Ferdinand Engel u. Karl Heinrich Schellbach.

Darstellende Optik

II. Text

Berlin, Springer 1849/50

Erklärung der Tafeln.

Der Zweck dieser Zeichnungen ist, das schwierige Studium der Optik zu erleichtern und namentlich eine klare Vorstellung von der Wirkungsweise optischer Instrumente zu erwecken. Dass die bekannten Lehrbücher der Optik und selbst sorgfältig angestellte Rechnungen diesen Zweck nicht in dem Maasse erfüllen, als die vorliegenden Constructionen, dafür könnten wir das Urtheil der sachkundigsten Physiker anführen, wenn nicht schon ein blosser Blick auf unsere Zeichnungen diese Behauptung bestätigte. Wir setzen zu ihrer Erklärung nur die Kenntniss der zwei allgemein bekannten Sätze über die Zurückwerfung und Brechung der Lichtstrahlen voraus.

TAFEL I.

Fig. 1.

Die Linie LM stellt den Durchschnitt einer spiegelnden Ebene mit der Ebene des Papiers vor, auf der sie senkrecht steht. Ueber dem Spiegel befindet sich ein vollkommen gleichartiges Mittel, in dem sich bekanntlich die Lichtstrahlen in gerader Linie fortpflanzen. Vom Punkte A dieses Mittels geht ein Büschel Lichtstrahlen aus, wie AL, AG, AM, die von dem Spiegel unter demselben Winkel zurückgeworfen werden, unter dem sie einfielen. Wenn also z. B. Winkel $ALG = OLN$, so verfolgt der Strahl AL nach seiner Reflexion den Weg LO. Nur der senkrecht einfallende Strahl AG kehrt in sich selbst zurück; alle übrigen Strahlen schlagen nach der Reflexion andere Wege ein. Denkt man sich aber irgend einen dieser Strahlen, wie LO, rückwärts in der Richtung LA' verlängert, so ergiebt sich leicht aus der Congruenz der Dreiecke ALG und $A'LG$, dass alle die so verlängerten reflectirten Strahlen durch den Punkt A' gehen, also so in ihr Mittel zurückkehren, als ob sie von einem Punkte A' ausgegangen wären, der ebensoweit hinter dem Spiegel liegt, als der strahlende Punkt vor dem Spiegel. Denkt man sich jetzt die ganze Figur um die auf LM senkrechte Linie AA' herumgedreht, so durchläuft LM die Spiegelfläche und die Linien AL und AM beschreiben einen Kegel, dessen Spitze A ist, ebenso wie $A'L$ und $A'M$ einen Kegel beschreiben, dessen Spitze in A' liegt. Erfüllt nun der leuchtende Punkt A den Kegel ALM

mit Lichtstrahlen, so werden alle diese Strahlen so reflectirt, als ob sie die Spitze A' des Kegels $A'LM$ aussendete. Blickt nun ein Beobachter von E nach dem Spiegel, so empfängt sein Auge von H aus einen kleinen Strahlenkegel, dessen Spitze in A' liegt und dessen Grundfläche die durchsichtige Hornhaut des Auges bildet. Hier erfahren die Strahlen eine Brechung, durchdringen die Flüssigkeiten des Auges und vereinigen sich durch mehrfache Brechungen auf der Netzhaut wieder zu einer Kegelspitze, in der sie Kraft genug besitzen, den Sehnerven zu reizen und so die Empfindung des Sehens zu bewirken. Der Punkt A' wirkt also ebenso auf das Auge ein, als ob die Strahlen von ihm selbst ausgegangen wären, daher sieht ein Auge in E den leuchtenden Punkt A nicht nur in der Richtung EHA', sondern glaubt ihn auch im Punkte A' selbst zu erblicken. Man kann also den Punkt A' das Bild des Punktes A nennen. Wenn wir hier von leuchtenden Punkten sprechen, so braucht wohl kaum noch erwähnt zu werden, dass darunter nicht ein untheilbarer mathematischer Punkt zu verstehen ist, denn ein solcher Punkt würde ebensowenig sichtbar sein, als eine mathematische Linie. Unter einem leuchtenden Punkte verstehen wir einen sehr kleinen Theil einer leuchtenden Fläche, die nach keiner Seite hin merklich ausgedehnt ist, und denken uns ebenso unter einer leuchtenden Linie eine solche Fläche, die sich nur nach einer Seite hin merklich erweitert.

In Fig. 1 sind noch zwei andere Punkte B und C angenommen, die ebenfalls Strahlenbüschel ausschicken. Die Bilder dieser Punkte beobachtet man in B' und C'. Diese Bilder A', B', C' werden sämmtlich von jedem Auge, welches sich vor dem Spiegel befindet, an derselben Stelle erblickt; aber dieser einfachste Fall tritt nur beim ebenen Spiegel ein.

Fig. 2.

In Fig. 2 ist ein leuchtender Gegenstand ABC gedacht, dessen Umfang, Ende und Mitte ganz dieselbe Lage gegen den Spiegel einnehmen, als die Punkte A, B, C in Fig. 1. In das Auge E gelangt der Strahl AH des Punktes A, der Strahl BJ des Punktes B und der Strahl CK des Punktes C; oder richtiger, das Auge E empfängt von den Punkten A, B, C Strahlenkegel, deren Axen HE, JE, KE sind und deren Spitzen in A', B', C' liegen würden, wenn man sie jenseit des Spiegels fortgesetzt denkt. Aber von allen Punkten des Pfeils ABC gelangen solche Strahlenkegel in das Auge E, daher sieht es ein Bild dieses Pfeils in $A'B'C'$. Auch die Augen D und F erblicken offenbar den Gegenstand ABC in ganz unveränderter Gestalt in der Lage $A'B'C'$ ebenso weit hinter dem Spiegel als der Pfeil selbst vor dem Spiegel liegt.

Fig. 3.

In dieser Figur nehmen wir an, dass sich unterhalb der geraden Linie DE Wasser befindet, oberhalb Luft. Von dem leuchtenden Punkte A geht ein Strahlenbüschel DAE aus, welcher bei seinem Austritt in Luft nach dem bekannten Gesetze gebrochen wird. Ist z. B. AK ein Lichtstrahl und AH eine Senkrechte auf dem Wasserspiegel DE, und man denkt sich in K eine eben solche Normale errichtet, so ergiebt sich, dass KAH der Winkel ist, welchen der Strahl mit der Normale bildet, also der Einfallswinkel, und wenn man den gebrochenen Strahl KL rückwärts bis zum Durchschnitt O mit dem Lothe AH verlängert, so stellt KOH den Brechungswinkel vor. Der Brechungsexponent für Wasser ist aber nahe $^4/_3$, so dass also $sin\ KAH : sin\ KOH = 3 : 4$ oder, weil sich im Dreieck KAO diese Sinus wie die Seiten KO zu KA verhalten, so ist $KO : KA = 3 : 4$. Theilt man also KA in 4 gleiche Theile und beschreibt aus K einen Kreis, dessen Halbmesser 3 dieser Theile enthält, so schneidet dieser die Senkrechte AH im Punkte O; um daher die Richtung des Strahles AK nach der Brechung zu bestimmen, braucht man nur OK über K hinaus nach L zu verlängern. Auf diese Weise sind alle die aus dem Wasser tretenden Strahlen mit der grössten Genauigkeit bestimmt worden. Es mag hier zugleich bemerkt werden, dass jeder einzelne Strahl in allen diesen Zeichnungen mit einer so grossen Sorgfalt construirt worden ist, dass der Fehler in den Winkeln stets nur wenige Minuten betragen kann. Hätte man alle von A ausgehende Strahlen construiren können, die zwischen die Schenkel des Winkels DAE fallen, so würden die austretenden gebrochenen Strahlen, wenn sie rückwärts unter die Wasserfläche verlängert worden wären, bei ihrem gegenseitigen Durchschnitt eine stetig gekrümmte Curve gebildet haben, die auch hier schon in der Figur $DMA'E$ deutlich hervortritt und in der Fig. 4 noch besonders ausgeführt erscheint. Diese Curve, für welche also die gebrochenen Strahlen Tangenten sind, ist eine der einfachsten Arten von Brennlinien, die in der Optik eine so wichtige Rolle spielen. Nach der vorher angeführten Construction der gebrochenen Strahlen ergiebt sich sogleich, dass die Spitze A' dieser Brennlinie um $^1/_4$ der ganzen Entfernung AH des leuchtenden Punktes A vom Wasserspiegel höher liegt als dieser Punkt, denn ein Strahl, der unmittelbar neben dem Fusspunkte H des Lothes AH einfällt, wird offenbar bei seinem Austritt in Luft so gebrochen, dass seine Verlängerung in A' einschneidet, wenn $HA' = {}^3/_4\,HA$ ist. Ebenso ergiebt sich, dass die Brennlinie nur die Punkte D und E erreicht, wenn $DH = EH = {}^3/_4\,DA$ geworden ist, denn dann schneidet der bei D oder E austretende Strahl, rückwärts verlängert, in H ein, bleibt also stets in Berührung mit der Oberfläche des Wassers. Es ist bekannt, dass jeder Lichtstrahl, der an die Trennungsfläche zweier Mittel gelangt, hier in zwei Theile zerlegt wird, von denen der eine gebrochen in das neue Mittel eindringt, der andere aber in das alte zurückgeworfen wird. Alle Strahlen, die von A aus auf die Linie DHE einfallen, erfahren diese zweifache Zerlegung, obgleich die Zeichnung nur die gebrochenen Strahlen giebt, treffen aber die Strahlen solche Punkte, die jenseit D und E liegen, so dringen sie nicht mehr aus dem Wasser heraus, sondern erleiden nur eine Zurückwerfung, wie z. B. der Strahl RA nach RS reflectirt wird, und ein Auge, welches sich bei S im Wasser befände, würde ein sehr klares Spiegelbild des Punktes A in der Richtung SR erblicken. Dieses Bild würde eben deswegen so klar und deutlich sein, weil wirklich der vollständige Lichtstrahl reflectirt wird und nicht ein Theil desselben durch Brechung verloren geht, wie dies der Fall bei den Strahlen ist, die von dem Theile DE des Wasserspiegels reflectirt werden. Daher sagt man auch, die Strahlen, welche jenseit D und E von A aus auffallen, erleiden die totale Reflexion.

Denken wir uns jetzt ein Auge in L, so empfängt dieses ausser dem Strahle KL auch noch einen grossen Theil der Strahlen, die diesem benachbart sind. Diese Strahlen werden zwar keinen Kegel mehr bilden, von dem etwa KL die Axe wäre, aber sie werden doch sämmtlich das Auge so treffen, als ob ihr Ursprung dem Punkte M sehr nahe läge, in welchem der Strahl LKM die Brennlinie berührt; sie müssen also auch auf das Auge eine ähnliche Wirkung ausüben, wie ein Lichtkegel, dessen Spitze in M liegt. Daher sieht das Auge den Punkt A nicht nur in der Richtung LNM, sondern er erscheint ihm auch im Punkte M selbst, oder doch an einer Stelle, die nur ausserordentlich wenig von M verschieden sein kann. Hiernach sieht man nun leicht ein, warum ein Beobachter in J den Punkt A zwar in unveränderter Richtung JHA, aber im Punkte A' erblicken wird. Man versteht also jetzt, warum der Boden eines mit Wasser gefüllten Gefässes um $1/4$ seiner Entfernung vom Wasserspiegel gehoben erscheinen muss.

Denkt man sich die ganze Figur um die Normale JA als Axe herumgedreht, so beschreibt die Linie DE den Wasserspiegel, der Winkel DAE einen Kegel, den wir uns mit Strahlen erfüllt denken wollen, die von seiner Spitze A ausgehen, und die Brennlinie $DMA'E$ wird ebenfalls eine krumme kegelförmige Fläche erzeugen, die man Brennfläche nennen kann, weil von ihr alle aus dem Wasser in die Luft tretenden Strahlen werden auszugehen scheinen. Einem Auge, welches sich über dem Wasser befindet, wird der leuchtende Punkt A nur in irgend einem Punkte dieser Brennfläche erscheinen können. Den Mathematikern ist bekannt, dass die Brennlinien, welche durch eine brechende Ebene gebildet werden, Evoluten der Kegelschnitte sind. Die hier entstandene ist die Evolute einer Ellipse.

Die Zeichnung giebt noch zwei andere leuchtende Punkte B und C mit ihren Brennlinien an, die für die folgende Figur benutzt werden sollen. Denken wir uns unter der brechenden Ebene DE eine andere Substanz als Wasser, etwa Glas, so wird natürlich die Zeichnung nicht wesentlich geändert, nur dass die Enden D und E der Brennlinie dem Punkte H näher rücken und die Spitze A' um $1/3$ der Tiefe HA gehoben erscheint, da das Brechungsverhältniss des Glases fast $3/2$ ist.

Fig. 4.

Diese Figur ist jetzt leicht verständlich, da in ihr dieselben Dinge mit denselben Buchstaben bezeichnet worden sind, wie in Fig. 3. Der Pfeil ABC befindet sich im Wasser; jeder seiner Punkte schickt einen Strahlenkegel bis zur Oberfläche DE, dessen Strahlen hier so gebrochen werden, als ob sie von der dem leuchtenden Punkte entsprechenden Brennfläche kämen. So empfängt z. B. das Auge L vom Punkte A den Strahl AKL, erblickt also diesen Punkt auf der Brennlinie im Punkte M. Ebenso gelangt vom Punkte B der Strahl BPL in's Auge, und dieses versetzt sein Bild nach N, wo LPN die dem Punkte B entsprechende Brennlinie berührt. Endlich wird der Punkt C dem Auge L auch nur im Punkte O erscheinen können, wo der nach QL gebrochene Strahl CQ die Brennlinie des Punktes C berührt. Denkt man sich nun von jedem Punkte des Pfeils ABC die Brennlinie construirt, so leuchtet wohl ein, dass der geradlinige Gegenstand ABC dem Auge L als eine krumme Linie MNO erscheint. Die Figur giebt noch drei andere Augen an und bestimmt zugleich auf eine leicht verständliche Weise die Orte, in denen sie ein Bild des Gegenstandes ABC erblicken.

Fig. 5.

Wer die Figuren 3 und 4 richtig aufgefasst hat, für den wird es wohl verständlich sein, wenn wir uns jetzt kurz so ausdrücken: unter der Linie FG befinde sich Wasser, oberhalb Luft. Vom Punkte A geht ein Strahlenkegel aus, der den Wasserspiegel FG trifft und, nachdem er eine Brechung erfahren hat, in die Flüssigkeit eindringt. Werden die gebrochenen Strahlen rückwärts in die Luft hinein verlängert, so bilden sie, durch den Durchschnitt zwei unmittelbar aufeinander folgender, ebenfalls eine Brennlinie. Stellen z. B. die Strahlen AD und AD' zwei nächste Strahlen vor, die nach der Berechnung die Richtung DE und $D'E'$ einschlagen, so treffen sich diese auf einem Punkte d der Brennlinie. Ein Auge in der Gegend EE' würde also einen Strahlenbüschel empfangen, dessen Spitze in diesem Punkte zu liegen schiene; es müsste also den Punkt A im Punkte d erblicken. Denkt man sich alle Strahlen construirt, welche der Punkt A auf die in's

Unendliche ausgedehnte Wasserfläche FG aussendet, so würden die gebrochenen Strahlen nach ihrer Verlängerung die vollständige Brennlinie des Punktes A bilden, deren beide Zweige ae und af dann ebenfalls bis in's Unendliche reichen. Diese Brennlinie ist bekanntlich die Evolute einer Hyperbel. Die Figur giebt noch zwei Strahlenkegel an, deren Spitzen in B und C liegen und ihre Brennlinien in b und c bilden.

Fig. 6.

Der Gegenstand, von welchem die Lichtstrahlen ausgehend gedacht werden, ist hier wieder der Pfeil ABC. Die Lichtkegel der drei bezeichneten Punkte sind in der vorhergehenden Figur mit ihren entsprechenden Brennlinien entworfen worden; hier sind nur die Brennlinien angegeben und von den Strahlen nur die gezeichnet worden, welche in die Augen G und G' gelangen. Der Strahl AD des Punktes A dringt z. B. nach der Brechung in der Richtung DG in's Auge und berührt bei seiner Verlängerung die Brennlinie des Punktes A im Punkte d. Es gelangt aber von A aus nicht bloss der Strahl AD in das Auge, sondern ein kleiner Lichtkegel, als dessen Axe AD betrachtet werden kann und der nach seiner Brechung zwar nicht mehr als wirklicher Kegel, aber doch in kegelförmiger Gestalt vom Auge aufgenommen wird. Die rückwärts verlängerten Strahlen dieses Lichtbündels würden zwar keine vollständige Spitze bilden, aber sich doch bei d fast in einen Punkt zusammendrängen, daher würde es selbst so auf das Auge einwirken, als ob es von einem leuchtenden Punkte in d ausgegangen wäre, oder das Auge würde den Punkt A in d erblicken. Dass dem Auge G der Punkt B im Punkte e der Brennlinie b erscheinen muss und der Punkt C im Punkte f der Brennlinie c, bedarf nun wohl keiner weiteren Erklärung. Wären alle Brennlinien der Punkte des Gegenstandes ABC, welche Licht aussenden, construirt worden, so hätte man sehr genau ein Bild des Pfeiles ABC entwerfen können, wie es dem Auge G erscheint. Mit Hülfe mehrerer dieser Brennlinien ist hier das Bild def dieses Pfeils sorgfältig gezeichnet worden. Das Auge G' erblickt offenbar diesen Pfeil in der Lage $ae'f'$. Da nämlich der Strahl AD ohne Brechung in das Auge G' gelangt, so erblickt es den Punkt A nur in grösserer Entfernung in der Spitze a seiner Brennlinie. Aus dem bisher Gesagten ist nun wohl hinlänglich klar, wo und wie gestaltet ein Gegenstand erscheinen müsste, der sich in einem Mittel befindet, welches die Lichtstrahlen schwächer bricht als dasjenige, von welchem aus man ihn beobachtet.

TAFEL II.

Der leuchtende Punkt C wirft Lichtstrahlen auf den Kreis, dessen Mittelpunkt M und Durchmesser AB ist; diese Strahlen werden sämmtlich von der Kreislinie nach dem Reflexionsgesetze zurückgeworfen, da wir uns diese Linie als spiegelnd gedacht haben. Ein Kreis kann, wie jede Curve, als ein Polygon von unendlich kleinen Seiten betrachtet werden, oder als die Grenze, der sich ein solches Polygon nähert, je grösser die Zahl seiner Seiten wird. Eine Tangente des Kreises oder der Curve ist dann die Verlängerung einer solchen unendlich kleinen Seite. Fällt nun von C ein Strahl Cl auf den Kreis, so kann man annehmen, er träfe die Mitte einer solchen erwähnten, unendlich kleinen geraden Linie, auf welcher der Radius Ml des Kreises offenbar senkrecht steht, daher müssen, wenn lm der reflectirte Strahl ist, die Winkel ClM und Mlm einander gleich sein. Nach diesem Gesetze sind nun alle Strahlen der Figur auf das Genaueste construirt worden. Würde man den unmittelbar auf Cl folgenden Strahl, den hier Cl' vorstellen mag, zeichnen können, so schnitten sich beide nach ihrer Reflexion im Punkte n. Könnte man die Durchschnittspunkte aller zurückgeworfenen nächsten Strahlen construiren, so erhielte man alle Punkte der Brennlinie $idc_{,}d_{,}i_{,}$. Eine Brennlinie, welche durch Reflexion gebildet wird, nennt man wohl auch mit einem Griechischen Namen eine Katakaustik, zum Unterschiede von einer solchen, die, wie die beiden vorher betrachteten, durch Brechung entsteht, und deswegen Diakaustik genannt wird. Der Theil der von C ausgehenden Strahlen, welcher den Kreisbogen $fAf_{,}$ trifft, kommt nach der Reflexion auf der Curve $idc_{,}d_{,}i_{,}$ zum wirklichen gegenseitigen Durchschnitt, so dass wenn man z. . ein spiegelndes Stahlblech in die Kreisbogenform $fAf_{,}$ biegt und einen leuchtenden Körper, von möglichst geringer Ausdehnung, in C anbringt, eine helle Lichtlinie auf dem Papiere erscheint, welche sehr nahe die Gestalt der Katakaustik hat. Ueberhaupt wird aber offenbar der ganze Raum zwischen dieser Linie und dem Stahlbleche um eben so viel heller erleuchtet sein als der übrige Theil des Papiers, als dieser Theil in unserer Figur, durch die sich kreuzenden Linien, dunkler erscheint als die übrige Fläche.

Die Strahlen, welche von C ausgehend den Kreisbogen $fBf_{,}$ treffen, werden ebenfalls zurückgeworfen, aber diese reflectirten Strahlen sind nur durch ganz kurze Linien angedeutet worden, da sie sich nie wieder gegenseitig durchschneiden und nur den wirklich zur Erscheinung kommenden Theil der Brennlinie, der links von C liegt, gestört haben würden. Dagegen sind diese reflectirten Strahlen rückwärts über $fBf_{,}$ hinaus verlängert worden und haben hier durch ihren gegenseitigen Durchschnitt abermals eine Brennlinie $hc'h'$ gebildet. Es sollen Cr und

Cr, zwei nächste solcher Strahlen vorstellen, welche von C aus auf den Kreisbogen $fBf_{,}$ fallen; nach der Reflexion divergiren sie immer stärker und gelangen nach p und $p_{,}$; denkt man sie sich aber rechts hin verlängert, so würden sie sich in s schneiden und dann nach t und $t_{,}$ weitergehen. Die Schenkel $c'h$ und $c'h'$ dieses subjectiven Theils der Brennlinie oder, wie man ihn auch wohl nennt, dieses virtuellen Theils, erstrecken sich offenbar bis in's Unendliche, eben so wie die Zweige id und $i_{,}d_{,}$ des objectiven Theils. Beide Theile machen erst die vollständige Brennlinie des Punktes C aus. Die geraden Linien kfg und $k_{,}f_{,}g'$ sind für diese Curve das, was die Mathematiker Asymptoten nennen, nämlich gerade Linien, denen sich die Zweige id und $i_{,}d_{,}$ so wie hc' und $h'c'$ zwar unaufhörlich nähern, ohne sie doch jemals vollständig erreichen zu können, so dass also der Abstand dieser geraden Linien von den krummen erst im Unendlichen verschwindet.

Nimmt man den Durchmesser AB des Kreises als Abscissenaxe, den Mittelpunkt M als Anfangspunkt der Coordinaten und rechnet die positiven Abscissen (x) von M nach B hin und nimmt die darauf senkrecht stehenden Ordinaten (y) ebenfalls als positiv an, bezeichnet ferner den Halbmesser des Kreises durch r und den Abstand des leuchtenden Punktes C vom Mittelpunkte M des Kreises durch a, dann findet man die Gleichung der Brennlinie in folgender Form:

$$\left\{(4a^2 - r^2)(x^2 + y^2) - 2ar^2x - a^2r^2\right\}^3 = 27a^2r^4y^2(x^2 + y^2 - a^2)^2$$

Setzt man in dieser Gleichung $y = o$, so erhält man die Lage der beiden Spitzen c' und $c_{,}$ der Brennlinie durch die Formeln

$$Mc' = \frac{ar}{2a - r} \text{ und } Mc_{,} = -\frac{ar}{2a + r}.$$

Oder, wenn man Mc' durch b bezeichnet, und $\frac{1}{2}r$ durch c, so ist

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

Den Ausdruck für $Mc_{,}$ erhält man aus dem für Mc', wenn man in diesem $-r$ statt r setzt, daher wird $Mc_{,}$ durch die Formel gefunden

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{c}$$

wenn man nämlich auch $Mc_{,}$ durch b bezeichnet. Die beiden Spitzen c' und $c_{,}$ werden von den zwei entgegengesetzten Seiten B und A des spiegelnden Kreises gebildet, daher kommen die entgegengesetzten Zeichen von c in diesen beiden Formeln. Untersucht man nur die Wirkung einer Seite des Kreises auf die Strahlen des leuchtenden Punktes C, so genügt offenbar die erste dieser Gleichungen, die auch völlig ungeändert bleibt, wenn man unter a und b nicht mehr die Entfernungen der Punkte C und c' vom Mittelpunkte M versteht, sondern sich darunter die Entfernungen dieser Punkte vom Punkte B denkt.

Setzt man nun den Factor $x^2 + y^2 - a^2 = o$, so ergeben sich die Coordinaten der beiden Spitzen d und $d_,$. Die für die Spitze d sind

$$x_, = \frac{a}{r^2}(2a^2 - r^2) \text{ und } y_, = \frac{2a^2}{r^2}\sqrt{r^2 - a^2}$$

Die Spitze $d_,$ hat dieselbe Abscisse und eine gleiche, aber entgegengesetzte Ordinate. Diese Spitzen sind also ebenso weit vom Mittelpunkte M entfernt als der leuchtende Punkt C. Bestimmt man die Tangente der Spitze d, so ergiebt sich leicht, dass sie durch Reflexion des Strahles Ce gebildet wird, welcher senkrecht auf MC steht; daher ist diese Spitze auch ebenso weit vom Punkte e entfernt als der Punkt C.

Nennt man den Winkel fnB, den die Asymptoten wq und $w_,q_,$ mit der Axe Mn bilden, m, so ist
$$\sin m = \frac{1}{ar^2}\left(\frac{4a^2 - r^2}{3}\right)^{3/2}$$
und der Punkt n, in welchem die Asymptoten die Axe treffen, ist vom Mittelpunkt M um die Grösse
$$Mn = \frac{3ar^2}{4a^2 - r^2}$$
entfernt. Der Ausdruck für $\sin m$ wird imaginär, sobald a kleiner ist als $\frac{1}{2}r$, daher hat die Curve nur dann Asymptoten, wenn der leuchtende Punkt weiter als um die Hälfte des Radius vom Mittelpunkt des Kreises absteht.

Man sieht nun deutlich, wie der Kreisbogen $ff_,$ den Theil der Brennlinie liefert, welcher rechts von B fällt und sich von c' nach h und h' hin in's Unendliche erstreckt. Die Bogen fe und $f_,e_,$ geben Veranlassung zu den Zweigen di und $d_,i_,$ der Brennlinie, die sich ebenfalls unendlich weit ausdehnen, und der Bogen $eAe_,$ bildet den endlichen Theil $dc_,d_,$ dieser Curve. In unserer Zeichnung ist $MC = \frac{3}{4}MB$, setzt man daher $r = 1$, so ist $a = \frac{3}{4}$, folglich $Mc' = \frac{3}{2}$, $Mc_, = -\frac{3}{10}$, $x_, = \frac{3}{32}$, $y_, = \frac{9\sqrt{7}}{32} = 0{,}744$, $Mn = \frac{9}{5}$, $\sin m = \frac{5\sqrt{15}}{54} = \sin 21^0\,1'$.

Da die Gleichung dieser Katakaustik vom sechsten Grade ist, der sich nur für die Ordinate y auf den dritten reducirt, so würde sich aus der blossen Untersuchung ihrer Gleichung die Gestalt der Curve selbst nur sehr schwer ermitteln lassen, wenn auch die ausgezeichneten Punkte derselben ziemlich leicht gefunden werden.

Man bekommt eine vollkommen deutliche Vorstellung von der Wirkungsweise einer spiegelnden Kugel, auf welche von einem leuchtenden Punkte Strahlen fallen, wenn man sich unsere Figur um die Linie MC als Axe herumgedreht denkt. Der reflectirende Kreis beschreibt dann die Kugel, welche der Punkt C bestrahlt, und die Brennlinie bildet bei dieser Drehung die Brennfläche in einer leicht verständlichen Weise. Die Spitzen $c_,$ und c' der Katakaustik bilden ebenfalls Spitzen der kaustischen Fläche, aber die Spitzen d und d' geben bei der Drehung nur Veranlassung zu einer Kante dieser Fläche.

TAFEL III.

Auf dieser Tafel ist eine Anwendung der vorhergehenden Construction zur Erklärung der Wirkungsweise eines sphärischen Hohlspiegels gemacht worden. Der Kreisbogen DBE ist als spiegelnd gedacht und jeder Punkt des Gegenstandes aCb, der Licht aussendet, giebt Veranlassung zu einer Brennlinie. Es sind hier nur die drei Brennlinien gezeichnet worden, welche zu den Punkten a, C und b gehören, und diese Linien sind sämmtlich congruent, da der Pfeil aCb nichts als ein mit dem Spiegel concentrischer Kreisbogen ist, also alle seine Punkte eine gleiche Entfernung vom Mittelpunkte des spiegelnden Kreises haben, von der allein die Gestalt der Brennlinien abhängt. Der Mitte C des Pfeils entspricht die Brennlinie $C'c_{,}C''$, der Spitze a die Linie $a'a_{,}a''$ und dem Ende b die Linie $b'b_{,}b''$. Wenn man nun die Tafel II sorgfältig betrachtet, so ergiebt sich sogleich, dass ein Auge $A_{,,}$ welches vom Mittelpunkte des Spiegels nach B hin blickt, Strahlenbüschel empfängt, deren Spitzen in $a_{,,}$ $b_{,}$ und $c_{,}$ liegen, also in diesen Punkten ein umgekehrtes, aber dem Gegenstande völlig ähnliches Bild sehen wird. Da der Sehwinkel $a_{,}A_{,}b_{,}$ dem Winkel $aA_{,}b$ gleich ist, so sieht ein Auge in $A_{,}$ Gegenstand und Bild gleich gross, obgleich hier in der Zeichnung das letztere kleiner erscheint. Ein Auge $A_{,,}$ in grösserer Ferne würde das Bild zwar fast noch an derselben Stelle in $a_{,,}b_{,,}c_{,,}$, aber unter einem kleineren Winkel, also in verkleinerter Gestalt erblickne. Befindet sich ein Auge im Punkte A_{v}, so empfängt es vom Gegenstande die Strahlen ad, Ce, bf, welche nach der Reflexion sämmtlich nach A_{v} gelangen. Diese reflectirten Strahlen berühren die Brennlinie in a_{v}, c_{v}, b_{v}, also erscheint, aus den schon öfter angegebenen Gründen, das Bild des Gegenstandes m in der verzeichneten Gestalt und Lage. Die Figur stellt in den Punkten A_{III} und A_{IV} noch zwei Augen mit den Bildern dar, die sie von dem Gegenstande erblicken. Es ist leicht ersichtlich, dass nur von einem concentrischen Kreisbogen, wie aCb, in den Spitzen seiner Brennlinien, ein ihm ähnliches Bild entstehen kann, und dass das Bild eines jeden anders gestalteten Gegenstandes mehr oder weniger verzerrt erscheinen muss, da die Entfernung der Spitze der Brennlinien vom Mittelpunkte des spiegelnden Kreises der Entfernung des leuchtenden Punktes von diesem Mittelpunkte nicht proportional ist, denn ist diese a, so ist jene $\frac{ar}{2a+r}$.

Ein sphärischer Hohlspiegel DBE ist nichts als ein Kugelabschnitt, der auf seiner inneren hohlen Fläche spiegelt. Der Mittelpunkt $A_{,}$ der Kugel heisst der Krümmungsmittelpunkt des Spiegels und der Mittelpunkt B des Kugelsegments wird der Mittelpunkt des Spiegels genannt. Legt man eine Ebene durch das beobachtende Auge A_{v}, den Krümmungsmittelpunkt $A_{,}$ und einen leuchtenden

Punkt C des Gegenstandes, und diese Ebene schneidet den Gegenstand in der Linie aCb, so stellt offenbar $a_{\mathrm{v}}c_{\mathrm{v}}b_{\mathrm{v}}$ das Bild dar, welches das Auge von diesem Durchschnitte beobachtet. Geht die durch das Auge und den Krümmungsmittelpunkt gelegte Ebene durch andere Punkte des Gegenstandes, so erhält man durch unsere Construction die den Durchschnitten des Gegenstandes entsprechenden Bilder. Fast keins dieser Bilder wird aber dem entsprechenden Durchschnitte ähnlich sein, daher kann auch im allgemeinen der ganze Gegenstand im Hohlspiegel sich nur verzerrt abbilden, und wenn ein solches Bild dem Auge nicht immer so verunstaltet erscheint, so hat dies seinen Grund nur darin, dass der Beobachter selten ein sicheres Urtheil über die relative Entfernung der verschiedenen Punkte eines Bildes besitzt.

Die in unserer Zeichnung dargestellten Bilder scheinen dem Auge vor dem Spiegel in der Luft zu schweben, und eins derselben, nämlich das Bild $a_{,}b_{,}c_{,}$ ist noch dadurch ausgezeichnet, dass es auf einem farblosen undurchsichtigen Gegenstande wirklich aufgefangen und zur Erscheinung gebracht werden kann, denn würde man z. B. ein weisses Blatt Papier an die Spitzen $a_{,,}b_{,,}c_{,}$ der Brennlinien heran halten, so würde jeder Punkt des Objectes einen Punkt des Papiers mit seiner ihm eigenthümlichen Farbe beleuchten, also das ganze Object auf dem Papiere abgebildet werden. Wer sich die Form der den Brennlinien entsprechenden Brennflächen klar gemacht hat, wird auch einsehen, dass nur an den bezeichneten Spitzen dieser Flächen ein solches Bild entstehen kann, denn offenbar würde ein weisses Blatt die Brennflächen, etwas weiter links von ihren Spitzen entfernt, in kreisförmiger Gestalt durchschneiden, so dass also jedem Punkte des Objectes auf dem Papiere nicht mehr ein blosser Punkt, sondern ein Kreis entsprechen würde. Diese verschiedenen Kreise müssten sich wechselseitig durchdringen und stören, so dass also nur ein verworrenes Bild von dem leuchtenden Gegenstande auf der weissen Tafel erscheinen könnte. Vertauscht man in der schon erwähnten Formel

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

welche aus dem halben Radius c und der Entfernung a des leuchtenden Punktes vom Spiegel die Entfernung des Bildes dieses Punktes vom Spiegel finden lehrt, die Grössen a und b mit einander, so bleibt sie ungeändert, oder, was offenbar dasselbe ist, ein Lichtpunkt in der Entfernung a entwirft sein Bild in der Entfernung b und umgekehrt, ein Lichtpunkt in der Entfernung b hat sein Bild in der Entfernung a. Daraus erhellt denn deutlich, wie ein kleiner Gegenstand $a_{,}c_{,}b_{,}$ vermittelst eines Hohlspiegels ein vergrössertes Bild aCb geben kann, welches sich auf einer weissen Wand auffangen lässt.

TAFEL IV.

Während die vorige Tafel die objectiven Bilder des Hohlspiegels darstellte, hat diese hauptsächlich zum Zweck, die subjectiven zu erklären, welche hinter dem Hohlspiegel entstehen, auf eine ähnliche Weise wie die Bilder des gewöhnlichen Planspiegels. Der Gegenstand ist hier wieder der Pfeil aCb, von dem die Zeichnung nur die Wirkung der drei bezeichneten Punkte auf ein Auge darstellt, welches nach dem spiegelnden Kreisbogen DBE hinblickt. Der Strahlenbüschel, welcher von a aus den Kreis bei g trifft, wird so reflectirt, als ob er von einem Punkte a' hinter dem Spiegel käme, daher erblickt ein im Mittelpunkte des Kreises A' beobachtendes Auge ein Bild des Punktes a hinter dem Spiegel in a'. Dieser Punkt a' ist die Spitze der Brennlinie, welche dem Punkte a entspricht und in der Figur durch punktirte Linien angedeutet ist. Eben so wird dasselbe Auge die Punkte C und b in c' und b' erblicken, daher von dem ganzen Gegenstande überhaupt in der Lage $a'c'b'$ ein ähnliches aufrechtstehendes und vergrössertes Bild hinter dem Spiegel sehen, dessen Vergrösserung freilich dem Auge nur dann bemerklich werden kann, wenn es eine Vorstellung von seiner Entfernung gewinnt, da nämlich der Sehwinkel $a'A'b'$ dem Sehwinkel $aA'b$ gleich geblieben ist, also der Gegenstand und sein Bild eine gleiche scheinbare Grösse besitzen.

Wer die vorhergehende Tafel richtig verstanden hat, für den bedarf es wohl keiner weitern Erklärung, warum ein Auge A'' von dem Objecte aCb ein Bild $a''c''b''$ hinter dem Spiegel erblickt, welches zwar ebenfalls aufrechtstehend und vergrössert erscheint, aber dem Gegenstande nicht mehr völlig ähnlich ist.

Hat der spiegelnde Kreis die angedeutete Grösse, so sieht ein Auge vom Punkte A''' aus drei Bilder des Gegenstandes, nämlich ein subjectives $a'''c'''b'''$ hinter dem Spiegel und zwei objective $a_{,,,}b_{,,,}$ vor dem Spiegel in der Luft schwebend. Das subjective wird durch solche Strahlenbündel wie ad', Ce', bf, gebildet und die Büschel ad'', Ce'', bf'' und ad''', Ce''', bf''' verursachen nach ihrer Reflexion die beiden objectiven. Die Zeichnung enthält noch die drei Bilder, welche das Auge A^{IV} von dem Objecte erblickt.

Wie nun diese Constructionen unmittelbar zur Erläuterung der Wirkung des Hohlspiegels dienen, ist durch die Erklärung der vorigen Tafel wohl hinlänglich klar geworden. Da die gebräuchlichen Hohlspiegel gewöhnlich nur einen kleinen Theil der Kugeloberfläche umfassen, so erblickt man in ihnen nur selten die beiden objectiven, vor dem Spiegel schwebenden Bilder, welche ihre Entstehung der Reflexion der Lichtstrahlen von den äussersten Rändern des Spiegels verdanken

TAFEL V.

Die Fig. 1 dieser Tafel stellt die Brennlinie des Kreises dar, wenn der leuchtende Punkt C nur um den vierten Theil des Radius vom Mittelpunkte M absteht. Die Curve, die sich vorher nach beiden Seiten hin in's Unendliche erstreckte, hat sich hier in den engen Raum $dcd,c,$ zusammengezogen. Da hier $MC = \frac{1}{4}$ ist, wenn man den Radius des Kreises $= 1$ setzt, so ist, nach den Formeln, die bei der Erklärung der Tafel II gegeben wurden, $Mc = -\frac{1}{6}$ und $Mc, = -\frac{1}{2}$. Die Abscisse der Spitzen d und $d,$ ist $-\frac{7}{32}$ und die beiden Ordinaten sind

$$\pm\sqrt{\frac{15}{32}} = \pm 0{,}121.$$

Die Asymptoten sind verschwunden, da die Entfernung MC kleiner geworden ist als der halbe Radius. Die blosse Anschauung erklärt die Figur ausserdem schon so vollständig, dass zur Erläuterung nichts mehr hinzuzufügen sein wird. Man braucht nur die einzelnen, von C ausgehenden Strahlen zu verfolgen, um zu sehen, wie sie nach der Reflexion die Brennlinie bilden.

Die Figur 3 stellt die Brennlinie dar, welche parallele Strahlen, z. B. die Sonnenstrahlen, wie $kl, k'l'$, durch Reflexion von dem Halbkreise DAE bilden. Diese Brennlinie wird auch wohl die Kardioide oder Herzlinie genannt. Sie ist diejenige Curve, welche irgend ein Punkt in der Peripherie eines Kreises beschreibt, der auf einem Kreise von doppelt so grossem Radius hinrollt, ohne dabei zu gleiten; sie ist also eine Epicykloide. Der feste Kreis, auf welchem der bewegliche rollt, ist in unserm Falle aus dem Mittelpunkte M mit dem halben Radius des Kreises DAE beschrieben. Die Gleichung dieser Curve erhält man aus der allgemeinen, Seite 8 entwickelten, wenn man dort $a = \infty$ setzt. Sie nimmt dann die Gestalt an:

$$\left\{4(x^2+y^2)-r^2\right\}^3 = 27\,r^4 y^2$$

Man sieht aus der Zeichnung deutlich, wie stark die Strahlen in der Gegend der Spitze $c,$ der Brennlinie concentrirt werden und wie ein sphärischer Hohlspiegel sehr wohl dienen kann, um im Brennpunkte oder Focus $c,$ eine bedeutende Wärme zu entwickeln, so dass ein solcher Spiegel mit Recht den Namen eines Brennspiegels erhalten hat. Weil diese Eigenschaft der Hohlspiegel schon früh und am meisten die Aufmerksamkeit der Naturforscher erregte, so hat man überhaupt die Spitzen der Brennlinien Brennpunkte genannt und der Name der Brennlinie ist eben daher entstanden.

In der Fig. 2 hat man die parallel einfallenden Lichtstrahlen gleich von dem zuerst getroffenen Halbkreise reflectiren lassen. Die so zurückgeworfenen Strahlen treten, nach der rechten Seite hin, immer weiter auseinander und würden nur innerhalb des Kreises eine Brennlinie bilden, wenn man sie sich bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnitte verlängert denkt. Auf diese Weise ist die Brennlinie entstanden, welche die Zeichnung angiebt. Sie ist der in Fig. 3 gebildeten vollkommen congruent, oder macht eigentlich mit dieser erst die vollständige Katakaustik aus, welche parallele Strahlen hervorbringen, die von einem spiegelnden Kreise zurückgeworfen werden.

Bei der Fig. 4 braucht wohl als Erläuterung nichts weiter gesagt zu werden, als dass sie die Brennlinie darstellt, welche die Strahlen des leuchtenden Punktes C nach ihrer Reflexion von der vordern Seite des spiegelnden Kreises AB, im Innern desselben bilden würden.

TAFEL VI.

Diese Tafel stellt die verzerrten objectiven Bilder dar, welche der Hohlspiegel DBE von dem Gegenstande acb den Beobachtern in A_{I}, A_{II}, A_{III}, A_{IV} zeigen würde. Um die Entstehung dieser Bilder einzusehen, braucht man nur die Tafel V zur Hand zu nehmen und die Bildungsweise jeder der hier verzeichneten drei Brennlinien, welche den Punkten a, b, c des Objektes angehören, zu verfolgen. Die Gestalt der Bilder ist mit Hülfe von weit mehr Brennlinien, als in der Figur beibehalten sind, entworfen worden; sie sind also als sehr genau zu betrachten. Dass diese Bilder einem Beschauer aber in der That nicht so sehr verunstaltet erscheinen, als man nach dieser Zeichnung glauben sollte, rührt nur daher, dass das Auge kein sicheres Urtheil darüber besitzt, ob ein sichtbarer Punkt ihm etwas näher oder ferner liegt.

TAFEL VII.

Der blosse Anblick der Tafel V erläutert ebenfalls auf der Stelle die drei Figuren dieser Tafel. In der ersten ist das Object abermals ein aus dem Krümmungsmittelpunkte des Spiegels beschriebener Kreisbogen, befindet sich aber jetzt auf dem vierten Theile des Radius jenseit des Krümmungsmittelpunktes vom Spiegel, statt dass es auf der Tafel VI um ebensoviel dem Spiegel näher stand. Die objectiven, in der Luft schwebenden Bilder, die jetzt das Auge erblickt, erscheinen ebenfalls umgekehrt, aber verkleinert und nicht so stark verzerrt als auf jener Tafel, die sie vergrössert darstellte.

Die Fig. 2 zeigt die sehr verkleinerten aufrecht stehenden Bilder eines Objectes abc, welche eine auf ihrer äusseren Fläche spiegelnde Kugel oder ein sogenannter Convexspiegel entwerfen würde. Es sind Bilder, welche dem Beobachter hinter der spiegelnden Fläche erscheinen, ähnlich wie sie der Planspiegel zeigt, nur dass sie stets kleiner sind, als der Gegenstand, von dem sie herrühren und ihre Stelle mit dem Orte des Beschauers wechseln.

In Fig. 2 war das Object ein aus dem Mittelpunkte der spiegelnden Kugel beschriebener Kreisbogen, also alle Brennlinien, die den einzelnen Punkten dieses Bogens ihre Entstehung verdankten, waren congruent; in Fig. 3 ist der sich spiegelnde Gegenstand geradlinig, also sind die Brennlinien, die den verschiedenen leuchtenden Punkten desselben entsprechen, nicht mehr congruent, da diese Punkte auch eine verschiedene Entfernung vom Mittelpunkte der spiegelnden Kugel einnehmen. Die Verschiedenheit der Bilder beider Objecte ist auch in in unserer Zeichnung nicht zu verkennen.

TAFEL VIII.

Das Dreieck DEF der Fig. 1 stellt den Durchschnitt der Ebene des Papiers mit einem geraden dreiseitigen Glasprisma vor, dessen Seitenflächen auf dieser Ebene senkrecht stehen. Vom leuchtenden Punkte c fällt ein Strahlenbüschel cDv auf die Seite DE dieses Querschnitts des Prismas und erleidet, indem es in die Glasmasse eindringt, eine Brechung. In der Zeichnung ist der Brechungsexponent des Glases als 1,5 angenommen worden. Die gebrochenen Strahlen würden, wenn man sie rückwärts in ihr früheres Medium verlängerte, dort eine Brennlinie bilden, wie aus der Erklärung der Tafel I bekannt ist. Diese Strahlen erfahren nun an der Seite DF des Prismas eine zweite Brechung; aber nur diejenigen, welche zwischen D und L einfallen, können aus dem Glase in die Luft treten, die übrigen, welche das Prisma zwischen l und F treffen, erleiden die sogenannte totale Reflexion, wie ebenfalls aus den zur Tafel I gegebenen Erläuterungen erhellt. Die aus der Linie Dl austretenden Strahlen sind nach ihrer Brechung rückwärts verlängert worden, und haben auf diese Weise die Brennlinie Cil gebildet. Verfolgt man den Weg zwei nächster Strahlen, wie $cefg$ und $ce'f'g'$, so findet man ihren gegenseitigen Durchschnitt nach der zweiten Brechung, die sie bei ff' erfahren, auf der Brennlinie in i. Hier würde also ein Auge, welches den Strahlenbüschel $fgf'g'$ bei gg' aufnimmt, den leuchtenden Punkt c erblicken. Die Linie $rcsu$ giebt die Richtung des auf DE senkrechten Strahles an, der also DE ungebrochen durchdringt und erst bei s eine Brechung erfährt. Der Strahl cwl theilt das ganze Strahlenbündel in zwei Theile, von denen nur der eine zwischen D und l in die Luft austritt, der andere aber, der zwischen l und F einfällt, durch die totale Reflexion in das Prisma zurückzukehren gezwungen wird, und erst an der Seite FE, zwischen F und m, nach aussen gelangen kann. Zwei nächste dieser austretenden Strahlen, wie etwa mn und $m'n'$, rückwärts verlängert, bilden ebenfalls durch ihr Zusammentreffen eine Brennlinie, die pC' darstellt.

Die Zeichnung giebt noch die Brennlinien A und B im Umriss an, welche den Strahlenbündeln aDx und bDy angehören, die von den Punkten a und b ausgehen. Ebenso bezeichnen A' und B' die Brennlinien, welche den vollständig reflectirten Theilen dieser Strahlenbündel entsprechen, die auf der Seite EF des Prismas austreten. Dem Punkte c entspricht freilich in der Wirklichkeit nicht eine Brennlinie, sondern eine Brennfläche sehr verwickelter Art, von welcher die Zeichnung nur einen Durchschnitt darstellt, den eine durch den leuchtenden Punkt gelegte Ebene mit ihr bildet, welche auf den Seitenflächen des Prismas senkrecht steht.

In der Figur 2 ist nun diese Construction zur Erklärung der Bilder benutzt, welche ein Prisma DEF von dem Objecte acb zeigt. Die Zeichnung giebt nur die Brennlinie an, welche den beiden äussersten und dem mittelsten Punkte des Gegenstandes angehören. Bekanntlich wird aber jeder Strahl, wenn er eine Brechung erfährt, in eine unzählige Menge von Strahlen zerlegt, von denen die rothen am wenigsten und die violetten am stärksten brechbar sind. Der Strahlenbüschel, welcher von C aus auf das Prisma fällt, wird also nach der Brechung in unzählig viele verschiedenfarbige Strahlenbüschel zerlegt und jedem dieser Büschel entspricht eine besondere Brennlinie. Die Zeichnung stellt in den Linien A, C, B die beiden äussersten dieser Brennlinien dar, und zwar in den starken Linien, die den äussersten violetten Strahlen entsprechenden, und in den schwächeren, welche rechts neben den starken hinlaufen, die den rothen angehörigen. Für die rothen Strahlen ist das Brechungsverhältniss 1,50 benutzt worden und für die violetten 1,53. Die durch die Spitze D des Prismas gezogenen sechs Linien bilden die Asymptoten der sechs angegebenen Brennlinien. Der Strahl cd wird, wenn er in das Prisma eindringt, in verschiedenfarbige Strahlen zerlegt, von denen nur der violette di in der Zeichnung angegeben ist. Dieser violette Strahl tritt nun unverändert bei i wieder in die Luft und gelangt so in das Auge $A_,$. Von dem Strahle cf ist aber in der Figur nur der rothe Theil fr beibehalten worden, der, nach seiner zweiten Brechung, ebenfalls unverändert vom Auge $A_,$ aufgenommen wird. Die Linien iA und kA können als die Axen von kleinen Strahlenkegeln angesehen werden, deren Spitzen in den Punkten c' und $c_,$ liegen. Hier erscheinen nun auch dem Auge $A_,$ zwei gefärbte Bilder des Punktes c, nämlich ein violettes in c' und ein rothes in $c_,$. Dies sind aber nur die beiden äussersten Bilder des Punktes c, welche das Auge beobachten könnte, zwischen beiden würde noch eine unzählige

Menge nach der bekannten Abstufung gefärbter Bilder erscheinen. Auf ähnliche Weise zeigen sich in $a'a,$ und $b'b,$ die Bilder der Punkte a und b. Man übersieht nun leicht, wie von dem Pfeile acb dem Auge $A,$ in $a'c'b'$ ein violettes und in $a,c,b,$ ein rothes Bild erscheint. Zwischen beiden liegt eine unzählige Menge anders gefärbter Bilder, welche den übrigen in Farben zerstreuten Strahlen ihren Ursprung verdanken. In der Mitte decken sich alle diese farbigen Bilder und geben nach den bekannten Gesetzen, ein farbloses Bild, welches aber bei a' und $b,$ von farbigen Rändern umsäumt ist, die sich bei a' aus dem Violetten ins Weisse bei $a,$ verlieren und von $b,$ bis b' aus dem Rothen ins Weisse übergehen. Ein eben solches an den Rändern gefärbtes Bild des Objectes erblickt das Auge A_2 innerhalb des Prismas. Dass man durch ein Prisma nicht so unklare Bilder beobachtet als nach dieser Darstellung vermuthet werden könnte, da doch jeder Punkt unzählig viele Bilder liefert, beruht darauf, dass alle diese Bilder sehr nahe zusammenfallen und nicht ein einzelner Strahl, sondern erst ein ganzer Strahlenbüschel ein Bild erzeugen kann.

Von dem Strahle ch ist in der Figur nach der Brechung nur der violette Theil hm beibehalten worden. Dieser Strahl erleidet aber bei m die totale Reflexion, gelangt so nach n und von da, durch eine zweite Brechung, zum Auge A_3. Von dem Strahle cq giebt dagegen die Zeichnung nur den rothen Theil qt an, der ebenfalls total nach o reflectirt und dann nach dem Auge A_3 gebrochen wird. Man sieht nun nach den Vorhergehenden leicht, wie auf der Brennlinie C' dem Auge A_3 in c''' und c_3 ein violettes und ein rothes Bild des Punktes c erscheinen muss und wie es überhaupt von dem Pfeile acb in $a'''c'''b'''$ ein violettes und in $a_3c_3b_3$ ein rothes Bild erblicken muss, die dann auf die bekannte Weise zu einem einzigen farbig umsäumten Bilde verschmelzen.

TAFEL IX.

Diese Tafel stellt den Gang der Lichtstrahlen durch eine sphärische Linse dar. Sie ist eine der wichtigsten und erfordert ein recht sorgfältiges Studium. Unter einer sphärischen Linse versteht man eine durchsichtige Substanz, die an zwei Seiten, durch welche die Lichtstrahlen hindurchgehen, von Kugeloberflächen begrenzt ist. In der Figur 1 sind M und M' die Mittelpunkte der Kugeln CBC' und $CB'C'$, zwischen denen die linsenförmig gestaltete Glassmasse $CBC'B'$ enthalten ist. Offenbar durchlaufen die Kreisbogen BC und $B'C$, wenn sie sich um BB' als Axe drehen, die ganze Oberfläche des Körpers, den wir uns von der lichtbrechenden Substanz erfüllt denken sollen. Die Linie MM', welche die beiden

Mittelpunkte der Kugeloberflächen mit einander verbindet, heisst die Axe der Linse, und die Zeichnung giebt also nur den Durchschnitt derselben mit einer Ebene, die durch diese Axe gelegt ist. Die beiden krummen Oberflächen der Linse werden hier durch Kugeln von gleichem Radius gebildet, sie könnten aber auch Kugeln von verschiedenen Radien angehören. In der Zeichnung sind sie beide nach aussen gekrümmt und eine solche Linse heisst eine biconvexe; wenden sich beide Oberflächen nach innen, dann wird die Linse biconcav genannt. Tritt an die Stelle einer dieser Kugeloberflächen eine Ebene, so entstehen zwei andere Arten von Linsen, nämlich die planconvexe und planconcave. Ist endlich die eine Oberfläche erhaben und die andere hohl, so bilden sich zwei Arten von Linsen: die concav-convexe und convex-concave, je nachdem nämlich die Krümmung der convexen oder der concaven Seite vorwaltet. Diese sechs Arten von sphärischen Linsen sind offenbar die einzig möglichen. In der Fig. 1 ist nun A ein Punkt in der Axe der Linse, von welchem Strahlen ausgehen, die auf die Oberfläche CBC' der Linse fallen. Bei der Erklärung der Fig. 2 auf Tafel I ist schon erwähnt worden, dass ein Lichtstrahl, der auf eine ebene Oberfläche einer durchsichtigen Masse trifft, in zwei Theile zerlegt wird, von denen der eine eindringt und der andere in das erste Mittel zurückkehrt. Die Art dieser Zurückwerfung und Brechung ist bekannt, wenn die Masse von einer Ebene begrenzt ist, ist aber ihre Oberfläche gekrümmt, dann kann man sich am bequemsten, statt dieser stetigen Krümmung, den Körper mit einem Netze von ausserordentlich vielen sehr kleinen ebenen Dreiecken überzogen denken, deren Grösse offenbar verschwindend klein gedacht werden kann, so dass ihre Gesammtheit dann nicht mehr auf eine irgend wahrnehmbare Weise von einer stetigen Krümmung unterschieden wird. Man denke sich nun künftig, dass jeder Lichtstrahl, der auf eine krumme Oberfläche fällt, ein solches sehr kleines ebenes Dreieck trifft, daher wird man seine Richtung nach der Zurückwerfung und Brechung eben so bestimmen können, wie diess in der Erklärung der dritten Figur auf Tafel I gelehrt worden ist, wobei es hauptsächlich darauf ankommt, die Richtung einer auf der Ebene eines solchen sehr kleinen Dreiecks senkrechte Linien zu bestimmen. Eine solche Senkrechte heisst eine Normale der krummen Fläche. Bei der Kugel sind diese Normalen offenbar nichts anderes als die Kugelhalbmesser. Soll daher der Weg ab angegeben werden, den z. B. der Strahl Aa einschlägt, nachdem er in die Glaslinse CC' eingedrungen ist, so muss man den Radius Ma ziehen und die Richtung ab so bestimmen, dass $\sin baM = \frac{2}{3} \sin AaM$ wird. Tritt der Strahl ab bei b wieder aus der Glasmasse heraus in die Luft, so findet man die Richtung bc, die er dann verfolgt, indem man den Radius $M'b$ zieht und den Winkel $M'bc$ so bestimmt, dass $\sin M'bc = \frac{3}{2} \sin M'ba$

wird. Auf eine ähnliche, wenn auch etwas einfachere, aber doch immer noch beschwerliche Weise, sind alle Strahlen der Figur gezeichnet worden. Das ganze Strahlenbündel CAC' dringt also auf die angegebene Art durch die Linse hindurch und bereitet sich hinter derselben in den Raum $CHH'C'$ aus. Die Grenzen desselben CH und $C'H'$ bilden wieder eine sogenannte Diacaustik oder Brennlinie durch Brechung, denn diese Linien entstehen dadurch, dass sich hier je zwei nächste der Strahlen schneiden, die auf die Bogen aC und $a'C'$ der Linse aufgefallen sind. Alle Strahlen aber, die den Theil aa' der Linse getroffen haben, kommen bei ihrem Austritt aus der Linse nicht mehr zum gegenseitigen Durchschnitt, sondern divergiren nun und würden sich nur schneiden, wenn man sie links hin rückwärts verlängerte. Diese Verlängerungen giebt die Figur an. Sie bilden durch ihren wechselseitigen Durchschnitt einen anderen Theil IAI' der Brennlinie. Die Zweige CH, $C'H'$ $A'I$ und AI' erstrecken sich bis ins Unendliche und nähern sich, je weiter man sie fortsetzt, desto mehr den beiden Asymptoten dc und $d'c'$ der Brennlinie. Es ist nicht ohne Interesse, die Lage der Asymptoten auf der Linse bestimmen zu können, denn sie sondern auf ihre zwei Räume ab, die, wie wir bald sehen werden, wesentlich von einander verschiedene Wirkungen haben. Denken wir uns jetzt die ganze Zeichnung um die Axe GF der Linse herum gedreht, so durchläuft der Winkel CAC' die Oberfläche des von A ausgehenden Strahlenkegels, und die Linien CH und $C'H'$ beschreiben den konischen Raum, in welchem sich die gebrochenen Strahlen ausbreiten. Ebenso erzeugen bei dieser Drehung die krummen Linien $A'I$ und $A'I'$ den bei A in eine Spitze auslaufenden kegelförmigen Theil der Brennfläche, welche dem Strahlenbündel CAC' angehört, und die Asymptoten beschreiben eine Kegelfläche, welche die Brennfläche in einem Kreise schneidet, dessen Durchmesser GG' ist. Durch diesen Kreis gehen alle Strahlen hindurch, welche innerhalb des Asymptotenkegels liegen. Bezeichnet man die Radien der Kugeln M und M' durch r und r' und die Entfernung AB des leuchtenden Punktes A von der ihm zugekehrten Oberfläche durch a, ebenso die Entfernung $B'A'$ der Spitze A' der Brennlinie von der zweiten Kugeloberfläche durch a', nennt ferner l die Dicke BB' der Linse und bezeichnet durch n das Brechungsverhältniss, welches hier bei dem Uebergange der Strahlen aus Luft in Glas als 1,5 angenommen worden ist, setzt endlich der Kürze wegen, $n - 1 = m$, so findet man die Grösse a' durch die Formel

$$\frac{1}{\frac{m}{r} - \frac{1}{a}} + \frac{1}{\frac{m}{r'} - \frac{1}{a'}} = \frac{l}{n}$$

In unserer Figur haben wir die halbe Dicke der Linse als Einheit angenommen und $r = r' = 6$, $a = 3$, $l = 2$, $n = \frac{3}{2}$ und $m = \frac{1}{2}$ gemacht, daher wird

3*

$\frac{1}{\frac{1}{12}-\frac{1}{3}}+\frac{1}{\frac{1}{12}-\frac{1}{a'}}=\frac{4}{3}$ oder $a'=-9\frac{3}{5}$. Das negative Zeichen der Grösse a' lehrt, dass der Punkt A' nicht, wie der Punkt A, in der directen Verlängerung des Radius $n'B'$ zu suchen ist, sondern dass man von B' aus rückwärts über n' fortgehen muss, um nach A' zu gelangen. Die angeführte Formel gilt für alle 6 Arten sphärischer Linsen, sobald man nur die Grössen mit ihren gehörigen Vorzeichen versieht. In vielen Fällen sind die Werthe der Grössen r, r', a, a' so bedeutend gegen die Dicke l der Linse, dass diese Dicke des Glases geradezu als Null angenommen werden kann. Die Formel verwandelt sich dann sogleich in

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{m}{r}+\frac{m}{r'}$$

oder wenn man $\frac{m}{r}+\frac{m}{r'}$, zur Abkürzung, gleich $\frac{1}{F}$ setzt in

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{F}$$

welche Formel der für den Hohlspiegel ganz gleich ist und in jedem guten Lehrbuche der Physik auch entwickelt wird.

Diese Gleichung lehrt aus a und F den Werth a' berechnen. Denkt man sich den leuchtenden Punkt A unendlich weit von der Linse entfernt, dann wird $\frac{1}{a}=o$ also $F=a'$, und F bedeutet daher die Entfernung des sogenannten Focus oder Brennpunktes von der Linse, das heisst der Spitze derjenigen Brennlinie, welche sich bilden würde, wenn die Linse von Strahlen getroffen wird, die parallel mit ihrer Axe einfallen. Bei der hier dargestellten Linse ist $f=6$, also würde diese Spitze, wenn die aus dem Unendlichen kommenden Strahlen die Fläche CBC' träfen, rechts von B' in eine Entfernung fallen, die dem Radius $M'B'$ der Linse gleich ist.

Es ist schon oben bemerkt worden, dass nur das Strahlenbündel aAa', welches zwischen b und b' austritt, Strahlen liefert, die von der Brennlinie $IA'I'$ zu kommen scheinen, dass also ein Auge nur innerhalb des Raumes $baKK'g'b'$ den leuchtenden Punkt A auf diesem Theile der Brennlinie hinter dem Glase erblicken würde. Befindet sich dagegen das beobachtende Auge in dem Raume CHK oder $C'H'K'$, so empfängt es auch Strahlen, die vor der Linse auf den Zweigen CH und $C'H'$ convergiren, also ein objectives vor der Linse schwebendes Bild liefern müssten. Wie sehr verzerrt aber solche Bilder sein würden, sieht man bald daraus, wenn man sich das Auge in dem Punkte der Axe denkt, wo die äussersten Randstrahlen CK und $C'K'$ sie schneiden, denn hier treffen alle Randstrahlen zusammen, und das Auge müsste hier den leuchtenden Punkt als einen Kreis sehen, der fast den Durchmesser $C'C$ der Linse haben würde. Ausserdem empfinge das Auge offenbar noch Strahlen, die aus A' zu kommen scheinen, und hier sähe man daher den Punkt A wieder als Punkt, so dass sich also das Bild des Punktes A in einen Punkt und einen Kreis auflöste. Ueberhaupt wird das Auge in den Räumen CKH und $C'K'H'$ stets zwei Bilder des Punktes A beobachten, da es hier immer zwei Strahlen in verschiedener Richtung empfängt, und diese beiden Bilder zeigt auch in der That eine Linse sehr leicht. Es ist nicht ohne Interesse den Raum aa' auf der Linse zu kennen, der die Strahlen, die nach dem Durchgang durch die Linse zum wirklichen gegenseitigen Durchschnitt kommen, von denen sondert, die sich nur schneiden würden, wenn man sie rückwärts verlängerte und so den Theil $IA'I'$ der Brennlinie bilden. Diese beiden Theile der Linse werden durch die Asymptoten cd und $c'd'$ der Brennlinie begrenzt. Die Lage dieser Asymptoten wird nur durch ziemlich mühsame Rechnung gefunden. Der Winkel, den sie mit der Axe der Linse bilden, ergiebt sich in unserem Falle $7^0\, 21'\, 15''$. Der Bogen $B'b = B'b'$, in dessen Endpunkten sie die Linse schneiden, ist $21^0\, 10'\, 56''$ gross und der Strahl Aa, der nach der zweiten Brechung die Asymptote cd bildet, macht mit der Axe EF einen Winkel von $24^0\, 35'\, 7''$.

Fig. 2.

Die zweite Figur, in der dieselben Dinge mit denselben Buchstaben wie in der ersten bezeichnet worden sind, stellt den Gang der Strahlen dar, die von einem Punkte A, ausserhalb der Linsenaxe ausgehen. Denken wir uns A als die Spitze eines ganzen Strahlenkegels, der die Linse trifft, so giebt die Zeichnung freilich nur die Strahlen, welche in einer Ebene liegen, die durch den leuchtenden Punkt und die Axe der Linse gelegt ist. Die Brennlinie hat schon hier eine unsymmetrische Gestalt, und die Brennfläche, welche dem Strahlenkegel angehört, ist offenbar nicht durch Drehung unserer Brennlinie um irgend eine in ihrer Ebene liegende Gerade entstanden. Ueberhaupt ist es nicht leicht, sich die Entstehung der übrigen Theile einer solchen Brennfläche klar zu denken, denn wenn von A ein Strahl ausserhalb unserer Projectionsebene auf die Linse fällt, so bleibt er nach der ersten Brechung, die er an der Oberfläche CBC' erfährt, in einer Ebene, die durch ihn und den Mittelpunkt M der Kugel gelegt werden kann. Nun geht er in der Linse geradlinig fort, bis er die zweite Grenzfläche $CB'C'$ derselben trifft. Um nun seinen Weg beim Austritt in die Luft bestimmen zu können, muss man eine Ebene durch den Mittelpunkt M dieser Kugelfläche und die Richtung des Strahls innerhalb der Linse legen, und in dieser Ebene setzt der Strahl seinen Weg fort. Da also der Strahl jetzt in eine andere Ebene gelangt, so sieht man nicht mehr, welche von A ausgehende Strahlen nach ihrer zweiten Brechung zum gegenseitigen Durchschnitt kommen, ja es bleibt, ohne Rechnungen anzustellen, überhaupt unsicher, ob im Allgemeinen und an jeder Stelle der Linse es solche Strahlen giebt, die nach ihrem Austritt sich schneiden. Die ganze Aufgabe, die wir uns hier gestellt haben, gewinnt an Einfachheit und Klarheit, wenn man erst die Brennlinie construirt, die einem Strahlenkegel zukommt, der nur eine Brechung in einer Kugeloberfläche erfahren hat. Es ist leider unmöglich gewesen, in diesem Hefte eine solche Construction zu liefern; sie wird aber im dritten Hefte nachfolgen. Eine solche Brennlinie ist nämlich offenbar stets völlig symmetrisch, und zwei nächste Strahlen, die in einer Ebene liegen, welche durch den leuchtenden Punkt und den Mittelpunkt der Kugel geht, kommen im Allgemeinen nach der Brechung stets zum Durchschnitt. Bildet sich hier bei der ersten Brennlinie eine Spitze aus, so wird diese auch wieder Veranlassung zu einer Spitze in der zweiten Brennlinie geben, die man sich jetzt dadurch entstanden denken kann, dass die Strahlen nicht mehr von dem leuchtenden Punkte, sondern von dieser Brennlinie auf die zweite Kugelfläche gefallen sind. Daher findet sich die dem Punkte A entsprechende Spitze A' in unserer Figur auch auf der Linie $m'N$, welche nichts anderes ist, als der nach dem Mittelpunkte M gerichtete, also ungebrochene Strahl Amm', nachdem er an der zweiten Kugelfläche gebrochen, bei m' ausgetreten ist. Die Berechnung der Lage des Punktes A' aus der Lage von A ist zwar ausführbar, aber sehr beschwerlich. Da übrigens die erste Figur sehr genau beschrieben worden ist, und im dritten Hefte dieser Gegenstand noch einmal berührt werden muss, so glaube ich hier zur Erläuterung der Fig. 2 nichts mehr hinzufügen zu dürfen, da eine aufmerksame Vergleichung beider Figuren die nöthigen Aufschlüsse geben wird.

TAFEL X.

Vor der Linse DE befindet sich ein Object acb, welches von einem Auge A' hinter der Linse beobachtet wird. Die Zeichnung stellt die Wirkung dreier leuchtender Punkte auf das Auge dar. Die dem Punkte c entsprechende Brennlinie ist $DCFE$ und $Hc'G$; ebenso gehört zu a die Brennlinie $DC'F'E$ und $H'a'G'$ und zu b die Linie $DC''F''E$ und $b'''b'$G$''$. Von a empfängt das Auge A' einen Strahlenkegel, dessen Axe ah vorstellt, der von h nach i gebrochen wird und hier die Linse in einer solchen Form verlässt, als ob die ihn bildenden Strahlen von dem Punkte a' ausgingen, daher beobachtet auch das Auge den Punkt a in a'. Ganz auf dieselbe Weise sieht es vermittelst des gebrochenen Strahlenbüschels $bwlA'$ den Punkt b in b' und offenbar den Punkt c in c', es erblickt daher überhaupt den geradlinigen Gegenstand acb in der Lage $a'c'b'$, die von der geraden Form schon in ähnlicher Weise abweicht, wie die andern beiden Bilder $a''b''$ und $a'''b'''$, nur freilich weniger merklich. Man sieht, dass sich hier der Sehwinkel $aA'b$ in den grössern Winkel $a'A'b'$ verwandelt hat, dass also das Bild $a'c'b'$ dem Auge auch grösser erscheinen muss, als der Gegenstand abc, wenn es ihn ohne die Linse beobachtete. Wenn indessen der Sehwinkel auch nicht vergrössert worden wäre, so könnte die Linse dennoch vergrössernd wirken, denn der Sehwinkel, also auch der Gegenstand, wird vergrössert, wenn ihm das Auge näher kommt; aber die deutliche Sehweite beträgt bekanntlich 8 bis 10 Zoll; in grösserer Nähe verschwimmt der Gegenstand, weil das Auge hier nicht mehr vermag, die eindringenden Strahlenkegel so zur Convergenz zu bringen, dass ihre Spitze auf die Netzhaut fällt. Bringt man aber eine Linse DE zwischen das Auge A' und den Gegenstand ab, so werden die Strahlenkegel seiner einzelnen Punkte bei ihrem Durchgang durch die Linse so geändert, dass sie von den Punkten $a'c'b'$, die in der deutlichen Sehweite liegen, auszugehen scheinen, daher empfängt jetzt das Auge ein deutliches Bild von dem Objecte.

Mit Hülfe der vorhergehenden Tafel überzeugt man sich leicht, dass nur in den Raum DIE Strahlen von allen Punkten des Pfeils ab gelangen können, dass daher auch nur hier der Gegenstand ganz übersehen werden kann; aber dieser Raum wird für das deutliche Sehen noch dadurch beschränkt, dass sich in ihm auch solche Randstrahlen, wie CK und $C'K'$, eindrängen, die Fig. 2 auf Tafel IX. darstellt, wodurch also doppelte Bilder entstehen würden.

Nach allem Bisherigen bedarf es wohl weiter keiner Erläuterung, wie das Auge A'' den Pfeil in der ganz entstellten Form $a''c''b''$ beobachtet und das Auge A''' ihn in der Gestalt $a'''c'''b'''$ sieht. Diese Verzerrungen erscheinen dem Beobachter selten so erheblich, da er keine ganz deutliche Vorstellung davon hat, dass z. B. der Punkt c'' ihm wirklich viel näher liegt als der Punkt a''.

Es lässt sich übrigens an diesen Constructionen unmöglich Alles erklären, denn sie sind so inhaltsreich, dass sich einem aufmerksamen Beobachter viele neue Fragen aufdrängen werden, deren Lösung er entweder schon in der blossen Anschauung finden wird, oder sich doch oft durch eine einfache Zeichnung verschaffen kann.

TAFEL XI.

Die Fig. 1 dieser Tafel stellt ebenfalls den Gang der Lichtstrahlen durch eine biconvexe Linse DE dar, aber der leuchtende Punkt A ist jetzt so weit von derselben entfernt, dass die Brennlinie eine Curve DRE mit einem einzigen Zweige geworden ist. Der leuchtende Punkt A ist in der Axe AH der Linse angenommen und ihre beiden Oberflächen haben verschiedene Krümmungen erhalten. Zugleich ist jeder Strahl in zwei zerlegt worden, in den äussersten rothen und violetten. Diese Trennung der Strahlen findet zwar schon in der Glaslinse statt, aber sie ist zu gering, als dass sie die Zeichnung darstellen könnte; ausserhalb bilden aber die rothen Strahlen eine äussere Brennlinie DRE, die von der innern violetten DVE gesondert ist. Um die Strahlen besser von einander unterscheiden zu können, sind die violetten mit v bezeichneten etwas über die rothen r hinaus verlängert worden. Die äussersten rothen Strahlen Dr und Er schneiden die Axe der Linse in a; die Entfernung dieses Punktes von der Spitze R der Brennlinie oder dem Fokus des Punktes A heisst die Längenabweichung. Diese Spitze der Brennlinie wird auch die Vereinigungsweite der Strahlen genannt, um sie von dem eigentlichen Brennpunkte zu unterscheiden, unter welchem man gewöhnlich die Spitze derjenigen Brennlinie versteht, die einem in unendlicher Ferne liegenden leuchtenden Punkte oder parallelen Strahlen angehört. Dreht man die ganze Figur um die Axe AH, so beschreibt sie den Raum, der von den Strahlen erfüllt wird, welche von A aus die Linse treffen. Die Punkte F und G, in welchen die Brennlinie von den äussersten Randstrahlen getroffen wird, beschreiben bei dieser Drehung einen Kreis, den sogenannten kleinsten Abweichungskreis, weil es der kleinste Kreis ist, durch den alle Strahlen nach der Brechung hindurch gehen. Es giebt keine sphärischen Linsen, bei denen die Längenabweichung und also auch der kleinste Abweichungskreis Null sind, d. h. welche alle von einem Punkte A ausgegangenen Strahlen wieder in einen einzigen Punkt vereinigen; indessen lassen sich doch die Radien der sphärischen Oberflächen der Linse so bestimmen, dass jene Grössen möglichst klein sind, und dies ist bei der hier dargestellten Linse geschehen. Es ist nämlich die Dicke BC der Linse gleich 1, $AB = 37$, das Brechungsverhältniss $n = \frac{3}{2}$, und der Focus R der Strahlen in der Entfernung 4 vom Punkte C angenommen worden; soll nun bei diesen Annahmen die Längenabweichung möglichst klein werden, so muss der Radius r des Kreises DBE gleich 2,584 und der Radius r' des Kreises DCE gleich 7,971 sein. Eine Linse, welche die Eigenschaft hat, die Längenabweichung möglichst klein zu machen, heisst eine Linse von bester Form.

Kommen die Strahlen von einem unendlich weit entfernten Gegenstande, und liegt der Brennpunkt so weit hinter der Linse, dass man die Dicke derselben gegen diese Entfernung vernachlässigen kann, dann muss die den Strahlen zugekehrte Fläche ohngefähr eine sechsmal stärkere Krümmung haben, als die zweite Fläche. Ein solches Glas, bei welchem der Abweichungskreis möglichst klein ist, also die

Strahlen in einem sehr kleinen Raum zusammengedrängt werden, eignet sich gut zu einem Brennglase. Würde man aber die schwächer gekrümmte Fläche den Sonnenstrahlen zukehren, so würde dasselbe Glas die Strahlen weit schwächer concentriren, also viel unwirksamer sein. Eine Zeichnung im dritten Hefte soll dieses Verhalten der Linsen zur Anschauung bringen. Lässt man durch eine kleine kreisförmige Oeffnung Lichtstrahlen auf eine Biconvexlinse fallen, und fängt hinter der Linse das durchgegangene Strahlenbündel mit einem weissen Blatte Papier auf, so bemerkt man nahe an der Linse einen hellen rothgesäumten Kreis, der immer kleiner und heller wird, je weiter man sich mit dem Papiere von der Linse entfernt und endlich in der Lage FG ungefärbt erscheint. Befindet sich das Papier zwischen F und R, so beobachtet man auf ihm einen noch kleineren hellen Kreis, der aber von einem grösseren matt erleuchteten und blau begrenzten Kreise umgeben ist. Im Punkte R selbst ist der helle Kreis am kleinsten und sein Rand am schärfsten. Jenseit dieses Punktes zeigt sich nur noch ein grosser matt erleuchteter und nicht scharf begrenzter Kreis. Der blosse Anblick der Figur erklärt diese Erscheinungen vollständig; zugleich sieht man aus ihr, dass die erwähnten Kreise am Rande heller sein müssen als im Innern, da sich dort die Strahlen dichter zusammen drängen als hier.

Nimmt man in der Formel

$$\frac{1}{\frac{m}{r} - \frac{1}{a}} + \frac{1}{\frac{m}{r'} - \frac{1}{a'}} = \frac{l}{n}$$

welche bereits in der Erklärung der Tafel IX angeführt wurde, die Entfernung a des leuchtenden Punktes als unendlich gross an, so erhält man die Entfernung a' seines Bildes von der andern Fäche der Linse durch die Gleichung

$$a' = \frac{r'\left(r - \frac{m}{n}l\right)}{m\left(r + r' - \frac{m}{n}l\right)}$$

Nimmt man aber a' als unendlich gross an, so wird

$$a = \frac{r\left(r' - \frac{m}{n}l\right)}{m\left(r + r' - \frac{m}{n}l\right)}$$

Aus diesen Formeln sieht man, dass von den beiden Brennpunkten der Linse derjenige ihr am nächsten steht, welcher der am wenigsten gekrümmten Fläche zugekehrt ist. Bei den oben angenommenen Zahlenwerthen ergiebt sich $a' = 3{,}510$ und $a = 3{,}861$. Denkt man sich also den Punkt A anfangs in unendlicher Entfernung links von der Linse, so fällt sein Brennpunkt R in eine Entfernung von 3,510 vom Punkte C. Rückt nun A näher, so entfernt sich R von der Linse, aber nur sehr langsam, z. B. wächst seine Entfernung nur von 3,510 bis auf 4, während sich A vom Unendlichen bis auf 37 Linsendicken genähert hat. Von nun an entfernt sich aber die Spitze R der Brennlinie sehr rasch von der Linse, während der Punkt A sich noch mehr nähert, denn wenn der leuchtende Punkt nur noch um 3,861 von der Linse absteht, liegt der Focus R schon im Unendlichen. Bei noch grösserer Annäherung des Punktes A nimmt die Brennlinie einen andern Charakter an, wie aus der Tafel IX. erhellt. Ihre Spitze fällt nun auf die linke Seite der Linse, anfangs in unendliche Entfernung, rückt dann dem Punkte B näher, je mehr sich ihm A nähert, bleibt aber doch noch von ihm entfernt, selbst wenn A mit ihm zusammenfällt; in unserem Falle um 0,696. Tritt jetzt der leuchtende Punkt A auf die rechte Seite der Linse in den Punkt C, so fällt sein Focus ebenfalls rechts in eine Entfernung von 0,765, so dass also, wie man aus der Erklärung der Tafel IX. weiss, ein Object, welches sich dicht an der rechten Seite der Linse befindet, etwas stärker vergrössert erscheint, als wenn es in B angebracht und von C aus beobachtet wird. Entfernt sich nun der leuchtende Punkt bis 3,510 von der Linse, so rückt sein Focus bis ins Unendliche. Bei noch grösserer Entfernung des Punktes A verwandelt sich dann die Brennlinie wieder in die hier verzeichnete Gestalt; ihre Spitze fällt auf die linke Seite der Linse und nähert sich ihr bis auf die Strecke 3,861, wenn der leuchtende Punkt im Unendlichen liegt.

Fig. 2.

Diese Figur stellt die Wirkung eines Strahlenkegels dar, dessen Spitze A nicht mehr in der Axe HB der Linse liegt. Befindet sich diese Spitze unter der Axe, so bildet sich der zugehörige Brennpunkt R über dieser Linie. Da hier dieselben Punkte mit denselben Buchstaben bezeichnet worden sind, wie die entsprechenden in Fig. 1, so bedarf diese Zeichnung wohl keiner weitern Erklärung. Das räumliche Strahlengebilde, welches dieser Darstellung entspricht, ist aber nicht durch Drehung der Figur um irgend eine gerade Linie entstanden, etwa um die Linie AR, welche die beiden Punkte A und R verbindet, sondern weicht nur dann wenig von einem solchen Umdrehungskörper ab, wenn der leuchtende Punkt sich nicht weit von der Axe entfernt hat.

Fig. 3.

Die beiden ersten Figuren sind hier benutzt, um die Entstehung objectiver Bilder hinter einer Linse anschaulich zu machen. Der Gegenstand aAa' befindet sich in derselben Entfernung von der Linse, wie die Punkte A in den Figuren 1 und 2, nur haben die Strahlen abgebrochen werden müssen, um grössern Raum hinter der Linse zu gewinnen. Die Zeichnung stellt die Brennlinien dar, welche der Spitze, der Mitte und dem Ende des Pfeils entsprechen und zwar sowohl die äusserste rothe als auch die innere violette. Die Spitzen dieser Brennlinien sind entsprechend r, R, r' und v, V, v'. Die Linien selbst sind bis zu den Enden der Linse D und E fortgeführt, obgleich sie schon früher abbrechen; aber den Punkt zu bestimmen, in dem sie enden, erfordert eine besondere Rechnung, die hier, als ausserwesentlich, nicht gemacht worden ist. Das Auge O, in der Axe der Linse, empfängt Strahlenkegel, deren Spitzen mit den Spitzen der Brennlinien fast ganz zusammenfallen. Von diesen Strahlenkegeln stellt die Zeichnung nur die Axen dar. Der Beobachter sieht also von dem Pfeile ein verkleinertes, umgekehrtes und rothes Bild in der Lage $r'Rr$ und dahinter ein ebensolches violettes $v'Vv$. Zwischen beiden liegen unzählige andere Bilder in den verschiedenen übrigen prismatischen Farben. Diese Bilder decken sich für das Auge O fast sämmtlich, daher sieht es auch den Gegenstand fast ohne alle prismatische Färbung.

Die Spitzen der rothen Strahlenbüschel, welche das Auge P empfängt, liegen auf der Linie pp' und in dieser Lage sieht auch das Auge den Pfeil aa'. Die Zeichnung giebt deutlich an, wie das violette Bild hinter dem rothen und etwas tiefer liegt, daher wird man von P aus den Gegenstand nur in der Mitte mit seinen natürlichen Farben, an dem obern Rande aber roth und an dem untern violett gefärbt sehen, denn hier heben sich nicht, wie in der Mitte, die prismatischen Farben durch ihre totale Vereinigung vollständig auf. Ganz auf dieselbe Weise beobachtet nun das Auge Q ein Bild des Gegenstandes in der Lage $q'q$, aber dieses Bild ist offenbar oberhalb bei q' violett und an der Spitze bei q roth gefärbt. Dass übrigens an den Seiten, selbst bei schmalen Gegenständen, ebenfalls prismatische Färbungen eintreten können, übersieht man bald, wenn man bedenkt, dass die Brennflächen, welche von Punkten ausserhalb der Axe herrühren, nicht symmetrisch sind, also die Spitzen der Strahlenkegel die in's Auge gelangen, nicht in ein und derselben Ebene liegen werden.

Offenbar lässt sich auf einer weissen Tafel in der Gegend bei R, ganz ähnlich wie beim Hohlspiegel, ein umgekehrtes, verkleinertes Bild des Objectes auffangen; an andern Stellen ist dies eben so wenig möglich als beim Hohlspiegel, denn auch hier werden die Brennflächen der leuchtenden Punkte von der Tafel in Gestalt von Kreisen geschnitten und nicht in Punkten, wie es zur Hervorbringung eines deutlichen Bildes doch sein muss.

TAFEL XII.

Fig. 1.

Diese Tafel lehrt die Wirkung einer Biconcav-Linse auf die Lichtstrahlen kennen. Die Spitze des einfallenden Strahlenkegels ist A, die Axe der Linse $ABCD$. Auf dieser Linie liegen also die Mittelpunkte der Kugelflächen, welche die Linse begrenzen. Zwei sehr nahe Strahlen, wie Aa und Aa', erfahren zuerst eine Brechung nach ab und $a'b'$, und treten dann, von neuem gebrochen, in der Richtung bc und $b'c'$ aus der Linse heraus. Verlängert man diese Richtungen rückwärts, so vereinigen sie sich im Punkte d, und hier würde also ein Auge, welches den zwischen den Linien bc und $b'c'$ liegenden sehr kleinen Strahlenkegel empfängt, den Punkt A erblicken.

Wie nun durch die stetige Folge solcher Punkte, wie d, die Brennlinie JSK entsteht, ist jetzt schon hinlänglich verständlich, eben so auch, dass man eine Vorstellung von der Brennfläche und dem ganzen im Raume liegenden Strahlengebilde erhält, wenn man die Figur um die Axe AD dreht.

Der Strahlenkegel AEF breitet sich nach der Brechung hinter der Linse in einen andern $LGHM$ aus, dessen Spitze in O liegt. Fängt man daher das durchgehende Licht hinter der Linse mit einer weissen Tafel auf, so beobachtet man auf ihr nur matt erleuchtete Kreise, die immer grösser und dunkler werden, je weiter man sich mit der Tafel von der Linse entfernt. Hält man ein solches Hohlglas, in einen dunkeln Ring gefasst, den Sonnenstrahlen entgegen, so wirft der Ring, schon in einer Entfernung von wenigen Fussen, hinter sich einen solchen Schatten, als ob er mit einer undurchsichtigen Scheibe bedeckt wäre, denn die durch das Glas dringenden Sonnenstrahlen sind hier schon über einen so grossen Raum ausgebreitet, dass ihre Wirkung fast gänzlich verschwindet.

Fig. 2.

Die Veränderung, welche die Brennlinie erfährt, wenn der leuchtende Punkt A aus der Axe heraustritt, ist nach den bisher gegebenen Erläuterungen gewiss aus dieser Zeichnung unmittelbar verständlich. Die Spitze S dieser Brennlinie liegt auf dem Strahle QR, welcher von dem Strahle APQ herrührt, der durch den Mittelpunkt N des Kreises EF gegangen ist, also ungebrochen in die Linse eindringt, da er normal auf ihre Oberfläche einfällt.

Fig. 3.

Durch eine Biconcav-Linse oder überhaupt durch jedes Hohlglas beobachtet man die Gegenstände vor derselben verkleinert, aufrechtstehend und in grösserer

Nähe. Diese Wirkung solcher Linsen stellt die Zeichnung mit Hülfe der beiden vorhergehenden anschaulich dar. Von dem Objecte $A_1 A A_2$ sind die drei den bezeichneten Punkten entsprechenden Brennlinien construirt worden. Das Auge O in der Axe der Linse empfängt Strahlenkegel, deren Spitzen in a_1, a, a_2 zu liegen scheinen, es sieht also hier ein Bild des Pfeils, welches nur sehr wenig verzerrt erscheint. Dagegen beobachtet man in anderer Stellung, z. B. in P und Q, von dem geradlinigen Pfeil $A_1 A A_2$ schon merklich gekrümmte Bilder $b_1 b b_2$ und $c_1 c c_2$. Für das Auge P ist der Vorgang nun folgender: $A' E$ stellt die Axe eines kleinen Strahlenkegels dar, dessen Spitze in A_1 liegt; er dringt gebrochen in der Richtung EF, in die Linse ein, und verlässt sie bei F, abermals gebrochen, so dass er als ein Lichtbüschel, dessen Spitze in b_1 liegt, in das Auge P gelangt. Ebenso bezeichnen $AGHP$ und $A_2 JKP$ die Axen der den Punkten A und A_2 entsprechenden Strahlenkegel und b und b_1 geben die Lage der Spitzen der Lichtbüschel an, deren Axen HP und KP darstellen. Das Auge P beobachtet daher ein Bild des Pfeiles in der Lage $b_1 b b_2$. Auch für das Auge Q giebt die Figur auf eine leicht erkenntliche Weise die Axen der zur Entstehung des Bildes $c_1 c c_2$ wirksamen Strahlenkegel an.

TAFEL XIII.

Fig. 1.

Nachdem wir in den vorigen Tafeln die Wirkung einer Convex-Linse und einer Concav-Linse nachgewiesen haben, untersuchen wir hier den Einfluss, den eine Verbindung zwei solcher Linsen auf einen Lichtkegel ausübt. Eine solche Zusammenstellung ist nichts anderes, als ein Galileisches Fernrohr oder ein gewöhnlicher Opergucker in seiner einfachsten Gestalt. Da es hier nicht darauf ankommen kann, die beste Form eines solchen Fernrohrs anzugeben, sondern nur im Allgemeinen die Wirkungsweise einer ähnlichen Linsen-Combination zu erklären, so sind die Formen der beiden Gläser ganz willkürlich gewählt worden.

Die Linie AF stellt die gemeinschaftliche Axe beider Linsen dar. Von dem Punkte A dieser Axe fällt ein Lichtkegel auf die Convexlinse HJ oder das sogenannte Objectivglas des Fernrohrs. Von diesem Kegel hat, der Raumersparniss wegen, ein kleiner Theil wegbleiben müssen. Dieser Kegel würde hinter der Linse eine Brennfläche bilden, deren Spitze im Punkte F läge, wenn nicht das Hohlglas DE die von der ersten Linse gebrochenen Strahlen auffinge, die nun zwischen K und L in das Glas eindringen und es zwischen M und N in der Gestalt eines divergirenden Lichtbüschels $MNPO$ verlassen, der von der Brennfläche MGN auszugehen scheint. Auf dieser Brennfläche würde ein Auge, welches den divergirenden Lichtbüschel auffängt, den Punkt A erblicken.

Fig. 2.

In dieser Zeichnung ist die Wirkung der beiden Linsen auf einen Lichtkegel dargestellt, dessen Spitze A nicht mehr in ihrer gemeinschaftlichen Axe liegt. Es ist an dieser ganzen Figur für den, welcher das Vorhergehende klar aufgefasst hat, gewiss nichts weiter zu erläutern. Nur das mag noch erwähnt werden, dass die Strahlen, die zwischen N und Q auffallen, hier die totale Reflexion erfahren und in die Linse zurückkehren, wie es die Figur auch angiebt.

Fig. 3.

Auf welche Weise in einem solchen Galileischen Fernrohre die Bilder entstehen, lehrt die dritte Figur. Von den drei Punkten A_1, A, A_2 des Objectes sind die Brennlinien construirt, deren Spitzen in a_1, a, a_2 fallen. Das Auge P empfängt Strahlenkegel, deren Spitzen in diesen Punkten liegen. Wenn der Pfeil deutlich gesehen werden soll, so muss das Bild $a_1 a a_2$ in der deutlichen Sehweite des Auges stehen, und da diese Sehweite für verschiedene Augen verschieden ist, so muss die Entfernung der beiden Gläser des Fernrohrs von einander geändert werden können, was auf die bekannte Weise vermittelst zweier in einander verschieblicher Röhren bewirkt wird. Der Sehwinkel $a_1 P a_2$ ist grösser, als der Winkel, unter dem das Object $A_1 A A_2$ dem Auge P wirklich erscheint, daher macht diese Verbindung zweier Linsen den Gegenstand nicht nur deutlicher, sondern vergrössert ihn auch etwas. Die Stärke dieser Vergrösserung ist dadurch veranschaulicht, dass durch die Linie FG angegeben worden ist, wie gross der Gegenstand sein müsste, wenn er dem Auge unter demselben Sehwinkel erscheinen sollte, als das Bild $a_1 a a_2$.

Das Auge Q empfängt vom Punkte A_1 einen Strahlenkegel, dessen Axe AH darstellt; dieser dringt in der Richtung HJ in die Linse ein, verlässt sie in der Richtung JK und kommt so, bei K und L noch zweimal gebrochen, in der Richtung LA ins Auge. Bei L verlassen seine Strahlen das Glas so, als ob sie sämmtlich aus b_1 kämen, daher erblickt das Auge Q hier ein Bild des Punktes A_1. Um die Figur nicht mit Buchstaben zu überladen, sind die übrigen wirksamen sehr leicht erkenntlichen Strahlenkegel nicht weiter bezeichnet worden; denn schon eine oberflächliche Betrachtung wird lehren, in welcher Weise das Bild $b_1 b b_2$ für das Auge Q entsteht.

Eine Combination zweier Convex-Linsen, oder das sogenannte astronomische Fernrohr, hat für das dritte Heft aufgespart werden müssen.

TAFEL XIV.

Die vorliegende Tafel ist es eigentlich, welcher das ganze Werk seine Entstehung verdankt. Ich hatte nämlich als Lehrer und Examinator die Erfahrung gemacht, dass nur ausserordentlich Wenige von denen, die Physik studiren, eine klare Einsicht in die Entstehung eines Regenbogens besitzen. Dieser Mangel rührt offenbar bei uns zum Theil von der geringen Verbreitung mathematischer Kenntnisse her, zum Theil aber auch von der oberflächlichen Behandlungsweise dieses Gegenstandes in den bekannteren Lehrbüchern der Physik. Ich überzeugte mich aber bald, dass schon eine sorgfältige graphische Darstellung genügen würde, eine befriedigende Vorstellung von dem Wesen dieser Naturerscheinung zu erwecken, selbst wenn der Schüler nur wenig mathematische Kenntnisse besitzt. Eine solche Construction des ersten Regenbogens entsprach den gehegten Erwartungen so vollständig, dass der Gedanke nahe lag, auch viele der übrigen optischen Erscheinungen durch genaue Zeichnungen dem Verständniss näher zu bringen.

Die erste Figur stellt in dem Kreise, dessen Mittelpunkt M ist, den Durchschnitt einer Wasserkugel oder eines Regentropfens im vergrösserten Massstabe mit der Ebene des Papiers dar. Aus einem unendlich entfernten Punkte des Durchmessers IG dieses Kreises fallen parallele Lichtstrahlen auf denselben. Von diesen Strahlen ist nur die obere Hälfte $FGfg$ gezeichnet worden, um die untere für die austretenden Strahlen freizulassen. Sobald die Strahlen den Tropfen treffen, werden sie in zwei Theile zerlegt; der eine Theil wird reflectirt und macht so die Kugel sichtbar, wenn man nämlich unter diesen Strahlen auch die unregelmässig reflectirten oder zerstreuten mit begreift, der andere Theil dringt gebrochen und in Farben zerlegt in die Kugel ein. In der Figur sind von den gebrochenen Strahlen nur die rothen beibehalten worden.

Der Durchschnitt zwei nächster dieser Strahlen giebt Veranlassung zu einer Brennlinie, welche von dem Tropfen bei c geschnitten wird und sich nach g hin erstreckt, ohne diesen Punkt zu erreichen. Alle Strahlen, die auf den Quadranten Gg auffielen, werden in den weit kleineren Raum Ic zusammengedrängt, zerfallen hier wieder in zwei Theile, von denen der eine gebrochen die Kugel verlässt, der andere nach dem Reflectionsgesetz in den Tropfen zurückkehrt und sich hier über den Bogen Gl ausbreitet. Bei dieser Reflection bilden die Strahlen von neuem eine Brennlinie cH. Sobald die Strahlen den Bogen Gl getroffen haben, erfahren sie abermals eine Zerlegung, der reflectirte Theil derselben ist nicht mit in die Zeichnung aufgenommen worden, dagegen stellt sie den für unsern Zweck wichtigsten Theil, den gebrochenen, dar.

Der zwischen l und d austretende Theil bildet hier ebenfalls durch gegenseitigen Durchschnitt zwei nächster Strahlen die Brennlinie lm, die sich in grösserer Entfernung von der Wasserkugel mit ihrer Asymptote de fast vollständig vereinigt. Diese Asymptote wird durch den in c reflectirten Strahl cd gebildet, nachdem er bei d gebrochen, den Tropfen verlassen hat. Den ganzen Weg dieses Strahles, der für uns von Wichtigkeit ist, hebt die Zeichnung durch die stärkere Linie $abcde$ besonders hervor. Dass der Strahl de auch wirklich die Asymptote der Brennlinie bildet, oder dass er sich mit seinen Nachbarstrahlen im Unendlichen schneidet, also einen unendlich fernen Punkt mit der Brennlinie gemein hat, ergiebt sich daraus, dass die dem Strahle ab benachbarten parallelen Strahlen sich nach der Brechung auf der Kugeloberfläche in c schneiden, also hier, der vollständigen Symmetrie der Kugel wegen, auch eben so reflectirt werden, wie sie einfielen und daher bei d die Kugel auch wieder in paralleler Richtung verlassen müssen.

Wenn ein Auge die Strahlen aufnähme, welche zwischen G und d austreten, so würde es nur einen sehr schwachen Lichteindruck von dem leuchtenden Punkte empfinden, denn diese Strahlen sind weniger concentrirt als die ursprünglichen, wie ein Blick auf die Zeichnung lehrt, und sind ausserdem durch die Zerlegung in Farben und die häufigen Reflexionen und Brechungen sehr geschwächt. Dagegen sind die Strahlen, welche zwischen d und l ausgehen, ausserordentlich dicht und werden am Rande der Brennlinie lm, die sich in grösserer Entfernung von der Wasserkugel fast mit ihrer Asymptote vermischt, sehr wohl einen Eindruck auf das Auge hervorzubringen vermögen. Der Lichteindruck auf das Auge wird ausserdem noch dadurch verstärkt, dass in dem Raume $kilm$ die Strahlen doppelt übereinander liegen, denn die Strahlen, welche zwischen ab und fg den Tropfen treffen, werden nach den Bogen ch hingebrochen und hier so reflectirt, dass sie abermals eine Brennlinie in der Kugel bilden, die von l aus sich nach h hin erstreckt, aber in der Zeichnung nicht deutlich genug erscheint, da die Strahlen hier zu vereinzelt auftreten. Wir haben bis jetzt bloss den Gang der Strahlen in einer Ebene verfolgt, die durch den leuchtenden Punkt und den Mittelpunkt der Kugel gelegt ist, denken wir uns aber die in dieser Ebene ausgeführte Construction um die Linie IF als Axe herumgedreht, so durchläuft der Halbkreis GgI die Oberfläche der Wasserkugel und die Linie fg den mit parallelen Strahlen erfüllten Cylinder, welcher die Kugel trifft; die Brennlinien beschreiben dann Brennflächen, auf denen sich die gebrochenen und reflectirten Strahlen des aufgefangenen Strahlencylinders schneiden. Die Linie de durchläuft bei dieser Drehung die Oberfläche desjenigen Kegels, der sich an die von der Curve lm beschriebene Brennfläche immer näher anschliesst, je weiter sich beide von der Kugel entfernen, ohne dass sich doch beide je vollständig vereinigen. Dieser Kegel ist also der Asymptotenkegel der Brennfläche. Ein Auge, welches sich in gehöriger Lage auf der Oberfläche dieses Kegels befindet, empfängt also von dem leuchtenden Punkte einen rothen Lichteindruck. Für rothe Strahlen bildet die Seite des Asymptotenkegels mit der Axe desselben einen Winkel von $42^0\ 2'$, also so gross ist der Winkel, den de mit IF oder mit ne macht. Denkt man sich das Auge A in der horizontalen Linie ne, welche mit IF parallel läuft, eine feste Stellung einnehmend und die Wasserkugel anfangs in der Lage, dass IF mit ne zusammenfällt, so wird das Auge nur sehr schwach wirkende Strahlen empfangen, die dicht unter G austreten; entfernt sich nun aber die Kugel in senkrechter Richtung so von der Linie ne, dass IF dieser Linie stets parallel bleibt, so wird zwar das Auge immer dichter austretende Strahlen erhalten, die aber immer noch nicht wirksam genug sind, um einen Lichteindruck hervorzubringen. Erst wenn die Kugel in der angegebenen Weise sich so weit erhoben hat, dass das Auge von der Asymptote der Brennlinie getroffen wird, oder auf dem Asymptotenkegel liegt, dann sieht das Auge ein rothes Bild von dem in unendlicher Ferne in der Richtung FG strahlenden Lichtpunkte. Der Ausdruck „Bild" ist hier freilich in sehr allgemeinem Sinne genommen und bedeutet nur einen wahrnehmbaren Eindruck des Gegenstandes auf das Auge. Erhöbe sich nun die Wasserkugel noch weiter über die horizontale Linie ne, so würde das Auge A gar nicht mehr von den Strahlen des Lichtpunktes getroffen. Denkt man sich jetzt eine auf der Linie ne senkrechte Ebene dicht mit Wassertropfen bedeckt, und wirft aus unendlicher Ferne ein leuchtender Punkt in der Richtung ne rothe Strahlen auf diese Ebene, so erblickt das Auge A auf dieser Ebene einen rothen Kreis, dessen Mittelpunkt in der Linie ne liegt und dessen Radius eine scheinbare Grösse von $42^0\ 2'$ besitzen wird, denn alle die Kugeln, welche auf einer Linie liegen, die diesen Winkel mit der Geraden ne bildet, sind fähig einen Eindruck auf das Auge zu machen. Die Tropfen innerhalb dieses Kreises werden zwar keinen starken Eindruck auf das Auge hervorbringen, aber doch immer einen kräftigern als die, welche ausserhalb des Kreises liegen, denn von diesen empfängt das Auge gar keine Strahlen, welche aus dem Innern derselben kommen, sondern nur die von der Oberfläche reflectirten, daher muss der innere Theil des Kreises heller erscheinen als der äussere. Wäre nicht bloss eine Ebene, sondern der ganze Raum vor dem Auge mit Tropfen erfüllt, so würden alle die Kugeln, welche auf der Kegelfläche liegen, die durch die Drehung des Winkels den um den festen Schenkel ne erzeugt wird, einen Lichteindruck hervorbringen. Offenbar sähe das Auge nur einen Kreis, da es sich in der Spitze des Kegels befindet, aber dieser Kreis würde um so grösser erscheinen, je weiter entfernt man sich die Kugel dächte.

Für die rothen Strahlen haben wir den Brechungsexponenten $^4/_3$ angenommen, der für die violetten Strahlen ist ohngefähr um $^1/_{81}$ grösser, dadurch sinkt der Winkel, den die Seite de des Asymptotenkegels mit der Axe JG bildet, auf $40^0\ 16'$ herab, und eben so gross würde der Winkel den werden, daher erblickte das Auge A auf einer mit Tropfen bedeckten Ebene, die von einem unendlich entfernten leuchtenden Punkte mit violettem Lichte bestrahlt wird, einen violetten Kreis, dessen scheinbarer Radius $40^0\ 16'$ beträgt. Fällt nun von einem solchen Punkte weisses Licht auf einen Regentropfen, so wird es in die prismatischen Farben zerlegt; befindet sich der Tropfen $40^0\ 16'$ über der Linie ne, so treffen die violetten Strahlen das Auge A, erhebt sich der Tropfen weiter, so gelangen die folgenden prismatischen Farben in dasselbe, bis endlich, wenn der Tropfen $42^0\ 2'$ hoch steht, nur noch die rothen Strahlen ins Auge kommen.

Beleuchtet nun ein unendlich entfernter Punkt einen mit Wassertropfen erfüllten Raum mit weissem Lichte, und man legt durch den leuchtenden Punkt und das Auge A eine gerade Linie An, so senden alle die Tropfen, die auf einer Kegelfläche liegen, deren Seite ed mit ihrer Axe en einen Winkel von $40^0\ 16'$ bilden, violette Strahlen ins Auge, und von denen, die sich auf einer Kegelfläche befinden, deren Seite $42^0\ 2'$ mit dieser Axe macht, erhält es rothe Strahlen. Zwischen beiden Kegelflächen liegen nun die unzähligen andern, von denen die übrigen prismatischen Farben ins Auge gelangen.

Diese Kegelflächen werden von Ebenen, die senkrecht auf der Axe stehen, in Kreisen geschnitten, daher würde ein einziger in grosser Entfernung leuchtender Punkt auf einer Regenwand einen prismatisch gefärbten Kreis hervorbringen, dessen scheinbare Breite $42^0\ 2' - 40^0\ 16' = 1^0\ 46'$ betragen müsste. Dass die Tropfen in fallender Bewegung begriffen sind, kann die Erscheinung nicht stören, da die Stelle eines sinkenden Tropfens durch einen andern ersetzt wird, der von höher gelegenen Punkten kommt. Jeder einzelne Punkt der Sonnenscheibe bringt aber einen solchen Kreis hervor, und wenn z. B. die Oberfläche der Sonne nur rothes Licht ausstrahlte, so würde man auf der Regenwand einen roth gefärbten Kreis beobachten, dessen scheinbare Breite 32 Minuten betrüge, nämlich eben so viel, als die durchschnittliche scheinbare Grösse der Sonne. Da sie aber weisses Licht aussendet, so verursacht jede prismatische Farbe einen Ring von ebenso grosser Breite. Diese Ringe decken sich zum Theil und vergrössern die oben angegebene Breite des prismatischen Farbenringes noch un 32 Minuten, so dass die ganze scheinbare Breite des Regenbogens $1^0\ 46' + 32' = 2^0\ 18'$ beträgt, oder etwas grösser als vier

Sonnendurchmesser sein wird. Wenn die Gestalt der Regentropfen nicht genau sphärisch ist, so können diese Zahlenwerthe allerdings etwas abgeändert werden. Sorgfältig angestellte Messungen geben übrigens den scheinbaren Halbmesser des Regenbogens fast um einen halben Grad kleiner, als den Winkel, den die Asymptote der Brennlinie mit den einfallenden Strahlen bildet, und Herr Airy hat diese Erscheinung nach der Undulationstheorie dadurch genügend erklärt, dass die grösste Intensität des Lichtes bei Brennlinien nicht in der Asymptote liegt. Wenn die Sonne im Horizonte steht, wird der Regenbogen nur als Halbkreis erscheinen, denn die Axe des Kegels, dessen Mantel er bildet und dessen Spitze im Auge des Beobachters liegt, trifft die Wolkendecke selbst im Horizonte; hat sich aber die Sonne mehr als $42\frac{1}{2}$ Grad über den Horizont erhoben, so kann offenbar der erste oder Hauptregenbogen überhaupt nicht mehr gebildet werden.

Fig. 2.

Bekanntlich zeigt sich über dem ersten oder Hauptregenbogen ein etwas dunklerer Raum, und dann folgt ein zweiter breiterer aber weit matterer Regenbogen, dessen Farben in umgekehrter Ordnung auf einander folgen, so dass er immer mit der rothen Farbe beginnt und aussen mit der violetten endet. Die zweite Figur erklärt auch die Entstehung dieses Regenbogens vollständig. Zwischen den Linien rs und gh fallen parallele Strahlen eines unendlich entfernten Lichtpunktes auf die Wasserkugel, die gebrochen in sie eindringen. Von diesen gebrochenen Strahlen sind ebenfalls nur die rothen in der Zeichnung beibehalten worden. Diese Strahlen concentriren sich auf dem Kreisbogen oJp, werden hier in zwei Theile zerlegt, von denen der eine den Wassertropfen verlässt und die Brennlinie oKp bildet, der andere aber in den Tropfen zurückkehrt, hier, an der anderen Fläche, abermals eine Spaltung erfährt, wobei der austretende gebrochene Theil, der hier weggelassen ist, Veranlassung zu dem Hauptregenbogen giebt, der reflectirte aber im Innern des Tropfens eine Brennlinie mit einer Spitze L bildet und dann gebrochen austritt. Dieser austretende Theil giebt nun Veranlassung zum zweiten Regenbogen, denn er verursacht ebenfalls eine Brennlinie, die freilich wegen der starken Zerstreuung der Strahlen in der Figur nur schwach angedeutet erscheint. Der eine Strahl, welcher die Asymptote dieser Brennlinie bildet, die vom Auge A beobachtet wird, ist mit den Buchstaben $abcdef$ bezeichnet. Während bei der Bildung des ersten Regenbogens nur der Theil der Sonnenstrahlen wirksam war, der die obere Hälfte des Tropfens trifft, verursachen nun die in den untern Theil eintretenden Strahlen den zweiten Regenbogen. Der Winkel efn, den die Asymptote ef mit der der Axe JG parallelen Linie fn bildet, ist für die rothen Strahlen $50^0\ 59'$ und für die violetten würde er $54^0\ 10'$ betragen. Wer die sorgfältige Beschreibung des ersten Regenbogens richtig verstanden hat, für den bedarf es jetzt wohl nur der Erwähnung, dass nach dieser Zeichnung und Berechnung in einer Höhe von $50^0\ 59'$ über der Linie, die durch den Mittelpunkt der Sonne und das Auge eines von der Sonne abgewandten Beobachters geht, der mittlere Theil eines 32 Minuten breiten rothen Ringes auf einer Regenwand erscheinen wird, dagegen $54^0\ 10'$ hoch der mittlere Theil eines eben so breiten violetten Ringes. Zwischen beiden liegen eben solche mit den übrigen prismatischen Farben leuchtende Ringe. Der zweite Regenbogen hat also eine Breite von $54^0\ 10' - 50^0\ 59' + 32' = 3^0\ 43'$ und ist in seinem untern rothen Theile von dem äussersten Roth des Hauptregenbogens $7^0\ 25'$ entfernt. Die Tropfen, welche zwischen beiden Regenbogen schweben, senden dem Auge gar keine Strahlen zu, die aus ihrem Innern kommen, sondern nur von ihrer Oberfläche reflectirte, daher erscheint dieser Theil dunkler als der übrige mit Regentropfen erfüllte.

Wenn die Sonnenstrahlen intensiv genug wären, um durch die vielen Reflexionen und Brechungen nicht bald geschwächt zu werden, so würden offenbar noch weit mehr Regenbogen entstehen können, deren Helligkeit freilich immer mehr und mehr abnehmen müsste. Der dritte Regenbogen würde z. B. die Sonne in einer Entfernung von 37^0 umgeben und in einer Entfernung von 42^0 mit dem violetten Theile enden, also eine Breite von 5^0 besitzen. Er würde wegen seiner Breite und Lichtschwäche auch deswegen kaum sichtbar sein, weil ihn die Nähe der Sonne zu sehr verdunkelte, selbst wenn die Bedingungen zu seiner Bildung auch vorhanden wären.

Erklärung der Tafeln.

Der Zweck dieser Zeichnungen ist, das schwierige Studium der Optik zu erleichtern und namentlich eine klare Vorstellung von der Wirkungsweise optischer Instrumente zu erwecken. Dass die bekannten Lehrbücher der Optik und selbst sorgfältig angestellte Rechnungen diesen Zweck nicht in dem Maasse erfüllen, als die vorliegenden Constructionen, dafür könnten wir das Urtheil der sachkundigsten Physiker anführen, wenn nicht schon ein blosser Blick auf unsere Zeichnungen diese Behauptung bestätigte. Wir setzen zu ihrer Erklärung nur die Kenntniss der zwei allgemein bekannten Sätze über die Zurückwerfung und Brechung der Lichtstrahlen voraus.

Die Linie LM s … mit der Ebene
des Papiers vor, a … befindet sich
ein vollkommen g … Lichtstrahlen
in gerader Linie f … t ein Büschel
Lichtstrahlen aus, … ter demselben
Winkel zurückgew … o z. B. Winkel
$ALG = OLN$, s … den Weg LO.
Nur der senkrecht … ; alle übrigen
Strahlen schlagen … man sich aber
irgend einen dieser … A' verlängert,
so ergiebt sich leic … LG, dass alle
die so verlängerten … also so in ihr
Mittel zurückkehre … ren, der eben-
soweit hinter dem … piegel. Denkt
man sich jetzt die … herumgedreht,
so durchläuft LM … chreiben einen
Kegel, dessen Spi … l beschreiben,
dessen Spitze in … Kegel ALM