

Hochschule Merseburg (FH)  
University of Applied Sciences



Fachbereich Ingenieur- und Naturwissenschaften  
Fachgebiet Mechatronik

## **Bachelorarbeit**

### **Wissenschaftliches Schreiben**

Modalanalyse elementarer Strukturen mit Hilfe der Finiten Elemente Methode

Erstbetreuer Prof. Dr. Jonas Fischer  
Zweitbetreuer Dipl.-Ing. René Stöhr  
Abgabetermin: 19. Oktober 2022

eingereicht von  
Haowei Ji  
Matrikel: 27146

Merseburg, 19. Oktober 2022

# Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung .....	7
1.1 Motivation .....	7
1.2 Ziel der Bachelorarbeit .....	7
1.3 Die Software ANSYS-Workbench 2022R2 .....	8
2. Theoretische Grundlage.....	10
2.1 Elementare Körper .....	10
2.1.1 Einführung in die Grundlagen des Modells .....	10
2.1.2 Bestimmung der Werkstoff-Kennwerte.....	11
2.2 Einführung in die Grundlagen der Modalanalyse .....	12
2.2.1 Modalanalyse.....	12
2.2.2 Eigenfrequenzen und Eigenformen.....	12
2.3 Theoretische Grundlagen der Finite-Elemente-Analyse.....	13
2.3.1 Erklärung und Gründe für den Einsatz der Finite-Elemente-Analyse	13
2.3.2 Grundform der Elemente .....	14
2.4 Grundprinzip der Eigenfrequenzberechnung.....	16
2.4.1 Modalanalyse mit Hilfe der FEM .....	16
2.4.2 Analytische Berechnung der Eigenfrequenz .....	17
3. Experimenteller Prozess: Modellbildung, Vernetzung, Datenanalyse .....	22
3.1 Modellbildung .....	22
3.2 Vernetzung .....	23
3.2.1 Automatisch .....	26
3.2.2 Optimierung der Vernetzungsmethoden .....	26

3.3	Eigenform und Eigenfrequenz.....	32
3.4	Auswirkung der unterschiedlichen Vernetzungsmethode auf die Eigenfrequenzergebnisse.....	41
3.4.1	Grundform von Elementen (Tetraeder, Prisma und Hexaeder) .....	41
3.4.2	Elementgröße .....	41
3.4.3	Ansatzfunktionen (Elemente mit linearen oder quadratischen Ansatzfunktionen) .....	44
4.	Vergleich der analytischen mit der FE-Lösung .....	46
4.1	Analyse der FE-Lösung.....	46
4.2	Vergleich für den Kreisring .....	47
4.3	Vergleich für die Platte .....	49
5.	Variante .....	51
5.1	Kreisring - Einfluss des Radius auf die Eigenfrequenzen.....	54
5.2	Kreiszyylinder - Kombiniertes Einfluss des Radius und der Länge auf die Eigenfrequenzen .....	57
5.3	Platte- Einfluss der Geometrie auf die Eigenfrequenzen.....	60
6.	Zusammenfassung und Ausblick.....	62
7.	Literaturverzeichnis .....	65

# Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Hauptmenü des Projektes der Software ANSYS-Workbench in Version 2022R2 .....	9
Abbildung 2: Elementare Körper (Kreisring, Hohlzylinder, Platte und Hohlplatte) .....	10
Abbildung 3: 3D-Elemente.....	14
Abbildung 4: Elemente mit linearen(links) und quadratischen(rechts) Ansatzfunktionen.....	15
Abbildung 5: Kreisring .....	17
Abbildung 6: Platte .....	20
Abbildung 7: Modellbildung von Kreisring; Hohlzylinder; Platte; Hohlplatte .	22
Abbildung 8: Materialansicht von Baustahl.....	23
Abbildung 9: Zwei Dreiecke mit gleichem Kantenlänge .....	24
Abbildung 10: Automatische Vernetzungsmethoden .....	26
Abbildung 11: Mehrere Vernetzungsmethoden auf den Kreisring.....	27
Abbildung 12: Auswirkung der Elementgröße auf die Elementqualität .....	28
Abbildung 13: Mehrere Vernetzungsmethoden auf die Platte.....	29
Abbildung 14: Platte mit der „Flächen-abhängige- Tetraeder“ Vernetzungsmethode mit innerer Teilung von 3 Schichten..	30
Abbildung 15: Platte mit der „Nur Dreiecke“ Vernetzungsmethode.....	31
Abbildung 16: Gesamtverformung der ersten 20 Eigenfrequenzen des Kreisrings .....	33
Abbildung 17: Gesamtverformung der ersten 20 Eigenfrequenzen des Hohlzylinders.....	35
Abbildung 18: Gesamtverformung der ersten 20 Eigenfrequenzen des Platten .....	37
Abbildung 19: Gesamtverformung der ersten 20 Eigenfrequenzen des Hohlplatten .....	39



Abbildung 20: Kreisring mit der „MultiZone-Thin-Sweep“ Vernetzungsmethode mit innerer Teilung von 1,2 und 3 Schichten.....	42
Abbildung 21: Liniendiagramm der Werte der 1. bis 20. Eigenfrequenz von Kreisring .....	46
Abbildung 22: die 10. und 11. Eigenform von Kreisring .....	48
Abbildung 23: der 15., 16. und 19., 20. Eigenform von Kreisring .....	48
Abbildung 24: Liniendiagramm der Werte der 1. bis 20. Eigenfrequenz von Platte .....	49
Abbildung 25: der 7. bis 11. Eigenform von Platte .....	50
Abbildung 26: Varianten des Kreisrings.....	51
Abbildung 27: Varianten der Platte .....	51
Abbildung 28: Die Modellierung und Vernetzung von Kreisring-Varianten mit gleicher Höhe .....	52
Abbildung 29: Die Modellierung und Vernetzung von Kreisring-Varianten mit gleichem Radius.....	52
Abbildung 30: Die Modellierung und Vernetzung von Platte-Varianten mit gleichem Radius.....	53
Abbildung 31: Die Modellierung und Vernetzung von Platte-Varianten mit gleicher Höhe .....	53
Abbildung 32: ri200-ra220-L50- Kreisverformungen der 7., 11., 13. und 17. Eigenfrequenz .....	54
Abbildung 33: ri200-ra220-L100- Kreisverformungen der 7., 11., 13. und 17. Eigenfrequenz .....	54
Abbildung 34: ri200-ra220-L200- Kreisverformungen der 7., 11., 15. und 19. Eigenfrequenz .....	55
Abbildung 35: ri200-ra220-L400- Kreisverformungen der 7., 11. 15. und 21. Eigenfrequenz .....	55
Abbildung 36: ri200-ra220-L800- Kreisverformungen der 7., 11. 19. und 36. Eigenfrequenz .....	55

## Tabelle Verzeichnis

Tabelle 1: Modellgrößen der vier elementaren Körper .....	10
Tabelle 2 Werkstoff-Kennwerte .....	11
Tabelle 3: Physikalische Eigenschaften des Kreisrings .....	17
Tabelle 4: Der Wert von $k_{eq}$ .....	19
Tabelle 5: Analytische Lösungen .....	19
Tabelle 6: Physikalische Eigenschaften der Platte.....	20
Tabelle 7: Werte von C für verschiedene Elemente .....	25
Tabelle 8: 1.bis 20. Eigenfrequenzwerte von Kreisring .....	34
Tabelle 9: 1.bis 20. Eigenfrequenzwerte von Hohlzylinder .....	36
Tabelle 10: 1.bis 20. Eigenfrequenzwerte von Platte .....	38
Tabelle 11: 1.bis 20. Eigenfrequenzwerte von Hohlplatte .....	40
Tabelle 12: 7.bis 20. Eigenfrequenzwerte von Kreisring (EG = 40 mm).....	43
Tabelle 13: Vergleich von Elementen mit linearen und quadratischen Ansatzfunktionen.....	44
Tabelle 14: Vergleich von Eigenfrequenzwerten verschiedener Kreisringlängen bei spezifischen Eigenfrequenzen .....	56
Tabelle 15: Vergleich der Eigenfrequenzwerte der Kreiszyylinder bei doppelter Größe .....	58
Tabelle 16: Vergleich der Eigenfrequenzwerte der Kreiszyylinder bei vierfacher Größe .....	58
Tabelle 17: Vergleich der Eigenfrequenzwerte der Platten bei doppelter Größe .....	60

## Abkürzungsverzeichnis

ANSYS	Analysis System
ANSYS-Workbench	ANSYS Simulation Software
ABAQUS	Abaqus Non-Linear FEA Software
$\nu$	Querkontraktionszahl
k	Konstanten
$\omega_k$ in Hz	Eigenkreisfrequenz
$f_k$ in Hz	Eigenfrequenz
f in Hz	Hertz
$\rho$ in kg/m <sup>3</sup>	Dichte
E in Mpa	Elastizitätsmodul
$r_a$ in mm	Innerer Radius
$r_i$ in mm	Äußerer Radius
D in mm	Durchmesser
d in mm	Innendurchmesser
L in mm	Länge
h in mm	Höhe
EG	Elementgröße
d.h.	das heißt
u.a.	unter anderem
z. B.	zum Beispiel

# 1. Einleitung

## 1.1 Motivation

Im Jahr 2021 habe ich ein Praktikum in China absolviert. Während des Praktikums habe ich mich hauptsächlich mit der Modellierung und Optimierung von Stanzformen beschäftigt. Unternehmen müssen bei der Entwicklung neuer Produkte immer noch viele Ressourcen und Arbeitskräfte aufwenden, um verschiedene Formen herzustellen und sie dann zu testen. Es wäre jedoch effizienter und kostengünstiger, wenn die Computertechnologie zur Modellierung des Produkts und zur Analyse der darin enthaltenen potenziellen Probleme eingesetzt werden könnte. Daher ist es sinnvoll, ein Thema über den Einsatz von Computersimulationssoftware zur Datenanalyse und zur Entwicklung verschiedener Problemlösungen zu untersuchen.

## 1.2 Ziel der Bachelorarbeit

Das dynamische Verhalten von Getrieben/Elektromotoren sollte bereits im Entwicklungsprozess mitberücksichtigt werden, da es u.a. Einfluss auf die Geräuschentwicklung/akustische Verhalten des Produkts hat. Maßgeblich wird dieses durch die Eigenfrequenzen und Eigenformen bestimmt.<sup>1</sup> Mit Hilfe der Modalanalyse lässt sich die Eigenfrequenz eines Objekts bestimmen. Wenn die Resonanzfrequenz eines Objekts erreicht ist, wird seine Amplitude größer und stört daher den normalen Gebrauch. Um große Amplituden zu vermeiden, wird häufig eine Modalanalyse durchgeführt, um die Eigenfrequenz und die Eigenform eines Objekts zu berechnen.

---

<sup>1</sup> Vgl. Fischer (26.09.22)

Bei der Vorauslegung der Gehäusegeometrie eines Getriebes oder Elektromotors könnte das dynamische Verhalten vereinfacht mitberücksichtigt werden. Es ist sinnvoll, einfache Dynamiksimulationen durchzuführen. So kann der Konstrukteur nachvollziehen, wie sich geometrische Änderungen auf die Eigenfrequenzen und damit auf das dynamische Verhalten auswirken. Einerseits wirkt es sich positiv auf die Entwicklung von Baureihen aus, d.h. es ermöglicht die Entwicklung von Designs in verschiedenen Baureihen. Andererseits erleichtert es die Schätzung von Ähnlichkeitsmustern im dynamischen Verhalten.<sup>2</sup>

Für die Modalanalyse wird zurzeit häufig Finite-Elemente-Analysesoftware wie ANSYS oder ABAQUS verwendet. Diese Software erleichtert die Analyse durch die Vernetzung des Modells. Die Hauptuntersuchung in dieser Arbeit besteht darin, den Einfluss der Vernetzungsmethoden und Geometrieparametern auf die Eigenfrequenzen und Eigenformen herausgearbeitet. Die Simulationen werden mit der Software ANSYS durchgeführt. Es wird auch mit analytischen Lösungen verglichen. Die Ergebnisse dienen als Grundlage für vereinfachte dynamische Berechnungsmethoden von technischen Systemen.

### 1.3 Die Software ANSYS-Workbench 2022R2

ANSYS-Workbench ist die Integrations- und Workflow-Plattform, die die ANSYS-Produkte miteinander verbindet. Das Funktionsprinzip ist: physikalische Simulation und Analyse durch CAD-Modellierung und Vernetzung. Mit der ANSYS-Workbench-Plattform können Daten aus verschiedenen technischen Simulationen integriert werden, um genauere Modelle auf effizientere Weise zu erstellen.<sup>3</sup>

---

<sup>2</sup> Vgl. Fischer (26.09.22)

<sup>3</sup> Vgl. ANSYS (2022)

In der Bachelorarbeit wird nur ANSYS-Workbench in Version 2022R2 verwendet.

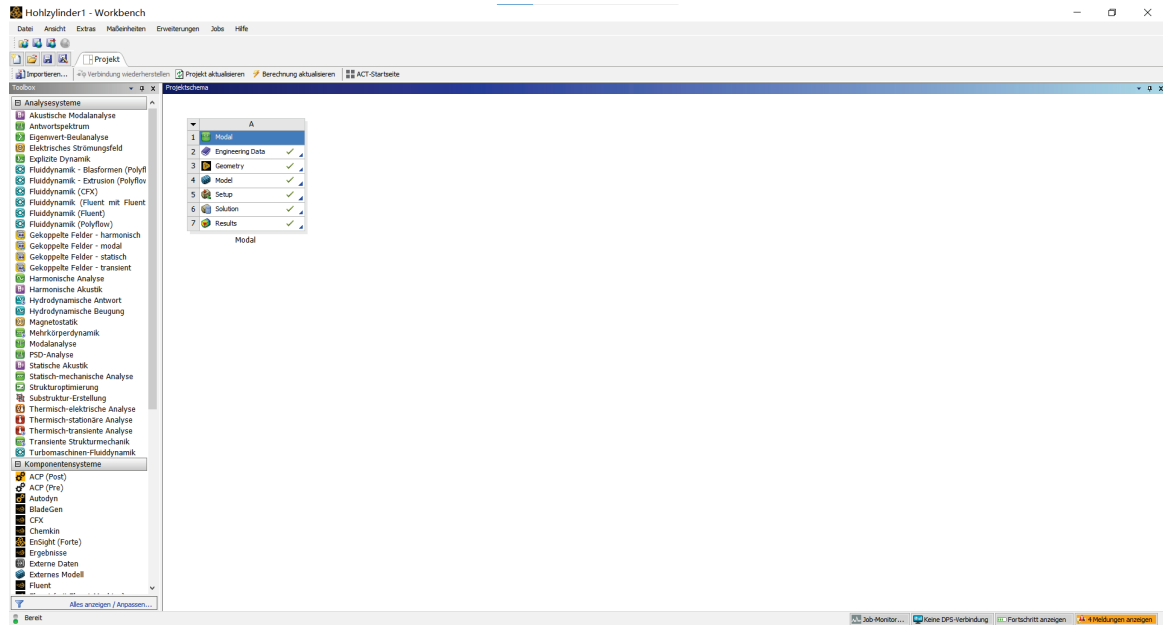


Abbildung 1: Hauptmenü des Projektes der Software ANSYS-Workbench in Version 2022R2

## 2. Theoretische Grundlage

### 2.1 Elementare Körper

#### 2.1.1 Einführung in die Grundlagen des Modells

In dieser Arbeit werden die vier elementaren Körper (Kreisring, Hohlzylinder, Platte und Hohlplatte) mit Hilfe der Finiten Elemente Methode von ANSYS modal analysiert.

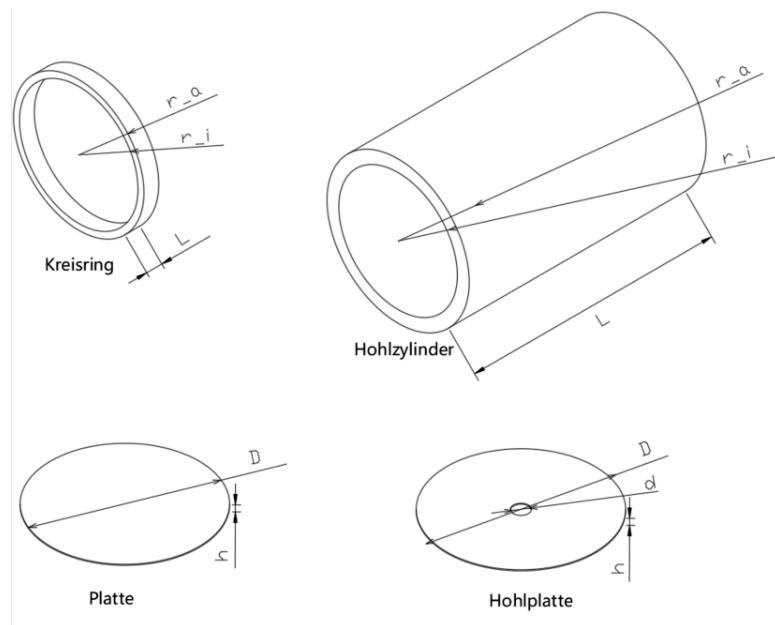


Abbildung 2: Elementare Körper (Kreisring, Hohlzylinder, Platte und Hohlplatte)

Elementare Körper	Modellgröße (in mm)
Kreisring	$r_i = 200, r_a = 220, L = 50$
Hohlzylinder	$r_i = 200, r_a = 240, L = 800$
Platte	$D = 500, h = 3$
Hohlplatte	$D = 500, d = 50, h = 3$

Tabelle 1: Modellgrößen der vier elementaren Körper

Der Grund für die Analyse dieser vier Modelle ist, dass diese Modelle typische geometrische Körper sind, die in Getrieben und E-Motoren Verwendung finden.

Beispiele sind: Hohlrad in Planetenstufen, das die Form eines **Kreisrings** hat; Die Form des Gehäuses von Getrieben oder Elektromotoren ist ähnlich einem **Hohlzylinder**; Am Ende des Gehäuses wird auch eine Kreisförmige **Platte** abgeschlossen.<sup>4</sup>

In späteren Abschnitten werden auch verschiedene Varianten des Modells (Änderungen der Abmessungen) vorgestellt. Dieses kann auch bei der Entwicklung von Baureihen (Realisierung der Konstruktion in verschiedenen Baureihen) sinnvoll sein.

### 2.1.2 Bestimmung der Werkstoff-Kennwerte

Um die physikalischen Eigenschaften der Materialien zu vereinheitlichen, werden in allen vier Modellen Baustahl verwendet.

Die technischen Eigenschaften des Materials von Baustahl werden hier in Tabelle 2 dargestellt:

Werkstoff	Dicht (in kg/m <sup>3</sup> )	Elastizitätsmodul (in Mpa)	Querkontraktionszahl
Baustahl	7850	$2.1 \times 10^5$	0.3

*Tabelle 2 Werkstoff-Kennwerte<sup>5</sup>*

---

<sup>4</sup> Vgl. Fischer (26.09.22)

<sup>5</sup> Vgl. Fischer (30.03.22)



## 2.2 Einführung in die Grundlagen der Modalanalyse

### 2.2.1 Modalanalyse

Die Modalanalyse ist ein Tool zur Ermittlung von Eigenfrequenzen, Eigenformen und der modalen Dämpfung. Kenntnisse der modalen Größen sind die Basis für schwingungsoptimierte Konstruktionen oder nachträglich vorzunehmende schwingungsmindernde Maßnahmen. Es dient zum Testen, Optimieren und Validieren von Konstruktionen. Die bei der Modalanalyse verwendeten Materialeigenschaften sind das Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl.<sup>6</sup>

### 2.2.2 Eigenfrequenzen und Eigenformen

Wenn ein Objekt von außen angeregt wird, schwingt es auf natürliche Weise mit einer bestimmten Frequenz. Diese spezifische Frequenz wird als Eigenfrequenz des Objekts bezeichnet, und die Form der Schwingung wird als Eigenform des Objekts bezeichnet. Normalerweise hat ein Objekt mehrere Eigenfrequenzen und Eigenformen. Die Eigenfrequenz ist unabhängig von der äußeren Anregung und ist eine dem Objekt eigene Eigenschaft.<sup>7</sup>

Bei der Modalanalyse werden in der Regel mehrere Eigenfrequenzen ermittelt. Jeder Freiheitsgrad entspricht einer Eigenfrequenz. Freiheitsgrade sind die minimale, unabhängige Anzahl von Koordinaten, die erforderlich sind, um die Bewegung eines Objekts im Raum zu bestimmen. Ein starrer Körper im Raum hat demnach sechs Freiheitsgrade, denn man kann den Körper in drei voneinander unabhängige Richtungen bewegen (Translation) und um drei voneinander unabhängige Achsen drehen (Rotation).

---

<sup>6</sup> Vgl. Gjelstrup (15.03.21)

<sup>7</sup> Vgl. Tan (15.11.16)

Tatsächlich hat ein Objekt unendlich viele Freiheitsgrade, da es aus unendlich vielen Mikrostarrkörpern besteht und jeder Mikrostarrkörper 6 Freiheitsgrade hat. Obwohl ein Objekt theoretisch unendlich viele Eigenfrequenzen hat, haben niedrigere Eigenfrequenzen bei der Modalanalyse einen größeren Einfluss auf das Objekt. Daher werden in dieser Arbeit nur niedrigere Eigenfrequenzen und spezifische Eigenfrequenzen von Objekten behandelt.

## 2.3 Theoretische Grundlagen der Finite-Elemente-Analyse

### 2.3.1 Erklärung und Gründe für den Einsatz der Finite-Elemente-Analyse

Der Prozess der analytischen Modalanalyse ist oben dargestellt, und es ist zu erkennen, dass der Berechnungsprozess komplexer ist.

Die ursprünglichste Methode der Modalanalyse ist die grundlegende Analyse mit Hilfe mechanischer Methoden, wie z. B. die Verwendung von Differentialgleichungen. Der Nachteil dieser Methode liegt jedoch in ihrem komplizierten Rechenverfahren, es ist auch nicht für komplexe Strukturen geeignet. Daher wird heute häufig die Finiten Elemente Methode verwendet, deren Prinzip darin besteht, die diskrete Analyse von 3D-Problemen durch Diskretisierung der Funktionen zu erleichtern. Die Finite-Elemente-Theorie gibt es zwar schon seit langem, aber diese Methode nur mittels der Entwicklung leistungsfähiger Computer möglich, da sie erhebliche Rechenleistung benötigt. Daher wurde diese Methode von vornherein computergerecht formuliert.

Das Modell wird in eine endliche Anzahl von einfachen Elementen unterteilt, z. B. in viele kleine Quader oder Tetraeder. Sie sind die „finiten Elemente“. Aufgrund ihrer einfachen Geometrie kann ihr physikalisches Verhalten mit Hilfe bekannter Ausgangsfunktionen gut berechnet werden.

Indem man die Beziehung zwischen zwei Elementen analysiert und sie in eine ausreichende Anzahl von Elementen unterteilt, um die Genauigkeitsanforderungen zu erfüllen, können einige Eigenschaften des Objekts als Ganzes (d.h. ein infinites Ensemble von Elementen) aus den Ergebnissen der Berechnung dieser finiten Anzahl von Elementen abgeleitet werden. Das Aufteilen des Modells in eine bestimmte Anzahl Elemente finiter Größe, die sich mit einer endlichen Zahl von Parametern beschreiben lassen, gab der Methode den Namen „Finite-Elemente-Methode“.<sup>8</sup>

### 2.3.2 Grundform der Elemente

Das Modell kann durch Vernetzung diskretisiert werden. Ein wichtiger Aspekt der FEA liegt in der Vernetzung, wobei nur das Netz und die Knoten in die Finite-Elemente-Berechnung einbezogen werden.

Die Grundformen der 3d-Elemente sind: Tetraeder, Prisma, Hexaeder.

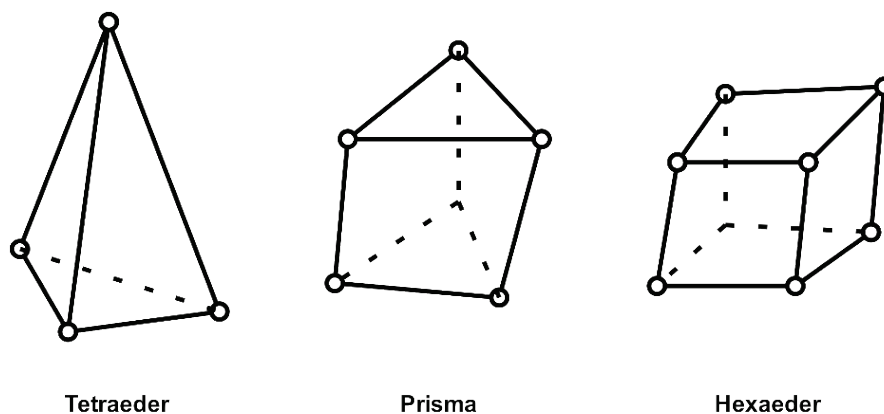


Abbildung 3: 3D-Elemente

---

<sup>8</sup> Vgl. Pan (10.04. 21)

Bei den Ansatzfunktionen gibt es eine weitere Unterteilung in Elemente mit linearen und quadratischen Ansatzfunktionen. Der Unterschied besteht darin, dass die Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen Mittelknoten besitzen, wie in Abbildung 4 unten dargestellt. Elemente mit linearen Ansatzfunktionen werden bei Kontaktproblemen und expliziten dynamischen Fragestellungen empfohlen (vor allem bei diagonaler Massenmatrix), es ist vergleichsweise unempfindlich gegenüber verzerrten Netzen. Und Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen eignen sich dagegen besser für Spannungsanalysen und linearer Dynamik.<sup>9</sup> Daher werden in dieser Arbeit mehr Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen verwendet.

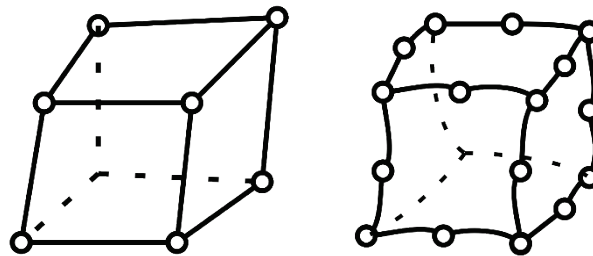


Abbildung 4: Elemente mit linearen(links) und quadratischen(rechts) Ansatzfunktionen

Die Vernetzungsmethode wirkt sich auch auf die Elementqualität aus. Der Einfluss von Vernetzungsmethoden auf die Elementqualität wird in dem späteren Abschnitt weiter untersucht.

---

<sup>9</sup> Vgl. Nasdala (2015)

## 2.4 Grundprinzip der Eigenfrequenzberechnung

### 2.4.1 Modalanalyse mit Hilfe der FEM

Die Aufgabe der Modalanalyse besteht darin, die Eigenfrequenz und Eigenform einer Struktur für die Finite-Elemente-Analyse zu bestimmen. Jeder Modus hat seine eigene Eigenform und Eigenfrequenz. Ein Modell mit mehreren Freiheitsgraden kann in mehrere einzelnen Systeme mit mehreren Freiheitsgraden diskretisiert werden. Durch Kombination von Schwingungstechnik und Finite-Elemente-Theorie lässt sich die ungedämpfte Schwingungsgleichung wie folgt ermitteln:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{X\} = \{F(t)\} \quad 2.1$$

Mit

$[M]$ : Massen-Matrix

$[C]$ : Steifigkeits-Matrix

$\{\ddot{X}\}$ : Schwingungsbeschleunigungs-Vektor

$\{X\}$ : Verschiebungs-Vektor

$\{F(t)\}$ : Externe Belastung

Die Analyse in diese Arbeit bezieht sich auf freie Schwingungsformen, so dass es nicht notwendig ist, die äußeren Belastungsbedingungen des Systems zu berücksichtigen. Dadurch lässt sich die freie ungedämpfte Schwingungsgleichung wie folgt ermitteln<sup>10</sup>:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = 0 \quad 2.2$$

---

<sup>10</sup> Vgl. Fischer (22.11.21)

## 2.4.2 Analytische Berechnung der Eigenfrequenz

Die Eigenfrequenzen einfacher Objekte lassen sich analytisch berechnen.

### 2.4.2.1 Kreisring

Im Folgenden ist ein Beispiel für die Berechnung der Eigenfrequenzwerte eines Kreisrings:

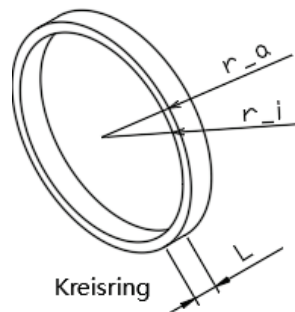


Abbildung 5: Kreisring

Modellgröße (in m)	Dicht (in $\text{kg/m}^3$ )	Elastizitätsmodul (in Mpa)	Querkontraktionszahl
$r_i = 0.2, r_a = 0.22,$ $L = 0.05$	7850	$2.1 \times 10^5$	0.3

Tabelle 3: Physikalische Eigenschaften des Kreisrings

Eigenkreisfrequenz:

$$\omega_k = \frac{k(k^2-1)}{\sqrt{1+k^2}} \sqrt{\frac{EI}{\mu R^4}} \quad (k = 2, 3, \dots) \quad 2.3^{11}$$

Mit

$$I = \frac{L(r_a - r_i)^3}{12} \quad 2.4$$

$$\mu = \rho L(r_a - r_i) \quad 2.5$$

$$R = \frac{r_a + r_i}{2} \quad 2.6$$

Eigenfrequenz:

$$f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} \quad 2.7$$

Um die Berechnung zu vereinfachen, wird das  $k_i$  als:

$$k_i = \sqrt{\frac{EI}{\mu R^4}} \quad 2.8$$

Setzt man die Daten in die Gleichungen 2.4, 2.5 bzw. 2.8 ein, erhält man:

$$I = \frac{L(r_a - r_i)^3}{12} = \frac{0.05 \text{ m} \times (0.22 \text{ m} - 0.2 \text{ m})^3}{12} = 3.3 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$\mu = \rho L(r_a - r_i) = \frac{7850 \text{ kg}}{\text{m}^3} \times 0.05 \text{ m} \times (0.22 \text{ m} - 0.2 \text{ m}) = 7.85 \text{ kg/m}$$

$$k_i = \sqrt{\frac{EI}{\mu R^4}} = \sqrt{\frac{2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2 \times 3.3 \times 10^{-8} \text{ m}^4}{7.85 \text{ kg/m} \times \left(\frac{0.2 \text{ m} + 0.22 \text{ m}}{2}\right)^4}} = 673 \frac{\text{N}}{\text{m} \times \text{kg}} = 673 \frac{1}{\text{s}^2}$$

---

<sup>11</sup> Vgl. Den Hartog, J. P., Mesmer, G. (1952)

Um die Berechnung zu vereinfachen, wird das  $k_{eq}$  als:

$$k_{eq} = \frac{k(k^2-1)}{\sqrt{1+k^2}} \quad (k = 2,3, \dots) \quad 2.9$$

Mit der Gleichung 2.9 ergibt sich der Wert von  $k_{eq}$ , wenn  $k$  als 2, 3, 4, bzw. 5 angenommen wird.

k	2	3	4	5
$k_{eq}$	2.7	7.6	14.6	23.5

Tabelle 4: Der Wert von  $k_{eq}$

Mit der Gleichung 2.3, 2.7, 2.8 und 2.9 wird die anschließende Gleichung abgeleitet:

$$\omega_k = k_i \times k_{eq} \quad 2.10$$

$$f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} = \frac{k_i \times k_{eq}}{2\pi} \quad (k = 2,3, \dots) \quad 2.11$$

Setzt man den Wert von  $k_i$  und  $k_{eq}$  in die Gleichungen 2.11 ein, erhält man die analytischen Lösungen:

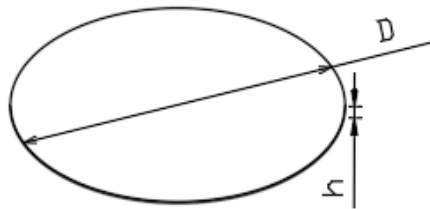
k	2	3	4	5
$f_k$ (analytisch) (in Hz)	289.3	818.3	1569.1	2537.5

Tabelle 5: Analytische Lösungen



### 2.4.2.2 Platte

Im Folgenden ist ein Beispiel für die Berechnung der Eigenfrequenz einer Platte:



Platte

Abbildung 6: Platte

Modellgröße (in m)	Dicht (in kg/m <sup>3</sup> )	Elastizitätsmodul (in Mpa)	Querkontraktionszahl
D = 0.5, L = 0.003	7850	2.1 × 10 <sup>5</sup>	0.3

Tabelle 6: Physikalische Eigenschaften der Platte

Eigenkreisfrequenz:

$$\omega_k = \alpha \sqrt{\frac{EI}{\rho \cdot h \cdot R^4}} \quad 2.12^{12}$$

Mit

$$I = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \quad 2.13$$

Mit  $\alpha_1 = 5.25$ ,  $\alpha_2 = 9.07$ ,  $\alpha_3 = 12.42$  und  $\alpha_4 = 20.94$ <sup>13</sup>

<sup>12</sup> Vgl. Den Hartog, J. P., Mesmer, G. (1952)

<sup>13</sup> Vgl. Den Hartog, J. P., Mesmer, G. (1952)

Setzt man die Daten in die Gleichung 2.12 und 2.13 ein, erhält man die Eigenkreisfrequenz:

$$\omega_{k1} = 394.38 \text{ Hz}, \omega_{k2} = 681.33 \text{ Hz}, \omega_{k3} = 932.99 \text{ Hz und } \omega_{k4} = 1573.01 \text{ Hz}.$$

Nach Gleichung 2.7 erhält man die analytischen Lösungen:

$$f_{k1} = 62.76 \text{ Hz}, f_{k2} = 108.43 \text{ Hz}, f_{k3} = 148.49 \text{ Hz und } f_{k4} = 250.35 \text{ Hz}.$$

### 3. Experimenteller Prozess: Modellbildung, Vernetzung, Datenanalyse

Die Finite-Elemente-Analyse wurde mit der Workbench-Software für vier Modelle durchgeführt: Kreisring, Hohlzylinder, Platte und Hohlplatte.

#### 3.1 Modellbildung

In ANSYS-Workbench kann externe Geometriedatei importiert werden, es kann auch das ANSYS-eigene Modellierungswerkzeug wie SpaceClaim oder Design-Modeler verwenden. Diese vier Modelle wurden entsprechend den Maßangaben in der Abbildung 2 erstellt.

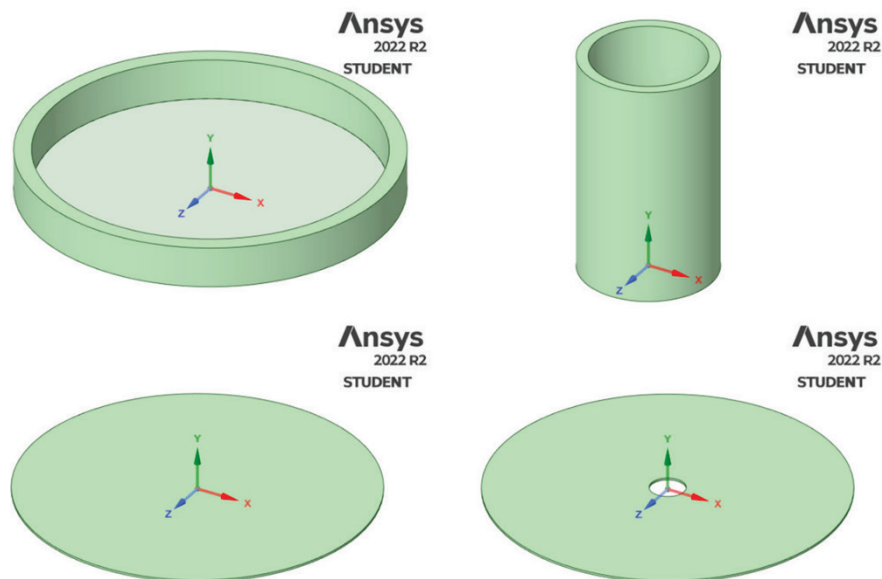


Abbildung 7: Modellbildung von Kreisring; Hohlzylinder; Platte; Hohlplatte

Eigenschaften von Baustahl (Standardmaterial) wurden auf das Material angewendet. (E-Modul: 2.1e+05 Mpa; Querkontraktionszahl: 0.3)

Technische Daten: Materialansicht

**Baustahl**

Die Betriebsfestigkeitsdaten bei der Mittelspannung Null kommen aus dem 1998er ASME BPV Code, Abschnitt 8, Div 2, Tabelle 5-110.1

**Physikalisch**

Dichte	7.85e-06 kg/mm <sup>3</sup>
--------	-----------------------------

**strukturmechanisch**

▼ Isotrope Elastizität

▼ Elastizität	
Ableiten von	E-Modul und Querkontraktionszahl
E-Modul	2e+05 MPa
Querkontraktionszahl	0.3
Kompressionsmodul	1.6667e+05 MPa
Schubmodul	76923 MPa

Abbildung 8: Materialansicht von Baustahl

### 3.2 Vernetzung

Die vier Modelle wurden getrennt vernetzt. Im Allgemeinen gilt: Je höher die Netz-Elementqualität, desto genauer ist der endgültige simulierte Eigenfrequenzwert.

Die Netz-Elementqualität ist ein Wert zwischen 0 und 1, wobei ein Wert näher an 1 für eine bessere Qualität und ein Wert näher an 0 für eine schlechtere Qualität steht. Die Elementqualität hängt eigentlich vom Volumen des Elements und der Gesamtkantenlänge des Elements ab.

Die Formel zur Berechnung der 2D-Elementqualität ist wie folgt:

$$\text{Elementqualität} = C \left[ \frac{\text{Fläche}}{\sum(\text{Kantenlänge})^2} \right] \quad 3.1^{14}$$

<sup>14</sup> Vgl. Uygun (02.08.20)

Die 2D-Elementqualität hängt von dem Verhältnis zwischen der Fläche und der Kantenlänge ab. Hier ein Beispiel für die Berechnung der 2D-Elementqualität. Es gibt zwei Dreiecke mit gleichem Kantenlänge:

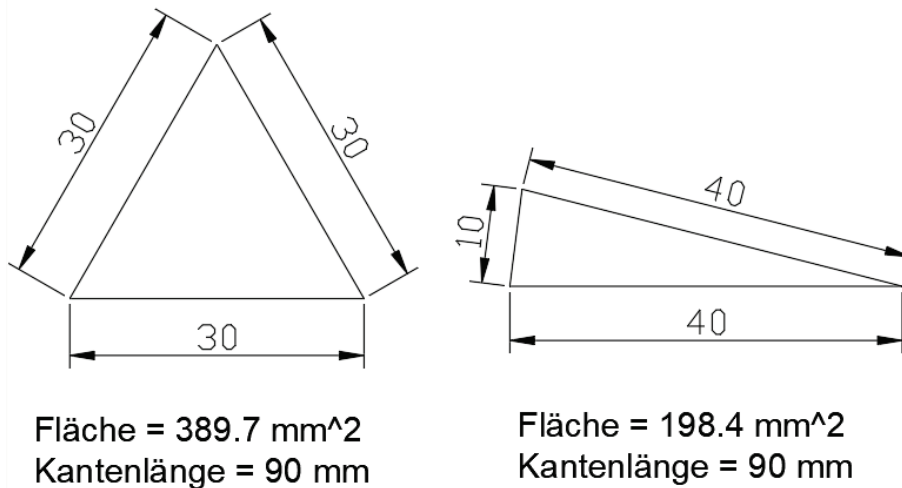


Abbildung 9: Zwei Dreiecke mit gleichem Kantenlänge

$$\text{Elementqualität}_1 = C \left[ \frac{389.7}{90^2} \right] = 0.048 C$$

$$\text{Elementqualität}_2 = C \left[ \frac{198.4}{90^2} \right] = 0.024 C$$

Die Berechnungen zeigen, dass das gleichseitige Dreieck eine bessere Qualität der Elemente aufweist.

Die 3D-Elementqualität wird in ähnlicher Weise wie beim 2d-Element berechnet. Die Formel zur Berechnung der Elementqualität ist wie folgt:

$$\text{Elementqualität} = C \left[ \frac{\text{Volumen}}{\sqrt{[\sum(\text{Kantenlänge})^2]^3}} \right] \quad 3.2^{15}$$

<sup>15</sup> Vgl. Uygun (02.08.20)

Außerdem gibt es einen Parameter „C“ in der Formel. Der Wert von C hängt von der Elementart ab. Die folgende Tabelle zeigt die Werte von C für verschiedene Elemente: <sup>16</sup>

<b>Element</b>	<b>Wert von C</b>
Dreieck	6.9
Viereck	4.0
Tetraeder	124.7
Hexaeder	41.6
Prisma	62.4
Pyramide	96.0

*Tabelle 7: Werte von C für verschiedene Elemente*

Es ist erwähnenswert, dass die Elementqualität automatisch in der ANSYS-Workbench-Software berechnet wird.

Darüber hinaus können die Vernetzungseinstellungen in globale und lokale Vernetzung unterteilt werden. Mit den globalen Einstellungen kann man die Gesamtelementgröße, die Elementansatzfunktion und eine Reihe anderer allgemeiner Einstellungen festlegen. Mit den lokalen Einstellungen kann man die Vernetzungsmethode und die Elementgröße oder die Flächenvernetzungsmethode für einen bestimmten Bereich individuell festlegen können. Zusammenfassend hat die lokale Einstellungen Priorität.

---

<sup>16</sup> Vgl. Uygun (02.08.20)

### 3.2.1 Automatisch

Zunächst wurden die vier Modelle automatisch mit der Standardvernetzungsme-  
thode vernetzt. Die resultierende Vernetzung ist in der Abbildung 10 dargestellt.

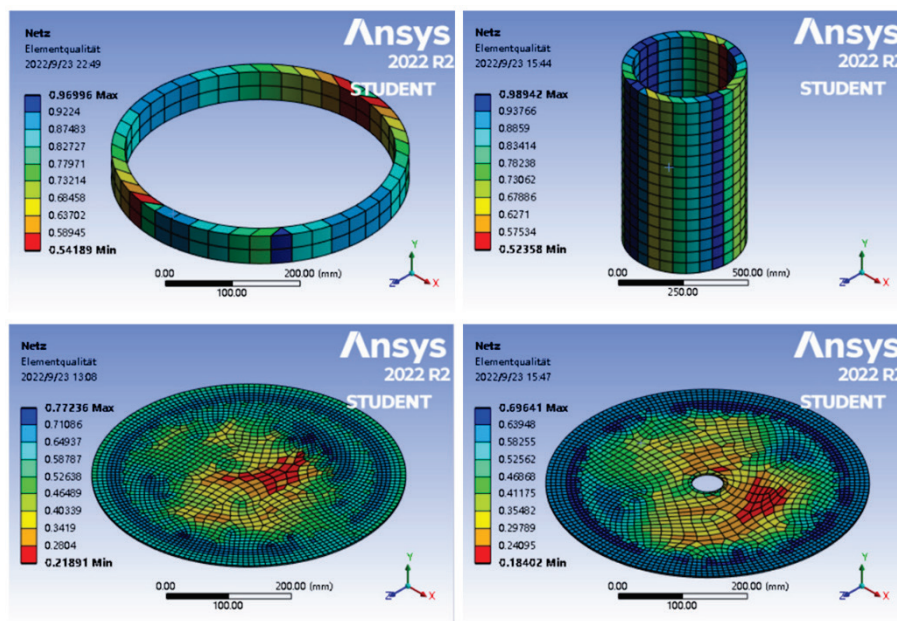


Abbildung 10: Automatische Vernetzungsmethoden

Wie aus der Abbildung 10 ersichtlich ist, ist die Elementqualität mit der automati-  
schen Vernetzungsmethode schlecht und die Netze sind sehr asymmetrisch. Um  
eine bessere Elementqualität und eine symmetrischere Netzform zu erreichen,  
wurden die Modelle mehrfach vernetzt. Dies ist auch nützlich, um die Auswirkun-  
gen unterschiedlicher Vernetzungsmethoden auf die Eigenfrequenzen und Eigen-  
formen herauszuarbeiten.

### 3.2.2 Optimierung der Vernetzungsmethoden

Es gibt zwei Methoden, um die Elementqualität zu verbessern. Die erste besteht  
darin, die Vernetzungsmethode zu ändern und die zweite darin, die Elementgröße  
zu verändern. Nach „2.3.2 Grundform der Elemente“ kann die Vernetzung mit

Tetraedern, Prismen, Hexaedern und anderen Elementtypen erfolgen. Und um eine bessere Elementqualität zu erreichen, wurden bei der Auswahl die Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen verwendet.

### 3.2.2.3 Kreisring

Zum Vergleich der Elementqualität wurden verschiedene Vernetzungsmethoden auf den Kreisring verwendet. Schließlich wurde die Vernetzungsmethode gefunden, die relativ hoher Elementqualität hat. Weil der Kreisring und der Hohlzylinder eine ähnliche Struktur aufweisen, diese Vernetzungsmethode wird auch auf den Hohlzylinder verwendet.

Verwenden mehrere Vernetzungsmethoden auf den Kreisring:

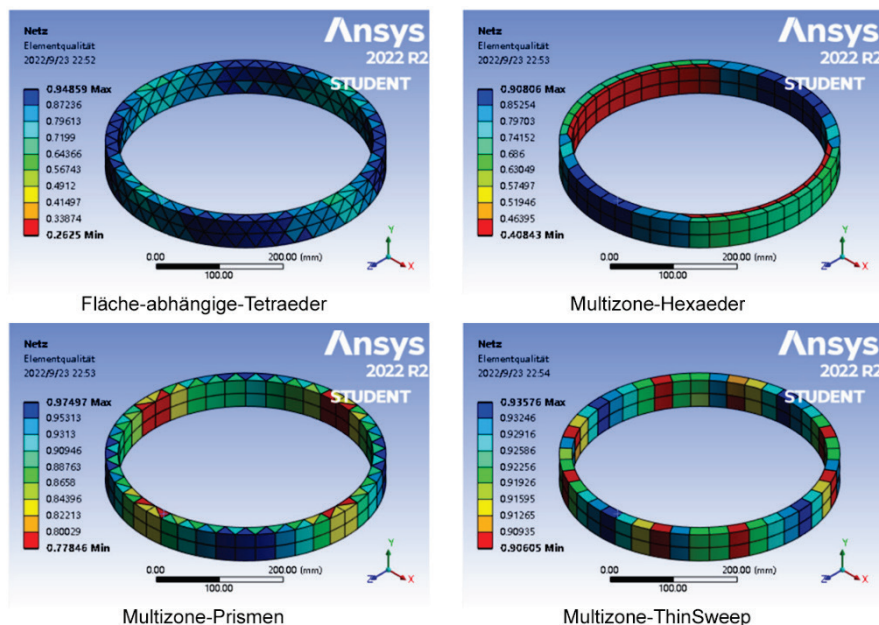


Abbildung 11: Mehrere Vernetzungsmethoden auf den Kreisring

Wie aus Abbildung 11 ersichtlich ist, dass die Farbskala die Elementqualität darstellt, und die Darstellung unterschiedlich skaliert ist. Beispielsweise haben die mit „Fläche-abhängige-Tetraeder“ Vernetzungsmethode ermittelte Elementqualität



einen Höchstwert von 0.94, aber einen Mindestwert von 0.26. Während bei der mit „MultiZone-Thin-Sweep“ Vernetzungsmethode ein Maximalwert von 0.93 und ein Minimalwert von 0.90 erreicht wird.

Daher kann mit der „MultiZone-Thin-Sweep“ Vernetzungsmethode eine bessere Elementqualität erzielt werden. Gleichzeitig besaß das Netz einen hohen Symmetriegrad.

Nachdem eine besser Vernetzungsmethode erreicht war, wurde die Elementgröße geändert, um die Elementqualität zu vergleichen. Schließlich wurden die Elementgröße mit hoher Elementqualität ausgewählt.

Bei der „MultiZone-Thin-Sweep“ Vernetzungsmethode wurde die Elementgröße des Kreisrings auf 20 mm, 31.2 mm (Standardeinstellung) bzw. 40 mm eingestellt.

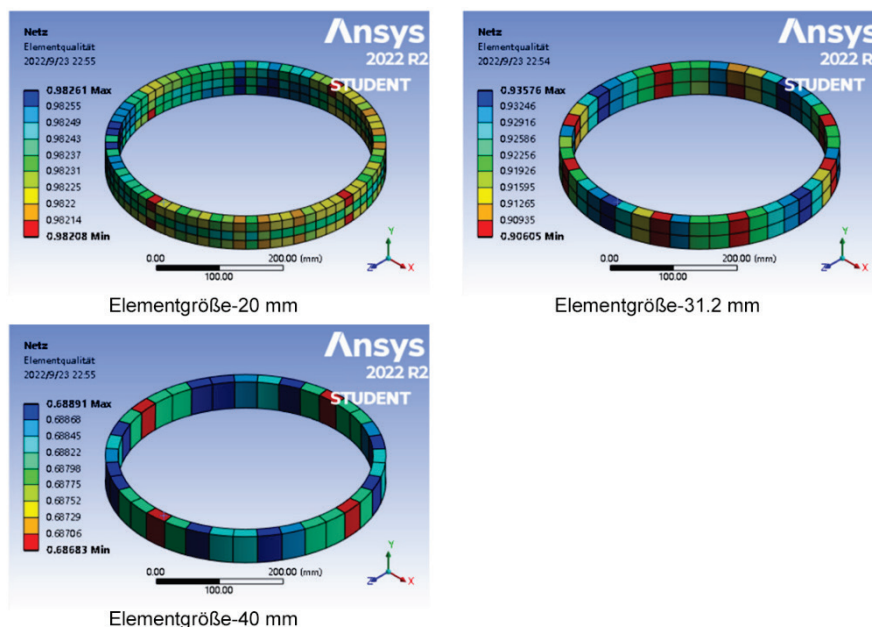


Abbildung 12: Auswirkung der Elementgröße auf die Elementqualität

Wie aus Abbildung 12 ersichtlich ist, dass die Farbskala die Elementqualität darstellt, und die Darstellung unterschiedlich skaliert ist. Wenn die Elementgröße des

Kreisrings auf 20 mm eingestellt wurde. Die Elementqualität ein Maximalwert von 0.98 und ein Minimalwert von 0.98 erreicht wird.

Daher wurden die „MultiZone-Thin-Sweep“ Vernetzungsmethode auf den Kreisringe und Hohlzylinder verwendet. Und die Elementgröße wurde auf 20 mm eingestellt.

### 3.2.2.4 Platte

Zum Vergleich der Elementqualität wurden verschiedene Vernetzungsmethoden auf die Platte verwendet. Schließlich wurde die Vernetzungsmethode gefunden, die relativ hoher Elementqualität hat. Weil die Platte und die Hohlplatte eine ähnliche Struktur aufweisen, diese Vernetzungsmethode wird auch auf die Hohlplatte verwendet.

Verwenden mehrere Vernetzungsmethoden auf die Platte.

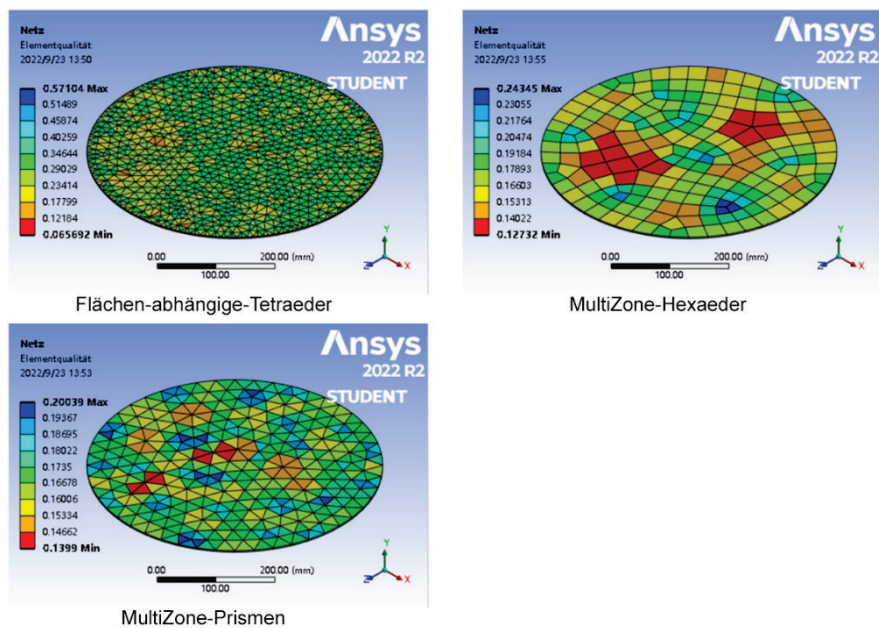


Abbildung 13: Mehrere Vernetzungsmethoden auf die Platte

Wie aus Abbildung 13 ersichtlich ist, dass die Farbskala die Elementqualität darstellt, und die Darstellung unterschiedlich skaliert ist. Aber die Elementqualität sind durchweg schlecht. Deshalb wurde versucht, die Interne Anzahl der Teilungen in Dickenrichtung zu erhöhen.

Auf der Basis der „Flächen-abhängige-Tetraeder“ Vernetzungsmethode wird die Platte in Dickenrichtung mit innerer Teilung von 3 Schichten vernetzt.

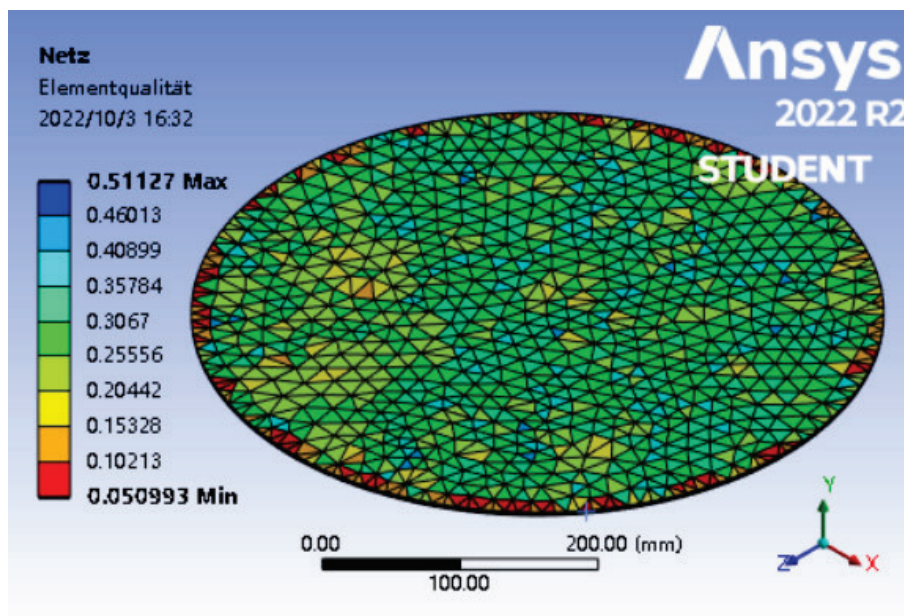


Abbildung 14: Platte mit der „Flächen-abhängige-Tetraeder“ Vernetzungsmethode mit innerer Teilung von 3 Schichten

Wie aus Abbildung 14 ersichtlich ist, ist die Elementqualität am Rand der Platte weiterhin schlecht.

Es wurde dann Schalenelemente für die Vernetzung verwendet. Die Schalenelemente eignen sich besser für Platten mit einer sehr geringen Dicke.

Nach der Neumodellierung wurde die Dicke der Platte auf 3 mm eingestellt. Die Platte wurde mit der „Nur Dreiecke“ Methode vernetzt. Und die Elementgröße wurde auf 30 mm eingestellt.

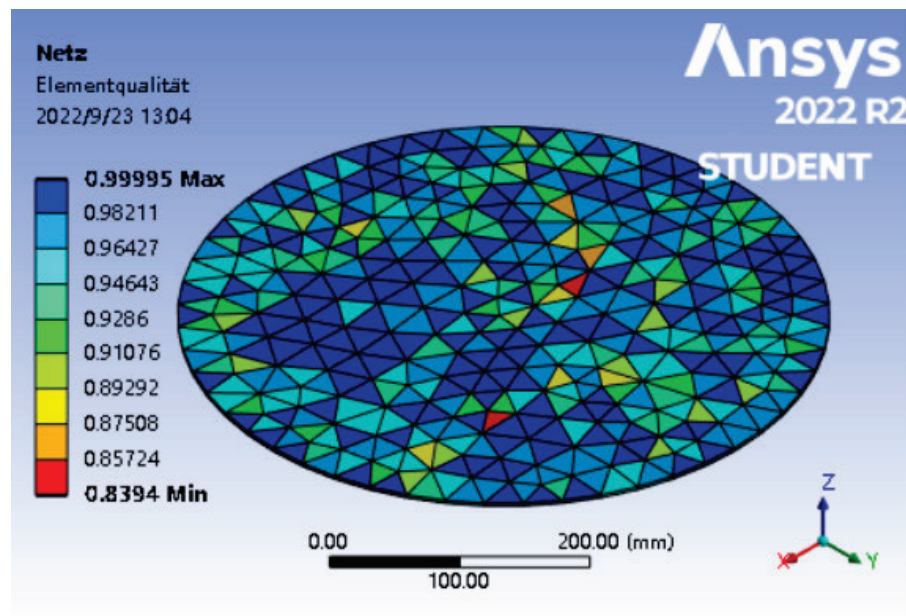


Abbildung 15: Platte mit der „Nur Dreiecke“ Vernetzungsmethode

Wie aus Abbildung 15 ersichtlich ist, dass unter Verwendung der „Nur Dreiecke“ Vernetzungsmethode zu einem hohen Symmetriegrad und einer besseren Elementqualität führt.

Daher wurden die „Nur Dreiecke“ Vernetzungsmethode auf die Platte und die Hohlplatte verwendet.

### 3.3 Eigenform und Eigenfrequenz

Nachdem eine bessere Vernetzungsmethode gefunden wurde, können die Schwingungsform des Modells sowie die Eigenfrequenz leicht mit ANSYS-Workbench berechnet werden. In dieser Arbeit werden die ersten 20 Eigenfrequenzen untersucht.

Nachfolgend ist das Bild von Kreisring unter Verwendung der „MultiZone-Thin-Sweep“ Vernetzungsmethode; Elementgröße: 20 mm.



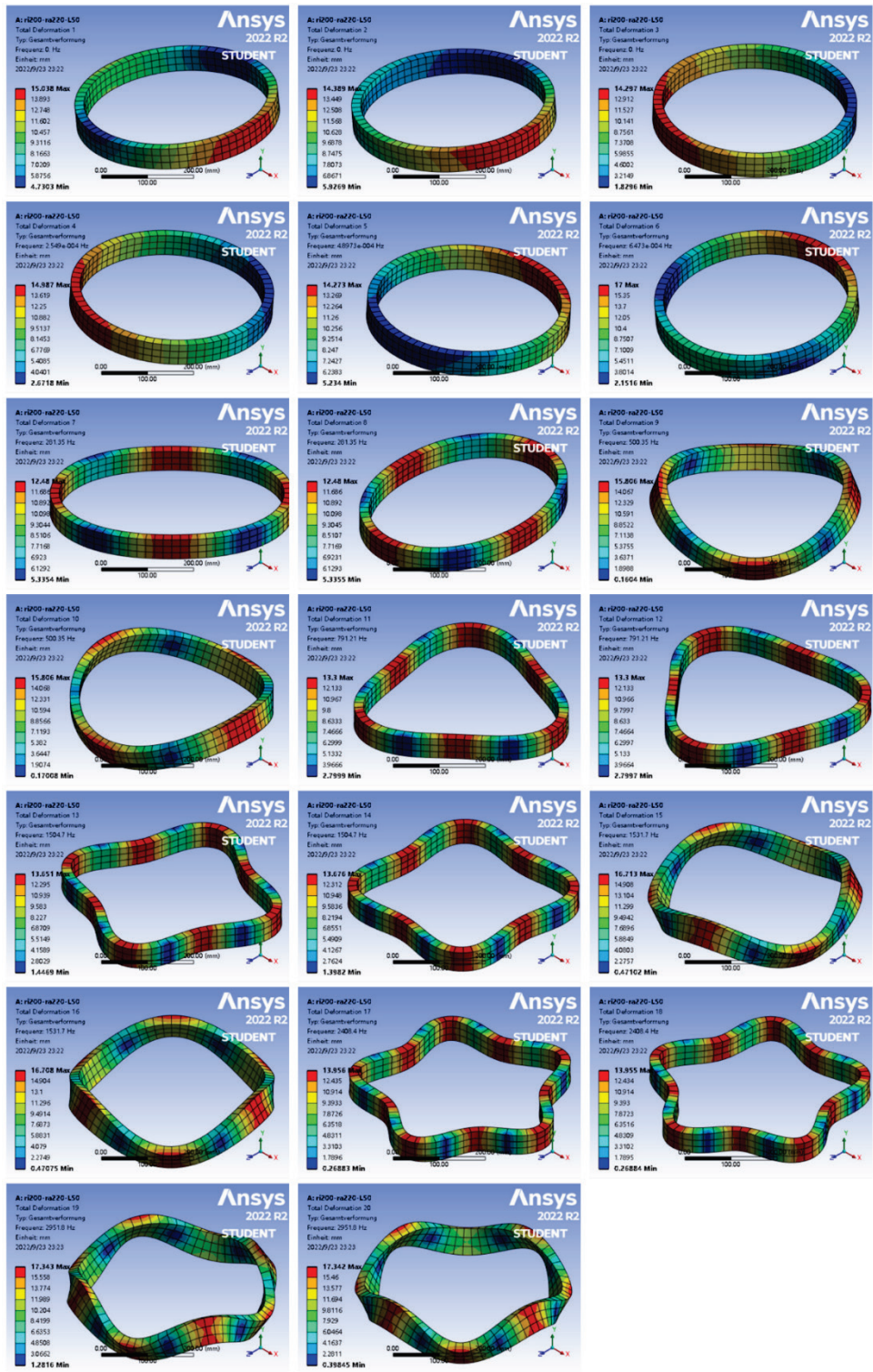


Abbildung 16: Gesamtverformung der ersten 20 Eigenfrequenzen des Kreisrings

Die Werte der ersten 20 Eigenfrequenzen sind nachstehend aufgeführt:

1. bis 20. Eigenfrequenzwerte von Kreisring (in Hz)			
1.	0.	11.	791.2
2.	0.	12.	791.2
3.	0.	13.	1504.7
4.	2.5e-004	14.	1504.7
5.	4.9e-004	15.	1531.7
6.	6.5e-004	16.	1531.7
7.	281.4	17.	2408.4
8.	281.4	18.	2408.4
9.	500.4	19.	2951.8
10.	500.4	20.	2951.8

*Tabelle 8: 1. bis 20. Eigenfrequenzwerte von Kreisring*

Nachfolgend ist das Bild von Hohlzylinder unter Verwendung der „MultiZone-Thin-Sweep“ Vernetzungsmethode; Elementgröße: 20 mm.

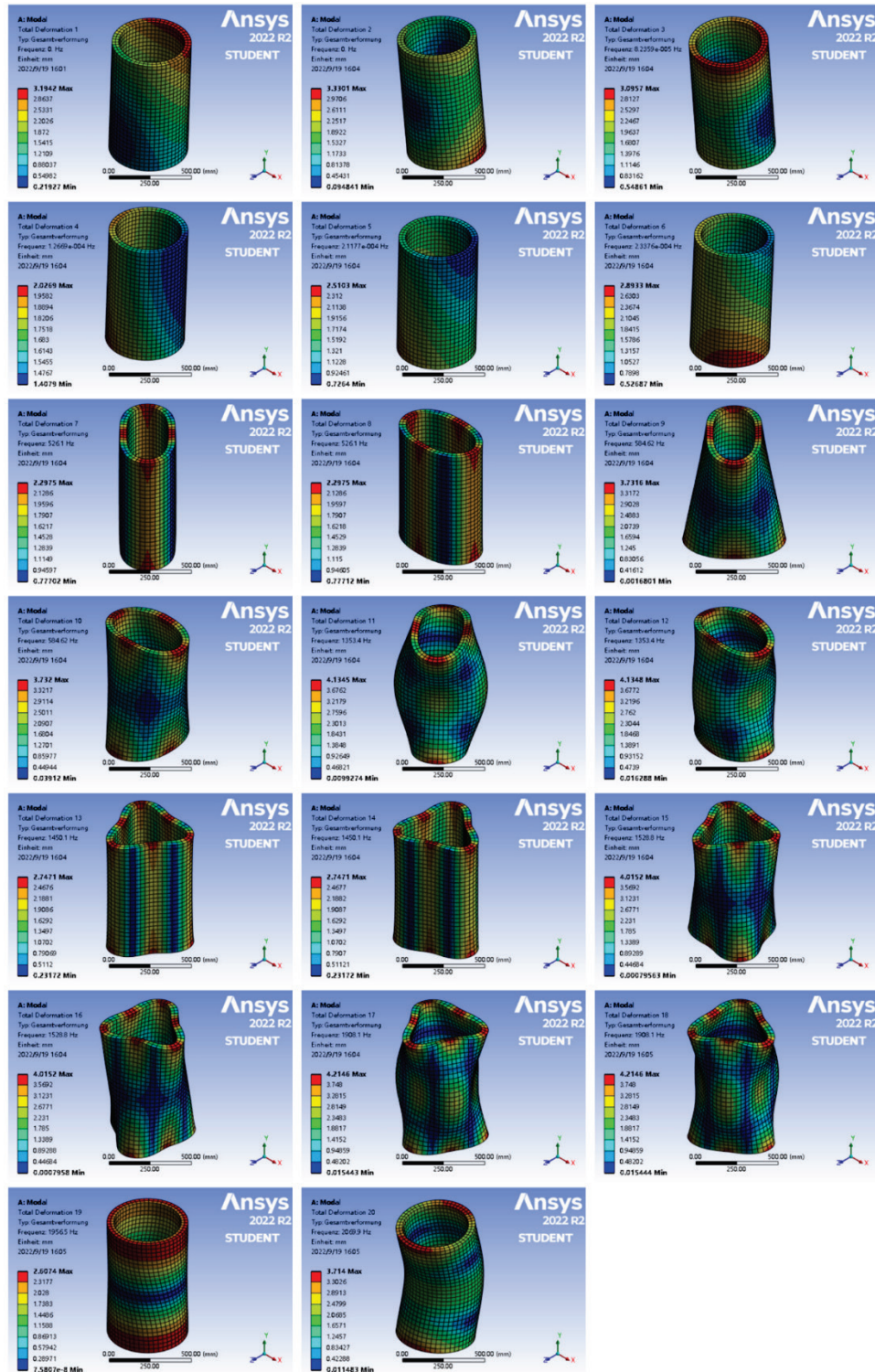


Abbildung 17: Gesamtverformung der ersten 20 Eigenfrequenzen des Hohlzylinders



Die Werte der ersten 20 Eigenfrequenzen sind nachstehend aufgeführt:

1. bis 20. Eigenfrequenzwerte von Hohlzylinder (in Hz)			
1.	0.	11.	1353.4
2.	0.	12.	1353.4
3.	8.2e-005	13.	1450.1
4.	1.3e-004	14.	1450.1
5.	2.1e-004	15.	1528.8
6.	2.3e-004	16.	1528.8
7.	526.1	17.	1908.1
8.	526.1	18.	1908.1
9.	584.6	19.	1956.5
10.	584.6	20.	2069.9

*Tabelle 9: 1. bis 20. Eigenfrequenzwerte von Hohlzylinder*

Nachfolgend ist das Bild von Platte unter Verwendung der die „Nur Dreiecke“ Ver-  
netzungsmethode; Elementgröße: 30 mm.

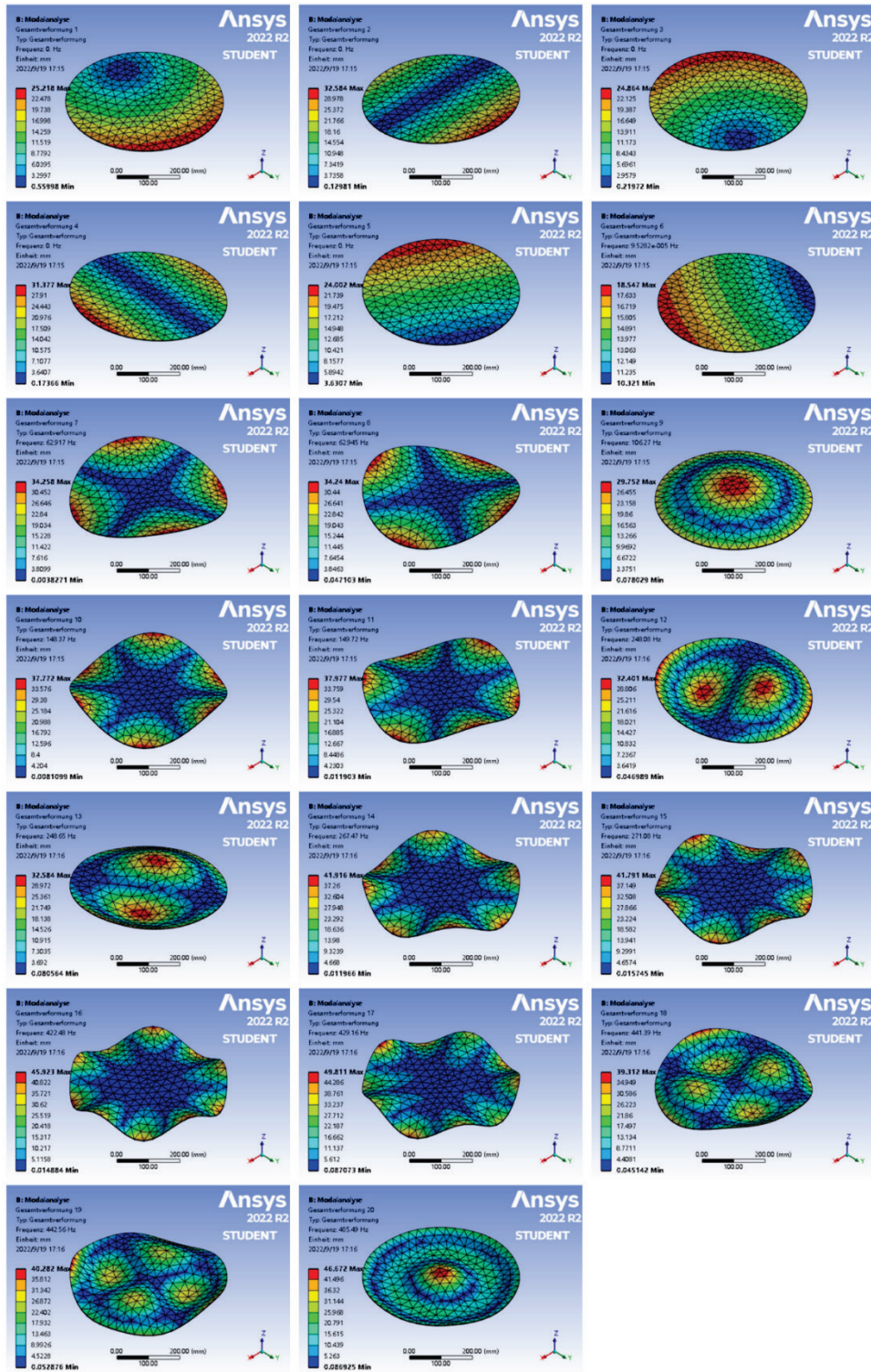


Abbildung 18: Gesamtverformung der ersten 20 Eigenfrequenzen des Platten

Die Werte der ersten 20 Eigenfrequenzen sind nachstehend aufgeführt:

1.bis 20. Eigenfrequenzwerte von Platte (in Hz)			
1.	0.	11.	149.7
2.	0.	12.	248.1
3.	0.	13.	248.7
4.	0.	14.	267.5
5.	0.	15.	271.1
6.	9.5e-005	16.	422.5
7.	62.9	17.	429.1
8.	62.9	18.	441.4
9.	106.3	19.	442.6
10.	148.4	20.	485.5

*Tabelle 10: 1.bis 20. Eigenfrequenzwerte von Platte*

Nachfolgend ist das Bild von Hohlplatte unter Verwendung der die „Nur Dreiecke“ Vernetzungsmethode; Elementgröße: 30 mm.

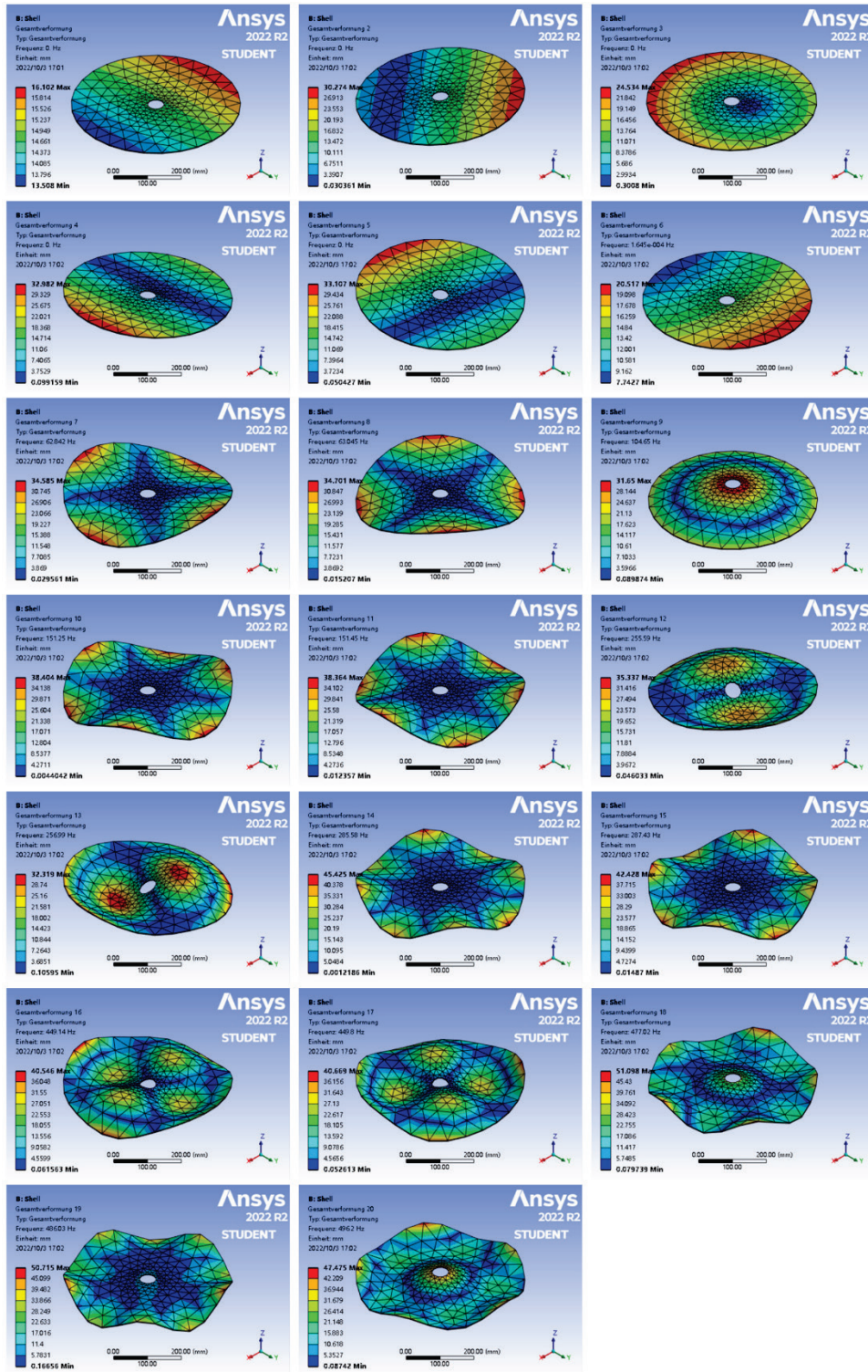


Abbildung 19: Gesamtverformung der ersten 20 Eigenfrequenzen des Hohlplatten

Die Werte der ersten 20 Eigenfrequenzen sind nachstehend aufgeführt:

1.bis 20. Eigenfrequenzwerte von Hohlplatte (in Hz)			
1.	0.	11.	151.5
2.	0.	12.	255.6
3.	0.	13.	257.0
4.	0.	14.	285.6
5.	0.	15.	287.4
6.	1.6e-004	16.	449.1
7.	62.8	17.	449.8
8.	64.0	18.	477.0
9.	104.7	19.	486.0
10.	151.2	20.	496.2

*Tabelle 11: 1.bis 20. Eigenfrequenzwerte von Hohlplatte*

### 3.4 Auswirkung der unterschiedlichen Vernetzungsmethode auf die Eigenfrequenzergebnisse

Aus der in den „3 Experimenteller Prozess: Modellbildung, Vernetzung, Datenanalyse“ verwendeten Vernetzungsmethode und den aus den Simulationen abgeleiteten Eigenfrequenzwerten lassen sich einige Schlussfolgerungen ziehen.

#### 3.4.1 Grundform von Elementen (Tetraeder, Prisma und Hexaeder)

Die Grundformen der 3d-Elemente sind nach „2.3.2 Grundform der Elemente“ Tetraeder, Prisma und Hexaeder. Prismen sind eher für Fluid-Struktur-Interaktion (FSI) geeignet, während Hexaeder-elemente und Tetraeder-elemente eher für Allgemeine Volumenelemente geeignet ist.

Nach der Vernetzung mit diesen einzelnen Elementen wird das Hexaeder-elemente als die optimale Wahl betrachtet. Und die Verwendung der Multizone-Methode ist hilfreich bei der Erstellung von hexaedrischen Elementen.

Außerdem ist die Verwendung von Schalenelementen für die Modellierung besser geeignet, wenn die Dicke des Modells sehr gering ist.

#### 3.4.2 Elementgröße

Die Elementgröße, d. h. die Anzahl der Knoten, beeinflusst die Genauigkeit der Ergebnisse. Im Allgemeinen gilt: Je kleiner die Elementgröße, desto näher liegt die simulierte Eigenfrequenz an den analytischen Lösungen, aber gleichzeitig nimmt der Berechnungsumfang zu. Darüber hinaus sollte die gesamte Elementgröße so einheitlich wie möglich sein.



Es ist auch erwähnenswert, dass eine zu große Elementgröße zu ungültigen Daten führen kann. In diesem Fall kann die interne Anzahl der Teilungen in Dickenrichtung erhöht werden.

Hier ist ein Beispiel:

Auf der Basis der „MultiZone-Thin-Sweep“ Vernetzungsmethode wird der Kreisring in Dickenrichtung mit innerer Teilung von 1,2 oder 3 Schichten vernetzt. Und die Elementgröße wurde auf 40 mm eingestellt.

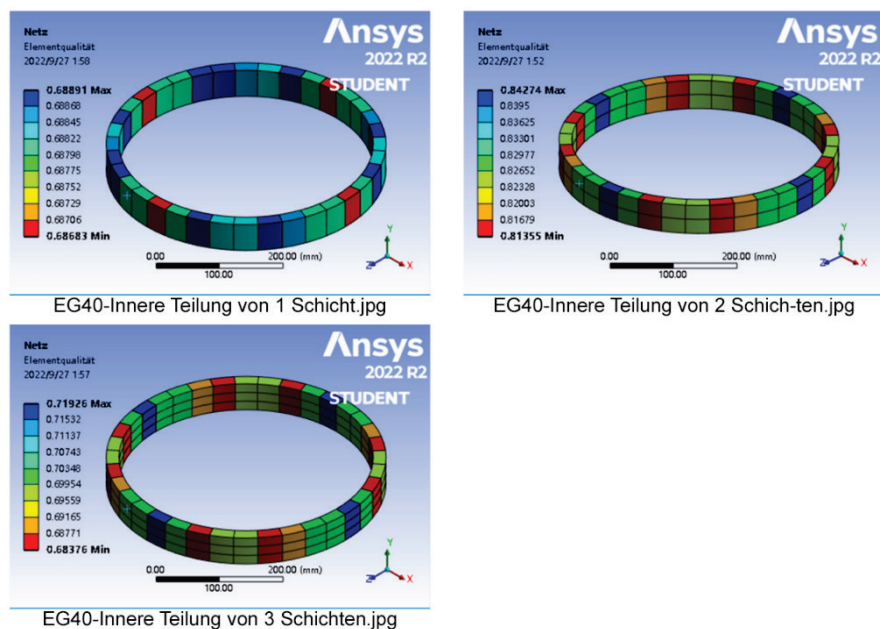


Abbildung 20: Kreisring mit der „MultiZone-Thin-Sweep“ Vernetzungsmethode mit innerer Teilung von 1,2 und 3 Schichten

Die Werte für der 7. bis 20. Eigenfrequenz sind nachstehend aufgeführt.

Eigenfrequenzwerte (in Hz)  Eigenfrequenz	<b>Analytische Lösungen</b>	Innere Teilung von 1 Schicht	Innere Teilung von 2 Schichten	Innere Teilung von 3 Schichten
7.	<b>289.3</b>	15.9	281.4	281.4
8.	<b>289.3</b>	31.6	281.4	281.4
9.		43.5	500.9	500.4
10.		46.8	500.9	500.4
11.	<b>818.3</b>	48.9	791.4	791.5
12.	<b>818.3</b>	84.5	791.4	791.5
13.	<b>1569.1</b>	84.5	1505.7	1505.8
14.	<b>1569.1</b>	157.0	1505.7	1505.8
15.		158.5	1533.3	1531.8
16.		277.4	1533.3	1531.8
17.	<b>2537.5</b>	277.4	2411.6	2411.8
18.	<b>2537.5</b>	281.1	2411.6	2411.8
19.		281.1	2955.2	2952.2
20.		450.9	2955.2	2952.2

Tabelle 12: 7. bis 20. Eigenfrequenzwerte von Kreisring (EG = 40 mm)

Wie aus Abbildung 20 und Tabelle 12 ersichtlich ist, dass eine zu große Elementgröße zu schlechten Elementqualität und ungültigen Daten führen kann. Aber wenn die interne Anzahl der Teilungen in Dickenrichtung erhöht wird, können die simulierten Eigenfrequenzwerte sehr nahe an die analytischen Lösungen herangeführt werden.



### 3.4.3 Ansatzfunktionen (Elemente mit linearen oder quadratischen Ansatzfunktionen)

Nach „2.3.2 Grundform der Elemente“ ist Elemente mit linearen Ansatzfunktionen unempfindlich gegenüber verzerrten Netzen, weil sie aufgrund ihres überaus steifen Verhaltens zu den schlechtesten Elementen überhaupt gehören und sollten höchstens als Füllerelemente (in einem Hexaeder-Netz) in unkritischen Bereichen eingesetzt werden. Und Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen eignen sich dagegen besser für Spannungsanalysen und linearer Dynamik. <sup>17</sup>

Nachfolgend wird der Kreisring mit „Multizone-Prismen“ Vernetzungsmethode vernetzt, wobei Elemente mit linearen und quadratischen Ansatzfunktionen verwendet werden. Die Elementgrößen sind beide 31.2 mm (Standardeinstellung)

Eigenfrequenzwerte (in Hz) Eigenfrequenz	<b>Analytische Lösungen</b>	Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen	Elemente mit linearen Ansatzfunktionen
7.	<b>289.3</b>	282.1	537.6
8.	<b>289.3</b>	282.1	582.3
11.	<b>818.3</b>	795.1	1566.9
12.	<b>818.3</b>	795.1	1566.9
13.	<b>1569.1</b>	1516.4	1911.0
14.	<b>1569.1</b>	1517.0	1911.1
17.	<b>2537.5</b>	2437.0	3607.2
18.	<b>2537.5</b>	2437.0	3625.8

Tabelle 13: Vergleich von Elementen mit linearen und quadratischen Ansatzfunktionen

<sup>17</sup> Vgl. Nasdala (2015)

Wie aus der Tabelle 13 ersichtlich ist, sind die Eigenfrequenzwerte, die Elemente mit linearen Ansatzfunktionen ermittelt wurden, deutlich von den analytischen Lösungen verschieden. Daher werden in dieser Arbeit mehr Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen verwendet.

## 4. Vergleich der analytischen mit der FE-Lösung

### 4.1 Analyse der FE-Lösung

Zunächst werden die Eigenfrequenzen aus der Modalanalyse von ANSYS-Workbench untergesucht.

Ein Liniendiagramm der Werte der 1. bis 20. Eigenfrequenz kann nach Tabelle 8 wie folgt erstellt werden:

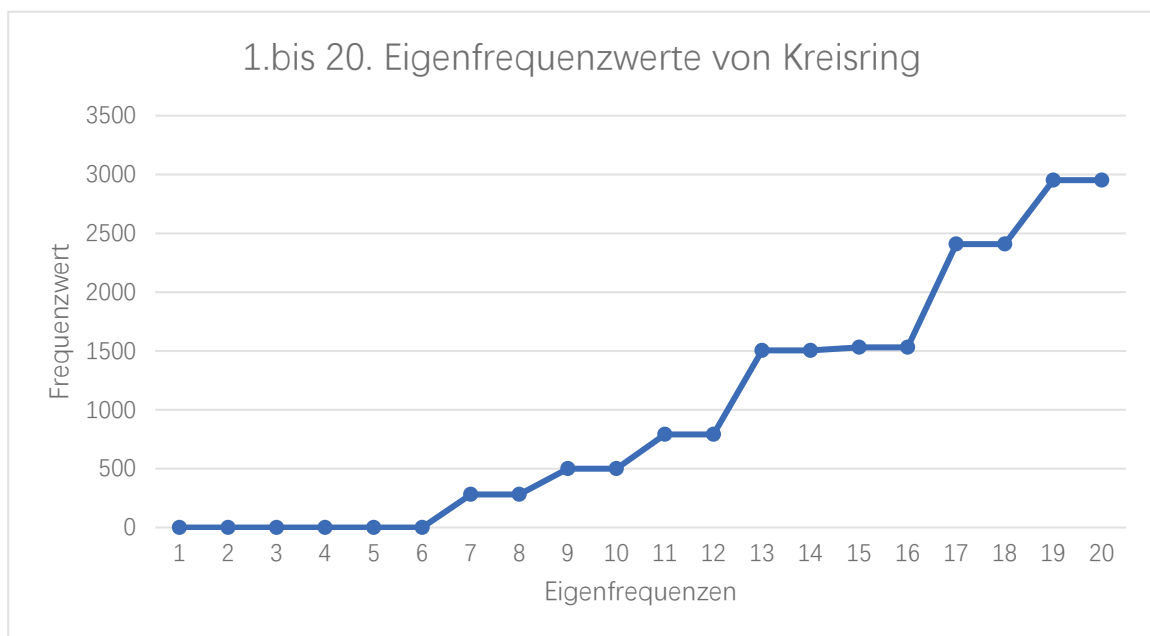


Abbildung 21: Liniendiagramm der Werte der 1. bis 20. Eigenfrequenz von Kreisring

Wie aus der Abbildung 21 ersichtlich ist, sind die Eigenfrequenzwerte von Kreisring bei den ersten sechs Eigenfrequenzen nahezu 0, da sie die Eigenfrequenzen der sechs Freiheitsgrade eines starren Körpers beschreiben, der nicht selbst schwingen kann. Normalerweise berechnet ANSYS-Workbench bei der Modalanalyse, wenn das Modell sich im freien Zustand befindet, die 1. bis 6. Eigenfrequenzwerte als 0 oder sehr nahe bei 0.

Ab der siebten Eigenfrequenz steigt die Kurve allmählich an. Eine weitere Besonderheit in Abbildung 21 ist, dass zwei benachbarte Eigenfrequenzen denselben Wert haben. Zum Beispiel haben die siebte und die achte Eigenfrequenz den gleichen Wert, die neunte und die zehnte Eigenfrequenz haben den gleichen Wert usw. Der Grund dafür liegt in der Symmetrie des Kreisrings: In der ANSYS-Modalanalyse kann eine Verformung eine Biegung eines Modells in der XOY-Ebene mit der Y-Achse als Drehachse sein; die nächste Verformung kann eine Biegung des Modells in der ZOY-Ebene mit der Y-Achse als Drehachse sein. Das heißt, sie haben die gleiche Form der Schwingungsverformung. Daher haben sie den gleichen Eigenfrequenzwert.

## 4.2 Vergleich für den Kreisring

Die Beziehung zwischen die analytischen Eigenfrequenzwerten und dem mit ANSYS-Workbench simulierten Eigenfrequenzwerten wird im Folgenden untersucht.

Nach „2.4.2 Analytische Berechnung der Eigenfrequenz“ sind die analytischen Eigenfrequenzwerten von Kreisring jeweils:

$$f_{k1} = 289.3 \text{ Hz}, f_{k2} = 818.3 \text{ Hz}, f_{k3} = 1569.1 \text{ Hz und } f_{k4} = 2537.5 \text{ Hz}.$$

Nach Vergleich der analytischen mit der FE-Lösung ist der analytische Wert für  $k=2$  ähnlich wie die simulierten Eigenfrequenzen der 7. und 8.; für  $k=3$  ähnlich wie die simulierten Eigenfrequenzen der 11. und 12.; für  $k=4$  ähnlich wie die simulierten Eigenfrequenzen der 13. und 14.; für  $k=5$  ähnlich wie die simulierten Eigenfrequenzen der 17. und 18.

Wie oben erwähnt, sind die ersten sechs Eigenfrequenzen alle null, und ab der siebten ist jede zweite Eigenfrequenz gleich. Es ist erwähnenswert, dass die zehnten Eigenfrequenz aus der ANSYS-Simulation Wert gibt es keinem

entsprechenden analytischen Wert hat. Der Grund dafür ist auf dem Bild der 10. und 11. Eigenform zu sehen:

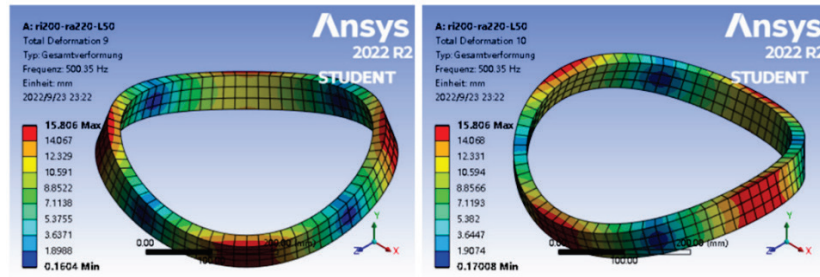


Abbildung 22: die 10. und 11. Eigenform von Kreisring

Aus Abbildung 22 ist ersichtlich, dass der Kreisring sowohl bei der 10. als auch bei der 11. Eigenform in Längsrichtung verformt werden. Dies ist das Ergebnis des vernachlässigten  $h$  (Höhe des Kreisrings) in der Formel Berechnung. (Die Gründe dafür werden später in „5.1 Kreisring - Einfluss des Radius auf die Eigenfrequenzen“ erläutert.) Die Verformung in Längsrichtung ist auch in der 15., 16. und 19., 20. Eigenform vorhanden.

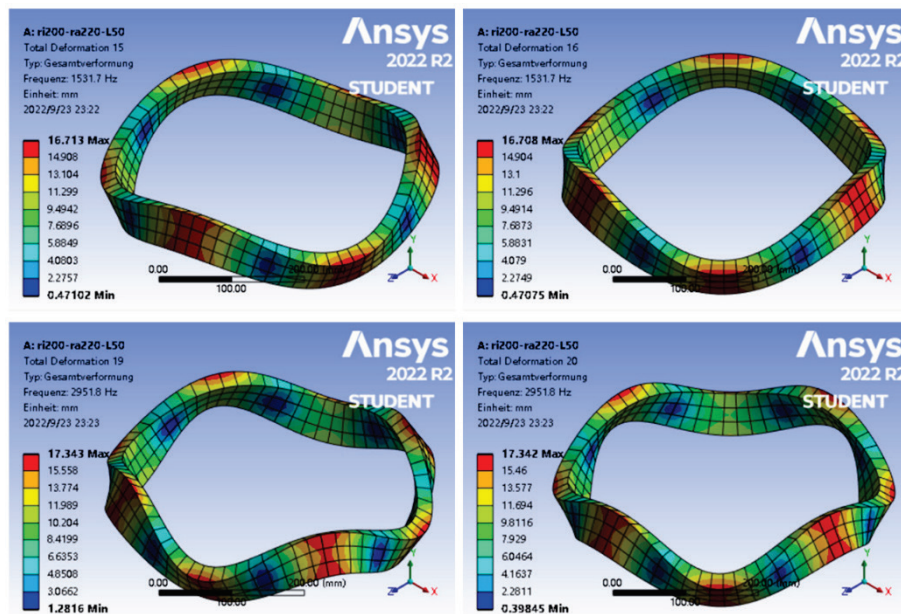


Abbildung 23: der 15., 16. und 19., 20. Eigenform von Kreisring

Es ist daher bemerkenswert, dass die analytischen Eigenfrequenzen nicht zur Berechnung mehrerer Eigenformen verwendet werden können, wenn eine Verformung in Längsrichtung vorliegt.

### 4.3 Vergleich für die Platte

Nach „2.4.2 Analytische Berechnung der Eigenfrequenz“ sind die analytischen Eigenfrequenzwerten von Platte jeweils:

$$f_{k1} = 62.76 \text{ Hz}, f_{k2} = 108.43 \text{ Hz}, f_{k3} = 148.49 \text{ Hz} \text{ und } f_{k4} = 250.35 \text{ Hz}.$$

Ein Liniendiagramm der Werte der 1. bis 20. Eigenfrequenz kann nach Tabelle 10 wie folgt erstellt werden:

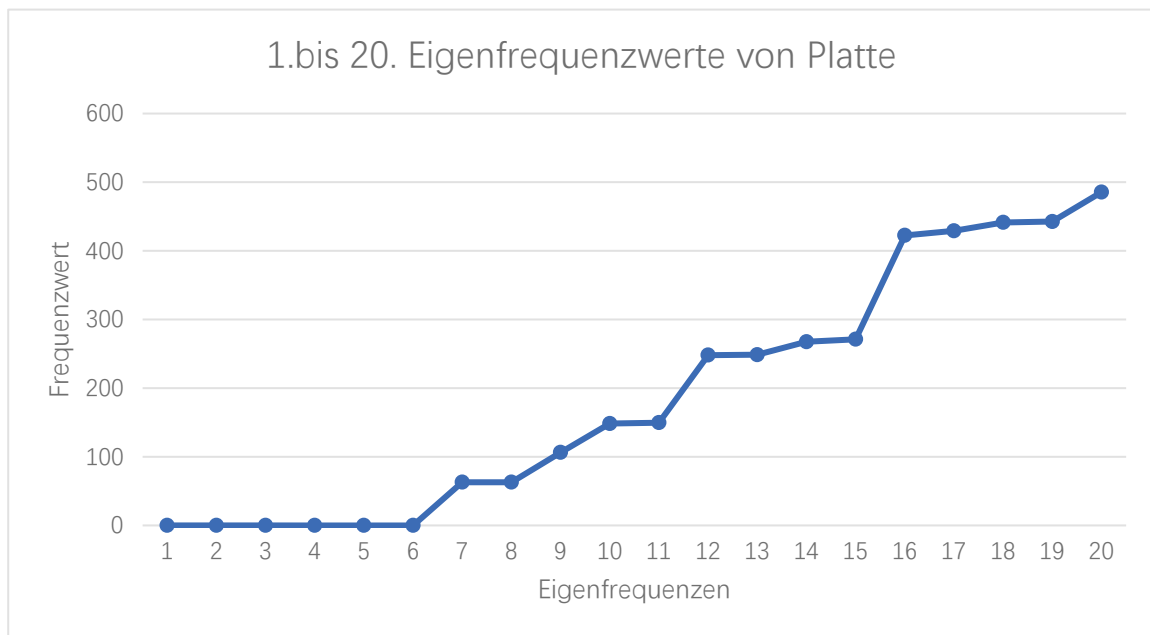


Abbildung 24: Liniendiagramm der Werte der 1. bis 20. Eigenfrequenz von Platte

Aus der Abbildung 24 hervorgeht, ist der analytische Wert  $f_{k1} = 62.76 \text{ Hz}$  ähnlich wie die simulierte Eigenfrequenzen der 7. und 8.; für  $f_{k2} = 108.43 \text{ Hz}$  ähnlich wie die simulierte die 9. Eigenfrequenzen; für  $f_{k3} = 148.49 \text{ Hz}$  ähnlich wie die simulierte Eigenfrequenzen der 10. und 11.; für  $f_{k4} = 250.35 \text{ Hz}$  ähnlich wie die wie die simulierte Eigenfrequenzen der 12. und 13..

Der Grund dafür liegt in der Symmetrie des Kreisrings. Nach „4.1 Analyse der“, dass zwei benachbarte Eigenfrequenzen die gleiche Form der Schwingungsverformung haben. Daher haben sie den gleichen Eigenfrequenzwert.

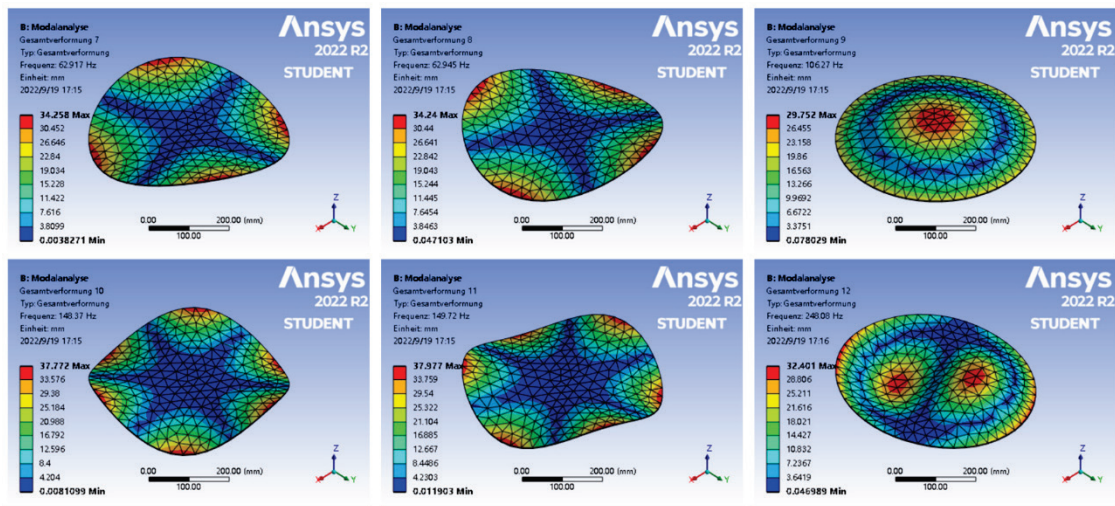


Abbildung 25: der 7. bis 11. Eigenform von Platte

## 5. Variante

Um der Einfluss von Geometrieparametern auf die Eigenfrequenzen und Eigenformen zu untersuchen, wurden die Abmessungen der Kreisringe und Platten in verschiedenen Varianten variiert und deren Eigenfrequenzen analysiert.

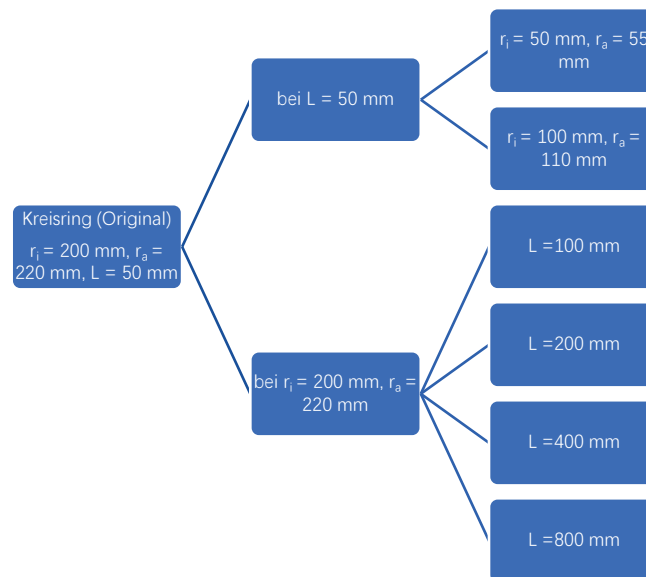


Abbildung 26: Varianten des Kreisrings

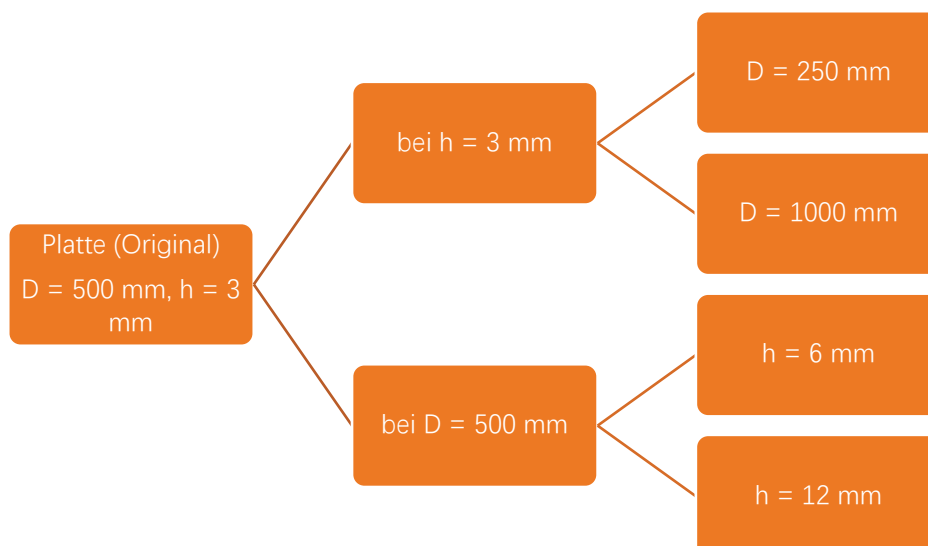


Abbildung 27: Varianten der Platte



Die Modellierung wurde auf die gleiche Weise wie zuvor durchgeführt. Um genauere Daten zu erhalten, wurde in allen Fällen die gleiche Vernetzungsmethode wie oben verwendet.

Um genauere Eigenfrequenzwerte zu erhalten, wird daher für alle Kreisringvarianten die „MultiZone-Thin-Sweep“ Vernetzungsmethode verwendet.

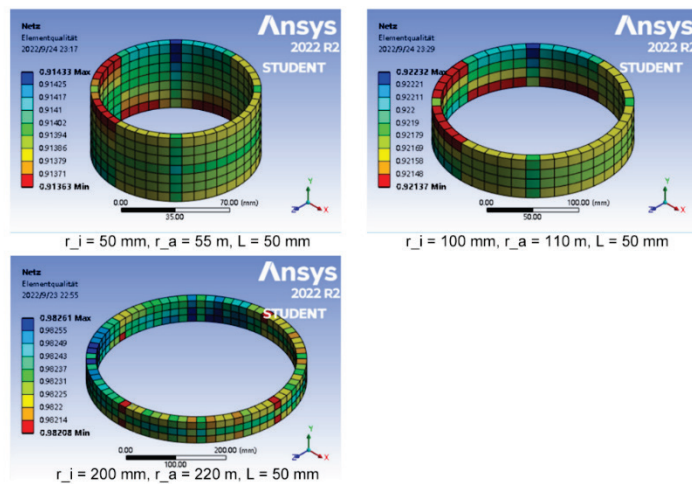


Abbildung 28: Die Modellierung und Vernetzung von Kreisring-Varianten mit gleicher Höhe

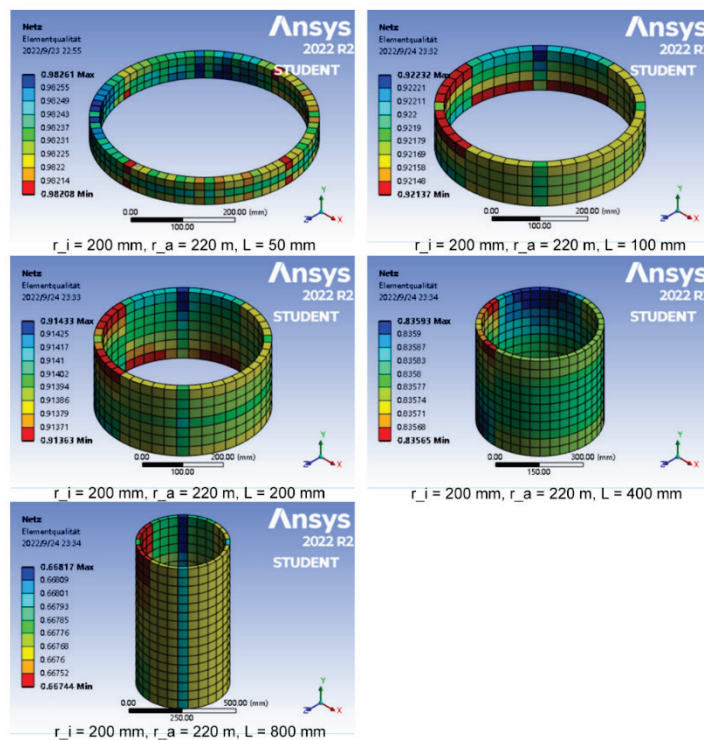


Abbildung 29: Die Modellierung und Vernetzung von Kreisring-Varianten mit gleichem Radius

Um genauere Eigenfrequenzwerte zu erhalten, wird daher für alle Platte varianten die „Nur Dreiecke“ Vernetzungsmethode verwendet.

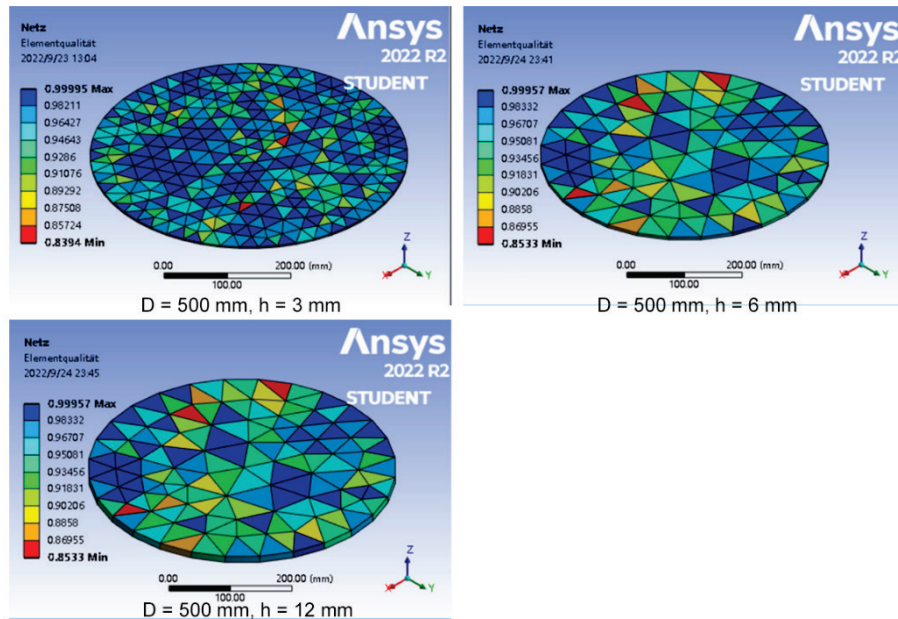


Abbildung 30: Die Modellierung und Vernetzung von Platte-Varianten mit gleichem Radius

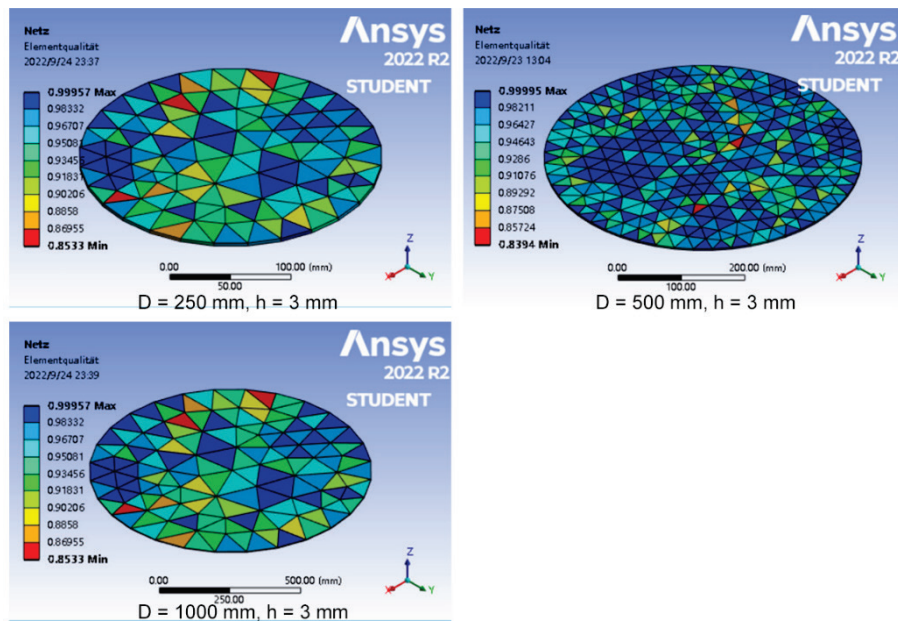


Abbildung 31: Die Modellierung und Vernetzung von Platte-Varianten mit gleicher Höhe

## 5.1 Kreisring - Einfluss des Radius auf die Eigenfrequenzen

Wenn die Ringe in Längsrichtung nicht verformt werden, d. h. Ringe mit gleichem Radius, aber unterschiedlicher Länge, haben bei gleicher Eigenfrequenz den gleichen Frequenzwert.

z. B., wenn  $r_i$  beträgt 200 mm,  $r_a$  beträgt 220 mm;

L beträgt 50 mm, 100 mm, 200 mm, 400 mm bzw. 800 mm;

Die Eigenformen von Verformungen wie elliptische, dreieckige, viereckige und fünfeckige Formen können abgeleitet werden.

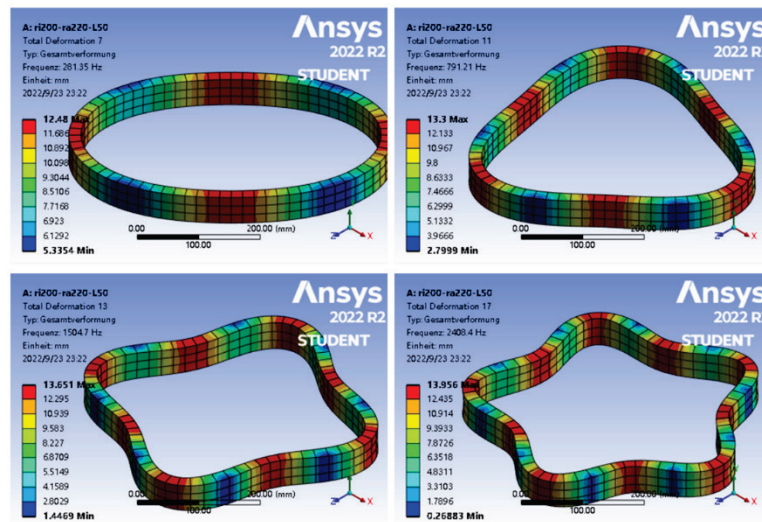


Abbildung 32:  $r_i200$ - $r_a220$ - $L50$ - Kreisverformungen der 7., 11., 13. und 17. Eigenfrequenz

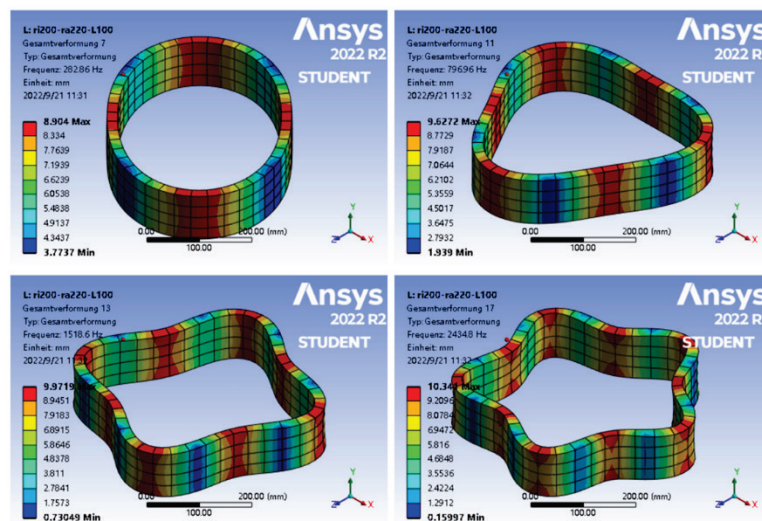


Abbildung 33:  $r_i200$ - $r_a220$ - $L100$ - Kreisverformungen der 7., 11., 13. und 17. Eigenfrequenz



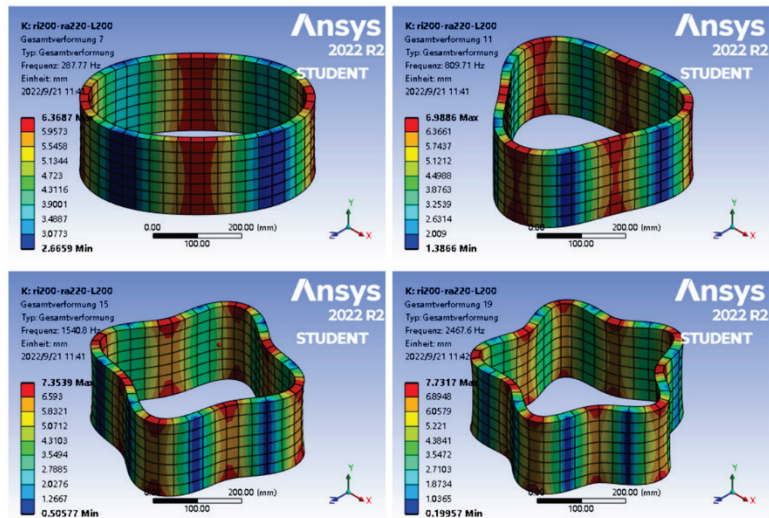


Abbildung 34: ri200-ra220-L200- Kreisverformungen der 7., 11., 15. und 19. Eigenfrequenz

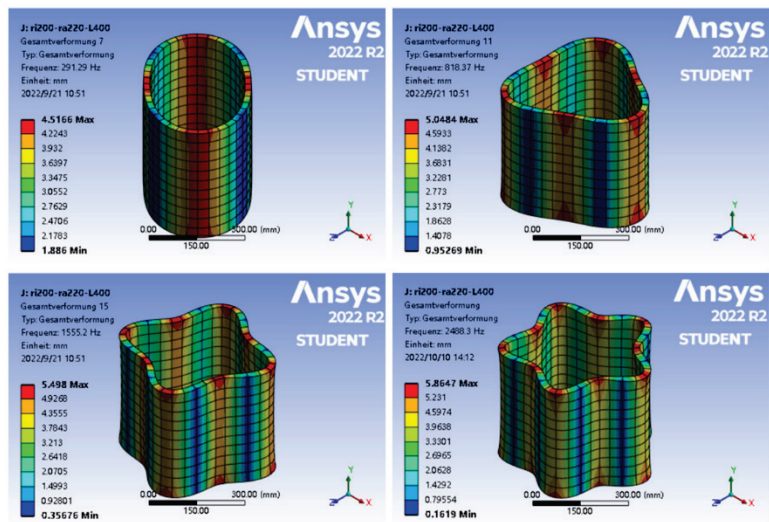


Abbildung 35: ri200-ra220-L400- Kreisverformungen der 7., 11., 15. und 21. Eigenfrequenz

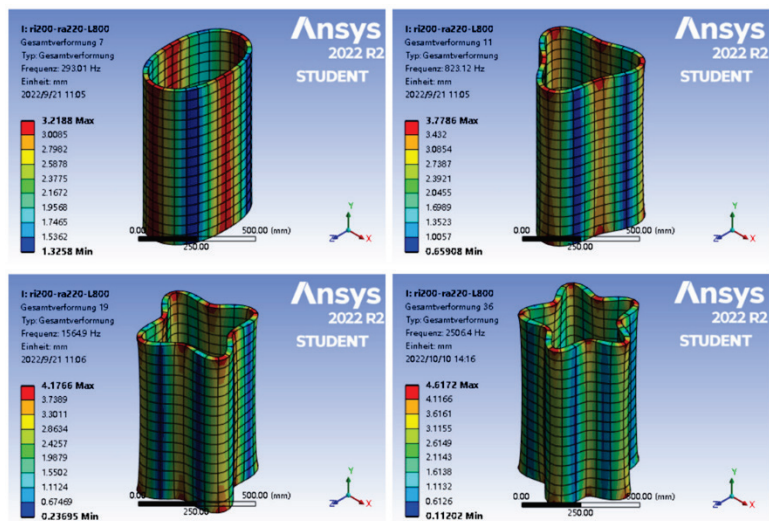


Abbildung 36: ri200-ra220-L800- Kreisverformungen der 7., 11., 19. und 36. Eigenfrequenz

Die Werte einiger spezifischer Eigenfrequenzen sind nachstehend aufgeführt:

Eigenfrequenzwerte (in Hz)  L (in mm)	7. /8. (Elliptische Verformung)	11. /12. (Dreieckige Verformung)	13. /14. (Viereckige Verformung)	17. /18. (Fünfeckige Verformung)
50	281.3	791.2	1504.7	2408.4
100	282.9	797.0	1518.6	2324.8
200	287.8	809.7	(in 15. /16. Eigenfrequenz) 1540.8	(in 19. /20. Eigenfrequenz) 2468.6
400	291.3	818.3	(in 15. /16. Eigenfrequenz) 1555.2	(in 21. /22. Eigenfrequenz) 2488.3
800	293.0	823.1	(in 19. /20. Eigenfrequenz) 1564.9	(in 36. /37. Eigenfrequenz) 2506.4

Tabelle 14: Vergleich von Eigenfrequenzwerten verschiedener Kreisringlängen bei spezifischen Eigenfrequenzen

Der Grund liegt darin:

Mit der Gleichung 2.8, 2.4 und 2.5 wird die anschließende Gleichung abgeleitet:

$$k_i = \sqrt{\frac{EI}{\mu R^4}} = \sqrt{\frac{E * \frac{L(r_a - r_i)^3}{12}}{\rho L(r_a - r_i) * R^4}} = \sqrt{\frac{E * (r_a - r_i)^2}{12 * R^4}} \quad 5.1$$

Daher ist die Frequenz des Kreisringes unabhängig von L, wenn es keine Verformung in Längsrichtung gibt.

## 5.2 Kreiszyylinder - Kombiniertes Einfluss des Radius und der Länge auf die Eigenfrequenzen

Wenn die Modellgröße in gleichem Maße zunimmt, nimmt der Wert jeder Eigenfrequenz in gleichem Maße ab.

Der Grund dafür ist, dass, wenn zwei Modelle geometrisch ähnlich sind, d. h. die Strukturform und die Randbedingungen der Modellstruktur gleich sind, dann sind auch die Eigenschwingungsformen oder die relativen Positionen der Knoten und Bäuche gleich.<sup>18</sup>

Vergleich der Eigenfrequenzwerte, wenn die Kreiszyylindergröße doppelt so groß wird:

Modellgröße (in mm) Eigenfrequenzwerte (in Hz)	Kreiszyylinder ( $r_i = 100, r_a = 110, L = 50$ )	Kreiszyylinder ( $r_i = 200, r_a = 220, L = 100$ )	Vergleich
7.	565.7	282.9	0.5
8.	565.7	282.9	0.5
9.	1176.9	588.4	0.5
10.	1176.9	588.4	0.5
11.	1593.9	797.0	0.5
12.	1593.9	797.0	0.5
13.	3037.2	1518.6	0.5
14.	3037.2	1518.6	0.5
15.	3423.8	1711.9	0.5

<sup>18</sup> Vgl. Klöcker, M., H. Hallmann, S. Handl (2021)

16.	3423.8	1711.9	0.5
17.	4869.6	2434.8	0.5
18.	4869.6	2434.8	0.5
19.	6023.5	3011.8	0.5
20.	6023.5	3011.8	0.5

Tabelle 15: Vergleich der Eigenfrequenzwerte der Kreiszyylinder bei doppelter Größe

Vergleich der Eigenfrequenzwerte bei Vervierfachung der Kreiszyylindergröße:

Modellgröße (in mm) Eigenfrequenzwerte (in Hz)	Kreiszyylinder ( $r_i = 50$ , $r_a = 55$ , $L = 50$ )	Kreiszyylinder ( $r_i = 200$ , $r_a = 220$ , $L = 200$ )	Vergleich
7.	1151.1	287.8	0.25
8.	1151.1	287.8	0.25
9.	2066.7	516.7	0.25
10.	2066.7	516.7	0.25
11.	3238.8	809.7	0.25
12.	3238.8	809.7	0.25
13.	5179.5	1294.9	0.25
14.	5179.5	1294.9	0.25
15.	6163.3	1540.8	0.25
16.	6163.3	1540.8	0.25
17.	8689.5	2172.4	0.25
18.	8689.5	2172.4	0.25
19.	9870.2	2467.6	0.25
20.	9870.2	2467.6	0.25

Tabelle 16: Vergleich der Eigenfrequenzwerte der Kreiszyylinder bei vierfacher Größe

Der Grund liegt darin:

Mit der Gleichung 5.1 wird die anschließende Gleichung abgeleitet:

$$k_i = \sqrt{\frac{E \cdot (r_a - r_i)^2}{12 \cdot R^4}} = \sqrt{\frac{E}{12}} \cdot \frac{r_a - r_i}{R^2} \quad 5.2$$

Wobei diese Formel nur für die elliptische, dreieckige, viereckige, etc. Schwingform gilt, wurde das Verhalten jedoch für alle Eigenfrequenzen verwendet.

Wenn  $r_a$  und  $r_i$  und  $L$  doppelt so groß werden, wird auch  $R$  doppelt so groß. Daher wird die Eigenfrequenz auf die Hälfte des ursprünglichen Wertes reduziert.

Ähnlich verhält es sich, wenn die Größe auf das Vierfache der ursprünglichen Größe ansteigt und die Eigenfrequenz ein Viertel beträgt.



### 5.3 Platte- Einfluss der Geometrie auf die Eigenfrequenzen

Das gleiche Prinzip gilt für die Platte:

Vergleich der Eigenfrequenzwerte, wenn die Platte-Größe doppelt so groß wird:

Modellgröße (in mm)  Eigenfrequenz- werte (in Hz)	Platte (D = 250, h = 3)	Platte (D = 500, h = 6)	Vergleich
7.	254.21	127.1	0.5
8.	255.95	127.97	0.5
9.	438.65	219.32	0.5
10.	613.89	306.95	0.5
11.	644.26	322.13	0.5
12.	1062.2	531.08	0.5
13.	1083.7	541.86	0.5
14.	1170.2	585.08	0.5
15.	1183.2	591.58	0.5
16.	1923.	961.52	0.5
17.	1931.6	965.8	0.5
18.	1987.1	993.55	0.5
19.	2069.2	1034.6	0.5
20.	2281.9	1141.	0.5

*Tabelle 17: Vergleich der Eigenfrequenzwerte der Platten bei doppelter Größe*

Der Grund liegt darin:

Mit der Gleichung 2.12 und 2.13 wird die anschließende Gleichung abgeleitet:

$$\omega_k = \alpha \sqrt{\frac{EI}{\rho * h * R^4}} = \alpha \sqrt{\frac{E * \frac{h^3}{12(1-\nu^2)}}{\rho * h * R^4}} = \alpha \sqrt{\frac{E * h^2}{12(1-\nu^2) * \rho * R^4}} = \alpha \sqrt{\frac{E}{12(1-\nu^2) * \rho}} * \frac{h}{R^2} \quad 5.3$$

Mit  $R = \frac{D}{2}$

Wenn D und h doppelt so groß werden, beträgt die Eigenfrequenz die Hälfte des ursprünglichen Wertes.

Diese Schlussfolgerung erleichtert die Entwicklung von Reihen, in denen die Eigenfrequenzen in verschiedenen Reihen geschätzt werden.

## 6. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Bachelorarbeit wurde eine Modalanalyse für elementare Strukturen (Kreisring, Hohlzylinder, Platte und Hohlplatte) mit Hilfe der Finiten Elemente Methode in ANSYS durchgeführt.

Zunächst wurde der Aufbau von Elementaren Körper vorgestellt. Dann wurden die Theoretische Grundlagen von Modalanalyse und Finiten Elemente Analyse eingeführt. Und in der Arbeit wurde die Modalanalyse mit Hilfe der FEM berechnet.

Als nächstes wurde die ANSYS-Workbench-Software verwendet, um vier Modelle zu modellieren. Und diese vier Modelle wurden mit verschiedenen Vernetzungsmethoden vernetzt. Und die optimale Vernetzungsmethode wurde durch Vergleich abgeleitet. Ihre Eigenfrequenzen und Eigenformen wurden mit Hilfe der ANSYS-Workbench-Software abgeleitet. Darüber hinaus wurde der Einfluss von Vernetzungsmethoden und Geometrieparametern auf die Eigenfrequenzen und Eigenformen untersucht.

Außerdem wurde die FE-Lösung analysiert und dann mit der analytischen Eigenfrequenzwerten verglichen.

Schließlich wurden Varianten des Kreisrings und der Platte erstellt und diese ebenfalls vernetzt. Der Einfluss der Geometrie auf die Eigenfrequenz wurde ebenfalls separat untersucht.

Modalanalyse ist sehr hilfreich bei der Produktentwicklung. Aber der Berechnungsprozess der analytischen Modalanalyse ist sehr komplexer. Die Formel leidet auch unter der Unfähigkeit, die Eigenfrequenz des Modells zu berechnen, wenn eine Verformung in Längsrichtung vorliegt. Daher ist der Anwendung von Finite-Elemente-Methoden bei der Modalanalyse eine große Hilfe.

Bei der Finite-Elemente-Analyse liegt ein Augenmerk auf der Vernetzungsmethode. Die Verwendung geeigneter Vernetzungsmethoden wird daher zu genaueren Werten der simulierten Eigenfrequenzen führen.

Die Entscheidung der Vernetzungsmethode hängt von der Elementqualität ab. Im Allgemeinen gilt: Je besser die Elementqualität, desto näher liegen die simulierten Eigenfrequenzwerte an den theoretischen Werten. Allerdings ist die Elementqualität nicht das einzige Kriterium zur Beurteilung der Genauigkeit der resultierenden Simulationen, sondern auch die Spärlichkeit des Netzes und die Symmetriegrad der Vernetzung. Daher haben der Grundform, die Größe des Elements und die Ansatzfunktionen auch einen erheblichen Einfluss auf die Eigenfrequenz.

Darüber hinaus können für die neue Variante die Eigenfrequenzen aus den Eigenfrequenzergebnissen des Basismodells mittels Variablengrößen abgeleitet werden. Nämlich wenn die Modellgröße in gleichem Maße zunimmt, nimmt der Wert jeder Eigenfrequenz in gleichem Maße ab.

Zusammenfassend ist es, dass mit der Verbreitung der Computertechnologie und der ständigen Weiterentwicklung der CAE-Technologie die Methoden zur Modalanalyse immer einfacher werden. Theoretische Werte, die früher mit Hilfe komplizierter Formeln abgeleitet wurden, können nun einfach durch Computersimulationen ermittelt werden. Aber ob die simulierten Ergebnisse tatsächlich mit den theoretischen Ergebnissen übereinstimmen, erfordert komplexe Vergleiche. Das Ziel dieser Arbeit ist es, die dynamischen Berechnungen zu vereinfachen und durch

bessere Vernetzungsmethode und Elementgrößeneinstellungen schnell genauere Ergebnisse zu erzielen.

Die Aufgabe der Simulation besteht nicht darin, die Realität zu reproduzieren, sondern den Ingenieuren zu helfen, die Realität zu verstehen. Die Simulation kann nur die menschliche Berechnung, nicht jedoch das menschliche Denken ersetzen. Und der Wert eines Menschen liegt darin, dass Mensch denken und kreativ sein kann.

## 7. Literaturverzeichnis

1. ANSYS (2022): Workbench: Individuelle Projektplattform für die Verwaltung aller Ihrer ANSYS-Produkte: URL: <https://www.ANSYS.com/de-de/products/ANSYS-workbench>  
[Stand: 02.09.2022].
2. Den Hartog, J. P., Mesmer, G. (1952): Mechanische Schwingungen, Springer-Verlag Berlin
3. Fischer, J. (22.11.21): AST\_Vorlesung\_08\_KW47\_Modalanalyse
4. Fischer, J. (11.08.22): Thema&Aufgabestellung NaechsteSchritte, Seite 2
5. Fischer, J. (26.09.22): FEStrukturen, Seite 2
6. Gjelstrup, S. (15.03.20): Modalanalyse: Der ultimative Ratgeber: URL: <https://dewesoft.com/de/daq/was-ist-modalanalyse>  
[Stand: 06.09.2022].
7. Klöcker, M., H. Hallmann, S. Handl (2021): Scale-Up-Verfahren zur Ermittlung der Eigenfrequenzen geometrisch ähnlicher Strukturen van Baureihen, VDI-Berichte Nr. 2391, Seite 107-108
8. Nasdala, L. (2015); FEM-Formelsammlung Statik Und Dynamik; Springer Vieweg; © Springer Fachmedien Wiesbaden 2015; ISBN 978-3-658-06630-7 (e-Book), Seite 137-138
9. Pan, J. (04.10.21): Was ist die Finite-Elemente-Analyse (FEA)? :URL: <https://zhuanlan.zhihu.com/p/56326567>  
[Stand: 02.09.2022].
10. Tan, X. (15.11.16): Was ist die Eigenfrequenz? :URL: <https://zhuanlan.zhihu.com/p/23320350>  
[Stand: 06.09.2022].
11. Uygun, U. (02.08.20): Looking To Element Quality In ANSYS® Meshing(Illustrated Expression) :URL: <https://mechanicalland.com/looking-to-element-quality-in-ansys-meshingillustrated-expression/>  
[Stand: 10.10.2022].

## **Eidesstattliche Erklärung**

Ich erkläre hiermit an Eides statt, vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Zuhilfenahme unzulässiger Hilfsmittel angefertigt zu haben. Wörtliche oder dem Sinne nach übernommenen Ausführungen sind gekennzeichnet, sodass Missverständnisse über die geistige Urheberschaft ausgeschlossen sind. Diese Arbeit war bisher noch nicht Bestandteil einer Studien- oder Prüfungsleistung in gleicher oder ähnlicher Fassung.

Berlin, 19.10.2022