

**Anwendung der Invariantentheorie zur Berechnung des  
dreidimensionalen Versagens- und Kriechverhaltens von  
geschlossenzelligen Schaumstoffen unter Einbeziehung der  
Mikrostruktur**

**Dissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

vorgelegt der

Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät  
(ingenieurwissenschaftlicher Bereich)  
der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

von

Herrn Arnim Kraatz

geb. am 15.05.1975 in Marburg

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. H. Altenbach

Prof. Dr.-Ing. W. Becker

Tag der Einreichung: 18.12.2006

Tag der öffentlichen Verteidigung: 10.04.2007

Halle (Saale), 2007

## **Danksagung**

Allen Personen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, möchte ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.

Herrn Prof. Holm Altenbach danke ich für die Übernahme der Berichterstattung, sein Interesse an meiner Arbeit sowie die stets anregenden und sehr angenehmen Diskussionen.

Herrn Prof. Wilfried Becker danke ich für die Übernahme der Mitberichterstattung und die Durchsicht meiner Arbeit sowie die hilfreichen Gespräche.

Dr. Martin Moneke, Dr. Vladimir Kolupaev, Florian Becker, Reinhold Damko, Axel Nierbauer und Dietmar Schulze danke ich für die sehr gute Zusammenarbeit, die intensiven Diskussionen und die Unterstützung während des gesamten Projekts. Ferner möchte ich mich bei den Mitarbeitern der Technologie sowie Mitarbeitern quer durch das gesamte DKI bedanken für die Hilfe, die guten Gespräche und den Spaß, den die Arbeit mit Ihnen gemacht hat.

Weiterhin möchte ich mich bei den Diplomanden, Studienarbeitern und studentischen Mitarbeitern, die wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, bedanken.

Mein besonderer Dank gilt Dr. Alexander Roth von der Firma Röhm GmbH für die große Unterstützung im Rahmen dieses Projektes.

---

## Inhalt

1.	Einleitung .....	1
2.	Materialien .....	5
2.1	Einsatzgebiete und Materialien für Hartschäume .....	5
2.2	Mechanische Eigenschaften von Hartschäumen .....	7
2.2.1	Mechanisches Verhalten im Kurzzeitversuch .....	7
2.2.2	Mechanisches Langzeitverhalten .....	10
2.2.3	Mechanisches Verhalten von polymeren Schäumen.....	12
2.3	Viskoelastisches Werkstoffverhalten .....	18
2.4	Methodik zur Untersuchung des mechanischen Langzeitverhaltens unter zusammengesetzten Beanspruchungen .....	24
3.	Mikromechanische Modellierung der Schaumstruktur .....	27
3.1	Morphologie und Charakterisierung von Hartschäumen .....	27
3.2	Charakterisierung des untersuchten PMI-Schaums .....	30
3.3	Mikromechanische Modelle zur Beschreibung der elastischen Eigenschaften .....	35
3.4	Vergleich von Messergebnissen und Berechnungen.....	46
3.5	Ergebnisse aus quasistatischen Versuchen.....	51
3.6	Berechnung der Festigkeiten von Hartschaumstoffen .....	57
4.	Mehraxiale Prüfung.....	59
4.1	Aufbau und Durchführung mehraxialer Versuche .....	59
4.1.1	Uniaxiale Versuche bis zum Versagen .....	60
4.1.2	Mehraxiale Versuche bis zum Versagen.....	68
4.1.3	Kriechversuche.....	70
4.1.4	Kriechfunktionen.....	71

5.	Modellierung des Versagens- und Kriechverhaltens von Hartschaumstoffen .....	77
5.1	Isotropes Kriechen - Grundgleichungen .....	77
5.2	Kompressibles Materialmodell $\Phi_2$ .....	80
6.	Beschreibung des mehraxialen Versagensverhaltens.....	85
6.1	Potenzial $\Omega_2$ zur Beschreibung des Versagensverhaltens von Hartschaumstoffen .....	86
6.2	Ermittlung der freien Werte des Potentials $\Omega_2$ .....	87
7.	Beschreibung des mehraxialen Kriechverhaltens von Hartschaumstoffen	91
7.1	Potenzial $\Phi_2$ zur Beschreibung des Kriechverhaltens von Hartschaumstoffen .....	91
7.2	Ermittlung der freien Werte des Potentials $\Phi_2$ .....	92
8.	Zusammenfassung.....	96
A	Anhang .....	98
A.1	Versagensversuche .....	98
A.2	Kriechversuche.....	101
B	Verzeichnisse .....	105
B.1	Literaturverzeichnis.....	105
B.2	Symbole und Abkürzungen.....	115

# 1. Einleitung

## Einführung

Kunststoffschäume dringen neuerdings in Anwendungsbereiche vor, die bisher auf Grund der hohen mechanischen Anforderungen nur Metallwerkstoffen vorbehalten waren. So wird im Bereich des Leichtbaus, speziell im Flugzeug- und Automobilbau, eine stetige Gewichtsreduzierung verlangt, um durch leichtere Bauteile Ressourcen und Energie einzusparen. Um dennoch die hohen Festigkeiten und Steifigkeiten von Metallkonstruktionen realisieren zu können, werden zunehmend Sandwichbauteile mit Hartschaumkern eingesetzt. Neben dem Leichtbau finden Hartschaumstoffe in U-Booten als Träger und Wasserspeicher, im Bauwesen als Isolationsschicht unter Fundamenten und in vielen anderen Bereichen Verwendung, bei denen sie als mechanisch beanspruchte Bauteile eingesetzt werden [Kro195, Shut91]. Die großen Vorteile der Hartschaumstoffe liegen in den guten mechanischen Eigenschaften bei gleichzeitig sehr geringer Dichte.

## Motivation und Fragestellung

Die Auslegung und Dimensionierung von Bauteilen mit Hartschaumstoffkernen ist bis heute noch mit erheblichen Problemen behaftet. Während durch ständige Zunahme der Rechnerleistung und Weiterentwicklung von Berechnungsprogrammen in den letzten Jahren ein befriedigendes Maß bei den Berechnungsgeschwindigkeiten erreicht wurde, gilt es nun die Materialmodelle für das Deformations- und Versagenverhalten bei mehraxialen Beanspruchungen weiterzuentwickeln. Den Unsicherheiten in der Berechnung wird in der Regel durch eine Überdimensionierung des Bauteils begegnet.

Bei Versuchen zum Langzeitverhalten von Hartschaumstoffen auf Kunststoffbasis hat sich gezeigt [Suh91], dass für die Betrachtung der Deformationen eine rein elastische Modellierung des Materialverhaltens nicht ausreicht. Der Schaumstoff kriecht, d. h. er zeigt ein rheonomes Verhalten. In der Literatur sind zahlreiche Ansätze bekannt, um sowohl lineares als auch nichtlinear viskoelastisches Materialverhalten unter einachsigen Beanspruchungsbedingungen in Abhängigkeit von Beanspruchungshöhe, Temperatur oder physikalischer Alterung zu beschreiben. Eine ausführliche Zusammenstellung dieser Ansätze ist bei Wieser [Wies99] aufgeführt. Die Beschreibung des Deformationsverhaltens bei mehraxialen Beanspruchungen für nichtlineares Materialverhalten stellt jedoch noch ein großes Problem dar.

## **Zielsetzung**

Im Gegensatz zu den ungeschäumten Polymeren ergeben sich für die geschäumten Materialien Besonderheiten im mechanischen Verhalten, die im Wesentlichen aus dem zellulären Aufbau des Schaums resultieren. Das Ziel dieser Arbeit ist es, zu einem erweiterten Verständnis der mechanischen Eigenschaften von geschlossenzelligen Hartschaumstoffen auf Polymerbasis beizutragen.

Zum einen sollen mit Hilfe von mikromechanischen Modellen die elastischen Eigenschaften von Polymethacrylimid-Hartschaumstoffen (PMI) berechnet werden. Hierbei sollen basierend auf aus der Literatur bekannten Modellen [Gibs87], durch Vergleiche und gezielte Anpassungen neue Modelle entwickelt werden. Diese erlauben das elastische Verhalten eines Werkstoffes unter Zuhilfenahme der bekannten Eigenschaften der in ihm enthaltenen Komponenten, ihrer Wechselwirkung, ihrer mikroskopischen Form und ihrer Volumenanteile zu berechnen [Shut91]. Zum anderen soll das Versagens- und das Kriechverhalten von Hartschaumstoffen unter mehraxialen statischen Lastsituationen beschrieben und ein geeignetes Berechnungsmodell erstellt werden.

Parameterstudien sollen dann die Tendenzen und Abhängigkeiten des Modells aufzeigen. Grenz- und Extremfälle sollen Aufschluss über das Verhalten in besonderen Beanspruchungssituationen geben und die Einsatzgrenzen des Modells darstellen. Aus Vergleichen der analytischen Lösung mit mehraxialen Experimenten wird die Verbesserung der Beschreibung des mechanischen Verhaltens charakterisiert. Auf diese Weise bekommt der Ingenieur ein Berechnungsmodell zur Hand, mit dem eine deutlich bessere Auslegung von Bauteilen aus Hartschaumstoffen möglich ist.

## **Vorgehensweise**

Die Vorgehensweise unterteilt sich in die in Abb. 1.1 aufgeführten Arbeitsschritte: In dieser Arbeit werden aus der Literatur bekannte Modelle zur Beschreibung des Verhaltens von Hartschaumstoffen bei uniaxialem Zug charakterisiert und an die Ergebnisse aus Zugversuchen angepasst. Hierfür werden die Hartschaumstoffe als quasi-homogene und isotrope Materialien betrachtet.

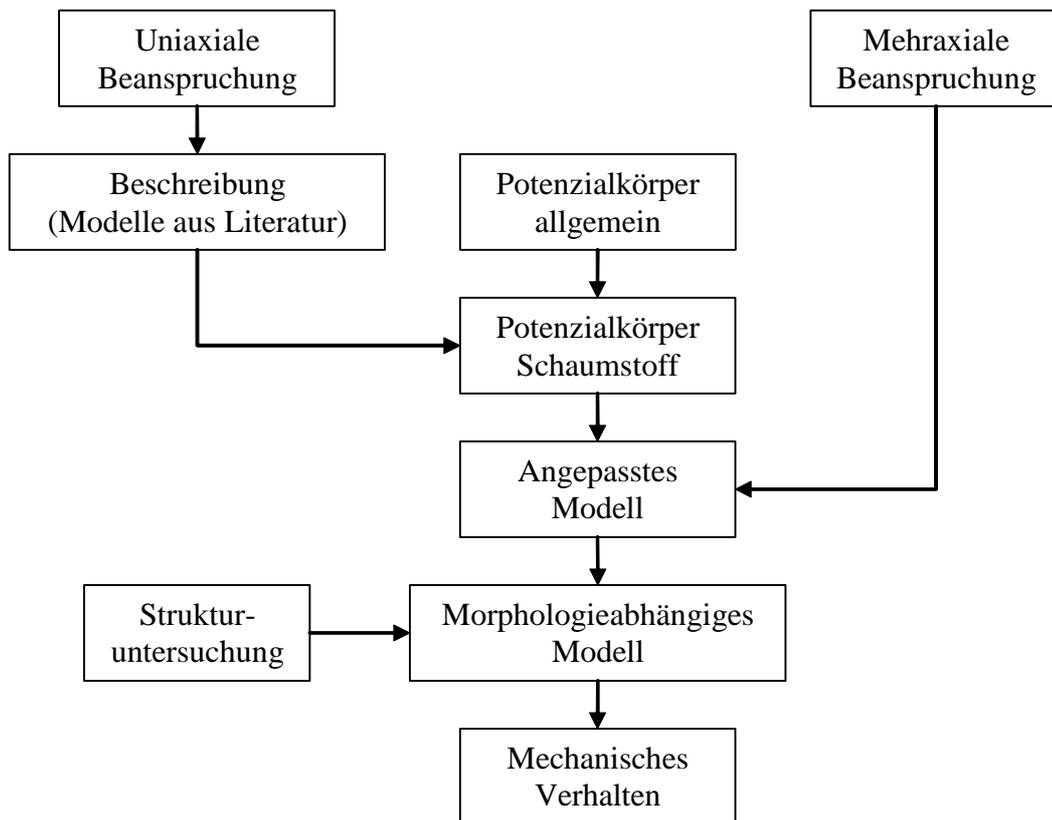


Abb. 1.1 Flussdiagramm zur Vorgehensweise

Anschließend wird die Theorie zur Modellierung des mehraxialen Versagens- und Kriechverhaltens mit Hilfe von Potenzialkörpern vorgestellt. Hierbei werden basierend auf der Invariantendarstellung ein Versagens- und ein Kriechpotenzial beschrieben, welche die für die Hartschaumstoffe typischen mechanischen Eigenschaften abbilden.

Aus weiteren einfachen uniaxialen Experimenten, wie z. B. Druck- oder Torsionsversuchen werden dann Anforderungen an das zu entwickelnde Potenzial definiert. Basierend auf der Invariantentheorie wird ein Potenzialkörper für Hartschaumstoffe entwickelt, der die für Hartschaumstoffe typischen Phänomene, wie z. B. die Kompressibilität und unterschiedliches Materialverhalten bei Zug- und Druckbeanspruchung berücksichtigt.

Des Weiteren werden der Aufbau und die Durchführung von mehraxialen Versagens- und Kriechversuchen erläutert und die Ergebnisse diskutiert. Um sowohl die uniaxialen als auch die mehraxialen Beanspruchungszustände an den Hartschaumstoffen realisieren zu können, bieten sich rohrförmige Probekörper an [Bard82]. Die sich aufgrund der äußeren Lasten und der Probegeometrie in dem untersuchten Werkstoff einstellenden Spannungen lassen sich hier auf einfache Art und Weise berechnen. Bei den durchgeführten Versuchen wurde ebenfalls die Querkontraktion gemessen. Mit Hilfe der hieraus resultierenden Erkenntnisse wird der Potenzialkörper angepasst.

Im zweiten Schritt wird, aufbauend auf der Charakterisierung der eingesetzten Hartschaumstoffe, eine Untersuchung der Morphologie der Schaumstoffe, d. h. der relevanten strukturellen Grundeinheit eines Schaums wie Größe und Form einer Zelle sowie Art und Dicke der Wände durchgeführt. Es wird der Zusammenhang zwischen dem mikroskopischen Aufbau eines Schaumstoffs und seinem makroskopischen mechanischen Verhalten beschrieben. Hierzu werden Hartschaumstoffproben unterschiedlicher Dichte und Zellstruktur mit einem Micro-Computertomographen und einem Rasterelektronenmikroskop untersucht. Die daraus gewonnenen Erkenntnisse bezüglich Größe und Form der Zellen, der Zellstege und -wände dienen dann als Eingangsparameter für mikromechanische Modelle, mit denen die elastischen Eigenschaften der Schaumstoffe berechnet werden können. Es wird die Abhängigkeit des Faktors  $d$ , der den Unterschied im mechanischen Verhalten bei einer Zug- oder Druckbeanspruchung beschreibt, charakterisiert. Hieraus resultiert dann ein morphologieabhängiges Modell zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Hartschaumstoffen.

## 2. Materialien

### 2.1 Einsatzgebiete und Materialien für Hartschäume

Schaumstoffe werden nach DIN 7726 als Zwei-Phasen-Systeme bezeichnet, bei welchen ein Gas in einer kontinuierlichen, festen Matrix (Zellstruktur) dispergiert ist. Der Begriff „Stoff“ bezieht sich dabei auf den Werkstoffcharakter des zellulären Matrixmaterials. Die Einsatzgebiete von Hartschaumstoffen sind sehr vielfältig. Sie werden unter anderem in der Automobilindustrie, der Luft- und Raumfahrt [Müll03], in den Bereichen Sport, Freizeit, Medizintechnik, Kommunikation [Lee04] und im Baubereich eingesetzt [Gell02]. Die Anwendungen reichen von hoch belasteten Bauteilen in Leichtbaustrukturen über Innenverkleidungsteile in Flugzeugen und Automobilen bis hin zu Isolationsschichten im Baubereich. In dieser Arbeit wird ein typischer Hartschaumstoff aus dem Leichtbausektor untersucht.

#### Leichtbau

Ein für den Konstrukteur anspruchsvolles Gebiet stellt der Leichtbau dar. Mit dem Begriff „Leichtbau“ verbindet man ganz pauschal das Ziel, die Masse technischer Konstruktionen so gering wie möglich zu halten [Wied96]. Leichtbaukonstruktionen sind wesentliche Bestandteile in der Flugzeug- und Automobilindustrie. Hartschaumstoffe kommen hier vor allem in Sandwichbauteilen zum Einsatz [Zenk97]. Hierin wird das Prinzip des I-Trägers realisiert, d. h. weit auseinander liegende Gurte mit hohem Steiner-Anteil werden durch möglichst leichtgewichtige Stege verbunden, was zu einer sehr hohen Biegesteifigkeit des Sandwichbauteils bei niedriger Gesamtdichte führt.

Die klassische Auslegung eines Sandwichbauteils kann beispielsweise mit der Sandwich-Membrantheorie erfolgen, für die folgende vereinfachende Annahmen gemacht werden [Wied96]:

- Der Kern hat keine Biege- und keine Dehnsteifigkeit, trägt also zur Aufnahme von Normalspannungen aus Zug-/Druckbelastungen oder Biegung nicht bei.
- Die Eigenbiegesteifigkeit der Häute wird vernachlässigt, d. h. nur ihr Steiner-Anteil findet Berücksichtigung. Dies bedeutet, dass die Häute mechanisch als Scheiben angenommen werden, die nur über Scheibensteifigkeiten verfügen. Die Spannungen sind damit über die Dicke der Haut konstant. Der Querkraft-Traganteil der Häute wird vernachlässigt. Die Querkräfte werden nur durch Schub im Kern übertragen. Es wird ein über der Höhe konstanter Schubspan-

nungszustand, d.h. die Idealisierung der Schubfeldtheorie, angenommen. Der Kern ist senkrecht zur Sandwichfläche inkompressibel. Zudem wird eine Abstandsänderung der Deckhäute ausgeschlossen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die mechanischen Eigenschaften des Schaumstoffkerns bei der Sandwich-Membrantheorie entweder nicht berücksichtigt oder im Fall der Inkompressibilität sogar falsch angenommen werden. Hier ergeben sich die Ansatzpunkte für eine genauere Betrachtung des mechanischen Verhaltens von Hartschaumstoffen.

Die wirtschaftlich relevanten Hartschaumstoffe für den Leicht- und Sandwichbau basieren auf den folgenden Kunststoffen:

- Polyetherimid (PEI),
- Polymethacrylimid (PMI),
- Polyurethan (PU),
- Polyvinylchlorid (PVC).

Stellvertretend für einen typischen Hartschaumstoff, der im Kurzzeitversuch ein elastisch-plastisches Verhalten aufweist [Gibs87], wurden in dieser Arbeit Hartschaumstoffe auf PMI-Basis genauer untersucht. Diese im Leichtbau sehr oft eingesetzten Schaumstoffe zeichnen sich durch eine besonders homogene, nahezu vollständig geschlossene, vernetzte Zellstruktur aus und besitzen ein sehr gutes Verhältnis von Masse zu mechanischen Eigenschaften sowie eine hohe Wärmeformbeständigkeit. Wesentliche mechanische Eigenschaften sind in Tab. 2.1 zusammengefasst.

	Prüfnorm	Einheit	Hartschaumstoff aus PMI (ROHACELL WF)
Nominale Rohdichte	ISO 845	kg/m <sup>3</sup>	32-300
Druckfestigkeit senkrecht zur Plattenebene	ISO 844	N/mm <sup>2</sup>	0,4-15,7
Zugfestigkeit in Plattenebene	ISO 527-2	N/mm <sup>2</sup>	1,0-10,3
E-Modul (Druck) senkrecht zur Plattenebene	ASTM D1621/B	N/mm <sup>2</sup>	36-367
E-Modul (Zug) in Plattenebene	ISO-527-2	N/mm <sup>2</sup>	36-367
Schubfestigkeit in Plattenebene	DIN 53294	N/mm <sup>2</sup>	0,4-7,8
Schubmodul in Plattenebene	DIN 53294	N/mm <sup>2</sup>	13-293

Tab. 2.1 Kennwerte PMI-Hartschaum [Röhm02]

## 2.2 Mechanische Eigenschaften von Hartschäumen

Im Folgenden sollen die in der Literatur aufgeführten experimentellen Befunde zum mechanischen Verhalten von Schaumstoffen zusammengefasst werden. Eine Einteilung der Schaumstoffe kann unterschiedlich erfolgen. Einmal macht eine Einteilung nach den Materialien, aus denen sie geschäumt wurden, Sinn. Hierzu zählen neben den polymeren Hartschäumen, auf die im Weiteren näher eingegangen wird, auch Metall- und Keramikschaume. Durch das Schäumen von Polymeren, Metallen und Keramiken ergibt sich ein weites Anwendungsfeld. Die erreichbaren Dichten liegen in einem Bereich von  $\rho \approx 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  für polymere Schäume bis zu  $\rho \approx 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  für metallische und keramische Schäume [Gibs87]. Für den Elastizitätsmodul ergibt sich ein Bereich von  $E \approx 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  für die polymeren Schäume bis  $E \approx 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  für die metallischen und keramischen Schäume.

Die Metallschäume, Metalle mit zellulärer Struktur, können unterteilt werden in Werkstoffe mit periodischer und stochastischer Struktur [Wadl01]. Für beide Arten ergeben sich in Abhängigkeit vom Herstellungsverfahren, offen- oder geschlossenzellige Strukturen [Husc98]. Die Metallschäume werden durch Aufschäumen von geschmolzenem Basismaterial erzeugt und weisen eine ähnliche zelluläre Struktur wie die polymeren Schäume auf.

Analog zu den metallischen Schäumen können die Strukturen der Keramikschaume ebenfalls offen- oder geschlossenzelliger Natur sein. Dies hängt von dem Verfahren ab, nach dem sie hergestellt werden. Bezüglich der mechanischen Eigenschaften, weisen die keramischen Schäume meist ein sprödes Verhalten auf [Cost06]. Bei einem Druckversuch an einem offenzelligen keramischen Schaum kann im Kraft-Verformungsdiagramm zuerst ein linearer Anstieg der Kraft festgestellt werden. Bei Erreichen der maximalen Kraft beginnen die Zellstege Schicht für Schicht zu versagen [Cost06].

### 2.2.1 Mechanisches Verhalten im Kurzzeitversuch

Eine weitere Möglichkeit, die Schaumstoffe zu klassifizieren besteht darin, sie nach ihrem mechanischen Verhalten, z. B. bei Zug- oder Druckversuchen, einzuteilen. Die Einteilung erfolgt hier nach Schaumstoffen, die ein rein elastisches oder ein elastisch-plastisches Verhalten aufweisen [Gibs87]. In aller Regel kann das mechanische Verhalten dann wieder einer Materialklasse von Schaumstoffen zugewiesen werden.

So zeigen gummiartige Schaumstoffe ein elastomeres Verhalten [Gibs87], die metallischen Schaumstoffe ein elastisch-plastisches Verhalten [Bast00, Gibs87, Kene04, Quad04, Tria89] und die Keramikschaume meist ein sprödes Verhalten [Cost06, Gibs87]. Bei den polymeren Schaumstoffen können alle drei Arten des Verhaltens beobachtet werden.

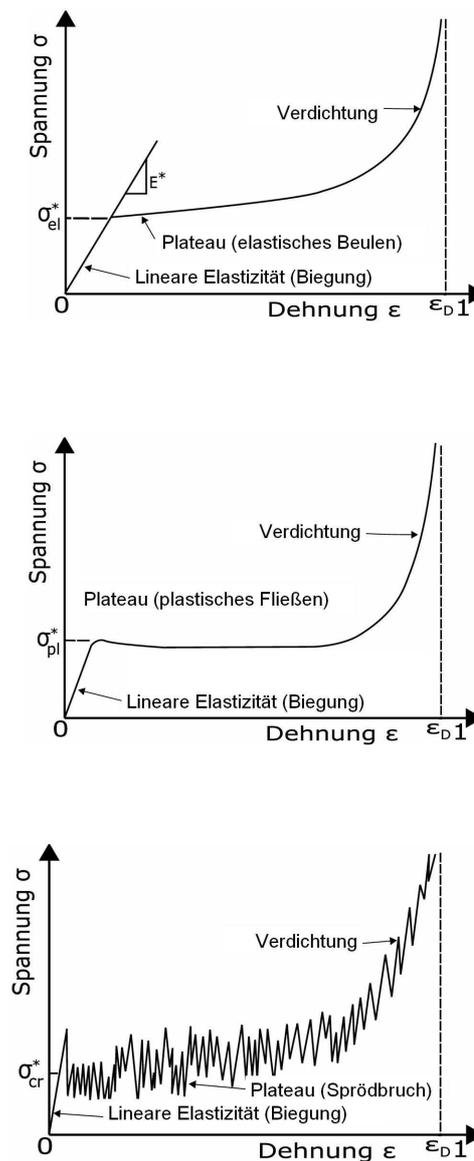


Abb. 2.1 Schematische Spannungs-Dehnungskurven aus Druckversuchen für Schäume (nach [Gibs87]): Oben) elastomeres Schaum, Mitte) elastisch-plastischer Schaum, Unten) elastisch-spröder Schaum

In Abb. 2.1 sind schematische Spannungs-Dehnungs-Diagramme aus Druckversuchen an Schaumstoffen dargestellt [Gibs87]. Für kleine Spannungen zeigen alle Schäume ein linear-elastisches Verhalten, gefolgt von einem sog. „collapse plateau“. Abschließend verdichtet sich die Schaumstruktur und die Spannung steigt stark an. Der linear-elastische Anteil resultiert aus einer Biegung der Zellwände. Das Plateau wird auf einen Kollaps der Zellen zurückgeführt. Bei elastomeren Materialien, wie zum Beispiel Gummi, knicken die Zellen elastisch aus. Für Materialien die fließen (z. B. Metalle), verformen sich die Zellen plastisch und für spröde Materialien (z. B. Keramik) ergibt sich ein spröder Bruch der Zellen.

Anhand von Zugversuchen kann eine analoge Unterscheidung der Schäume durchgeführt werden, siehe Abb. 2.2. Wiederum kann das initiale, linear-elastische Verhalten auf eine elastische Biegung der Zellstege bzw. eine Ausrichtung der Zellwände zurückgeführt werden. Für elastomere Schäume folgt bei größeren Dehnungen eine Drehung der Knoten hin zur Zugrichtung. Hieraus folgt eine Versteifung der Struktur. Bei den plastischen Schäumen tritt ebenfalls eine Drehung der Knoten auf, jedoch durch plastische Biegung. Die Fließgrenze bildet sich deutlich aus. Anschließend steigt die Spannungs-Dehnungs-Kurve stark an und endet schließlich beim Versagen der Struktur. Bei den spröden Schaumstoffen bildet sich ein Riss entweder in einer dünnen Zellwand weiter aus oder es liegt bereits eine Schwachstelle vor. Die Zugbeanspruchung führt hier zu einem schlagartig auftretenden spröden Versagen der Struktur.

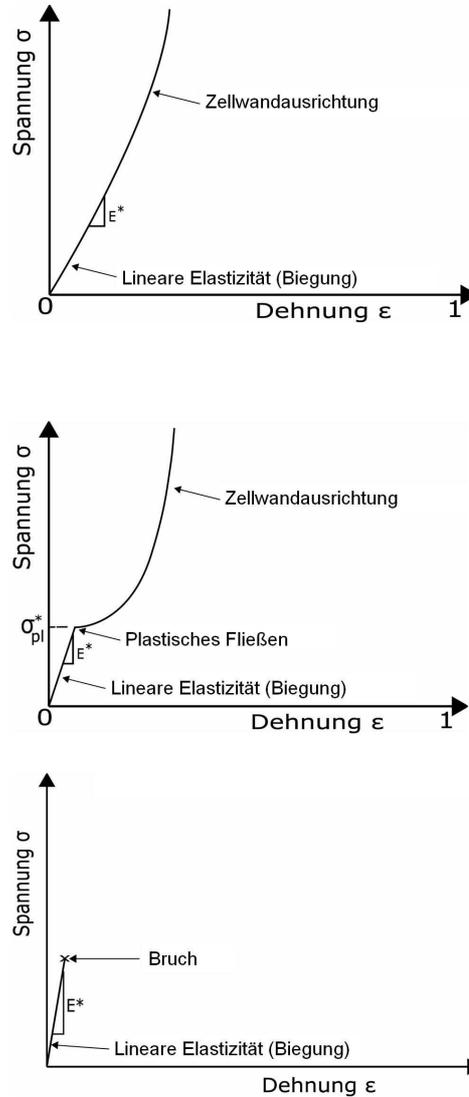


Abb. 2.2 Schematische Spannungs Dehnungskurven aus Zugversuchen für Schäume (nach [Gibs87]):  
 Oben) elastomerer Schaum, Mitte) elastisch-plastischer Schaum, Unten) elastisch-spröder Schaum

### 2.2.2 Mechanisches Langzeitverhalten

In der Literatur liegen vor allem für metallische Schaumstoffe experimentelle Daten zum Langzeitverhalten vor. Sowohl für einen offen- als auch für einen geschlossenzelligen Aluminiumschaum wurde das Kriechverhalten unter Zug- und Druckbeanspruchung untersucht [Andr99a, Andr99b]. Die Kriechkurven für einen geschlossenzelligen

zelligen Aluminiumschaum bei einer erhöhten Temperatur zeigen den in Abb. 2.3 dargestellten Verlauf [Andr99b].

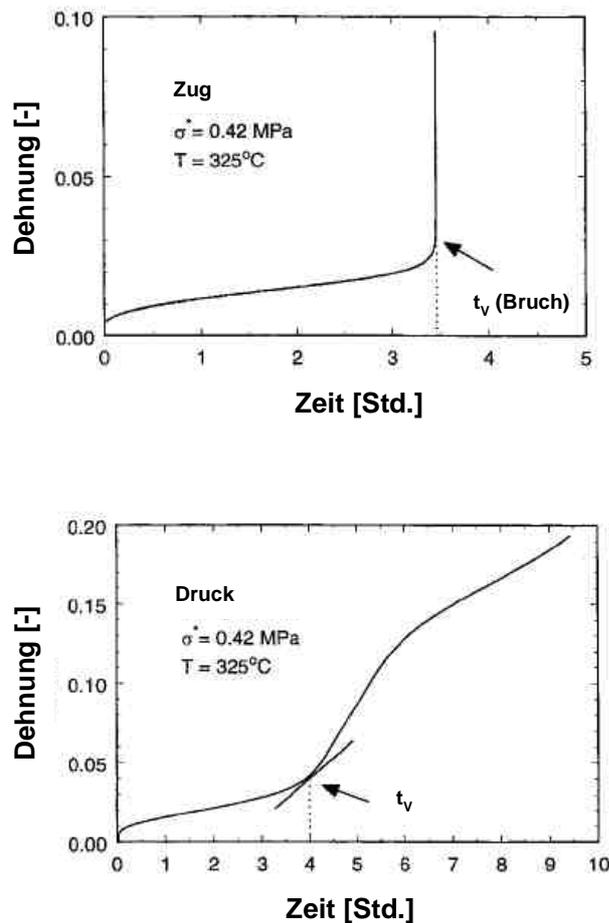


Abb. 2.3 Typische Kriechkurven für einen Aluminiumschaum: Oben) Zugbeanspruchung, Unten) Druckbeanspruchung [Andr99b]

Im Zugkriechversuch weisen auch Schäume ein typisches Kriechverhalten auf, mit primärer, sekundärer und tertiärer Phase, der dann der Bruch folgt [Gibs87]. Der Bruch stellt sich unter einem Winkel von  $45^\circ$  ein. Für den Druckkriechversuch ergibt sich ein unterschiedlicher Verlauf: Auf das sekundäre Kriechen folgt hier ein Bereich, in dem die Kriechdehnungsgeschwindigkeit ansteigt und dann zu kleineren Werten abfällt [Andr99a, Andr99b, Haag03, Hodg03]. Der Anstieg der Kriechdehnungsgeschwindigkeit nach dem sekundären Kriechen beruht auf dem Bruch von einzelnen Zellschichten. Wenn diese Schichten gebrochen sind, findet eine Verdich-

tung statt, so dass die Kriechdehnungsgeschwindigkeit wieder abfällt [Andr99b, Zhan02].

Detaillierte Ergebnisse zu Kriechversuchen mit keramischen Schäumen liegen derzeit nicht vor.

### 2.2.3 Mechanisches Verhalten von polymeren Schäumen

Aus der Literatur ist eine Vielzahl von Experimenten zum mechanischen Verhalten von polymeren Schaumstoffen bekannt. Im Folgenden werden diese Arbeiten zusammengestellt und anschließend eine Bewertung der Ergebnisse gegeben. Die systematische Einteilung erfolgt hierbei zuerst nach der Dauer der Belastung und anschließend nach dem Beanspruchungszustand.

#### Kurzzeit-Druckversuch

Der Druckversuch stellt die für die Schaumstoffe typische Prüfung dar. So ist es auch zu erklären, dass hierfür die umfangreichste Literatur vorhanden ist. Diese ist in Tab. 2.2 zusammengefasst.

<i>Material</i>	<i>Mikrostruktur</i>	<i>Mechanisches Verhalten</i>	<i>Quelle</i>
<i>Polyurethan (PU)</i>	offenzellig	hyperelastisch	Burn98, Chan99a, Good99, Mill00, More94a, Neil95, Ozku93, Tria89
<i>Polyurethan (PU)</i>	mikrozellulär, geschlossenzellig	hyperelastisch, elastisch-plastisch	Ozku93
<i>Polyesterurethan (AU)</i>	offenzellig	hyperelastisch	Chan99a
<i>Polyesterurethan (AU)</i>	geschlossenzellig	hyperelastisch	Chan99a
<i>Polyetherurethan (EU)</i>	offenzellig	hyperelastisch	Chan99a
<i>Polyetherurethan (EU)</i>	geschlossenzellig	hyperelastisch	Chan99a

<i>Material</i>	<i>Mikrostruktur</i>	<i>Mechanisches Verhalten</i>	<i>Quelle</i>
<i>PMMA</i>	geschlossenenzellig	hyperelastisch	Shas00
<i>PLLA</i>	geschlossenenzellig	hyperelastisch	Shas00
<i>PLGA</i>	geschlossenenzellig	hyperelastisch	Shas00
<i>PLLA-PEG</i>	geschlossenenzellig	hyperelastisch	Shas00
<i>PLGA-PEG</i>	geschlossenenzellig	hyperelastisch	Shas00
<i>PLA-PEG-CaCO<sub>3</sub></i>	geschlossenenzellig	elastisch-spröde	Shas00
<i>PS</i>	mikrozellulär, geschlossenenzellig	elastisch-plastisch	Ozku93
<i>PAN</i>	mikrozellulär, geschlossenenzellig	elastisch-plastisch	Ozku93
<i>PVC</i>	geschlossenenzellig	elastisch-plastisch	Desh01
<i>Epoxid</i>	offenzellig	elastisch-plastisch	Yama00
<i>LDPE</i>	geschlossenenzellig	hyperelastisch, elastisch-plastisch	Mill01

Tab. 2.2 Druckversuche an Schaumstoffen

Es zeigt sich, dass bei den untersuchten Schäumen hyperelastisches, elastisch-plastisches oder elastisch-sprödes Materialverhalten auftreten kann. Die Einteilung, welcher Schaumstoff sich mechanisch wie verhält, kann in den meisten Fällen aus dem mechanischen Verhalten des Matrixmaterials abgeleitet werden.

### **Kurzzeit-Zugversuch**

In der Literatur liegen deutlich weniger experimentelle Befunde zum mechanischen Verhalten unter Zugbeanspruchung vor. Dies liegt zum einen daran, dass viele der Schaumstoffe lediglich unter Druckbeanspruchung eingesetzt werden. Zum anderen ist ein Zugversuch für die meisten Schaumstoffen deutlich aufwändiger zu realisieren. Die Herstellung der Zugprobekörper kann sich, je nach Material, als aufwendig

gestalten. In der Regel werden Zugversuche nach DIN ISO 527-2 durchgeführt. Tab. 2.3 gibt einen Überblick über die in der Literatur aufgeführten Experimente.

<i>Material</i>	<i>Mikrostruktur</i>	<i>Mechanisches Verhalten</i>	<i>Quelle</i>
<i>AU</i>	offenzellig	hyperelastisch	Chan99a
<i>AU</i>	geschlossenenzellig	hyperelastisch	Chan99a
<i>EU</i>	offenzellig	hyperelastisch	Chan99a
<i>EU</i>	geschlossenenzellig	hyperelastisch	Chan99a
<i>PVC</i>	geschlossenenzellig	elastisch-plastisch	Desh01, Kuma98
<i>PU</i>	offenzellig	hyperelastisch	Chan99a, More94a, Neil95, Tria89
<i>PSF</i>	mikrozellulär, geschlossenenzellig	elastisch-plastisch, elastisch-spröde	Sun02
<i>PVC</i>	mikrozellulär, geschlossenenzellig	elastisch-spröde	Matu98, Vanv00

Tab. 2.3 Zugversuche an Schaumstoffen

Analog zu den Beobachtungen bei den Druckversuchen kann, abhängig vom eingesetzten Matrixmaterial, ein unterschiedliches mechanisches Verhalten auftreten.

### **Kurzzeit-Schubversuch**

Schubversuche an Schaumstoffen stellen aufgrund der komplizierten Realisierung eher die Ausnahme dar.

<i>Material</i>	<i>Mikrostruktur</i>	<i>Mechanisches Verhalten</i>	<i>Quelle</i>
<i>AU</i>	offenzellig	hyperelastisch	Chan99a
<i>AU</i>	geschlossenenzellig	hyperelastisch	Chan99a
<i>EU</i>	offenzellig	hyperelastisch	Chan99a

<i>Material</i>	<i>Mikrostruktur</i>	<i>Mechanisches Verhalten</i>	<i>Quelle</i>
<i>EU</i>	geschlossen-zellig	hyperelastisch	Chan99a
<i>PVC</i>	geschlossen-zellig	elastisch-plastisch	Desh01

Tab. 2.4 Schubversuche an Schaumstoffen

Experimente mit zusammengesetzten Beanspruchungen an polymeren Schaumstoffen wurden bei [Desh01, Tria89] durchgeführt.

Zusammenfassend ist Folgendes zu sagen: Wird das Spannungs-Dehnungs-Verhalten von polymeren Schäumen betrachtet, so kann wiederum eine Einteilung in Schäume mit hyperelastischem (elastomerem), elastisch-plastischem und elastisch-sprödem Verhalten erfolgen. Die experimentellen Untersuchungen zeigen weiterhin, dass sich die mechanischen Eigenschaften des Schaumstoffs aus den mechanischen Eigenschaften seines Matrixmaterials ableiten lassen [Gibs87].

Aus den Kurzzeitversuchen an polymeren Schaumstoffen zeigt sich eine signifikante Abhängigkeit von der Richtung der Beanspruchung, die auch bei den metallischen und keramischen Schäumen zu beobachten war. Obwohl es sich bei den untersuchten Schaumstoffen um isotrope und quasihomogene Materialien handelt, tritt ein unterschiedliches Verhalten bei Zug- oder Druckbeanspruchung auf [Chan99a, Desh01, More94a, Neil95, Tria89]. Auf diese Besonderheit im mechanischen Verhalten wird bei der Modellierung des Versagens- und Kriechverhaltens in Kap. 6 und Kap. 7 weiter eingegangen.

### **Kriechverhalten bei Druckbeanspruchung**

Die zum Langzeitverhalten von polymeren Schaumstoffen aus der Literatur bekannten Arbeiten werden im Folgenden aufgeführt. Diese lassen sich wiederum nach den Beanspruchungen, mit denen die Langzeitversuche durchgeführt wurden, einordnen. Die Einteilung erfolgt nach Druck- oder Zugkriechversuchen. Versuche zum Kriechverhalten von Schaumstoffen unter Torsionsbeanspruchung sind nicht bekannt. Die Arbeiten zum Kriechverhalten von polymeren Schaumstoffen unter Druckbeanspruchung sind in Tab. 2.5 aufgeführt.

<i>Material</i>	<i>Mikrostruktur</i>	<i>Mechanisches Verhalten im Kurzzeitversuch</i>	<i>Quelle</i>
<i>PU</i>	offenzellig	hyperelastisch	Alpe84, Bads79, Chan99a, More94b, Your96, Zhu99
<i>PUE</i>	offenzellig	hyperelastisch	Phil95
<i>AB</i>	offenzellig	hyperelastisch	Phil95
<i>PVF</i>	offenzellig	hyperelastisch	Phil95
<i>LDPE</i>	offenzellig	hyperelastisch, elastisch- plastisch	Mill97, Phil95
<i>PS</i>	geschlossen-zellig	hyperelastisch, elastisch- plastisch	Brow60, Krol95, Suh91
<i>PP</i>	geschlossen-zellig	hyperelastisch, elastisch- plastisch	Lepp67

Tab. 2.5 Kriechverhalten von Schaumstoffen unter Druckbeanspruchung

Die Schaumstoffe zeigen ein zeitabhängiges, genauer ein viskoelastisches Verhalten [Gibs87]. Die aus einem Langzeitversuch resultierenden Kriechdehnungsverläufe können sich in Höhe und Form, in Abhängigkeit vom Schaumstofftyp deutlich unterscheiden [Alpe84, Bads79, Brow60, Chan99a, Krol95, Lepp67, Mill97, More94a, More94b, Phil95, Suh91, Your96, Zhu99]. So zeigen Schaumstoffe, die im Kurzzeitversuch ein hyperelastisches Verhalten aufweisen, bei einem Druckkriechversuch drei Kriechbereiche [Zhu99]. Für kleine Dehnungen (bis 5%) verhält sich die Kriechnachgiebigkeit proportional zur Kriechnachgiebigkeit des Ausgangsmaterials. Für Dehnungen zwischen 5-50% steigt die Kriechdehnungsgeschwindigkeit an. Dies ist auf das Knicken der Zellstege zurückzuführen. Für sehr große Dehnungen nimmt die Kriechdehnungsgeschwindigkeit dann wieder ab, da hier durch den Kontakt der Zellknoten die Biegemomente wieder reduziert werden.

Für die Hartschaumstoffe zeigt sich ein Kriechverhalten, das eher dem eines ungeschäumten Polymers vergleichbar ist [Mill97, Opfe78]. In Abb. 2.4 sind die Dehnungen eines PS-Hartschaumstoffes, die aus einer rein statischen Langzeitdruckbeanspruchung resultieren, dargestellt [Suh91]. Des Weiteren zeigen die Arbeiten von Suh [Suh91] und Brown [Brow60], dass Hartschaumstoffe in Langzeitversuchen ein kompressibles Verhalten aufweisen.

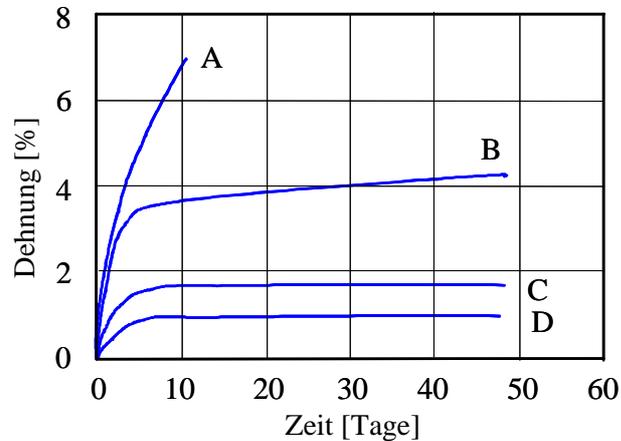


Abb. 2.4 Langzeitverhalten eines Hartschaums auf Polystyrolbasis unter verschiedenen uniaxialen Drücken: A) 224 kPa, B) 193 kPa, C) 103 kPa, D) 38 kPa [Suh91]

### Kriechverhalten bei Zugbeanspruchung

Für das Kriechverhalten von polymeren Schaumstoffen unter Zugbeanspruchung konnten lediglich Experimente an einem PU-Schaumstoff gefunden werden, siehe Tab. 2.6.

<i>Material</i>	<i>Mikrostruktur</i>	<i>Mechanisches Verhalten im Kurzzeitversuch</i>	<i>Quelle</i>
PU	offenzellig	hyperelastisch	Chan99a, More94a

Tab. 2.6 Kriechverhalten von Schaumstoffen unter Zugbeanspruchung

Eine weitere mechanische Eigenschaft im Langzeitverhalten der Schaumstoffe besteht darin, dass sie ein deutlich unterschiedliches Verhalten auf Zug- und Druckbeanspruchungen aufweisen [Chan99a], was mit dem Einbeulen der Zellwände bei Druckbeanspruchung erklärt werden kann [Bros86].

Zusammenfassend ergibt sich für die Hartschaumstoffe ein sehr weites Spektrum an mechanischen Eigenschaften:

- Hyperelastisches, elastisch-plastisches oder elastisch-sprödes Verhalten im quasistatischen Versuch [Desh01, Mill01, Ozku93, Yama00],
- unterschiedliches Verhalten bei Zug- und Druckbeanspruchung mit

ungleichen Querkontraktionen für quasistatische Kurzzeitversuche [Chan99a, Desh01, More94a, Neil95, Tria89],

- viskoelastisches Verhalten [Krol95, Lepp67, Mill97],
- ein unterschiedliches Langzeitverhalten bei Zug- und Druckbeanspruchung mit ungleichen Querkontraktionen. (Dies konnte in dieser Arbeit nachgewiesen werden, siehe Kap. 4.1.),
- unterschiedliche Festigkeiten für Zug-, Druck- oder Schubbeanspruchung.

Für die in dieser Arbeit untersuchten Hartschaumstoffe treffen einige der oben genannten Eigenschaften zu. Experimentelle Untersuchungen, bei denen detailliert auf die mechanischen Eigenschaften der untersuchten Hartschaumstoffe eingegangen wird, werden in Kap. 4 gezeigt. Das neu entwickelte Modell, das die oben aufgeführten Besonderheiten im mechanischen Verhalten abbildet, wird in Kap. 5 vorgestellt.

### 2.3 Viskoelastisches Werkstoffverhalten

Von viskoelastischem Werkstoffverhalten wird gesprochen, wenn bei der Beanspruchung eines Stoffes elastische und viskose Vorgänge zusammenwirken. Unter Kriechen wird die zeitliche Zunahme einer Verzerrung unter konstanter Last verstanden (Abb. 2.5). Dabei tritt der Effekt des Kriechens bei allen Laststufen auf. Die zeitliche Abnahme einer Spannung unter konstant gehaltener Verzerrung wird als Relaxieren bezeichnet. Den werkstofflichen Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Spannungen beschreibt im Fall des Kriechens das Kriechgesetz. Dieses kann, unter Einbeziehung des Temperatureinflusses, wie folgt postuliert werden:

$$\dot{\epsilon} = f(\sigma, t, T). \quad (2.1)$$

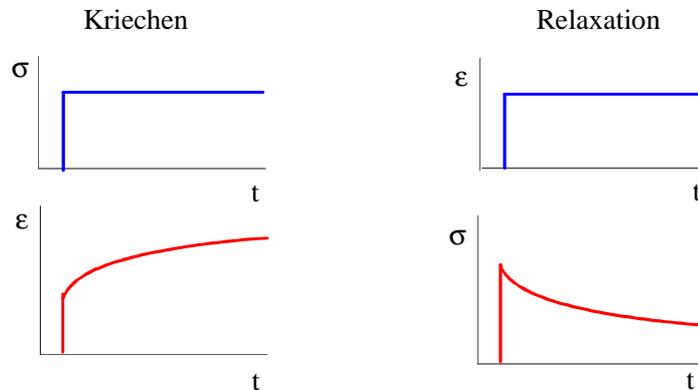


Abb. 2.5 Kriechen (Retardieren) und Relaxieren

In realen Strukturen treten Kriechen und Relaxation meist gleichzeitig auf. In der Literatur existieren verschiedene Ansätze zur Beschreibung des viskoelastischen Materialverhaltens von Polymeren. Zur Beschreibung des viskoelastischen Materialverhaltens von ungeschäumten Polymeren bei einer uniaxialen Beanspruchung sind Ansätze z. B. in [Alte93, Bonn99, Buck87, Find76, Gree75, Kabe96, Rabo80, Sara84, Schl84, Ward84, Wies99] aufgeführt. Ein Ansatz zur Beschreibung des Kriechverhaltens von Hartschaumstoffen, sowie eine Erweiterung auf das Kriechverhalten unter mehraxialer Beanspruchung wird in dieser Arbeit vorgestellt.

Der Vorgang des Kriechens kann nach einer elastischen Initialdehnung in drei Phasen unterteilt werden. Die Gesamtverformung setzt sich dabei aus der Initialdehnung, sowie dem Primär-, Sekundär- und Tertiärkriechen zusammen [Sara84], vgl. Abb. 2.6.

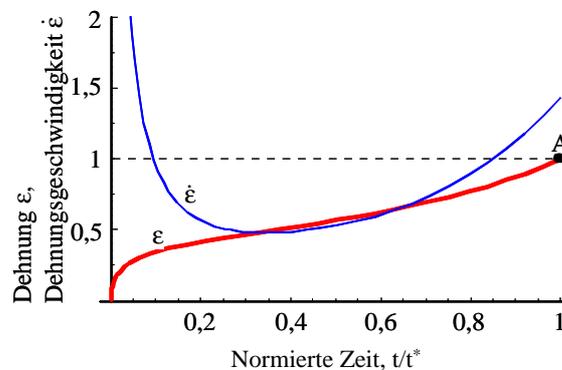


Abb. 2.6 Phasen des Kriechens bei konstanter Temperatur und Belastung ( $t^*$  Bruchzeit)

Die elastische Initialdehnung  $\varepsilon_0$  stellt sich sofort nach dem Aufbringen der Last ein. Hierbei bewirkt die Belastung eine Veränderung des verschlauften Zustandes der Makromoleküle. Die daraus resultierende Verformung bleibt während der Versuchsdauer konstant und verschwindet mit der Entlastung vollständig. Sie stellt also einen reversiblen Verformungszustand dar [Rett91].

Nach der spontan erfolgten Anfangsdeformation nimmt die Verformungsgeschwindigkeit zunächst ab (Primärkriechen) und nähert sich einem nahezu konstanten Wert. Die zweite Phase des Kriechens (Sekundärkriechen) ist durch diese annähernd konstante Verformungsgeschwindigkeit gekennzeichnet. Hier finden die Moleküle des Werkstoffes Zeit, sich langsam gegeneinander zu verschieben. Sie richten sich dabei langsam in Belastungsrichtung aus [Opfe78].

Während der Phase des Tertiärkriechens ist eine überproportionale Steigerung der Verformung und der Verformungsgeschwindigkeit zu erkennen; der Werkstoff kommt in einen Schädigungsbereich, was letztendlich zum Bruch führt.

Die Lage dieser drei Bereiche des Kriechens auf der Zeitachse ist abhängig von der Beanspruchungshöhe, der Temperatur und der Feuchte. Mit steigender Spannung und Temperatur wird der Schädigungsbereich früher erreicht [Opfe78].

Im Folgenden werden drei Vorgehensweisen zur Modellierung des Materialverhaltens kurz dargestellt.

### **Rheologische Modellierung**

Bei der rheologischen Modellierung werden Modelle für ideale Elastizität, Plastizität und Viskosität definiert. Das reale Werkstoffverhalten kann als eine Kombination von verschiedenen ideal elastischen *Hooke*'schen Federn, ideal viskosen *Newton*'schen Dämpfern und *St. Venant-Prandtl*'schen Reibkörpern dargestellt werden. Verallgemeinerte *Maxwell*- oder *Kelvin-Voigt*-Modelle [Alte93, Schm85] lassen, je nach Anzahl und Anordnung von Feder-Dämpfer-Elementen, ein großes Spektrum von Relaxationsarten zu, womit sich mit steigendem Modellierungsaufwand sehr gute Anpassungsgüten erreichen lassen.

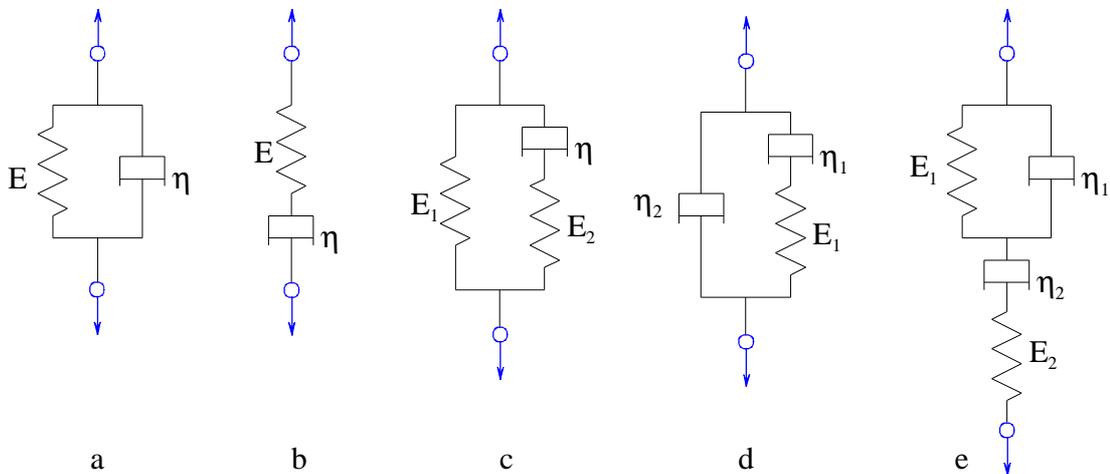


Abb. 2.7 Rheologische Modelle [Grund76]

a) Kelvin-Voigt-Modell; b) Maxwell-Modell; c) Zener-Modell; d) Letherisch-Modell;  
e) Burger-Modell

## Kontinuumsmechanische Modellierung

Bei der auch als deduktive Formulierung benannten Vorgehensweise der kontinuumsmechanischen Modellierung wird das Material auf Grundlage von materialtheoretischen Konzepten abgebildet. Es wird vom mikroskopischen Aufbau der Materie abgesehen. Dies bedeutet, dass z.B. Mischungen, mehrphasige Werkstoffe oder inhomogene Werkstoffe als Kontinuum betrachtet werden, die einzelnen Bestandteile sozusagen „verschmiert“ werden. Die mechanischen Eigenschaften des Materials werden als der mathematische Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen ausgedrückt. Ausgangspunkt der Kontinuumsmechanik ist somit die mathematische Beschreibung von Verzerrungen und Spannungen für das Kontinuum.

## Korrespondenzprinzip

Eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung des viskoelastischen Werkstoffverhaltens bietet das Korrespondenzprinzip. Hierbei wird die Zeitabhängigkeit in integraler Schreibweise dargestellt. Die Spannung lässt sich wie folgt beschreiben:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-t') \cdot \dot{\epsilon}(t') dt' \quad (2.2)$$

Wobei  $t$  die momentane Zeit,  $t'$  einen beliebigen Zeitpunkt,  $\dot{\epsilon}(t')$  die Dehngeschwindigkeit und  $G(t)$  den linearen Relaxationsmodul darstellen [Masc89].

### Ingenieurmäßige Modellierung

Bei dieser auch als induktive Formulierung bekannten Vorgehensweise wird von experimentellen Beobachtungen ausgegangen, die dann über empirische Gleichungen beschrieben werden. Diese Vorgehensweise führt meist sehr schnell zum Ziel und soll im Folgenden für die Modellierung des viskoelastischen Materialverhaltens weiter ausgeführt werden.

Einen Sonderfall der Viskoelastizität stellt das linear viskoelastische Materialverhalten dar. Hierbei lassen sich der elastische und der zeitabhängige Anteil durch eine lineare Gleichung beschreiben. Die Kriechnachgiebigkeit bzw. der Elastizitätsmodul sind also nicht von der aufgetragenen Dehnung bzw. der aufgetragenen Spannung abhängig. Um das reale Verhalten von Polymeren rechnerisch zu erfassen, reicht die linear viskoelastische Betrachtungsweise jedoch oft nicht aus. Bei vielen Werkstoffen zeigt die Dehnungsgeschwindigkeit eine nicht proportionale Abhängigkeit von der Spannung [Schm85]. Nach *Nutting* [Nutt71] und *Yourd* [Your96] zeigen Schäume - ähnlich wie die ungeschäumten Polymere, aus denen sie hergestellt werden - in ihrem Kriechverhalten zusätzlich zu einer Zeit- und Temperaturabhängigkeit auch eine Abhängigkeit von der aufgetragenen Spannung. Dies wird auch aus Abb. 2.4 für einen Hartschaumstoff auf Polystyrolbasis ersichtlich. In der Literatur sind mehrere Ansätze zur Beschreibung des Kriechverhaltens von Schaumstoffen oder ähnlichen porösen Medien bekannt und sollen im Folgenden erläutert werden.

Für ein Leichtbeton-System hat *Klöker* [Klök91] Zeitstandversuche im Druckbereich durchgeführt. Leichtbetonsysteme stellen einen zellulären Aufbau aus einem spröden Ausgangsmaterial dar. An die experimentellen Daten konnte er in guter Übereinstimmung eine Potenzfunktion mit den Konstanten  $m$  und  $n$  anpassen:

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 + m \cdot t^n. \quad (2.3)$$

Hierbei charakterisiert  $\varepsilon_0$  die elastische Stauchung, die sich mit Aufbringen der Last spontan einstellt und die im Kurzzeit-Druckversuch als Quotient aus Spannung und E-Modul ermittelt wird. Für zunehmende Belastungen verhält sich das Material zunehmend nichtlinear. Die Parameter  $m$  und  $n$  hängen zudem von der Spannung ab [Klök91]:

$$\varepsilon(t, \sigma) = \frac{\sigma}{E} + m(\sigma) \cdot t^{n(\sigma)} \quad (2.4)$$

Wenn  $m(\sigma)$  und  $n(\sigma)$  bekannt sind, lassen sich mit dieser Gleichung Spannungs-Stauchungs-Kurven für beliebige Spannungen, Stauchungen und Zeiten berechnen.

Die Kriechdehnung  $\varepsilon$  hängt bei Schäumen unter einer Druckbeanspruchung  $\sigma$  von der Dichte  $\rho$  des Schaums ab. *Zaslowsky* [Zasl68] formuliert für Schäume mit geringer Dichte die Kriechdehnung in Abhängigkeit von der Temperatur  $T$  und der Zeit  $t$  und den Konstanten  $k$  und  $n$  durch:

$$\varepsilon(T, \rho, t, \sigma) = A \cdot \frac{\sigma}{\rho} \cdot (1 - e^{-kT}) \cdot t^n, \text{ mit } A = \frac{7 - 5\nu}{8 - 10\nu}. \quad (2.5)$$

Hierbei ist  $\nu$  die Querkontraktionszahl des reinen Matrixmaterials.

Die wohl bekanntesten Modellierungsansätze basieren auf den empirischen Gleichungen mit drei bis fünf Parametern von Findley [Find76] und Bailey-Norton [Nort29]. Diese beschreiben das Kriechverhalten meist eben so gut wie die komplexeren rheologischen Feder-Dämpfer-Modelle mit 8, 10 oder mehr Ansatzparametern. In [Your96] wird am Beispiel eines Polyurethan-Schaumstoffes (PU) und in [Mill97] am Beispiel eines geschlossenzelligen Polypropylen-Schaumstoffes (PP) gezeigt, dass das Materialverhalten von Hartschäumen mit den Ansätzen zur Beschreibung des Kriechverhaltens von ihren ungeschäumten Kunststoffen prinzipiell beschrieben werden kann. Es wird zur Berechnung der Kriechdehnungsgeschwindigkeit in Beanspruchungsrichtung der Ansatz nach Bailey-Norton vorgeschlagen [Nort29]:

$$\dot{\varepsilon}_{11}^{Cr}(t, \sigma) = e \cdot \sigma_{11}^f \cdot t^g, \quad f > 1, \quad -1 < g \leq 0 \quad (2.6)$$

mit den Konstanten  $e, f, g$  und der aufgetragenen Zugspannung  $\sigma_{11}$ .

## 2.4 Methodik zur Untersuchung des mechanischen Langzeitverhaltens unter zusammengesetzten Beanspruchungen

Eine Reihe von Autoren haben Ansätze zur Beschreibung des mehraxialen Kriechverhaltens von ungefüllten, nicht geschäumten Kunststoffen entwickelt [Kabe96, Kolu05, Over79, Sara84, Wies99].

Während *Overath* [Over79] in seiner Arbeit die Vorgehensweise über den Mohrschen Spannungs- bzw. Verzerrungskreis darstellt, um das mehraxiale Deformationsverhalten zu beschreiben, befassen sich die Arbeiten von *Sarabi* [Sara84] und *Kabelka* [Kabe96] mit einem phänomenologischen Modell, welches die Berechnung der Kriechverformungen bei multiaxialer Belastung ermöglicht.

Ein weiterer Ansatz basiert auf der Versagensanalyse von Bauteilen. Hierbei werden Äquipotenzialbedingungen oder Vergleichsspannungen zur Beschreibung des mehraxialen Versagensverhaltens eingesetzt. Dabei beschreibt die Äquipotenzialfläche eine Grenzfläche im dreidimensionalen Spannungsraum [Bard82, Ehre95]. Alle Beanspruchungskombinationen innerhalb dieser Fläche sind „erlaubte“ Zustände, während alle Beanspruchungskombinationen außerhalb der Fläche zum Versagen führen.

Die Vorgehensweise zur Untersuchung des mechanischen Langzeitverhaltens von Hartschaumstoffen gliedert sich wie folgt auf:

Eine Kriechfunktion (Werkstoffmodell) wird an die Ergebnisse aus uniaxialen Versuchen angepasst. Die Dehnung setzt sich aus einem elastischen und einem zeitabhängigen Verformungsanteil zusammen:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{el} + \varepsilon_{ij}^{Cr}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.7)$$

Um zu einer nichtlinearen viskoelastischen Beschreibung zu gelangen, wird für den Kriechanteil eine zeit- und spannungsabhängige Dehnung  $\varepsilon$  eingeführt:

$$\varepsilon_{ij}^{Cr} = f_{ij}(\sigma, t) \quad (2.8)$$

Wie in Kap. 0 erläutert, kann für die Beschreibung der Dehngeschwindigkeiten von Hartschaumstoffen in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  und der Zug- oder Druckspannung  $\sigma_{11}$  der eindimensionale Potenzansatz von Bailey-Norton herangezogen werden (2.6). Um nun die mehraxialen Verformungen beschreiben zu können, werden die Ergebnisse aus z. B. dem Zugversuch mittels eines Kriech-Potenzials auf mehrdi-

mensionale Beanspruchungen adaptiert. Hierbei wird die Existenz eines Potentials vorausgesetzt, welches den Spannungstensor mit dem Tensor der Dehnungsgeschwindigkeiten in einem Kriechgesetz verbindet [Alte95, Zycz81]:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{Cr} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \dot{\lambda}, \quad \dot{\lambda} > 0. \quad (2.9)$$

Die Auswahl des Kriech-Potenzials beruht auf dem Materialverhalten, d. h. für verschiedene Materialien müssen verschiedene Kriech-Potenziale verwendet werden. Bei [Wies99] wird untersucht, ob das mehraxiale Deformationsverhalten von ungefüllten, nicht geschäumten Kunststoffen unter Verwendung von Vergleichsspannungshypothesen - basierend auf einachsigen Zug-Kriechversuchen - beschrieben werden kann. Dazu wurden an die Ergebnisse aus einachsigen Kriechversuchen approximative Ansätze angepasst. Der Vergleich von im Versuch gemessenen Deformationen unter mehraxialer Belastung mit Werten, für deren Berechnung ein Zylinderpotenzial (v. *Mises* Potenzial) verwendet wurde, ergab eine Abweichung der berechneten von den gemessenen Werten von über 6%-13%. Hierdurch wird deutlich, dass die Annahmen, auf denen das Zylinderpotenzial basiert (inkompressibles Materialverhalten, gleiches Verhalten bei Zug- und Druckbelastung), für Thermoplaste nicht gerechtfertigt sind. Für Kunststoffe werden zurzeit vor allem Kriechpotenziale wie das Zylinder- (v. *Mises*-Vergleichsspannung), das Konus- oder das Paraboloidpotenzial zur Beschreibung eingesetzt [Kolu06]. Tab. 2.7 gibt einen Überblick über die zur Berechnung des Kriechverhaltens von Kunststoffe eingesetzten Potenziale. Des Weiteren wird eine Charakterisierung bzgl. der mechanischen Eigenschaften, die von den Potenzialen abgebildet werden können, aufgeführt.

<i>Potenzial</i>	<i>Eigenschaften des Potenzials</i>
<i>v. Mises (Zylinderpotenzial)</i>  $\Phi = 3 \cdot I_2'$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Inkompressibel</li> <li>• Symmetrisches Verhalten bei Zug- und Druckbeanspruchung</li> </ul>
<i>Rotationssymmetrische Potenziale</i>  $\Phi = \frac{1}{k^2} \cdot (3 \cdot I_2' + a_1 \cdot \sigma_v \cdot I_1 + a_2 \cdot I_2')$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Kompressibel für Zugbeanspruchung</li> <li>• Inkompressibel für Druckbeanspruchung</li> <li>• Unsymmetrisches Verhalten bei Zug- und Druckbeanspruchung</li> </ul>

Tab. 2.7 Überblick über die zur Berechnung des Kriechverhaltens von Thermoplasten eingesetzten Potenziale

Für Hartschaumstoffe ist bekannt [Röhm02], dass sie sich kompressibel verhalten, so dass eine Beschreibung mit dem Zylinderpotenzial auszuschließen ist. Das rotations-symmetrische Modell beinhaltet im Allgemeinen die Konus-, Hyperboloid- und Paraboloidpotenziale. Paraboloid-, und Konuspotenzial weisen im Druckbereich eine Querkontraktionszahl auf, die nicht im technisch sinnvollen Bereich ( $0 < \nu < 0,5$ ) liegt und verhalten sich hier inkompressibel [Bard82, Schl84]. Nach theoretischen Betrachtungen kann die Querkontraktionszahl durchaus auch Werte zwischen  $-1 \leq \nu < 0,5$  annehmen [Alte94]. So sind für auxentische Schäume Querkontraktionszahlen  $\nu < 0$  bekannt [Gibs82]. Für die Hartschaumstoffe trifft dies nicht zu. Hieraus resultiert, dass zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von Hartschäumen Paraboloid- und Konuspotenzial ebenfalls nicht geeignet sind. Es ist ein Potenzialkörper zu entwickeln, der die für Hartschäume typischen Effekte berücksichtigen kann.

### **3. Mikromechanische Modellierung der Schaumstruktur**

#### **3.1 Morphologie und Charakterisierung von Hartschäumen**

In diesem Kapitel soll auf die mikromechanische Modellierung der Schaumstruktur näher eingegangen werden. Es werden verschiedene Modelle vorgestellt, mit denen die mechanischen Eigenschaften von Hartschaumstoffen basierend auf den enthaltenen Komponenten berechnet werden können. Um diese Modelle bzgl. ihrer Verwendbarkeit zur charakterisieren und evtl. anzupassen, wurden vergleichende Messungen, sowohl Zug- als auch Druckversuche, an rohrförmigen Probekörpern bis zum Versagen durchgeführt. Es ist anzumerken, dass die mikromechanischen Modelle keine Aussagen über das Langzeitverhalten der Hartschäume machen. Hierauf wird in Kap. 4.1.1 noch detailliert eingegangen.

Unter der Morphologie eines Schaums versteht man die Art der Zellen, ihre Größe und Verteilung, die Wanddicke sowie die Anordnung und Form der Zellstege und Zellwände [Shut91]. Zur Charakterisierung der Morphologie bieten sich bildgebende Verfahren wie die optische Mikroskopie [Kämp82], die Rasterelektronenmikroskopie [Ehre95] und die Computertomographie an.

Aus der Literatur ist bekannt, dass ein Zusammenhang zwischen den mechanischen Eigenschaften eines Polymers und seinem Schaum hergestellt werden kann [Amor87, Gibs87]. So kann z. B. der Elastizitätsmodul eines Schaumstoffs aus den mechanischen Eigenschaften der eingesetzten Matrix und der Dichte errechnet werden [Gibs87]. Um die heute verfügbaren Schaumstoffe in gewichtsoptimierter Form einsetzen zu können, ist die Kenntnis der Zusammenhänge zwischen der Morphologie des jeweiligen Schaums (z. B. offenzellig oder geschlossenzellig) und den mechanischen Eigenschaften der schaubildenden Materialien erforderlich. Diese Parameter können durch verschiedene Faktoren beeinflusst werden. Durch Variation der chemischen Zusammensetzung des Kunststoffes und des Schäumprozesses können z. B. Zellstrukturen offener oder geschlossener Art hergestellt werden [Seme80].

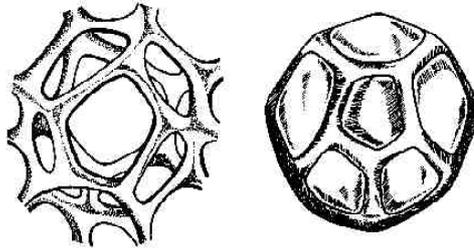


Abb. 3.1 Schematische Darstellung: Links) offenzelliger Schaum, Rechts) geschlossenzelliger Schaum [Shut91]

Offenzellige Strukturen sind dadurch definiert, dass jede Zelle mindestens zwei Poren oder zerstörte Flächen aufweist. Außerdem muss die Mehrheit der Zellrippen zu mindestens drei Zellen gehören. Bei geschlossenzelligen Schäumen haben die Zellen keine Poren oder zerstörten Flächen. Geschlossenzellige Schäume werden meist auf der Basis von Polyurethan (PUR), Polyvinylchlorid (PVC), Polymethacrylimid (PMI) und Polystyrol (PS), offenzellige Schäume auf der Basis von Polyethylen (PE), Polyurethan (PUR) und Polyvinylchlorid (PVC) hergestellt [Domi92].

Allerdings reicht diese grobe Einteilung nicht zur Erklärung der Eigenschaften von Schäumen. Experimentelle Daten legen nahe [Shut91], dass die strukturelle Grundeinheit eines Schaums nicht nur durch Größe und Form einer Zelle beschrieben wird. Es zeigt sich, dass auch die Abstände zwischen den Zellen und die Anordnung der Zellen, speziell auch die Art und Dicke der Wände, zur Charakterisierung hinzugezogen werden müssen. Ein Schaum wird ferner noch durch die Parameter der relativen Anzahl der offenen und geschlossenen Zellen, die spezifische Oberfläche und durch die scheinbare Dichte bzw. das Volumengewicht [Gibs87] beschrieben.

Weiterhin konnte gezeigt werden, dass auf der Basis von einfachen Annahmen über die Schaumstruktur (z. B. kubische Anordnung monodisperser Kugeln mit kleiner Wanddicke) Beziehungen zwischen Volumengewicht und Zellgröße sowie der Wanddicke abgeleitet werden können [Shut91]. Allerdings beeinflusst in der Praxis die Diffusion von Gasen in oder aus den Zellen genauso wie der Wassergehalt die mechanischen Eigenschaften [Chan99a].

*D'Amore* [Amor87] stellt einen Zusammenhang zwischen den mechanischen Eigenschaften des Polymers und seinem Schaum her. Unter Zugrundelegen einer idealisierten, periodischen Zellstruktur berechnet er die Zugfestigkeiten von harten Schäumen aus Polyethylen, Polypropylen und Polystyrol in Abhängigkeit von der Dichte des Schaums, der Dichte des ungeschäumten Polymers und der Zugfestigkeit des ungeschäumten Polymers. Als zwei charakteristische Größen können die aus

dem Schäumungsprozess resultierende Dichte und die resultierenden Zellgrößen angesehen werden.

Bei bekannter Probengeometrie ist die Dichtebestimmung durch Volumenberechnung und Wägung einfach durchführbar:

$$\rho \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] = \frac{m}{V} \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]. \quad (3.1)$$

Viele Arbeiten befassen sich mit der Berechnung der mechanischen Eigenschaften von Schäumen ausgehend von dem eingesetzten Matrixmaterial. Einige dieser Arbeiten sind in Tab. 3.1 zusammengefasst.

<i>Matrixmaterial</i>	<i>Mikrostruktur</i>	<i>Berechnete mechanische Eigenschaften</i>	<i>Quelle</i>
<i>Metall, Polymere, Keramiken</i>	offen-/geschlossenzellig	E-Modul (Zug und Druck)	Gibs87, Gibs00, Oech03
<i>PU</i>	geschlossenzellig	E-Modul (Zug und Druck)	Good99
<i>PVC</i>	geschlossenzellig	Kompressions-, Schub- und E-Modul (Zug)	Gren99, Gren05
<i>Aluminium</i>	geschlossenzellig	Kompressions-, Schub- und E-Modul (Zug), Zug-, Druckfestigkeit	Gibs00, Gren05, Oech03, Sugi97
<i>Aluminium</i>	offenzellig	E-Modul (Zug), Fließgrenze	Gibs00, Nieh00, Oech03
<i>PS</i>	geschlossenzellig	E-Modul (Zug), Zugfestigkeit	Doro03
<i>Polymere, Metalle</i>	offenzellig	Spannungs-Dehnungsverhalten für uniaxiale Zug-, Druck- und Schubbeanspruchung sowie für biaxiale und triaxiale Druckbeanspruchung	Demi05

Tab. 3.1 Berechnung der mechanischen Eigenschaften von Schäumen ausgehend von dem eingesetzten Matrixmaterial

### 3.2 Charakterisierung des untersuchten PMI-Schaums

Die hier eingesetzten PMI-Hartschaumstoffe der Firma Röhm sollen im Folgenden genauer charakterisiert werden. Für einen PMI-Schaum ist in Abb. 3.2 eine Rasterelektronenmikroskop-Aufnahme bei einer 30-fachen Vergrößerung gezeigt. Die Zellstruktur sowie die Form der Zellstege und Zellwände sind deutlich zu erkennen.

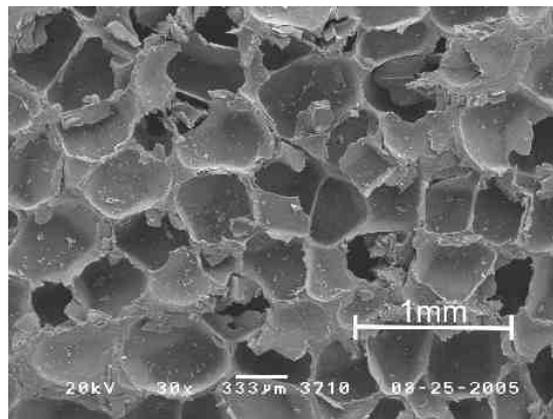


Abb. 3.2 REM-Aufnahme eines geschlossenzelligen PMI-Schaums (R110WF)

Die Herstellung der unter dem Markennamen ROHACELL vertriebenen PMI-Schaumstoffe erfolgt durch thermisches Schäumen von Platten aus einem Methacrylsäure-Copolymerisat. Dieses setzt sich während des Schäumvorganges zu Polymethacrylimid um. Als Treibmittel dient Alkohol. ROHACELL wird für verschiedene Anwendungen mit unterschiedlichen Dichten und Zellstrukturen hergestellt. Es werden Schäume mit Zellstrukturen in drei verschiedenen Varianten geliefert und durch die Bezeichnungen WF, RIST und RIMA unterschieden. Die Werkstoffe des Typs WF werden bevorzugt als Kernwerkstoff tragender Sandwichstrukturen in der Luft- und Raumfahrt eingesetzt. Die Serien RIST und RIMA eignen sich aufgrund ihrer mechanischen und thermomechanischen Eigenschaften besonders für Injektions- und Infusionsverfahren und kommen ebenfalls im Flugzeugbau zum Einsatz. Die Serien RIST und RIMA zeichnen sich durch eine im Vergleich zur Serie WF deutlich verminderte Harzaufnahme aus, was im Falle der RIMA-Werkstoffe durch die besonders feinporige Zellstruktur erreicht wird. Die einzelnen Typbezeichnungen geben Aufschluss über die Art des Werkstoffes. Dabei steht das „R“ für den Produktnamen ROHACELL, die Zahl für die angestrebte Dichte in  $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  und die anschließende Buchstabenkombination (WF, RIST, RIMA), wie oben erwähnt, für die Zellstruktur.

### Dichtemessung

Da im Produktionsprozess der einzelnen Hartschaumstoffplatten Dichteschwankungen auftreten können, wurden alle im Folgenden eingesetzten Probekörper jeweils aus einer Platte herauspräpariert. Auf diese Weise kann eine nahezu konstante Dichte für alle Probekörper gewährleistet werden. Die für die einzelnen Werkstoffe ermittelten mittleren Dichtewerte sind mit der Standardabweichung (Stabw.) aus jeweils fünf Proben in Tab. 3.2 dargestellt.

<i>Werkstoff</i>	<i>Bezeichnung</i>	<i>Dichte</i> $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	<i>Stabw.</i> $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
<i>PMI</i>	R51RIST	55,8	1,1
<i>PMI</i>	R51RIMA	43,7	1,4
<i>PMI</i>	R51WF	50,4	0,6
<i>PMI</i>	R110WF	102,8	0,7
<i>PMI</i>	R200WF	194,8	1,7

Tab. 3.2 Dichte der Werkstoffe

### Bestimmung der Zellgrößen

Zur Untersuchung von Zellgrößen und Zellformen der verschiedenen Werkstoffe zeigt Abb. 3.3 die Micro-CT-Aufnahmen der Werkstoffe R110WF und R200WF. Die Drehung der linken Abbildung resultiert aus der manuellen Positionierung der Probe in dem Micro-Computertomographen. Eine perfekte Ausrichtung kann nicht immer gewährleistet werden, hat jedoch keinen Einfluss auf die Messergebnisse..

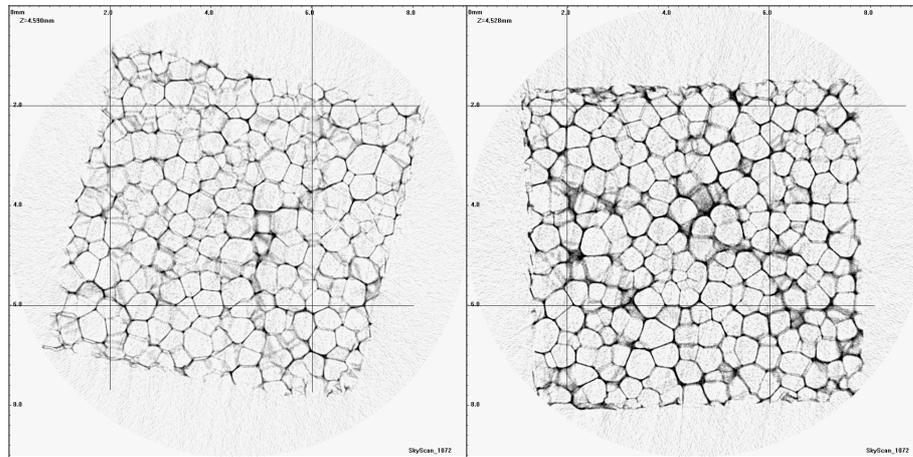


Abb. 3.3 Micro-CT-Querschnitte durch Proben der Werkstoffe R110WF (links) und R200WF (rechts)

Die markierten quadratischen Bereiche entsprechen jeweils einer Fläche von  $16 \text{ mm}^2$ . Es zeigt sich für beide Werkstoffe eine isotrope Struktur.

Für sehr feinporige Werkstoffe mit einem Zelldurchmesser unter  $0,1 \text{ mm}$  (z. B. R51RIMA) liefert die Micro-CT bei dieser Auflösung keine verwertbaren Aufnahmen. Daher wurden von allen Werkstoffen zusätzliche Bilder mit dem Rasterelektronenmikroskop angefertigt. Abb. 3.4 und Abb. 3.5 zeigen die Rasterelektronenmikroskopaufnahmen bei einer 30-fachen Vergrößerung der Werkstoffe R110WF und R200WF. Abb. 3.6 zeigt eine bei 50-facher Vergrößerung erfolgte Aufnahme des Werkstoffes R51RIMA.

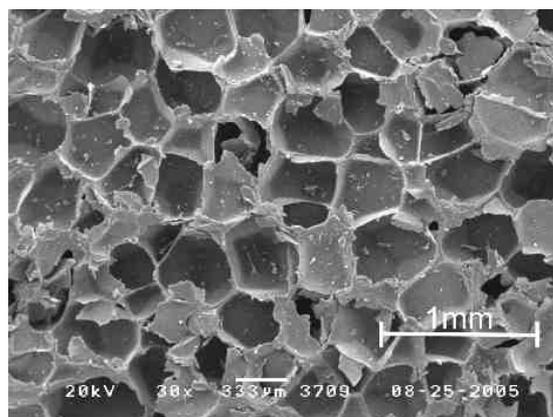


Abb. 3.4 REM-Aufnahme des Werkstoffes R110WF

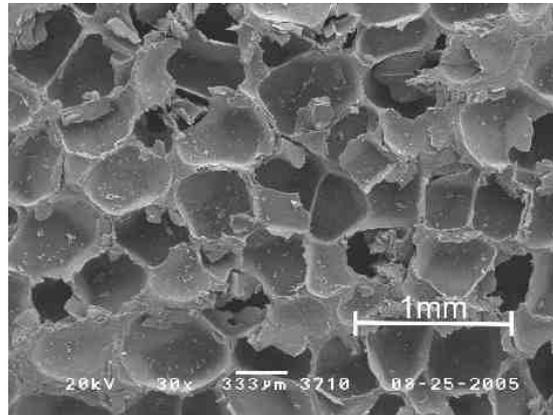


Abb. 3.5 REM-Aufnahme des Werkstoffes R200WF

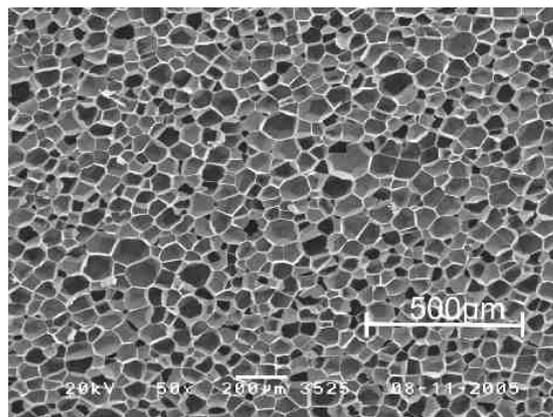


Abb. 3.6 REM-Aufnahme des Werkstoffes R51RIMA

Die gezeigten REM-Bilder (Abb. 3.4 - Abb. 3.6) verdeutlichen den Unterschied der Zellgrößen zwischen Werkstoffen der Serie ROHACELL WF und ROHACELL RIMA.

Die Bestimmung der Zellgrößen aller untersuchten Materialien erfolgte durch Zählen der Zellen auf Micro-CT- und REM-Bildern bekannten Flächeninhaltes. Unter der idealisierten Annahme, dass die Zellen eine vergleichbare Größe aufweisen, kann dann die Fläche einer einzelnen Zelle bestimmt werden. Hieraus wird dann unter der Annahme, dass die Zellen eine Kugelform aufweisen, der Durchmesser errechnet. Die folgende Tabelle zeigt, für diese idealisierte Annahme, die Anzahl der Zellen ( $n$ ) in einem Querschnitt bekannter Fläche ( $A$ ) und die daraus ermittelten Werte für die Zelldurchmesser der einzelnen Werkstoffe.

Werkstoff	$n$	$A$ [mm <sup>2</sup> ]	Zelldurchmesser [mm]
R51RIMA	101	0,38	0,069
R51RIST	63	9,27	0,432
R51WF	72	9,27	0,405
R110WF	108	16	0,434
R200WF	90	16	0,476

Tab. 3.3 Mittlere Zelldurchmesser

Innerhalb der Serie WF kann im Rahmen des Messfehlers bei unterschiedlichen Werkstoffdichten eine nahezu konstante Zellgröße festgestellt werden. Die Materialien werden aus demselben Matrixmaterial hergestellt und unterscheiden sich lediglich durch den Schäumungsgrad. Daraus folgt, dass die Stärke der Zellwände und Zellstege mit zunehmender Dichte des Schaums zunimmt (vgl. Tab. 3.2).

### Eigenschaften des Matrixmaterials

Als Eingangsparameter für die im folgenden Kapitel aufgeführten mikromechanischen Modelle dienen vor allem die mechanischen Eigenschaften des eingesetzten Matrixmaterials. Der Elastizitätsmodul der Matrix  $E_M$  und die Querkontraktionszahl  $\nu_M$  wurden unter Zugbeanspruchung an Zugprobekörpern nach DIN EN ISO 527-1 für die PMI-Hartschaumstoffe der Serie RIMA gemessen. Der erhaltene Wert kann nach Angaben der Firma Röhm mit guter Näherung auch für die Matrixmaterialien der anderen Schaumstoffe eingesetzt werden.

Die für das Matrixmaterial angegebene Dichte  $\rho_M$  wurde von der Firma Röhm bestimmt [Röhm05]. Tab. 3.4 zeigt die Eigenschaften des Matrixmaterials.

Dichte $\rho_M$ $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	1400
Elastizitätsmodul $E_M$ [MPa]	6480
Querkontraktionszahl $\nu_M$	0,3

Tab. 3.4 Eigenschaften des Matrixmaterials

Des Weiteren wurden Untersuchungen zur realen Dichte der Zellstege nach dem Schäumungsvorgang vorgenommen. Diese weist eine geringe Abhängigkeit vom Schäumungsgrad des Schaumstoffes (effektive Schaumstoffdichte) auf. Hierzu wurden geschäumte Platten der untersuchten Materialien gemahlen und dann gewogen. Tab. 3.5 zeigt die zugehörigen Messwerte am Beispiel von vier Werkstoffen unterschiedlicher Dichte der Serie WF. Lediglich für das Material mit der höchsten Dichte (R200WF) zeigt sich eine auswertbare Differenz zwischen der angenommenen und der gemessenen Dichte von ca. 8%. Beim Vergleich von gemessenen Eigenschaften mit Berechnungen aus den mikromechanischen Modellen (Kap. 3.4) werden für die Werkstoffe diese an den geschäumten Proben ermittelten Dichten der Zellstege zur Berechnung eingesetzt.

<i>Werkstoff</i>	<i>Dichte der Zellstege</i> $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
<i>R51WF</i>	1372
<i>R71WF</i>	1335
<i>R110WF</i>	1326
<i>R200WF</i>	1289

Tab. 3.5 Dichte der Zellstege

### 3.3 Mikromechanische Modelle zur Beschreibung der elastischen Eigenschaften

Die im Folgenden betrachteten Modelle sind analytische Näherungsverfahren zur Bestimmung effektiver elastischer Eigenschaften von Kompositen und porösen Materialien (z. B. Schäumen). Eine Berechnung der aus der Mikrostruktur resultierenden Festigkeiten wird nur von *Gibson* und *Ashby* [Gibs82] vorgestellt. In den vergangenen Jahren wurden verschiedene Versuche, das Verhalten zellförmiger Strukturen zu beschreiben, unternommen [Demi05, Oech03]. Die mikromechanischen Modelle beschreiben das Gesamtverhalten eines Werkstoffes unter Zuhilfenahme der bekannten Eigenschaften der in ihm enthaltenen Materialien, ihrer Wechselwirkung, ihrer mikroskopischen Form und ihrer Volumenanteile.

Aufgrund ihrer Struktur sind die Hartschaumstoffe inhomogene Materialien, deren Morphologie üblicherweise durch die mittlere Zellengröße  $D$  und die mittlere Stegdicke  $s$  charakterisiert wird. Ist das Verhältnis der minimalen Bauteilabmessung

zum Zellendurchmesser  $D$  größer  $10^2$ , kann davon ausgegangen werden, dass sich das Material als „quasihomogen“ betrachten lässt. Diese Annahme ist nach Tab. 3.3 für alle hier untersuchten Hartschaumstoffe erfüllt.

In einem der bekanntesten Verfahren nach *Gibson* und *Ashby* [Gibs82] wird eine Methode vorgeschlagen, mit der die mechanischen Eigenschaften sowohl von offenen als auch von geschlossenzelligen Schäumen berechnet werden können. Das Modell basiert dabei auf einer Einheitszelle und mikromechanischen Überlegungen zu den bei Belastung auftretenden Verformungsvorgängen in den Zellstegen und gegebenenfalls den Zellwänden.

Andere Verfahren beruhen auf kontinuumsmechanischen Ansätzen. Hier wird die heterogene Mikrostruktur im Modell durch ein quasi-homogenes, anisotropes Medium ersetzt, dessen Eigenschaften es zu bestimmen gilt. Die effektiven elastischen Eigenschaften des Werkstoffes werden hier durch eine Art Mittelung der Eigenschaften der beteiligten Materialien, wobei unterschiedliche Gewichtungen der einzelnen Eigenschaften und Volumenanteile vorgenommen werden, bestimmt. Tab. 3.6 zeigt eine Übersicht verschiedener Methoden zur Berechnung der mechanischen Eigenschaften mehrphasiger Materialien, von denen die Wichtigsten im Folgenden näher beschrieben werden.

<i>Verfahren</i>	<i>E-Modul</i>	<i>Kompressionsmodul</i>	<i>Schubmodul</i>	<i>Quelle</i>
<i>Modell von Voigt</i>	X	X	X	[Abou91]
<i>Modell von Reuss</i>	X	X	X	[Seel05]
<i>Modell von Hashin-Shtrikman</i>		X		[Hash63]
<i>Mori-Tanaka-Methode (MT)</i>	X	X	X	[Mori73]
<i>Drei-Phasen-Modell (TPM)</i>	X	X		[Zixi98]
<i>Selbstkonsistenz-Methode (SKM)</i>		X	X	[Seel05]
<i>Generalisierte Selbstkonsistenz-Methode (GSKM)</i>	X			[Chri98]
<i>Modell von Gibson und Ashby</i>	X			[Gibs82]

Tab. 3.6 Mikromechanische Modelle zur Berechnung der effektiven Steifigkeiten

Da die Schreibweisen der einzelnen mikromechanischen Modelle in der Literatur stark unterschiedlich sind und um eine direkte Vergleichbarkeit zu ermöglichen, werden zum besseren Verständnis in der folgenden Tabelle die Notationen vorgestellt.

1	Bezieht sich auf die Phase 1
2	Bezieht sich auf die Phase 2
M	Eigenschaft der Matrix
I	Eigenschaft der Inhomogenitäten
*	Bezeichnet die resultierende Eigenschaft
c	Volumenanteil
$\rho$	Dichte

Tab. 3.7 Notation

### Modell von Voigt

Die einfachsten Modelle stellen die Modelle von *Voigt* und *Reuss* dar. Das *Voigt*-Modell bestimmt die Elastizitätseigenschaften eines zweiphasigen Materials direkt aus den Volumenanteilen der beiden Phasen. Das Modell basiert auf der Annahme, dass die Verformungen in beiden Phasen gleich groß sind [Abou91]. Der Werkstoff wird als eine Parallelschaltung zweier nach ihrem Volumenanteil gewichteten Werkstoffkennwerte abgebildet. Für den effektiven Elastizitätsmodul  $E^*$  gilt bei diesem Verfahren:

$$E^* = c_1 \cdot E_1 + c_2 \cdot E_2 \quad (3.2)$$

mit

$$c_1 = 1 - c_2 \quad (3.3)$$

Für die Berechnung des Elastizitätsmoduls eines Schaums wird der Elastizitätsmodul der Phase 2 (Luft) zu Null gesetzt. Das Matrixmaterial des Schaums wird als Phase 1 bezeichnet. Dies führt zu folgender Beziehung:

$$E^* = (1 - c_2) \cdot E_M. \quad (3.4)$$

Der Volumenanteil  $c_2$  der Luft im Schaum errechnet sich mit Kenntnis der Dichte des Matrixmaterials  $\rho_M$  und der Dichte des Schaums  $\rho^*$  wie folgt:

$$c_2 = 1 - \frac{\rho^*}{\rho_M}. \quad (3.5)$$

Für die Grenzfälle ergibt sich:

$$c_1 \rightarrow 0 \Rightarrow E^* = 0; \quad c_2 \rightarrow 0 \Rightarrow E^* = E_M. \quad (3.6)$$

Die Methode von Voigt stellt bei der Berechnung der resultierenden Elastizitätsmoduln die obere Grenze dar [Bish51].

### Modell von Reuss

Bei dem Modell von *Reuss* wird der Werkstoff als eine Reihenschaltung von einzelnen Federn interpretiert. Hierbei entsprechen wiederum die Federkonstanten den Elastizitätsmoduln der eingesetzten Materialien:

$$E^* = \frac{E_2 \cdot E_1}{E_2 \cdot c_1 + E_1 \cdot (1 - c_1)}. \quad (3.7)$$

Wird für die Phase 2 (Luft) der Elastizitätsmodul zu Null gesetzt, ergibt sich für den resultierenden Elastizitätsmodul:

$$E_2 \rightarrow 0 \Rightarrow E^* = 0. \quad (3.8)$$

Das Modell von *Reuss* gibt die untere Grenze der möglichen resultierenden Elastizitätsmoduln an. Es ist zur Berechnung der elastischen Eigenschaften von Hartschäumen ungeeignet, da der Elastizitätsmodul des Verbundes zu Null wird, sobald eine der beiden Phasen einen Elastizitätsmodul von Null aufweist.

### Modell von Hashin-Shtrikman

Bei dem Modell von *Hashin-Shtrikman* [Hash63] werden für die Berechnung der effektiven Steifigkeiten für einen Werkstoff mit zwei Phasen eine obere und eine untere Grenze angegeben. Das Modell geht hierbei davon aus, dass eine Phase (Schale) die andere Phase (Kern) umschließt. Die obere Grenze gilt für den Fall, dass die Schale durch die steifere Komponente gebildet wird, die untere Grenze gilt dementsprechend für den Fall, dass die weichere Komponente die Schale bildet. Für den Kompressionsmodul ergibt sich die obere Grenze zu

$$K_{OG}^* = K_1 + \frac{c_2}{(K_2 - K_1)^{-1} + c_1 \cdot (K_1 + \frac{4}{3} \cdot G_1)^{-1}} \quad (3.9)$$

und die untere Grenze zu

$$K_{UG}^* = K_2 + \frac{c_1}{(K_1 - K_2)^{-1} + c_2 \cdot (K_2 + \frac{4}{3} \cdot G_2)^{-1}} \quad (3.10)$$

### Mori-Tanaka-Methode

Die *Mori-Tanaka*-Methode berechnet die Steifigkeit eines Hartschaumes ebenfalls als effektive Steifigkeit eines zweiphasigen Materials [Mori73]. Im Folgenden wird der Spezialfall kugelförmiger Inhomogenitäten in einem isotropen Matrixmaterial näher betrachtet. Laut [Seel05] gilt dann für den effektiven Kompressionsmodul  $K^*$  des zweiphasigen Materials

$$K^* = K_M \cdot \left( 1 + \frac{c_I \cdot (K_I - K_M)}{K_M + (1 - c_I) \cdot \alpha \cdot (K_I - K_M)} \right) \quad (3.11)$$

mit dem Parameter  $\alpha$

$$\alpha = \frac{3 \cdot K_M}{3 \cdot K_M + 4 \cdot G_M}. \quad (3.12)$$

Im Schaum werden die Lufteinschlüsse als Inhomogenitäten angesehen. Ihr Volumenanteil  $c_I$  im Schaum errechnet sich nach (3.3) und (3.5). Der Kompressionsmodul  $K_I$  der Luft kann gegenüber dem des Matrixmaterials als vernachlässigbar klein angesehen werden, sodass für den effektiven Kompressionsmodul  $K^*$  aus (3.11) folgt:

$$K^* = K_M \cdot \left( 1 - \frac{c_I}{1 - \alpha \cdot (1 - c_I)} \right). \quad (3.13)$$

Für den effektiven Schubmodul  $G^*$  des zweiphasigen Materials gilt [Seel05]:

$$G^* = G_M \cdot \left( 1 + \frac{c_I \cdot (G_I - G_M)}{G_M + (1 - c_I) \cdot \beta \cdot (G_I - G_M)} \right) \quad (3.14)$$

mit dem Schubmodul der Inhomogenitäten  $G_I$  und

$$\beta = \frac{6 \cdot (K_M + 2 \cdot G_M)}{5 \cdot (3 \cdot K_M + 4 \cdot G_M)}. \quad (3.15)$$

Der Schubmodul  $G_I$  der Inhomogenitäten (Luft) wird wiederum vernachlässigt, sodass Gleichung (3.14) sich wie folgt vereinfacht:

$$G^* = G_M \cdot \left( 1 - \frac{c_I}{1 - (1 - c_I) \cdot \beta} \right) \quad (3.16)$$

Die Schäume können als isotrop betrachtet werden. Weiterhin können sie als quasi-homogen angesehen werden, da ihre Stoffeigenschaften nur auf einer Skala, die erst durch hinreichende Vergrößerung sichtbar wird (Mikroebene), schwanken [Seel05]. Für den Kompressionsmodul  $K$  und den Schubmodul  $G$  von isotropen, homogenen Werkstoffen gilt:

$$K = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \quad (3.17)$$

und

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}. \quad (3.18)$$

Für den Elastizitätsmodul ergibt sich durch Eliminieren der Querkontraktionszahl  $\nu$  aus den Gleichungen (3.17) und (3.18):

$$E = \frac{3}{\frac{1}{G} + \frac{1}{3 \cdot K}}. \quad (3.19)$$

Setzt man nun die aus der *Mori-Tanaka*-Methode hergeleiteten Gleichungen für den effektiven Kompressionsmodul  $K^*$  und den effektiven Schubmodul  $G^*$  ein, so folgt mit (3.11) - (3.19) für den resultierenden Elastizitätsmodul  $E^*$  des Schaums:

$$E^* = \frac{3}{1 + \frac{G_M \left( 1 - \frac{c_I}{1 - (1 - c_I) \cdot \frac{6(K_M + 2G_M)}}{5(3K_M + 4G_M)}} \right)} + \frac{3}{\frac{1}{3K_M} \left( 1 - \frac{c_I}{1 - \frac{3K_M}{3K_M + 4G_M} \cdot (1 - c_I)} \right)}. \quad (3.20)$$

### Drei-Phasen-Modell

Das Drei-Phasen-Modell (TPM) beschreibt den Schaum als einen Hohlraum, welcher in einem Matrixmaterial eingebettet ist, das von einem weiteren Medium umgeben ist [Zixi98]. Unter der Annahme, das Matrixmaterial ist inkompressibel ( $\nu_M = 0,5$ ), stellten *Zixing* und *Zhentong* [Zixi98] eine Beziehung zwischen dem effektiven Kompressionsmodul  $K^*$  und dem Schubmodul  $G_M$  des Matrixmaterials her:

$$K^* = \frac{4 \cdot G_M \cdot (1 - c_2)}{3 \cdot c_2}. \quad (3.21)$$

Aus Gleichung (3.21) kann nur mit Kenntnis der Querkontraktionszahl  $\nu^*$  des Schaumstoffes der effektive Elastizitätsmodul  $E^*$  nach (3.17) berechnet werden.

Um bei der Ermittlung des resultierenden Elastizitätsmoduls  $E^*$  nicht auf eine Schätzung von  $\nu^*$  angewiesen zu sein, kann das Drei-Phasen-Modell umformuliert werden. Eliminiert man aus den Gleichungen (3.17) und (3.18) die Querkontraktionszahl  $\nu$ , erhält man für den Elastizitätsmodul  $E$ :

$$E = \frac{9}{\frac{1}{K} + \frac{3}{G}}. \quad (3.22)$$

Unter der Voraussetzung von Isotropie stellt sich der effektive Elastizitätsmodul  $E^*$  wie folgt dar:

$$E = \frac{9}{\frac{1}{K^*} + \frac{3}{G^*}}. \quad (3.23)$$

Für die Berechnung des effektiven Schubmoduls  $G^*$  wird die Näherungslösung der Mori-Tanaka-Methode verwendet. Nach Einsetzen der Lösung von  $K^*$  aus dem Drei-Phasen-Modell und  $G^*$  aus dem Modell von *Mori* und *Tanaka* ergibt sich für den effektiven Elastizitätsmodul  $E^*$ :

$$E^* = \frac{3}{\frac{c_I}{4G_M \cdot (1-c_I)} + \frac{1}{G_M \left( 1 - \frac{c_I}{1-(1-c_I) \cdot \frac{6(K_M + 2G_M)}}{5(3K_M + 4G_M)} \right)}}. \quad (3.24)$$

### Selbstkonsistenz-Methode

Die Selbstkonsistenz-Methode (SKM) basiert auf der Betrachtung einer jeweils einzelnen Inhomogenität in einem Umgebungsmaterial mit unbekanntem aber homogenen Eigenschaften, welche gerade die zu bestimmenden effektiven Eigenschaften darstellen [Gros07, Seel05]. Der Einfluss aller anderen Inhomogenitäten wird also durch deren „Versmieren“ zu einem effektiven Matrixmaterial berücksichtigt. Auch dieses Verfahren beinhaltet einen zur Berechnung der Eigenschaften von Schäumen geeigneten Spezialfall.

So kann für isotrope, kugelförmige Inhomogenitäten, welche in einer isotropen Matrix homogen verteilt sind, aus den folgenden Gleichungen ein isotropes effektives Materialverhalten angegeben werden [Seel05]. Für den effektiven Kompressionsmodul  $K^*$  gilt:

$$K^* = K_M + c_I \cdot (K_I - K_M) \cdot \left( 1 + \alpha^* \cdot \left( \frac{K_I}{K^*} - 1 \right) \right)^{-1} \quad (3.25)$$

Mit:

$$\alpha^* = \frac{3K^*}{3K^* + 4G^*}. \quad (3.26)$$

Der effektive Schubmodul  $G^*$  wird bestimmt aus

$$G^* = G_M + c_I \cdot (G_I - G_M) \cdot \left( 1 + \beta^* \cdot \left( \frac{G_I}{G^*} - 1 \right) \right)^{-1} \quad (3.27)$$

mit

$$\beta^* = \frac{6 \cdot (K^* + 2 \cdot G^*)}{5 \cdot (3 \cdot K^* + 4 \cdot G^*)}. \quad (3.28)$$

Auch hier werden die Lufteinschlüsse des Schaums als Inhomogenitäten betrachtet, weshalb man den Kompressionsmodul  $K_I$  und den Schubmodul  $G_I$  erneut vernachlässigen kann. Die Gleichung (3.25) vereinfacht sich somit zu:

$$K^* = K_M \cdot \left( 1 - \frac{c_I}{1 - \alpha^*} \right). \quad (3.29)$$

Setzt man nun Gleichung (6.19) in Gleichung (6.22) ein und löst nach  $K^*$  auf, erhält man:

$$K^* = \frac{4 \cdot G^* \cdot K_M \cdot (1 - c_I)}{4 \cdot G^* + 3 \cdot c_I \cdot K_M}. \quad (3.30)$$

Für den effektiven Schubmodul gilt dann:

$$G^* = G_M \cdot \left( 1 - \frac{c_I}{1 - \beta^*} \right). \quad (3.31)$$

Setzt man nun Gleichung (6.21) in Gleichung (6.24) ein und löst diese nach  $K^*$  auf, erhält man:

$$K^* = \frac{8 \cdot G_M \cdot G^* - 20 \cdot c_I \cdot G_M \cdot G^* - 8 \cdot G^{*2}}{9 \cdot G^* - 9 \cdot G_M + 15 \cdot c_I \cdot G_M}. \quad (3.32)$$

Durch Gleichsetzen von (6.23) und (6.25) sowie Eliminieren von  $K^*$  ergibt sich nach Lösen der quadratischen Gleichung für  $G^*$  :

$$G_{1,2}^* = \frac{3}{16} \cdot K_M \cdot (c_I - 3) - \frac{1}{4} \cdot G_M \cdot (5 \cdot c_I - 2) \pm \sqrt{\left( \frac{3}{16} \cdot K_M \cdot (c_I - 3) - \frac{1}{4} \cdot G_M \cdot (5 \cdot c_I - 2) \right)^2 - \frac{1}{8} \cdot G_M \cdot K_M \cdot (16 \cdot c_I - 9)}. \quad (3.33)$$

Da der effektive Schubmodul  $G^*$  für alle Werte des relativen Luftvolumenanteils  $c_I$  mit  $c_I \in [0;1]$  bei negativem Vorzeichen vor dem Wurzelterm ausschließlich negative Werte annehmen würde, folgt:

$$G^* = \frac{3}{16} K_M \cdot (c_I - 3) - \frac{1}{4} G_M \cdot (5c_I - 2) + \sqrt{\left( \frac{3}{16} K_M \cdot (c_I - 3) - \frac{1}{4} G_M \cdot (5c_I - 2) \right)^2 - \frac{1}{8} G_M \cdot K_M \cdot (16c_I - 9)} \quad (3.34)$$

Durch Einsetzen von (6.27) in (6.25) erhält man den effektiven Kompressionsmodul  $K^*$  und über die Beziehung (6.16) schließlich den effektiven Elastizitätsmodul  $E^*$  .

### Generalisierte Selbstkonsistenzmethode

Die generalisierte Selbstkonsistenz-Methode (GSKM) basiert auf derselben Überlegung wie das Drei-Phasen-Modell. *Christensen* [Chri98] entwickelte die Selbstkonsistenzmethode mit dem Ziel weiter, bei hohen Luftanteilen im Schaum ( $c_I \rightarrow 1$ ) physikalisch realistischere Ergebnisse zu erzielen. Für den effektiven Elastizitätsmodul gilt bei der generalisierten Selbstkonsistenz-Methode:

$$E^* = E_M \cdot \left( \frac{2}{5 + 3 \cdot \nu_M} \cdot (1 - c_I) \right). \quad (3.35)$$

### Modell von Gibson und Ashby

Dieses Modell basiert auf einer Einheitszelle, welche aus einer würfelförmigen Anordnung von Balken (und bei geschlossenzelligen Schäumen aus verbindenden Flächen) besteht. Als maßgeblicher Deformationsmechanismus wird dabei das Verbiegen der Balken (Zellstege) unter Druckbeanspruchung angenommen [Gib82]. Das Modell von *Gibson* und *Ashby* bestimmt den effektiven Elastizitätsmodul  $E^*$  eines geschlossenzelligen Schaums unter Berücksichtigung seiner Zellstruktur. Der Parameter  $\phi$  gibt dabei den Anteil des Matrixmaterials, der in den Zellstegen vorhanden ist, an. Zusätzlich wird in diesem Modell der Druck des in den Zellen eingeschlossenen Gases bei der Berechnung der Steifigkeit berücksichtigt. Aufgrund der Annahme, dass sich dieser Druck dem Umgebungsdruck angleicht [Schj01], [Röhm02], kann der Term vernachlässigt werden.

Für den effektiven Elastizitätsmodul eines geschlossenzelligen Hartschaumstoffs gilt nach *Gibson* und *Ashby*:

$$E^* = E_M \cdot (\phi^2 \cdot (1 - c_I)^2 + (1 - \phi) \cdot (1 - c_I)) \text{ mit } \phi \in [0;1]. \quad (3.36)$$

Das Modell gibt einen quadratischen Zusammenhang zwischen dem effektiven Elastizitätsmodul  $E^*$  und dem Anteil  $\phi$  des in den Zellstegen konzentrierten Matrixmaterials an.

### 3.4 Vergleich von Messergebnissen und Berechnungen

Um die in Kap. 3.3 beschriebenen Modelle auf deren Anwendbarkeit für den hier untersuchten Hartschaum zu überprüfen, sollen sie durch den Vergleich mit Messergebnissen geprüft werden. Im Folgenden werden die für Schaumstoffe üblichen Prüfverfahren kurz dargestellt. Anschließend werden die zum Vergleich mit den mikromechanischen Modellen verwendeten Probekörper vorgestellt.

Ganz allgemein sind bei den mechanischen Eigenschaften eines Schaums vor allem diejenigen interessant, die Kennzahlen für die Auslegung und Dimensionierung von Bauteilen liefern. Hieraus folgen die zur Anwendung kommenden Prüfverfahren. Für die Hartschaumstoffe werden die folgenden mechanischen Prüfmethoden für Kurzeiteigenschaften nach Norm angewendet:

Bei sprödharten Schaumstoffen wird die Druckfestigkeit bestimmt. Sie zeigen beim ersten Einbrechen des Zellgefüges ein Maximum im Verlauf der Druck-Stauchungskurve. Bei zäharten Schaumstoffen wird hingegen als Druckfestigkeit die Druckspannung bei 10 % Stauchung definiert. Die Druck-Stauchungskurven zeigen einen stetigen Verlauf (DIN 53 421).

Bei sprödharten Schaumstoffen werden die Biegesteifigkeit und die Durchbiegung bei Bruch angegeben, bei zäharten Schaumstoffen, die bei 20 mm Durchbiegung noch nicht gebrochen sind, die Grenzbiegespannung (DIN 53 423).

Der Zugversuch wird an hantelförmigen Schulterstäben wie bei den kompakten Kunststoffen (DIN 53 430) durchgeführt.

Nach DIN 53 427 wird die Scherfestigkeit an einem auf Metallplatten aufgeklebten Stab bestimmt.

#### **Rohrprobekörper zur Bestimmung der mechanischen Eigenschaften**

Mit den aufgeführten Normen ist es nicht möglich, Zug-, Druck und Schubeigenschaften an ein und derselben Probekörpergeometrie zu bestimmen. Um dies zu ermöglichen, wurden die Messungen an dickwandigen Zylinderrohren durchgeführt. Diese Form erlaubt es, sowohl Kräfte in Zug- und Druckrichtung, als auch Torsionsmomente um die Längsachse der Probe aufzubringen. Auf diese Weise können alle hier betrachteten Elastizitäts- und Langzeiteigenschaften der Werkstoffe an einer Prüfkörpergeometrie bestimmt werden. Ein Rohr gilt laut [Dark65] als dickwandig, wenn für seine Wanddicke  $h$  und seinen Innendurchmesser  $D_i$  gilt:

$$h \geq \frac{D_i}{20} \quad (3.37)$$

Des Weiteren stand im Vordergrund, im eigentlichen Prüfbereich ein homogenes Spannungsfeld vorliegen zu haben. Dies ist gewährleistet, wenn der parallele Bereich des Probekörpers 3-5-mal der Wanddicke entspricht. Abb. 3.7 zeigt die aus den aufgeführten Randbedingungen resultierenden Abmessungen der verwendeten Probekörper.

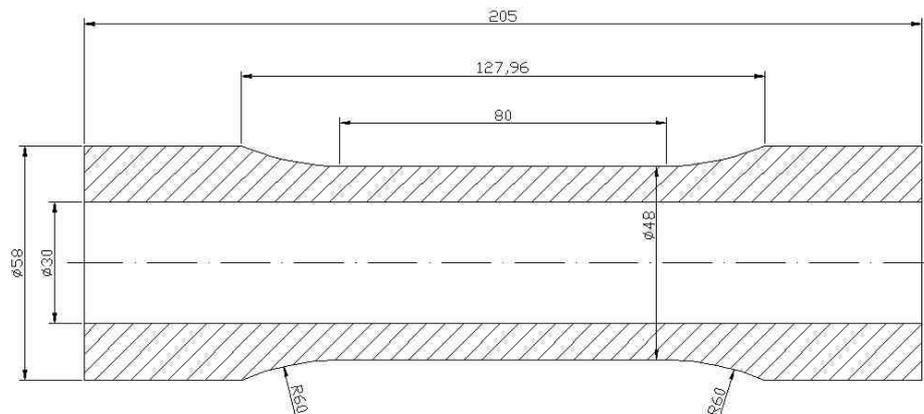
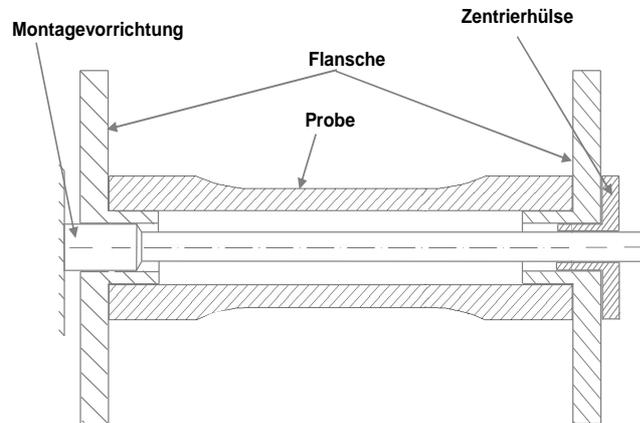


Abb. 3.7 Schnittdarstellung des Probekörpers

Es ist weiterhin anzumerken, dass die Geometrie des Rohrprobekörpers in Anlehnung an DIN EN ISO 527-1 definiert wurde. Die Rohrproben weisen an den Enden deutlich größere Wandstärken auf, als in der Mitte. Dies soll örtlich überhöhten Spannungen vorbeugen, welche bei Belastung durch die zur Befestigung an der Prüfmaschine an den Rohrenden eingeklebten Flansche entstehen können. Die Übergangsradien zwischen den verschiedenen Querschnitten dienen der Vergleichmäßigung des Kraftflusses und der Vermeidung von Spannungsspitzen.

Die Verbindung zwischen den Probekörpern und der Prüfmaschine erfolgte über Stahlflansche, welche an den Stirnseiten der Probe mit Epoxidharz auf die Probekörper aufgeklebt wurden. Die Flansche besitzen zudem einen Absatz, welcher an der Innenseite der Probe zusätzliche Klebefläche bietet. Abb. 3.8 zeigt schematisch eine mit den Flanschen verklebte Probe, welche während der Aushärtezeit des Klebstoffes auf einer Zentriervorrichtung montiert ist. Die Vorrichtung sichert einerseits die koaxiale Position beider Flansche zueinander, außerdem sorgt sie dafür, dass die Montageflächen der Flansche in zueinander parallelen Ebenen liegen. Somit wird eine Biegebeanspruchung der Probe bei der Montage in der Prüfmaschine verhindert.



*Abb. 3.8 Hartschaumprobe auf Zentriervorrichtung*

Die während der Versuche auftretenden Verformungen werden mit Hilfe des optischen Messsystems ARAMIS der Firma gom an einem Flächenelement der Oberfläche des zylindrischen Mittelteils erfasst. Das System ARAMIS funktioniert nach dem Objektrasterverfahren und gehört zur Verfahrensgruppe der Photogrammetrie. Vereinfacht betrachtet liegt der Photogrammetrie die räumliche Rekonstruktion von Objektmessungen aus ebenen Bildinformationen zugrunde. Das dahinter stehende Funktionsprinzip [Wilk91], [Wint91] soll anhand von Abb. 3.9 erläutert werden. In Abb. 3.9 sind oben links und rechts die CCD-Chips zweier Digitalkameras dargestellt, die auf eine beliebige Objektoberfläche gerichtet sind und in einem definierten Kamerawinkel  $\alpha$  zueinander stehen, der in einem Bereich von  $20^\circ - 60^\circ$  liegen sollte. Die Oberfläche wird gleichmäßig mit weißem Licht ausgeleuchtet. Betrachtet man nun beispielhaft einen einzelnen Punkt P auf dem Objekt, so wird dieser im Rahmen der Strahlenoptik gemäß dem Prinzip der Zentralprojektion durch die Projektionszentren  $O_1$  und  $O_2$  auf die Chips der beiden Kameras als Bildpunkt  $p_1$  bzw.  $p_2$  abgebildet, mit den Koordinaten  $x_1$  und  $y_1$  bzw.  $x_2$  und  $y_2$ . Die Projektionszentren sind die vereinfacht als Lochblenden betrachteten Objektivoptiken der Kameras. Ihre Position im Raum wird anhand einer Kalibrierung in dem globalen kartesischen Koordinatensystem bestimmt. Da also die Koordinaten von  $O_1$  und  $O_2$  sowie die Bildpunktkoordinaten  $x, y$  für beide Kameras bekannt sind, kann mit entsprechenden Algorithmen auf die Raumkoordinaten des Objektpunktes P zurückgerechnet werden. Wird nun das Objekt verformt, so geht P in  $P^*$  über und es ändern sich die Koordinaten der Bildpunkte. Nach dem bereits beschriebenen Verfahren werden nun die Raumkoordinaten von  $P^*$  ermittelt. Zur Berechnung des Verformungsweges wird innerhalb der Software die Differenz der berechneten Ortsvektoren von P und  $P^*$  gebildet.

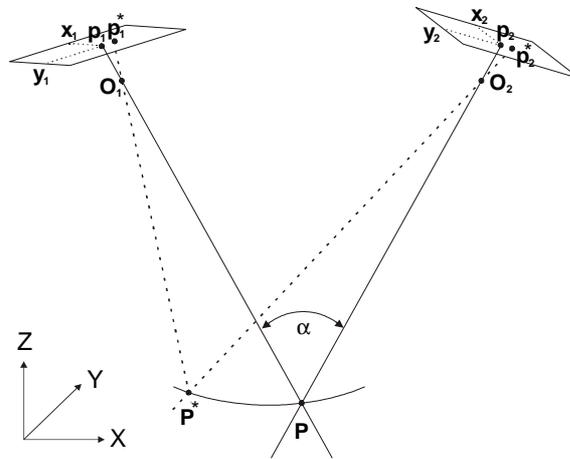


Abb. 3.9 Funktionsprinzip des Objekttrasterverfahrens

In diesem Beispiel wurde die Verschiebung eines Objektpunktes betrachtet. Wesentlich für die dreidimensionale Verformungsanalyse ist nun aber die Messung der räumlichen Verschiebungsverteilung vieler Punkte innerhalb eines Verbandes, die auf der Objektoberfläche liegen. Aus den Verschiebungen werden wiederum Dehnungsverteilungen abgeleitet und dargestellt. Damit jedoch Punkte auf der Objektoberfläche identifiziert werden können, muss man zunächst Markierungen auf den Kunststoffproben aufbringen. Hierzu wird ein statistisches Punktmuster mit möglichst gleichmäßiger Grauwertverteilung mittels Lackspray auf die Probenoberfläche aufgesprüht. Das Muster folgt der Deformation während der Belastung, behält dabei seine charakteristische Struktur und wird in mehreren Lastzuständen von beiden Kameras aufgenommen. Durch rechnerischen Vergleich der die charakteristische Struktur wiedergebenden Intensitätsverteilungen der digitalen Zustandsbilder werden in der Dehnungsberechnung die Verformungswege einzelner Punkte zunächst zweidimensional und durch die oben geschilderte Transformation die räumliche Verschiebung der Objektoberfläche ermittelt. Das in jedem Zustandsbild festgehaltene Grauwertmuster wird von der Software mit einem Raster aus einzelnen Facetten überlagert. Eine Facette ist eine Einheit, die der Berechnung der Dehnung dient und eine größere Anzahl von Bildpixeln umfasst. Ihr Mittelpunkt ist abhängig von der Lage der Pixel und wird durch kartesische Koordinaten beschrieben. Jede Facette wird im Bild des unverformten Zustands definiert und muss anschließend im Bild eines jeden Verformungszustandes wiedergefunden werden, wobei die sich ändernde Form und Position der Facette ermittelt und in Koordinaten festgehalten wird. Durch den Verband vieler solcher Facetten erzeugt die Software ein Koordinatennetz, aus dem für jeden einzelnen Verformungszustand orts aufgelöste Dehnungsverteilungen erstellt und visualisiert werden können. Die wirksamen Spannungen werden aus den

gemessenen Kräften und der Kreisringfläche im Mittelteil des Probekörpers errechnet.

Hartschaumstoffe aus PMI zeigen ein ausgeprägtes Feuchtigkeitsabsorptionsverhalten. Hierdurch ändern sich bei Lagerung an feuchter Umgebungsluft nicht nur ihre Masse (und die daraus ermittelte Dichte), sondern auch die mechanischen Eigenschaften [Röhm02]. Um konstante Versuchsbedingungen zu schaffen, wurden alle Proben vor Versuchsbeginn 3,5 Stunden lang in einem Umluftofen bei 130°C getrocknet. Die Kriechversuche dauerten ca. 28 Stunden und wurden bei 23°C Raumtemperatur durchgeführt. Um die Feuchtigkeitsaufnahme während der Versuchsdauer zu überprüfen, wurden konditionierte Probekörper über 28 Stunden in Normklima gelagert und anschließend gewogen. Es zeigte sich keine signifikante Zunahme des Gewichts.

### 3.5 Ergebnisse aus quasistatischen Versuchen

Alle Versuche zur Bestimmung der elastischen Eigenschaften wurden an dem in Abb. 3.7 dargestellten Probekörper durchgeführt. Für die untersuchten Hartschaumstoffe zeigte sich ein unterschiedliches Verhalten bei Zug- und Druckbeanspruchung. Beide Beanspruchungen wurden für die Bestimmung der elastischen Eigenschaften durchgeführt. Die Ermittlung der Querkontraktionszahl erfolgte aus denselben Datensätzen und wurde ebenfalls für Zug- und Druckbeanspruchung vorgenommen. Im Folgenden werden die Messergebnisse aus den Elastizitätsversuchen dargestellt und dann anschließend mit den aus den mikromechanischen Modellen errechneten Werten verglichen.

#### Elastizitätsmodule für Zug, Druck und Schub

Tab. 3.8 zeigt die Messergebnisse aus Versuchen zur Bestimmung der Elastizitätsmoduln für Zug- und Druckbeanspruchung ( $E_{Zug}$ ,  $E_{Druck}$ ) sowie für den Schubmodul.

Werkstoff	$E_{Zug}$ [MPa]	Stabw. [MPa]	$E_{Druck}$ [MPa]	Stabw. [MPa]	$G$ [MPa]	Stabw. [MPa]
R51RIST	91,8	3,8	84,3	0,1	38,6	5,8
R51RIMA	69,2	2,2	56,0	0,2	25,8	1,7
R51WF	83,3	3,0	73,1	2,9	29,6	2,0
R110WF	188,5	1,1	179,7	2,3	84,9	6,2
R200WF	388,2	1,3	375,8	1,7	175,2	0,7

Tab. 3.8 Elastizitätsmoduln für Zug- und Druckbeanspruchung sowie für Schubbeanspruchung

### Querkontraktionszahlen aus Zug- und Druckversuch

Tab. 3.9 zeigt die aus den Zug- und Druckversuchen gemessenen Querkontraktionszahlen ( $\nu_{Zug}$ ,  $\nu_{Druck}$ ).

Werkstoff	$\nu_{Zug}$ [-]	Stabw. [%]	$\nu_{Druck}$ [-]	Stabw. [%]
R51RIST	0,42	3,6	0,32	4,8
R51RIMA	0,38	9,3	0,25	12,0
R51WF	0,32	6,3	0,28	5,5
R110WF	0,38	1,3	0,39	1,3
R200WF	0,38	6,7	0,37	5,4

Tab. 3.9 Bestimmung der Querkontraktionszahlen bei Zugbeanspruchung

### Vergleich mit Näherungsverfahren

Im Folgenden sollen die elastischen Eigenschaften der Schaumstoffe in Bezug auf die Eigenschaften des Matrixmaterials dargestellt werden. Diagramme, welche die Dichte  $\rho^*$  sowie den effektiven Elastizitätsmodul  $E^*$  der Schaumstoffe zeigen, werden auf die entsprechenden Werte des Matrixmaterials ( $E_M$ ,  $\rho_M$ ) normiert.

Es soll gezeigt werden, welches der in Kap. 3.3 beschriebenen mikromechanischen Modelle sich am besten zur Beschreibung der elastischen Eigenschaften eignet. Das Modell von *Gibson* und *Ashby* berücksichtigt als einziges Verfahren mit einem zusätzlichen Parameter die Materialverteilung innerhalb der Zellen des Schaums und wird anschließend separat untersucht.

Abb. 3.10 zeigt die Verläufe der berechneten effektiven Elastizitätsmoduln in Abhängigkeit der Werkstoffdichte. Die Achsen des Diagramms sind auf die Eigenschaften des Matrixmaterials normiert. Mit der Annahme, dass bei einer Werkstoffdichte von  $\rho_M = 0$  auch der Elastizitätsmodul  $E$  zu Null wird und dass bei einer Werkstoffdichte von  $\rho_M = 1$  das Verhalten des Schaums in das Verhalten des Matrixmaterials übergeht, kann man die Kurve der Messwerte um die beiden Grenzwerte ergänzen.

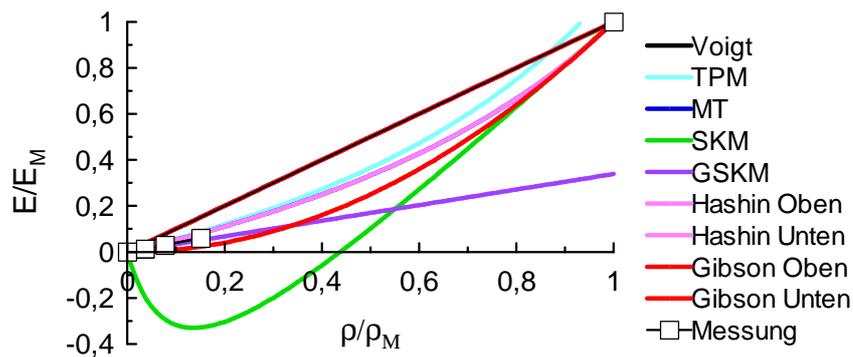


Abb. 3.10 Effektiver Elastizitätsmodul in Abhängigkeit der Dichte

Zunächst ist festzuhalten, dass das Modell von *Voigt*, die obere Grenze von *Gibson* und *Ashby*, die obere Grenze des Modells von *Hashin* zusammenfallen. Des Weiteren liegen die Modelle von *Mori-Tanaka* (MT) und die untere Grenze von *Hashin* für den Fall mit Luft als zweiter Phase zusammen. Der Vergleich der Messwerte mit dem Modell von *Voigt* zeigt, dass in der Realität kein proportionaler Zusammenhang zwischen dem Elastizitätsmodul und der Dichte vorliegen kann.

Das erweiterte Drei-Phasen-Modell (TPM) gibt nicht ausschließlich physikalisch sinnvolle Werte an. Für hohe Werkstoffdichten (Anteil der Luft gegen Null) sagt es Steifigkeiten vorher, die über denen des Matrixmaterials liegen. Die in dieser Arbeit betrachteten Schäume weisen relative Dichten von  $\frac{\rho}{\rho_M} \leq 0,2$  auf. In diesem Bereich sagt das Drei-Phasen-Modell durchaus sinnvolle Steifigkeiten voraus.

Des Weiteren zeigt sich, dass die Selbstkonsistenz-Methode (SKM) erst für hohe Werkstoffdichten realistische Werte liefert [Gros07]. In dem für Schäume relevanten Bereich der Dichte ( $\frac{\rho}{\rho_M} \leq 0,2$ ) ergeben sich physikalisch sinnlose negative Steifigkeiten. Laut [Gros07, Seel05] gilt als einer der Nachteile der Selbstkonsistenz-Methode der eventuell vorhergesagte völlige Steifigkeitsverlust des effektiven Materials. Dieser Effekt ist abhängig von den Eigenschaften der beiden Phasen und deren Volumenanteilen. Dies ist hier (mit dem großen Volumenanteil von Luft als zweiter Phase) der Fall. Die Selbstkonsistenzmethode ist somit für die Beschreibung der hier betrachteten Schäume ungeeignet.

Die generalisierte Selbstkonsistenzmethode (GSKM) zeigt bei höheren Dichten zu geringe effektive Steifigkeiten auf (ungefähr 30-40% der Steifigkeit des Matrixmaterials bei einem relativen Luftanteil von Null). Für den Fall, dass der Verbund lediglich aus Matrix besteht sagt die generalisierte Selbstkonsistenzmethode (GSKM) Steifigkeiten voraus, die deutlich unter denen der Matrix liegen.

Abb. 3.11 zeigt die Ergebnisse der Berechnungsmethoden im relevanten Bereich der effektiven Werkstoffdichte zusammen mit Messergebnissen aus Zugversuchen mit Werkstoffen der Serie WF. Die Selbstkonsistenzmethode wird hier nicht weiter betrachtet.

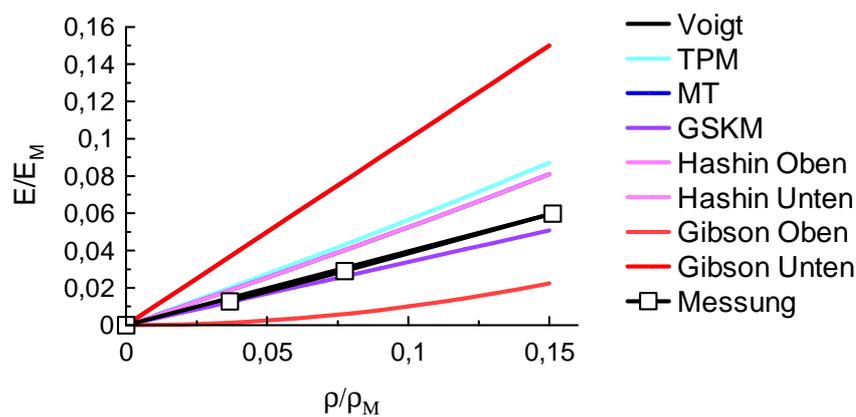


Abb. 3.11 Vergleich von Näherungsmethoden und Messwerten

Alle Näherungsmethoden (bis auf die generalisierte Selbstkonsistenz-Methode und die untere Grenze des Modells von Gibson und Ashby) sagen zu große Werte für den effektiven Elastizitätsmodul  $E^*$  vorher.

Aus Abb. 3.10 und Abb. 3.11 lässt sich schließen, dass das Modell von *Mori-Tanaka* und die untere Grenze der Methode von *Hashin* den qualitativen Verlauf der Messwerte am besten wiedergeben. Die absoluten Unterschiede zwischen den gemessenen und den berechneten Werten sind im für die Hartschaumstoffe relevanten Bereich bei der generalisierten Selbstkonsistenz-Methode am geringsten.

Die Methode von *Gibson* und *Ashby* berücksichtigt mit dem Faktor  $\phi$  die relative Verteilung des Matrixmaterials in den Zellwänden und -stegen ( $\phi = 0 \dots 1$ ). Abb. 3.12 zeigt die gemessenen Elastizitätsmoduln aller untersuchten Werkstoffe sowie die zwei Grenzfälle der Berechnung nach *Gibson* und *Ashby*.

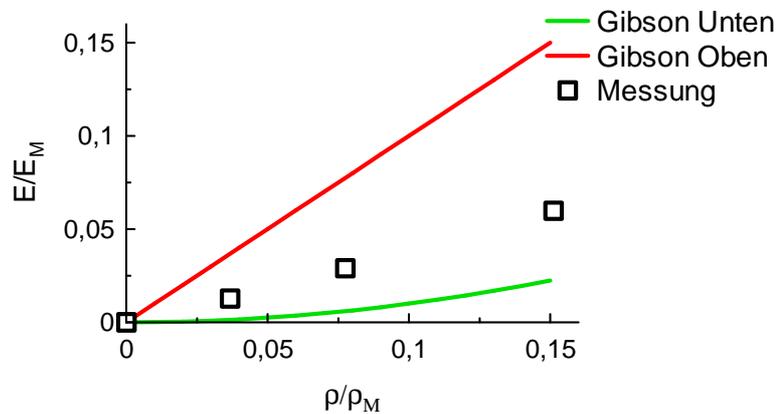


Abb. 3.12 Messwerte und Grenzkurven der Methode von *Gibson* und *Ashby*

Die beiden Grenzfälle des Verfahrens von *Gibson* und *Ashby* ( $\phi_1 = 1, \phi_2 = 0$ ) erzeugen einen großen Bereich möglicher effektiver Elastizitätsmoduln. Um die Anwendbarkeit dieses Verfahrens prüfen zu können, müssen also die möglichen Werte für  $\phi$  eingegrenzt werden. Dazu werden im Folgenden die morphologischen Eigenschaften der Werkstoffserie WF berücksichtigt. Die drei Werkstoffe R51WF, R110WF, und R200WF weisen bei unterschiedlicher Dichte fast gleiche Zellgrößen auf (Kap. 3.2). Abb. 3.3 - Abb. 3.6 zeigen weiterhin, dass bei zunehmender Werkstoffdichte größere Anteile des Matrixmaterials in den Zellstegen zu finden sind. Eine Veränderung der Wandstärken in Abhängigkeit der Dichte ist nicht erkennbar. Für das Modell von *Gibson* und *Ashby* bedeutet dies eine Vergrößerung des Parameters  $\phi$  bei höherer Werkstoffdichte. Die Anwendbarkeit dieses Verfahrens soll nun rekursiv geprüft werden.

Dazu muss der Parameter  $\phi$  für jeden der drei Werkstoffe so bestimmt werden, dass die über das Modell erzeugte Kurve gerade den entsprechenden Messwert schneidet.

Dazu wird die Bestimmungsgleichung für den effektiven Elastizitätsmodul von *Gibson* und *Ashby* nach  $\phi$  aufgelöst und nacheinander die bekannten Messwerte  $((1-c_I), E^*, E_M)$  für die einzelnen Werkstoffe eingesetzt. Für  $\rho_M$  werden die von der Firma Röhme ermittelten Werte (Dichte der Zellstege) eingesetzt. Diese sind abhängig vom Schäumungsgrad (siehe Tab. 3.5).

$$\phi^2 + \frac{1-\phi}{1-c_I} - \frac{E^*}{E_1 \cdot (1-c_I)^2} = 0 \quad (3.38)$$

Durch Lösen der quadratischen Gleichung erhält man unter der Voraussetzung, dass  $\phi$  nur Werte zwischen Null und Eins annehmen darf:

$$\phi = \frac{1}{2 \cdot (1-c_I)} - \sqrt{\frac{1}{4 \cdot (1-c_I)^2} + \frac{E^*}{E_M \cdot (1-c_I)^2} - \frac{1}{1-c_I}} \quad (3.39)$$

Tab. 3.10 zeigt die so ermittelten Werte für den Parameter  $\phi$ :

Werkstoff	$\phi$
R51WF	0,66
R110WF	0,66
R200WF	0,67

Tab. 3.10 Parameter  $\phi$  für verschiedene Werkstoffe

Die ermittelten Werte weisen keine signifikanten Abweichungen auf. Das bedeutet, dass die Methode von *Gibson* und *Ashby* nicht den erwarteten Effekt, nämlich eine Zunahme des Faktors  $\phi$  mit höheren Werkstoffdichten, aufzeigt. Abb. 3.13 zeigt die obere und untere Grenze der Methode nach *Gibson* und *Ashby* sowie den Verlauf mit dem in Tab. 3.10 aufgeführten Parameter  $\phi = 0.66$ .

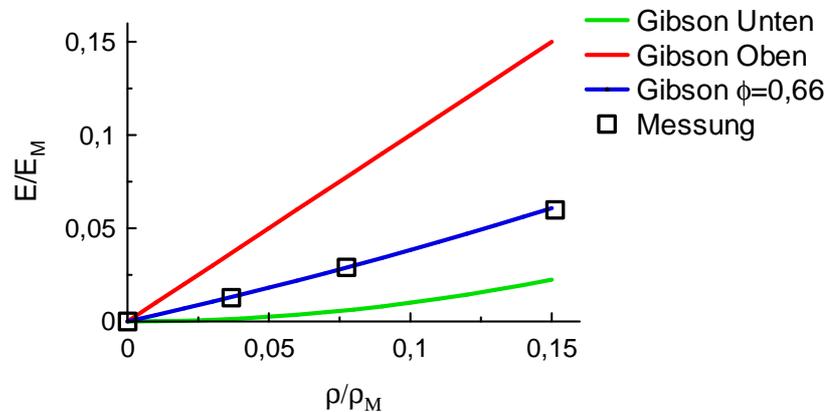


Abb. 3.13 Messwerte, Grenzkurven und berechneter Verlauf der Methode von Gibson und Ashby

Die Untersuchungen haben ergeben, dass nicht alle untersuchten mathematischen Ansätze zur Beschreibung des Elastizitätsverhaltens von Hartschaumstoffen geeignet sind. Qualitativ mit den Messwerten übereinstimmende Ergebnisse lieferte das Modell von *Mori-Tanaka* und die untere Grenze von *Hashin*. Die vorhergesagten Steifigkeiten waren jedoch durchweg zu hoch. Für den bei Schaumstoffen relevanten Bereich der Werkstoffdichte lieferte die generalisierte Selbstkonsistenzmethode (GSKM) die besten Ergebnisse. Die vorhergesagten Steifigkeiten waren hier etwas zu gering, wodurch man sich bei der Bauteilauslegung nach diesem Verfahren auf der sicheren Seite befindet. Die Methode von *Gibson* und *Ashby* erwies sich für die untersuchten Hartschaumstoffe als unbrauchbar, solange nicht sehr detaillierte Kenntnisse über den Aufbau der Schaumstoffzellen vorliegen.

### 3.6 Berechnung der Festigkeiten von Hartschaumstoffen

Zur Berechnung der aus der Mikrostruktur resultierenden Festigkeiten von Hartschaum wird von *Gibson* und *Ashby* [Gibs82] ein empirischer Ansatz analog zur Berechnung der Steifigkeiten vorgeschlagen. Hierbei berücksichtigt die Methode von *Gibson* und *Ashby* die relative Verteilung des Matrixmaterials in den Zellwänden und -stegen mit dem Faktor  $\phi$  ( $\phi = 0 \dots 1$ ). Für einen Schaumstoff mit geschlossenen Zellen aus einem Matrixmaterial, das eine Fließgrenze aufweist, gilt hiernach:

$$\sigma_{pl}^* \approx 0,3 \cdot \sigma_{ys} \cdot \left( \left( \phi \cdot \frac{\rho^*}{\rho_s} \right)^{\frac{3}{2}} + (1-\phi) \cdot \frac{\rho^*}{\rho_s} + \frac{P_0 - P_{at}}{\sigma_{ys}} \right). \quad (3.40)$$

Hierbei wird als Versagen angesehen, wenn unter einer uniaxialen Zug-, Druck- oder Schubbeanspruchung die erste Zellebene bricht oder kollabiert. Diese Spannung hängt von der Festigkeit des Matrixmaterials, dem Verhältnis aus der Dichte des Matrixmaterials und der Dichte des Schaumstoffs und dem in den Zellen vorhandenen Druck ab. Bei der Berechnung der Festigkeit mit der Methode nach *Gibson* und *Ashby* wird kein Unterschied zwischen Zug-, Druck- oder Schubbeanspruchung gemacht. In Abb. 3.14 sind sowohl die obere und die untere Grenze der Methode nach *Gibson* und *Ashby* dargestellt. Des Weiteren zeigt Abb. 3.14 die Berechnung der Festigkeit mit dem für die untersuchten Hartschaumstoffe bestimmten Parameter  $\phi$ . Dieser wurde durch die Anpassung des Modells von *Gibson* und *Ashby* bereits in (Kap. 3.5) bestimmt.

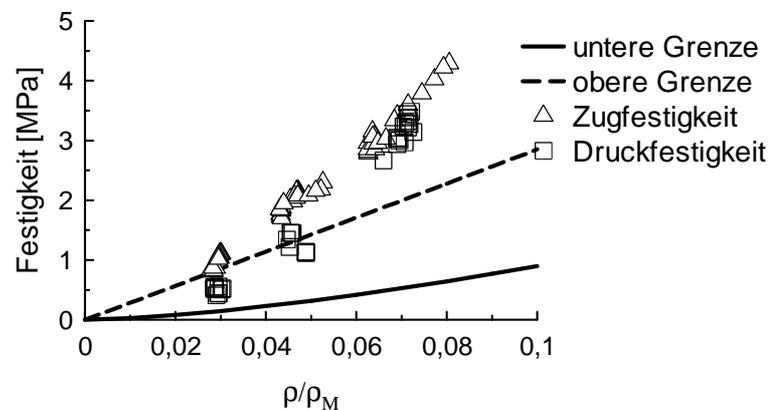


Abb. 3.14 Festigkeiten nach *Gibson* und *Ashby* und gemessene Werte

Es zeigt sich, dass diese Methode die Festigkeiten sowohl für Druck- als auch für Zugbeanspruchung deutlich unterschätzt. Eine Abhängigkeit der aus der Schaumstruktur resultierenden Festigkeiten von der Beanspruchungsart könnte in der Methode nach *Gibson* und *Ashby* durch zwei zusätzliche Koeffizienten realisiert werden.

Eine weitere ebenfalls empirische Vorgehensweise wird im Zusammenhang mit den Versagensversuchen (Kap. 4.1.1) aufgezeigt.

## 4. Mehraxiale Prüfung

### 4.1 Aufbau und Durchführung mehraxialer Versuche

Um Versagens- und Kriechmodelle für mehraxiale Beanspruchungszustände zu entwickeln, wurden uniaxiale und mehraxiale Versuche an den oben beschriebenen Rohrprobekörpern durchgeführt. Für die Versagens- oder Kriechmodelle ist es unerlässlich, dass die unterschiedlichen Beanspruchungszustände an ein und demselben Probekörper realisiert werden. Im folgenden Kapitel werden die Ergebnisse aus den Versuchen zum Versagen und zum Kriechverhalten von Hartschaumstoffen sowohl unter uniaxialer als auch unter mehraxialer Belastung vorgestellt.

Bei allen Versuchen wurde über die Steuerung der Zug-/Druck- und Torsionsmaschine der Verlauf der aufzubringenden Spannungen vorgegeben. Die Auswertung der hieraus resultierenden Dehnungen wurde mit dem in Kap. 3.4 beschriebenen optischen Messsystem durchgeführt. Die Beanspruchungsgeschwindigkeit wurde in Anlehnung an DIN ISO 527-2 zu  $\dot{\sigma} = 2 \frac{\text{MPa}}{\text{min}}$  gewählt. Zur Durchführung der Versuche mit dem rohrförmigen Probekörper ist anzumerken, dass eine Auswertung der Dehnungen bei den Druckversuchen mit dem optischen System nur bis zum ersten Kollaps einer Zellebene durchführbar ist (Abb. 4.1).



Abb. 4.1 Kollaps einer Zellebene bei Druckbeanspruchung

Durch den Zusammenbruch einer Zellebene verformt sich das Muster auf der Oberfläche der Proben so stark, dass es mit der Methode der Grauwertkorrelation nicht

mehr möglich ist eine Korrelation zu erstellen. Somit ist eine Auswertung der Dehnungen ab dem ersten Kollaps einer Zellebene bei der rohrförmigen Geometrie nicht mehr möglich. Um eine Aussage über das weitere Verhalten der Hartschaumproben unter Druckbeanspruchung nach dem ersten Kollaps einer Zellebene treffen zu können, wurden zusätzlich zu den Versuchen an den Rohrprobekörpern Druckversuche nach DIN 53 421 an würfelförmigen Proben durchgeführt. Hierbei können aufgrund der Geometrie des Probekörpers die Verformungen in Achsenrichtung und damit auch die Dehnungen in Achsenrichtung direkt aus dem Verfahrensweg der Traverse der Prüfmaschine bestimmt werden. In Tab. 4.1 sind die durchgeführten Versuche und die verwendeten Probekörper aufgeführt. Für die Zug- und Torsionsversuche liegt dieses Problem nicht vor, da mit der Grauwertkorrelation eine Auswertung bis zum Versagen möglich ist.

Aus den uniaxialen Zug-, Druck- und Torsionsversuchen wurden die Festigkeiten für die jeweilige Beanspruchungsart bestimmt. Die Versuche mit zusammengesetzten Beanspruchungen dienen der abschließenden Validierung des Versagenskörpers.

<i>Werkstoff</i>	<i>Beanspruchungsart</i>	<i>Probekörper</i>
<i>R51WF, R110WF, R200WF</i>	Zug, Druck, Torsion, Zusammengesetzte Beanspruchungen	Rohrprobekörper, Dehnungsmessung über optisches Messsystem
<i>R51WF, R110WF, R200WF</i>	Druck	DIN 53 421 (Würfel, 50 x 50 x 50 mm), Dehnungsmessung aus Traversenweg

Tab. 4.1 Durchgeführte Prüfungen zur Bestimmung des Versagenskörpers

#### 4.1.1 Uniaxiale Versuche bis zum Versagen

Die Ergebnisse für die uniaxialen Versuche hängen sehr stark von der Geometrie der eingesetzten Probekörper ab. Nach DIN ISO 527-2 wird der Zugversuche an einem „Standard-Zugstab“ durchgeführt. Für Druckversuche kommen würfelförmige Probekörper zum Einsatz. Abb. 4.2 zeigt für eine würfelförmige Probe (ROHACELL 51WF) nach DIN ISO 844 bei einer uniaxialen Druckbeanspruchung den Spannungs-Dehnungsverlauf bis zum Bruch. Hierbei stellt sich der für Hartschaumstoffe typische Verlauf ein [Gibs87]: Für kleine Spannungen zeigt der Schaum ein linear elastisches Verhalten, gefolgt von dem „collapse plateau“. Abschließend verdichtet sich die Schaumstruktur und die Spannung steigt stark an. Der linear-elastische Anteil resultiert aus einer Biegung der Zellwände. Das Plateau wird auf einen Kollaps der

Zellen zurückgeführt. Zur Auslegung von Bauteilen ist nur der Bereich bis zum ersten Einbrechen von Zellen von Interesse. Es ist also nicht notwendig, das komplette Spannungs-Dehnungs-Diagramm aufzunehmen. Somit war es möglich, die optische Deformationsmessung einzusetzen.

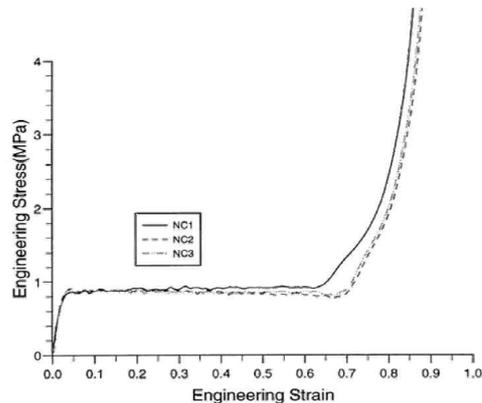


Abb. 4.2 Spannungs-Dehnungs-Diagramm für reine Druckbeanspruchung bis zum Versagen an würfelförmigen Probekörpern für den Hartschaumstoff ROHACELL R51WF [Röhm05]

Um Aussagen über das Verhalten der untersuchten Hartschäume auch unter Zug-, Torsion- und zusammengesetzten Beanspruchungen machen zu können, sind würfelförmige Probekörper ungeeignet. An den rohrförmigen Probekörpern wurden uniaxiale Versuche mit den Beanspruchungsarten Zug, Druck und Torsion bis zum Versagen durchgeführt. In Abb. 4.3 sind Ergebnisse aus Spannungs-Dehnungsversuchen bis zum Bruch für den Hartschaumstoff ROHACELL R51WF dargestellt. Es wurden jeweils 5 Versuche durchgeführt. Die Standardabweichung betrug 2,1 %.

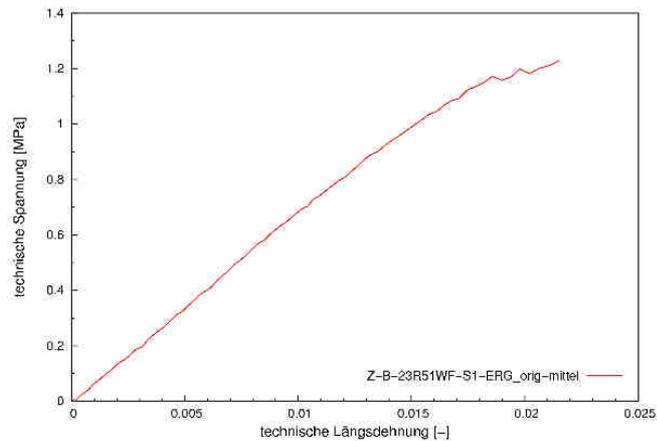


Abb. 4.3 Spannungs-Dehnungs-Diagramm für reine Zugbeanspruchung bis zum Bruch an Rohrprobekörpern für den Hartschaumstoff ROHACELL R51WF

Abb. 4.4 zeigt die Ergebnisse aus einem Druckversuch bis zum Versagen ebenfalls für den Hartschaumstoff ROHACELL R51WF.

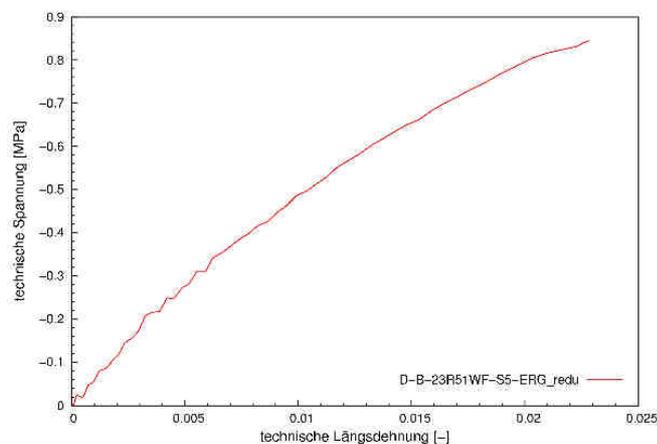


Abb. 4.4 Spannungs-Dehnungs-Diagramm für reine Druckbeanspruchung bis zum Versagen an Rohrprobekörpern für den Hartschaumstoff ROHACELL R51WF

Die Druckversuche können mit der Methode der Grauwertkorrelation, wie oben erwähnt, nur bis zum ersten Kollaps einer Zellebene ausgewertet werden. Es zeigt sich, dass der geprüfte Hartschaum eine deutliche Abhängigkeit von der Beanspruchungsrichtung (Zug oder Druck) aufweist. So liegt die Bruchfestigkeit für den Hartschaumstoff ROHACELL R51WF (niedrige Dichte) bei Zugbeanspruchung über der Bruch-

festigkeit bei Druckbeanspruchung. In Abb. 4.5 ist für den gleichen Schaumstoff das Spannungs-Dehnungs-Diagramm für einen Torsionsversuch bis zum Versagen dargestellt.

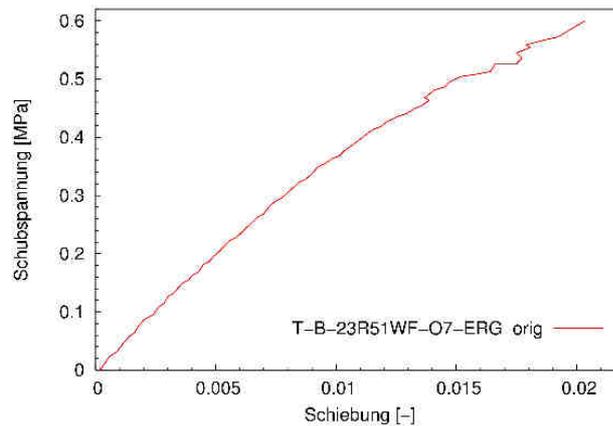


Abb. 4.5 Spannungs-Dehnungs-Diagramm für reine Schubbeanspruchung bis zum Versagen an Rohrprobekörpern für den Hartschaumstoff ROHACELL R51WF

Für die Hartschaumstoffe mit der höheren Dichte (R110WF und R200WF) ist die Bruchfestigkeit bei Zugbeanspruchung niedriger als bei Druckbeanspruchung. Hierauf wird in Kap. 6.1 detailliert eingegangen. In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse aus den uniaxialen Versagensversuchen und die dazugehörigen relativen Standardabweichungen zusammengefasst. Die zugehörigen Spannungs-Dehnungsdiagramme für die Hartschaumstoffe R110WF und R200WF sind im Anhang aufgeführt.

Werkstoff	Zugfestigkeit [MPa]	Stabw. [%]	Druckfestigkeit [MPa]	Stabw. [%]	Schubfestigkeit [MPa]	Stabw. [%]
R51WF	1,25	2,3	0,86	2,9	0,6	2,4
R110WF	3,66	1,7	3,89	3,2	2,19	2,1
R200WF	5,27	2,1	6,84	1,9	4,28	2,2

Tab. 4.2 Durchgeführte Prüfungen zur Bestimmung des Versagenskörpers

Die Abb. 4.6 – 4.8 zeigen für die Hartschaumstoffe der Serie WF, die an dem Rohrprobekörper gemessenen Druck-, Zug- und Schubfestigkeiten bezogen auf die Dichte des geprüften Hartschaumstoffs.

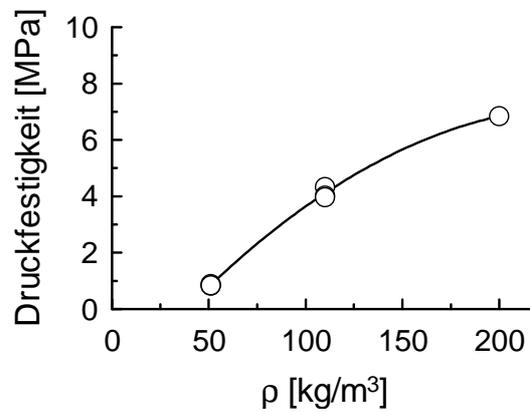


Abb. 4.6 Druckfestigkeit der Hartschaumstoffe der Serie WF für unterschiedliche Dichten

In dieser Darstellung fällt auf, dass die Festigkeiten in dem Bereich  $\rho < 110 \text{ kg/m}^3$  stark abfällt. Man würde erwarten, dass erst für eine Dichte von  $\rho = 0 \text{ kg/m}^3$  keine Festigkeit mehr vorhanden ist. Tatsächlich scheint die Festigkeit schon bei höherer Dichte den Wert Null anzunehmen. Dieser Effekt ist nicht genauer zu untersuchen, da es für diese Hartschaumstoffe nicht möglich ist, Dichten deutlich unter  $\rho < 50 \text{ kg/m}^3$  herzustellen.

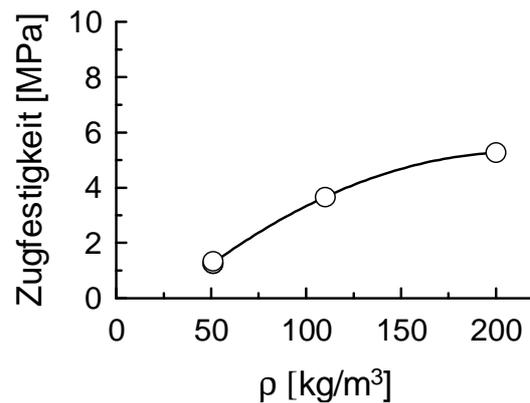


Abb. 4.7 Zugfestigkeit der Hartschaumstoffe der Serie WF für unterschiedliche Dichten

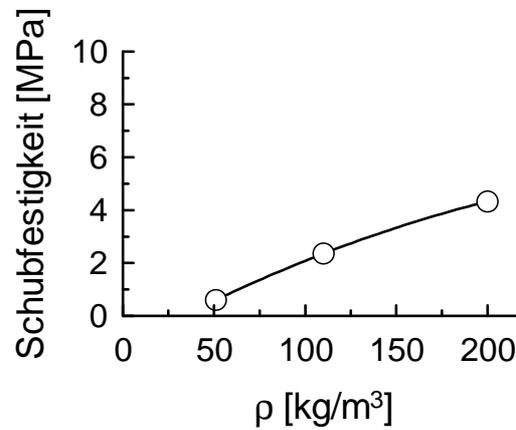


Abb. 4.8 Schubfestigkeit der Hartschaumstoffe der Serie WF für unterschiedliche Dichten

Die gemessenen Werte lassen sich mit guter Übereinstimmung durch quadratische Funktionen der Form

$$\sigma_{D_v} = c_0 + c_1 \cdot \rho + c_2 \cdot \rho^2 \quad (4.1)$$

$$\sigma_{Z_v} = d_0 + d_1 \cdot \rho + d_2 \cdot \rho^2$$

$$\tau_v = e_0 + e_1 \cdot \rho + e_2 \cdot \rho^2$$

abbilden. Ein linearer Ansatz lieferte keine zufrieden stellende Abbildung der gemessenen Ergebnisse, während ein kubischer Ansatz keine signifikante Verbesserung der Korrelation gegenüber dem quadratischen Ansatz lieferte. Es ergeben sich für die hier untersuchten Hartschaumstoffe der Serie WF die in der folgenden Tabelle aufgeführten Koeffizienten mit der dazugehörigen Güte der Korrelation.

Koeffizient		R
$c_0$ [MPa]	-2,8821	0,98
$c_1$ $\left[ \frac{\text{MPa} \cdot \text{m}^3}{\text{kg}} \right]$	0,0818	
$c_2$ $\left[ \frac{\text{MPa} \cdot \text{m}^6}{\text{kg}^2} \right]$	-0,0002	

<i>Koeffizient</i>		<i>R</i>
$d_0$ [MPa]	-1,6344	0,99
$d_1$ $\left[ \frac{\text{MPa} \cdot \text{m}^3}{\text{kg}} \right]$	0,0647	
$d_2$ $\left[ \frac{\text{MPa} \cdot \text{m}^6}{\text{kg}^2} \right]$	-0,0001	
$e_0$ [MPa]	-1,2094	0,99
$e_1$ $\left[ \frac{\text{MPa} \cdot \text{m}^3}{\text{kg}} \right]$	0,0381	
$e_2$ $\left[ \frac{\text{MPa} \cdot \text{m}^6}{\text{kg}^2} \right]$	-5,24E-05	

Tab. 4.3 Koeffizienten zur Berechnung der Festigkeiten der Serie WF

In Kap. 6 wird eine Theorie zur Beschreibung des Versagensverhaltens entwickelt. Hierbei sollen die für Hartschaumstoffe typischen Phänomene, wie die Kompressibilität oder unterschiedliches Verhalten bei Zug-, Druck oder Torsionsbeanspruchung abgebildet werden. Hierfür sind die Kennwerte  $k$  und  $d$  von Interesse und sollen an dieser Stelle definiert werden. Diese dienen zur Bestimmung des Versagenskörpers (Kap. 6) und beschreiben das Verhältnis von Druck- bzw. Schubverhalten bezogen auf das Verhalten unter einer Zugbeanspruchung [Kolu06].

$$k_V = \sqrt{3} \cdot \frac{\tau_V}{\sigma_{Z_V}}, \quad d_V = \frac{|\sigma_{D_V}|}{\sigma_{Z_V}} \quad (4.2)$$

Der Index  $V$  bezeichnet hier das Versagen. In diesem Fall geben  $d_V$  und  $k_V$  also den Unterschied zwischen der Druck- und der Zugfestigkeit ( $d_V$ ) und der Schub- und der Zugfestigkeit ( $k_V$ ) wieder. Tab. 4.4 zeigt für die uniaxialen Versagensversuche die gemessenen Kennwerte  $k_V$  und  $d_V$ .

Werkstoff	$k_V$	$d_V$
R51WF	0,86	0,66
R110WF	1,13	1,16
R200WF	1,43	1,23

Tab. 4.4 Kennwerte  $d_V$  und  $k_V$  für die eingesetzten Hartschäume

Die Ergebnisse zeigen, dass für Hartschäume mit einer geringen Dichte, das Versagen unter Druckbeanspruchung früher auftritt als unter Zugbeanspruchung. Für Hartschäume mit höherer Dichte kehrt sich dieser Effekt gerade um, so dass eine Zugbeanspruchung eher zum Versagen führt, als eine reine Druckbeanspruchung. Die untersuchten Hartschäume mit hoher Dichte verhalten sich also eher wie das Polymer, aus dem sie hergestellt wurden, während die Hartschäume niedrigerer Dichte ein eher typisches Schaumverhalten aufweisen. Die Erklärung für diese Umkehr des Versagensverhaltens unter Zug- und Druckbeanspruchung in Abhängigkeit von der Dichte der Hartschaumstoffe resultiert aus der Mikrostruktur. Bei den Hartschaumstoffen mit einer geringen Dichte ist deutlich weniger Material in den Zellwänden konzentriert als bei den Hartschaumstoffen mit hoher Dichte (Kap. 3.2). Diese neigen schon bei geringen Druckspannungen zum Beulen, zeigen also ein Stabilitätsversagen. Sind die Zellwände dicker ausgeprägt, stellt sich der Stabilitätsverlust erst bei deutlich höheren Spannungen ein, und es überwiegt der Effekt, dass die Matrix auf Druck höher belastet werden kann als auf Zug. Der Effekt kehrt sich also um.

Ein Zusammenhang der Kennwerte  $k_V$  und  $d_V$  mit der Dichte des eingesetzten Hartschaumstoffs kann mit (4.1) durch

$$k_V = \sqrt{3} \cdot \frac{|e_0 + e_1 \cdot \rho + e_2 \cdot \rho^2|}{d_0 + d_1 \cdot \rho + d_2 \cdot \rho^2}, \quad d_V = \frac{c_0 + c_1 \cdot \rho + c_2 \cdot \rho^2}{d_0 + d_1 \cdot \rho + d_2 \cdot \rho^2} \quad (4.3)$$

hergestellt werden. In Abb. 4.9 sind die nach (4.3) berechneten Kennwerte  $k_V$  und  $d_V$  in Abhängigkeit von der Dichte des eingesetzten Hartschaumstoffs aufgeführt.

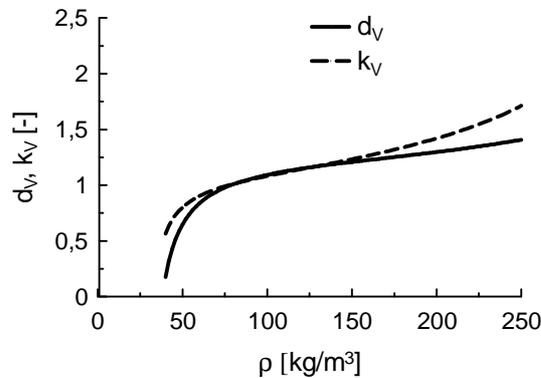


Abb. 4.9 Kennwerte  $k_V$  und  $d_V$  für die Serie WF in Abhängigkeit von der Dichte des eingesetzten Hartschaumstoffs

Auf diese Art ist es nun möglich, die für die weiteren Versagensmodelle benötigten Kennwerte  $k_V$  und  $d_V$  in Abhängigkeit vom verwendeten Hartschaumstoff zu bestimmen.

#### 4.1.2 Mehraxiale Versuche bis zum Versagen

In weiteren Untersuchungen wurden zusammengesetzte Beanspruchungszustände bis zum Versagen des Hartschaumstoffs durchgeführt. Um die erhaltenen Ergebnisse zu analysieren, bietet sich eine Darstellung an, bei der auf der Abszisse die Werte für das Versagen bei Zug- oder Druckbeanspruchung und auf der Ordinate der Versagenswert für Schubbeanspruchung aufgeführt sind. Diese Darstellung macht es möglich, sowohl die uniaxialen als auch die zusammengesetzten Beanspruchungen, die an der Zug-, Druck- und Torsionsprüfanlage zu realisieren sind, in einer Ebene darzustellen. In Tab. 4.5 sind die signifikanten Punkte der  $\sigma_{11}$ - $\tau_{12}$ -Ebene dargestellt.

Druckbeanspruchung	$\sigma_{11} < 0$	$\tau_{12} = 0$
Zugbeanspruchung	$\sigma_{11} > 0$	$\tau_{12} = 0$
Schubbeanspruchung	$\sigma_{11} = 0$	$\tau_{12} > 0$
Kombination Zug-Schub	$\sigma_{11} > 0$	$\tau_{12} > 0$
Kombination Druck-Schub	$\sigma_{11} < 0$	$\tau_{12} > 0$

Tab. 4.5 Signifikanten Punkte der  $\sigma_{11}$ - $\tau_{12}$ -Ebene

Abb. 4.10 – 4.12 zeigen die gemessenen Versagenswerte in der  $\sigma_{11}$ - $\tau_{12}$ -Ebene für die Materialien R51WF, R110WF und R200WF.

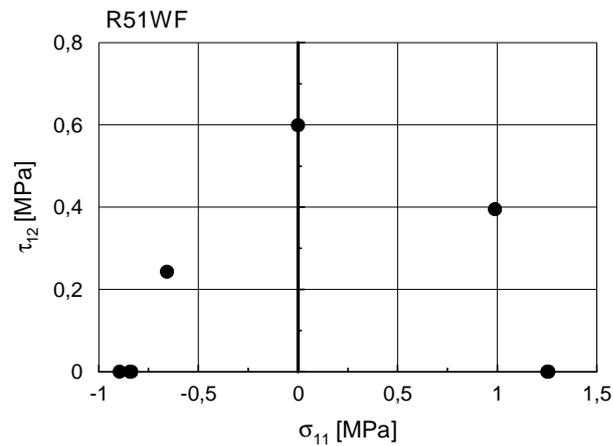


Abb. 4.10 Versagenswerte in der  $\sigma_{11}$ - $\tau_{12}$ -Ebene für das Material R51WF

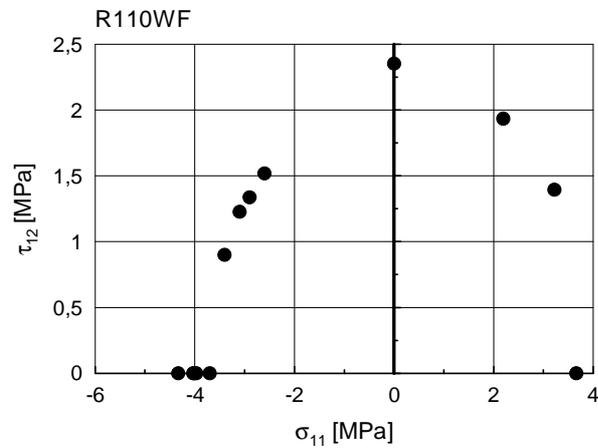


Abb. 4.11 Versagenswerte in der  $\sigma_{11}$ - $\tau_{12}$ -Ebene für das Material R110 WF

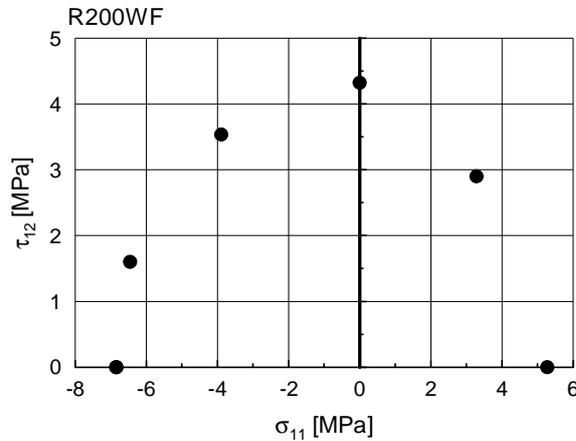


Abb. 4.12 Versagenswerte in der  $\sigma_{11}$ - $\tau_{12}$ -Ebene für das Material R200WF

Der zu entwickelnde Versagenskörper stellt in der gewählten  $\sigma_{11}$ - $\tau_{12}$ -Ebene geometrisch eine Linie dar, die möglichst alle aus den Versuchen bestimmten Versagenswerte beinhalten sollte. Hierbei sind dann alle Beanspruchungszustände innerhalb der Linie „erlaubte“ Beanspruchungszustände während alle Beanspruchungszustände außerhalb der Linie zu einem Versagen der Struktur des Hartschaumstoffs führen. In Kap. 6.1 wird gezeigt, wie die Versagensfläche abgebildet werden kann.

### 4.1.3 Kriechversuche

Die Kriechversuche wurden wie die Versagensversuche an den Werkstoffen ROHACELL R51WF, R110WF und R200WF durchgeführt. Die Auswertung der Dehnungen erfolgte ebenfalls nach der Methode der Grauwertkorrelation. An die uniaxialen Zug- und Druckversuche wurden im Weiteren Kriechfunktionen angepasst. Torsionsversuche und Versuche mit zusammengesetzten Beanspruchungen dienten der abschließenden Validierung der entwickelten Theorie zur Beschreibung des Kriechverhaltens unter zusammengesetzten Beanspruchungen (Kap. 5). Tab. 4.6 zeigt eine Übersicht der durchgeführten uniaxialen Zug- und Druckversuche.

Werkstoff	Zugspannungen [MPa]	Druckspannungen [MPa]
R51WF	0,25 ; 0,5 ; 0,75	0,25 ; 0,5
R110WF	0,5 ; 1,0 ; 1,25 ; 1,5	0,25 ; 0,5 ; 1,0
R200WF	0,5 ; 1,0 ; 1,5 ; 2,0	0,5 ; 1,0 ; 1,5 ; 2,0

Tab. 4.6 Durchgeführte Prüfungen zur Bestimmung des Kriechpotenzials

Jeder der verwendeten Probekörper wurde nur einmal belastet. Bei allen Versuchen wurde dieselbe Beanspruchungsgeschwindigkeit  $\dot{\sigma} = 2 \frac{\text{MPa}}{\text{min}}$  gewählt.

Im Folgenden soll das Kriechverhalten der einzelnen Werkstoffe zeit- und spannungsabhängig sowie getrennt für Zug- und Druckbeanspruchungen, untersucht werden. Dazu werden zwei mathematische Ansätze zur Beschreibung der Kriechdeformation auf ihre Anwendbarkeit überprüft.

Bei den Versuchen wurde die Beanspruchung zunächst mit konstanter Beanspruchungsgeschwindigkeit gesteigert und anschließend auf dem Sollwert konstant gehalten. Der Beginn des Kriechens wird durch den Zeitpunkt definiert, an welchem die Prüfmaschine zum ersten Mal die Sollspannung erreicht. Die bis zu diesem Zeitpunkt erreichte Dehnung wird als elastische Dehnung  $\varepsilon_0$  (vgl. (2.7)) aufgefasst und separiert, d. h. Zeit- und Dehnungssignal werden zu Beginn des Kriechens zu Null gesetzt. So können Kriechversuche mit unterschiedlichen Beanspruchungen direkt verglichen werden.

#### 4.1.4 Kriechfunktionen

Im Folgenden werden zwei Methoden zur Beschreibung des uniaxialen Kriechens untersucht. Dabei wird zunächst geprüft, wie gut sich der berechnete Verlauf durch geeignete Wahl der freien Parameter an eine gemessene Kurve anpassen lässt. Die Bewertung der Korrelation zwischen Messwerten und einer angepassten Kurve reicht jedoch zur Beurteilung der Methoden nicht aus. Ob eine Kriechfunktion die Werkstoffeigenschaften auch über den betrachteten Zeitbereich hinaus gut wiedergibt, zeigt sich erst, wenn eine Extrapolation vorgenommen wird und die extrapolierten Werte in guter Übereinstimmung mit Messwerten stehen.

### Findley-Ansatz

Das Verfahren von *Findley* [Find44] berechnet die Gesamtdehnung  $\varepsilon$  aus der Spontandeformation  $\varepsilon_0$ , der Zeit  $t$ , sowie zwei spannungsabhängigen Werkstoffkonstanten  $m$  und  $n$ :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + m \cdot t^n \quad (4.4)$$

Für die Kriechdehnung  $\varepsilon^{Cr}$  gilt daher:

$$\varepsilon^{Cr} = m \cdot t^n \quad (4.5)$$

Das Verfahren soll am Beispiel eines Langzeitzugversuches mit dem Werkstoff R110WF und der Spannung  $\sigma = 1$  MPa bewertet werden. Abb. 4.13 zeigt die Anpassung nach *Findley* an eine gemessene Kurve. Die gesamte Versuchsdauer beträgt ca. 28 Stunden. Mit der Methode von *Findley* lässt sich der Dehnungsverlauf gut beschreiben. Der mittlere Fehler beträgt ca. 3%. Eine Extrapolation auf andere Spannungswerte kann mit dem Ansatz nach *Findley* nicht vorgenommen werden.

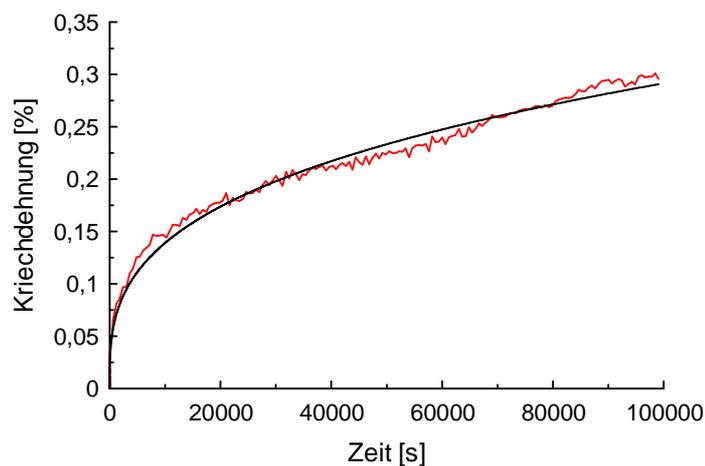


Abb. 4.13 Findley-Approximation

### Bailey-Norton-Funktion

Das Verfahren von *Bailey-Norton* [Nort29] berechnet die Kriechdehnung  $\varepsilon_{cr}$  aus der Zeit  $t$ , der aufgetragenen Spannung  $\sigma$  und drei werkstoffabhängigen Parametern ( $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ )

$$\varepsilon^{Cr} = A_1 \cdot \sigma^{A_2} \cdot t^{A_3} \quad (4.6)$$

mit  $A_2 \geq 1$  und  $0 \leq A_3 \leq 1$ .

Abb. 4.14 zeigt eine mit diesem Verfahren an den Dehnungsverlauf durchgeführte Approximation.

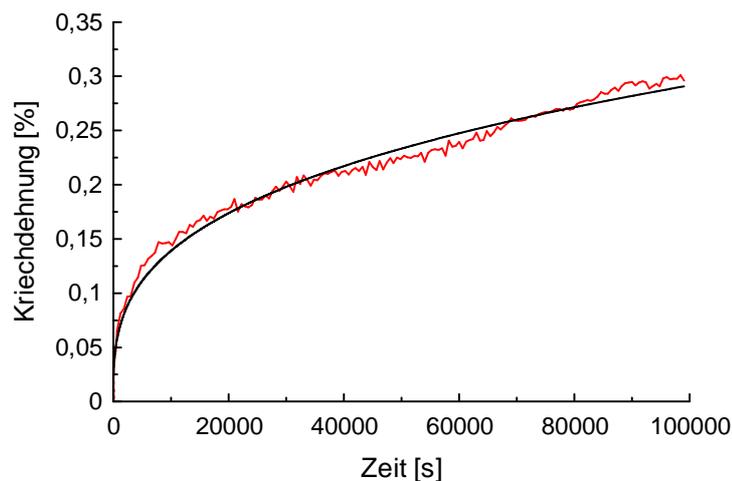


Abb. 4.14 Bailey-Norton-Approximation

Die werkstoffabhängigen Koeffizienten  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  der *Bailey-Norton*-Funktion wurden durch eine Approximation bestimmt, welche die Koeffizienten gleichzeitig an vier Messdatensätze mit unterschiedlichen Zugspannungen anpasst. Abb. 4.15 zeigt die Approximation an die vier gemessenen Dehnungsverläufe beispielhaft für den Hartschaumstoff R110WF. Die Korrelationskoeffizienten der Approximationen an die vier gemessenen Kurven zeigen, dass die *Bailey-Norton*-Koeffizienten die Werkstoffeigenschaften mit einer hohen Genauigkeit wiedergeben, vgl. Tab. 4.7.

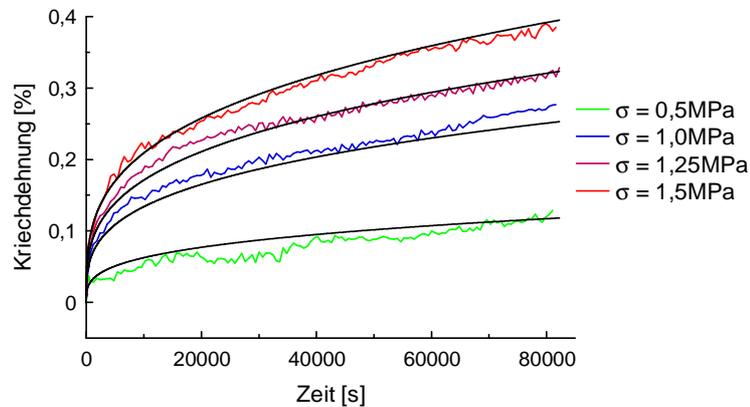


Abb. 4.15 Bestimmung der Bailey-Norton-Koeffizienten aus vier Zugversuchen am Werkstoff ROHACELL R110WF

Werkstoff	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$R$
R51WF	$3,89 \cdot 10^{-2}$	1,67	0,31	0,97
R110WF	$7,63 \cdot 10^{-3}$	1,10	0,31	0,94
R200WF	$2,90 \cdot 10^{-3}$	1,01	0,32	0,90

Tab. 4.7 Bailey-Norton-Koeffizienten für R110WF

Aus den durchgeführten Versuchen zeigt sich, dass die untersuchten Hartschäume für Zug- und Druckbeanspruchung ein unterschiedliches Kriechverhalten aufweisen. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass sich die Abhängigkeit des Werkstoffverhaltens von der Beanspruchungsrichtung durch die Erweiterung der *Bailey-Norton*-Funktion um einen Faktor  $\alpha$  beschreiben lässt. Für Druckbeanspruchung ergibt sich die Kriechfunktion von *Bailey-Norton* mit den aus Zugversuchen ermittelten Parametern dann zu:

$$\varepsilon^{Cr_{Druck}} = \alpha \cdot A_1 \cdot \sigma^{A_2} \cdot t^{A_3} \quad (4.7)$$

Unter Verwendung des Faktors  $\alpha$  als einzigem freiem Parameter wurde eine Approximation mit den ermittelten *Bailey-Norton*-Koeffizienten an zwei Langzeitdruckversuche mit unterschiedlichen Spannungen durchgeführt. Abb. 4.16 zeigt beispielhaft für den Werkstoff R110WF die berechneten Kurven und die gemessenen Kriechverläufe.

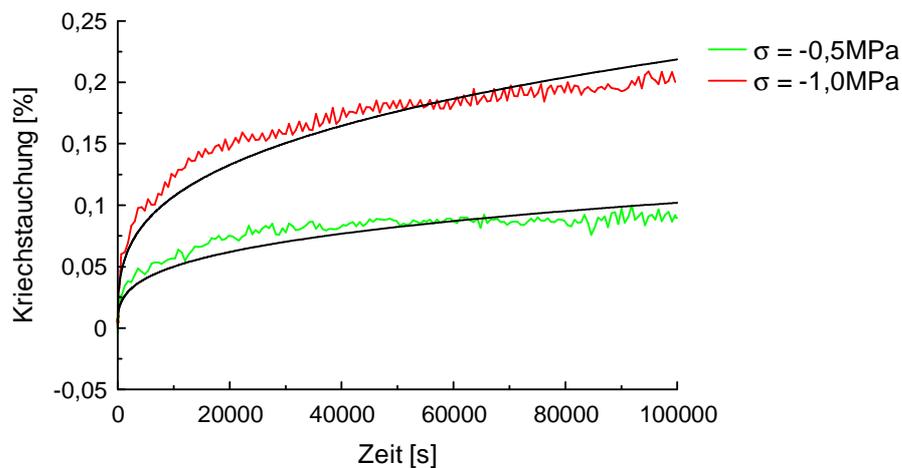


Abb. 4.16 Ermittlung des Faktors  $\alpha$  für den Werkstoff ROHACELL R110WF

Die berechneten und gemessenen Werte zeigen eine gute Übereinstimmung. Die Abhängigkeit des Kriechverhaltens der Werkstoffe für die unterschiedlichen Beanspruchungsrichtungen kann für den Hartschaumstoff R110WF in guter Näherung durch den Faktor  $\alpha$  beschrieben werden. Für die Hartschaumstoffe R51WF und R200WF wurde in analoger Weise vorgegangen. Die Messkurven und die approximierten *Bailey-Norton*-Funktionen sind im Anhang aufgeführt.

Der Faktor  $\alpha$  zeigt eine Abhängigkeit von der Werkstoffdichte. Beim Hartschaumstoff mit der geringsten Dichte (R51WF) ist die Abhängigkeit des Kriechverhaltens von der Beanspruchungsrichtung am stärksten ausgeprägt. Bei Druckbeanspruchung treten hier etwa doppelt so große Kriechdehnungen auf, wie bei einer Zugbeanspruchung in gleicher Höhe ( $\alpha = 2,0$ ). In Tab. 4.8 sind die Faktoren  $\alpha$  für alle drei Werkstoffe aufgeführt.

<i>Werkstoff</i>	$\alpha$
<i>R51WF</i>	2,0
<i>R110WF</i>	0,81
<i>R200WF</i>	0,94

Tab. 4.8 Werkstoffabhängiger Faktor  $\alpha$

Analog zu den Versuchen zum Versagen der Hartschaumstoffe zeigt sich eine Abhängigkeit der Kennwerte vom vorliegenden Beanspruchungszustand. Wiederum zeigt der Hartschaumstoff mit der geringen Dichte eine signifikant stärkere Kriechneigung unter Druck als unter Zugbeanspruchung. Die Zunahme des Faktors  $\alpha$  bei geringer Dichte des Hartschaumstoffs kann auf die Mikrostruktur zurückgeführt werden. In den Zellwänden des Hartschaumstoffs R51WF ist deutlich weniger Material konzentriert als bei den Hartschaumstoffen mit höherer Dichte (R110WF, R200WF). Diese neigen bei gleicher Beanspruchung stärker zum Kriechen als die dickeren Zellwände der Hartschaumstoffe R110WF und R200WF. Für die untersuchten Hartschaumstoffe mit einer höheren Dichte dreht sich dieser Effekt um, so dass der Hartschaumstoff R200WF eine stärkere Kriechneigung unter Zug- als unter Druckbeanspruchung aufweist.

## 5. Modellierung des Versagens- und Kriechverhaltens von Hartschaumstoffen

Grundsätzlich stellen sich zwei Fragen bei der Beschreibung des Werkstoffverhaltens auf: Zum einen ist es von Interesse, das aus einer Beanspruchung resultierende Deformationsverhalten der zu untersuchenden Materialien zu beschreiben, zum anderen interessiert das Versagensverhalten der Werkstoffe. Im Folgenden wird eine Theorie zur Beschreibung des Versagens- und des Kriechverhaltens der im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Hartschaumstoffe dargestellt. Die zur Beschreibung eingesetzten Potenzialkörper basieren auf der Invariantenschreibweise. Diese bietet sich an, da die Invarianten nur vom Spannungszustand und nicht vom gewählten Koordinatensystem abhängen [Alte95], d. h. sie sind gegen eine „Drehung“ des Spannungszustandes invariant. Eine ausführliche Zusammenstellung verschiedener Potenzialkörper liefert [Kolu06]. Die Theorie, auf welcher die Modelle zur Beschreibung des Versagens- und Kriechverhaltens aufbauen, basiert auf den gleichen Grundprinzipien, wobei sich der Versagenskörper als ein Grenzfall ableiten lässt. Im Folgenden wird mit der Erklärung des isotropen Kriechens begonnen.

### 5.1 Isotropes Kriechen - Grundgleichungen

Die aus einer äußeren Belastung resultierende Gesamtdehnung  $\varepsilon_{ij}$  setzt sich nach (2.7) aus einem elastischen  $\varepsilon_{ij}^{el}$  und einem zeitabhängigen Verformungsanteil  $\varepsilon_{ij}^{cr}$  zusammen.

Der elastische Anteil kann nach dem *Hooke*'schen Gesetz beschrieben werden. Für den Kriechdehnungsanteil kann der in Kap. 4.1.4 beschriebene Ansatz nach *Bailey-Norton* verwendet werden. Dieser wird abgeleitet und für die Beschreibung der Dehngeschwindigkeiten von Hartschaumstoffen in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  und der Zugspannung  $\sigma_z = \sigma_{11}$  eingesetzt [Cosm94, Krau80, Nort29]:

$$\dot{\varepsilon}_{11}^{cr} = e \cdot \sigma_{11}^f \cdot t^g, \quad f > 1, \quad -1 < g \leq 0 \quad (5.1)$$

Zur Beschreibung des Kriechverhaltens isotroper, quasi-homogener, kompressibler Werkstoffe wird die Existenz eines Potenzials

$$\Phi_n(\sigma_{ij}) = \Phi_n(I_1, I_2, I_3), \quad (5.2)$$

welches eine Funktion der drei Spannungsinvarianten ist

$$I_1 = \sigma_{kk}, \quad I_2 = \sigma'_{ij} \sigma'_{ji} / 2, \quad I_3 = \sigma'_{ij} \sigma'_{jk} \sigma'_{ki} / 3, \quad (5.3)$$

vorausgesetzt, wobei  $\sigma_{kk}$  und  $\sigma'_{ij}$  die Komponenten des Spannungstensors, aufgeteilt in Axiator (sphärischer Tensor) und in Deviator, sind [Alte95]. Die Ableitungen für die Komponenten des Potentials [Back83] ergeben sich zu:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma'_{ij}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma'_{ip} \sigma'_{pj} - \frac{1}{3} \cdot \sigma'_{lp} \sigma'_{pl} \delta_{ij}. \quad (5.4)$$

Durch das Potenzial (5.2) ist der vorliegende Spannungszustand mit der Dehnungsgeschwindigkeit  $\dot{\epsilon}_{ij}^{cr}$  wie folgt verknüpft [Alte95, Zycz81]

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{cr} = \dot{\lambda} \cdot \partial \Phi_n / \partial \sigma_{ij}. \quad (5.5)$$

Das Potenzial (5.2) definiert eine konvexe Oberfläche um die Raumdiagonale (hydrostatische Achse) im Spannungsraum (Abb. 5.1). Aufgrund der Isotropie hat diese Oberfläche mindestens drei Symmetrieebenen, die durch die Raumdiagonale und die entsprechenden Koordinatenachsen  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  und  $\sigma_{33}$  laufen [Kraw86]. Der Faktor  $\dot{\lambda}$  wird aus der Gegenüberstellung von (5.1) und (5.5) im Fall der einachsigen Zugbeanspruchung  $\sigma_I$  für die Hauptrichtung  $\dot{\epsilon}_{11}^{cr}$  bestimmt:

$$\dot{\epsilon}_{11}^{cr} = \dot{\lambda} \cdot \partial \Phi_n / \partial \sigma_I \quad (5.6)$$

Um eine Äquivalenz zwischen dem uniaxialen und dem mehrachsigen Spannungszustand zu erzeugen, wird das Potenzial (5.2) als eine Funktion der Vergleichsspannung  $\sigma_v$  aufgefasst [Alte95]:

$$\Phi_n(I_1, I_2, I_3) = \sigma_V^n. \quad (5.7)$$

Zur Ermittlung der freien Werte des Potentials kann im Fall des Kriechens die viskoelastische Querkontraktionszahl  $v^{cr}$  herangezogen werden:

$$v^{cr} = -\dot{\epsilon}_q^{cr} / \dot{\epsilon}_l^{cr} \quad (5.8)$$

Dabei muss generell zwischen den Querkontraktionszahlen bei Zug (+) und Druck (-) unterschieden werden:

$$v_+^{cr} \neq v_-^{cr}. \quad (5.9)$$

Die freien Werte des Potentials (5.2) werden so definiert, dass die viskoelastischen Querkontraktionszahl bei Zug und Druck

$$v^{cr} \in ]-1; 0,5] \quad (5.10)$$

nicht überschritten werden.

Im Allgemeinen wird zwischen dem Potential  $\Phi_n$  und der Versagensfläche  $\Omega_n(I_1, I_2, I_3)$ , die das Versagensverhalten eines Materials beschreibt, unterschieden:

$$\Phi_n \neq \Omega_n \quad (5.11)$$

Dies führt auf die Klasse der nichtassoziierten Kriechgesetze [Alte95, Chen88]. Durch das Zusammenlegen der Flächen

$$\Phi_n = \Omega_n \quad (5.12)$$

wird ein assoziiertes Gesetz definiert [Alte95, Back83, Bett02, Zycz81]. Für die hier untersuchten Hartschaumstoffe wird eine Versagensfläche  $\Omega_n(I_1, I_2, I_3)$  und ein Potential  $\Phi_n(I_1, I_2, I_3) = \sigma_V^n$  zur Beschreibung des Kriechverhaltens vorgestellt.

Die zur Beschreibung des Versagenskörpers notwendigen Kennwerte können aus den Festigkeitsverhältnissen [Bard82] bestimmt werden. Die Kennwerte zur Beschreibung des Potentials ergeben sich aus dem Vergleich der Kriechgeschwindigkeiten [Kolu06].

## 5.2 Kompressibles Materialmodell $\Phi_2$

Für Hartschaumstoffe ist bekannt, dass sie sowohl für das Versagen als auch für das Kriechverhalten eine Anhängigkeit vom hydrostatischen Spannungszustand aufweisen und im Grenzfall unter allseitiger Zug- oder Druckbeanspruchung versagen [Desh01, Gibs00, Giou00, Oech03, Schl74]. Sie zeigen also ein kompressibles Materialverhalten. Im Folgenden soll ein Überblick über die Modelle, die ein kompressibles Materialverhalten beschreiben, gegeben werden.

Die einfachsten Modelle (5.2) stellen die rotationssymmetrischen Potentiale, die eine Symmetrie bzgl. der hydrostatischen Achse aufweisen, dar [Kolu06]. Der allgemeine Fall dieses Potential ist

$$\Phi_2 = \frac{3 \cdot I_2' + a_1 \cdot \sigma_V \cdot I_1 + a_2 \cdot I_1^2}{1 + a_1 + a_2} = \sigma_V^2 \quad (5.13)$$

Dieses Potential ist eine Funktion der ersten Spannungsinvariante und der zweiten deviatorischen Invariante. Die materialspezifischen Größen  $a_1$  und  $a_2$  müssen durch Experimente festgelegt werden.

Es zeigt sich [Kolu05], dass grundsätzlich

$$a_2 \geq 0 \quad (5.14)$$

und

$$a_1 \in \left[ -(1 + a_2), -\frac{2 \cdot a_2 \cdot (1 + a_2)}{a_2 - 1} \right] \quad (5.15)$$

sein sollte.

Dieses Modell beinhaltet das Konus-, das Hyperboloid- und die Paraboloidpotenziale [Back83, Bard82, Kolu05, Sara84]. Diese Formen von (5.13) sind für die Beschreibung des Deformationsverhaltens von Hartschaumstoffen ungeeignet, da sie die Spannungen bei einer hydrostatischen Druckbelastung nicht beschränken und unzulässige Werte für die Querkontraktion beim Kriechen  $v_-^{cr}$  liefern [Kolu05, Schl84].

Das Ellipsoidpotenzial (5.13) beinhaltet kompressibles Verhalten und unterschiedliches Verhalten bei Zug- und Druckbeanspruchung. Im Fall

$$a_1 = 0, \tag{5.16}$$

entspricht das Ellipsoidpotenzial (5.13) dem Potenzial von *Beltrami* (Abb. 5.1).

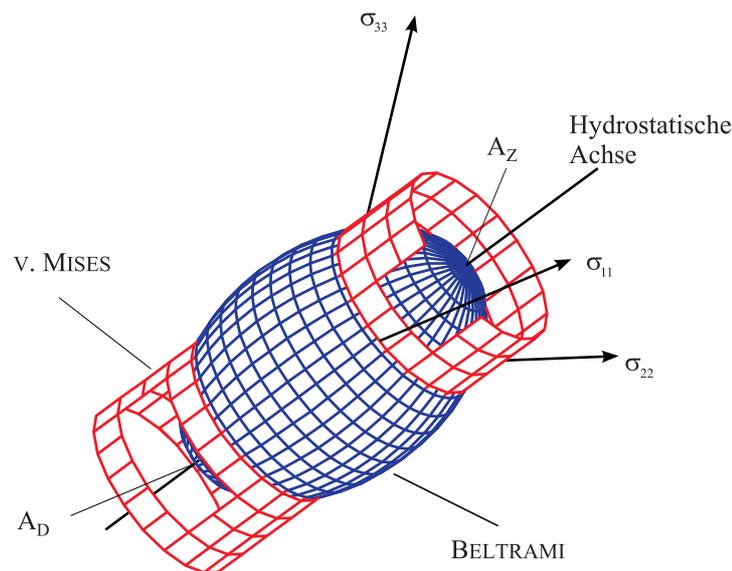


Abb. 5.1 Potenzial nach v. Mises und BELTRAMI im Spannungsraum:  
 $A_D$  – allseitiger Druck,  $A_Z$  – allseitiger Zug [Kolu05]

In Abb. 5.2 sind zur Veranschaulichung drei unterschiedliche Varianten des Potenzialkörpers dargestellt. Hierbei wurde die Kriech-Querkontraktionszahl bei einer reinen Zugbeanspruchung auf  $v_+^{cr} = 0,1$  festgelegt und dann die Kriechquerkontraktionszahl für eine uniaxiale Druckbeanspruchung variiert. Zur Darstellung wird eine orthogonale Koordinatentransformation durchgeführt. Dazu werden die Koordinaten  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  eingeführt, die mit  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  und  $\sigma_{33}$  in folgender Beziehung stehen [Bett02]:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}\theta_3, \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_1 + 0 \cdot \theta_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}\theta_3, \\ \sigma_{33} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\theta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}\theta_3.\end{aligned}\tag{5.17}$$

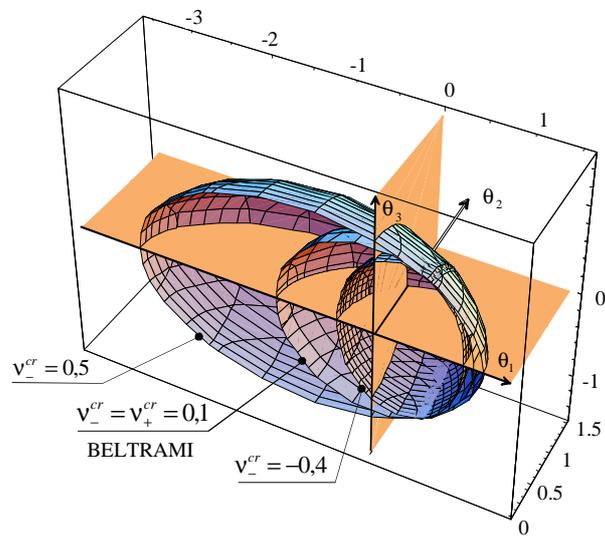


Abb. 5.2 Ellipsoide  $\Phi_2$  nach orthogonaler Transformation

Die freien Werte  $a_1$  und  $a_2$  wurden durch die Querkontraktionen beim Kriechen ausgerechnet:

$$v_+^{cr} = 0,1 \text{ f\u00fcr alle vorgestellten Modelle, } v_-^{cr} \text{ wurde variiert [Kolu05]}$$

F\u00fcr weitere Berechnungen werden zus\u00e4tzlich zu den Werten  $k$  und  $d$  weitere charakteristische Werte f\u00fcr die wichtigsten Spannungszust\u00e4nde ( $a_D$  und  $a_Z$  f\u00fcr allseitigen, gleichm\u00e4\u00dfigen Druck und Zug), die sich aus der allgemeinen Form f\u00fcr  $\Phi_2$  (5.13) ergeben, eingef\u00fchrt:

$$a_D = \frac{|\sigma_{AD}|}{\sigma_Z}, \quad a_Z = \frac{\sigma_{AZ}}{\sigma_Z}.\tag{5.18}$$

Diese Verhältnisse ermöglichen eine direkte Gegenüberstellung der Eigenschaften von unterschiedlichen Materialien. Für das Modell nach *v. Mises* mit  $a_1 = a_2 = 0$  ergibt sich z. B.:

$$k = d = 1, \quad a_D = -\infty, \quad a_Z = +\infty. \quad (5.19)$$

Die charakteristischen Werte ergeben sich aus (5.13) durch den Vergleich der Spannungszustände mit dem uniaxialen Zug  $\sigma_Z = \sigma_V$ :

$$\Phi_n(\tau) = \Phi_n(\sigma_Z), \quad \Phi_n(\sigma_D) = \Phi_n(\sigma_Z), \quad (5.20)$$

$$\Phi_n(\sigma_{AD}) = \Phi_n(\sigma_Z), \quad \Phi_n(\sigma_{AZ}) = \Phi_n(\sigma_Z),$$

was zuerst auf die quadratischen Gleichungen

$$\Phi_2(\tau) = \frac{3 \cdot \tau^2}{1 + a_1 + a_2} = \sigma_V^2 \quad (5.21)$$

$$\Phi_2(\sigma_D) = \frac{\sigma_D^2 - a_1 \cdot \sigma_D + a_2 \cdot \sigma_D^2}{1 + a_1 + a_2} = \sigma_V^2 \quad (5.22)$$

und

$$\Phi_2(\sigma_{AD}) = \frac{a_1 \cdot (-3 \cdot \sigma_{AD}) + a_2 \cdot (-3 \cdot \sigma_{AD})^2}{1 + a_1 + a_2} = \sigma_V^2 \quad (5.23)$$

$$\Phi_2(\sigma_{AZ}) = \frac{a_1 \cdot (3 \cdot \sigma_{AZ}) + a_2 \cdot (3 \cdot \sigma_{AZ})^2}{1 + a_1 + a_2} = \sigma_V^2 \quad (5.24)$$

führt [Kolu05].

Die charakteristischen Werte (5.19) für das Potenzial  $\Phi_2$  ergeben sich aus (5.21) - (5.24) zu:

$$k = \sqrt{1 + a_1 + a_2}, \quad (5.25)$$

$$d = \frac{k^2}{1 + a_2}, \quad (5.26)$$

$$a_D = \frac{a_1 + \sqrt{2^2 \cdot a_2 + (a_1 + 2 \cdot a_2)^2}}{2 \cdot 3 \cdot a_2}, \quad (5.27)$$

$$a_Z = \frac{-a_1 + \sqrt{2^2 \cdot a_2 + (a_1 + 2 \cdot a_2)^2}}{2 \cdot 3 \cdot a_2}. \quad (5.28)$$

Diese Zusammenhänge werden im Weiteren zur Bestimmung der freien Parameter sowohl des Versagens- als auch des Kriechpotenzials benötigt.

## 6. Beschreibung des mehraxialen Versagensverhaltens

In dieser Arbeit soll das Versagensverhalten der untersuchten Hartschaumstoffe bei statischer Beanspruchung beschrieben werden. In Abhängigkeit vom Werkstoff können verschiedene Versagensmechanismen vorliegen (plastisches Fließen, Kriechen, Ermüdung oder Sprödbruch). Bei duktilen Materialien kann ein plastisches Fließen, bei spröden Materialien ein Bruch als Versagen definiert werden. Die Definition des Versagens für die hier untersuchten Hartschaumstoffe stellt für Zug- und Torsionsbeanspruchung der Bruch der Struktur dar. Für die Druckbeanspruchung wird der erste Kollaps einer Zellebene als Versagen definiert. Aus den Versuchen können zu jedem Versagen die Grenzspannungen ermittelt werden, so dass das Versagenskriterium als spannungsbezogener Ausdruck formuliert werden kann. Der entwickelte Versagenskörper stellt also eine Grenzfläche im Spannungsraum dar.

Als Versagenskriterium wird ganz allgemein eine Funktion definiert:

$$\Omega(I_1, I_2, I_3) = \sigma_V \leq \sigma_G \quad (6.1)$$

wobei  $\sigma_G$  die Versagensspannung darstellt, die im Versuch experimentell zu bestimmen ist. Ziel ist es, das Potenzial  $\Omega$  und damit die Vergleichsspannung  $\sigma_V$  zu definieren. Zu diesem phänomenologischen Vorgehen sind mehrere Ansätze in der Literatur bekannt [Alte95, Gros07, Saeh93].

Zur Beschreibung des Versagensverhaltens der hier untersuchten Hartschaumstoffe können verschiedene Versagenskörper eingesetzt werden. Die Wahl des zu verwendenden Potenzials hängt in der praktischen Umsetzung von den zur Verfügung stehenden Messergebnissen ab. Liegen, wie in dieser Arbeit, Ergebnisse für Zug-, Druck und Torsionsversuche vor können komplexe Theorien eingesetzt werden. Es soll gezeigt werden, dass mit dem Potenzial  $\Phi_2$  eine Versagensfläche  $\Omega_2$  beschrieben werden kann, die das Versagensverhalten der hier untersuchten Hartschaumstoffe sehr genau abbildet.

Folgende Anforderungen werden an das Potenzial gestellt:

- abgeschlossene Form des Potenzialkörpers im Spannungsraum;
- konvexe Form des Potenzialkörpers, die aus dem Stabilitätskriterium von *Drucker* folgt [Back83, Bett02];
- unterschiedliches Verhalten bei Zug und Druck [Alte95, Back83, Bard82, Bett02] mit ungleichen Querkontraktionen, was auf eine unsymmetrische

Form des Potenzialkörpers bezüglich der Ebene  $I_1 = 0$  führt;

- Differenzierbarkeit des Potenzials.

Für den hier entwickelten Potenzialkörper wurde von isotropem und homogenem Materialverhalten ausgegangen.

## 6.1 Potenzial $\Omega_2$ zur Beschreibung des Versagensverhaltens von Hartschaumstoffen

Die oben aufgeführten Anforderungen an den Versagenskörper resultieren direkt aus den in Kap. 4.1.1 und Kap. 4.1.2 gezeigten experimentellen Untersuchungen zum Versagen unter uniaxialen und zusammengesetzten Beanspruchungen. Ziel ist es, die Versagensfläche, die aus den Versuchen resultiert, durch das Potenzial abzubilden. In der Praxis wird zur Dimensionierung von Bauteilen häufig das Potenzial nach *v. Mises* herangezogen. Hiernach ergibt sich aus (5.13) mit  $a_1 = a_2 = 0$  die Vergleichsspannung, die dann mit dem Wert für das Versagen unter uniaxialer Beanspruchung verglichen wird, zu:

$$\sigma_V^2 = 3 \cdot I_2' \quad (6.2)$$

Für das Potenzial nach von Mises gilt:

$$k = d = 1. \quad (6.3)$$

Die so errechnete Vergleichsspannung wird nach (6.1) mit einer Festigkeit verglichen. Hier entsteht nun das Problem, welche Festigkeit als die zum Versagen führende Spannung definiert wird. Für alle folgenden Untersuchungen wird die Versagensfläche nach *v. Mises* einmal bezogen auf die Zug- und einmal bezogen auf die Druckfestigkeit mit abgebildet. Hieraus können dann sofort die Schwachpunkte dieses Modells und die Vorteile des hier eingesetzten Potenzials gezeigt werden.

Zum Beschreiben des Grenzverhaltens der untersuchten Hartschaumstoffe wurde hier eine Versagensfläche gewählt, die aus dem Potenzialkörper (5.13) resultiert:

$$\Omega_2 = \frac{3 \cdot I_2' + a_1 \cdot \sigma_V \cdot I_1 + a_2 \cdot I_1^2}{1 + a_1 + a_2} = \sigma_V^2. \quad (6.4)$$

Das Potenzial  $\Omega_2$  kann die oben geforderten Anforderungen erfüllen: Der Einfluss der hydrostatischen Spannungsanteile auf das Verhalten kompressibler Stoffe wird durch das Einbeziehen der ersten Invariante  $I_1$  ermöglicht. Unterschiede zwischen Zug- und Druckbeanspruchungen werden dann erfasst, wenn das Potenzial wenigstens eine ungerade Potenz der ungeraden Invariante  $I_1$  beinhaltet. Um eine geschlossene Form des Potenzialkörpers im Spannungsraum zu erhalten, sollte in dem Potenzial eine gerade Potenz der ersten Spannungsinvariante  $I_1$  vorhanden sein, z. B.  $I_1^2$  [Kolu06].

## 6.2 Ermittlung der freien Werte des Potenzials $\Omega_2$

Die freien Werte des Versagenspotenzials  $\Omega_2$  ergeben sich nach Einsetzen der in Kap. 4.1.1 bestimmten Kennwerte zu:

$$a_1 = \frac{k_V^2 \cdot (d_V - 1)}{d_V}, \quad (6.5)$$

$$a_2 = \frac{k_V^2}{d_V} - 1. \quad (6.6)$$

Hiermit ergeben sich für die untersuchten Hartschaumstoffe der Serie WF die folgenden Koeffizienten (Tab. 6.1).

Werkstoff	$a_1$	$a_2$
R51WF	-0,31	$7,7 \times 10^{-4}$
R110WF	0,07	0,02
R200WF	0,45	0,53

Tab. 6.1 Kennwerte  $a_1$  und  $a_2$  für den Versagenskörper  $\Phi_2$

Es sei darauf hingewiesen, dass in diesem Fall nur die Versagenskennwerte für uniaxiale Zug-, Druck- und Torsionsbeanspruchung zur Bestimmung der Kennwerte des Versagenspotenzials verwendet wurden. Die Ergebnisse aus den Versuchen mit zusammengesetzten Beanspruchungen können zur Validierung des erhaltenen Versagenskörpers herangezogen werden (Kap. 4.1.2). Abb. 6.1 - Abb. 6.3 zeigen die Versagenskörper  $\Omega_2$  in der  $\sigma_{11}$ - $\tau_{12}$ -Ebene für die Materialien R51WF, R110WF und R200WF. Zum Vergleich wurde ebenfalls das Potenzial nach v. Mises, einmal bezogen auf die Zug- und einmal bezogen auf die Druckfestigkeit mit dargestellt.

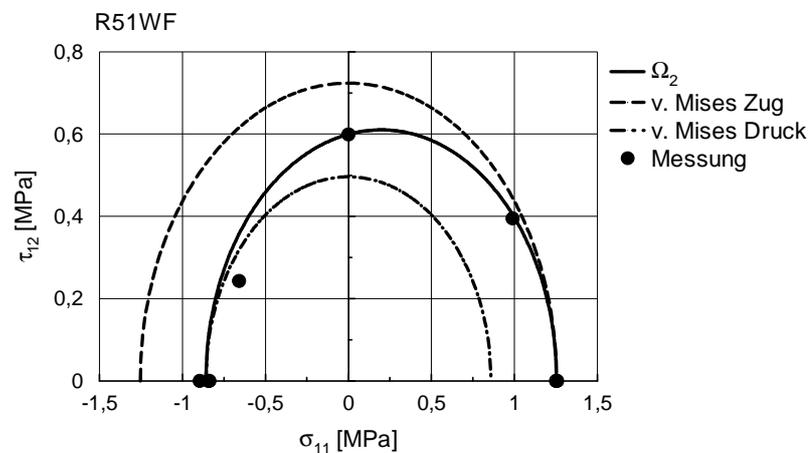


Abb. 6.1 Versagenskörper  $\Phi_2$  in der  $\sigma_{11}$ - $\tau_{12}$ -Ebene für den Hartschaumstoff R51WF

Abb. 6.2 zeigt deutlich, dass das Potenzial nach v. Mises, wenn es auf die Zugfestigkeit ausgelegt ist, die beim Versagen erreichten Druckspannungen vom Betrag her um etwa 40% zu hoch angibt. Wird es auf die Druckfestigkeit bezogen, sind die erreichbaren Zugbeanspruchungen ca. 40% höher als von v. Mises vorausgesagt. Die Versagensfläche  $\Omega_2$  hingegen bildet die gemessenen Festigkeiten für die zusammengesetzten Beanspruchungen sehr gut ab.

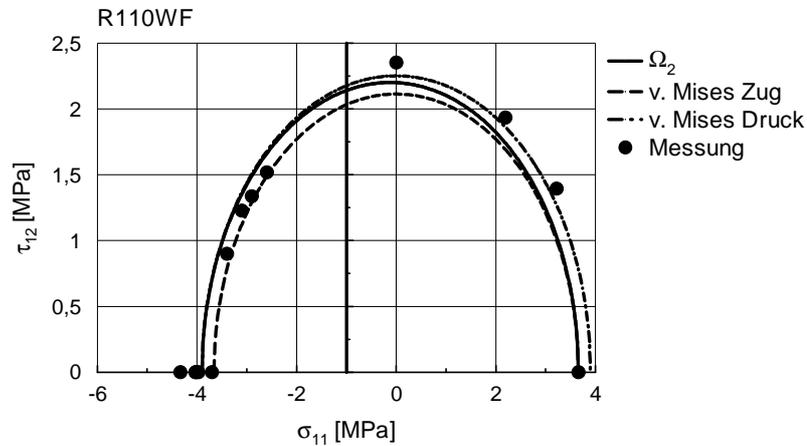


Abb. 6.2 Versagenskörper  $\Phi_2$  in der  $\sigma_{11}$ - $\tau_{12}$ -Ebene für den Hartschaumstoff R110WF

Für den Hartschaumstoff R110WF mit einer Dichte von  $110 \text{ kg/m}^3$  ist der Fehler, der bei einer Dimensionierung mit v. Mises gemacht wird, geringer als bei dem Material R51WF. Dies resultiert aus der Tatsache, dass die Unterschiede zwischen Druck-, Zug und Schubfestigkeit bei diesem Material nicht so stark ausgeprägt sind wie bei dem Hartschaumstoff mit der geringeren Dichte (siehe auch Abb. 4.9).

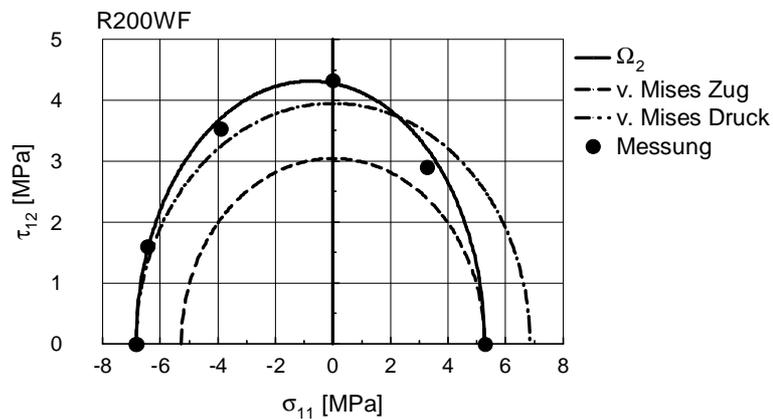


Abb. 6.3 Versagenskörper  $\Phi_2$  in der  $\sigma_{11}$ - $\tau_{12}$ -Ebene für den Hartschaumstoff R200WF

Für das Material mit der höchsten Dichte (R200WF) hat sich der Effekt gegenüber dem Material R51WF umgekehrt. Die Druckfestigkeiten liegen hier deutlich über den Zugfestigkeiten (siehe auch Abb. 4.9). Der Versagenskörper nach v. Mises ist in diesem Fall wiederum nicht geeignet, das Versagensverhalten zu beschreiben. Die

Abweichungen betragen ca. 35%, wenn das Modell nach *v. Mises* auf die Zugfestigkeit bezogen wird, und etwa 25%, wenn das Modell auf die Druckfestigkeit bezogen wird. Der Potenzialkörper  $\Omega_2$  bildet die Versagensfläche sehr gut ab.

Die Abweichungen zu den bei zusammengesetzten Beanspruchungen gemessenen Festigkeiten liegen für alle hier untersuchten Materialien unter 6%. Des Weiteren ist es mit der in Kap. 4.1.1 vorgestellten Methode möglich, die Festigkeiten unter zusammengesetzten Beanspruchungen für alle Dichten der Hartschaumstoffe der Serie WF zu berechnen.

Es zeigt sich, dass das Ellipsoidpotenzial  $\Omega_2$  in der Form (6.4) das Grenzverhalten gut abbilden kann. Es lässt sich für Zug-, Druck- und Torsionsbeanspruchungen sowie für zusammengesetzte Beanspruchungen (Zug und Torsion, Druck und Torsion) anwenden.

## 7. Beschreibung des mehraxialen Kriechverhaltens von Hartschaumstoffen

Analog zur Beschreibung des Versagensverhaltens hängt die notwendige Komplexität der Theorie zur Beschreibung des Kriechverhaltens von Hartschaumstoffen von den zur Verfügung stehenden Messergebnissen ab. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass die oben beschriebene Theorie gute Ergebnisse hinsichtlich der Beschreibung des Kriechverhaltens von Hartschaumstoffen liefert.

Die Anforderungen, die an den Potenzialkörper zur Beschreibung des Kriechverhaltens der untersuchten Hartschaumstoffe bei zusammengesetzten Beanspruchungen gestellt werden, decken sich im Wesentlichen mit denen zur Beschreibung des Versagensverhaltens:

- abgeschlossene Form des Potenzialkörpers im Spannungsraum, die die hydrostatischen Spannungen begrenzt;
- konvexe Form des Potenzialkörpers, die aus dem Stabilitätskriterium von *Drucker* folgt [Back83, Bett02];
- unterschiedliches Verhalten bei Zug und Druck [Alte95, Back83, Bard82, Bett02] mit ungleichen Querkontraktionen, was auf eine unsymmetrische Form des Potenzialkörpers bezüglich der Ebene  $I_1 = 0$  führt.

Wie diese Anforderungen durch gezieltes Einbringen der Invarianten erreicht werden können, wurde bereits in Kap. 6.1 dargestellt.

### 7.1 Potenzial $\Phi_2$ zur Beschreibung des Kriechverhaltens von Hartschaumstoffen

Die oben aufgeführten Anforderungen an die Theorie resultieren aus den in Kap. 4.1.4 erlangten Ergebnissen zum Kriechverhalten der Hartschaumstoffe. Diese lassen sich durch den Potenzialkörper  $\Phi_2$  abbilden (5.13).

Hierbei wird der Einfluss der hydrostatischen Spannungsanteile auf das Verhalten kompressibler Stoffe beim Kriechen durch das Einbeziehen der ersten Invariante  $I_1$  ermöglicht. Unterschiede zwischen Zug- und Druckbeanspruchungen werden dann erfasst, wenn das Potenzial wenigstens eine ungerade Potenz der ungeraden Invariante  $I_1$  beinhaltet. Die geschlossene Form des Potenzialkörpers im Span-

nungsraum wird durch eine gerade Potenz der ersten Spannungsinvariante  $I_1$  gewährleistet [Kolu06].

## 7.2 Ermittlung der freien Werte des Potentials $\Phi_2$

Die charakteristischen Werte  $d$  und  $k$  für das Potential  $\Phi_2$  ergeben sich aus (5.21) - (5.24) zu:

$$k = \sqrt{1 + a_1 + a_2}, \quad (7.1)$$

$$d = \frac{k^2}{1 + a_2}. \quad (7.2)$$

Es kann gezeigt werden, dass die Linie des ebenen Spannungszustandes für die Potentiale  $\Phi_2$  konvex ist [Bard82]. Die Neigung dieser Linie in den Punkten für eine reine Zugbeanspruchung ( $Z(1, 1)$ ) und für eine reine Druckbeanspruchung ( $D(-d, d)$ ) lässt sich über die Tangente ausdrücken. Diese ergeben sich [Kolu05d] zu:

$$\left. \frac{\partial \sqrt{3 \cdot I_2'}}{\partial I_1} \right|_{Z(1,1)} = -\frac{a_1 + 2 \cdot a_2}{2} = \frac{-1 + 2 \cdot v_+^{cr}}{2 \cdot (1 + v_+^{cr})} \quad (7.3)$$

und

$$\left. \frac{\partial \sqrt{3 \cdot I_2'}}{\partial I_1} \right|_{D(-d,d)} = \frac{2 \cdot d \cdot a_2 - a_1}{2 \cdot d} = \frac{1 - 2 \cdot v_-^{cr}}{2 \cdot (1 + v_-^{cr})}. \quad (7.4)$$

Sie geben den Einfluss der Querkontraktion bei Zug und Druck auf die Lage des Potentialskörpers  $\Phi_2$  wieder. Eine Tangente mit einem Winkel  $\varphi = 0$  weist auf die

Inkompressibilität ( $v^{cr} = 0,5$ ) hin. Die Tangente mit dem Winkel  $\varphi = \pi/2$  führt hier auf die Bedingung  $v^{cr} = -1$ .

Wird das Potenzial (5.13) eingesetzt:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{cr} = \dot{\lambda} \cdot [3 \cdot \sigma'_{ij} + (a_1 \cdot \sigma_V + 2 \cdot a_2 \cdot I_1) \delta_{ij}], \quad (7.5)$$

führt dies auf das Verhältnis zwischen Druck- und Zugdehnrate

$$\frac{\dot{\epsilon}_{11-}^{cr}}{\dot{\epsilon}_{11+}^{cr}} = \frac{a_1 - 2 \cdot (1 + a_2) \cdot d}{a_1 + 2 \cdot (1 + a_2)}. \quad (7.6)$$

Das Verhältnis der Dehnraten liefert bei gleicher Vergleichsspannung  $\sigma_V$  eine einfache Gleichung für die Ermittlung der freien Werte des Potentials  $\Phi_2$ .

Die Querkontraktionszahlen bei Zug und Druck [Kolu05]

$$v_+^{cr} = -\frac{-1 + a_1 + 2 \cdot a_2}{2 + a_1 + 2 \cdot a_2} = \frac{3 \cdot d}{k^2 \cdot (d + 1)} - 1, \quad (7.7)$$

$$v_-^{cr} = -\frac{a_1 + (1 - 2 \cdot a_2) \cdot d}{a_1 - 2 \cdot (1 + a_2) \cdot d} = \frac{3 \cdot d^2}{k^2 \cdot (d + 1)} - 1 \quad (7.8)$$

lassen sich über die charakteristischen Werte  $k$  und  $d$  ausdrücken.

Die freien Werte  $a_1$  und  $a_2$  in (5.13) lassen sich eindeutig über  $v_+^{cr}$  und  $v_-^{cr}$  berechnen:

$$a_1 = \frac{3 \cdot (v_-^{cr} - v_+^{cr})}{(1 + v_+^{cr}) \cdot (2 + v_-^{cr} + v_+^{cr})} = \frac{k^2 \cdot (d - 1)}{d}, \quad (7.9)$$

$$a_2 = -\frac{-1 + v_-^{cr} + v_+^{cr}}{2 + v_-^{cr} + v_+^{cr}} = \frac{k^2}{d} - 1. \quad (7.10)$$

Ein „einfaches“ Modell, das ein kompressibles Materialverhalten beschreibt, stellt das Modell von *Beltrami* dar. Dieses kann jedoch wegen der sich ergebenden charakteristischen Werte

$$d = 1, \quad k > 1, \quad a_D = a_Z, \quad v_+^{cr} = v_-^{cr} \quad (7.11)$$

für eine materialgerechte Auslegung nicht verwendet werden, weil seine Eigenschaften (7.11) im Vergleich zu den Eigenschaften von Hartschaumstoffen zu weit von der Realität entfernt liegen. So wird ein unterschiedliches Verhalten auf Zug- oder Druckbeanspruchung von *Beltrami* nicht wiedergegeben. Bei der Ermittlung des freien Wertes  $a_2$  ist es bei *Beltrami* möglich, nur eine der Querkontraktionen, z. B.  $v_+^{cr}$  einzubeziehen.

Für die Ermittlung der freien Werte  $a_1$  und  $a_2$  in (5.13) sind uniaxiale Zug- und Druckkriechversuche am einfachsten experimentell zu realisieren.

Für die Hartschaumstoffe ergeben sich mit (7.8)-(7.10) für das Kriechen die in der folgenden Tabelle aufgeführten (Tab. 7.1) Koeffizienten  $a_1$  und  $a_2$ .

<i>Hartschaumstoff</i>	$a_1$	$a_2$
<i>R51WF</i>	1,562	0,563
<i>R110WF</i>	-0,065	0,077
<i>R200WF</i>	-0,064	0,054

Tab. 7.1 Koeffizienten  $a_1$  und  $a_2$  für die Hartschaumstoffe der Serie WF

Es wurden zur Bestimmung der Kennwerte  $a_1$  und  $a_2$  in diesem Fall nur der Faktor  $d$  und die Querkontraktionszahl beim Kriechen unter einer Druckbeanspruchung  $v_-^{cr}$  eingesetzt. Eine Validierung dieses Potentials lässt sich z. B. anhand der gemessenen Querkontraktionszahl bei einer Zug- oder Druckbeanspruchung durchführen. In der folgenden Tabelle sind die gemessenen und die mit dem Potenzial  $\Phi_2$  bestimmten Querkontraktionszahlen bei einer Zug- bzw. Druckbeanspruchung dargestellt.

## 7. Beschreibung des mehraxialen Kriechverhaltens von Hartschaumstoffen

<i>Hartschaumstoff</i>	$v_-^{cr}$ (berechnet)	$v_-^{cr}$ (gemessen)	$v_+^{cr}$ (berechnet)	$v_+^{cr}$ (gemessen)
<i>R51WF</i>	0,28	0,28	0,36	0,36
<i>R110WF</i>	0,34	0,35	0,44	0,43
<i>R200WF</i>	0,37	0,38	0,46	0,45

Tab. 7.2 Gemessene und berechnete Kriech-Querkontraktionszahlen für Zugbeanspruchung

Es zeigt sich, dass die hier beschriebene Methode das Kriechverhalten der Hartschaumstoffe sehr gut beschreibt. Zur Bestimmung der für die Theorie einzusetzen- den Kennwerte sind lediglich zwei Kriechversuche (z. B. Zug- und Druckkriechver- such) mit einer gleichzeitigen Messung der Querkontraktionszahl notwendig.

## 8. Zusammenfassung

Zu Beginn der Arbeit wurde eine detaillierte Charakterisierung der zu Grunde liegenden Struktur der untersuchten Hartschaumstoffe durchgeführt. Hierbei wurde die Morphologie, d. h. die relevante strukturelle Grundeinheit der eingesetzten Schäume bzgl. Größe und Form einer Zelle sowie Art und Dicke der Wände untersucht. Hierzu wurden Hartschaumstoffproben unterschiedlicher Dichte und Zellstruktur mit einem Micro-Computertomographen und einem Rasterelektronenmikroskop untersucht.

Basierend auf den hieraus gewonnenen Ergebnissen resultierte dann eine Beschreibung der mechanischen Eigenschaften von geschlossenzelligen Hartschaumstoffen auf Polymerbasis mit Hilfe von mikromechanischen Modellen. Dazu wurden in einem ersten Schritt aus der Literatur bekannte Modelle zur Beschreibung des Verhaltens von Hartschaumstoffen bei uniaxialem Zug charakterisiert und an die Ergebnisse aus Zugversuchen angepasst. Die untersuchten Hartschaumstoffe wurden als homogene und isotrope Materialien betrachtet. Es zeigte sich, dass alle Näherungsmethoden, bis auf die generalisierte Selbstkonsistenz-Methode und die untere Grenze des Modells von *Gibson*, zu große Werte für den effektiven Elastizitätsmodul vorhersagen. Es wurde gezeigt, dass das Modell von Mori-Tanaka und die untere Grenze der Methode von Hashin den qualitativen Verlauf der Messwerte am besten wiedergeben. Die absoluten Unterschiede zwischen den gemessenen und den berechneten Werten, sind im für die Hartschaumstoffe relevanten Bereich, bei der generalisierten Selbstkonsistenz-Methode am geringsten.

Um die Versagens- und Kriechmodelle für mehraxiale Beanspruchungszustände zu entwickeln, wurden uniaxiale und mehraxiale Versuche an Rohrprobekörpern durchgeführt. Für die Versagens- oder Kriechmodelle war es unerlässlich, dass die unterschiedlichen Beanspruchungszustände an ein und demselben Probekörper realisiert wurden. Alle Versuche wurden mit einer Zug-, Druck und Torsionsprüfmaschine durchgeführt. Die aus den aufgebrachten Beanspruchungen resultierenden Dehnungen wurden mittels Kameras und der optischen Grauwertkorrelation ausgewertet. Das Versagensverhalten der untersuchten Hartschaumstoffe wurde bei statischer Beanspruchung beschrieben. Es wurde ein umfangreiches Versuchsprogramm zur Bestimmung der Versagenswerte durchgeführt. Es zeigte sich, dass die untersuchten Hartschaumstoffe eine Abhängigkeit vom Beanspruchungszustand aufwiesen: Die hier untersuchten Hartschaumstoffe mit einer niedrigen Dichte versagten früher bei einer Druck- als bei einer Zugbeanspruchung. Für die Hartschaumstoffe mit einer hohen Dichte zeigte sich genau das Gegenteil. Das Versagen trat hier bei Zugbeanspruchung deutlich früher als bei Druckbeanspruchung auf. Das Versagen bei einer Torsionsbeanspruchung zeigte sich ebenfalls stark abhängig von der eingesetzten

Dichte des Materials. Um diese Effekte zu Beschreiben, wurden die beiden Materialkennwerte  $k_V$  und  $d_V$  über eine quadratische Funktion mit der eingesetzten Dichte verbunden.

Aus einfachen uniaxialen Experimenten, wie z. B. Zug-, Druck- oder Torsionsversuchen, wurde dann basierend auf der Invariantentheorie ein Potenzialkörper für Hartschaumstoffe entwickelt, der die in den Versuchen gemessenen für Hartschaumstoffe typischen Phänomene, wie z. B. die Kompressibilität und unterschiedliches Materialverhalten bei Zug- und Druckbeanspruchung berücksichtigt. Hierzu wurde aus den Versuchen, die bei dem Versagen bei Zug-, Druck- oder Torsionsbeanspruchung gemessenen Grenzspannungen ermittelt. Das Versagenskriterium wurde somit als spannungsbezogener Ausdruck formuliert. Für den hier entwickelten Potenzialkörper wurde von isotropem und homogenem Materialverhalten ausgegangen. Es konnte gezeigt werden, dass der verwendete Potenzialkörper die mechanischen Eigenschaften der hier untersuchten Hartschäume deutlich exakter wiedergibt als die standardmäßig verwendeten Theorien. So zeigte sich, dass das Potenzial nach *v. Mises*, wenn es auf die Zugfestigkeit ausgelegt ist, die beim Versagen erreichten Druckspannungen vom Betrag her um etwa 40% zu hoch angibt. Wird es auf die Druckfestigkeit bezogen, sind die erreichbaren Zugbeanspruchungen ca. 40% höher als von *v. Mises* vorausgesagt. Die entwickelte Versagensfläche hingegen bildet die gemessenen Festigkeiten auch für die zusammengesetzten Beanspruchungen sehr gut ab.

Analog zur Beschreibung des Versagensverhaltens wurde eine Theorie zur Beschreibung des Kriechverhaltens von Hartschaumstoffen vorgestellt. Diese basierte wiederum auf Langzeitversuchen, sowohl für uniaxiale als auch mehraxiale Beanspruchungszustände. Hierbei konnte gezeigt werden, dass der für das Versagen verwendete Potenzialkörper auch gute Ergebnisse hinsichtlich der Beschreibung des Kriechverhaltens von Hartschaumstoffen lieferte. Die freien Werte des Potentials ließen sich aus Zug- und Druckversuchen bei gleichzeitiger Erfassung der Querkontraktion ermitteln.

Die entwickelten Theorien bieten im Gegensatz zu standardmäßig verwendeten Modellen zum einen die Möglichkeit sicherer zu konstruieren und zum anderen Material einzusparen.

## A Anhang

### A.1 Versagensversuche

Im Folgenden sind die Spannungs-Dehnungs Diagramme aus den uniaxialen Versuchen aufgeführt. Abb. 8.1 – 8.3 zeigen die Spannungs-Dehnungs Diagramme für uniaxiale Zug-, Druck und Torsionsbeanspruchung für den Werkstoff R110WF.

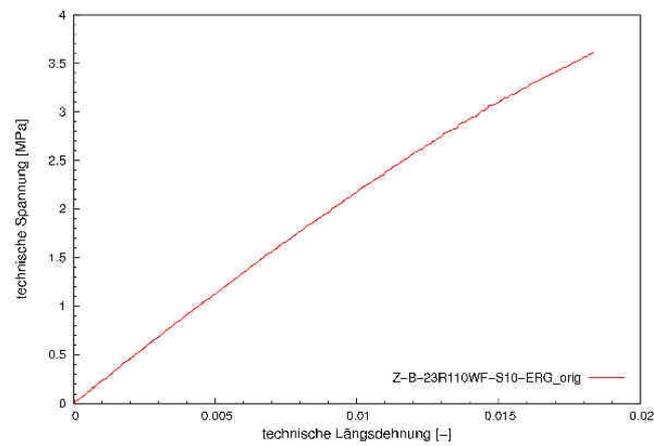


Abb. 8.1 Spannungs-Dehnungs-Diagramm für reine Zugbeanspruchung bis zum Versagen für den Hartschaumstoff ROHACELL R110WF

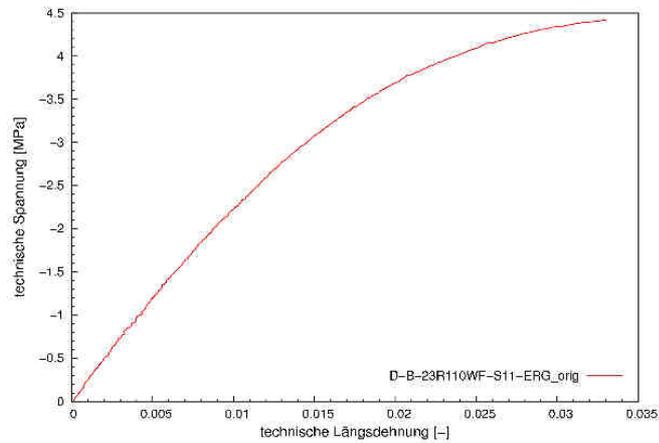


Abb. 8.2 Spannungs-Dehnungs-Diagramm für reine Druckbeanspruchung bis zum Versagen für den Hartschaumstoff ROHACELL R110WF

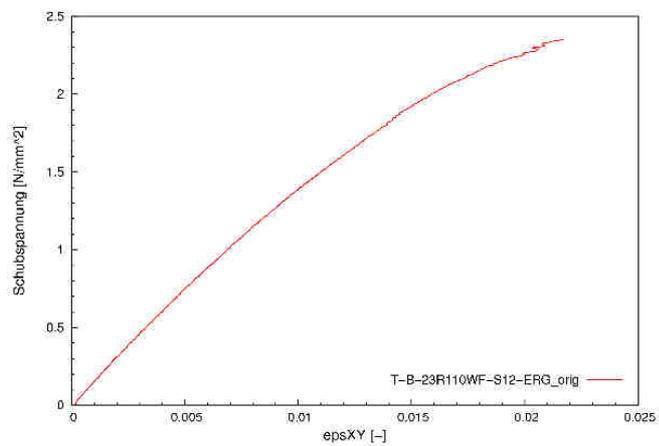


Abb. 8.3 Spannungs-Dehnungs-Diagramm für reine Schubbeanspruchung bis zum Versagen für den Hartschaumstoff ROHACELL R110WF

Abb. 8.4 – 8.6 zeigen die Spannungs-Dehnungs Diagramme für uniaxiale Zug-, Druck und Torsionsbeanspruchung für den Werkstoff R200WF.

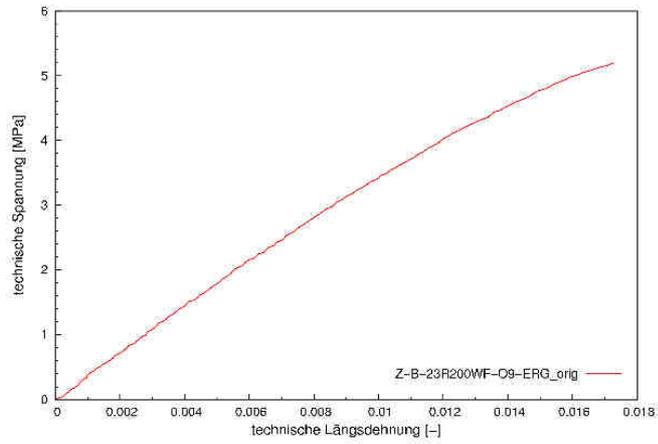


Abb. 8.4 Spannungs-Dehnungs-Diagramm für reine Zugbeanspruchung bis zum Versagen für den Hartschaumstoff ROHACELL R200WF

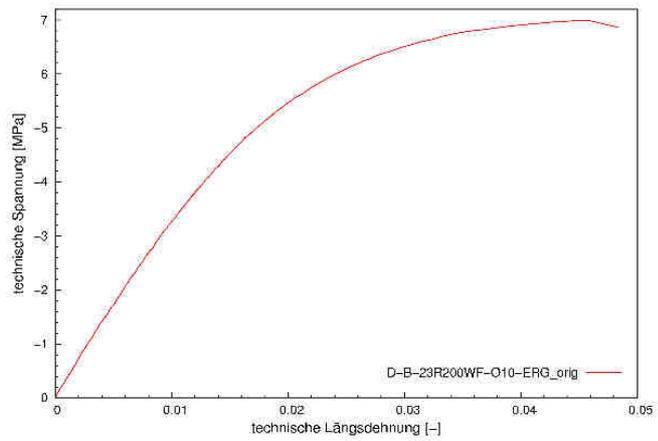


Abb. 8.5 Spannungs-Dehnungs-Diagramm für reine Druckbeanspruchung bis zum Versagen für den Hartschaumstoff ROHACELL R200WF

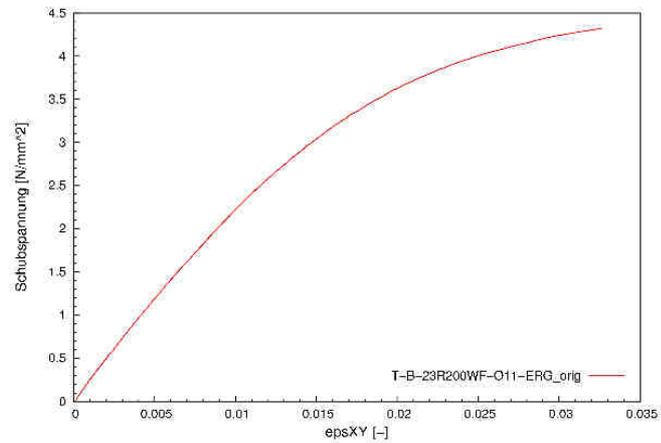


Abb. 8.6 Spannungs-Dehnungs-Diagramm für reine Schubbeanspruchung bis zum Versagen für den Hartschaumstoff ROHACELL R200WF

## A.2 Kriechversuche

Abb. 8.7 zeigt die gemessenen Kriechverläufe und die approximierten *Bailey-Norton*-Funktionen für drei Zugversuche mit unterschiedlichen Spannungen am Werkstoff R51WF. Aus diesen Approximationen wurden wieder die *Bailey-Norton*-Koeffizienten für den Werkstoff bestimmt.

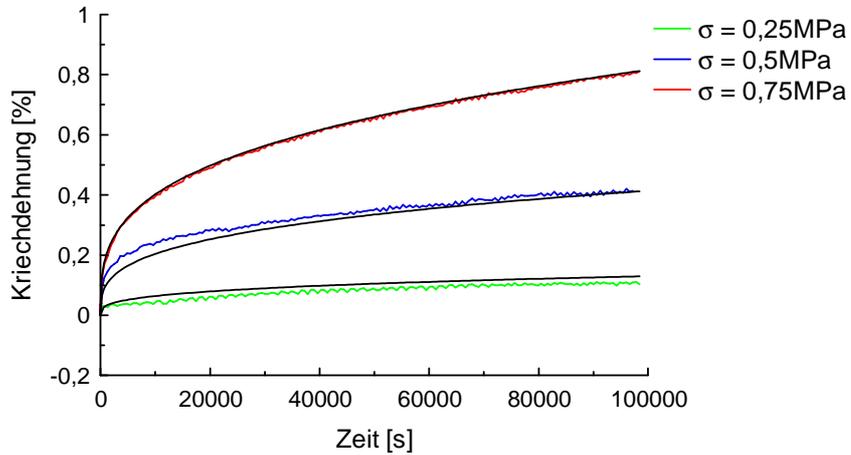


Abb. 8.7 Ermittlung der Bailey-Norton-Koeffizienten für den Werkstoff ROHACELL R51WF aus drei Zugversuchen mit unterschiedlichen Spannungen

Tab. 8.1 zeigt die ermittelten Koeffizienten für den Werkstoff R51WF.

$A_1$	$A_2$	$A_3$	Korrelationskoeffizient
$3,89 \cdot 10^{-2}$	1,67	0,31	0,97

Tab. 8.1 Bailey-Norton-Koeffizienten für R51WF

Die Bestimmung des Faktors  $\alpha$  erfolgt wieder durch eine Approximation an die Kriechverläufe aus zwei Langzeitdruckversuchen unter Verwendung der *Bailey-Norton-Koeffizienten*.

Abb. 8.8 zeigt die berechneten und gemessenen Kurven.

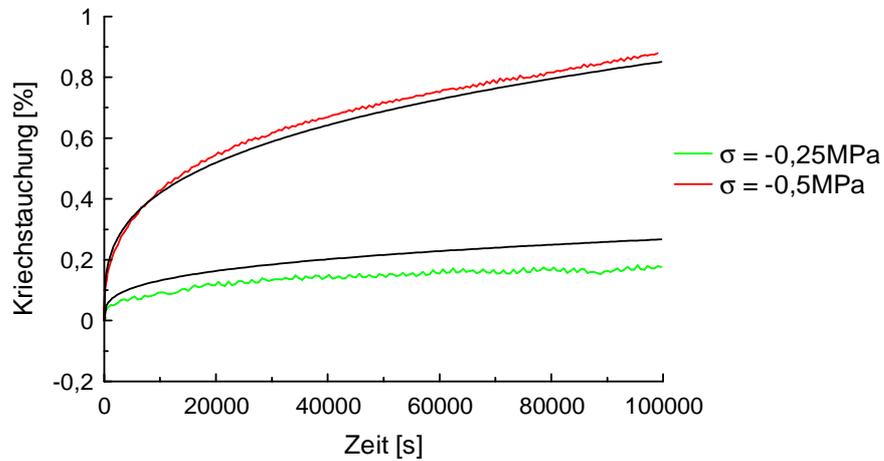


Abb. 8.8 Ermittlung des Faktors  $\alpha$  für ROHACELL R51WF

Beim Werkstoff ROHACELL R200WF wird analog vorgegangen. Abb. 8.9, Abb. 8.10 und Tab. 8.2 zeigen die entsprechenden Kurven und die ermittelten *Bailey-Norton*-Koeffizienten.

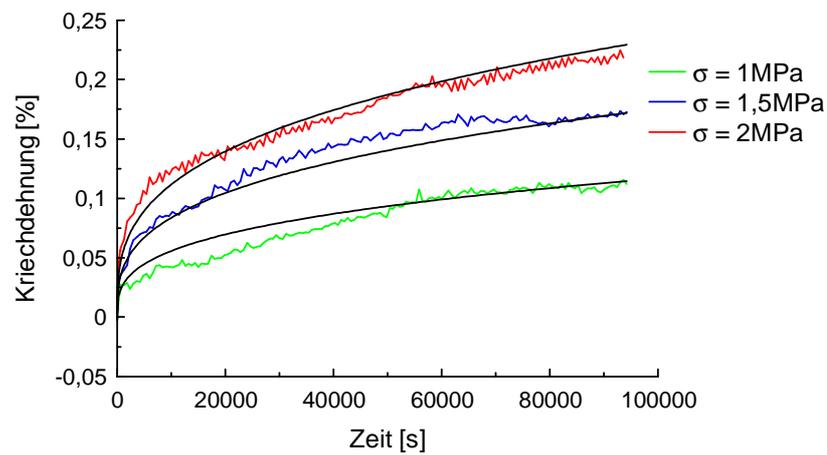


Abb. 8.9 Ermittlung der *Bailey-Norton*-Koeffizienten für den Werkstoff ROHACELL R200WF aus drei Zugversuchen mit unterschiedlichen Spannungen

$A_1$	$A_2$	$A_3$	Korrelationskoeffizient
$2,90 \cdot 10^{-3}$	1,01	0,32	0,90

Tab. 8.2 Bailey-Norton-Koeffizienten für R200WF

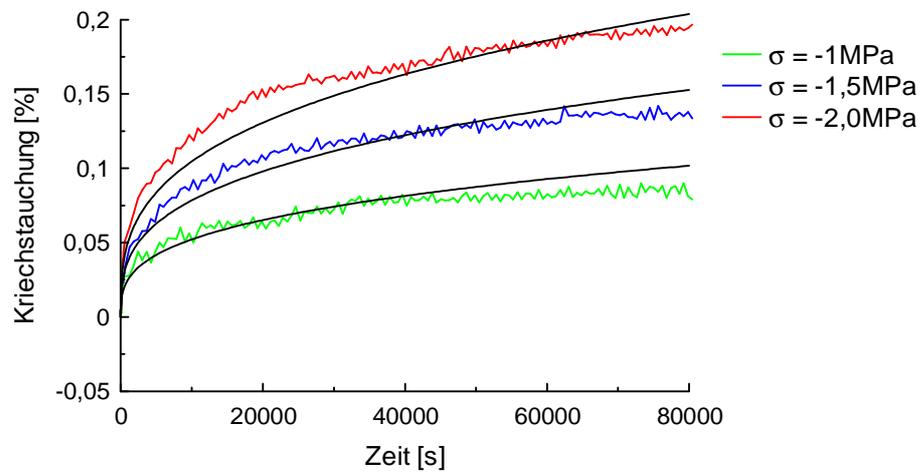


Abb. 8.10 Ermittlung des Faktors  $\alpha$  für ROHACELL R200WF

## B Verzeichnisse

### B.1 Literaturverzeichnis

- [Abaq01] N. N., ABAQUS/Standard-Benutzerhandbuch, Version 6.1, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., Pawtucket, (2000)
- [Abou91] Aboudi, J., Mechanics of Composite Materials, Studies in Applied Mechanics **29** (1991)
- [Alpe84] Alperstein, D., Narkis, M., Kenig, S., Effect of Reinforcement on Creep Behavior of Polyurethane Foams, Polymer Composites **5**, No. 2 (1984), 155-158
- [Alte93] Altenbach, H., Werkstoffmechanik, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig (1993)
- [Alte94] Altenbach, J., Einführung in die Kontinuumsmechanik, Teubner Verlag, Stuttgart (1994)
- [Alte95] Altenbach, H., Altenbach, J., Zolochovsky, A., Erweiterte Deformationsmodelle und Versagenskriterien der Werkstoffmechanik, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Stuttgart (1995)
- [Amor87] D'Amore, A., Kenny, J. M., Nicolais, L., Viscoelastic behaviour of glass reinforced foams, Soc. Plast. Eng., Tech. Pap. (1987), 457-461
- [Andr99a] Andrews, E. W., Gibson, L. J., Ashby, M. F., The Creep Of Cellular Solids, Acta mater. **47**, No. 10 (1999), 2853-2863
- [Andr99b] Andrews, E. W., Huang, J.-S., Gibson, L. J., Creep Behaviour Of A Closed-Cell Aluminium Foam, Acta mater. **47**, No. 10 (1999), 2927-2935
- [Back83] Backhaus, G., Deformationsgesetze, Akademie Verlag, Berlin (1983), 238-246
- [Bads79] Badstube, M., Kriechgesetze von Polyurethan-Hartschaumstoffen, Plaste und Kautschuk **26**, (1979), 703-706
- [Bard82] Bardenheier, R., Mechanisches Versagen von Polymerwerkstoffen: Anstrengungsbewertung mehrachsialer Spannungszustände, Carl Hanser Verlag, München (1982)

- [Bast00] Bastawros, A.-F., Bart-Smith, H., Evans, A. G., Experimental analysis of deformation mechanisms in a closed-cell aluminium alloy foam, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **48**, No 2 (2000), 301-322
- [Beck02] Becker, W., Gross, D., *Mechanik elastischer Körper und Strukturen*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (2002)
- [Bett84] Betten, J., Borrmann, M., Einfluß der plastischen Kompressibilität und Strength-Differential-Effektes auf das Fließverhalten von Sinter- und Polymerwerkstoffen, *Rheol. Acta* **23**, (1984) 109-116
- [Bett02] Betten, J., *Creep mechanics*, Springer-Verlag, Berlin (2002)
- [Bish51] Bishop, J., Hill, R., *Phil. Mag* **42**, (1951) 414-427, 1298-1307
- [Bolt74] Boltzmann, L., *Zur Theorie der elastischen Nachwirkung*, Stzber. Kgl. Akad. Wiss. Wien (1874)
- [Bonn99] Bonner, M., Duckett, R. A., Ward, I. M., Creep behaviour of isotropic polyethylene, *Journal of Material Science* **34**, No. 8 (1999), 1885-1897
- [Bron87] Bronstein, I., Semendjajew, K., *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Thun (1987)
- [Bros86] Brostow, W., *Einstieg in die moderne Werkstoffwissenschaft*, Carl Hanser Verlag, München (1986)
- [Brow60] Brown, W. B., *Plast. Prog.* (1960), 149
- [Buck87] Buckley, C.P., *Multiaxial Nonlinear Viscoelasticity of Solid Polymers*, *Polym. Eng. Sci.* **27**, No 2 (1987), 155-164
- [Burn98] Burns, S. B., Singh, S. N., Bowers, J. D., The Influence of Temperature on Compressive Properties and Dimensional Stability of Rigid Polyurethane Foams Used in Construction, *Journal of Cellular Plastics* **34**, (1998), 18-38
- [Chan99a] Chan, N., Evans, K. E., The Mechanical Properties of Conventional and Auxentic Foams. Part I: Compression and Tension, *J. Cell. Plast.* **35** (1999), 130-165
- [Chan99b] Chan, N., Evans, K. E., The Mechanical Properties of Conventional and Auxentic Foams. Part II: Shear, *J. Cell. Plast.* **35** (1999), 166-184
- [Chen88] Chen, W., Han, D., *Plasticity for Structural Engineers*, Springer-Verlag, Neu York (1988)

- [Chri98] Christensen, R.M., Two Theoretical Elasticity Micromechanics Models, *Journal of Elasticity* **50** (1998), 15-25
- [Cosm94] Cosmos/M Advanced Modules user guide, Part 1 NSTAR, Structural Research & Analysis Corp., Los Angeles (1994), 37
- [Cost06] Costa Oliveira, F. A., Dias, S., Fatima Vaz, M., Cruz Fernandes, J, Behaviour of open-cell cordierite foams under compression, *Journal of the European Ceramic Society* **26** (2006), 179-186
- [Dark65] Darkow, A., Spiro, G., Festigkeitslehre, Wisschaja schkola, Moskau (1965)
- [Demi05] Demiray, S., Becker, W., Hohe, J., Strain-energy based homogenisation of two- and three-dimensional hyperelastic solid foams, *Journal of Materials Science* **40** (2005), 5839-5844
- [Desh01] Deshpande, V. S., Fleck, N. A., Multi-Axial Yield Behaviour Of Polymer Foams, *Acta Materialia* **49** (2001), 1859-1866
- [Domi92] Domininghaus, H., Die Kunststoffe und ihre Eigenschaften, VDI-Verlag, Düsseldorf (1992)
- [Doro03] Doroudiani, S., Kortschot, M. T., Polystyrene Foams. III. Structure-Tensile Properties Relationships, *Journal of Applied Polymer Science* **90** (2003), 1427-1434
- [Ehre95] Ehrenstein, G.W., Mit Kunststoffen konstruieren, Carl Hanser Verlag, München (1995)
- [Endl94] Endl, K., Luh, W., Analysis II, AULA-Verlag, Wiesbaden (1994)
- [Find44] Findley, W.N.: Creep Characteristics of Plastics, Symposium on Plastics, Am. Soc. Testing Mats., 1944
- [Find76] Findley, W.N., Lai, J.S., Onaran, K., Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials, North-Holland (1976)
- [Gaug04] Gaugler & Lutz oHG, Industrieprogramm, Core and more, Aalen-Ebnat (2004)
- [Gell02] Gellert, R., Dämmen mit Hartschaum-Kunststoffen, IBK Darmstadt, Ernst & Sohn Verlag (2002)
- [Gibs82] Gibson, L.J.; Ashby, M.F., *Proc. Roy. Soc. Lond.* (1982), 43

- 
- [Gibs87] Gibson, L.J.; Ashby, M.F., Cellular Solids, Structure & Properties, Pergamon Press (1987)
- [Gibs89] Gibson, L. J., Ashby, M. F., Zhang, J., Triantafillou, T. C., Failure Surfaces For Cellular Materials Under Multiaxial Loads-I. Modelling, International Journal of Mechanical Sciences **31** No 9 (1989), 635-663
- [Gibs00] Gibson, L. J., Mechanical Behaviour of Metallic Foams, Annu. Rev. Material Science **30** (2000), 191-227
- [Giou00] Gioux, G., McCormack, T. M., Gibson, L. J., Failure of aluminium foams under multiaxial loads, International Journal of Mechanical Sciences **42** (2000), 1097-1117
- [Good99] Goods, S. H., Neuschwanger, C. L., Whinnery, L. L., Nix, W. D., Mechanical Properties of a Particle-Strengthened Polyurethane Foam, Journal of Applied Polymer Science **74** (1999), 2724-2736
- [Gree75] Green, A.E., Rivlin, R.S., The Mechanics of Non-linear Materials with Memory, Arch. Ration. Mech. Anal. **1** (1975), 1-21
- [Grel98] Grellmann, W., Seidler, S., Deformation und Bruchverhalten von Kunststoffen, Springer Verlag Berlin (1998)
- [Gren99] Grenestedt, J. L., Effective Elastic Behavior of some Models for Perfect Cellular Solids, Int. J. Solids Struct. **36** No 10 (1999), 1471
- [Gren05] Grenestedt, J. L., On interactions between imperfections in cellular solids, Journal of Materials Science **40** (2005), 5853-5857
- [Gros07] Gross, D., Seelig, T., Bruchmechanik, Bd. 1, Springer-Verlag, Berlin (2007)
- [Haag03] Haag, M., Wanner, A., Clemens, H., Zhang, P., Kraft, O., Arzt, E., Creep of Aluminium-Based Closed-Cell Foams, Metallurgical And Materials Transactions A **34A** (2003)
- [Hash63] Hashin, Z., Shtrikman, S., A variational approach to the elastic behaviour of multiphase materials, Journal of Mechanics and Physics of Solids **11** (1963), 127-140
- [Hill98] Hill, R., The mathematical theory of plasticity, Clarendon Pr., Oxford (1998)

- [Hodg03] Hodge, A. M., Dunand, D. C., Measurement and Modelling of Creep in Open-Cell NiAl Foams, *Metallurgical And Materials Transactions A*, **34A** (2003), 2353-2363
- [Husc98] Huschka, S., Modellierung eines Materialgesetzes zur Beschreibung der mechanischen Eigenschaften von Aluminiumschaum, Dissertation, Universität Stuttgart, VDI-Verlag. Fortschrittberichte, Reihe 5, Nr. 525 (1998)
- [Isma79] Ismar, H., Mahrenholtz, O., Technische Plastomechanik, Vieweg, Braunschweig (1979)
- [Kabe96] Kabelka, J., Ehrenstein, G.W., Stampfer, S., Kriechen von Polymerwerkstoffen unter mehrachsigen Belastungen, *Kautsch. Gummi, Kunst.* **49** No 5 (1996), 332-335
- [Kämp82] Kämpf, G., Charakterisierung von Kunststoffen mit physikalischen Methoden, Carl Hanser Verlag, München (1982)
- [Kene04] Kenesi, P., Kádár, Cs., Rajkovits, Zs., Lendvai, J., The influence of cell-size distribution on the plastic deformation in metal foams, *Scripta Materialia* **50** (2004), 294-300
- [Klök91] Klöker, W., Zelluläre Reaktionsharzschäumstoffe – Langzeitverhalten, Versagensmechanismus, *Kunststoffe* **81** No 7 (1991), 617-621
- [Kolu05] Kolupaev, V., Moneke, M., Becker, F., Mehraxiales Kriechen von Thermoplast-Formteilen, VDI-Verlag, Düsseldorf (2005)
- [Kolu05a] Kolupaev, V., Moneke, M., Darsov, N., Modelling of the three-dimensional creep behavior of non-reinforced thermoplastics, *Computational Materials Science* **32** (2005), 400-406
- [Kolu05b] Kolupaev, V., Moneke, M., 3D-Creep of polymers in invariant theory, 10. Tagung Problemseminar "Deformation und Bruchverhalten von Kunststoffen", Merseburg (2005)
- [Kolu05c] Kolupaev, V., Moneke, M., Becker, F., Application of classical flow criteria of creep in thermoplastics, 15th International Workshop on Computational Mechanics of Materials IWCM15, Max-Planck-Institut für Eisenforschung, Düsseldorf (2005)
- [Kolu05d] Kolupaev, V., Kraatz, A., Moneke, M., Bolchoun, A., Beschreibung der mehraxialen Kriechphänomene bei Hartschaumstoffen, *KGK* **1-2** (2006), 17-26

- [Kolu06] Kolupaev, V., Dreidimensionales Kriechverhalten von Bauteilen aus unverstärkten Thermoplasten, Dissertation, Martin-Luther Universität Halle-Wittenberg (2006)
- [Krau80] Kraus, H., Creep analysis, John Wiley & Sons (1980)
- [Kraw86] Krawietz, A., Materialtheorie: mathematische Beschreibung des phänomenologischen thermomechanischen Verhaltens, Springer-Verlag, Berlin (1986), 415
- [Kren96] Krenk, S., Family of invariant stress surface, J. Eng. Mech. **122** (1996), 201-208
- [Krol95] Krollmann, N., Langzeitverhalten von extrudiertem Polystyrol-Hartschaum bei konstanter und zyklisch wechselnder Druckbeanspruchung, Bauphysik **17** (1995), 11-16
- [Kuma98] Kumar, V., Weller, J. E., Ma, M., Montecillo, R., The Effect of Additives on Microcellular PVC Foams: Part II. Tensile Behaviour, Cellular Polymers - Rapra Technology Ltd (1998)
- [Lee04] Lee, S. T., Ramesh, N. S., Polymeric Foams, CRC Press, London (2004)
- [Lepp67] Lepper, J. K., Hetherington, N. W., Statistical Description of the Uniaxial Creep Behavior of Polypropylene Foam, Journal of Applied Polymer Science **11** (1967), 1775-1795
- [Masc89] Mascia, L., Thermoplastics: materials engineering, Elsevier science publishers Ltd., New York (1989)
- [Matu98] Matuana, L. M., Park, C. B., Balatincez, J. J., Structures and Mechanical Properties of Microcellular Foamed Polyvinyl Chloride, Cellular Polymers **17** No 1 (1998), 1-16
- [Meng02] Menges, Haberstroh, Michaeli, Schmachtenberg, Werkstoffkunde Kunststoffe, Carl Hanser-Verlag (2002)
- [Mill97] Mills, N. J., Gilchrist, A., Creep and Recovery of Polyolefin Foams – Deformation Mechanisms, J. Cell. Plast. **33** (1997), 264-292
- [Mill00] Mills, N. J., Gilchrist, A., Modelling the Indentation of Low Density Polymer Foams, Cell. Polym. **19** (2000), 389-412
- [Mill01] Mills, N. J., Gilchrist, A., The Effects of Heat Transfer and Poisson's Ratio on the Compressive Response of Closed-Cell Polymer Foams, Cellular Polymers (1997)

- [Mone05] Moneke, M., Strukturuntersuchung für kleinste Dimensionen, Kunststoffe-Synthetics, (2005), 6-7
- [More94a] Moreland, J. C., Wilkes, G. L., Turner, R. B., Viscoelastic Behavior of Flexible Slabstock Polyurethane Foams: Dependence on Temperature and Relative Humidity. I. Tensile and Compression Stress (Load) Relaxation, Journal of Applied Polymer Science **52** (1994), 549-568
- [More94b] Moreland, J. C., Wilkes, G. L., Turner, R. B., Viscoelastic Behavior of Flexible Slabstock Polyurethane Foams: Dependence on Temperature and Relative Humidity. II. Compressive Creep Behavior, Journal of Applied Polymer Science **52** (1994), 569-576
- [Mori73] Mori, T.; Tanaka, K.: Acta. Metall, (1973), 571
- [Müll03] Müller, P., Sind Polyurethanwerkstoffe ein reifes Gebiet?, Angewandte Makromolekulare Chemie **244** (2003), 121 - 133
- [Murz63] Murzewski, J., Mendera, Z., Yield surface of steel determined by semi-empirical method, Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences, 9. Serie des sciences techniques **XI**, No 7 (1963), 35-42
- [Neil95] Neilsen, M. K., Krieg, R. D., Schreyer, H. L., A Constitutive Theory for Rigid Polyurethane Foam, Polymer Engineering And Science **35** No 5, (1995), 387-394
- [Nieh00] Nieh, T. G., Higashi, K., Wadsworth, J., Effect of cell morphology on the compressive properties of open-cell aluminium foams, Materials Science and Engineering **A283** (2000), 105-110
- [Nort29] Norton, F., Creep of High Temperatures, McGraw-Hill Publ. Co., London (1929)
- [Nutt71] Nutting, P., Proc. ASTM **21** (1971), 1162
- [Oech03] Öchsner, A., Experimentelle und numerische Untersuchung des elasto-plastischen Verhaltens zellulärer Modellwerkstoffe, Dissertation, Universität Erlangen-Nürnberg (2003)
- [Opfe78] Opfermann, J., Untersuchungen zur Fließzonenbildung und zum Bruch von amorphen Plastomeren, Dissertation, RWTH Aachen (1978)
- [Over79] Overath, A. F., Das Verhalten von Thermoplasten im Bereich kleiner Verformungen, Dissertation RWTH Aachen (1979)

- [Ozku93] Ozkul, M. H., Mark, J. E., Aubert, J. H., The Elastic and Plastic Mechanical Responses of Microcellular Foams, *Journal of Applied Polymer Science* **48** (1993), 767-774
- [Papa96] Papageorgiou, M., Optimierung: statische, dynamische, stochastische Verfahren für die Anwendung, München (1996)
- [Phil95] Phillips, J. C., Creep/Recovery Behavior of Open-Cell Foams, *Journal of Applied Polymer Science* **55** (1995), 527-536
- [Quad04] Quadbeck, P., Kaschta, J., Singer, R. F., Superalloy IN625 with Cellular Microstructure – Fabrication Route and Mechanical Properties, *Advanced Engineering Materials* **6** No 8 (2004), 635-639
- [Rabo80] Rabotnov, Y. N., Elements of Hereditary Solid Mechanics, MIR Publishers, Moscow (1980)
- [Rett91] Retting, W., Mechanik der Kunststoffe: Die mechanischen Eigenschaften von Polymer-Werkstoffen, Hanser-Verlag, München (1991)
- [Röhm02] N.N. Datenblatt, Firma Röhm, ROHACELL, Darmstadt (2002)
- [Röhm05] Roth, A., Unveröffentlichte Informationen, Firma Röhm, Darmstadt (2005)
- [Saeh93] Sähn, S., Göldner, H., Nickel, J., Fischer, K.-F., Bruch und Beurteilungskriterien in der Festigkeitslehre, Fachbuchverlag, Leipzig (1993)
- [Sara84] Sarabi, B., Das Anstrengungsverhalten von Polymerwerkstoffen infolge ein- und zweiachsigen Kriechens, Dissertation, Universität-GH Kassel (1984)
- [Sayi70] Sayir, M., Zur Fliesbedingung der Plastizitätstheorie, *Ing. Arch.* **39** (1970), 414-432
- [Scha88] Schaumstoffe: Prüfung, Anforderung, Anwendung, DIN-Taschenbuch 235, DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Beuth Verlag GmbH, Berlin (1988)
- [Schm85] Schmachtenberg, E., Die mechanischen Eigenschaften nichtlinear viskoelastischer Werkstoffe, Dissertation, RWTH Aachen (1985)
- [Schj01] Schjodt-Thomsen, J., Pyrz, R., Effective Properties of Cellular Materials, *Polymer Engineering and Science* **41** No 5 (2001)
- [Shas00] Shastri, V. P., Martin, I., Langer, R., Macroporous polymer foams by hydrocarbon templating, *PNAS* **97** No 5, (2000), 1970-1975

- [Seel05] Seelig, Th., Gross, D., Bruchmechanik mit einer Einführung in die Mikromechanik, Springer-Verlag (2005)
- [Seme80] Semerdjiev, S., Thermoplastische Strukturschaumstoffe, VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig (1980)
- [Skrz93] Skrzypek, J., Hetnarski, R., Plasticity and creep: theory, examples and problems, CRC Press, Boca Raton (1993)
- [Schl84] Schlimmer, M., Zeitabhängiges mechanisches Werkstoffverhalten: Grundlagen, Experimente, Rechenverfahren für die Praxis, Springer-Verlag, Berlin (1984)
- [Schl74] Schlimmer, M., Fliessverhalten plastisch kompressibler Werkstoffe, Dissertation, RWTH Aachen (1974)
- [Shut91] Shutov, F., Cellular Structure And Properties Of Foamed Polymers, Polymeric Foams, Carl Hanser Verlag, München (1991)
- [Spit75] Spitzig, W., Sobert, R., Richmond, O., Pressure dependence of yielding and associated volume expansion in tempered martensite, *Acta Metallurgica* **23** (1975), 885-893
- [Sugi97] Sugimura, Y., Meyer, J., He, M. Y., Bart-Smith, H., Grenestedt, J., Evans, A. G., On The Mechanical Performance Of Closed Cell AL Alloy Foams, *Acta Mater.* **45** No 12 (1997), 5245-5259
- [Suh91] Suh, K. W., Polystyrene And Structural Foam, Polymeric Foams, Carl Hanser Verlag, München (1991)
- [Sun02] Sun, H., Mark, E. M., Preparation, Characetrization, and Mechanical Properties of Some Microcellular Polysulfone Foams, *Journal of Applied Polymer Science* **86** (2002), 1692-1701
- [Tria89] Triantafillou, T. C., Zhang, J., Shercliff, T. L., Gibson, L. J., Ashby, M. F., Failure Surfaces For Cellular Materials Under Multiaxial Loads – II. Comparison of Models with Experiment, *International Journal of Mechanical Science* **31** No 9 (1989), 665-678
- [Vanv00] Vamvuchelen, J., Perugini, C., Deweerdt, M., Chen, L., Burnham, T., Microcellular PVC Foam for Thin Wall Profile, *Journal of Cellular Plastics* **36** (2000), 148-157

- [Wadl01] Wadley, H. N. G., Cellular Metals and Manufacturing: An Overview of Stochastic and Periodic Concepts. In Banhart, J., M. F. Ashby, and N. A. Fleck (editors): Cellular Metals and Metal Foaming Technology (2001), 137-146
- [Ward84] Ward, M., Wilding, M. A., Creep Behaviour of Ultrahigh-Modulus Polyethylene: Influence of Draw Ratio and Polymer Composition, Journal of Polymer Science **22** (1984), 561-575
- [Wied96] Wiedemann, J., Leichtbau 1: Elemente, Springer Verlag, (1996)
- [Wies99] Wieser, J., Zum Deformationsverhalten thermoplastischer Kunststoffe unter ein- und mehrachsigen Beanspruchungen, Fortschr.-Ber. VDI Reihe 5 Nr. 548, Düsseldorf, VDI-Verlag (1998)
- [Wins84] Winselmann, D., Stoffgesetze mit isotroper und kinematischer Verfestigung sowie deren Anwendung auf Sand, Dissertation, Bremerhaven (1984)
- [Wilk91] Wilke, W., Photogrammetrische Verformungsmessung durch Überlagerungseffekte frequenzmodullierter, periodischer Bildstrukturen, Dissertation, TU Braunschweig (1991)
- [Wint91] Winter, D., Optische Verschiebungsmessung nach dem Objektrasterprinzip mit Hilfe eines flächigen Ansatzes, Dissertation, TU Braunschweig (1991)
- [Whit25] White, H., Plane Curves of the Third Order, Oxford University Press, London (1925)
- [Yama00] Yamada, Y., Shimojima, K., Mabuchi, M., Nakamura, M., Asashina, T., Mukai, T., Higashi, K., Effects of load direction on the mechanical properties of open-cellular epoxy with a cubic prism structure, Philosophical Magazine Letters **80** No 4 (2000), 215-220
- [Yu02] Yu, M., Appl. Mech. Rev. **55** No 3 (2002), 169-218
- [Your96] Yourd, R. A., Compression Creep and Long-Term Dimensional Stability in Appliance Rigid Foam, J. Cell. Plast. **32** (1996), 601-617
- [Zasl68] Zaslowsky, M., Multiaxial-stress studies on rigid polyurethane foam, SPE J. (1968), 24-62
- [Zenk97] Zenkert, D., The Handbook of Sandwich Construction, London, United Kingdom, Engineering Materials Advisory Services Ltd. (1997)

- [Zhan02] Zhang, P., Haag, M., Kraft, O., Wanner, A., Arzt, E., Microstructural changes in the cell walls of a closed-cell aluminium foam during creep, Philosophical Magazine A **82** No.16 (2002), 2895-2907
- [Zieg60] Ziegler, H., Bemerkung zu einem Hauptachsenproblem in der Plastizitätstheorie, ZAMP **XI** (1960)
- [Zixi98] Zixing, L., Zhentong, G., Science in China, Series E **41** (1998), 271
- [Zhu99] Zhu, H. X., Mills, N. J., Modelling the creep of open-cell polymer foams, Journal of the Mechanics and Physics of Solids **47** (1999), 1437-1457
- [Zycz81] Życzkowski, M., Combined Loadings in the Theory of Plasticity, PWN-Polish Scientific Publishers (1981)

## B.2 Symbole und Abkürzungen

$a_1, a_2$	Faktoren des Potentials
$A_1, A_2, A_3$	Koeffizienten der Bailey-Norton Funktion
$c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, d_2, e_0, e_1, e_2$	Faktoren zur Beschreibung der Festigkeiten
$d, k$	Charakteristische Werte
$D_i$	Innendurchmesser
$E$	Elastizitätsmodul
$G$	Schubmodul
$h$	Wanddicke
$K$	Kompressionsmodul
$m, n, e, f, g$	Konstanten der Potenzfunktionen
$t$	Zeit
$T$	Temperatur

---

$\varepsilon$	Gesamtdehnung
$\dot{\varepsilon}^{Cr}$	Kriechdehnungsgeschwindigkeit
$\lambda$	Proportionalitätsfaktor
$\Omega$	Versagensfläche
$\Phi$	Potenzial
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\sigma$	Spannung
$\sigma_V$	Vergleichsspannung
$\tau$	Schubspannung
<i>Cr</i>	<i>Kriechen</i>
<i>el</i>	Elastisch
<i>i, j</i>	Laufindex
<i>V</i>	Versagen

---

## **Lebenslauf**

### **Angaben zur Person**

Name: Arnim Kraatz  
Geburtsdatum: 15. Mai 1975  
Geburtsort: Marburg  
Familienstand: ledig  
Nationalität: deutsch

### **Schule und Wehrdienst**

1985 – 1994: Gymnasium der Gesamtschule Kirchhain  
1994 – 1995: Wehrdienst

### **Studium**

10/95 – 07/02: Maschinenbaustudium an der Technischen Universität Darmstadt  
08/99 – 08/00: Studium an der Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona, Spanien  
07/02: Diplom in Maschinenbau

### **Promotion**

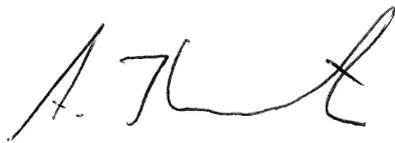
08/02: Wissenschaftlicher Angestellter am Deutschen Kunststoff-Institut, Abteilung Technologie  
Seit 08/06: Gruppenleiter für den Bereich „Bauteilsimulation“

---

## Erklärung

Hiermit erkläre ich, Arnim Kraatz, dass ich diese Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst habe. Es wurden keine anderen als die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die den benutzten Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht.

Darmstadt, den 10. April 2007

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'A. Kraatz', written in a cursive style.

Arnim Kraatz