^2}. \quad (4.27)$$

Diese Metrik ist Kähler; ihr Kählerpotential lautet:

$$\tilde{K} = K + \ln(S + \bar{S} - 2bK). \quad (4.28)$$

Korrekturen dieser Art sind aus dem Vektormultiplettsektor des heterotischen Strings bekannt [13]. Insbesondere ändert sich auch dort durch die 1-Schleifen-Korrektur der Zusammenhang zwischen Stringkopplungskonstante und den Feldern der Vektormultipletts vom klassischen ((4.5) mit verschwindenden RR-Feldern)

$$e^{-2\phi} = \frac{1}{2}(S + \bar{S}) \quad (4.29)$$

zu (4.26).

Natürlich müssen die Korrekturen des Hypermultiplettsektors des IIA Strings nicht den Korrekturen des Vektormultiplettsektors des heterotischen Strings entsprechen³; auch ist nicht bekannt, daß das σ -Modell des NSNS Sektors der Hypermultipletts Kähler sein muß, so daß die Subsummierung von (4.20) unter die Überschrift „Bekannte Quantenkorrekturen“ euphemistisch erscheinen mag.

Andererseits lernt man folgendes: (4.20) ist eine Korrektur zu (4.6), die mit allen Symmetrien der Störungstheorie verträglich ist. Sie muß daher im Ansatz für die quantenkorrigierte Wirkung berücksichtigt werden. Weiterhin muß man konzedieren, daß man keinen Grund hat, anzunehmen, daß die Beziehung zwischen Stringkopplung und den Hypermultiplettfeldern zu höheren Schleifenordnungen durch (4.5) gegeben ist. Die Kenntnis dieser Beziehung lieferte im Fall des universellen Hypermultipletts eine wichtige Einschränkung an die Form der Störungsentwicklung der Metrik (2.29). Tatsächlich ist es ohne Kenntnis dieser Beziehung nicht möglich, den Ansatz für die Quantenkorrekturen in Form einer Störungsreihe anzugeben (da eben der Entwicklungsparameter nicht bekannt ist). Was möglich ist, ist die allgemeinste Form der Wirkung anzugeben, die mit den zu fordernden Symmetrien verträglich ist. Dies wird im nächsten Abschnitt geschehen.

4.4 Der Ansatz für die quantenkorrigierte Wirkung

Bei der Bestimmung des Ansatzes der quantenkorrigierten Metrik des universellen Hypermultipletts spielten die Peccei-Quinn Symmetrien der Skalare des RR Sektors eine herausragende Rolle. Auch im hier behandelten Fall werden sie eine Einschränkung an mögliche Korrekturen darstellen. In der Feldbasis von (3.14) lauten sie (3.15):

$$\xi^i \mapsto \xi^i + \gamma^i, \quad \tilde{\xi}_i \mapsto \tilde{\xi}_i + \beta_i, \quad \tilde{\phi} \mapsto \alpha + \beta_i \xi^i - \gamma^i \tilde{\xi}_i. \quad (4.30)$$

Mit der gleichen Argumentation, die in Abschnitt 2.3 gegeben wurde, kann man auch hier schließen, daß sie nicht durch Quantenkorrekturen gebrochen werden. Folgende Ausdrücke sind unter (4.30) invariant:

$$\partial_\mu \xi^i, \quad \partial_\mu \tilde{\xi}_i, \quad \partial_\mu \tilde{\phi} + \xi^i \partial_\mu \tilde{\xi}_i - \tilde{\xi}_i \partial_\mu \xi^i. \quad (4.31)$$

Die allgemeinste Korrektur zu den kinetischen Termen des RR Sektors lautet

$$\begin{aligned} (\sqrt{-g})^{-1} \mathcal{L}_{RR} = & A_{ij}(\phi, Z^a, \bar{Z}^a) \partial_\mu \xi^i \partial_\mu \xi^j + B_i^j(\phi, Z^a, \bar{Z}^a) \partial_\mu \xi^i \partial_\mu \tilde{\xi}_j \\ & + C^{ij}(\phi, Z^a, \bar{Z}^a) \partial_\mu \tilde{\xi}_i \partial_\mu \tilde{\xi}_j. \end{aligned} \quad (4.32)$$

³Man kann auch nicht argumentieren, daß die NSNS Felder in den Hypermultipletts über die c-map (Abschnitt 3.2) mit Feldern aus Vektormultipletts identifiziert werden. Die Gültigkeit der c-map ist nur im klassischen Grenzfall gezeigt worden.

Sie ist invariant unter (4.30) und quadratisch in den RR Feldern, wird also durch die Symmetrien der Stringstörungstheorie in keinsten Weise eingeschränkt. Es ist hoffnungslos, eine solch allgemeine Wirkung daraufhin zu untersuchen, ob das durch sie beschriebene σ -Modell quaternionisch ist⁴.

In Abschnitt 3.3 ist gezeigt worden, daß die IIA Theorie im Limes großer komplexer Strukturen invariant ist unter den zusätzlichen Peccei-Quinn Symmetrien (3.25)

$$\begin{aligned} \delta X^a &= \eta^a, & \delta Y^a &= 0, & \delta \xi^0 &= 0, \\ \delta \xi^a &= \eta^a \xi^0, & \delta \tilde{\xi}_a &= \frac{1}{4} \kappa_{abc} \eta^b \xi^c, & \delta \tilde{\xi}_0 &= -\eta^a \tilde{\xi}_a. \end{aligned} \quad (4.33)$$

In der mirrorsymmetrischen IIB Theorie sind dies Symmetrien, die im Limes großen Volumens gelten, außerhalb dieses Limes durch Weltflächenkorrekturen gebrochen werden. Von Quantenkorrekturen hingegen werden sie respektiert. Daher müssen sie auch im entsprechenden Limes der IIA Theorie störungstheoretisch erhalten bleiben. Es wird im folgenden dieser Limes betrachtet.

Die Invarianten unter (4.33) und (4.30) werden in Anhang C bestimmt. Sie sind gegeben durch ϕ - und Y^a -abhängige Linearkombinationen folgender Ausdrücke:

$$\begin{aligned} q_\mu &= \partial_\mu \xi_0, \\ r_\mu^a &= \partial_\mu \xi^a - X^a \partial_\mu \xi^0, \\ s_{\mu a} &= \partial_\mu \tilde{\xi}_a - \frac{1}{4} (\kappa X)_{ab} \partial_\mu \xi^b + \frac{1}{8} (\kappa X X)_a \partial_\mu \xi^0, \\ t_\mu &= \partial_\mu \tilde{\xi}_0 + X^a \partial_\mu \tilde{\xi}_a - \frac{1}{8} (\kappa X X)_a \partial_\mu \xi^a + \frac{1}{24} (\kappa X X X) \partial_\mu \xi^0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Der allgemeinste mit (4.33) und (4.30) verträgliche Ansatz für die Korrekturen zu den kinetischen Termen des RR Sektors lautet demnach

$$\begin{aligned} (\sqrt{-g})^{-1} \mathcal{L}_{RR} &= -G(\phi, Y) q_\mu q^\mu - K(\phi, Y) t_\mu t^\mu - M(\phi, Y) q_\mu t^\mu - A_a(\phi, Y) q_\mu r^{\mu a} \\ &\quad - B^a(\phi, Y) q_\mu s_\mu^a - F_{ab}(\phi, Y) r_\mu^a r^{\mu b} - C_a{}^b(\phi, Y) r_\mu^a s_b^\mu \\ &\quad - D_a(\phi, Y) r_\mu^a t^\mu - H^{ab}(\phi, Y) s_{\mu a} s_b^\mu - E^a(\phi, Y) s_{\mu a} t^\mu. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Dabei sind die $G, K, M, A_a, B^a, F_{ab}, C_a{}^b, D_a, H^{ab}, E^a$ beliebige Funktionen in den Y^a und ϕ . In der klassischen Wirkung lauten sie (3.24)

$$\begin{aligned} G(\phi, Y) &= \frac{1}{8} e^{2\phi} V, & F_{ab}(\phi, Y) &= \frac{1}{2} e^{2\phi} V G_{ab}, \\ H^{ab}(\phi, Y) &= \frac{1}{2} e^{2\phi} V^{-1} G^{ab}, & K(\phi, Y) &= 2e^{2\phi} V^{-1}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

alle anderen Funktionen verschwinden zu niedrigster Ordnung der Störungstheorie.

⁴Tatsächlich wird (4.32) noch durch die Forderung, im Limes (4.15) die klassische Wirkung des universellen Hypermultipletts zu reproduzieren, eingeschränkt. Diese Einschränkung ist allerdings zu schwach, um die geometrische Untersuchung praktikabel zu machen.

Der Ansatz (4.35) wird weiter durch die Forderung eingeschränkt, im Limes des universellen Hypermultipletts die klassische Wirkung zu reproduzieren (vgl. die Bemerkung nach (4.19)). Dieser Grenzfall liegt vor, wenn die Gleichungen (4.15) erfüllt sind. Sie lauten im Limes großer komplexer Struktur (3.23):

$$\begin{aligned} 0 = R_{ai}\partial_\mu\xi^i &= \frac{1}{6}(\kappa YYY)G_{ab}(\partial_\mu\xi^b - X^b\partial_\mu\xi^0) \implies r_\mu^a = 0, \\ 0 = I_{ai}\partial_\mu\xi^i + \partial_\mu\tilde{\xi}_a &= \partial_\mu\tilde{\xi}_a - \frac{1}{4}(\kappa X)_{ab}\partial_\mu\xi^b + \frac{1}{8}(\kappa XX)_a\partial_\mu\xi^0 \implies s_{\mu a} = 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Anders gesagt, überleben nur die Terme proportional zu $q_\mu q^\mu$, $t_\mu t^\mu$ und $q_\mu t^\mu$ diesen Limes. Die Funktionen G , K und M müssen daher mit ihren klassischen Ausdrücken (4.36) übereinstimmen. Insbesondere muß M verschwinden.

Es bleiben die möglichen Korrekturen im NSNS Sektor zu untersuchen. Die Korrektur zum kinetischen Term der Z^a , \bar{Z}^a ist in (4.18) angegeben worden⁵.

Die topologische Kopplung des Dreiformfeldes ist klassisch gegeben durch (4.16)

$$\mathcal{L}_{\text{Top}} = -\frac{i}{6}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}H_{\mu\nu\rho}(\xi^i\partial_\sigma\tilde{\xi}_i - \tilde{\xi}_i\partial_\sigma\xi^i). \quad (4.38)$$

Unter den Peccei-Quinn-Symmetrien (4.30) transformiert dieser Term in eine totale Ableitung. Dies bedeutet, daß er keine ϕ -abhängigen Korrekturen erhalten kann, da diese die Peccei-Quinn-Symmetrien brechen würden. Die unter (4.30) invarianten Terme $\partial_\mu\xi^i$ und $\partial_\mu\tilde{\xi}_i$ (4.31) können nicht als Korrektur auftreten, da die Stringstörungstheorie verlangt, daß die RR Felder immer in geraden Potenzen auftreten (Abschnitt 2.3). Ein Term der Form $\partial_\mu\phi$ kann nicht an das Dreiformfeld gekoppelt werden, da er in der Wirkung des universellen Tensormultipletts nicht auftritt. In (4.20) ist eine mögliche Korrektur zu (4.38) angegeben worden. In ihrer allgemeinen Form wird die Ableitung des Kählerpotentials K_a durch eine beliebige Funktion L_a der Y^a und ϕ ersetzt (sie kann wegen (4.30) nicht von den X^a abhängen).

Der kinetische Term des Dreiformfeldes kann keine Quantenkorrekturen erhalten, da es dem universellen Tensormultiplett angehört. Man kann also die Dualisierung wie in Abschnitt 2.2 durchführen und erhält

$$(\sqrt{-g})^{-1}\mathcal{L}_{\tilde{\phi}} = -\frac{e^{4\phi}}{4}\left(\partial_\mu\tilde{\phi} + (\xi^i\partial_\mu\tilde{\xi}_i - \tilde{\xi}_i\partial_\mu\xi^i) + L_a(Y, \phi)\partial_\mu X^a\right)^2. \quad (4.39)$$

Ebenfalls wurde in Abschnitt 4.3 darauf hingewiesen, daß nicht ausgeschlossen werden kann, daß das Dilaton mit den Moduli der Calabi-Yau mischt. Dies kann auf allgemeinere als die dort angegebene Art geschehen, so daß im NSNS Sektor

⁵Man mag einwenden, daß dies nur die 1-Schleifen-Korrektur ist und nicht bewiesen wurde, daß es keine Korrekturen höherer Ordnung gibt. Auch wenn es höhere Korrekturen gibt, muß es aber möglich sein, die Niederenergiewirkung zur 1-Schleifen-Ordnung zu bestimmen. Nachdem dies getan ist, kann überlegt werden, ob die Symmetrien der Wirkung noch weitere Korrekturen zulassen. Im folgenden wird daher nur die Korrektur (4.18) zur Metrik G_{ab} betrachtet.

ferner noch folgende Terme auftreten können (der kinetische Term von ϕ kann keine Korrekturen erhalten, da er aus dem universellen Hypermultiplett bekannt ist).

$$(\sqrt{-g})^{-1} \mathcal{L}_\phi = -\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - N_a(Y, \phi) \partial_\mu \phi \partial^\mu X^a - P_a(Y, \phi) \partial_\mu \phi \partial^\mu Y^a. \quad (4.40)$$

Damit lautet der allgemeinste Ansatz für die Quantenkorrekturen zu (3.24), der invariant unter den Peccei-Quinn-Symmetrien (4.30) und (4.33) ist und die bekannten Korrekturen für das universelle Hypermultiplett beinhaltet (4.35, 4.34, 4.37, 4.39, 4.40):

$$\begin{aligned} (\sqrt{-g})^{-1} \mathcal{L} = & \\ & - \frac{1}{2} \mathcal{R} - (1 - 2be^{2\phi}) G_{ab} (\partial_\mu X^a \partial^\mu X^b + \partial_\mu Y^a \partial^\mu Y^b) - \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - N_a(Y, \phi) \partial_\mu \phi \partial^\mu X^a \\ & - \frac{\epsilon^{4\phi}}{4} \left(\partial_\mu \tilde{\phi} + (\xi^i \partial_\mu \tilde{\xi}_i - \tilde{\xi}_i \partial_\mu \xi^i) + L_a(Y, \phi) \partial_\mu X^a \right)^2 - P_a(Y, \phi) \partial_\mu \phi \partial^\mu Y^a \\ & - \frac{1}{8} e^{2\phi} V \partial_\mu \xi^0 \partial^\mu \xi^0 - 2e^{2\phi} V^{-1} \left(\partial_\mu \tilde{\xi}_0 + X^a \partial_\mu \tilde{\xi}_a - \frac{1}{8} (\kappa X X)_a \partial_\mu \xi^a + \frac{1}{24} (\kappa X X X) \partial_\mu \xi^0 \right)^2 \\ & - F_{ab}(Y, \phi) (\partial_\mu \xi^a - X^a \partial_\mu \xi^0) (\partial^\mu \xi^b - X^b \partial^\mu \xi^0) - A_a(\phi, Y) \partial_\mu \xi^0 (\partial^\mu \xi^a - X^a \partial^\mu \xi^0) \\ & - H^{ab}(Y, \phi) \left(\partial_\mu \tilde{\xi}_a - \frac{1}{4} (\kappa X)_{ac} \partial_\mu \xi^c + \frac{1}{8} (\kappa X X)_a \partial_\mu \xi^0 \right) \times \\ & \quad \left(\partial^\mu \tilde{\xi}_b - \frac{1}{4} (\kappa X)_{bd} \partial^\mu \xi^d + \frac{1}{8} (\kappa X X)_b \partial^\mu \xi^0 \right) \\ & - B^a(\phi, Y) \partial_\mu \xi^0 \left(\partial^\mu \tilde{\xi}_a - \frac{1}{4} (\kappa X)_{ab} \partial^\mu \xi^b + \frac{1}{8} (\kappa X X)_a \partial^\mu \xi^0 \right) \\ & - C_a{}^b(\phi, Y) (\partial_\mu \xi^a - X^a \partial_\mu \xi^0) \left(\partial^\mu \tilde{\xi}_b - \frac{1}{4} (\kappa X)_{bc} \partial^\mu \xi^c + \frac{1}{8} (\kappa X X)_b \partial^\mu \xi^0 \right) \\ & - D_a(\phi, Y) (\partial_\mu \xi^a - X^a \partial_\mu \xi^0) \left(\partial_\mu \tilde{\xi}_0 + X^a \partial_\mu \tilde{\xi}_a - \frac{1}{8} (\kappa X X)_a \partial_\mu \xi^a + \frac{1}{24} (\kappa X X X) \partial_\mu \xi^0 \right) \\ & - E^a(\phi, Y) \left(\partial_\mu \tilde{\xi}_a - \frac{1}{4} (\kappa X)_{ab} \partial_\mu \xi^b + \frac{1}{8} (\kappa X X)_a \partial_\mu \xi^0 \right) \times \\ & \quad \left(\partial_\mu \tilde{\xi}_0 + X^c \partial_\mu \tilde{\xi}_c - \frac{1}{8} (\kappa X X)_c \partial_\mu \xi^c + \frac{1}{24} (\kappa X X X) \partial_\mu \xi^0 \right). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Dies Wirkung hängt ab von $2(h^{1,2})^2 + 8h^{1,2}$ Funktionen in den Y^a und ϕ .⁶ Selbst im einfachsten Fall $h^{1,2} = 1$ sind dies zehn unbekannt Funktionen.

Im Abschnitt 4.5 wird zudem gezeigt, daß bei der Überprüfung der Forderung, daß die Metrik des von (4.41) beschriebenen σ -Modells quaternionisch ist, bereits im klassischen Limes Probleme auftreten, die diese Untersuchung praktisch unmöglich machen.

Quaternionische Metriken sind insbesondere Einstein (A.55). Es liegt also nahe, zu versuchen, die Wirkung (4.41) durch Überprüfen dieser notwendigen Bedingung einzuschränken. Selbst unter Zuhilfenahme von MAPLE V ist es mir nicht gelungen, den zu (4.41) gehörende Ricci-Tensor zu bestimmen.

Allerdings läßt sich auf diese Weise zeigen, daß die Wirkung, die nur die Abschnitt (4.3) angegebenen Korrekturen enthält, kein quaternionisches σ -Modell beschreibt. Dazu betrachtet man den Fall $h^{1,2} = 1, \kappa_{111} = 1$ (die entsprechende

⁶Aus der Tatsache, daß diese Funktionen im klassischen Limes bekannt sind, erhält man keine Einschränkung, da diese Forderung z.B. durch $f(Y, \phi) = f_{\kappa l}(Y, \phi) + b\tilde{f}(Y, \phi)$ mit uneingeschränktem $\tilde{f}(Y, \phi)$ erfüllt ist.

klassische Wirkung wird in (4.45) angegeben). Der NSNS Sektor der σ -Metrik lautet dann (4.27), (4.44)

$$h = \frac{3}{4}Y^{-2}(1 - 2be^{2\phi})(dX^2 + dY^2) + (d\phi)^2 + \frac{e^{4\phi}}{4}(d\tilde{\phi} + \xi d\tilde{\xi} - \tilde{\xi} d\xi - \frac{6b}{Y}dX)^2, \quad (4.42)$$

der RR Sektor ist in (4.45) angegeben. Es gilt also $h_{\phi\phi} = 1$, die entsprechenden Komponente des Riccitors berechnet man mit Hilfe von MAPLE V zu

$$\mathcal{R}_{\phi\phi} = -8 \frac{1 - 5be^{2\phi} + 5b^2e^{4\phi}}{(1 - 2be^{2\phi})^2}. \quad (4.43)$$

Die geforderte Gleichung $h = -8\mathcal{R}$ (A.55,A.57) ist demnach nur durch $b = 0$, also den klassischen Fall zu erfüllen.

Aus diesen Gründen ist es mir nicht gelungen, die Quantenkorrekturen im allgemeinen Fall über (4.41) hinaus zu bestimmen.

4.5 Probleme der geometrischen Untersuchung I

Die Einschränkung von (4.41) durch die Forderung, daß die Metrik des σ -Modells Einstein ist, konnte nicht untersucht werden, da es nicht gelungen ist, den Ricci-Tensor zu berechnen. In diesem Abschnitt wird dargestellt, warum auch die Überprüfung der quaternionischen Geometrie analog zu den Abschnitten 2.5 und 2.6 im Fall von mehr als einem Hypermultiplett nicht praktikabel ist.

Um die auftretenden Probleme zu illustrieren, wird in diesem Abschnitt gezeigt, daß die klassische Wirkung im einfachsten nichtuniversellen Fall ($h^{1,2} = 1, \kappa_{111} = 1$ im Limes großer komplexer Struktur) quaternionisch ist. In diesem Fall gilt $V = \frac{Y^3}{6}$; Kählerpotential und -metrik lauten (3.21,3.22)

$$K = -3 \ln Y, \quad G = -\frac{3}{4}Y^{-2}. \quad (4.44)$$

Hiermit liest man aus der Wirkung (3.24) die Metrik des σ -Modells ab:

$$\begin{aligned} h = & \frac{3}{4}Y^{-2}(dX^2 + dY^2) + (d\phi)^2 + \frac{e^{4\phi}}{4}(dD + \xi d\tilde{\xi} - \tilde{\xi} d\xi)^2 \\ & + \frac{1}{48}e^{2\phi}Y^3(d\xi_0)^2 + \frac{1}{16}e^{2\phi}Y(Xd\xi_0 - d\xi_1)^2 \\ & + 4e^{2\phi}Y^{-1}(d\tilde{\xi}_1 - \frac{1}{4}Xd\xi_1 + \frac{1}{8}X^2d\xi_0)^2 \\ & + 12e^{2\phi}Y^{-3}(d\tilde{\xi}_0 + Xd\tilde{\xi}_1 - \frac{1}{8}X^2d\xi_1 + \frac{1}{24}X^3d\xi_0)^2. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Die Invarianten (4.34) lauten in diesem Fall

$$\begin{aligned} q &= d\xi_0, \\ r &= d\xi_1 - Xd\xi_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s &= d\tilde{\xi}_1 - \frac{1}{4}X d\xi_1 + \frac{1}{8}X^2 d\xi_0, \\
t &= d\tilde{\xi}_0 + X d\tilde{\xi}_1 - \frac{1}{8}X^2 d\xi_1 + \frac{1}{24}X^3 d\xi_0.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Durch sie ausgedrückt lautet (4.45)

$$\begin{aligned}
h &= \frac{3}{4}Y^{-2}(dX^2 + dY^2) + (d\phi)^2 + \frac{e^{4\phi}}{4}(dD + \xi d\tilde{\xi} - \tilde{\xi} d\xi)^2 \\
&\quad + \frac{1}{48}e^{2\phi}Y^3 q^2 + \frac{1}{16}e^{2\phi}Y r^2 + 4e^{2\phi}Y^{-1}s^2 + 12e^{2\phi}Y^{-3}t^2 \\
&= \left| \frac{\sqrt{3}}{2}Y^{-1}(dX + idY) \right|^2 + \left| d\phi + \frac{i}{2}e^{2\phi}(dD + \xi d\tilde{\xi} - \tilde{\xi} d\xi) \right|^2 \\
&\quad + \left| \frac{1}{4\sqrt{3}}e^{\phi}Y^{3/2}q + i2\sqrt{3}e^{\phi}Y^{-3/2}t \right|^2 + \left| \frac{1}{4}e^{\phi}Y^{1/2}r + i2e^{\phi}Y^{-1/2}s \right|^2.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Hieraus kann man eine Basis komplexer 1-Formen ablesen, die (A.88) erfüllt:

$$\begin{aligned}
e^{11} &:= Q := \frac{1}{4\sqrt{6}}e^{\phi}Y^{3/2}q + i\sqrt{6}e^{\phi}Y^{-3/2}t, \\
e^{21} &:= S := \frac{1}{\sqrt{2}}d\phi + \frac{i}{2\sqrt{2}}e^{2\phi}(dD + \xi d\tilde{\xi} - \tilde{\xi} d\xi), \\
e^{12} &:= e := \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}Y^{-1}(dX + idY), \\
e^{22} &:= R := \frac{1}{4\sqrt{2}}e^{\phi}Y^{1/2}r + \sqrt{2}ie^{\phi}Y^{-1/2}s.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Um diese nun zu dem $4(h_{12}+1) = 4(1+1) = 8$ -dimensionalen Vielbein zusammenzusetzen, muß man angeben, wie man die (αI) -Indizes nacheinander anordnet. Hier wurde folgende Wahl getroffen

$$\begin{aligned}
(V^{11}, V^{21}, V^{12}, V^{22}, V^{13}, V^{23}, V^{14}, V^{24}) &\cong (V^1, V^2, V^3, V^4, V^5, V^6, V^7, V^8), \\
V^T &= (Q, S, e, R, -\bar{S}, \bar{Q}, -\bar{R}, \bar{e}).
\end{aligned} \tag{4.49}$$

In dieser Basis lautet die Tangentialraummetrik

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.50}$$

Es soll nun die zugehörige Spinkonnexion berechnet werden. Dazu muß man die äußeren Ableitungen des Vielbeins bestimmen. Hierzu benötigt man

$$\begin{aligned}
dq &= 0, \\
dr &= -dX \wedge q, \\
ds &= -\frac{1}{4}dX \wedge r, \\
dt &= dX \wedge s, \\
d\xi_0 \wedge d\tilde{\xi}_0 + d\xi_1 \wedge d\tilde{\xi}_1 &= q \wedge t + r \wedge s,
\end{aligned} \tag{4.51}$$

und

$$\begin{aligned}
dX &= \sqrt{\frac{2}{3}}Y(e + \bar{e}), \\
dY &= -i\sqrt{\frac{2}{3}}Y(e - \bar{e}), \\
d\phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(S + \bar{S}), \\
dD + \xi d\tilde{\xi} - \tilde{\xi} d\xi &= -\sqrt{2}ie^{-2\phi}(S - \bar{S}), \\
q &= 2\sqrt{6}e^{-\phi}Y^{-3/2}(Q + \bar{Q}), \\
t &= -\frac{\sqrt{2}i}{4\sqrt{3}}e^{-\phi}Y^{3/2}(Q - \bar{Q}), \\
r &= 2\sqrt{2}e^{-\phi}Y^{-1/2}(R + \bar{R}), \\
s &= -\frac{\sqrt{2}i}{4}e^{-\phi}Y^{1/2}(R - \bar{R}).
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Man findet schließlich

$$\begin{aligned}
de &= i\sqrt{\frac{2}{3}}e \wedge \bar{e}, \\
dS &= -\sqrt{2}(S \wedge \bar{S} + Q \wedge \bar{Q} + R \wedge \bar{R}), \\
dQ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(S + \bar{S}) \wedge Q - i\sqrt{\frac{3}{2}}(e - \bar{e}) \wedge \bar{Q} + \frac{1}{\sqrt{2}}(e + \bar{e}) \wedge (R - \bar{R}), \\
dR &= \frac{1}{\sqrt{2}}(S + \bar{S}) \wedge R - i\frac{1}{\sqrt{6}}(e - \bar{e}) \wedge \bar{R} - \frac{1}{\sqrt{2}}(e + \bar{e}) \wedge (Q + \bar{Q}) \\
&\quad - i\sqrt{\frac{2}{3}}(e + \bar{e}) \wedge (R + \bar{R}).
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Die Spinkonnexion wird mittels (A.101) bestimmt (die Rechnung wurde mit

erfüllen.

Obwohl (4.54) nicht von der Form (4.55) ist, kann Ω ihre Werte in $\mathfrak{sp}(1)\mathfrak{sp}(2)$ annehmen. Allerdings ist die $\mathfrak{sp}(1)\mathfrak{sp}(2)$ in der Ω ihre Werte annimmt, nicht gemäß (4.55) in die Algebra der Tangentialraumgruppe eingebettet. Insbesondere ist daher nicht klar, welcher Anteil von (4.54) der $\mathfrak{sp}(1)$ -Konnexion entspricht. Diesen muß man aber kennen, um die Bedingung (A.84) überprüfen zu können.

Um überprüfen zu können, ob (4.45) quaternionisch ist, muß man also eine Rotation in der Tangentialraumgruppe finden, die (4.54) in die Form (4.55) überführt. Angesichts der Tatsache, daß keine man keine Parametrisierung der Tangentialraumgruppe kennt, scheint dies aussichtslos. Für den hier betrachteten Fall ist es mir gelungen, die gesuchte Rotationsmatrix zu finden. Sie lautet

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{i}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

Man sieht leicht, daß diese Matrix (4.56) erfüllt. Das rotierte Vielbein lautet

$$\begin{aligned} (V_r)^T &= (T^{-1}V)^T \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}Q - \frac{i}{2}R, ie, -iS, -\frac{i}{2}Q + \frac{\sqrt{3}}{2}R, i\bar{e}, \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{Q} + \frac{i}{2}\bar{R}, -\frac{i}{2}\bar{Q} - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{R}, i\bar{S} \right). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Für die rotierte Konnexion (4.54) findet man ($\Omega_r = T^{-1}\Omega T$) (4.59). Dies ist augenscheinlich von der gesuchten Form (4.55).

Bestimmt hieraus die $\mathfrak{sp}(1)$ Konnexion und ihre Krümmung (A.83), findet man Übereinstimmung mit den aus dem Vielbein (4.58) konstruierten Hyperkählerformen (A.67). Nach der Rotation ist es also möglich, zu beweisen, daß (4.45) quaternionisch ist.

Am Ende von Abschnitt 4.4 wurde gezeigt, daß die möglichen Quantenkorrekturen zu (4.45) durch zehn Funktionen parametrisiert werden. Um diese weiter einzuschränken, muß man untersuchen, in welchen Fällen die durch sie beschriebene Metrik quaternionisch ist. Der erste Schritt bei dieser Untersuchung besteht aus der Konstruktion eines Vielbeins und der Berechnung der zugehörigen Spinkonnexion. Diese wird i.A. nicht die Form (4.55) haben. Um überprüfen zu können, ob die gegebene Metrik quaternionisch ist, muß folglich eine Rotation gefunden werden, die die Spinkonnexion in diese Form überführt. Dies war aber schon im hier vorgestellten einfachsten Fall nur mit Glück möglich. Im allgemeinen Fall, in dem Terme der Metrik eingeschränkt werden müssen, damit eine solche Rotation überhaupt existiert, scheint dieses Vorgehen aussichtslos.

$$\Omega_r = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(S - \bar{S}) - \frac{i}{\sqrt{6}}(e + \bar{e}) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{Q} + \sqrt{\frac{3}{2}}i\bar{R} & \sqrt{\frac{3}{2}}iQ + \frac{1}{\sqrt{2}}R & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}Q + \sqrt{\frac{3}{2}}iR & \sqrt{\frac{2}{3}}i(e + \bar{e}) & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}iQ + \frac{1}{\sqrt{2}}R \\ \sqrt{\frac{3}{2}}i\bar{Q} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{R} & 0 & \sqrt{2}(S - \bar{S}) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{Q} + \sqrt{\frac{3}{2}}i\bar{R} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}}i\bar{Q} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{R} & \frac{1}{\sqrt{2}}Q + \sqrt{\frac{3}{2}}iR & \frac{1}{\sqrt{2}}(S - \bar{S}) + \sqrt{\frac{3}{2}}i(e + \bar{e}) \\ -\sqrt{2}Q + \sqrt{\frac{2}{3}}iR & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}Q + \sqrt{\frac{2}{3}}iR & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}\bar{Q} + \sqrt{\frac{2}{3}}i\bar{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\bar{Q} + \sqrt{\frac{2}{3}}i\bar{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}}i(e + \bar{e}) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{Q} + \sqrt{\frac{3}{2}}i\bar{R} & -\sqrt{\frac{3}{2}}i\bar{Q} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{R} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}Q + \sqrt{\frac{3}{2}}iR & -\frac{1}{\sqrt{2}}(S - \bar{S}) + \frac{i}{\sqrt{6}}(e + \bar{e}) & 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}}i\bar{Q} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{R} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}}i\bar{Q} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{R} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}(S - \bar{S}) - \sqrt{\frac{3}{2}}i(e + \bar{e}) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{Q} + \sqrt{\frac{3}{2}}i\bar{R} \\ 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}}i\bar{Q} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{R} & \frac{1}{\sqrt{2}}Q + \sqrt{\frac{3}{2}}iR & -\sqrt{2}(S - \bar{S}) \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

4.6 Probleme der geometrischen Untersuchung II

Die Wirkung (4.41) analog zu den Abschnitten 2.5 und 2.6 daraufhin zu untersuchen, ob sie ein quaternionisches σ -Modell beschreibt, ist nach dem im vorigen Abschnitt Gesagten nicht durchführbar. Auch die notwendige Bedingung, daß quaternionische Mannigfaltigkeiten Einstein sein müssen, konnte nicht überprüft werden, da es nicht möglich war, den Ricci-Tensor zu berechnen. Es gibt eine weitere notwendige Bedingung, die quaternionische Mannigfaltigkeiten erfüllen müssen: Ihre fundamentale Vierform muß geschlossen sein (A.48). In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß auch der Versuch, diese Bedingung zu überprüfen, nicht dazu führt, daß man den Ansatz (4.41) einschränken kann. Die (A.67, A.73, A.47) aus den Vielbeinen konstruierten Fundamentalformen sind im allgemeinen nicht geschlossen⁷.

Um dies zu illustrieren, wird nun aus dem Vielbein (4.5) die zugehörige Vierform berechnet.

Dazu konstruiert man zuerst die Hyperkählerformen (A.67)

$$J^1_1 = 2\rho_{ab}V^{1a} \wedge V^{2b}$$

⁷Die Definition quaternionischer Mannigfaltigkeiten sagt nur, daß man auf ihnen komplexe Strukturen definieren kann, so daß diese Form geschlossen ist. Daß man außerdem komplexe Strukturen definieren kann, für die dies nicht gilt, ist kein Widerspruch.

$$\begin{aligned}
&= 2(Q, e, -\bar{S}, -\bar{R}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} S \\ R \\ \bar{Q} \\ \beta \end{pmatrix} \\
&= -2(S \wedge \bar{S} + R \wedge \bar{R} - Q \wedge \bar{Q} - e \wedge \bar{e}), \\
J^1_2 &= -2\rho_{ab}V^{1a} \wedge V^{1b} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} Q \\ e \\ -\bar{S} \\ -\bar{R} \end{pmatrix} \\
&= -2(Q, e, -\bar{S}, -\bar{R}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} Q \\ e \\ -\bar{S} \\ -\bar{R} \end{pmatrix} \\
&= 4(Q \wedge \bar{S} + e \wedge \bar{R}), \\
J^2_1 &= 2\rho_{ab}V^{2a} \wedge V^{2b} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} S \\ R \\ \bar{Q} \\ \beta \end{pmatrix} \\
&= 2(S, R, \bar{Q}, \beta) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} S \\ R \\ \bar{Q} \\ \beta \end{pmatrix} \\
&= 4(S \wedge \bar{Q} + R \wedge \bar{e}), \\
J^2_2 &= -2\rho_{ab}V^{2a} \wedge V^{1b} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} Q \\ e \\ -\bar{S} \\ -\bar{R} \end{pmatrix} \\
&= -2(S, R, \bar{Q}, \beta) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} Q \\ e \\ -\bar{S} \\ -\bar{R} \end{pmatrix} \\
&= 2(S \wedge \bar{S} + R \wedge \bar{R} - Q \wedge \bar{Q} - e \wedge \bar{e}). \tag{4.60}
\end{aligned}$$

bzw. (A.73)

$$\begin{aligned}
J^1 &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iJ^1_1 & iJ^1_2 \\ iJ^2_1 & iJ^2_2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} (iJ^1_2 + iJ^2_1) \\
&= 2i(Q \wedge \bar{S} + S \wedge \bar{Q} + e \wedge \bar{R} + R \wedge \bar{e}), \\
J^2 &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iJ^1_1 & iJ^1_2 \\ iJ^2_1 & iJ^2_2 \end{pmatrix} \right) = \frac{i}{2} (iJ^1_2 - iJ^2_1) \\
&= -2(Q \wedge \bar{S} - S \wedge \bar{Q} + e \wedge \bar{R} - R \wedge \bar{e}), \\
J^3 &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iJ^1_1 & iJ^1_2 \\ iJ^2_1 & iJ^2_2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} (iJ^1_1 - iJ^2_2) \\
&= -2i(S \wedge \bar{S} + R \wedge \bar{R} - Q \wedge \bar{Q} - e \wedge \bar{e}). \tag{4.61}
\end{aligned}$$

Die zugehörige Vierform ist gegeben durch (A.47)

$$\begin{aligned}
\Lambda &= J^1 \wedge J^1 + J^2 \wedge J^2 + J^3 \wedge J^3 \\
&= 24R \wedge \bar{R} \wedge e \wedge \bar{e} + 24Q \wedge \bar{Q} \wedge S \wedge \bar{S} - 16R \wedge \bar{S} \wedge Q \wedge \bar{e} - 16\bar{R} \wedge S \wedge \bar{Q} \wedge e \\
&\quad + 8R \wedge \bar{R} \wedge Q \wedge \bar{Q} - 8R \wedge \bar{R} \wedge S \wedge \bar{S} + 8S \wedge \bar{S} \wedge e \wedge \bar{e} - 8Q \wedge \bar{Q} \wedge e \wedge \bar{e}. \tag{4.62}
\end{aligned}$$

Mit (4.53) kann man nun ihre äußere Ableitung bestimmen. Man findet

$$\begin{aligned}
d\Lambda = & 16\sqrt{2} \left((e - \bar{e}) \wedge S \wedge \bar{S} \wedge (R \wedge Q + \bar{R} \wedge \bar{Q}) \right. \\
& \left. + (e + \bar{e}) \wedge S \wedge \bar{S} \wedge (R \wedge \bar{Q} - \bar{R} \wedge Q) \right) \\
& + 8\sqrt{2} e \wedge \bar{e} \wedge (S + \bar{S}) \wedge (R \wedge \bar{R} - Q \wedge \bar{Q}) \\
& + 8\sqrt{6} i e \wedge \bar{e} \wedge (S + \bar{S}) \wedge (Q \wedge \bar{R} + \bar{Q} \wedge R) \\
\neq & 0.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Die entsprechende Rechnung mit den Vielbeinen (4.58) nach der Rotation (4.57) zeigt, daß die aus ihnen konstruierte Vierform wie zu erwarten geschlossen ist.

Kapitel 5

Zusammenfassung

Die Niederenergielimites von vierdimensionalen Stringtheorien mit $N = 2$ Supersymmetrie bilden ein vielversprechendes Szenario, um sowohl Quanten- als auch Weltflächenkorrekturen der Stringtheorie zu untersuchen. Man erhält diese Theorien durch Kompaktifizierung der Typ IIA/B Stringtheorie auf Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten oder durch die Kompaktifizierung des heterotischen Strings auf $T^2 \times K3$. Dabei ist die Kompaktifizierung der IIA Theorie auf einer Calabi-Yau Mannigfaltigkeit CY_3 äquivalent zur Kompaktifizierung der IIB Theorie auf der Mirror-Calabi-Yau \widetilde{CY}_3 . Diese Äquivalenz gilt Ordnung für Ordnung in der Störungstheorie. Es wird vermutet, daß die heterotische Theorie und die Typ II Theorie verschiedene perturbative Realisierungen derselben zugrundeliegenden Theorie sind. Diese Dualität kann nicht störungstheoretisch sein.

Außer dem Gravitationsmultiplett gruppieren sich die Felder der Niederenergietheorien in Vektor- und Hypermultipletts der $N = 2$ Supergravitation. Im Vektormultiplettsektor konnten die entsprechenden Wirkungen einschließlich aller Quanten- und Weltflächenkorrekturen exakt bestimmt werden, ebenso ist es in diesem Sektor gelungen zu zeigen, daß die Wirkungen der als dual zueinander vermuteten Theorien übereinstimmen.

Die Untersuchungen im Hypermultiplettsektor hingegen stehen noch an ihrem Anfang. Es konnte bisher für keine der Theorien die exakte Niederenergiwirkung bestimmt werden. Die vorliegende Arbeit ist der Untersuchung der perturbativen Quantenkorrekturen des Hypermultiplettsektors der IIA Theorie gewidmet. Die dabei verfolgte Strategie ist, keine expliziten Stringrechnungen auszuführen, sondern die Korrekturen aus bekannten Ergebnissen und den Symmetrien der Stringstörungstheorie zu erschließen.

Kompaktifiziert man den IIA String auf einer Calabi-Yau Mannigfaltigkeit mit $h^{(1,2)} = 0$, so enthält das Spektrum der Niederenergietheorie nur ein Hypermultiplett, das universelle. In diesem Fall war es Strominger [41] gelungen, die Ein-Schleifen-Korrektur zur Wirkung zu bestimmen, er konnte außerdem eine scheinbar zu allen Ordnungen korrigierte Wirkung angeben, die mit allen Symmetrien der Stringstörungstheorie kompatibel ist. Mir ist es gelungen zu beweisen, daß diese Wirkung durch die geforderten Symmetrien eindeutig festgelegt ist. Durch die Dualisierung dieser Wirkung ins Tensormultiplettbild konnte ich zei-

gen, daß sich die scheinbar zu allen Ordnungen auftretenden Quantenkorrekturen zur supersymmetrischen Erweiterung einer Ein-Schleifen-Korrektur des Einstein-Hilbert-Termes zusammenfassen. Damit habe ich ein Nichtrenormierungstheorem für das universelle Tensormultiplett bewiesen: Es erhält keine störungstheoretischen Quantenkorrekturen nach der ersten Ordnung.

Weiter ist es mir gelungen, die klassische Wirkung des Hypermultiplettsektors der IIA Theorie, kompaktifiziert auf einer Calabi-Yau mit beliebigem $h^{(1,2)}$, auf die des entsprechenden Sektors der IIB Theorie, kompaktifiziert auf der Mirror-Calabi-Yau, abzubilden und so eine explizite Realisierung der Mirrorsymmetrie zu geben. Diese Abbildung war vorher nur in einem Spezialfall gefunden worden [43]. Die Wirkung des Hypermultiplettsektors der IIB Theorie kann nur im Limes großen Volumens (von \widetilde{CY}_3) durch die Kompaktifizierung erhalten werden. Mittels der Abbildung auf die IIA Theorie, deren Verhalten beim Verlassen des entsprechenden Limes bekannt ist, kann auch die IIB Theorie außerhalb dieses Limes untersucht werden. Bei dieser Untersuchung stellt man fest, daß die im Limes großen Volumens vorhandene $SL(2, \mathbb{Z})$ Symmetrie der IIB Theorie durch Weltflächenkorrekturen gebrochen wird.

Im Fall der IIA Theorie mit einer beliebigen Anzahl von Hypermultipletts konnte ich (im Limes großer komplexer Struktur) die allgemeinste Wirkung angeben, die mit allen Symmetrien der Störungstheorie verträglich, aber noch nicht supersymmetrisch ist. Es bliebe zu untersuchen, wann das durch diese Wirkung beschriebene σ -Modell eine quaternionische Mannigfaltigkeit beschreibt. In den Abschnitten 4.5 und 4.6 habe ich dargestellt, warum diese Untersuchung soviel schwieriger ist, als im Fall des universellen Hypermultipletts. Tatsächlich scheint das weitere Verfolgen dieses Ansatzes zur Bestimmung der Quantenkorrekturen aussichtslos, solange nicht weitere Bedingungen, z.B. durch neue Stringrechnungen, an die Wirkung gestellt werden können.

In einem Anhang habe ich schließlich die benötigten Konzepte und Resultate der Geometrie zusammengestellt.

Anhang A

Geometrie

A.1 Einleitung

Der Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung des Niederenergie-limites von vierdimensionalen Typ II Stringtheorien, die $N = 2$ supersymmetrisch sind. Dabei wurde an verschiedenen Stellen von geometrischen Konzepten Gebrauch gemacht.

So ist die Zielraummannigfaltigkeit des σ -Modells der Skalare in diesen Theorien durch die Supersymmetrie eingeschränkt, das Produkt einer speziellen Kähler- und einer quaternionischen Mannigfaltigkeit zu sein (1.15). Die Tatsache, daß die Kopplungen der Skalare der Hypermultipletts durch die quaternionische Geometrie bestimmt sind, erlaubte es mir in Abschnitt 2.6 die vollständige störungstheoretische Wirkung des universellen Hypermultipletts abzuleiten.

Die klassische Wirkung des Hypermultiplettsektors wurde auf zwei Arten abgeleitet. In Abschnitt 3.2 durch die c-map, wobei die spezielle Kählergeometrie des Hypermultiplettsektors ausgenutzt wurde, in den Abschnitten 1.4 und 4.2 durch Kompaktifizierung auf einer Calabi-Yau Mannigfaltigkeit.

In diesem Anhang werden die benutzten geometrischen Konzepte eingeführt. Vorausgesetzt wird dabei die Kenntnis reeller (Riemannscher) Differentialgeometrie; eine Einführung findet man in z.B. [58–60]. Aufbauend hierauf werden die Grundbegriffe komplexer und quaternionischer Geometrie eingeführt.

Reelle Mannigfaltigkeiten sind Räume, die lokal diffeomorph¹ zum \mathbb{R}^n sind. Dies bedeutet insbesondere, daß der Tangentialraum an einem beliebigen Punkt der Mannigfaltigkeit isomorph zu \mathbb{R}^n ist. Die auf den Mannigfaltigkeiten zu konstruierenden komplexen bzw. quaternionischen Strukturen müssen entsprechende Strukturen auf den Tangentialräumen induzieren. Diese werden im zuerst untersucht, bevor gezeigt wird, unter welchen Bedingungen sie sich global auf der Mannigfaltigkeit realisieren lassen.

Die hier gewählte Darstellung der komplexen Geometrie orientiert sich an der von [58]. Insbesondere finden sich dort zahlreiche Beispiele zu den jeweiligen Konstruktionen.

¹Alle hier betrachteten Mannigfaltigkeiten sind analytisch.

A.2 Komplexe Strukturen auf reellen Vektorräumen

Da die in dieser Arbeit betrachteten Mannigfaltigkeiten endlichdimensional sind, werden auch nur endlichdimensionale Vektorräume betrachtet.

Der komplexe Vektorraum \mathbb{C}^n ist isomorph zum reellen Vektorraum \mathbb{R}^{2n} . Dem Endomorphismus² des \mathbb{C}^n , der durch die Multiplikation mit i gegeben ist, muß also ein Endomorphismus des \mathbb{R}^{2n} entsprechen. Ein $z \in \mathbb{C}^n$ hat die Komponenten (z_1, \dots, z_n) . In ihre Real- und Imaginärteile zerlegt ($z^k = x^k + iy^k$), definieren sie ein Element des \mathbb{R}^{2n}

$$(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^{2n}) = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n). \quad (\text{A.1})$$

Der gesuchte Endomorphismus ist bzgl. dieser Basis durch folgenden Tensor gegeben

$$(J_0) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Allgemeiner definiert man

Definition A.2.1. Eine *komplexe Struktur* eines reellen Vektorraumes V ist ein Endomorphismus J , der $J \circ J = -\mathbf{1}$ erfüllt.

In einer Basis (e_1, \dots, e_{2n}) von V hat J die Komponenten J^k_l . Die Bedingung (A.2.1) lautet dann

$$J^k_j J^j_l = -\delta_l^k. \quad (\text{A.3})$$

Einem reellen Vektorraum V mit komplexer Struktur J kann man die Struktur eines komplexen Vektorraumes geben, indem man die Skalarmultiplikation mit i durch

$$i v^k := J^k_l v^l \quad v = v^k e_k \in V \quad (\text{A.4})$$

definiert.

Man kann weiter zeigen, daß es in V Elemente $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$ gibt, so daß $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n, J(\hat{e}_1), \dots, J(\hat{e}_n))$ eine Basis von V bilden. Hieraus sieht man, daß nur reelle Vektorräume gerader Dimension eine komplexe Struktur besitzen können.

Die Wahl einer komplexen Struktur auf V ist nicht eindeutig. Die inäquivalenten komplexen Strukturen auf V bilden gerade den Raum $GL(2n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{C})$ [58].

Ein weiterer komplexer Vektorraum, den man V zuordnen kann, ist seine Komplexifizierung

$$V^c := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}. \quad (\text{A.5})$$

²Ein Endomorphismus ist eine lineare Abbildung eines Vektorraumes auf sich selbst.

Hierbei bedeutet $\otimes_{\mathbb{R}}$, daß das Tensorprodukt der reellen Vektorräume V und \mathbb{C} gebildet wird. Die Dimension von V^c ist das Doppelte der Dimension von V . Man kann die Komplexifizierung von Vektorräumen ungerader Dimension bilden, hier soll aber weiter davon ausgegangen werden, daß V $2n$ -dimensional ist. V^c besteht aus (formalen) Linearkombinationen von Elementen von V mit komplexen Koeffizienten, insbesondere sind e_k und $iJ(e_k)$ linear unabhängig³. Durch Linearität kann J zu einem Endomorphismus von V^c fortgesetzt werden ($J(iv) := iJ(v)$, $\forall v \in V$). Auf dem komplexen Vektorraum V^c ist J diagonalisierbar; die Eigenwerte von J sind $\pm i$. V^c zerfällt in die zugehörigen Eigenräume $V^c = V^{1,0} + V^{0,1}$:

$$V^{1,0} := \{J(v) = iv \mid \forall v \in V^c\}, \quad V^{0,1} := \{J(v) = -iv \mid \forall v \in V^c\}. \quad (\text{A.6})$$

Die in den folgenden Abschnitten betrachteten Mannigfaltigkeiten sind ausnahmslos Riemannsch, d.h. sie besitzen eine Metrik. Diese induziert in den Tangentialräumen Skalarprodukte, deren Eigenschaften als nächstes besprochen werden sollen.

Definition A.2.2. Ein *hermitesches Skalarprodukt* h auf einem reellen Vektorraum V mit komplexer Struktur J ist ein Skalarprodukt, für das gilt:

$$h(J(v), J(w)) = h(v, w), \quad \forall v, w \in V. \quad (\text{A.7})$$

Sei nun

$$(e_1, \dots, e_{2n}) \quad (\text{A.8})$$

eine Basis von V und h_{kl} die Komponenten von h bzgl. dieser Basis. Dann lautet die Bedingung (A.7)

$$h_{kl} J^k_m J^l_n = h_{mn} \implies -h_{kl} J^k_m = h_{mn} J^m_l. \quad (\text{A.9})$$

Auch h kann linear auf V^c fortgesetzt werden. Man findet, daß die Unterräume $V^{1,0}$ und $V^{0,1}$ zueinander orthogonal sind [58].

$$h(v, \bar{w}) = 0, \quad \forall v \in V^{1,0}, \bar{w} \in V^{0,1}. \quad (\text{A.10})$$

A.3 Fast komplexe und komplexe Mannigfaltigkeiten

Eine *komplexe Mannigfaltigkeit* \mathcal{M} ist lokal homöomorph zum \mathbb{C}^n , wobei die Übergangsfunktionen zwischen verschiedenen Kartengebieten holomorph sein müssen.

Sei ein Punkt p aus einer solchen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} gegeben. Dieser kann als der Ursprung eines Systems lokaler Koordinaten (z^1, \dots, z^n) gewählt werden. Mit $z^k = x^k + iy^k = \hat{x}^k + i\hat{x}^{k+n}$ kann

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \hat{x}^{2n}} \right) \quad (\text{A.11})$$

³(A.4) gilt nicht, da V als reeller Vektorraum betrachtet wird.

als reelle Basis des Tangentialraumes ($T_p(\mathcal{M})$) am Punkt p gewählt werden. Dann definiert

$$J_p\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial}{\partial y_k}, \quad J_p\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k \in 1, \dots, n \quad (\text{A.12})$$

eine komplexe Struktur auf $T_p(\mathcal{M})$. Aus der Tatsache, daß die Übergangsfunktionen holomorph sind, folgt, daß auf \mathcal{M} ein Tensorfeld J (vom Typ $(1, 1)$) existiert, das am Punkt p wie (A.12) wirkt [58]. Dies führt zu folgender Definition:

Definition A.3.1. Eine *fast komplexe Struktur* auf einer reellen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist ein Tensorfeld J^k_j , welches in jedem System lokaler Koordinaten (\hat{x}^i) die Gleichung $J^k_j J^j_l = -\delta_l^k$ erfüllt.

Eine reelle Mannigfaltigkeit mit fast komplexer Struktur heißt *fast komplexe Mannigfaltigkeit*.

Insbesondere kann eine Mannigfaltigkeit nur dann fast komplex sein, wenn ihre Dimension gerade ist. Auf jeder komplexen Mannigfaltigkeit existiert eine fast komplexe Struktur. Umgekehrt ist aber keineswegs jede fast komplexe Mannigfaltigkeit auch eine komplexe. Im folgenden wird untersucht, wann dies der Fall ist. Wie in (A.12) gesehen, induzieren komplexe Koordinaten in ihren jeweiligen Koordinatengebieten konstante komplexe Strukturen, die lokal durch die Matrix J_0 dargestellt werden. Eine fast komplexe Mannigfaltigkeit ist genau dann eine komplexe, wenn es zu jedem Punkt der Mannigfaltigkeit eine Umgebung gibt, in der man die gegebene fast komplexe Struktur durch eine Koordinatentransformation in diese Standardform bringen kann.

Ein verwandtes Problem tritt in der allgemeinen Relativitätstheorie auf. Dort lautet die Frage, wann man die Metrik in der Umgebung eines Punktes durch eine Koordinatentransformation auf die Form der Minkowskimetrik bringen kann. Es ist dies genau dann möglich, wenn in der fraglichen Umgebung der Krümmungstensor verschwindet.

Diesem analog definiert man den *Nijenhuis-Tensor* (es wird wieder das lokale Koordinatensystem der \hat{x}^i gewählt):

$$N^i_{jk} = \left(J_j^l \partial_l J_k^i - J_k^l \partial_l J_j^i - J_l^i \partial_j J_k^l + J_l^i \partial_k J_j^l \right). \quad (\text{A.13})$$

Daß dies tatsächlich einen Tensor definiert, wird in [58] bewiesen. Man sieht sofort, daß N in einem Koordinatensystem verschwindet, in dem J konstant ist. Daß das Verschwinden von N die Existenz eines solchen Koordinatensystemes garantiert, ist wesentlich schwieriger zu zeigen [61].

A.4 Kählermannigfaltigkeiten

Im vorangegangenen Abschnitt wurden komplexe Strukturen auf reellen Mannigfaltigkeiten beschrieben. Die im Rahmen dieser Arbeit behandelten Mannigfaltigkeiten sind zudem noch mit einer Metrik versehen. In diesem Abschnitt wird untersucht, unter welchen Bedingungen diese beiden Strukturen kompatibel sind.

Eine Metrik auf einer Mannigfaltigkeit induziert auf den Tangentialräumen ein Skalarprodukt. Da die Tangentialräume fast komplexer Mannigfaltigkeiten mit einer komplexen Struktur versehen sind, sind gerade solche Metriken von Interesse, die ein hermitesches Skalarprodukt induzieren. Es sind dies die folgenden:

Definition A.4.1. Eine Metrik h auf einer (fast) komplexen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} mit (fast) komplexer Struktur J ist eine *hermitesche Metrik*, wenn für je zwei Vektorfelder X und Y auf \mathcal{M} gilt:

$$h(J(X), J(Y)) = h(X, Y). \quad (\text{A.14})$$

Eine (fast) komplexe Mannigfaltigkeit mit einer hermiteschen Metrik heißt *(fast) hermitesche Mannigfaltigkeit*.

Diese Gleichung hat die Form wie (A.7). Hier aber handelt es sich um eine Gleichung zwischen Tensorfeldern. Eine (fast) hermitesche Metrik existiert auf jeder (fast) komplexen Riemannschen Mannigfaltigkeit. Ist $\hat{h}(X, Y)$ die gegebene Metrik, so wird (A.14) von $h(X, Y) := \hat{h}(X, Y) + \hat{h}(J(X), J(Y))$ erfüllt.

Sei nun $(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^{2n})$ ein lokales Koordinatensystem um einen Punkt p der Mannigfaltigkeit. Dann bedeutet nach (A.9) die Bedingung (A.14) gerade, daß

$$J_{kl} = -J_{lk} \quad (\text{A.15})$$

antisymmetrisch ist. Die J_{mn} sind also Komponenten einer Zweiform.

Definition A.4.2. Die *Fundamentalform* Φ auf einer (fast) hermiteschen Mannigfaltigkeit mit (fast) hermitescher Metrik h und (fast) komplexer Struktur J ist gegeben durch

$$\Phi := J_{kl} d\hat{x}^k \wedge d\hat{x}^l. \quad (\text{A.16})$$

Eine Basis des komplexifizierten (A.5) Tangentialraumes ist

$$\frac{\partial}{\partial z^k} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}^k} - i \frac{\partial}{\partial \hat{x}^{k+n}} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}^k} + i \frac{\partial}{\partial \hat{x}^{k+n}} \right). \quad (\text{A.17})$$

Die dazu duale Basis des komplexifizierten Kotangentialraumes erfüllt

$$dz^k \left(\frac{\partial}{\partial z^l} \right) = \delta_l^k, \quad dz^k \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^l} \right) = 0, \quad d\bar{z}^k \left(\frac{\partial}{\partial z^l} \right) = 0, \quad d\bar{z}^k \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^l} \right) = \delta_l^{\bar{k}}. \quad (\text{A.18})$$

Sie lautet

$$dz^k = d\hat{x}^k + i d\hat{x}^{k+n}, \quad d\bar{z}^k = d\hat{x}^k - i d\hat{x}^{k+n}. \quad (\text{A.19})$$

Die auf den komplexifizierten Kotangentialraum fortgesetzte Metrik h lautet

$$h = h_{kl} dz^k \otimes dz^l + h_{k\bar{l}} dz^k \otimes d\bar{z}^{\bar{l}} + h_{\bar{k}l} d\bar{z}^{\bar{k}} \otimes dz^l + h_{\bar{k}\bar{l}} d\bar{z}^{\bar{k}} \otimes d\bar{z}^{\bar{l}}. \quad (\text{A.20})$$

Aus Gleichung (A.10) folgt, daß die Komponenten h_{kl} und $h_{\bar{k}\bar{l}}$ für eine hermitesche Metrik (A.14) verschwinden müssen. Sie ist also von der Form

$$h = h_{k\bar{l}} dz^k \otimes d\bar{z}^{\bar{l}} + h_{\bar{k}l} d\bar{z}^{\bar{k}} \otimes dz^l. \quad (\text{A.21})$$

Außerdem kann man zeigen, daß für die auf den komplexifizierten Tangentialraum fortgesetzte Fundamentalform gilt [58]

$$\Phi = ih_{k\bar{l}} dz^k \wedge d\bar{z}^{\bar{l}}. \quad (\text{A.22})$$

Definition A.4.3. (Fast) hermitesche Mannigfaltigkeiten mit geschlossener Fundamentalform ($d\Phi = 0$) heißen *Kählermannigfaltigkeiten*. Die Fundamentalform nennt man in diesem Fall *Kählerform*, die Metrik *Kählermetrik*.

Man kann zeigen, daß diese Zweiform gerade dann geschlossen ist, wenn die komplexe Struktur kovariant konstant ist.

Kählermannigfaltigkeiten sind also die komplexen Mannigfaltigkeiten, in denen Riemannsche und komplexe Struktur vollständig kompatibel sind: Einerseits läßt die komplexe Struktur die Metrik invariant (A.14), andererseits ist auch erstere invariant unter dem durch die Metrik festgelegten Paralleltransport.

Die Bedingung $d\Phi = 0$ stellt eine starke Einschränkung an die Form der Metrik dar. Aus ihr folgt

$$\frac{\partial h_{k\bar{l}}}{\partial z^i} = \frac{\partial h_{i\bar{l}}}{\partial z^k}, \quad \frac{\partial h_{k\bar{l}}}{\partial \bar{z}^{\bar{i}}} = \frac{\partial h_{k\bar{i}}}{\partial \bar{z}^{\bar{l}}}. \quad (\text{A.23})$$

Diese Gleichungen werden gelöst durch

$$h_{k\bar{l}} = \frac{\partial^2 K}{\partial z^k \partial \bar{z}^{\bar{l}}}. \quad (\text{A.24})$$

Die Funktion K heißt das *Kählerpotential* der Kählermetrik $h_{k\bar{l}}$.

A.5 Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten

Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten \mathcal{M}_{CY} sind Ricci-flache Mannigfaltigkeiten, deren Holonomiegruppe in $SU(n/2)$ liegt ($n = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_{CY}$). In Abschnitt 1.4 wurde gezeigt, daß die IIA-Stringtheorie, kompaktifiziert auf einer solchen Mannigfaltigkeit, im Niederenergielimes zu einer $N = 2$ Supergravitationstheorie in vier Dimensionen führt. Die vierdimensionale Theorie ist dabei im klassischen Grenzfall durch topologische Daten der Calabi-Yau Mannigfaltigkeit bestimmt. In Abschnitt 1.4 wurde gezeigt, daß das Spektrum der vierdimensionalen Theorie durch die Hodge-Zahlen von \mathcal{M}_{CY} bestimmt ist. Die klassische Wirkung des Hypermultiplettsektors der Theorie ist über die c-map durch das Präpotential (3.11) bestimmt. Dieses Kapitel soll die notwendigen topologischen Konzepte bereitstellen. Es werden hier nur die wichtigsten Aussagen zusammengestellt; Beweise und explizite Konstruktionen findet man z.B. in [62].

Sei nun wie in (1.30) V_a ($a = 1, \dots, h^{(1,1)}$) eine Basis der $(1, 1)$ Formen. Die *Tripelschnittzahlen* der Calabi-Yau sind definiert durch

$$\kappa_{abc} := \int_{\mathcal{M}_{CY_3}} V_a \wedge V_b \wedge V_c. \quad (\text{A.32})$$

Es bleibt, die Weltflächeninstantonbeiträge zum Präpotential (3.11) zu erläutern. Ein *2-Zykel* in \mathcal{M}_{CY_3} ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand. Zwei 2-Zykel \mathcal{Z}_1 und \mathcal{Z}_2 sind *homolog*, wenn für jede Zweiform ω auf \mathcal{M}_{CY_3} gilt

$$\int_{\mathcal{Z}_1} \omega = \int_{\mathcal{Z}_2} \omega. \quad (\text{A.33})$$

Auf einer (reell) sechsdimensionalen Calabi-Yau Mannigfaltigkeit gibt es gerade $h^{(1,1)}$ paarweise nichthomologe 2-Zykel; sie seien mit \mathcal{Z}_a bezeichnet. Bildet man eine Sphäre (die klassische Weltfläche des Strings) holomorph in die Calabi-Yau Mannigfaltigkeit ab, so kann sich das Bild der Sphäre um diese Zykel winden. Die Zahl n_{d_a} gibt an, wieviele unabhängige holomorphe Abbildungen der Sphäre, die sich d_a -mal um \mathcal{Z}_a winden, existieren.

A.6 Quaternionen und quaternionische Strukturen

Ein Quaternion ist gegeben durch

$$q = q_0 \mathbb{1} + q_a i^a, \quad a = 1, 2, 3. \quad (\text{A.34})$$

Dabei sind die q_0, q_a reelle Zahlen. Die i^a erfüllen die Algebra

$$i^a i^b = -\delta^{ab} + \varepsilon^{abc} i^c. \quad (\text{A.35})$$

Die Menge der Quaternionen wird mit \mathbb{H} bezeichnet. Eine Darstellung der Algebra (A.35) gewinnt man aus den Pauli-Matrizen

$$i^1 = -i\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad i^2 = -i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i^3 = -i\sigma^3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (\text{A.36})$$

Das zu (A.34) *konjugierte* Quaternion ist definiert durch

$$\bar{q} := q_0 \mathbb{1} - q_a i^a \quad a = 1, 2, 3. \quad (\text{A.37})$$

Den *Betrag* eines Quaternionen definiert man schließlich als

$$|q|^2 := q\bar{q} = \bar{q}q = q_0 q_0 + q_a q_a. \quad (\text{A.38})$$

Es gilt $|q| = 0$ genau dann, wenn $q = 0$ gilt, so daß die Existenz dieser Betragsfunktion beweist, daß \mathbb{H} eine Divisionsalgebra ist, d.h. jedes Element ein Inverses besitzt. Dieses ist durch $\frac{\bar{q}}{|q|^2}$ gegeben.

Jedem Element

$$\begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0^1 \mathbb{1} + q_a^1 i^a \\ \vdots \\ q_0^n \mathbb{1} + q_a^n i^a \end{pmatrix} \quad (\text{A.39})$$

des \mathbb{H}^n kann ein Element des \mathbb{R}^{4n} zugeordnet werden:

$$q = (q_0^1, \dots, q_0^n, q_1^1, \dots, q_1^n, q_2^1, \dots, q_2^n, q_3^1, \dots, q_3^n). \quad (\text{A.40})$$

Die Multiplikationen mit den i^a entsprechen in dieser Basis den linearen Abbildungen, die durch folgende Matrizen gegeben sind:

$$J_0^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_n & 0 & 0 \\ \mathbb{1}_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbb{1}_n \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}, \quad J_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathbb{1}_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_n & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.41})$$

$$J_0^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathbb{1}_n \\ 0 & 0 & -\mathbb{1}_n & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_n & 0 & 0 \\ \mathbb{1}_n & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.42})$$

Analog zu Definition A.2.1 definiert man nun [63]

Definition A.6.1. Sei V ein reeller Vektorraum. Ein Tripel von komplexen Strukturen (J^1, J^2, J^3) , das die Algebra (A.35) erfüllt, nennt man eine *hyperkomplexe Struktur* auf V . Den dreidimensionalen Unterraum des Raumes der Endomorphismen von V , der von einer hyperkomplexen Struktur aufgespannt wird, nennt man eine *quaternionische Struktur*.

A.7 Quaternionische Kählermannigfaltigkeiten

Quaternionische Mannigfaltigkeiten können nicht analog zu komplexen Mannigfaltigkeiten (Abschnitt A.3) definiert werden. Der Grund ist, daß der der Holomorphie komplexer Funktionen entsprechende Begriff quaternionischer Analytizität zu rigide ist. Quaternionisch analytische Funktionen sind linear [64, 65]⁴.

Die Definition fast komplexer Mannigfaltigkeiten hingegen läßt sich auf den quaternionischen Fall verallgemeinern. Man definiert

⁴Erweiterungen dieses Begriffes der quaternionischen Analytizität sind untersucht worden [66], haben aber noch keine Anwendung zur Konstruktion quaternionischer Mannigfaltigkeiten gefunden.

Definition A.7.1. Eine *fast hyperkomplexe Struktur* auf einer reellen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist ein Tripel von Tensorfeldern J^{ak}_j , welches in jedem System lokaler Koordinaten (\hat{x}^i) die Gleichung

$$J^{ak}_j J^{bj}_l = -\delta^{ab} \delta^k_l + \varepsilon^{abc} J^{ck}_l \quad (\text{A.43})$$

erfüllt.

Eine reelle Mannigfaltigkeit mit fast hyperkomplexer Struktur heißt *fast hyperkomplexe Mannigfaltigkeit*.

Es erweist sich allerdings, daß diese Struktur zu eng ist, um einen befriedigenden Begriff einer quaternionischen Struktur auf einer Mannigfaltigkeit zu erhalten. Die nächstliegenden Verallgemeinerungen der reellen (komplexen) Räume \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n) sind die entsprechenden projektiven Räume $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ($\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$), die daher wichtige Beispiele reeller (komplexer) Mannigfaltigkeiten sind. Von einem sinnvollen Begriff einer Mannigfaltigkeit mit quaternionischer Struktur fordert man daher, daß er den quaternionischen projektiven Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{H})$ umfaßt. Der $\mathbb{P}^1(\mathbb{H})$ ist homöomorph zur S^4 . Von allen Sphären können aber nur die S^2 und die S^6 mit einer fast komplexen Struktur versehen werden [67]. Der $\mathbb{P}^1(\mathbb{H})$ ist also nicht fast hyperkomplex.

Gibt man die globale Existenz der komplexen Strukturen auf, wird man zu folgender Definition geführt:

Definition A.7.2. Eine *fast quaternionische Struktur* auf einer reellen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist gegeben durch eine Überdeckung von \mathcal{M} mit offenen Mengen U_i , so daß auf jeder dieser Mengen (Untermannigfaltigkeiten) ein Tripel von Tensorfeldern $J_i^{ak}_j$ existiert, welches (A.43) erfüllt.

Es muß folgende Verträglichkeitsbedingung erfüllt sein: Für alle $p \in U_i \cap U_j$ erzeugen J_i^a und J_j^a denselben Unterraum der Endomorphismen des Tangentialraumes.

Mannigfaltigkeiten mit fast quaternionischer Struktur heißen *fast quaternionische Mannigfaltigkeiten*.

Daß J_i^a und J_j^a denselben Vektorraum aufspannen, bedeutet, daß man sie mit einer $GL(3, \mathbb{R})$ Transformation ineinander überführen kann. Daß J_i^a und J_j^a (A.43) erfüllen müssen, bedeutet, daß diese Transformation tatsächlich in $SO(3)$ liegt.

Sowohl fast hyperkomplexe als auch fast quaternionische Mannigfaltigkeiten sind $4n$ -dimensional.

Wie im komplexen Fall bleibt nun zu untersuchen, wann diese Strukturen mit einer auf der Mannigfaltigkeit definierten Metrik h kompatibel sind.

Dazu ist als erstes zu fordern, daß die Metrik h in jedem Tangentialraum hermitesch bzgl. aller drei komplexer Strukturen ist. Es muß also für je zwei Vektorfelder (X, Y) auf M gelten

$$h(J^a(X), J^a(Y)) = h(X, Y), \quad a = 1, 2, 3, \quad \text{Keine Summe!} \quad (\text{A.44})$$

Dies hat wie in (A.15) die Konsequenz

$$J_{kl}^1 = -J_{lk}^1, \quad J_{kl}^2 = -J_{lk}^2, \quad J_{kl}^3 = -J_{lk}^3. \quad (\text{A.45})$$

Es läßt sich also ein Tripel von Zweiformen konstruieren:

$$\Phi^a = J_{kl}^a d\hat{x}^k \wedge d\hat{x}^l. \quad (\text{A.46})$$

Im Fall einer fast hyperkomplexen Mannigfaltigkeit kann man zeigen, daß die komplexen Strukturen genau dann kovariant konstant sind, wenn die Zweiformen geschlossen sind.

Definition A.7.3. Eine fast hyperkomplexe Mannigfaltigkeit mit einer Metrik h , die bzgl. aller drei komplexer Strukturen hermitesch ist, heißt *Hyperkählermannigfaltigkeit*, wenn die drei Zweiformen (A.46) geschlossen sind. Das Tripel der Zweiformen nennt man in diesem Fall die *Hyperkählerform* der Mannigfaltigkeit.

Im Fall einer fast quaternionischen Mannigfaltigkeit sind weder die Zweiformen (A.46), noch die komplexen Strukturen notwendig global definiert. Es läßt sich aber zeigen, daß die aus ihnen konstruierte Vierform

$$\Lambda := \Phi^1 \wedge \Phi^1 + \Phi^2 \wedge \Phi^2 + \Phi^3 \wedge \Phi^3 \quad (\text{A.47})$$

auf der gesamten Mannigfaltigkeit definiert ist [68].

Eine fast quaternionische Struktur wird von der metrischen Struktur respektiert, wenn der Paralleltransport die von den J^a aufgespannten Unterräume der Endomorphismen der Tangentialräume ineinander überführt. Nach dem nach Definition A.7.2 Gesagten bedeutet dies, daß der Paralleltransport auf einer Basis J^a , die durch (A.43) normiert ist, wie eine $SO(3)$ Rotation wirkt.

Es läßt sich zeigen, daß diese Bedingung gerade dann erfüllt ist, wenn die fundamentale Vierform kovariant konstant ist [68]. Hieraus folgt, daß sie auch geschlossen ist:

$$\mathcal{D}_i \Lambda_{jklm} = 0 \quad \implies \quad \mathcal{D}_{[i} \Lambda_{jklm]} = \partial_{[i} \Lambda_{jklm]} = 0. \quad (\text{A.48})$$

Definition A.7.4. Fast quaternionische Mannigfaltigkeiten, deren Metrik in jedem U_i hermitesch bzgl. einer Basis ihrer fast quaternionischen Struktur ist und deren fundamentale Vierform kovariant konstant ist, heißen *quaternionische Kählermannigfaltigkeiten*.

Diese Definition ist für vierdimensionale Mannigfaltigkeiten leer, da auf ihnen jede Vierform geschlossen ist. Die Definition vierdimensionaler quaternionischer Kählermannigfaltigkeiten wird in (A.56) nachgeholt.

Dieser Name scheint irreführend, da diese Mannigfaltigkeiten weder Kählermannigfaltigkeiten sind (da sie i.A. nicht einmal fast komplex sind), noch sie in dem Sinne quaternionisch sind, in dem komplexe Mannigfaltigkeiten komplex sind. Nach dem oben gesagten erfüllen sie aber das quaternionische Analogon der Kählerbedingung. Außerhalb dieses Anhangs wird dieser Name nicht mehr benutzt werden, sondern der in der physikalischen Literatur eingebürgerte Name *quaternionische Mannigfaltigkeiten*⁵.

⁵Die Mannigfaltigkeiten, die in der mathematischen Literatur als quaternionisch bezeichnet werden, haben im allgemeinen keine metrische Struktur [63, 64, 69].

A.8 Holonomiegruppen

Sowohl in der mathematischen als auch in der physikalischen Literatur findet man häufig folgende Definition von quaternionischen Kählermannigfaltigkeiten.

Definition A.8.1. Eine *quaternionische Kählermannigfaltigkeit* ist eine reell n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Holonomiegruppe enthalten ist in $Sp(1)Sp(n/4)$.

In diesem Abschnitt soll erklärt werden, was diese Definition bedeutet und warum sie zu der in (A.7.4) gegebenen äquivalent ist. Es sollen hier nur die relevanten Konzepte vorgestellt werden; Beweise der angeführten Behauptungen findet man in [58, 64].

Alle betrachteten Mannigfaltigkeiten \mathcal{M} sind Riemannsch (mit Metrik h) und zusammenhängend, ihr Tangentialbündel ist mit der eindeutigen metrikkompatiblen und torsionsfreien Konnexion versehen. Die (reelle) Dimension der Mannigfaltigkeiten sei n .

Die Holonomiegruppe einer Mannigfaltigkeit „mißt“, inwiefern der auf ihr definierte Paralleltransport von der Identität abweicht.

Man betrachtet dazu die Menge aller Wege, die von einem Punkt $p \in \mathcal{M}$ ausgehen und dort auch wieder enden. Entlang jedes dieser Wege kann nun jeder Vektor $X \in T_p(\mathcal{M})$ paralleltransportiert werden. Jeder dieser Wege induziert also einen Endomorphismus auf $T_p(\mathcal{M})$. Da der Paralleltransport entlang zweier nacheinander durchlaufener Wege gerade das Produkt der entsprechenden Endomorphismen induziert, der in umgekehrter Richtung durchlaufene Weg gerade den inversen, folgt, daß die induzierten Abbildungen eine Untergruppe von $O(n)$ (der Strukturgruppe von \mathcal{M}) bilden. Diese Gruppe ist unabhängig vom gewählten Basispunkt, man nennt sie die *Holonomiegruppe* $\text{Hol}(\mathcal{M}, h)$ von \mathcal{M} ⁶. Die zugehörige Algebra wird mit $\mathfrak{hol}(\mathcal{M}, h)$ bezeichnet.

Ein weiteres Maß für nichttrivialen Paralleltransport ist der Riemann-Tensor. Dieser gibt gerade an, wie ein Vektor durch den Paralleltransport entlang einer infinitesimal kleinen Schleife transformiert wird. Es liegen auch alle vom Riemann-Tensor erzeugten Transformationen in $\mathfrak{hol}(\mathcal{M}, h)$, sie müssen diese Algebra aber nicht erzeugen. Der Grund ist folgender: Während der Riemann-Tensor nur den infinitesimalen Paralleltransport um den Basispunkt p beschreibt, enthält $\mathfrak{hol}(\mathcal{M}, h)$ Information über die infinitesimalen Paralleltransporte in der Umgebung jedes Punktes der Mannigfaltigkeit (wobei die entsprechenden Abbildungen wieder nach p transportiert werden müssen). Dies wird plausibel, wenn man Abbildung A.1 betrachtet, die einen Weg zeigt, der zu einem infinitesimalen Paralleltransport um einen Punkt q gehört, aber ein Element von $\mathfrak{hol}_p(\mathcal{M}, h)$ erzeugt⁷.

⁶Betrachtet man ausschließlich zusammenziehbare Wege, so erhält man die eingeschränkte Holonomiegruppe $\text{Hol}^0(\mathcal{M}, h)$. Sie bildet die Zusammenhangskomponente der Identität von $\text{Hol}(\mathcal{M}, h)$. Da später lokale Fragen im Mittelpunkt stehen werden, für die nur die Algebra $\mathfrak{hol}(\mathcal{M}, h)$ von Interesse ist, wird hier nicht weiter zwischen diesen beiden Begriffen differenziert.

⁷Natürlich ist auch diese Algebra für alle p isomorph, die Einbettungen in die $\mathfrak{o}(n)$ unterscheiden sich.

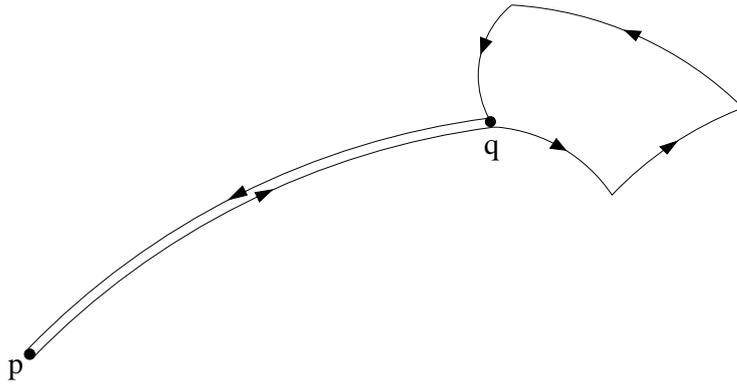


Abbildung A.1: Eine infinitesimale Schleife um q , die zu $\mathfrak{hol}_p(\mathcal{M}, h)$ beiträgt.

Es gilt: $\mathfrak{hol}_p(\mathcal{M}, h)$ wird vom Riemannstensor und allen seinen kovarianten Ableitungen im Punkt p erzeugt.

Ist die Holonomiegruppe eine echte Untergruppe der $O(n)$, so bedeutet dies, daß es Tensorfelder gibt, die unter ihr invariant, also kovariant konstant sind. Man findet folgende Zusammenhänge:

$\text{Hol}(M, g) \subseteq SO(n)$: Dies hat eine kovariant konstante n -Form zur Folge, die insbesondere global definiert sein muß. Diese Mannigfaltigkeiten sind orientierbar. Da die Holonomiegruppen der nun folgenden Mannigfaltigkeiten Untergruppen von $SO(n)$ sind, folgt hieraus schon, daß sie, die Mannigfaltigkeiten, orientierbar sein müssen.

$\text{Hol}(\mathcal{M}, h) \subseteq U(n/2)$: Die kovariant konstante Form ist gerade die fundamentale 2-Form (A.4.2). Die betreffenden Mannigfaltigkeiten sind also Kähler und insbesondere komplex.

$\text{Hol}(\mathcal{M}, h) \subseteq SU(n/2)$: Diese Mannigfaltigkeiten wurden schon in Abschnitt 1.4 eingeführt, es sind *Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten*. Sie besitzen komplexe kovariant konstante $(n/2, 0)$ - und $(0, n/2)$ -Formen. Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten sind Ricci-flach.

$\text{Hol}(\mathcal{M}, h) \subseteq Sp(n/4)$: Diese Mannigfaltigkeiten sind Hyperkähler. Man beachte, daß für $n = 4$ gilt $Sp(1) = SU(2)$. Die einzige vierdimensionale Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit, die $K3$, ist also auch Hyperkähler. Wegen $Sp(n/4) \subseteq U(n/2)$ sind diese Mannigfaltigkeiten insbesondere Kähler und damit komplex.

$\text{Hol}(\mathcal{M}, h) \subseteq Sp(1)Sp(n/4)$: Hier ist die fundamentale Vierform (A.47) erhalten. Diese Mannigfaltigkeiten sind quaternionisch Kähler. Auch durch die Betrachtung der Holonomiegruppen sieht man: Da $Sp(1)Sp(n/4) \not\subseteq U(n/2)$, sind diese Mannigfaltigkeiten i.A. nicht Kähler. Auch hier stellt man fest, daß der Fall $n = 4$ ein Sonderfall ist. Dann gilt nämlich $Sp(1)Sp(1) = SO(4)$ und jede orientierbare Mannigfaltigkeit erfüllt diese Definition.

Man kann zeigen [71], daß es für Mannigfaltigkeiten, die nicht dem Produkt zweier anderer Mannigfaltigkeiten isomorph sind, nur zwei weitere Möglichkeiten

gibt, nämlich $\text{Hol}(\mathcal{M}, h) = G_2$ oder $\text{Hol}(\mathcal{M}, h) = \text{Spin}(7)^8$.

A.9 Eigenschaften quaternionischer Kählermannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt werden Bedingungen abgeleitet, die es erlauben, zu überprüfen, ob eine gegebene Mannigfaltigkeit \mathcal{M} quaternionisch Kähler ist. Dabei folge ich den Darstellungen in [70] und [72].

Auf einer quaternionischen Kählermannigfaltigkeit existiert eine Überdeckung mit offenen Mengen U_i , in der ein Tripel von Tensorfeldern J^a existiert, die (A.43) erfüllen. Invariant unter Paralleltransport sind i.A. nicht diese Tensorfelder, sondern nur der von ihnen aufgespannte Unterraum der Endomorphismen der Tangentialräume. Eine andere Basis dieses Unterraumes, die ebenfalls (A.43) erfüllt, erhält man aus den J^a durch eine $SO(3)$ Transformation

$$J'^a = T^a{}_b J^b, \quad (T^a{}_b) \in SO(3). \quad (\text{A.49})$$

Sei nun $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ ein lokales Koordinatensystem in U_i . Die kovariante Ableitung bewirkt einen infinitesimalen Paralleltransport, sie bildet also eine Basis gemäß (A.49) auf eine infinitesimal benachbarte ab. Die von ihr erzeugte Transformation liegt also in der $\mathfrak{so}(3)^9$

$$\mathcal{D}_j J_k^{al} + \varepsilon^{abc} A_j^b J_k^{cl} = 0, \quad (\text{A.50})$$

Diese Gleichung erlaubt es, die A_m^a als $\mathfrak{so}(3)$ -wertige Konnexionen aufzufassen bzgl. derer die drei fast komplexen Strukturen kovariant konstant sind.

Man bildet nun die zweite kovariante Ableitung von (A.50):

$$\mathcal{D}_m \mathcal{D}_j J_k^{al} = -\varepsilon^{abc} ((\mathcal{D}_m A_j^b) J_k^{cl} - \varepsilon^{cde} A_m^d A_j^e J_k^{cl}). \quad (\text{A.51})$$

Antisymmetrisiert man nun diese Gleichung in m und j , so erhält man

$$R_{mji}{}^l J_k^{ai} - R_{mjki} J_k^{ai} = -\varepsilon^{abc} \tilde{F}_{mj}^b J_k^{cl}. \quad (\text{A.52})$$

Hierbei ist $R_{mnj}{}^l$ der Riemann-Tensor auf \mathcal{M} und \tilde{F}_{mn}^a der zu A_m^a gehörende Krümmungstensor

$$\tilde{F}_{kl}^a = \partial_k A_l^a - \partial_l A_k^a + \varepsilon^{abc} A_k^b A_l^c. \quad (\text{A.53})$$

In [70] wird gezeigt, daß (A.52) für $n \geq 8$ ($n = \dim \mathcal{M}$) äquivalent ist zu (R_{kl} ist der Ricci-Tensor auf \mathcal{M}).

$$\tilde{F}_{kl}^a = \frac{1}{n/4 + 2} R_{kj} J_l^{aj}. \quad (\text{A.54})$$

⁸Eine Ausnahme von diesem Theorem bilden symmetrische Räume, diese sind homogen, d.h. von der Form G/H für zwei Lie-Gruppen G, H , außerdem ist ihr Krümmungstensor kovariant konstant. Ihre Holonomiegruppe ist H .

⁹Lie-Algebren bezeichne ich durch kleine Frakturbuchstaben.

Weiter folgt [70]

$$R_{kl} = \lambda g_{kl}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.55})$$

Mannigfaltigkeiten, deren Metrik diese Bedingung erfüllt, heißen *Einstein-Mannigfaltigkeiten*. Wie gerade gezeigt wurde, ist jede quaternionische Kählermannigfaltigkeit Einstein.

Setzt man nun (A.55) in (A.54) ein, so findet man

$$\tilde{F}_{kl}^a = \frac{\lambda}{n/4 + 2} J_{kl}^a. \quad (\text{A.56})$$

Die Definition A.7.4 einer quaternionischen Kählermannigfaltigkeit im Fall $n = 4$ ist leer. In diesem Fall definiert man sie durch die Bedingung (A.56).

Je nachdem, ob λ (A.55) verschwindet oder nicht, haben die quaternionischen Kählermannigfaltigkeiten Mannigfaltigkeiten sehr verschiedene Eigenschaften.

Im Fall $\lambda = 0$ folgt (A.56), daß die Krümmung der Konnexion A_m^a verschwindet. Man kann dann eine Basis J^a finden, die kovariant konstant ist. Aus dem obenstehenden ergibt sich nur, daß dies lokal so ist. Es gilt aber global [70]. Tatsächlich läßt sich sogar zeigen, daß die Elemente dieser Basis drei komplexe (nicht nur fast komplexe!) Strukturen auf \mathcal{M} definieren, die (A.43) erfüllen. Es handelt sich also um Hyperkählermannigfaltigkeiten (Definition A.7.3).

In (1.16) wurde angegeben, daß der Ricciskalar einer quaternionischen Kählermannigfaltigkeit, die die Kopplung von Hypermultipletts an $N = 2$ Supergravitation beschreibt, durch $-8(n/4)(n/4 + 2)$ gegeben ist (jedes Hypermultiplett hat vier Skalare). Bildet man die Spur von (A.55) so findet man, daß für diese Mannigfaltigkeiten gilt

$$\lambda = -2(n/4 + 2). \quad (\text{A.57})$$

Dies in (A.56) eingesetzt liefert

$$\tilde{F}_{kl}^a = -2J_{kl}^a. \quad (\text{A.58})$$

A.10 Konstruktion fast quaternionischer Strukturen

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie man überprüft, ob eine gegebene riemannsche Mannigfaltigkeit quaternionisch Kähler ist. Nach Definition A.7.4 existieren auf einer solchen Mannigfaltigkeit lokal drei komplexe Strukturen, die die Algebra (A.43) erfüllen und bzgl. derer die Metrik hermitesch ist (A.44). In den zu untersuchenden σ -Modellen (1.14) ist nur die Metrik der Mannigfaltigkeiten gegeben. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie man die komplexen Strukturen konstruiert [44, 73].

Dies geschieht, indem man die metrische Struktur auf der Mannigfaltigkeit mit Hilfe von *Vielbeinen* beschreibt. Ein Vielbein definiert an jedem Punkt der

Mannigfaltigkeit eine Basis von orthonormalen Vektoren. Es trägt daher einen Koordinaten- und einen Tangentialraumindex. In quaternionischen Mannigfaltigkeiten ist die Holonomiegruppe auf $Sp(1)Sp(n/4)$ eingeschränkt. Es ist daher sinnvoll, im Tangentialraum ein unter dieser Gruppe invariantes Skalarprodukt zu wählen. Die $Sp(1)$ Indizes werden mit (α, β, \dots) , die $Sp(n)$ Indizes mit (A, B, \dots) bezeichnet.

Für eine $4n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist die Tangentialraummetrik gegeben durch

$$\begin{aligned} \eta &= \varepsilon \otimes \rho \implies \eta_{\alpha A, \beta B} = \varepsilon_{\alpha\beta} \rho_{AB}, \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

Die Vielbeine $V_m^{\alpha A}$ werden durch die folgende Beziehung definiert

$$h_{mn} = \varepsilon_{\alpha\beta} \rho_{AB} V_m^{\alpha A} V_n^{\beta B} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \rho_{AB} (V_m^{\alpha A} V_n^{\beta B} + V_n^{\alpha A} V_m^{\beta B}). \quad (\text{A.60})$$

Die zugehörigen Vielbeinformen lauten

$$V^{\alpha A} = V_m^{\alpha A} dx^m. \quad (\text{A.61})$$

Die inversen Vielbeine $V_{\alpha A}^m$ werden nicht durch ein neues Symbol bezeichnet, sondern durch ihre Indexstellung kenntlich gemacht. Sie erfüllen

$$h_{mn} V_{\alpha A}^m V_{\beta B}^n = V_{\alpha A}^m V_{m\beta B} = \varepsilon_{\alpha\beta} \rho_{AB}. \quad (\text{A.62})$$

Die gleiche Konvention wird auch für die Inversen von ε und ρ gewählt¹⁰:

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\gamma} = \delta_{\gamma}^{\alpha}, \quad \varepsilon^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^{AB} \rho_{BC} = \delta_C^A, \quad \rho^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.63})$$

Multiplikation von (A.60) mit $\varepsilon^{\alpha\beta}$ liefert

$$\rho_{AB} (V_m^{\alpha A} V_n^{\beta B} + V_n^{\alpha A} V_m^{\beta B}) = -\varepsilon^{\alpha\beta} h_{mn}. \quad (\text{A.64})$$

Weiterhin fordert man, daß die Vielbeine

$$V_{\alpha A} := \eta_{\alpha\beta} \rho_{AB} V^{\beta B} \stackrel{!}{=} \overline{V^{\alpha A}} \quad (\text{A.65})$$

erfüllen. Daß man eine solche Basis von Vielbeinen immer finden kann, wird in Abschnitt A.11 gezeigt. Man konstruiert nun eine (2×2) -Matrix von 2-Formen

$$J^{\alpha}_{\beta} := 2\varepsilon_{\beta\gamma} \rho_{AB} V^{\alpha A} \wedge V^{\gamma B}. \quad (\text{A.66})$$

Ihre Komponenten lauten (wobei ihr zweiter Index mittels $\varepsilon^{\alpha\beta}$ hochgezogen wurde).

$$J^{\alpha\beta}_{mn} = \rho_{AB} (V_m^{\alpha A} V_n^{\beta B} - V_n^{\alpha A} V_m^{\beta B}). \quad (\text{A.67})$$

¹⁰Dabei ist zu beachten, daß gilt $\varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\beta\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} = \varepsilon^{\beta\alpha} = -\varepsilon^{\alpha\beta} \neq \varepsilon^{\alpha\beta}$.

Aus (A.64) und (A.67) folgt¹¹

$$\rho_{AB} V_m^{\alpha A} V_n^{\beta B} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} h_{mn} + \frac{1}{2} J^{\alpha\beta}{}_{mn}. \quad (\text{A.68})$$

Die Matrix J erfüllt

$$\begin{aligned} \text{Tr}(J) &= 2\varepsilon_{\alpha\beta} \rho_{AB} V^{\alpha A} \wedge V^{\beta B} = 2\varepsilon_{\beta\alpha} \rho_{BA} V^{\alpha A} \wedge V^{\beta B} \\ &= -2\varepsilon_{\beta\alpha} \rho_{BA} V^{\beta B} \wedge V^{\alpha A} = -2\varepsilon_{\alpha\beta} \rho_{AB} V^{\alpha A} \wedge V^{\beta B} = -\text{Tr}(J) \\ &\implies \text{Tr}(J) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

und

$$\overline{J^\alpha_\beta} = 2\overline{V^{\alpha A} \wedge V_{\beta A}} = 2V_{\alpha A} \wedge V^{\beta A} = -2V^{\beta A} \wedge V_{\alpha A} = -J^\beta_\alpha. \quad (\text{A.70})$$

Womit gezeigt ist, daß iJ spurfrei und hermitesch ist und daher in σ -Matrizen entwickelt werden kann.

$$iJ^\alpha_\beta = J^a \sigma^{a\alpha}_\beta = \begin{pmatrix} J^3 & J^1 - iJ^2 \\ J^1 + iJ^2 & -J^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.71})$$

Umgekehrt gilt

$$iJ^\alpha_\beta \sigma^{b\beta}_\alpha = J^a \sigma^{a\alpha}_\beta \sigma^{b\beta}_\alpha = J^a (\delta^{ab} \delta^\alpha_\alpha + i\varepsilon^{abc} \sigma^{c\alpha}_\alpha) = 2J^b \quad (\text{A.72})$$

und folglich

$$\begin{aligned} J^a &= -\frac{1}{2} \sigma^a_{\alpha\beta} (iJ^{\alpha\beta}) = -i(\varepsilon_{\alpha\gamma} \rho_{AB} V^{\gamma B}) \wedge \sigma^{a\alpha}_\beta V^{\beta A} \\ &= -i(\eta V)^T \wedge (\sigma^a \otimes \mathbf{1}_n) V. \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

Weiterhin findet man

$$\begin{aligned} (iJ^{\alpha\beta})_m{}^n (iJ^{\gamma\delta})_{nl} &= -\rho_{AB} \rho_{CD} \left(V_m^{\alpha A} V^{\beta B n} - V^{\alpha A n} V_m^{\beta B} \right) \left(V_n^{\gamma C} V_l^{\delta D} - V_l^{\gamma C} V_n^{\delta D} \right) \\ &= -\left(\varepsilon^{\beta\gamma} \rho_{AD} V_m^{\alpha A} V_l^{\delta D} + \varepsilon^{\beta\delta} \rho_{AC} V_m^{\alpha A} V_l^{\gamma C} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{\alpha\gamma} \rho_{BD} V_m^{\beta B} V_l^{\delta D} + \varepsilon^{\alpha\delta} \rho_{BC} V_m^{\beta B} V_l^{\gamma C} \right) \\ &= (\varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\beta\delta} + \varepsilon^{\alpha\delta} \varepsilon^{\beta\gamma}) h_{ml} \\ &\quad + \frac{i}{2} \left(\varepsilon^{\alpha\gamma} (iJ^{\beta\delta})_{ml} + \varepsilon^{\alpha\delta} (iJ^{\beta\gamma})_{ml} + \varepsilon^{\beta\gamma} (iJ^{\alpha\delta})_{ml} + \varepsilon^{\beta\delta} (iJ^{\alpha\gamma})_{ml} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

wobei im letzten Schritt (A.68) benutzt wurde. Hieraus nun erhält man

$$\begin{aligned} J^a{}_m{}^n J^b{}_n{}^l &= \frac{1}{4} \sigma^a_{\alpha\beta} \sigma^b_{\gamma\delta} (iJ^{\alpha\beta})_m{}^n (iJ^{\gamma\delta})_n{}^l \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{\delta\beta} \varepsilon^{\alpha\gamma} \sigma^a_{\beta\alpha} \sigma^b_{\gamma\delta} \delta_n^l - \frac{i}{2} \sigma^{a\alpha}_\beta \sigma^{b\beta}_\gamma (iJ^\alpha_\gamma)_m{}^l \\ &= -\delta^{ab} \delta_m^l - \frac{1}{2} \varepsilon^{abc} \sigma^c_{\alpha\beta} (iJ^{\alpha\beta})_m{}^l \\ &= -\delta^{ab} \delta_m^l + \varepsilon^{abc} J^c{}_m{}^l. \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

¹¹Unter Vorwegnahme des zu Zeigenden demonstriert diese Gleichung gerade, daß die Vielbeine sowohl die Metrik, als auch die komplexe Struktur kodieren.

Die J^a sind also die drei gesuchten fast komplexen Strukturen. Nach Konstruktion (A.67) erfüllen sie (A.45); die Metrik h ist also hermitesch bzgl. jeder von ihnen.

Es bleibt zu klären, wie man zeigt, daß die J^a die fast quaternionische Struktur einer quaternionischen Kählermannigfaltigkeit bilden.

Auch dies ist im Vielbeinformalismus möglich. Wie in der allgemeinen Relativitätstheorie ist es auch hier notwendig, zur Definition kovarianter Ableitungen des Vielbeins eine Konnexion einzuführen, die auf die Tangentialraumindizes wirkt. In Analogie wird diese Konnexion Ω auch hier *Spinkonnexion* genannt. Auf einer quaternionischen Kählermannigfaltigkeit nimmt sie ihre Werte in $\mathfrak{sp}(1)\mathfrak{sp}(n)$ an.

$$\Omega = p \otimes \mathbb{1}_{2n} + \mathbb{1}_2 \otimes Q, \quad p \in \mathfrak{sp}(1), \quad Q \in \mathfrak{sp}(n). \quad (\text{A.76})$$

Man fordert nun, daß das Vielbein kovariant konstant ist (hier wird die Vielbein 1-Form betrachtet, um die Wirkung der Christoffel-Konnexion zu unterdrücken).

$$\mathcal{D}V^{\alpha A} = dV^{\alpha A} + p^\alpha{}_\beta \wedge V^{\beta A} + Q^A{}_B \wedge V^{\alpha B} = 0. \quad (\text{A.77})$$

Da die komplexen Strukturen aus den Vielbeinen konstruiert werden, sind auch diese kovariant konstant:

$$\mathcal{D}(iJ^{\alpha\beta}) = d(iJ^{\alpha\beta}) + p^\alpha{}_\gamma \wedge (iJ^{\gamma\beta}) + p^\beta{}_\gamma \wedge (iJ^{\alpha\gamma}) = 0. \quad (\text{A.78})$$

Dies multipliziert man mit $\sigma^\alpha{}_\beta$ und findet

$$\mathcal{D}J^a = dJ^a - i\varepsilon^{abc}(\sigma^\alpha{}_\beta p^{\alpha\beta}) \wedge J^c = 0. \quad (\text{A.79})$$

Definiert man nun

$$p^a := -\frac{1}{2}\sigma^\alpha{}_\beta(ip^{\alpha\beta}), \quad \implies \quad ip^{\alpha\beta} = p^a \sigma^{a\alpha}{}_\beta, \quad (\text{A.80})$$

so sieht man, daß man wegen

$$dJ^a + 2\varepsilon^{abc}p^b \wedge J^c = 0 \quad (\text{A.81})$$

den $\mathfrak{sp}(1)$ -Anteil der Spinkonnexion mit der in (A.50) definierten Konnexion $\frac{1}{2}A_m^a$ identifizieren kann.

Daraus folgt (A.53)

$$\tilde{F}^a = dA^a + \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}A_b \wedge A_c = 2(dp^a + \varepsilon^{abc}p^b \wedge p^c) \quad (\text{A.82})$$

Definiert man nun die Krümmung der p^a durch

$$F^a = (dp^a + \varepsilon^{abc}p^b \wedge p^c), \quad (\text{A.83})$$

so folgt mit (A.56) und (A.82):

$$\boxed{F^a = -J^a}. \quad (\text{A.84})$$

Diese Forderung ist das entscheidende Kriterium bei der Untersuchung der Frage, ob eine gegebene Mannigfaltigkeit quaternionisch Kähler ist oder nicht.

A.11 Bestimmung von Vielbeinen und Spinkon- nexion

In diesem Abschnitt wird nachgetragen, wie man zu einer gegebenen Metrik Vielbeine bestimmt, die (A.65) erfüllen und wie man die Spinkonnexion (A.76) berechnet.

Die Metrik kann immer auf folgende Form gebracht werden ($n = \dim \mathcal{M}$)

$$h = \sum_{i=1}^n a_i \otimes_S a_i, \quad (\text{A.85})$$

wobei die a_i eine Basis von Differentialformen sind. Sie sind i.A. nicht von der Form dx^i (vgl. (2.23)). \otimes_S bezeichnet den symmetrischen Anteil des Tensorproduktes.

$$a \otimes_S b := \frac{1}{2}(a \otimes b + b \otimes a). \quad (\text{A.86})$$

Je zwei dieser Formen werden zu einer komplexen zusammengefaßt.

$$c_r := \frac{1}{\sqrt{2}}(a_r + ia_{r+n/2}), \quad r = 1, \dots, n/2. \quad (\text{A.87})$$

Welche zwei Formen zusammengefaßt werden, ist unerheblich, wichtig ist, daß es möglich ist.

Die so erhaltenen $n/2$ Formen werden nun in zwei Gruppen zu je $n/4$ aufgeteilt. Auch diese Aufteilung ist an dieser Stelle willkürlich, welche Rolle sie spielt, wird in Abschnitt 4.5 gezeigt. Die beiden Gruppen von komplexen 1-Formen werden e^{1I} und e^{2I} genannt. Durch sie ausgedrückt, lautet die Metrik

$$h = 2 \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{I=1}^{n/4} e^{\alpha I} \overline{e^{\alpha I}}. \quad (\text{A.88})$$

Aus diesen Formen werden die Vielbeine konstruiert. Man setzt [44] (die Matrix ε ist wie die in der nächsten Formel auftretende Matrix ρ in Gl. (A.59) definiert worden).

$$V^{\alpha A} := \begin{pmatrix} e^{\alpha I} \\ \varepsilon^{\alpha\beta} \overline{e^{\beta I}} \end{pmatrix}, \quad A = 1, \dots, n/2. \quad (\text{A.89})$$

Es gilt (den vorletzten Ausdruck erhält man, da $\varepsilon^{-1} = -\varepsilon$ gilt):

$$V_{\alpha A} = \varepsilon_{\alpha\beta} \rho_{AB} V^{\beta B} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{\beta\gamma} \overline{e^{\gamma I}} \\ -\varepsilon_{\alpha\beta} e^{\beta I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{e^{\alpha I}} \\ \varepsilon^{\alpha\beta} e^{\beta I} \end{pmatrix} = \overline{V^{\alpha A}}. \quad (\text{A.90})$$

Dies ist gerade die Bedingung (A.65). Mit ihrer Hilfe findet man

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \rho_{AB} V^{\alpha A} V^{\beta B} = \overline{V^{\alpha A}} V^{\alpha A} = e^{\alpha I} \overline{e^{\alpha I}} + \varepsilon^{\alpha\beta} e^{\beta I} \varepsilon^{\alpha\gamma} \overline{e^{\gamma I}} = 2e^{\alpha I} \overline{e^{\alpha I}} = h, \quad (\text{A.91})$$

woraus man sieht, daß die $V^{\alpha A}$ tatsächlich das gesuchte Vielbein bilden.

Es bleibt, die Spinkonnexion Ω (A.76) zu berechnen. Sie ist festgelegt durch die Forderung der kovarianten Konstanz des Vielbeines (A.77)

$$\mathcal{D}V = dV + \Omega \wedge V = 0 \quad (\text{A.92})$$

und nimmt ihre Werte in $\mathfrak{sp}(1)\mathfrak{sp}(n/4)$ an (A.76) (wobei hier die Struktur der $\mathfrak{sp}(n/4)$ Matrix expliziter dargestellt wird):

$$\begin{aligned} \Omega &= p \otimes \mathbb{1}_{2n} + \mathbb{1}_2 \otimes \begin{pmatrix} q & t \\ -t^\dagger & -q^\Gamma \end{pmatrix}, \\ p^\dagger &= -p, \quad q^\dagger = -q, \quad t^\Gamma = t. \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$

Um die Spinkonnexion zu berechnen, müssen nun die Elemente des Vielbeines $V^{\alpha A}$ als $4n$ -dimensionaler Vektor V^a geschrieben werden (vgl. (2.34)). Die Gleichung (A.77) lautet dann

$$dV^a + \Omega^a_b \wedge V^b = 0. \quad (\text{A.94})$$

Nun werden die auftretenden Formen in eine Basis entwickelt. Ihre Elemente werden f^m genannt (da sie i.A. nicht von der Form dx^m sind).

$$V^a = V_m^a f^m, \quad \Omega^a_b = \Omega_m^a{}_b f^m. \quad (\text{A.95})$$

Die Koeffizienten der Entwicklung von dV^a in die f^m werden R_{mn}^a genannt.

$$dV^a = R_{mn}^a f^m \wedge f^n. \quad (\text{A.96})$$

Aus (A.94) folgt dann

$$R_{mn}^a = -(\Omega_m^a{}_b V_n^b - \Omega_n^a{}_b V_m^b). \quad (\text{A.97})$$

Nutzt man nun das Vielbein zum Umschreiben von Koordinaten- und Tangentialraumindizes ($T_m = V_m^a T_a$), so wird diese Gleichung zu

$$\Omega_{mln} - \Omega_{nlm} = -V_l^b \eta_{ba} R_{mn}^a, \quad \Omega_{mln} := V_l^a V_n^b \eta_{ac} \Omega_m^c{}_b. \quad (\text{A.98})$$

Es gilt (A.59,A.93)

$$\begin{aligned} \eta_{ac} \Omega_m^c{}_b &= \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} p^3 & p^- \\ p^+ & -p^3 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \begin{pmatrix} q & t \\ -t^\dagger & -q^\Gamma \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} p^+ & -p^3 \\ -p^3 & -p^- \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -t^\dagger & -q^\Gamma \\ -q & -t \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.99})$$

Da in jedem Summanden der letzten Zeile jeweils eine antisymmetrische mit einer symmetrischen Matrix multipliziert wird und $(A \otimes B)^\Gamma = A^\Gamma \otimes B^\Gamma$ gilt, ist $\eta_{ac} \Omega_m^c{}_b$

antisymmetrisch in $[a, b]$ und damit auch Ω_{mln} antisymmetrisch in $[n, l]$. Dann gilt aber

$$\begin{aligned}\Omega_{mnl} &= \frac{1}{2} \left((\Omega_{mnl} - \Omega_{lnm}) - (\Omega_{lmn} - \Omega_{nml}) + (\Omega_{nlm} - \Omega_{mln}) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \eta_{ab} (V_n^b R_{ml}^a + V_m^b R_{nl}^a - V_l^b R_{mn}^a).\end{aligned}\tag{A.100}$$

Dies kann wieder in Tangentialraumindizes umgeschrieben werden, womit man schließlich die gesuchte Formel für die Spinkonnexion erhält:

$$\boxed{\Omega_m^a{}_b = \frac{1}{2} \eta^{ac} V_c^n V_b^l \eta_{ef} (V_m^e R_{ln}^f + V_n^e R_{lm}^f + V_l^e R_{mn}^f)}.\tag{A.101}$$

Anhang B

Peccei-Quinn Invarianten I

In die Herleitung der Quantenkorrekturen des universellen Hypermultipletts ist in Abschnitt 2.3 die Behauptung eingegangen, daß die einzigen Funktionen in den Variablen (S, \bar{S}, C, \bar{C}) , die invariant unter den Peccei-Quinn-Symmetrien (2.21) und den Skalierungen (2.27) sind, die konstanten sind. Sie wird in diesem Abschnitt bewiesen.

Die Peccei-Quinn-Symmetrien (2.21) lauten in infinitesimaler Form:

$$\delta S = i\alpha + 2(\gamma - i\beta)C, \quad \delta C = \gamma + i\beta. \quad (\text{B.1})$$

Die Skalierungen sind gegeben durch

$$S \mapsto \lambda^2 S, \quad C \mapsto \lambda C. \quad (\text{B.2})$$

Gesucht werden Funktionen $f(S, \bar{S}, C, \bar{C})$, die unter (B.1) und (B.2) invariant sind.

Die Peccei-Quinn-Symmetrie, die durch α parametrisiert wird (B.1), wirkt nur auf den Imaginärteil von S . Es gilt also

$$f(S, \bar{S}, C, \bar{C}) = f(S + \bar{S}, C, \bar{C}). \quad (\text{B.3})$$

Um die Bedingungen durch die anderen Peccei-Quinn-Symmetrien zu erhalten, bestimmt man die Transformation von f :

$$\begin{aligned} \delta f &= \frac{\partial f}{\partial S} \delta(S + \bar{S}) + \frac{\partial f}{\partial C} \delta C + \frac{\partial f}{\partial \bar{C}} \delta \bar{C} \\ &= \frac{\partial f}{\partial S} (2(\gamma - i\beta)C + 2(\gamma + i\beta)\bar{C}) + \frac{\partial f}{\partial C} (\gamma + i\beta) + \frac{\partial f}{\partial \bar{C}} (\gamma - i\beta) \\ &= \gamma(2(C + \bar{C}) \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial C} + \frac{\partial f}{\partial \bar{C}}) + i\beta(-2(C - \bar{C}) \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial C} - \frac{\partial f}{\partial \bar{C}}) \\ &\stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Man erhält die beiden Gleichungen

$$2(C + \bar{C}) \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial C} + \frac{\partial f}{\partial \bar{C}} = 0, \quad 2(C - \bar{C}) \frac{\partial f}{\partial S} - \frac{\partial f}{\partial C} + \frac{\partial f}{\partial \bar{C}} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Diese werden nun addiert, bzw. subtrahiert und man findet

$$2C \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial C} = 0, \quad 2\bar{C} \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial \bar{C}} = 0. \quad (\text{B.6})$$

Durch Auflösen dieser Gleichungen nach $\frac{\partial f}{\partial S}$ erhält man eine Gleichung, die nur Ableitungen nach C und \bar{C} enthält. Die Forderung, daß die Funktion f invariant unter den Peccei-Quinn-Symmetrien sein soll, führt also zu den Gleichungen

$$C \frac{\partial f}{\partial C} = \bar{C} \frac{\partial f}{\partial \bar{C}}, \quad 2C \frac{\partial f}{\partial S} = -\frac{\partial f}{\partial C}. \quad (\text{B.7})$$

Skaleninvariante Funktionen sind durch Quotienten zweier Funktionen festen Skalenverhaltens gegeben. Diese wiederum sind algebraische Funktionen von Polynomen festen Skalenverhaltens. Es reicht also, letztere zu bestimmen.

Um das allgemeinste Polynom $f(S + \bar{S}, C, \bar{C})$, das unter (B.2) wie $f \mapsto \lambda^n f$ skaliert, anzugeben, muß man zwischen geradem und ungeradem n unterscheiden. Für gerades n findet man

$$f_g = \sum_{m=0}^{n/2} a_m (S + \bar{S})^m g_{n-2m}(C, \bar{C}), \quad (\text{B.8})$$

für ungerades

$$f_u = \sum_{m=0}^{n/2-1} a_m (S + \bar{S})^m g_{n-2m}(C, \bar{C}). \quad (\text{B.9})$$

Die $g_k(C, \bar{C})$ bezeichnen dabei homogene Polynome vom Grad k :

$$g_k(C, \bar{C}) = \sum_{l=0}^k b_l C^l \bar{C}^{k-l}. \quad (\text{B.10})$$

Die erste Gleichung in (B.7) schränkt die Abhängigkeit der f von C und \bar{C} ein. Die Funktionen (B.8) und (B.9) erfüllen sie genau dann, wenn alle auftretenden Funktionen $g_k(C, \bar{C})$ sie erfüllen. Man erhält die Bedingung

$$\sum_{l=0}^k l b_l C^l \bar{C}^{k-l} = \sum_{l=0}^k (k-l) b_l C^l \bar{C}^{k-l}. \quad (\text{B.11})$$

bzw.

$$l b_l = (k-l) b_l, \quad (\text{B.12})$$

Diese Gleichung hat nur die Lösungen ($k = 2m, l = m$). Da bei den in (B.9) auftretenden g_{n-2m} der Index ($n-2m$) ungerade ist, heißt dies, daß nur Polynome,

die mit geraden Potenzen von λ skalieren, Peccei-Quinn-invariant sein können. Durch (B.12) wird der Ansatz (B.8) eingeschränkt auf ($n = 2k$)

$$f = \sum_{m=0}^k a_m (S + \bar{S})^m (C\bar{C})^{(k-m)}. \quad (\text{B.13})$$

Es gilt

$$\begin{aligned} 2C \frac{\partial f}{\partial S} &= \sum_{m=0}^k (2ma_m) (S + \bar{S})^{m-1} C^{(k-m)+1} \bar{C}^{(k-m)} \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} (2(m+1)a_{m+1}) (S + \bar{S})^m C^{k-m} \bar{C}^{k-m-1} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

und

$$-\frac{\partial f}{\partial C} = \sum_{m=0}^{k-1} ((m-k)a_m) (S + \bar{S})^m C^{k-m} \bar{C}^{k-m-1}. \quad (\text{B.15})$$

Die zweite Gleichung aus (B.7) liefert nun die Bedingung

$$2(m+1)a_{m+1} = (m-k)a_m. \quad (\text{B.16})$$

Diese Rekursionsformel wird gelöst durch

$$a_m = (-2)^{(k-m)} \binom{k}{m}. \quad (\text{B.17})$$

Durch einsetzen in den Ansatz (B.13) erhält man die gesuchte Funktion

$$f = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (S + \bar{S})^m (-2C\bar{C})^{(k-m)} = (S + \bar{S} - 2C\bar{C})^k. \quad (\text{B.18})$$

Damit sind alle unter (B.1) invarianten Polynome, die unter (B.2) ein definiertes Skalenverhalten haben, Potenzen von $(S + \bar{S} - 2C\bar{C})$. Quotienten von Polynomen gleichen Skalenverhaltens sind mithin konstant. Dies ist die zu beweisende Behauptung.

Anhang C

Peccei-Quinn Invarianten II

In diesem Abschnitt werden die Invarianten unter den zusätzlichen Peccei-Quinn Symmetrien, die im Limes großer komplexer Struktur der IIA Theorie auftreten, bestimmt.

Die Transformationen lauten (4.33):

$$\begin{aligned} \delta X^a &= \eta^a, & \delta Y^a &= 0, & \delta \xi^0 &= 0, \\ \delta \xi^a &= \eta^a \xi^0, & \delta \tilde{\xi}_a &= \frac{1}{4} \kappa_{abc} \eta^b \xi^c, & \delta \tilde{\xi}_0 &= -\eta^a \tilde{\xi}_a. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Die Bestimmung dieser Symmetrien dient dazu, die möglichen Kopplungen der RR Felder zu bestimmen. Wie diese an das Axion $\tilde{\phi}$ koppeln, kann ohne Betrachtung dieser Symmetrien erschlossen werden. Das Axion wird daher im folgenden nicht betrachtet.

Weiterhin interessieren nur solche Terme, die auch unter den Peccei-Quinn-Symmetrien (4.30) invariant sind. Die Invarianten unter diesen Transformationen sind durch die Ableitungen von ξ^i und $\tilde{\xi}_i$ gegeben (4.31).

Der allgemeinste Ansatz für eine Invariante lautet folglich

$$I = a(X, Y, \phi) d\tilde{\xi}_0 + b^a(X, Y, \phi) d\tilde{\xi}_a + c_a(X, Y, \phi) d\xi^a + d(X, Y, \phi) d\xi^0. \quad (\text{C.2})$$

Er transformiert unter (C.1) gemäß

$$\begin{aligned} \delta I &= \frac{\partial a}{\partial X^b} \eta^b d\tilde{\xi}_0 + \frac{\partial b^a}{\partial X^b} \eta^b d\tilde{\xi}_a + \frac{\partial c^a}{\partial X^b} \eta^b d\xi^a + \frac{\partial d}{\partial X^b} \eta^b d\xi^0 - a \eta^b d\tilde{\xi}_b + \frac{1}{4} \kappa_{abc} b^a \eta^b d\xi^c \\ &\quad + c_a \eta^a d\xi^0 \\ &= \frac{\partial a}{\partial X^a} \eta^a d\tilde{\xi}_0 + \left(\frac{\partial b^a}{\partial X^b} - \delta^{ab} \right) \eta_b d\tilde{\xi}_a + \left(\frac{\partial c_c}{\partial X_b} + \frac{1}{4} \kappa_{abc} b^a \right) \eta^b d\xi^c \\ &\quad + \left(\frac{\partial d}{\partial X^a} + c_a \right) \eta^a d\xi^0. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Man erhält aus der Forderung $\delta I = 0$ folgende Bedingungen:

$$\frac{\partial a}{\partial X^a} = 0, \quad \frac{\partial b^a}{\partial X^b} = a \delta_b^a, \quad \frac{\partial c_c}{\partial X_b} = -\frac{1}{4} \kappa_{abc} b^a, \quad \frac{\partial d}{\partial X^a} = -c_a. \quad (\text{C.4})$$

Diese werden gelöst durch

$$\begin{aligned}
a(X, Y, \phi) &= a(Y, \phi) , \\
b_a(X, Y, \phi) &= a(Y, \phi)X_a + b_a(Y, \phi) , \\
c_a(X, Y, \phi) &= -\frac{1}{8}a(Y, \phi)\kappa_{abc}X^bX^c - \frac{1}{4}b^b(Y, \phi)\kappa_{abc}X^c + c_a(Y, \phi) , \\
d(X, Y, \phi) &= \frac{1}{24}a(Y, \phi)\kappa_{abc}X^aX^bX^c + \frac{1}{8}b^a(Y, \phi)\kappa_{abc}X^bX^c - c_a(Y, \phi)X^a + d(Y, \phi) .
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Damit lautet (C.2)

$$\begin{aligned}
I &= a(Y, \phi) \left(d\tilde{\xi}_0 + X^a d\tilde{\xi}_a - \frac{1}{8}\kappa_{abc}X^bX^c d\xi^a + \frac{1}{24}\kappa_{abc}X^aX^bX^c d\xi^0 \right) \\
&\quad + b^a(Y, \phi) \left(d\tilde{\xi}_a - \frac{1}{4}\kappa_{abc}X^b d\xi^c + \frac{1}{8}\kappa_{abc}X^bX^c d\xi^0 \right) \\
&\quad + c_a(Y, \phi) \left(d\xi^a - X^a d\xi^0 \right) + d(Y, \phi) d\xi^0 .
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Invarianten unter (C.1), die die oben genannten Bedingungen erfüllen, sind also Linearkombinationen der Terme

$$\begin{aligned}
q &= d\xi_0 , \\
r^a &= d\xi^a - X^a d\xi^0 , \\
s_a &= d\tilde{\xi}_a - \frac{1}{4}\kappa_{abc}X^b d\xi^c + \frac{1}{8}\kappa_{abc}X^bX^c d\xi^0 , \\
t &= d\tilde{\xi}_0 + X^a d\tilde{\xi}_a - \frac{1}{8}\kappa_{abc}X^bX^c d\xi^a + \frac{1}{24}\kappa_{abc}X^aX^bX^c d\xi^0 ,
\end{aligned} \tag{C.7}$$

deren Entwicklungskoeffizienten beliebige Funktionen in den Y^a und ϕ sein können.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Green, J. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, (2 Vols.), Cambridge University Press (1987).
- [2] D. Lüst, S. Theisen, *Lectures on String Theory*, Lecture Notes in Physics **346**, Springer Berlin Heidelberg (1989).
- [3] J. Polchinski, *String Theory*, (2 Vols.), Cambridge University Press (1998).
- [4] Ein Einführung in solche Modelle findet sich in:
C. G. Callan, L. Thorlacius, *Sigma Models and String Theory*, in *Particles, Strings and Supernovae*, ed. by A. Jevicki, C.-I. Tan, World Scientific, 1989, 795.
- [5] D. J. Gross, E. Witten, *Superstring Modifications of Einstein's Equations*, Nucl. Phys. **B 277** (1986) 1.
- [6] B. de Wit, J. Louis, *Supersymmetry and Dualities in Various Dimensions*, hep-th/9801132.
- [7] Einführungen in dieses Gebiet findet man in:
D. Lüst, *String Vacua With $N = 2$ Supersymmetry in Four Dimensions*, hep-th/9803072.
J. Louis, K. Foerger, *Holomorphic Couplings in String Theory*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **55B** (1997) 33, hep-th/9611184.
P. S. Aspinwall, *Compactification, Geometry and Duality: $N = 2$* , hep-th/0001001.
- [8] M. de Roo, *Matter Coupling in $N=4$ Supergravity*, Nucl. Phys. **B 255** (1985) 515.
- [9] P. S. Aspinwall, *$K3$ Surfaces and String Duality*, hep-th/9611137.
- [10] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity (2nd ed.)* Princeton University Press (1992).
- [11] E. Cremmer, C. Kounnas, A. Van Proeyen, J. P. Derendinger, S. Ferrara, B. de Wit, L. Girardello, *Vector Multiplets Coupled to $N=2$ Supergravity: Superhiggs Effect, Flat Potentials and Geometric Structure*, Nucl. Phys. **B250** (1985) 385.

- [12] M. Sohnius, K. S. Stelle, P. C. West, *Off Mass Shell Formulation of Extended Supersymmetric Gauge Theories*, Phys. Lett. **B 92** (1980) 123.
- [13] B. de Wit, V. Kaplunovsky, J. Louis, D. Lüst, *Perturbative Couplings of Vector Multiplets in $N=2$ Heterotic String Vacua*, Nucl. Phys. **B 451** (1995) 53, [hep-th/9504006](#).
- [14] P. Claus, B. de Wit, M. Faux, B. Kleijn, R. Siebelink, P. Termonia, *The Vector-Tensor Supermultiplet with Gauged Central Charge*, Phys. Lett. **B 373** (1996) 81, [hep-th/9512143](#).
 A. Hindawi, B. A. Ovrut, D. Waldram, *Vector-Tensor Multiplet in $N = 2$ Superspace with Central Charge*, Phys. Lett. **B 392** (1997) 85, [hep-th/9609016](#).
 R. Grimm, M. Hasler, C. Herrmann, *The $N = 2$ Vector-Tensor Multiplet, Central Charge Superspace, and Chern-Simons Couplings*, Int. J. Mod. Phys. **A 13** (1998) 1805, [hep-th/9706108](#).
 N. Dragon, S. M. Kuzenko, U. Theis, *The Vector-Tensor Multiplet in Harmonic Superspace*, Eur. Phys. J. **C4** (1998) 717, [hep-th/9706169](#).
- [15] P. Fayet, *Fermi-Bose Hypersymmetry*, Nucl. Phys. **B 113** (1976) 135.
 S. Ferrara, J. Scherk, B. Zumino, *Algebraic Properties of Extended Supergravity Theories*, Nucl. Phys. **B121** (1977) 393.
- [16] B. de Wit, J. W. van Holten, *Multiplets of Linearized $SO(2)$ Supergravity*, Nucl. Phys. **B 155** (1979) 530.
- [17] B. Zumino, *Supersymmetry and Kahler Manifolds*, Phys. Lett. **B 87** (1979) 203.
 L. Alvarez-Gaumé, D. Z. Freedman, *Geometrical Structure and Ultraviolet Finiteness in the Supersymmetric Sigma Model*, Comm. Math. Phys. **80** (1981) 443.
 J. Bagger, *Supersymmetric Sigma Models*, in *Supersymmetry*, NATO ASI on Supersymmetry, Bonn (1984), ed. by K. Dietz, R. Flume, G. von Gehlen, V. Rittenberg, Plenum Press, New York (1985)
 Eine Zusammenfassung der geometrischen Konzepte, die in die Untersuchung von $N = 2$ supersymmetrischen Theorien eingehen, findet man in:
 L. Andrianopoli, M. Bertolini, A. Cresole, R. D'Auria, S. Ferrara, P. Fré, T. Magri, *$N=2$ Supergravity and $N=2$ Super Yang-Mills Theory on General Scalar Manifolds: Symplectic Covariance, Gaugings and the Momentum Map*, J. Geom. Phys. **23** (1997) 111, [hep-th/9605032](#).
- [18] B. de Wit, P. G. Lauwers, A. Van Proeyen, *Lagrangians of $N=2$ Supergravity - Matter Systems*, Nucl. Phys. **B255** (1985) 569.
- [19] B. de Wit, A. Van Proeyen, *Potentials and Symmetries of General Gauged $N=2$ Supergravity - Yang-Mills Models*, Nucl. Phys. **B 245** (1984) 89.
- [20] J. Bagger, E. Witten, *Matter Couplings in $N = 2$ Supergravity*, Nucl. Phys. **B 222** (1983) 1.

- [21] Einführungen findet man in:
M. J. Duff, B. E. Nilsson, C. N. Pope, *Kaluza-Klein Supergravity*, Phys. Rep. **130** (1986) 1.
L. Castellani, R. D'Auria, P. Fre, *Supergravity and Superstrings: A Geometric Perspective*, (3 Vols.), World Scientific Singapur (1991).
- [22] P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger, E. Witten, *Vacuum Configurations for Superstrings*, Nucl. Phys. **B258** (1985) 46.
- [23] S. Cecotti, S. Ferrara, L. Girardello, *Geometry of Type II Superstrings and the Moduli of Superconformal Field Theories*, Int. J. Mod. Phys. **A 4** (1989) 2475.
- [24] B. R. Greene, *String Theory on Calabi-Yau Manifolds*, hep-th/9702155.
- [25] B. R. Greene, *Lectures on String Theory in Four-Dimensions*, in *Proceedings of the 1990 Summer School in High Energy Physics and Cosmology*, ed. by J.C. Pati, S. Randjbar-Daemi, E. Sezgin, Q. Shafi, World Scientific, 1991.
- [26] M. F. Hasler, *The Three-Form Multiplet in $N = 2$ Superspace*, Eur. Phys. J. **C1** (1998) 729, hep-th/9606076.
- [27] M. Bodner, A. C. Cadavid, S. Ferrara, *(2,2) Vacuum Configurations for Type IIA Superstrings: $N=2$ Supergravity Lagrangians and Algebraic Geometry*, Class. Quant. Grav. **8** (1991) 789.
- [28] R. Böhm, H. Günther, C. Herrmann, J. Louis, *Compactification of Type IIB String Theory on Calabi-Yau Threefolds*, Nucl. Phys. **B 569** (2000) 229, hep-th/9908007.
- [29] P. Candelas, X. de la Ossa, *Moduli Space of Calabi-Yau Manifolds*, Nucl. Phys. **B 355** (1991) 455.
- [30] Einführungen in dieses Gebiet findet man in:
A. Sen, *An Introduction to Non-perturbative String Theory*, hep-th/9802051.
J. H. Schwarz, *Lectures on Superstring and M Theory Dualities*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **55B** (1997) 1, hep-th/9607201.
E. Kiritsis, *Introduction to Non-perturbative String Theory*, hep-th/9708130.
S. Förste, J. Louis, *Duality in String Theory*, hep-th/9612192.
M. Haack, B. Körs, D. Lüst, *Recent Developments in String Theory: From Perturbative Dualities to M-Theory*, hep-th/9904033.
- [31] E. Witten, *String Theory Dynamics in Various Dimensions*, Nucl. Phys. **B443** (1995) 85, hep-th/9503124.

- [32] Eine Einführung und weitere Referenzen findet man in:
S. Hosono, A. Klemm, S. Theisen, *Lectures on Mirror Symmetry*,
hep-th/9403096.
- [33] E. Witten, *World-Sheet Corrections via D-Instantons*, hep-th/9907041.
E. Witten, *Heterotic String Conformal Field Theory and A-D-E Singularities*, hep-th/9909229.
P. Mayr, *Conformal Field Theories on K3 and Three-Dimensional Gauge Theories*, hep-th/9910268.
M. Rozali, *Hypermultiplet Moduli Space and Three Dimensional Gauge Theories*, JHEP **9912** (1999) 013, hep-th/9910238.
- [34] P. S. Aspinwall, *Aspects of the Hypermultiplet Moduli Space in String Duality*, JHEP **9804** (1998) 019, hep-th/9802194.
P. S. Aspinwall, M. R. Plesser, *Heterotic String Corrections from the Dual Type II String*, hep-th/9910248.
- [35] B. R. Greene, D. R. Morrison, C. Vafa, *A Geometric Realization of Confinement*, Nucl. Phys. **B 481** (1996) 513, hep-th/9608039.
- [36] N. Seiberg, S. Shenker, *Hypermultiplet Moduli Space and String Compactification to Three Dimensions*, Phys. Lett. **B 388** (1996) 521, hep-th/9608086.
- [37] K. Becker, M. Becker, A. Strominger, *Five-Branes, Membranes and Nonperturbative String Theory*, Nucl. Phys. **B456** (1995) 130, hep-th/9507158.
- [38] K. Becker, M. Becker, *Instanton Action for Type II Hypermultiplets*, Nucl. Phys. **B 551** (1999) 102, hep-th/9901126.
- [39] H. Ooguri, C. Vafa, *Summing up D-Instantons*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 3296, hep-th/9608079.
- [40] N. Berkovits, W. Siegel, *Superspace Effective Actions for 4D Compactifications of Heterotic and Type II Superstrings*, Nucl. Phys. **B 462** (1996) 213, hep-th/9510106.
- [41] A. Strominger, *Loop Corrections to the Universal Hypermultiplet*, Phys. Lett. **B 421** (1998) 139, hep-th/9706195.
- [42] H. Günther, C. Herrmann, J. Louis, *Quantum Corrections in the Hypermultiplet Moduli Space*, Fortsch. Phys. **48** (2000) 119, hep-th/9901137.
- [43] M. Bodner, A. C. Cadavid, *Dimensional Reduction of Type IIB Supergravity and Exceptional Quaternionic Manifolds*, Class. Quant. Grav. **7** (1990) 829.
- [44] S. Ferrara, S. Sabharwal, *Quaternionic Manifolds for Type II Superstring Vacua of Calabi-Yau Spaces*, Nucl. Phys. **B332** (1990) 317.
- [45] N. Sakai, Y. Tanii, *One Loop Amplitudes and Effective Action in Superstring Theories*, Nucl. Phys. **B 287** (1987) 457.

- [46] M. B. Green, M. Gutperle, *Effects of D-Instantons*, Nucl. Phys. **B 498** (1997) 195, hep-th/9701093.
- [47] M. B. Green, P. Vanhove, *D-Instantons, Strings and M-Theory*, Phys. Lett. **B 408** (1997) 122, hep-th/9704145.
- [48] E. Kiritsis, C. Kounnas, *Infrared Regularization of Superstring Theory and the One Loop Calculation of Coupling Constants*, Nucl. Phys. **B 442** (1995) 472, hep-th/9501020.
- [49] L. Castellani, R. D'Auria, S. Ferrara, *Special Geometry Without Special Coordinates*, Class. Quant. Grav. **7** (1990) 1767.
- [50] L. Castellani, R. D'Auria, S. Ferrara, *Special Kahler Geometry: An Intrinsic Formulation From N=2 Space-Time Supersymmetry*, Phys. Lett. **B241** (1990) 57.
- [51] A. Strominger, *Special Geometry*, Comm. Math. Phys. **133** (1990) 163.
- [52] A. Van Proeyen, *Vector Multiplets in N = 2 Supersymmetry and Its Associated Moduli Spaces*, in *Proceedings of the 1995 Summer School in High-Energy Physics and Cosmology*, ed. by E. Gava, A. Masiero, K.S. Narain, S. Randjbar-Daemi, Q. Shafi, World Scientific, 1997, hep-th/9512139.
- [53] A. Van Proeyen, *Special Kaehler Geometry*, math.dg/0002122.
- [54] P. Candelas, X. de la Ossa, P. Green, L. Parkas, *A Pair of Calabi-Yau Manifolds as an Exactly Solvable Field Theory*, Nucl. Phys. **B 359** (1991) 21.
- [55] S. Hosono, A. Klemm, S. Theisen, S. T. Yau, *Mirror Symmetry, Mirror Map, and Applications to Calabi-Yau Hypersurfaces*, Comm. Math. Phys. **165** (1995) 301, hep-th/9308122.
- [56] B. de Wit, F. Vanderseypen, A. Van Proeyen, *Symmetry Structure of Special Geometries*, Nucl. Phys. **B 400** (1993) 463, hep-th/9210068.
- [57] I. Antoniadis, S. Ferrara, R. Minasian, K. S. Narain, *R⁴ Couplings in M- and Type II Theories on Calabi-Yau Spaces*, Nucl. Phys. **B 507** (1997) 571, hep-th/9707013.
- [58] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, (2 Vols.), Interscience, Wiley, New York (1963,69).
- [59] T. Eguchi, P. B. Gilkey, A. J. Hansen, *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*, Phys. Rep. **66** (1980) 213.
- [60] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, IOP Publishing Bristol (1990).

- [61] A. Newlander, L. Nirenberg, *Complex Analytic Coordinates in Almost Complex Manifolds*, Ann. of Math. **65** (1957) 391.
- [62] T. Hübsch, *Calabi-Yau Manifolds. A Bestiary for Physicists*. World Scientific Singapur (1992).
- [63] D. V. Alekseevsky, S. Marchiafava, *Quaternionic Structures on a Manifold and Subordinated Structures*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **171** (1996) 205.
- [64] A. L. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer Berlin Heidelberg (1987).
- [65] F. Gürsey, C.-H. Tze *Complex and Quaternionic Analyticity in Chiral and Gauge Theories, Part 1*, Annals Phys. **128** (1980) 29.
- [66] R. Fueter, *Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen*, Comment. Math. Helv. **7** (1935) 307.
- [67] A. Borel, J.-P. Serre, *Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod*, Amer. Jour. Math. **75** (1953) 409.
- [68] V. Y. Kraines, *Topology of Quaternionic Manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **122** (1966) 357.
- [69] S. M. Salomon, *Differential Geometry of Quaternionic Manifolds*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4^e série, **t. 19** (1986), 31.
- [70] S. Ishihara, *Quaternion Kählerian Manifolds*, J. Diff. Geom. **9** (1974) 483.
- [71] M. Berger, *Sur les groupes d'holonomie des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes*, Bull. Soc. Math. France **83** (1955) 279.
- [72] K. Galicki, *Quaternionic Kähler and Hyper-Kähler Non-Linear σ -Models*, Nucl. Phys. **B271** (1986) 402.
- [73] B. de Wit, B. Kleijn, S. Vandoren, *Superconformal Hypermultiplets*, Nucl. Phys. **B568** (2000) 475, hep-th/9909228.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe verfaßt, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Lebenslauf

Angaben zur Person

Name: Günther
Vornamen: Holger
Geburtsdatum: 30.7.1969
Geburtsort: Bochum
Nationalität: Deutsch

Schulischer Bildungsgang

8/1976-6/1982 Grundschule und Orientierungsstufe, Ronnenberg
8/1982-5/1989 Matthias-Claudius-Gymnasium, Gehrden
8.5.1989 Abitur

Grundwehrdienst

6/1989-8/1990 Kampftruppendienst Munster

Universitärer Bildungsgang

10/1990-10/1992 Grundstudium der Physik an der Universität Hannover
8.10.1992 Vordiplom
10/1992-11/1996 Hauptstudium der Physik an der Universität Hannover
und der Lancaster University (9/1993-7/1994)
10/1995-9/1996 Diplomarbeit über „Supergravitation mit nicht-
invertierbaren Vierbeinen“ bei Prof. N. Dragon
28.11.1996 Diplom
seit 10/1997 Promotion in Physik an der MLU Halle-Wittenberg
unter Betreuung von Prof. J. Louis