

Stochastische Differentialinklusionen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt der

Naturwissenschaftlichen Fakultät III
(mathematisch-naturwissenschaftlicher Bereich)
der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

von Frau Anne Bauwe

geboren am 28. Februar 1978 in Oschatz

Gutachter:

1. Prof. Dr. Wilfried Grecksch, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
2. Prof. Dr. Björn Schmalfuß, Universität Paderborn

eingereicht am: 18. Juni 2007

verteidigt am: 2. November 2007

urn:nbn:de:gbv:3-000012844

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=nbn%3Ade%3Agbv%3A3-000012844>]

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Wilfried Grecksch, der mich von Beginn der Diplomarbeit bis zum Ende der Dissertation umfassend beraten und betreut hat.

Dem Land Sachsen-Anhalt und der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg danke ich für die Gewährung eines Graduiertenstipendiums, das mir ein finanziell unabhängiges und unbelastetes Arbeiten ermöglicht hat.

Für das gute und sehr angenehme Arbeitsklima möchte ich all den ehemaligen und aktuellen Mitgliedern des Instituts für Optimierung und Stochastik danken.

Den unermüdlichen Korrekturlesern dieser Arbeit sei ebenfalls auf das Herzlichste gedankt.

Vor allem aber möchte ich mich bei meinen lieben Eltern und meiner Schwester von ganzem Herzen bedanken.

Vielen Dank für die unerschöpflichen Dinge – Eure Unterstützung, Aufmunterung, Euer Vertrauen und Verständnis.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	7
1 Einführung in die mengenwertige Analysis	13
1.1 Grundbegriffe der mengenwertigen Analysis	13
1.2 Maximal-monotone und Lipschitz-stetige mengenwertige Abbildungen . .	18
1.3 Mengenwertige stochastische Analysis	22
2 Endlichdimensionale stochastische Differentialinklusionen	27
2.1 Problemstellung	27
2.2 Existenz von Lösungen	29
2.3 Eindeutigkeit von Lösungen	38
2.4 Beispiele	41
3 Unendlichdimensionale stochastische Differentialinklusionen mit Lipschitz-stetigen mengenwertigen Abbildungen - Das Galerkin-Verfahren	45
3.1 Problemstellung	46
3.2 Existenz von Lösungen	50
3.3 Beispiel	65
4 Spezielle unendlichdimensionale stochastische Differentialinklusionen mit maximal-monotonen Abbildungen - Die Methode von Ober- und Unterlösung	69
4.1 Problemstellung	70
4.2 Existenz von Lösungen	74
4.3 Eindeutigkeit von Lösungen	85
4.4 Vergleichsresultate	88
4.5 Beispiele	92

A Anhang	95
A.1 Projektionen	95
A.2 Konvergenzaussagen	96
A.3 Der Fixpunktsatz von Schauder	96
A.4 Die Ungleichung von Burkholder-Davis-Gundy	96
A.5 Die Itô-Formel für das Normquadrat	97
A.6 Existenz- und Eindeutigkeitsätze für Itô-Gleichungen	98
 Literaturverzeichnis	 102

Einleitung

Eine Vielzahl von Problemen aus Natur, Technik, Wirtschaft und Gesellschaft führt auf die Modellierung mittels Anfangswert- oder Randwertproblemen mit gewöhnlichen bzw. partiellen Differentialgleichungen. Oft sind dabei zufällige Einflüsse zu berücksichtigen, wie zum Beispiel bei Aktienkursentwicklungen, technischen Schwingungsvorgängen oder Problemen der Populationsgenetik.

Man unterscheidet bei Differentialgleichungen mit zufälligem Einfluss zwischen

- a) zufälligen Differentialgleichungen und
- b) stochastischen Differentialgleichungen.

Im ersten Fall sind die in die Gleichung eingehenden zufälligen Funktionen regulär genug, um „klassische“ Lösungsmethoden anzuwenden. Über den deterministischen Rahmen hinaus sind Verteilungs- oder Momentenfunktionen der Lösungen wesentlich (vgl. vom Scheidt [86]).

Dagegen hat man es im zweiten Fall mit Gleichungen zu tun, die Prozesse von der Art des weißen Rauschens enthalten. Da deren Trajektorien nicht differenzierbar sind, werden die Differentialgleichungen als Integralgleichungen definiert, die stochastische Integrale z. B. im Sinne von Itô enthalten (siehe da Prato und Zabczyk [29], Grecksch und Tudor [45]).

Für Lösungsprozesse von Differentialgleichungen mit zufälligem Einfluss sind mitunter Beschränkungen erforderlich, wie beispielsweise das Ausschließen des Überschreitens einer Grenze oder die Annahme von Werten in einer vorgegebenen Menge.

Diese Sachverhalte können über Variationsungleichungen erfasst werden. Auch in diesem Fall wird die oben erwähnte Unterscheidung hinsichtlich der Regularität des Zufalls vorgenommen.

Entsprechende Aufgabenstellungen werden u. a. mittels Itô-Kalkül von Bensoussan und Lions [15] sowie Bensoussan und Rascanu [16] behandelt.

Mit Hilfe des Subdifferentials gelingt es, Variationsungleichungen in Differentialinklusionen, häufig als Differentialgleichungen mit mengenwertigen Abbildungen bezeichnet, zu überführen (z. B. der deterministische Fall bei Naumann [76]).

Für deterministische Differentialgleichungen mit unstetiger rechter Seite bietet sich ebenfalls die Interpretation als Differentialinklusion an durch Hinzunahme zusätzlicher Werte an den Unstetigkeitsstellen (vgl. Filippov [38] und Smirnov [85]).

Die Theorie der Steuerung dynamischer Systeme hatte großen Einfluss auf die Entwicklung deterministischer Differentialinklusionen. In den 1960er Jahren wurde der Zusammenhang zwischen gesteuerten dynamischen Systemen und Differentialinklusionen aufgedeckt (siehe Aubin und Cellina [6], Smirnov [85]).

Weitere wechselseitige Beziehungen zwischen Variationsungleichungen und Differentialinklusionen sind aus der Fuzzy-Theorie, der Spieltheorie und der Optimierung bekannt.

Inzwischen gibt es vielseitige Anwendungen für Differentialinklusionen. In den Wirtschaftswissenschaften werden sie genutzt, um Gleichgewichtszustände zu formulieren, wie zum Beispiel den Gleichgewichtspreis im Modell von Walras [6]. Die Gewinnmaximierung unter verschiedenen Nebenbedingungen [52] stellt ein Anwendungsbeispiel aus der Portfolio-Theorie dar.

Mengenwertige Darstellungen dienen in der Biologie zur Modellierung der Populationsdynamik unter Berücksichtigung des individuellen Verhaltens [4], [65], [66]. Ferner finden Differentialinklusionen in der Klimatheorie, speziell in der Gletscherkunde [20], [33], [34] Anwendung.

Des Weiteren sind aus der Physik die Formulierung von Reibungsgesetzen [12], [79], die Untersuchung von Systemen mit Hysterese [63] oder die Beschreibung poröser Medien [22], plastischer und viskoplastischer Materialgesetze [94] mit mengenwertigen Modellen bekannt.

Zur Theorie der deterministischen Differentialinklusionen gibt es zahlreiche Monographien. Exemplarisch seien die von Hu und Papageorgiou [51], [52] erwähnt.

Um die Lösbarkeit deterministischer Differentialinklusionen nachzuweisen, werden Konzepte der Stetigkeit und Monotonie mengenwertiger Abbildungen herangezogen.

Die Techniken hierzu umfassen Fixpunktsätze, Halbgruppenansätze für die Lösungen von Differentialinklusionen mit oberhalbstetigen mengenwertigen Abbildungen (Ahmed [1]), die Methode der Ober- und Unterlösung für Aufgaben mit maximal-monotonen Abbildungen (Carl, Grossmann, Pao [22], Carl und Heikkilä [23]) sowie die Anwendung von Surjektivitätsresultaten für allgemeine mengenwertige Abbildungen (Hu und Papageorgiou [52], [53]).

Zu diesen deterministischen Problemen gibt es entsprechend stochastische Betrachtungen. Für stochastische Differentialgleichungen mit unstetiger rechter Seite beispielsweise liegt es ebenso nahe, eine Interpretation als stochastische Differentialinklusion vorzunehmen.

Auch die Untersuchung dynamischer Systeme, deren Entwicklung sich nicht eindeutig durch den Zustand des Systems bestimmen lässt und die außerdem unvollständig bekannte, vom Zufall abhängige Störfaktoren enthalten, nutzt das Ersetzen stochastischer Differentialgleichungen durch stochastische Differentialinklusionen.

Daneben können verschiedene Modelle für den Aktienpreis $S(t)$, sei es das lineare Modell von Bachelier

$$dS(t) = \lambda dt + \sigma dW(t)$$

mit Konstanten λ, σ und einem Wiener Prozess $W(t)$ oder das klassische Modell von Black-Scholes in der Form

$$dS(t) = \lambda S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

oder ein Mean-Reverting-Modell

$$dS(t) = \lambda(\mu - S(t))dt + \sigma dW(t)$$

mit einem Mittelwert μ , durch eine stochastische Differentialinklusion

$$dS(t) \in \Lambda(S(t))dt + \Sigma(S(t))dW(t)$$

erfasst werden, wobei die mengenwertigen Abbildungen Λ und Σ die jeweiligen Drift- und Diffusionsterme der obigen Modelle beinhalten (siehe Michta und Motyl [71]). So sind beispielsweise auch Parameterbereiche wie $\Sigma = [-u, +u]$ für $u \in \mathbb{R}^+$ darstellbar. Ziel der Untersuchungen ist dann das Bestimmen der Modellfamilie oder Parameter $\lambda \in \Lambda$, $\sigma \in \Sigma$, um eine gegebene Situation bestmöglich abzubilden.

Die vorliegende Arbeit stellt eine allgemeine Untersuchung zu stochastischen Differentialinklusionen vor.

Dabei steht die Anwendung verschiedener Methoden zum Existenznachweis von Lösungen stochastischer Differentialinklusionen im Mittelpunkt.

Es werden endlichdimensionale und unendlichdimensionale stochastische Differentialinklusionen des Types

$$\begin{aligned} dX(t) + A(t, X(t))dt + B(t, X(t))dW_1(t) &\in F(t, X(t))dt + G(t, X(t))dW_2(t), \\ X(0) &= X_0 \end{aligned} \quad (1)$$

für Prozesse X betrachtet. Von den Operatoren A, B, F und G sind die Abbildungen F, G mengenwertig. Die unabhängigen Wiener Prozesse seien mit W_1, W_2 sowie eine gegebene Anfangswertbedingung mit X_0 bezeichnet.

Die obige Beziehung wird als Integralinklusion

$$\begin{aligned} X(t) + \int_0^t A(s, X(s))ds + \int_0^t B(s, X(s))dW_1(s) &\in \\ X_0 + \int_0^t F(s, X(s))ds + \int_0^t G(s, X(s))dW_2(s) &\quad (2) \end{aligned}$$

definiert, wobei $\int_0^t F(s, X(s))ds$ realisierungsweise als mengenwertiges Integral im Sinne von Aumann [8] und $\int_0^t G(s, X(s))dW_2(s)$ als mengenwertiges Itô-Integral im Sinne von Kim und Kim [56] definiert sind.

Eine Reihe von Autoren betrachten stochastische Differentialinklusionen lediglich mit mengenwertiger Drift. Für unterhalbstetige bzw. Lipschitz-stetige mengenwertige Abbildungen werden dann Existenzaussagen von da Prato und Frankowska [28] sowie Balasubramaniam, Ntouyas und Vinayagam [10] mittels Halbgruppen bzw. Fixpunktsätzen bewiesen.

Bensoussan und Rascanu [16], Kravets [62], Kree [63], Pettersson [79], [80] und Rascanu [81] verwenden maximal-monotone Abbildungen und deren Yosida-Approximationen, um durch die Lösbarkeit der korrespondierenden stochastischen Differentialgleichungen auf die der stochastischen Differentialinklusionen zu schließen.

Die Betrachtung mengenwertiger Diffusionsterme wurde bislang nur in Einzelfällen durchgeführt. So wendet Kisielewicz [58] für spezielle ober- und unterhalbstetige Abbildungen einen direkten Zugang über die Fixpunkttheorie an. Verbunden mit Halbgruppenansätzen führen Fixpunktsätze bei Ahmed [1], [2] sowie Jakubowski, Kamenskii und Raynaud de Fitte [54] zu Aussagen über die Existenz von Lösungen für stochastische Differentialinklusionen mit mengenwertigen oberhalbstetigen Drift- und Diffusionstermen.

Basierend auf der Yosida-Approximation weist Motyl [75] die Lösbarkeit stochastischer Differentialinklusionen mit maximal-monotoner mengenwertiger Drift und Diffusion nach.

In der vorliegenden Arbeit werden stochastische Differentialinklusionen sowohl mit mengenwertiger Drift als auch mit mengenwertiger Diffusion untersucht.

Für den Beweis von Existenzaussagen werden unterschiedliche, bisher noch nicht für stochastische Differentialinklusionen des Types (1) verwendete Methoden erarbeitet, je nach Art der Eigenschaften der betrachteten mengenwertigen Abbildungen.

Zusätzlich gelingt es, die eindeutige Lösbarkeit von speziellen stochastischen Differentialinklusionen nachzuweisen, ein in den vorangegangenen Arbeiten verschiedener Autoren unbeachteter Aspekt.

Eine Lösung von (1) liegt vor, wenn man Funktionen f, g , im Folgenden Selektoren genannt, mit $f(t, x) \in F(t, x)$ und $g(t, x) \in G(t, x)$ findet und

$$\begin{aligned} dX(t) + A(t, X(t))dt + B(t, X(t))dW_1(t) &= f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW_2(t), \\ X(0) &= X_0 \end{aligned} \tag{3}$$

im Sinne von Itô gilt.

Ein Vorteil dieser Lösungsdefinition liegt darin, dass unter bestimmten Voraussetzungen Ergebnisse der Theorie stochastischer Differentialgleichungen hinzugezogen werden können. Im Wesentlichen finden hier Existenzaussagen von Krylov und Rozovskij [67] zur Lösung endlichdimensionaler und unendlichdimensionaler Itô-Gleichungen Anwendung.

An dieser Stelle spiegelt sich der Grundgedanke der Dissertation einer natürlichen Erweiterung der stochastischen Differentialgleichungen zu stochastischen Differentialinklusionen wider. In diesem Sinne kann die Theorie stochastischer Differentialgleichungen in die der stochastischen Differentialinklusionen eingebettet werden, sofern die entsprechenden mengenwertigen Strukturen wohldefiniert zur Verfügung stehen.

Eine stochastische Differentialgleichung ist damit als Fall eines allgemeineren Problems stochastischer Differentialinklusionen auffassbar.

Die Dissertation gliedert sich wie folgt. Das erste Kapitel ist einer kurzen Einführung in die mengenwertige Analysis vorbehalten. Ein mengenwertiges Integral, Messbarkeit und Stetigkeit mengenwertiger Abbildungen werden definiert. Besonderes Augenmerk richtet sich auf die Existenz von Selektoren.

Eigenschaften mengenwertiger maximal-monotoner bzw. Lipschitz-stetiger Abbildungen werden in einem gesonderten Abschnitt vorgestellt.

Das Kapitel schließt mit den erforderlichen, aber bereits bekannten Begriffen der Stochastik mengenwertiger Abbildungen ab. Dazu zählen mengenwertige Zufallsgrößen, stochastische Prozesse und schließlich die Definition eines mengenwertigen stochastischen Integrals.

Das zweite Kapitel widmet sich der Untersuchung endlichdimensionaler stochastischer Differentialinklusionen. Dabei werden Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für stochastische Differentialinklusionen mit maximal-monotonen oder Lipschitz-stetigen Drift- und Diffusionstermen bewiesen.

Während sich die Arbeiten von Bernardin [17], Kravets [62] und Pettersson [79] nur auf mengenwertige maximal-monotone Driftterme beziehen, werden hier Erweiterungen durch die zusätzliche Betrachtung mengenwertiger Diffusionsterme entwickelt.

Ein erstes wichtiges Resultat stellt die Existenzaussage in Satz 2.2.1 für Aufgaben mit maximal-monotoner Drift und Diffusion dar. Als zentrales Element in der Beweisführung wird die Yosida-Approximation maximal-monotoner Abbildungen nun auch für mengenwertige Diffusionen angewendet. Mit ihrer Hilfe sind die Inklusionen auf Familien von Gleichungen zurückführbar, deren Lösbarkeit mit einem Satz von Krylov und Rozovskij [67] gesichert ist.

Mengenwertige Abbildungen sind nicht gleichzeitig maximal-monoton und Lipschitz-stetig. Als einfaches Beispiel hierfür sei eine wachsende, stückweise lineare Funktion angeführt, die den Unstetigkeitsstellen Intervalle als Werte zuordnet.

Für die Konvergenz von Lösungen der approximierenden stochastischen Differentialgleichungen werden daher Lipschitz-ähnliche Bedingungen an die mengenwertige Diffusion gestellt, die auch Motyl in [75] fordert.

Bisherige Untersuchungen anderer Autoren führen in der Regel auf eine Lösungsmenge. Mit Wahrscheinlichkeit 1 sind nach Satz 2.3.2 die Lösungsprozesse der endlichdimensionalen Aufgabe eindeutig bestimmt.

Im Hinblick auf endlichdimensionale stochastische Differentialinklusionen mit mengenwertigen Lipschitz-stetigen und maximal-monotonen Abbildungen sind die hier angegebenen Erkenntnisse als Ergänzung der Theorie zu sehen.

Ausgewählte Fragestellungen aus der Physik und Medizin werden mit der formulierten Theorie betrachtet.

Die Lösbarkeit stochastischer Differentialinklusionen in unendlichdimensionalen Räumen wird im dritten und vierten Kapitel der Arbeit untersucht.

In Kapitel 3 liegt der Schwerpunkt auf der Entwicklung eines Galerkin-Verfahrens für stochastische Differentialinklusionen mit mengenwertigen Lipschitz-stetigen Abbildungen über einem Evolutionstripel.

Bisher ist die Galerkin-Methode nur für deterministische Differentialinklusionen bekannt (vgl. Hu und Papageorgiou [53]).

Mittels Projektion auf endlichdimensionale Teilräume wird der stochastischen Differentialinklusion eine Folge endlichdimensionaler stochastischer Differentialinklusionen zugeordnet, die nach Kapitel 2 Lösungen besitzen.

Die Beweisidee orientiert sich am Fall unendlichdimensionaler stochastischer Differentialgleichungen nach Krylov und Rozovskij [67].

Durch vorangestellte Lemmata erfolgen die Beweise von a priori Abschätzungen und schwachen Grenzwertbeziehungen. Wesentlich dafür, dass der Grenzwert der Folge der approximierenden Probleme die unendlichdimensionale Originalaufgabe löst, ist der Nachweis der Selektionseigenschaft mit einem Satz von Hu und Papageorgiou [51].

Neben der Lösbarkeit der unendlichdimensionalen stochastischen Differentialinklusion wird in Satz 3.2.1 auch eine Aussage zur Güte der Approximation im Sinn der Konvergenz getroffen, die für den stochastischen Fall so zuvor nicht bekannt war. Es gilt im Sinn von Kuratowski die Konvergenz der Folge von Lösungsmengen für die endlichdimensionale Aufgabe gegen die Lösungsmenge des unendlichdimensionalen Ausgangsproblems. Weiterhin lässt sich sogar die Konvergenz beider Mengen bezüglich der Hausdorff-Distanz beweisen.

Kapitel 3 endet mit einem Beispiel aus der Steuertheorie.

Im vierten und letzten Kapitel der Arbeit wird mit der Methode von Ober- und Unterlösung ein weiteres Verfahren zum Lösen von unendlichdimensionalen stochastischen Differentialinklusionen vorgestellt. Ober- und Unterlösungen werden im deterministischen Fall von Carl, Grossmann und Pao [22] betrachtet.

In die betrachtete stochastische Differentialinklusion gehen ein Differentialoperator 2. Ordnung mit gemischten Randbedingungen sowie spezielle maximal-monotone Abbildungen ein, die sich aus der maximal-monotonen Erweiterung unstetiger, wachsender Funktionen ergeben. Der Vorteil dieser Wahl von Operatoren besteht darin, dass die Lösungsmenge durch Ober- und Unterlösung begrenzt wird.

Durch eine Regularisierung wird das Problem auf eine Familie von stochastischen partiellen Differentialgleichungen zurückgeführt. Für die Lösungsfolge kann die schwache Konvergenz und für den Grenzwert die Selektionseigenschaft nachgewiesen werden, so dass Lösungsprozesse für die gegebene Aufgabe existieren.

Der Satz 4.2.1 setzt die Existenz von Ober- und Unterlösung voraus. Hierfür stellt ein Unterabschnitt des vierten Kapitels Vergleichsresultate vor.

Eine Eindeutigkeitsaussage für stochastische Differentialinklusionen mit mengenwertiger Drift liefert der Satz 4.3.1.

Die Erkenntnisse werden durch einzelne Beispiele ergänzt.

In einem Anhang sind abschließend einige Grundlagen aus der stochastischen Analysis und der Funktionalanalysis enthalten.

Kapitel 1

Einführung in die mengenwertige Analysis

Einen umfassenden Einblick in die mathematischen Grundlagen der mengenwertigen Analysis bieten unter anderem die Monographien von Aubin und Cellina [6], Aubin und Frankowska [7] sowie Hu und Papageorgiou [51].

Zu Beginn werden neben Grundbegriffen und Eigenschaften von mengenwertigen Abbildungen die deterministischen Differentialinklusionen eingeführt. Abschnitt 1.2 befasst sich mit speziellen mengenwertigen Abbildungen, den maximal-monotonen und Lipschitz-stetigen Abbildungen.

Der letzte Teil dieses Kapitels widmet sich der stochastischen Analysis mengenwertiger stochastischer Prozesse. Hier werden insbesondere mengenwertige Pendanten zu Zufallsgrößen, stochastischen Prozessen und stochastischen Integralen definiert.

1.1 Grundbegriffe der mengenwertigen Analysis

Es sei Y ein metrischer Raum, wobei der *Abstand* $d(y, A)$ eines Punktes $y \in Y$ zu einer Menge $A \subseteq Y$ mit

$$d(y, A) = \inf_{a \in A} d(y, a)$$

gegeben ist.

Die *Hausdorff-Distanz* $h(A, B)$ zwischen zwei Mengen $A, B \subseteq Y$ dient dazu, den Abstand zwischen Teilmengen des metrischen Raumes zu bestimmen. Sie ist durch

$$h(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\}$$

definiert. Dabei sind Werte zwischen 0 und einschließlich $+\infty$ möglich.

Versehen mit der Hausdorff-Distanz wird die Menge aller nicht-leeren, abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen von Y zu einem metrischen Raum. Für einen Banachraum Y ist der eben beschriebene Raum sogar vollständig.

Unter der *Norm* einer nicht-leeren Menge A eines Banachraumes Y versteht man

$$\|A\|_Y = h(A, \{0\}) = \sup_{a \in A} \|a\|_Y. \quad (1.1.1)$$

Die *Konvergenz von Mengenfolgen* wird im Sinn von Hausdorff bzw. Kuratowski betrachtet. Dazu werden *unterer und oberer Grenzwert einer Folge von Mengen* wie folgt definiert.

Definition 1.1.1 Es sei Y ein vollständiger metrischer Raum und $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq 2^Y$ eine Folge von nicht-leeren Teilmengen.

(a) Der untere Grenzwert der Folge $(A_n)_{n \geq 1}$ ist durch

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n &= \left\{ y \in Y : \lim_{n \rightarrow \infty} d(y, A_n) = 0 \right\} \\ &= \left\{ y \in Y : y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, y_n \in A_n, n \geq 1 \right\} \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

und der obere Grenzwert von $(A_n)_{n \geq 1}$ durch

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n &= \left\{ y \in Y : \liminf_{n \rightarrow \infty} d(y, A_n) = 0 \right\} \\ &= \left\{ y \in Y : y = \lim_{n_k \rightarrow \infty} y_{n_k}, y_{n_k} \in A_{n_k}, n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots \right\} \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

gegeben.

(b) Eine Folge $(A_n)_{n \geq 1}$ konvergiert im Sinn von Kuratowski gegen A , bezeichnet mit $A_n \xrightarrow{K} A$, wenn

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

gilt. Die Konvergenz im Hausdorffschen Sinn liegt vor, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(A_n, A) = 0$$

erfüllt ist. Als Abkürzung hierfür wird $A_n \xrightarrow{h} A$ verwendet.

Die Verknüpfung beider Konvergenzarten erfolgt durch die Aussage:

Satz 1.1.2 (Vgl. Hu und Papageorgiou [51], Proposition 7.1.19)

Es sei $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq Y$ eine Folge abgeschlossener Teilmengen, die im Kuratowski Sinn gegen $A \subseteq Y$ konvergiert. Existiert eine kompakte Menge B mit $A_n \subseteq B$ für alle $n \geq 1$, dann ist für $n \rightarrow \infty$

$$A_n \xrightarrow{h} A.$$

Detaillierte Informationen zur Hausdorff-Distanz und Eigenschaften der damit ausgestatteten Räume sowie zur Konvergenz im Sinn von Hausdorff bzw. Kuratowski sind unter anderem bei Castaing und Valadier [25], Deimling [30], Hu und Papageorgiou [51], Li und Ogura, Kreinovich [64] oder im Seminarbericht von Glodde und Niepage [42] zu finden.

Es seien X, Y zwei Mengen und 2^Y die Menge aller Teilmengen von Y einschließlich der leeren Menge. Eine *mengenwertige Abbildung*, auch Korrespondenz oder Punkt-Menge-Abbildung genannt, ist eine Funktion $F : X \rightarrow 2^Y$. Sie ordnet jedem $x \in X$ eine Menge $F(x) \subseteq Y$ zu.

Die „Umkehrabbildung“ F der quadratischen Funktion g mit $g(y) = y^2$ für $y \in \mathbb{R}$ ist ein einfaches Beispiel einer mengenwertigen Abbildung.

So wie Mengen durch ihre Elemente charakterisierbar sind, werden mengenwertige Abbildungen durch ihre *Selektoren*, auch Selektionen genannt, beschrieben. Ein Selektor f der mengenwertigen Abbildung F ist eine Funktion $f : X \rightarrow Y$, die der Selektionseigenschaft $f(x) \in F(x)$ für alle $x \in X$ genügt.

Für die Umkehrabbildung F der obigen quadratischen Funktion g ist die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ein Selektor.

Die Mengen

$$\text{Gr } F = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$$

heißen *Graph von F* und

$$F^{-1}(A) = \{x \in X : F(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

Inverse der mengenwertigen Abbildung F für eine Menge $A \subseteq Y$.

Da stets vorausgesetzt wird, dass die hier zu betrachtenden mengenwertigen Abbildungen in $2^Y \setminus \{\emptyset\}$ abbilden, also über nicht-leere Bildmengen verfügen, sei die Potenzmenge 2^Y dementsprechend unter explizitem Ausschluss der leeren Menge definiert.

Als einwertig werden im Folgenden Abbildungen mit eindeutiger, einelementiger Zuordnung verstanden.

Im Hinblick auf die Behandlung von Differentialinklusionen, Zufallsgrößen und stochastischen Prozessen sind Messbarkeitseigenschaften von großer Bedeutung.

Dazu seien im Weiteren (Ω, \mathcal{F}) ein messbarer Raum und Y ein vollständiger, separabler, metrischer Raum. Eine mengenwertige Abbildung $F : \Omega \rightarrow 2^Y$ mit abgeschlossenen Bildern heißt *messbar*, falls das Urbild jeder offenen Menge O in Y eine messbare Menge ist. D. h., es gilt

$$F^{-1}(O) = \{\omega \in \Omega : F(\omega) \cap O \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}.$$

Ein *messbarer Selektor* f von F ist eine messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow Y$ bezüglich der σ -Algebra der Borelmengen aus Y mit $f(\omega) \in F(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$.

Der nächste Satz gibt Auskunft über die Existenz messbarer Selektoren.

Satz 1.1.3 (*Satz von Kuratowski-Ryll-Nardzewski*)

Es sei $F : \Omega \rightarrow 2^Y$ eine messbare mengenwertige Abbildung mit abgeschlossenen Bildern. Dann existiert ein messbarer Selektor f von F .

Der Beweis wird z. B. von Hu und Papageorgiou [51] in Kapitel 2.2.1 geführt.

Es folgt eine Aussage über die Darstellbarkeit messbarer mengenwertiger Abbildungen.

Satz 1.1.4 (*Charakterisierungstheorem*)

Für eine mengenwertige Abbildung $F : \Omega \rightarrow 2^Y$ mit abgeschlossenen Bildern sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) F ist messbar.
- (ii) Für alle $y \in Y$ ist $\omega \mapsto d(y, F(\omega))$ eine messbare Funktion.
- (iii) Es gibt eine Folge messbarer Selektoren $(f_n)_{n \geq 1}$ von F , so dass für jedes $\omega \in \Omega$

$$F(\omega) = \overline{\bigcup_{n \geq 1} \{f_n(\omega)\}}$$

gilt.

Von Aubin und Frankowska wird in [7], Kapitel 8.3 ein Beweis für das Charakterisierungstheorem gegeben.

Ein weiterer wichtiger Begriff der mengenwertigen Analysis ist der des *mengenwertigen Integrals*. Die Definition geht auf Aumann [8] zurück.

Im Folgenden seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein σ -finites vollständiges Maßraum, Y ein reeller, separabler Banachraum und $F : \Omega \rightarrow 2^Y$ eine mengenwertige Abbildung. Zusätzlich wird für $1 \leq p \leq \infty$ die Menge aller p -integrierbaren Selektoren

$$S_F^p = \{f \in L^p(\Omega; Y) : f(\omega) \in F(\omega) \text{ für } \mu\text{-fast alle } \omega \in \Omega\} \quad (1.1.4)$$

eingeführt. Falls $S_F^1 \neq \emptyset$ ist, lässt sich das Aumann-Integral einer mengenwertigen Abbildung F einführen als Menge der Lebesgue-Integrale aller integrierbaren Selektoren

$$\int_{\Omega} F(\omega) d\mu(\omega) = \left\{ \int_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega) : f \in S_F^1 \right\}. \quad (1.1.5)$$

Aus der Darstellung ist ersichtlich, dass Eigenschaften des Integrals wie Monotonie und Homogenität auf die Integrale der Selektoren zurückführbar sind. Damit gelten nach Baier [9] für $I \subset \Omega$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $F_1(\omega) \subset F_2(\omega)$ fast überall in I

$$\int_I F_1(\omega) d\mu(\omega) \subset \int_I F_2(\omega) d\mu(\omega) \quad \text{sowie} \quad \int_I \lambda F(\omega) d\mu(\omega) = \lambda \int_I F(\omega) d\mu(\omega).$$

Mit der Definition der Addition von Mengen über die Minkowski-Summe folgt, dass die Linearität des Integrals nach Aumann nicht erfüllt ist. Für den Abschluss der Summation sind diesbezüglich Aussagen möglich (siehe z. B. Hu und Papageorgiou [51]).

Zum Verständnis *deterministischer Differentialinklusionen* sei auf die umfangreichen Informationen in den Arbeiten von Aubin und Cellina [6], Filippov [38], Kisielewicz [57] und Smirnov [85] verwiesen.

Im Folgenden werden einige Beispiele für deterministische Differentialinklusionen betrachtet.

Gegeben sei das mengenwertige Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &\in F(t, x(t)), \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{1.1.6}$$

für fast alle $t \in [0, T]$ mit $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Die Anfangswertbedingung kann alternativ auch als Inklusion gewählt werden.

Derartige Aufgabenstellungen, eine Funktion $x(t)$ zu finden, deren Ableitung bezüglich t innerhalb einer Menge $F(t, x(t))$ liegt, finden nicht nur Anwendung bei der Modellierung ökonomischer, sozialer und biologischer Makrosysteme oder der Behandlung von Differentialgleichungen mit unzureichend bekannten Eingangsgrößen, sondern auch in der Steuertheorie. Beispiele dieser Anwendungsgebiete werden in [7], [52] oder [85] dargestellt.

Oft bietet sich die Möglichkeit an, ein gegebenes Problem, bestehend aus Gleichungen und Restriktionen, die durch Mengen beschrieben werden, in eine Differentialinklusion umzuformen. So besitzen zum Beispiel das Differentialgleichungssystem mit der Steuerung u

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U(x(t))$$

und die Differentialinklusion

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) \quad \text{mit} \quad F(x) = \bigcup_{u \in U(x)} f(x, u)$$

für fast alle t nach Smirnov [85] die gleichen Trajektorien.

Als Lösung für (1.1.6) wird eine Funktion $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert, die mit entsprechenden Regularitätsbedingungen $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$ und $x(0) = x_0$ erfüllt.

Eine andere Möglichkeit der Lösungsdefinition nutzt die Selektoren f von F . Gibt es stetige Funktionen $x(t)$ und $f(t, x) \in F(t, x)$, die der Differentialgleichung mit Anfangswertbedingung

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t)), \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

für fast alle t genügen, dann ist x eine Lösung.

Differentialinklusionen besitzen gegebenenfalls eine Vielzahl von Lösungen - also eine Lösungsmenge.

1.2 Maximal-monotone und Lipschitz-stetige mengenwertige Abbildungen

Maximal-monotone Abbildungen können durch Lipschitz-stetige Funktionen, die Selektoren sind, approximiert werden. Der entscheidende Vorteil liegt damit im Übergang zu Gleichungen, für die Lösungstheorien hinlänglich bekannt sind, statt die zugehörigen Inklusionen zu betrachten.

Es sei H ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_H$. Ein Operator $F : H \rightarrow 2^H$ heißt *monoton*, wenn

$$(y_1 - y_2, x_1 - x_2)_H \geq 0$$

für jedes Paar $(x_i, y_i) \in \text{Gr } F$, $i = 1, 2$ gilt.

Der Operator F heißt *maximal-monoton*, wenn F monoton ist und für $(x_1, y_1) \in H \times H$ mit $(y_1 - y_2, x_1 - x_2)_H \geq 0$ für alle $(x_2, y_2) \in \text{Gr } F$ folgt, dass $(x_1, y_1) \in \text{Gr } F$ erfüllt ist.

Damit ist eine monotone Abbildung F maximal in dem Sinn, dass es keine weitere monotone Abbildung gibt, deren Graph den Graph von F umfasst.

Besitzt $-F$ die Eigenschaft, maximal-monoton zu sein, so wird F als *maximal-dissipativ* bezeichnet.

Jede stetige, wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beispielsweise ist maximal-monoton. Unstetige, wachsende Funktionen sowie monotone Abbildungen können stets maximal-monoton erweitert werden.

So gibt es für monotone Operatoren $F : H \rightarrow 2^H$ mit $D(F) = \{x \in H : F(x) \neq \emptyset\} \neq \emptyset$ nach dem Lemma von Zorn stets eine maximal-monotone Erweiterung \tilde{F} , für die $D(\tilde{F}) \subseteq \overline{\text{conv}}D(F)$ gilt. In den Arbeiten von Hu und Papageorgiou [51], Kapitel 3.2.21 oder Rockafellar und Wets [84], Kapitel 12.6 wird der allgemeine Fall reflexiver Räume X und monotoner Abbildungen $F : X \rightarrow 2^{X^*}$ dargelegt.

Eine Möglichkeit der Konstruktion einer maximal-monotonen Erweiterung für eine wachsende Funktion mit endlich vielen Sprüngen besteht in der Hinzunahme von Intervallen als zusätzliche Bildmengen, deren Eckpunkte durch links- und rechtsseitige Grenzwerte der Funktion an den Unstetigkeitsstellen definiert sind. Die dadurch entstehende mengenwertige Abbildung besitzt die ursprüngliche Funktion als Selektor.

Für die Anwendungen in den Kapiteln 2 und 4 wird das nächste Beispiel in abgewandelter Form benutzt.

Beispiel 1.2.1 Die stückweise lineare Funktion f und deren maximal-monotone Erweiterung F sind mit

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 2; \\ 3x, & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{und} \quad F(x) = \begin{cases} 2x, & x < 2; \\ [4, 6], & x = 2; \\ 3x, & x > 2 \end{cases}$$

gegeben.

Für den Nachweis von Selektionseigenschaften ist die folgende Proposition hilfreich.

Proposition 1.2.2 (Vgl. Aubin und Frankowska [7], Proposition 3.5.6)
Es sei $F : H \rightarrow 2^H$ ein maximal-monotoner Operator. Dann gelten:

- (i) Die Abbildung besitzt abgeschlossene und konvexe Bilder $F(x)$.
- (ii) Der Graph von F ist stark-schwach abgeschlossen. D. h., wenn $(x_n)_{n \geq 1} \subseteq H$ stark gegen x konvergiert und $(y_n)_{n \geq 1} \subseteq H$ mit $y_n \in F(x_n)$ schwach gegen y konvergiert, so folgt $y \in F(x)$.

Eine wichtige Schlussfolgerung dieser Proposition betrifft die eindeutige Existenz der *Minimalselektion*.

In Hilberträumen ist die *Minimalabbildung* $F^0 : H \rightarrow 2^H$ einer mengenwertigen Abbildung $F : H \rightarrow 2^H$ durch

$$F^0(x) = \left\{ y \in F(x) : \|y\|_H = \min_{z \in F(x)} \|z\|_H \right\}$$

definiert.

Bemerkung 1.2.3 Die Abbildung F^0 existiert und ist einwertig für mengenwertige Abbildungen mit abgeschlossenen, konvexen Bildern, vgl. Aubin und Frankowska [7], Abschnitt 9.3. Die sogenannte *Minimalselektion* ist damit der Selektor mit der kleinsten Norm.

Der nächste Satz beschäftigt sich mit der Approximation maximal-monotoner Abbildungen.

Satz 1.2.4 Für eine maximal-monotone Abbildung $F : H \rightarrow 2^H$ sind die einwertige Resolvente $J_\lambda : H \rightarrow H$ und die einwertige Yosida-Approximation $F_\lambda : H \rightarrow H$ für alle $\lambda > 0$ durch

$$J_\lambda(x) = (I + \lambda F)^{-1}(x) \quad \text{und} \quad F_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}(x - J_\lambda(x))$$

definiert. Weiterhin gelten für J_λ und F_λ :

- (i) J_λ ist nicht-expansiv, d. h.

$$\|J_\lambda(x) - J_\lambda(y)\|_H \leq \|x - y\|_H \quad \text{für alle } x, y \in H,$$

- (ii) F_λ ist maximal-monoton und Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstante $\frac{1}{\lambda}$,
- (iii) $F_\lambda(x) \in F(J_\lambda(x))$ für alle $x \in H$,

(iv) $\|F_\lambda(x)\|_H \leq \|F^0(x)\|_H$ für alle $x \in H$,

(v) $\|F_\lambda(x) - F^0(x)\|_H^2 \leq 2\|F^0(x)\|_H \cdot d(F_\lambda(x), F(x))$ für alle $x \in H$.

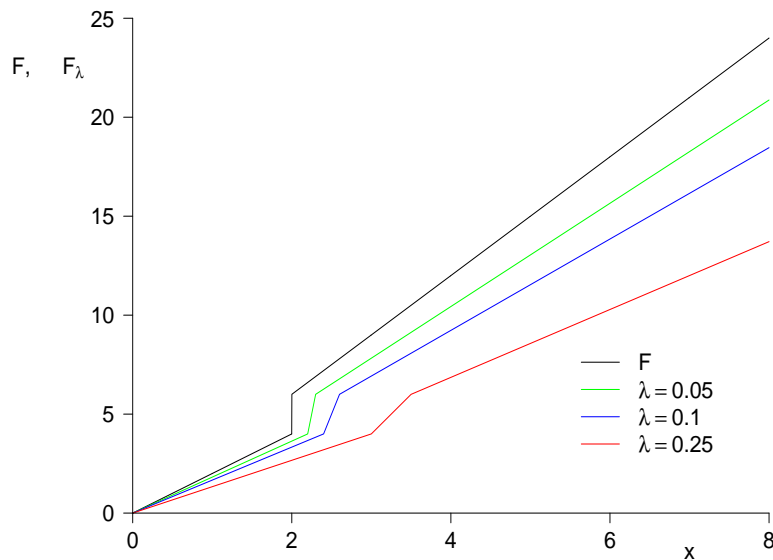
Die Eigenschaften (i)-(iv) sind in Hu und Papageorgiou [51], Abschnitt 3.2.30 bzw. die letzte Aussage von Motyl [75] bewiesen.

Die Resolvente J_λ von F approximiert die Identität, während die Yosida-Approximation F_λ einen approximativen Selektor von F darstellt.

Beispiel 1.2.5 Für die maximal-monotone Abbildung in Beispiel 1.2.1 ergibt sich die Yosida-Approximation für $\lambda > 0$

$$F_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{2x}{2\lambda + 1}, & x < 4\lambda + 2; \\ \frac{x-2}{\lambda}, & 4\lambda + 2 \leq x \leq 6\lambda + 2; \\ \frac{3x}{3\lambda + 1}, & x > 6\lambda + 2. \end{cases}$$

Die nachfolgende Graphik veranschaulicht sowohl die mengenwertige Abbildung F als auch die Yosida-Approximation F_λ für verschiedene Werte von λ .



In dieser Arbeit werden Nemytskij-Operatoren mengenwertiger Abbildungen verwendet.

Proposition 1.2.6 (Vgl. Aubin und Cellina [6], Proposition 4, Kapitel 3.1)

Es sei $\widehat{F} : L^2([0, T]; H) \rightarrow 2^{L^2([0, T]; H)}$ die durch $(\widehat{F}x)(t) = F(x(t))$ fast überall in t definierte Nemytskij-Abbildung von $F : H \rightarrow 2^H$.

Ist F maximal-monoton, so gilt dies ebenfalls für \widehat{F} .

Es seien X, Y Banachräume. Eine Abbildung $F : X \rightarrow 2^Y$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es eine Konstante $L > 0$ derart gibt, dass die Ungleichung

$$h(F(x), F(y)) \leq L \|x - y\|_X \quad (1.2.1)$$

für alle $x, y \in X$ erfüllt ist. Dabei wird die Hausdorff-Distanz bezüglich der durch die Metrik induzierten Norm in Y gebildet.

Für Lipschitz-stetige Abbildungen gelten Selektionstheoreme, die sich häufig aus folgendem Satz ableiten lassen.

Satz 1.2.7 (Michaels Selektionstheorem)

Es seien X ein parakompakter Raum, Y ein Banachraum und $F : X \rightarrow 2^Y$ eine unterhalbstetige Abbildung mit abgeschlossenen und konvexen Bildmengen in Y .

Dann existiert ein stetiger Selektor von F .

Der Beweis dieser Aussage wird z. B. bei Hu und Papageorgiou in [51], Kapitel 1.4.6 erbracht.

Damit existieren für Lipschitz-stetige Abbildungen stets stetige Selektoren, denn Lipschitz-Stetigkeit impliziert Stetigkeit und diese wiederum Unterhalbstetigkeit.

Nach Yost [90] besitzt nicht jede Lipschitz-stetige Abbildung einen Lipschitz-stetigen Selektor. Aber in endlichdimensionalen Räumen ist eine Existenzaussage möglich.

Satz 1.2.8 (Vgl. Aubin und Frankowska [7], Kapitel 9.4.3)

Eine Lipschitz-stetige Abbildung $F : X \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ von einem metrischen Raum X mit nicht-leeren, abgeschlossenen und konvexen Bildern in \mathbb{R}^n besitzt einen Lipschitz-stetigen Selektor.

Abschließend wird ein Satz angeführt, der das Prüfen der Selektionseigenschaft erleichtert.

Satz 1.2.9 (Vgl. Hu und Papageorgiou [51], Kapitel 7.3.9)

Gegeben seien ein Banachraum Y , ein σ -finites Maßraum (Ω, Σ, μ) und Funktionen $f, (f_n)_{n \geq 1} \in L^p(\Omega; Y)$ für $1 \leq p < \infty$ mit $f_n \xrightarrow{w} f$ in $L^p(\Omega; Y)$ für $n \rightarrow \infty$. Des Weiteren gelte $f_n(\omega) \in G(\omega)$ μ -fast überall, wobei $G : \Omega \rightarrow 2^Y$ schwach-kompakte Bildmengen in Y besitzt. Dann gilt μ -f. ü.

$$f(\omega) \in \overline{\text{conv}} \left(w\text{-}\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{f_n(\omega)\} \right).$$

Im Zusammenhang mit Satz 1.2.9 wird in den nachfolgenden Kapiteln der Begriff des *schwachen oberen Grenzwertes* einer Menge benötigt.

Definition 1.2.10 Für einen Banachraum Y und eine Folge abgeschlossener, konvexer Teilmengen $(A_n)_{n \geq 1} \subseteq Y$ ist der schwache obere Grenzwert $w\text{-}\overline{\lim} A_n$ definiert mit

$$w\text{-}\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \left\{ y \in Y : \exists (y_{n_k})_{n_k \geq 1} \subseteq Y \text{ mit } y_{n_k} \xrightarrow{w} y \text{ für } n_k \rightarrow \infty, \right. \\ \left. y_{n_k} \in A_{n_k}, n_1 < n_2 < \dots \right\}. \quad (1.2.2)$$

1.3 Mengenwertige stochastische Analysis

In den sich anschließenden Ausführungen der Arbeit werden stochastische Integralinklusionen des Types

$$U(t) \in U(0) + \int_0^t F_1(s, U(s)) ds + \int_0^t F_2(s, U(s)) dW(s) \quad (1.3.1)$$

untersucht, wobei $(W(t))_{t \in [0, T]}$ ein reeller Wiener Prozess und F_1, F_2 mengenwertige Abbildungen sind.

Daneben werden die symbolische Schreibweise

$$\begin{aligned} dU(t) &\in F_1(t, U(t)) dt + F_2(t, U(t)) dW(t), \\ U(0) &= U_0 \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

und der Begriff *stochastische Differentialinklusion* mit Anfangswertbedingung verwendet.

Das erste Integral der Inklusion (1.3.1) ist im Sinne Aumanns nach Beziehung (1.1.5) zu verstehen, dagegen ist das zweite mengenwertige Integral bezüglich des Wiener Prozesses entsprechend Kim und Kim [56] noch einzuführen.

Für die stochastischen Untersuchungen wird an einigen Stellen die Konvention genutzt, die Abhängigkeit zufälliger Größen vom Argument $\omega \in \Omega$ in der Schreibweise zu vernachlässigen.

Es seien (Ω, \mathcal{F}, P) ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ die von einem Wiener Prozess $(W(t))_{t \in [0, T]}$ erzeugte Filtration, die den üblichen Bedingungen genügt, und Y ein reeller, separabler Hilbertraum.

Eine messbare Abbildung $F : \Omega \rightarrow 2^Y$ heißt *Y-wertige mengenwertige Zufallsgröße* oder *Zufallsmenge*. Mit dem Integralbegriff nach Aumann wird der *Erwartungswert einer Zufallsmenge* als Menge der Erwartungswerte aller integrierbaren Selektoren

$$E(F) = \{E(f) : f \in S_F^1\}$$

gemäß der Definition in (1.1.4) erklärt.

Definition 1.3.1 Eine Abbildung $F : \Omega \times [0, T] \rightarrow 2^Y$ heißt *mengenwertiger stochastischer Prozess* $(F(t))_{t \in [0, T]}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (a) $F(\omega, t)$ ist für alle $t \in [0, T]$ und fast alle $\omega \in \Omega$ abgeschlossen und konvex.
- (b) Für festes t ist $F(\cdot, t)$ eine Y -wertige Zufallsmenge. D. h., für alle $t \in [0, T]$ und Mengen $A \in \mathcal{B}_Y$ der σ -Algebra der Borelmengen in Y gilt

$$\{\omega \in \Omega : F(\omega, t) \cap A \neq \emptyset\} \in \mathcal{F}.$$

In der Literatur werden auch Familien von messbaren Zufallsgrößen, die lediglich abgeschlossen sind und der Bedingung (b) genügen, als mengenwertige stochastische Prozesse bezeichnet (vgl. hierzu Kisielewicz [58] oder Michta und Rybinski [73]).

Als Selektor wird analog zu den deterministischen Betrachtungen ein einwertiger stochastischer Prozess $(f(t))_{t \in [0, T]}$ definiert mit $f : \Omega \times [0, T] \rightarrow Y$, der für jedes $t \in [0, T]$

$$f(t) \in F(t) \quad P\text{-f.s.}$$

erfüllt.

Die Definitionen von Messbarkeit und \mathcal{F}_t -Adaptiertheit eines mengenwertigen Prozesses erfolgen analog zum Abschnitt 1.1. Damit heißt ein Prozess $(F(t))_{t \in [0, T]}$ *messbar*, wenn für $B \in \mathcal{B}_Y$

$$\{(\omega, t) \in \Omega \times [0, T] : F(\omega, t) \cap B \neq \emptyset\} \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}_{[0, T]}$$

gilt und \mathcal{F}_t -*adaptiert*, wenn $F(t)$ für jedes $t \in [0, T]$ messbar bezüglich der σ -Algebra \mathcal{F}_t ist.

Messbare wie \mathcal{F}_t -adaptierte Selektoren existieren für messbare bzw. \mathcal{F}_t -adaptierte mengenwertige stochastische Prozesse nach dem Selektionstheorem 1.1.3 von Kuratowski-Ryll-Nardzewski. Ebenso gilt das Charakterisierungstheorem 1.1.4 für messbare mengenwertige stochastische Prozesse.

Nachfolgend wird die Einführung eines mengenwertigen stochastischen Integrals bezüglich des Wiener Prozesses skizziert. Dazu ist folgender Raum zu spezialisieren.

Es sei $L_{ad}^2(\Omega; Y)$ der Raum der \mathcal{F}_t -adaptierten, Y -wertigen Prozesse $(f(t))_{t \in [0, T]}$, so dass für jedes $t \in [0, T]$

$$E \int_0^t \|f(s)\|_Y^2 ds < \infty$$

erfüllt ist.

Jedem mengenwertigen Prozess $F : \Omega \times [0, T] \rightarrow 2^Y$ wird die Menge

$$\mathcal{S}_{F(t)}^2 = \{(f(t))_{t \in [0, T]} \in L_{ad}^2(\Omega; Y) : f(\omega, t) \in F(\omega, t) \text{ für alle } t \in [0, T], \text{ fast alle } \omega \in \Omega\}$$

zugeordnet.

Ein Prozess $(F(t))_{t \in [0, T]}$ heißt L^2 -beschränkt, falls ein Prozess $(h(t))_{t \in [0, T]} \in L^2_{ad}(\Omega; \mathbb{R}^+)$ existiert, der für beliebige $y \in F(\omega, t)$ der Ungleichung

$$\|y\|_Y \leq h(\omega, t)$$

für alle $t \in [0, T]$ und fast alle $\omega \in \Omega$ genügt. Der Prozess $(F(t))_{t \in [0, T]}$ ist L^2 -beschränkt, wenn $(\|F(t)\|_Y)_{t \in [0, T]} \in L^2_{ad}(\Omega; \mathbb{R}^+)$ gilt.

Aus den Sätzen 3.9 in Kim und Kim [56], 3.2 in Jung und Kim [50] folgt:

Satz 1.3.2 *Es sei $(F(t))_{t \in [0, T]}$ ein L^2 -beschränkter, \mathcal{F}_t -adaptierter, Y -wertiger mengenwertiger Prozess.*

Dann existiert eine eindeutige, \mathcal{F}_t -messbare Zufallsmenge $\mathcal{I}(t)$ mit konvexen, abgeschlossenen und beschränkten Bildmengen in Y , so dass für alle $t \in [0, T]$

$$\mathcal{I}(\omega, t) = \left\{ \left(\int_0^t f(s) dW(s) \right) (\omega) : (f(t))_{t \in [0, T]} \in \mathcal{S}_{F(t)}^2 \right\}$$

P -f. s. gilt.

Dabei sind die Integrale, aus denen die Menge $\mathcal{I}(t)$ besteht, als Itô-Integrale aufzufassen. Die zufällige Menge $\mathcal{I}(t)$ heißt *stochastisches Integral des mengenwertigen Prozesses $F(t)$ bezüglich $W(t)$* , wofür die Schreibweise

$$\mathcal{I}(t) = \int_0^t F(s) dW(s)$$

verwendet wird.

Auch hier erfolgt die Charakterisierung einer mengenwertigen Struktur mit Hilfe von Selektoren. Vorausgesetzt wird, dass $\mathcal{I}(t)$ auch alle stochastischen Integrale vom Maß Null enthält. Damit ist $\mathcal{I}(t)$ eine abgeschlossene Menge in Y bezüglich ω und t .

Das mengenwertige stochastische Integral $\mathcal{I}(t)$ verfügt über ähnliche Eigenschaften wie das Itô-Integral. Unter anderem gelten Additivität für Abbildungen mit kompakten Bildmengen unter Verwendung der Minkowski-Summe

$$\int_0^t (F_1(s) + F_2(s)) dW(s) = \int_0^t F_1(s) dW(s) + \int_0^t F_2(s) dW(s)$$

und eine Form der Itô-Isometrie

$$E \left(\left\| \int_0^t F(s) dW(s) \right\|_Y^2 \right) = E \left(\int_0^t \|F(s)\|_Y^2 ds \right),$$

wobei F, F_1, F_2 den Forderungen aus Satz 1.3.2 genügen und $\|\cdot\|_Y$ die Norm der Menge nach der Definition in (1.1.1) bezeichnet.

Diese und weitere Eigenschaften werden in [56] untersucht.

Kim und Kim führen das mengenwertige stochastische Integral bezüglich einer zylindrischen Hilbertraum-wertigen Brownschen Bewegung ein. Die Darstellung mit einem reellwertigen Wiener Prozess erfolgt durch Jung und Kim in [50]. Daneben existieren weitere Möglichkeiten der Definition. So betrachten Boçsan [18] und Kisielewicz [59] mengenwertige stochastische Integrale als Menge aller Itô-Integrale, die mit Selektoren von F gebildet werden, ohne jedoch Integrale vom Maß Null zu berücksichtigen.

Kapitel 2

Endlichdimensionale stochastische Differentialinklusio- nen

Im zweiten Kapitel werden stochastische Differentialinklusio-
nen auf endlichdimensionalen Räumen betrachtet.

Ein wichtiges Hilfsmittel, um die Existenz von Lösungen nachzuweisen, ist die Yosida-
Approximation. Sie besitzt für maximal-monotone Abbildungen nach Satz 1.2.4 Eigen-
schaften, die eine Anwendung klassischer Existenzaussagen zu stochastischen Differential-
gleichungen ermöglichen.

Neben einem Existenzsatz werden an dieser Stelle nach einer Einführung in die Problem-
stellung Bedingungen für die Existenz eindeutiger Lösungen in Abschnitt 2.3 vorgestellt.
Das Kapitel schließt mit einigen Beispielen.

2.1 Problemstellung

Es seien (Ω, \mathcal{F}, P) ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ eine Filtra-
tion, die den üblichen Bedingungen genügt. Bezüglich dieser Filtration sind die unab-
hängigen, reellwertigen Wiener Prozesse $(W_1(t))_{t \in [0, T]}$, $(W_2(t))_{t \in [0, T]}$ adaptiert.

Die Norm und das Skalarprodukt in \mathbb{R}^d , $d \geq 1$ werden mit $|\cdot|$ bzw. (\cdot, \cdot) bezeichnet,
die Norm in $L^2(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^d)$ mit $\|\cdot\|$. Für die Hausdorff-Distanz von Mengen in
 $L^2(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^d)$ steht $h(\cdot, \cdot)$.

Ausgehend von Funktionen $A, B : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ und mengenwertigen Abbil-
dungen $F_1, F_2 : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow 2^{\mathbb{R}^d}$, die in $(\omega, t, u) \in \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$ messbar und
für feste (t, u) \mathcal{F}_t -adaptiert bezüglich ω sind, wird die stochastische Differentialinklusion

$$\begin{aligned} dU(t) + A(t, U(t))dt + B(t, U(t))dW_1(t) &\in -F_1(t, U(t))dt - F_2(t, U(t))dW_2(t), \\ U(0) &= U_0 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

mit einer \mathcal{F}_0 -messbaren Anfangswertbedingung U_0 untersucht.

Definition 2.1.1 Ein stochastischer Prozess $(U(t))_{t \in [0, T]}$, $U \in L^2(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^d)$ heißt Lösung der Differentialinklusion (2.1.1), wenn es \mathcal{F}_t -messbare Prozesse $(f_1(t))_{t \in [0, T]}$, $(f_2(t))_{t \in [0, T]}$ mit $f_1, f_2 \in L^2(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^d)$ derart gibt, dass für fast alle $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$ die Selektionseigenschaft

$$f_i(t) \in F_i(t, U(t)), i = 1, 2 \quad (2.1.2)$$

erfüllt ist und die Gleichung

$$\begin{aligned} U(t) + \int_0^t A(s, U(s))ds + \int_0^t B(s, U(s))dW_1(s) \\ = U_0 - \int_0^t f_1(s)ds - \int_0^t f_2(s)dW_2(s) \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

gilt.

Bemerkung 2.1.2 Eine Lösung von (2.1.1) besteht somit aus einem Tripel \mathcal{F}_t -messbarer Prozesse (U, f_1, f_2) , wofür die Beziehungen (2.1.2) und (2.1.3) gelten.

Es werden folgende Annahmen benötigt.

(H0) Der Anfangswert $U_0 \in \mathbb{R}^d$ ist eine \mathcal{F}_0 -messbare Zufallsvariable mit endlichem zweitem Moment, $E|U_0|^2 < \infty$.

(H1) Für die Operatoren A, B gelten die Voraussetzungen:

- (i) Die Abbildungen $u \mapsto A(\omega, t, u)$ bzw. $B(\omega, t, u)$ sind stetig für alle $\omega \in \Omega$ und $t \in [0, T]$.
- (ii) Es gibt eine Konstante $c_1 > 0$ mit

$$-2(A(t, u), u) + |B(t, u)|^2 \leq c_1(1 + |u|^2)$$

für alle $(\omega, t, u) \in \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$.

(iii) Die Ungleichung

$$-2(A(t, u) - A(t, v), u - v) + |B(t, u) - B(t, v)|^2 \leq c_2|u - v|^2$$

gilt mit einer Konstante $c_2 > 0$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^d$ und $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$.

(iv) Für alle $(\omega, t, u) \in \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$ und eine Konstante $c_3 > 0$ ist

$$|A(t, u)| \leq c_3|u|$$

erfüllt.

(H2) Die mengenwertigen stochastischen Prozesse $(F_i(t))_{t \in [0, T]}$, $i = 1, 2$ genügen den Bedingungen:

- (i) Die Abbildungen $u \mapsto F_i(\omega, t, u)$ sind maximal-monoton für fast alle $\omega \in \Omega$ und $t \in [0, T]$.
- (ii) Es existieren Konstanten $d_1, d_2 > 0$ derart, dass die Minimalselektionen $F_i^0(t, u)$ die Ungleichungen

$$|F_1^0(t, u)| \leq d_1|u|, \quad |F_2^0(t, u)| \leq d_2|u|$$

für alle $(\omega, t, u) \in \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$ erfüllen.

- (iii) Der Nemytskij-Operator $\widehat{F}_2 : L^2(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^d) \rightarrow 2^{L^2(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^d)}$ von F_2 sei mit

$$\widehat{F}_2(u) = \{f \in L^2(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^d) : f(t) \in F_2(t, u(t)) \text{ für fast alle } (\omega, t)\}$$

gegeben.

Auf beschränkten Mengen ist $u \mapsto \widehat{F}_2(u)$ gleichmäßig stetig im folgenden Sinn:

Zu jeder Konstante $r > 0$ gibt es eine Funktion $\rho : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$,

$\lim_{z \rightarrow 0} \rho(z) = 0$, so dass für alle $\|u\|, \|v\| \leq r$

$$h(\widehat{F}_2(u), \widehat{F}_2(v)) \leq \rho(\|u - v\|)$$

gilt.

- (iv) Die Abbildung $u \mapsto \widehat{F}_2^0(u)$ ist für alle $u \in L^2(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^d)$ lokal relativ kompakt, d. h., sie bildet beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen ab.

2.2 Existenz von Lösungen

Für die stochastische Differentialinklusion (2.1.1) mit mengenwertiger Drift und Diffusion wird durch die Autorin der folgende Existenzsatz bewiesen.

Satz 2.2.1 *Unter den Annahmen (H0)-(H2) besitzt die stochastische Differentialinklusion (2.1.1) mindestens eine Lösung.*

Der Beweis basiert auf den nachfolgenden drei Lemmata. Zuerst wird die Lösbarkeit der stochastischen Differentialgleichungen überprüft, die durch das Ersetzen der maximal-monotonen Abbildungen mit den jeweiligen Yosida-Approximationen entstehen.

Diese Gleichungen sind nach dem Satz A.6.1 von Krylov und Rozovskij [67] für endlich-dimensionale Situationen eindeutig lösbar. Anschließend zeigt man, dass die Lösungen beschränkt sind und Teilfolgen der Lösungsfolge die Cauchy-Eigenschaft besitzen.

Im letzten Schritt wird über die Selektionseigenschaft nachgewiesen, dass der Grenzwert der Teilfolge die Inklusion löst.

Lemma 2.2.2 *Es seien $F_{1\lambda}(t, \cdot), F_{2\lambda}(t, \cdot)$ die Yosida-Approximationen der mengenwertigen Abbildungen $F_1(t, \cdot), F_2(t, \cdot)$ für $t \in [0, T]$.*

Das stochastische Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} dU_\lambda(t) + A(t, U_\lambda(t))dt + B(t, U_\lambda(t))dW_1(t) &= -F_{1\lambda}(t, U_\lambda(t))dt - F_{2\lambda}(t, U_\lambda(t))dW_2(t), \\ U_\lambda(0) &= U_0 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

*ist mit den Voraussetzungen **(H0)**-**(H2)** für jedes $\lambda > 0$ eindeutig lösbar. Zusätzlich erfüllt die \mathcal{F}_t -messbare und realisierungsweise stetige Lösung $U_\lambda(t), t \in [0, T]$*

$$E|U_\lambda(t)|^2 < \infty, \quad E \int_0^t |U_\lambda(s)|^2 ds < \infty.$$

Beweis.

Für die Anwendung des erwähnten Existenz- und Eindeigkeitssatzes von Krylov und Rozovskij sind die dortigen Bedingungen der Messbarkeit, Stetigkeit, Koerzivität, Monotonie und Beschränktheit für $\omega \in \Omega, t \in [0, T]$ und $u \in \mathbb{R}^d$ zu überprüfen.

Die Messbarkeit der Abbildungen $A, B, F_i, i = 1, 2$ bezüglich t ist vorausgesetzt. Chipot [27] zeigt dies für die Funktionen $F_{i\lambda}$ in Kapitel 5.4, S. 74ff. Nach Annahme **(H1)**(i) sind A, B stetig bezüglich u , ebenso wie $F_{1\lambda}, F_{2\lambda}$ nach **(H2)**(i) in Verbindung mit Satz 1.2.4(ii).

Die Koerzivität ergibt sich aus den Bedingungen **(H1)**(ii), **(H2)**(i), (ii) und der Eigenschaft (iv) der Yosida-Approximationen in Satz 1.2.4.

Wegen der Lipschitz-Stetigkeit und Monotonie der Yosida-Approximation $F_{1\lambda}$ nach Satz 1.2.4(ii) sowie der Berücksichtigung von Annahme **(H1)**(iii) gilt für alle $u, v \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} &-2(A(t, u) + F_{1\lambda}(t, u) - A(t, v) - F_{1\lambda}(t, v), u - v) \\ &\quad + |B(t, u) - B(t, v)|^2 + |F_{2\lambda}(t, u) - F_{2\lambda}(t, v)|^2 \\ &= -2(A(t, u) - A(t, v), u - v) - 2(F_{1\lambda}(t, u) - F_{1\lambda}(t, v), u - v) \\ &\quad + |B(t, u) - B(t, v)|^2 + |F_{2\lambda}(t, u) - F_{2\lambda}(t, v)|^2 \\ &\leq \left(c_2 + \frac{1}{\lambda^2} \right) |u - v|^2. \end{aligned}$$

Die Wachstumsbeschränkung der Driftterme A und $F_{1\lambda}$ ist erfüllt als direkte Konsequenz aus **(H1)**(iv), der Beschränktheit der Yosida-Approximation durch die Minimalsektion gemäß Satz 1.2.4(iv) und Voraussetzung **(H2)**(ii).

Damit sichern der Satz A.6.1 von Krylov und Rozovskij für endlichdimensionale Probleme die Existenz einer eindeutigen, \mathcal{F}_t -messbaren, realisierungsweise stetigen Lösung $U_\lambda(t)$ von (2.2.1) und die Bemerkung A.6.2 die in Lemma 2.2.2 angegebenen Eigenschaften. \square

Lemma 2.2.3 *Für eine Lösung $U_\lambda(t)$ der Aufgabe (2.2.1) gilt unter den Annahmen **(H0)**-**(H2)** mit einer positiven Konstante K für alle $\lambda > 0$*

$$E \sup_{0 \leq t \leq T} |U_\lambda(t)|^2 \leq K.$$

Beweis.

Im ersten Schritt wird für eine Konstante $\tilde{K} > 0$ und alle $\lambda > 0$ die Aussage $E|U_\lambda(t)|^2 \leq \tilde{K}$ nachgewiesen.

Die Itô-Formel für das Normquadrat eines \mathbb{R}^d -wertigen Prozesses nach Satz A.5.3 angewendet auf (2.2.1) führt zu

$$\begin{aligned} |U_\lambda(t)|^2 &= |U_0|^2 - 2 \int_0^t (A(s, U_\lambda(s)), U_\lambda(s)) ds - 2 \int_0^t (F_{1\lambda}(s, U_\lambda(s)), U_\lambda(s)) ds \\ &\quad - 2 \int_0^t (B(s, U_\lambda(s)), U_\lambda(s)) dW_1(s) + \int_0^t |B(s, U_\lambda(s))|^2 ds \\ &\quad - 2 \int_0^t (F_{2\lambda}(s, U_\lambda(s)), U_\lambda(s)) dW_2(s) + \int_0^t |F_{2\lambda}(s, U_\lambda(s))|^2 ds. \end{aligned}$$

Mit der Erwartungswertbildung, den Bedingungen **(H1)**(ii), **(H2)**(i), (ii) zusammen mit der Eigenschaft der Yosida-Approximation aus Satz 1.2.4(iv) und der Ungleichung $-2(a, b) \leq a^2 + b^2$ folgt

$$\begin{aligned} E|U_\lambda(t)|^2 &\leq E|U_0|^2 + c_1 E \int_0^t (1 + |U_\lambda(s)|^2) ds + E \int_0^t |F_{1\lambda}(s, U_\lambda(s))|^2 ds \\ &\quad + E \int_0^t |U_\lambda(s)|^2 ds + E \int_0^t |F_{2\lambda}(s, U_\lambda(s))|^2 ds \\ &\leq E|U_0|^2 + c_1 T + (1 + c_1 + d_1^2 + d_2^2) E \int_0^t |U_\lambda(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

Das Lemma von Gronwall weist für beliebiges $\lambda > 0$ und $t \in [0, T]$ die Existenz einer Konstante \tilde{K} nach

$$E|U_\lambda(t)|^2 \leq \tilde{K} \tag{2.2.2}$$

mit $\tilde{K} = \tilde{K}(U_0, c_1, d_1, d_2, T) > 0$.

Für den weiteren Beweis von Lemma 2.2.3 werden Stoppzeiten $\tau_N = \tau_N^1 \wedge \tau_N^2$ eingeführt, wobei $\tau_N^1 = \inf\{t : |U_\lambda(t)|^2 \geq N\}$ und $\tau_N^2 = \inf\left\{t : \int_0^t |U_\lambda(s)|^2 ds \geq N\right\}$ mit $N \in \{1, 2, \dots\}$ definiert sind. Wiederum ergibt sich mit der Itô-Formel, den Annahmen **(H1)**(ii), **(H2)**(i), (ii), der Ungleichung $-2(a, b) \leq a^2 + b^2$ und Satz 1.2.4(iv)

$$\begin{aligned} |U_\lambda(t \wedge \tau_N)|^2 &\leq |U_0|^2 + c_1 \int_0^T (1 + |U_\lambda(s)|^2) ds + (1 + d_1^2 + d_2^2) \int_0^T |U_\lambda(s)|^2 ds \\ &\quad - 2 \int_0^{t \wedge \tau_N} (B(s, U_\lambda(s)), U_\lambda(s)) dW_1(s) \\ &\quad - 2 \int_0^{t \wedge \tau_N} (F_{2\lambda}(s, U_\lambda(s)), U_\lambda(s)) dW_2(s). \end{aligned}$$

Man erhält nach Supremums- und Erwartungswertbildung

$$\begin{aligned}
E \sup_{0 \leq t \leq T} |U_\lambda(t \wedge \tau_N)|^2 &\leq E|U_0|^2 + c_1 T + (1 + c_1 + d_1^2 + d_2^2) E \int_0^T |U_\lambda(s)|^2 ds \\
&\quad + 2E \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^{t \wedge \tau_N} (B(s, U_\lambda(s)), U_\lambda(s)) dW_1(s) \right| \\
&\quad + 2E \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^{t \wedge \tau_N} (F_{2\lambda}(s, U_\lambda(s)), U_\lambda(s)) dW_2(s) \right|. \quad (2.2.3)
\end{aligned}$$

Die letzten beiden Terme in (2.2.3) werden mit Hilfe der Ungleichung A.4.1 von Burkholder-Davis-Gundy und $C = C_p$ abgeschätzt zu

$$\begin{aligned}
&2E \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^{t \wedge \tau_N} (B(s, U_\lambda(s)), U_\lambda(s)) dW_1(s) \right| + 2E \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^{t \wedge \tau_N} (F_{2\lambda}(s, U_\lambda(s)), U_\lambda(s)) dW_2(s) \right| \\
&\leq 2CE \left(\int_0^{T \wedge \tau_N} |(B(s, U_\lambda(s)), U_\lambda(s))|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + 2CE \left(\int_0^{T \wedge \tau_N} |(F_{2\lambda}(s, U_\lambda(s)), U_\lambda(s))|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2CE \left(\int_0^{T \wedge \tau_N} |B(s, U_\lambda(s))|^2 |U_\lambda(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + 2CE \left(\int_0^{T \wedge \tau_N} |F_{2\lambda}(s, U_\lambda(s))|^2 |U_\lambda(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2CE \left[\left(\sup_{0 \leq s \leq T} |U_\lambda(s \wedge \tau_N)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T |B(s, U_\lambda(s))|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&\quad + 2CE \left[\left(\sup_{0 \leq s \leq T} |U_\lambda(s \wedge \tau_N)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T |F_{2\lambda}(s, U_\lambda(s))|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right].
\end{aligned}$$

Für $\varepsilon > 0$ lässt sich wegen der Youngschen Ungleichung $2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$ der letzte Ausdruck nach oben durch

$$C \left(2\varepsilon E \sup_{0 \leq t \leq T} |U_\lambda(t \wedge \tau_N)|^2 + \frac{1}{\varepsilon} E \int_0^T |B(s, U_\lambda(s))|^2 ds + \frac{1}{\varepsilon} E \int_0^T |F_{2\lambda}(s, U_\lambda(s))|^2 ds \right)$$

beschränken. Dieser Term wird nun unter Beachtung von **(H1)**(ii) und **(H2)**(ii), Satz 1.2.4(iv) mit

$$C \left(2\varepsilon E \sup_{0 \leq t \leq T} |U_\lambda(t \wedge \tau_N)|^2 + \frac{1}{\varepsilon} c_1 E \int_0^T (1 + |U_\lambda(s)|^2) ds + \frac{1}{\varepsilon} d_2^2 E \int_0^T |U_\lambda(s)|^2 ds \right)$$

majorisiert.

Insgesamt ergibt sich für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ mit $1 - 2C\varepsilon > 0$, dass

$$E \sup_{0 \leq t \leq T} |U_\lambda(t \wedge \tau_N)|^2 \leq D \left(E|U_0|^2 + E \int_0^T |U_\lambda(s)|^2 ds + 1 \right)$$

für $D = D(\varepsilon, U_0, C, c_1, d_1, d_2, T) > 0$ gilt.

Da $E|U_\lambda(t)|^2 \leq \tilde{K}$ für beliebiges $\lambda > 0$ und $t \in [0, T]$ ist, existiert eine Konstante $K > 0$ mit

$$E \sup_{0 \leq t \leq T} |U_\lambda(t \wedge \tau_N)|^2 \leq K.$$

Für $N \rightarrow \infty$ folgt die Behauptung mit dem Lemma von Fatou. \square

Lemma 2.2.4 *Sind die Voraussetzungen **(H0)**-**(H2)** erfüllt, so gilt für alle $\eta > 0$ und Teilfolgen $(\lambda') \subset (\lambda)$, $(\mu') \subset (\mu)$*

$$\lim_{\lambda', \mu' \rightarrow 0} P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |U_{\lambda'}(t) - U_{\mu'}(t)|^2 > \eta \right\} = 0,$$

wobei $U_{\lambda'}(t), U_{\mu'}(t)$ Lösungen der Aufgabe (2.2.1) für $t \in [0, T]$ sind.

Beweis.

Zunächst wird die Konvergenz einer Lösungsfolge von (2.2.1) im quadratischen Mittel gleichmäßig auf $t \in [0, T]$ bewiesen.

Es seien $U_\lambda(t), U_\mu(t)$ Lösungen der Yosida-Gleichungen (2.2.1) für $\lambda, \mu > 0$. Analog zum Beweis des Lemmas 2.2.3 führen die Anwendung der Itô-Formel und Annahme **(H1)**(iii) zu

$$\begin{aligned} E|U_\lambda(t) - U_\mu(t)|^2 &\leq c_2 E \int_0^t |U_\lambda(s) - U_\mu(s)|^2 ds \\ &\quad - 2E \int_0^t (F_{1\lambda}(s, U_\lambda(s)) - F_{1\mu}(s, U_\mu(s)), U_\lambda(s) - U_\mu(s)) ds \\ &\quad + E \int_0^t |F_{2\lambda}(s, U_\lambda(s)) - F_{2\mu}(s, U_\mu(s))|^2 ds. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Betrachtet man den zweiten Term auf der rechten Seite in (2.2.4), so zeigt sich unter Nutzung von **(H2)**(i), Satz 1.2.4(ii), (iii) mit den Resolventen $J_{1\lambda}, J_{2\lambda}$, der Ungleichung $2(a, b) \leq \frac{1}{2}a^2 + 2b^2$ und **(H2)**(ii) die Gültigkeit von

$$\begin{aligned} &-2(F_{1\lambda}(s, U_\lambda(s)) - F_{1\mu}(s, U_\mu(s)), U_\lambda(s) - U_\mu(s)) \\ &= -2(F_{1\lambda}(s, U_\lambda(s)) - F_{1\mu}(s, U_\mu(s)), \lambda F_{1\lambda}(s, U_\lambda(s)) - \mu F_{1\mu}(s, U_\mu(s))) \\ &\quad - 2(F_{1\lambda}(s, U_\lambda(s)) - F_{1\mu}(s, U_\mu(s)), J_\lambda(s, U_\lambda(s)) - J_\mu(s, U_\mu(s))) \\ &\leq -2(F_{1\lambda}(s, U_\lambda(s)) - F_{1\mu}(s, U_\mu(s)), \lambda F_{1\lambda}(s, U_\lambda(s)) - \mu F_{1\mu}(s, U_\mu(s))) \\ &= -2\lambda |F_{1\lambda}(s, U_\lambda(s))|^2 + 2\mu (F_{1\lambda}(s, U_\lambda(s)), F_{1\mu}(s, U_\mu(s))) \\ &\quad + 2\lambda (F_{1\mu}(s, U_\mu(s)), F_{1\lambda}(s, U_\lambda(s))) - 2\mu |F_{1\mu}(s, U_\mu(s))|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\lambda d_1^2 |U_\mu(s)|^2 + \frac{1}{2}\mu d_1^2 |U_\lambda(s)|^2. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Die Resolventen zu \widehat{F}_2 bezüglich λ und μ seien mit $\widehat{J}_{2\lambda}$ bzw. $\widehat{J}_{2\mu}$ bezeichnet. Folglich gilt für den letzten Ausdruck in Abschätzung (2.2.4) und $t = T$

$$\begin{aligned}
& \|\widehat{F}_{2\lambda}(U_\lambda) - \widehat{F}_{2\mu}(U_\mu)\|^2 \\
& \leq 3\|\widehat{F}_{2\lambda}(U_\lambda) - \widehat{F}_2^0(U_\lambda)\|^2 + 3\|\widehat{F}_2^0(U_\lambda) - \widehat{F}_2^0(U_\mu)\|^2 + 3\|\widehat{F}_2^0(U_\mu) - \widehat{F}_{2\mu}(U_\mu)\|^2 \\
& \leq 6\|\widehat{F}_2^0(U_\lambda)\| \cdot d(\widehat{F}_{2\lambda}(U_\lambda), \widehat{F}_2^0(U_\lambda)) + 3\|\widehat{F}_2^0(U_\lambda) - \widehat{F}_2^0(U_\mu)\|^2 \\
& \quad + 6\|\widehat{F}_2^0(U_\mu)\| \cdot d(\widehat{F}_{2\mu}(U_\mu), \widehat{F}_2^0(U_\mu)) \\
& \leq 6d_2\|U_\lambda\| \cdot \rho(\|\widehat{J}_{2\lambda}(U_\lambda) - U_\lambda\|) + 3\|\widehat{F}_2^0(U_\lambda) - \widehat{F}_2^0(U_\mu)\|^2 + 6d_2\|U_\mu\| \cdot \rho(\|\widehat{J}_{2\mu}(U_\mu) - U_\mu\|) \\
& = 6d_2\|U_\lambda\| \cdot \rho(\lambda\|\widehat{F}_{2\lambda}(U_\lambda)\|) + 3\|\widehat{F}_2^0(U_\lambda) - \widehat{F}_2^0(U_\mu)\|^2 + 6d_2\|U_\mu\| \cdot \rho(\mu\|\widehat{F}_{2\mu}(U_\mu)\|)
\end{aligned}$$

nach Anwendung der Bedingungen **(H2)**(ii), (iii) ebenso wie Proposition 1.2.6, Satz 1.2.4(iii), (v) und Bemerkung 1.2.3.

Hieraus folgt die weitere Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \|\widehat{F}_{2\lambda}(U_\lambda) - \widehat{F}_{2\mu}(U_\mu)\|^2 \\
& \leq 6d_2\sqrt{\widetilde{KT}} \cdot \rho(\lambda\|\widehat{F}_{2\lambda}(U_\lambda)\|) + 3\|\widehat{F}_2^0(U_\lambda) - \widehat{F}_2^0(U_\mu)\|^2 + 6d_2\sqrt{\widetilde{KT}} \cdot \rho(\mu\|\widehat{F}_{2\mu}(U_\mu)\|)
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

aufgrund der Beziehung (2.2.2) und dem Satz von Fubini.

Werden (2.2.5), (2.2.6) in die Abschätzung (2.2.4) eingesetzt und erneut die Beschränktheit nach (2.2.2) berücksichtigt, so ergibt sich nach dem Lemma von Gronwall

$$E|U_\lambda(t) - U_\mu(t)|^2 \leq g(\lambda, \mu)e^{c_2t}$$

mit

$$\begin{aligned}
g(\lambda, \mu) &= \frac{1}{2}(\lambda + \mu)d_1^2\widetilde{KT} + 6d_2\sqrt{\widetilde{KT}} \cdot \rho(\lambda\|\widehat{F}_{2\lambda}(U_\lambda)\|) + 3\|\widehat{F}_2^0(U_\lambda) - \widehat{F}_2^0(U_\mu)\|^2 \\
& \quad + 6d_2\sqrt{\widetilde{KT}} \cdot \rho(\mu\|\widehat{F}_{2\mu}(U_\mu)\|).
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Somit ist

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E|U_\lambda(t) - U_\mu(t)|^2 \leq g(\lambda, \mu)e^{c_2T}. \tag{2.2.8}$$

Offensichtlich konvergiert der erste Term in $g(\lambda, \mu)$ gegen 0 für $\lambda, \mu \rightarrow 0$ ebenso wie der zweite und letzte Ausdruck wegen Satz 1.2.4(iv) und den Annahmen **(H2)**(ii), (iii). Aus Lemma 2.2.3 folgt, dass die Menge aller Lösungsprozesse $(U_\lambda(t))_{t \in [0, T]}$ für $\lambda > 0$ in $L^2(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^d)$ beschränkt ist.

Aufgrund von Annahme **(H2)**(iv) ist dann $\{\widehat{F}_2^0(U_\lambda), \lambda > 0\}$ in $L^2(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^d)$ relativ kompakt. Also gibt es eine Teilfolge $(\lambda') \subset (\lambda)$, so dass $\widehat{F}_2^0(U_{\lambda'})$ für $\lambda' \rightarrow 0$ konvergiert. Es sei (μ') aus dieser Teilfolge. Demzufolge liegt die Konvergenz des dritten Terms in Ausdruck (2.2.7) für $\lambda', \mu' \rightarrow 0$ vor.

Schließlich ist wegen der Beziehung (2.2.8)

$$\lim_{\lambda', \mu' \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T} E|U_{\lambda'}(t) - U_{\mu'}(t)|^2 = 0. \tag{2.2.9}$$

Der Einfachheit halber wird nun mit λ statt λ' indiziert.

Mit der im Beweis von Lemma 2.2.3 eingeführten Stoppzeit τ_N erhält man

$$\begin{aligned}
E \sup_{0 \leq t \leq T} |U_\lambda(t \wedge \tau_N) - U_\mu(t \wedge \tau_N)|^2 &\leq c_2 E \int_0^T |U_\lambda(s) - U_\mu(s)|^2 ds + \frac{1}{2}(\lambda + \mu)d_1^2 \tilde{K}T \\
&+ 2E \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^{t \wedge \tau_N} (B(s, U_\lambda(s)) - B(s, U_\mu(s)), U_\lambda(s) - U_\mu(s)) dW_1(s) \right| \\
&+ 2E \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^{t \wedge \tau_N} (F_{2\lambda}(s, U_\lambda(s)) - F_{2\mu}(s, U_\mu(s)), U_\lambda(s) - U_\mu(s)) dW_2(s) \right| \\
&+ 6d_2 \sqrt{\tilde{K}T} \cdot \rho(\lambda \|\widehat{F}_{2\lambda}(U_\lambda)\|) + 3\|\widehat{F}_2^0(U_\lambda) - \widehat{F}_2^0(U_\mu)\|^2 \\
&+ 6d_2 \sqrt{\tilde{K}T} \cdot \rho(\mu \|\widehat{F}_{2\mu}(U_\mu)\|), \tag{2.2.10}
\end{aligned}$$

wobei die Eigenschaft **(H1)**(iii) und die Abschätzungen (2.2.5), (2.2.6) angewendet werden.

Die Ungleichung von Burkholder-Davis-Gundy mit einer Konstante C , die Annahmen **(H1)**(iii), (iv), die Youngsche Ungleichung $2(a, b) \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$ für jedes $\varepsilon > 0$ mit ε so gewählt, dass $1 - 2\varepsilon C > 0$ ist, zeigen

$$\begin{aligned}
&2E \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^{t \wedge \tau_N} (B(s, U_\lambda(s)) - B(s, U_\mu(s)), U_\lambda(s) - U_\mu(s)) dW_1(s) \right| \\
&+ 2E \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^{t \wedge \tau_N} (F_{2\lambda}(s, U_\lambda(s)) - F_{2\mu}(s, U_\mu(s)), U_\lambda(s) - U_\mu(s)) dW_2(s) \right| \\
&\leq 2\varepsilon C E \sup_{0 \leq t \leq T} |U_\lambda(t \wedge \tau_N) - U_\mu(t \wedge \tau_N)|^2 + \frac{1}{\varepsilon} C E \int_0^T c_2 |U_\lambda(s) - U_\mu(s)|^2 ds \\
&+ \frac{1}{\varepsilon} C E \int_0^T |F_{2\lambda}(s, U_\lambda(s)) - F_{2\mu}(s, U_\mu(s))|^2 ds. \tag{2.2.11}
\end{aligned}$$

Die Kombination der Schritte (2.2.6), (2.2.10) und (2.2.11) liefert

$$\begin{aligned}
&(1 - 2\varepsilon C) E \sup_{0 \leq t \leq T} |U_\lambda(t \wedge \tau_N) - U_\mu(t \wedge \tau_N)|^2 \\
&\leq c_2 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} C\right) E \int_0^T |U_\lambda(s) - U_\mu(s)|^2 ds + \frac{1}{2}(\lambda + \mu)d_1^2 \tilde{K}T \\
&+ \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} C\right) \left(6d_2 \sqrt{\tilde{K}T} \cdot \rho(\lambda \|\widehat{F}_{2\lambda}(U_\lambda)\|) + 3\|\widehat{F}_2^0(U_\lambda) - \widehat{F}_2^0(U_\mu)\|^2\right. \\
&+ \left.6d_2 \sqrt{\tilde{K}T} \cdot \rho(\mu \|\widehat{F}_{2\mu}(U_\mu)\|)\right). \tag{2.2.12}
\end{aligned}$$

Aus der Konvergenz entsprechend (2.2.9) folgt die Konvergenz im quadratischen Mittel und die Beschränktheit des Ausdruckes $E|U_\lambda(t) - U_\mu(t)|^2$ gleichmäßig bezüglich $t \in [0, T]$. Nach dem Satz von Fubini, der Monotonie des Erwartungswertes und der Schranke in (2.2.8) gilt

$$E \int_0^T |U_\lambda(s) - U_\mu(s)|^2 ds \leq T \cdot g(\lambda, \mu) e^{c_2 T}. \tag{2.2.13}$$

Die gleichen Schlussfolgerungen zum Konvergenzbeweis von (2.2.9) führen bei Betrachtung von (2.2.12) und (2.2.13) für Teilfolgen $(\lambda') \subset (\lambda)$, $(\mu') \subset (\mu)$ zu

$$\lim_{\lambda', \mu' \rightarrow 0} E \sup_{0 \leq t \leq T} |U_{\lambda'}(t \wedge \tau_N) - U_{\mu'}(t \wedge \tau_N)|^2 = 0. \quad (2.2.14)$$

Für eine beliebige positive Zahl $\eta > 0$ ist demnach

$$\begin{aligned} & P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |U_{\lambda}(t) - U_{\mu}(t)|^2 > \eta \right\} \\ & \leq P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq \tau_N} |U_{\lambda}(t) - U_{\mu}(t)|^2 > \eta \right\} + P\{\tau_N < T\}. \end{aligned}$$

Mit der Ungleichung von Markov, dem Übergang zu Teilfolgen (λ') , (μ') unter Beachtung von Aussage (2.2.14) folgt die Konvergenz des ersten Ausdruckes auf der rechten Seite der letzten Ungleichung gegen 0 für $\lambda', \mu' \rightarrow 0$. Offensichtlich gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{\tau_N < T\} = 0,$$

womit das Lemma 2.2.4 bewiesen ist. □

Beweis von Satz 2.2.1.

Die stochastische Differentialinklusion (2.1.1) wird durch die Folge von stochastischen Differentialgleichungen (2.2.1) approximiert. Dies geschieht über die Yosida-Approximationen $F_{1\lambda}, F_{2\lambda}$ von F_1 und F_2 .

Nach Lemma 2.2.2 sind diese Gleichungen eindeutig lösbar für jedes $\lambda > 0$. Aus dem Lemma 2.2.4 folgt mit dem Satz von Riesz die Existenz einer weiteren Teilfolge, die ebenfalls mit (λ) bezeichnet wird, so dass $(U_{\lambda}(\cdot))$ gleichmäßig bezüglich $t \in [0, T]$ mit Wahrscheinlichkeit 1 konvergiert. Bezeichnet U den Grenzwert, so gilt wegen der Lemmata 2.2.3 und 2.2.4 sowie des Lemmas von Fatou $U \in L^2(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^d)$.

Noch zu zeigen ist, dass der Grenzwert tatsächlich das Problem (2.1.1) löst. Dazu sind die Gleichung (2.1.3) und die Selektionseigenschaft (2.1.2) zu erfüllen.

Da für die Carathéodory-Abbildungen A, B die in **(H1)** formulierten Bedingungen gelten, liegt die Konvergenz von

$$\begin{aligned} \int_0^t A(s, U_{\lambda}(s)) ds & \rightarrow \int_0^t A(s, U(s)) ds, \\ \int_0^t B(s, U_{\lambda}(s)) dW_1(s) & \rightarrow \int_0^t B(s, U(s)) dW_1(s) \end{aligned}$$

in Wahrscheinlichkeit für $\lambda \rightarrow 0$ vor. Zudem existieren Prozesse $(f_1(t))_{t \in [0, T]}$, $(f_2(t))_{t \in [0, T]}$, $f_1, f_2 \in L^2(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^d)$ mit

$$\widehat{F}_{1\lambda}(U_{\lambda}) \xrightarrow{w} f_1 \quad \text{und} \quad \widehat{F}_{2\lambda}(U_{\lambda}) \xrightarrow{w} f_2 \quad \text{in} \quad L^2(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^d)$$

aufgrund der Beschränktheit der Yosida-Approximationen und Annahme **(H2)**(ii).

Mit Bezug auf die Konvergenzaussage A.2.1 von Breckner erfüllt U die Gleichung für alle $t \in [0, T]$ mit Wahrscheinlichkeit 1

$$U(t) + \int_0^t A(s, U(s))ds + \int_0^t B(s, U(s))dW_1(s) = U_0 - \int_0^t f_1(s)ds - \int_0^t f_2(s)dW_2(s). \quad (2.2.15)$$

Damit ist der Grenzwert $U(t)$ realisierungsweise stetig.

Wenn die Prozesse f_1, f_2 Selektoren von F_1, F_2 sind, dann löst U mit (2.2.15) die stochastische Differentialinklusion (2.1.1). Der Selektionsnachweis wird mit Hilfe der stark-schwach Abgeschlossenheit maximal-monotoner Abbildungen geführt.

Im Folgenden bezeichnen $\widehat{F}_{1\lambda}, \widehat{J}_{1\lambda}$ wieder die Nemytskij-Operatoren der Yosida-Approximation und der Resolvente. Aufgrund von Satz 1.2.4(iv), der Beschränkung der Minimalselektion nach **(H2)**(ii), Abschätzung (2.2.2) und $U_\lambda \rightarrow U$ in $L^2(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^d)$ konvergiert $\widehat{J}_{1\lambda}(U_\lambda)$ gegen U für $\lambda \rightarrow 0$, denn es ist

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \|\widehat{J}_{1\lambda}(U_\lambda) - U\|^2 &\leq 2 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \|\widehat{J}_{1\lambda}(U_\lambda) - U_\lambda\|^2 + 2 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \|U_\lambda - U\|^2 \\ &\leq 2 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 \|\widehat{F}_{1\lambda}(U_\lambda)\|^2 + 2 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \|U_\lambda - U\|^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Mit Proposition 1.2.2(ii) sowie $\widehat{J}_{1\lambda}(U_\lambda) \rightarrow U$ und $\widehat{F}_{1\lambda}(U_\lambda) \xrightarrow{w} f_1$, $\widehat{F}_{1\lambda}(U_\lambda) \in \widehat{F}(\widehat{J}_{1\lambda}(U_\lambda))$ nach Satz 1.2.4(iii) gilt $f_1 \in \widehat{F}_1(U)$, d. h.

$$f_1(t) \in F_1(t, U(t)) \text{ für fast alle } (\omega, t).$$

Analog zeigt man $f_2(t) \in F_2(t, U(t))$. □

Die Beweisführung orientiert sich an den Arbeiten von Motyl [75] und Kravets [62].

Im Gegensatz zu Kravets sind mit Satz 2.2.1 Aussagen zur Existenz von Lösungen endlichdimensionaler stochastischer Differentialinklusionen mit mengenwertiger Diffusion möglich.

Anders als bei Kravets erfolgt hier wie bei Motyl der Selektionsnachweis mit Hilfe der stark-schwach Abgeschlossenheit maximal-monotoner Abbildungen.

Die Modifikationen bezüglich der Arbeit von Motyl bestehen zum einen in der endlichdimensionalen Betrachtungsweise und zum anderen in der Berücksichtigung von sowohl einwertigen als auch mengenwertigen Drift- und Diffusionstermen.

In Kapitel 3 dieser Arbeit kommt dem Satz 2.2.1 eine wesentliche Bedeutung bei der Approximation unendlichdimensionaler stochastischer Differentialinklusionen mittels der Galerkin-Methode zu.

2.3 Eindeutigkeit von Lösungen

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt die Lösbarkeit einer Inklusion im Vordergrund stand, liegt das Interesse nun in der Eindeutigkeit von Lösungen.

Für mengenwertige Diffusionen ist die Eindeutigkeit mit Hilfe modifizierter Annahmen nachweisbar.

Die Annahme **(H2)** wird ersetzt durch:

(H2') Die Abbildungen F_1, F_2 genügen den Bedingungen:

- (i) Für $u, v \in \mathbb{R}^d$ und fast alle $\omega \in \Omega$, $t \in [0, T]$ ist $u \mapsto F_1(\omega, t, u)$ eine maximal-monotone, $u \mapsto F_2(\omega, t, u)$ eine Lipschitz-stetige Abbildung mit der Konstante $L > 0$ und

$$|F_2(t, u) - F_2(t, v)| \leq L|u - v|.$$

- (ii) Es gibt Konstanten $d_1, d_2 > 0$, so dass

$$|F_1^0(t, u)| \leq d_1|u| \quad \text{und} \quad |F_2(t, u)| = \sup\{|v| : v \in F_2(t, u)\} \leq d_2|u|$$

für alle $(\omega, t, u) \in \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$ gelten.

Bemerkung 2.3.1 Die Lipschitz-Stetigkeit im Sinn von Definition (1.2.1) folgt wegen

$$h(F_2(t, u), F_2(t, v)) \leq |F_2(t, u) - F_2(t, v)|$$

nach **(H2')**(i), wobei an dieser Stelle $h(\cdot, \cdot)$ für die Hausdorff-Distanz in \mathbb{R}^d steht.

Damit wird ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz formuliert.

Satz 2.3.2 Mit den Annahmen **(H0)**, **(H1)** und **(H2')** existiert für die stochastische Differentialinklusion (2.1.1) eine eindeutige Lösung U .

Beweis.

Zunächst wird die Eindeutigkeit der Lösung bewiesen.

Es seien $U(t), U'(t)$ Lösungen des Problems (2.1.1) mit $U(0) = U'(0) = U_0$. Dann gibt es Selektoren $f_1(s) \in F_1(s, U(s))$, $f_2(s) \in F_2(s, U(s))$ und $f'_1(s) \in F_1(s, U'(s))$, $f'_2(s) \in F_2(s, U'(s))$, so dass die Gleichungen

$$U(t) + \int_0^t A(s, U(s))ds + \int_0^t B(s, U(s))dW_1(s) = U_0 - \int_0^t f_1(s)ds - \int_0^t f_2(s)dW_2(s)$$

und

$$U'(t) + \int_0^t A(s, U'(s))ds + \int_0^t B(s, U'(s))dW_1(s) = U_0 - \int_0^t f'_1(s)ds - \int_0^t f'_2(s)dW_2(s)$$

erfüllt sind.

Mit der Itô-Formel und dem Erwartungswert folgt

$$\begin{aligned}
E|U(t) - U'(t)|^2 &= -2E \int_0^t (A(s, U(s)) - A(s, U'(s)), U(s) - U'(s)) ds \\
&\quad + E \int_0^t |B(s, U(s)) - B(s, U'(s))|^2 ds \\
&\quad - 2E \int_0^t (f_1(s) - f_1'(s), U(s) - U'(s)) ds \\
&\quad + E \int_0^t |f_2(s) - f_2'(s)|^2 ds.
\end{aligned}$$

Wegen der Lipschitz-Stetigkeit von $F_2(t, \cdot)$ gilt

$$|f_2(s) - f_2'(s)| \leq |F_2(s, U(s)) - F_2(s, U'(s))| \leq L|U(s) - U'(s)|.$$

Demzufolge ergibt sich mit **(H1)**(iii) und der Monotonie von $F_1(t, \cdot)$ für $t \in [0, T]$ die Abschätzung

$$E|U(t) - U'(t)|^2 \leq (c_2 + L^2) \cdot \int_0^t E|U(s) - U'(s)|^2 ds.$$

Also ist die Lösung U bis auf Modifikationen eindeutig nach dem Lemma von Gronwall. Für den Nachweis der Eindeutigkeit der Selektoren wird angenommen, dass es zu einer Lösung U Selektoren $f_1(s), f_1''(s) \in F_1(s, U(s))$ und $f_2(s), f_2''(s) \in F_2(s, U(s))$ gibt, für die Gleichung (2.3.1) erfüllt ist. Dies führt auf

$$\int_0^t (f_1(s) - f_1''(s)) ds = \int_0^t (f_2''(s) - f_2(s)) dW_2(s).$$

Das Zusammenfallen von gewöhnlichem und Itô-Integral ist nur für $f_1(s) = f_1''(s)$ sowie $f_2(s) = f_2''(s)$ möglich. Daher sind die Selektoren von F_1 und F_2 für die Lösung U ebenfalls eindeutig und es gibt genau ein Lösungstripel.

Eine ähnliche Schlussweise wie im Beweis des Satzes 2.2.1 führt nun auf die Existenz einer Lösung. Die Behauptungen der Lemmata 2.2.2, 2.2.3 und 2.2.4 bleiben bestehen. Für die Beweise sind einige Änderungen vorzunehmen.

Erneut wird die Lösbarkeit von Gleichungen

$$\begin{aligned}
dU_\lambda(t) + A(t, U_\lambda(t))dt + B(t, U_\lambda(t))dW_1(t) &= -F_{1\lambda}(t, U_\lambda(t))dt - f_{2\lambda}(t)dW_2(t), \\
U_\lambda(0) &= U_0
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

untersucht, die durch das Einsetzen spezieller Selektoren entstehen. Hierzu wählt man die Yosida-Approximation von $F_1(t, \cdot)$ und einen bezüglich U_λ Lipschitz-stetigen Selektor $f_{2\lambda}(t) \in F_2(t, U_\lambda(t))$, der nach Satz 1.2.8 stets existiert.

Der Satz A.6.1 von Krylov und Rozovskij für endlichdimensionale Gleichungen sichert die Existenz einer eindeutigen und realisierungsweise stetigen Lösung $U_\lambda(t)$, wie in Lemma 2.2.2 angegeben. Zur Überprüfung der Voraussetzungen wird zusätzlich die Lipschitz-Stetigkeit **(H2')**(i) von F_2 verwendet.

Weiterhin ist die Folge von Lösungen $(U_\lambda(t))_{\lambda>0}$ nach Lemma 2.2.3 beschränkt und besitzt konvergente Teilfolgen nach Lemma 2.2.4.

Die Beweise erfolgen analog unter Nutzung der Selektoren $f_{2\lambda}(t) \in F_2(t, U_\lambda(t))$ und $f_{2\mu}(t) \in F_2(t, U_\mu(t))$ anstatt der Yosida-Approximationen $F_{2\lambda}(t, U_\lambda(t))$, $F_{2\mu}(t, U_\mu(t))$.

Mit der Argumentation zum Beweis des Satzes 2.2.1 ergibt sich schließlich

$$U(t) + \int_0^t A(s, U(s))ds + \int_0^t B(s, U(s))dW_1(s) = U_0 - \int_0^t f_1(s)ds - \int_0^t f_2(s)dW_2(s) \quad (2.3.2)$$

für $\widehat{F}_{1\lambda}(U_\lambda) \xrightarrow{w} f_1$, $f_{2\lambda} \xrightarrow{w} f_2$ in $L^2(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^d)$ und $\lambda \rightarrow 0$.

Es verbleibt zu überprüfen, ob der Grenzwert $U(t)$ mit Gleichung (2.3.2) die Aufgabe (2.1.1) löst.

Wiederum zeigt man $f_1(t) \in F_1(t, U(t))$ für fast alle (ω, t) über die stark-schwach Abgeschlossenheit maximal-monotoner Abbildungen nach Proposition 1.2.2(ii).

Die Selektionseigenschaft für f_2 wird mit Hilfe des Satzes 1.2.9 von Hu und Papageorgiou nachgewiesen.

Da $f_{2\lambda} \in \widehat{F}_2(U_\lambda)$ nach der Annahme **(H2')**(ii) und der Abschätzung (2.2.2) beschränkt in $L^2(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^d)$ ist, existiert eine schwach konvergente Teilfolge $(f_{2\lambda'})_{\lambda'>0}$ mit $f_{2\lambda'} \xrightarrow{w} f_2$ in $L^2(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^d)$ für $(\lambda') \subset (\lambda)$, $\lambda' \rightarrow 0$.

Aus der Eindeutigkeit der Lösung von (2.1.1) lässt sich auf die Konvergenz der gesamten Folge schließen, d. h., f_2 in Gleichung (2.3.2) ist der schwache Grenzwert von $f_{2\lambda}$ für $\lambda \rightarrow 0$.

Der Satz 1.2.9 besagt

$$f_2(t) \in \overline{\text{conv}} \left(w\text{-}\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow 0} \{f_{2\lambda}(t)\} \right)$$

für $G(\omega, t) = \left\{ f \in L^2(\Omega \times [0, T]; \mathbb{R}^d) : E|f(t)|^2 \leq d_2^2 \widetilde{K} \text{ für alle } t \in [0, T] \right\}$.

Wegen $f_{2\lambda}(t) \in F_2(t, U_\lambda(t))$ erhält man weiter

$$f_2(t) \in \overline{\text{conv}} \left(w\text{-}\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow 0} \{f_{2\lambda}(t)\} \right) \subseteq \overline{\text{conv}} \left(w\text{-}\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow 0} F_2(t, U_\lambda(t)) \right).$$

Als Folge der Definition des schwachen oberen Grenzwertes 1.2.10, der Abgeschlossenheit und Konvexität der Menge $F_2(t, U_\lambda(t))$ gemäß der Definition 1.3.1(a) ergibt sich

$$\overline{\text{conv}} \left(w\text{-}\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow 0} F_2(t, U_\lambda(t)) \right) \subseteq \overline{\text{conv}} F_2(t, U(t)) = F_2(t, U(t))$$

und letztendlich $f_2(t) \in F_2(t, U(t))$ für fast alle (ω, t) . □

Bemerkung 2.3.3 *Verzichtet man gänzlich auf die Maximal-Monotonie mengenwertiger Drift- und Diffusionsterme zugunsten Lipschitz-stetiger, wachstumsbeschränkter Prozesse bzgl. $|\cdot|$, so kann in ähnlicher Art und Weise ein weiterer Existenz- und Eindeutigkeitsatz bewiesen werden.*

2.4 Beispiele

Die nachfolgenden Beispiele zeigen erste Anwendungen auf der Grundlage der in den Abschnitten 2.2 und 2.3 geführten Beweise für die Existenz und Eindeutigkeit von stochastischen Differentialinklusionen. Dabei bleibt die Notation der zitierten Autoren teilweise und die Voraussetzungen bezüglich des Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, \mathcal{F}, P) sowie des Wiener Prozesses $(W(t))_{t \in [0, T]}$ erhalten.

Das erste Beispiel ist einem Artikel von Pettersson [79] entnommen.

Beispiel 2.4.1 *Die stochastische Differentialinklusion*

$$\begin{aligned} dU(t) &\in b(t, U(t))dt - AU(t)dt + \sigma(t, U(t))dW(t), \\ U(0) &= U_0 \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

modelliert den Druck U in den Löchern des Lymphsystems. Hierbei ist der maximal-monotone Operator $A : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ durch

$$Au = \begin{cases} k_1 u, & u < c; \\ [k_1 u, k_2 u], & u = c; \\ k_2 u, & u > c \end{cases}$$

für $0 \leq c$ und $0 \leq k_1 < k_2$ gegeben.

Ferner wird angenommen, dass der zufällige Anfangswert U_0 ein endliches zweites Moment besitzt. Die Drift- und Diffusionsterme $b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind messbare und Lipschitz-stetige Funktionen, die eine lineare Wachstumsbedingung mit der Konstante $L > 0$ gleichmäßig in $t \in [0, T]$ erfüllen. D. h., es sind

$$\begin{aligned} |b(t, u) - b(t, v)| + |\sigma(t, u) - \sigma(t, v)| &\leq L|u - v|, \\ |b(t, u)| + |\sigma(t, u)| &\leq L(1 + |u|) \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$ und $u, v \in \mathbb{R}$.

Die Voraussetzung **(H1)** gilt mit der Lipschitz- und Wachstumsbedingung für b, σ . Da in diesem Fall kein mengenwertiger Diffusionsterm betrachtet wird, genügt es die Bedingung **(H2)**(ii) nachzuweisen. Für die maximal-monotone Abbildung A ist die Minimalselektion beschränkt, denn es ist $|A^0 u| \leq k_2 |u|$ für alle $u \in \mathbb{R}$.

Somit existiert nach Satz 2.2.1 sowie Satz 2.3.2 eine eindeutige Lösung der Differentialinklusion (2.4.1) mit Anfangswertbedingung.

Pettersson nutzt im Vergleich zu den hier vorgelegten Existenzsätzen eine spezielle Integrabilitätsbedingung bezüglich der Yosida-Approximation von A anstatt **(H2)**(ii) bzw. **(H2')**(ii). Der Beweis verwendet aber ebenso die Yosida-Approximation maximal-monotoner Operatoren als entscheidende Idee.

Das nächste Beispiel gibt den Bezug zu mengenwertigen stochastischen Wellengleichungen und stochastischen Hindernisproblemen.

Beispiel 2.4.2 *Barbu und da Prato beschreiben in [11] die Dynamik eines harmonischen Oszillators auf $t \in [0, T]$, der durch einen stochastischen Term getrieben wird und von links durch ein Hindernis $x = 0$ beschränkt ist, mit*

$$\begin{aligned} d\dot{X}(t) + (aX(t) + \dot{X}(t))dt &\in -\beta(X(t))dt + dW(t), \\ X(0) = x_0, \quad \dot{X}(0) &= y_0. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Dabei sind $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, a eine positive Konstante und $\beta : \mathbb{R}^+ \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ die maximal-monotone Abbildung

$$\beta(x) = \begin{cases} 0, & x > 0; \\ (-\infty, 0], & x = 0. \end{cases}$$

Man spricht bei (2.4.2) auch von einer stochastischen Variationsungleichung, da β das Subdifferential der Funktion j

$$j(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0; \\ +\infty, & x < 0 \end{cases}$$

ist.

Für $Z = (z_1, z_2)^T \in \mathbb{R}^2$ sowie $b(Z) = (z_2, -az_1 - z_2)^T$, $\sigma(Z) = \sigma = (0, 1)^T$ und $\tilde{\beta}(Z) = \{(0, z)^T : z \in \beta(z_1)\}$ kann diese Aufgabe 2. Ordnung mit $U = (X, \dot{X})^T$ in eine Inklusion 1. Ordnung umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} dU(t) &\in -\tilde{\beta}(U(t))dt + b(U(t))dt + \sigma(U(t))dW(t), \\ U(0) &= (x_0, y_0)^T. \end{aligned}$$

Da $|\tilde{\beta}^0(u)| = 0$ für alle $u \in \mathbb{R}^2$ gilt, b, σ Lipschitz-stetig und beschränkt sind, existiert nach Satz 2.3.2 eine eindeutige Lösung des obigen Problems und damit der Aufgabe (2.4.2).

Bemerkung 2.4.3 Das Subdifferential $\partial j : S \rightarrow 2^{S^*}$,

$$\partial j(x) = \{x^* \in S^* : j(y) - j(x) \geq x^*(y - x), \forall y \in S\}$$

ist für eine konvexe, unterhalbstetige Funktion $j : S \rightarrow (-\infty, \infty]$ auf einem reellen, reflexiven Banachraum S mit $j \not\equiv \infty$ nach Rockafellar [83] maximal-monoton.

Mit Hilfe des Subdifferentials $\partial j(x) = \beta(x)$ kann die Inklusion in (2.4.2) als Variationsungleichung aufgefasst werden.

Für den deterministischen Fall (siehe z. B. Naumann [76])

$$\ddot{X}(t) + aX(t) + \dot{X}(t) \in -\beta(X(t))$$

erhält man die Variationsungleichung für alle Funktionen $Y(t)$

$$(\ddot{X}(t) + aX(t) + \dot{X}(t))(Y(t) - X(t)) + j(Y(t)) - j(X(t)) \geq 0.$$

Eine stochastische Variationsungleichung zur Inklusion in (2.4.2) kann nach Bensoussan und Rascanu [16] oder Haussmann und Pardoux [48] über

$$d\dot{X}(t) + (aX(t) + \dot{X}(t))dt = -d\eta(t) + dW(t)$$

für alle stetigen, \mathcal{F}_t -messbaren Prozesse $(Y(t))_{t \in [0, T]}$ mit

$$E \int_0^T (Y(t) - X(t))d\eta(t) \leq E \int_0^T (j(Y(t)) - j(X(t)))dt$$

formuliert werden, wobei $d\eta(t) \in \beta(X(t))dt$ ist.

Weitere Beispiele mit zufälliger Oszillation und bilinearer Hysterese treten im antiseismischen Design von Gebäuden auf. Ein Grund für die Modellierung mittels stochastischer Differentialinklusionen liegt im eher elastischen als plastischen Verhalten von Stahl und Stahlbeton. Probleme dieser Art werden in Kree [63] und Pettersson [80] betrachtet.

Neben der Formulierung des plastischen bzw. elastischen Verhaltens von Materialien werden maximal-monotone Operatoren beispielsweise verwendet, um dynamische Systeme mit trockener Reibung darzustellen.

Auch in der Physik von Reibungsprozessen lassen sich entsprechende Anwendungsfälle aufzeigen. So modellieren Physiker unter anderem Reibungsgesetze über ansteigende Sprungfunktionen und nutzen deren maximal-monotone Erweiterungen, um die ursprünglichen Aufgabenstellungen weiter zu bearbeiten.

Pettersson untersucht das folgende Beispiel in [79].

Beispiel 2.4.4 Die Inklusion

$$\begin{aligned} d\dot{X}(t) + \gamma\dot{X}(t)dt + kX(t)dt &\in -rA(\dot{X}(t))dt + dW(t), \\ X(0) = x_0, \dot{X}(0) = y_0 \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

beschreibt ein mechanisches System mit linearer, viskoser Dämpfung und Reibung. Es sind $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ sowie positive Konstanten γ, r, k gegeben und der maximal-monotone Operator

$$A(x) = \begin{cases} \text{sign}(x), & x \neq 0; \\ [-1, 1], & x = 0 \end{cases}$$

bildet ein Reibungsgesetz vom Coulombschen Typ ab.

Auch diese Inklusion wird als Aufgabe 1. Ordnung dargestellt. Über analoge Umformungen mit $Z = (z_1, z_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $b(Z) = (z_2, -kz_1 - \gamma z_2)^T$, $\sigma(Z) = \sigma = (0, 1)^T$ und $\beta(Z) = \{(0, z)^T : z \in rA(z_2)\}$ wird (2.4.3) für $U = (X, \dot{X})^T$ in der Form

$$\begin{aligned} dU(t) &\in -\beta(U(t))dt + b(U(t))dt + \sigma(U(t))dW(t), \\ U(0) &= (x_0, y_0)^T \end{aligned}$$

betrachtet.

Wieder führt die Anwendung des Satzes 2.3.2 auf die eindeutige Lösbarkeit von (2.4.3) aufgrund der beschränkten Minimalselektion $|\beta^0(u)| \leq 1$ für alle $u \in \mathbb{R}^2$ sowie der Lipschitz-Stetigkeit und Beschränktheit der eingehenden Größen.

Die grundlegenden Schwierigkeiten bei der Lösung stochastischer Differentialgleichungen mit unstetiger rechter Seite bilden einen Ausgangspunkt für die Untersuchung stochastischer Differentialinklusionen.

Eine Differentialinklusion entsteht beispielsweise durch die Beschreibung von Unstetigkeiten über eine mengenwertige Abbildung.

Beispiel 2.4.5 Gegeben seien eine \mathcal{F}_0 -messbare Zufallsgröße U_0 mit endlichem zweiten Moment und die Funktionen $b, \sigma : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, die in $(\omega, t, u) \in \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d$ messbar und für festes (t, u) \mathcal{F}_t -adaptiert sind.

Das stochastische Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} dU(t) &= -b(t, U(t))dt - \sigma(t, U(t))dW(t), \\ U(0) &= U_0 \end{aligned}$$

wird untersucht für in $u \in \mathbb{R}^d$ unstetige, aber wachsende Funktionen b, σ . Des Weiteren werden hierfür endlich viele Unstetigkeitsstellen mit endlichen Sprüngen vorausgesetzt. Unter Hinzunahme von Intervallen, die durch links- und rechtsseitige Grenzwerte an den endlich vielen Unstetigkeitsstellen gebildet werden (siehe dazu auch Beispiel 1.2.1), entstehen die maximal-monotonen Erweiterungen $\tilde{b}, \tilde{\sigma}$.

Mit diesen Abbildungen $\tilde{b}, \tilde{\sigma} : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow 2^{\mathbb{R}^d}$ ist nun die stochastische Differentialinklusion

$$\begin{aligned} dU(t) &\in -\tilde{b}(t, U(t))dt - \tilde{\sigma}(t, U(t))dW(t), \\ U(0) &= U_0 \end{aligned}$$

zu lösen.

Die Sätze 2.2.1 und 2.3.2 enthalten Aussagen über die Lösbarkeit und eindeutige Lösbarkeit dieses Problems, sofern die Annahmen **(H0)**-**(H2)** bzw. **(H2')** erfüllt sind.

Kapitel 3

Unendlichdimensionale stochastische Differentialinklusionen mit Lipschitz-stetigen mengenwertigen Abbildungen - Das Galerkin-Verfahren

Der Grundgedanke der Galerkin-Methode ist die endlichdimensionale Approximation einer unendlichdimensionalen Aufgabe.

Dieses Verfahren wird sowohl in der Lösungstheorie als auch in der Numerik angewendet. Bei der Untersuchung mengenwertiger deterministischer Probleme findet diese Methode ebenfalls Beachtung. So weisen Hu und Papageorgiou [53] damit die Existenz von Lösungen einer deterministischen nicht-linearen Differentialinklusion über einem Evolutionstriple nach.

In diesem Kapitel wird erstmals, nach bestem Wissen der Autorin, das Galerkin-Verfahren auf eine unendlichdimensionale stochastische Differentialinklusion mit Lipschitz-stetigen mengenwertigen Abbildungen angewendet.

Nach der Vorstellung der Aufgabe und der Konstruktion approximierender Probleme erfolgt in einem zweiten Abschnitt die Angabe eines Existenzsatzes mit dazugehöriger Beweisführung. Abschließend wird in Abschnitt 3.3 ein Beispiel aus der Steuertheorie betrachtet.

3.1 Problemstellung

Es seien wiederum (Ω, \mathcal{F}, P) ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ eine Filtration, den üblichen Bedingungen genügend, $(W_1(t))_{t \in [0, T]}$, $(W_2(t))_{t \in [0, T]}$ unabhängige, reellwertige, \mathcal{F}_t -adaptierte Wiener Prozesse und $V \subseteq H \subseteq V^*$ ein Evolutionstripel, dessen Einbettungen sowohl stetig als auch kompakt sind.

Im Folgenden seien die Normen in V, H, V^* mit $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_H, \|\cdot\|_{V^*}$, das Skalarprodukt in H mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ und die Dualitätsabbildung zwischen V und V^* durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet.

Die Abbildungen $A : \Omega \times [0, T] \times V \rightarrow V^*$, $B : \Omega \times [0, T] \times H \rightarrow H$ sowie $F_1, F_2 : \Omega \times [0, T] \times H \rightarrow 2^H$ sind messbar in $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$ für $u \in V$ bzw. $u \in H$ sowie \mathcal{F}_t -adaptiert für feste t, u .

Über dem Evolutionstripel $V \subseteq H \subseteq V^*$ wird die stochastische Differentialinklusion mit einer Anfangswertbedingung

$$\begin{aligned} dU(t) + A(t, U(t))dt + B(t, U(t))dW_1(t) &\in F_1(t, U(t))dt + F_2(t, U(t))dW_2(t), \\ U(0) &= U_0 \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

untersucht.

Definition 3.1.1 Ein \mathcal{F}_t -messbarer, V -wertiger stochastischer Prozess $(U(t))_{t \in [0, T]}$ heißt Lösung der Aufgabe (3.1.1), wenn gilt:

- (i) Für alle $t \in [0, T]$ gelten

$$E \int_0^t \|U(s)\|_V^2 ds < \infty \quad \text{und} \quad E \|U(t)\|_H^2 < \infty.$$

- (ii) Der Prozess $U(t)$ besitzt P -f. s. zeit-stetige Trajektorien in H .

- (iii) Es existieren \mathcal{F}_t -messbare stochastische Prozesse $(f_i(t))_{t \in [0, T]}$, $f_i : \Omega \times [0, T] \rightarrow H$, so dass für alle $t \in [0, T]$

$$E \int_0^t \|f_i(s)\|_H^2 ds < \infty$$

gilt und für fast alle $t \in [0, T]$

$$f_i(t) \in F_i(t, U(t)) \quad P\text{-f. s.},$$

mit $i = 1, 2$.

- (iv) Für alle $v \in M$, $M \subseteq V$ dicht und $t \in [0, T]$ ist die Gleichung

$$\begin{aligned} (U(t), v)_H &+ \int_0^t \langle A(s, U(s)), v \rangle ds + \int_0^t (B(s, U(s)), v)_H dW_1(s) \\ &= (U_0, v)_H + \int_0^t (f_1(s), v)_H ds + \int_0^t (f_2(s), v)_H dW_2(s) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

P -f. s. erfüllt.

Die Lösungsmenge sei mit S bezeichnet.

Für die Approximation werden endlichdimensionale Teilräume verwendet. Es sei $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in H mit Elementen $w_k \in V$. Der von $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ erzeugte endlichdimensionale Teilraum sei mit H_n bezeichnet. Damit folgt aus der Definition A.5.1 des Evolutionstripels

$$H_n \subseteq V \subseteq H \subseteq V^*$$

und für $c > 0$ und alle $v \in H_n$

$$\|v\|_H \leq c\|v\|_V, \quad \|v\|_{V^*} \leq c\|v\|_H.$$

Entsprechend werden für $n \geq 1$ die linearen Teilräume V_n mit der Norm in V und V_n^* mit der Norm in V^* versehen. Auf diesen Räumen $V_n = (H_n, \|\cdot\|_V)$ und $V_n^* = (H_n, \|\cdot\|_{V^*})$ bildet man nun mit Hilfe der orthogonalen Projektion $p_n : H \rightarrow H_n$ die approximierenden Probleme zu (3.1.1):

$$\begin{aligned} dU_n(t) + A_n(t, U_n(t))dt &+ p_n B(t, U_n(t))dW_1(t) \\ &\in p_n F_1(t, U_n(t))dt + p_n F_2(t, U_n(t))dW_2(t), \\ U_n(0) &= p_n U_0. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Dabei ist $A_n : \Omega \times [0, T] \times V_n \rightarrow V_n^*$ durch die orthogonale Projektion von $A(t, x)$ auf H_n für $x \in V_n$ definiert, d. h.

$$A_n(t, x) = \sum_{k=1}^n \langle A(t, x), w_k \rangle w_k. \quad (3.1.4)$$

Bemerkung 3.1.2 Für $x \in V_n$ gilt $x = \sum_{j=1}^n x_j w_j$ mit $x_j \in \mathbb{R}$, $w_j \in V$, $j = 1, \dots, n$.

Folglich ist für $x \in V_n \subseteq H$ mit Beziehung (3.1.4)

$$\begin{aligned} (A_n(t, x), x)_H &= \left(\sum_{k=1}^n \langle A(t, x), w_k \rangle w_k, \sum_{j=1}^n x_j w_j \right)_H \\ &= \sum_{k=1}^n \langle A(t, x), w_k \rangle x_k = \left\langle A(t, x), \sum_{k=1}^n x_k w_k \right\rangle \\ &= \langle A(t, x), x \rangle. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Die Gleichung (3.1.5) wird nachfolgend wiederholt angewendet.

Unter Nutzung der Selektoren f_i von F_i , $i = 1, 2$ gilt für die Projektion der mengenwertigen Abbildungen

$$p_n F_i(t, u(t)) = \{p_n f_i(t) : f_i(t) \in F_i(t, u(t))\}. \quad (3.1.6)$$

Analog zu Definition 3.1.1 werden jetzt Lösungen der endlichdimensionalen Probleme formuliert.

Definition 3.1.3 Ein \mathcal{F}_t -messbarer, V_n -wertiger Prozess $(U_n(t))_{t \in [0, T]}$ ist Lösung der endlichdimensionalen Inklusion (3.1.3), wenn gilt:

(i) Es ist für alle $t \in [0, T]$

$$E \int_0^t \|U_n(s)\|_V^2 ds < \infty \quad \text{und} \quad E \|U_n(t)\|_H^2 < \infty.$$

(ii) Der Prozess $U_n(t)$ besitzt P -f. s. zeit-stetige Trajektorien in V_n .

(iii) Es existieren \mathcal{F}_t -messbare Prozesse $(f_{in}(t))_{t \in [0, T]}$, $f_{in} : \Omega \times [0, T] \rightarrow H$, die für alle $t \in [0, T]$

$$E \int_0^t \|f_{in}(s)\|_H^2 ds < \infty$$

sowie P -f. s. für fast alle $t \in [0, T]$

$$f_{in}(t) \in F_i(t, U_n(t))$$

mit $i = 1, 2$ genügen.

(iv) Für alle $v \in V_n$ und $t \in [0, T]$ gilt P -f. s. die Gleichung

$$\begin{aligned} (U_n(t), v)_H + \int_0^t \langle A_n(s, U_n(s)), v \rangle ds + \int_0^t (p_n B(s, U_n(s)), v)_H dW_1(s) \\ = (U_n(0), v)_H + \int_0^t (p_n f_{1n}(s), v)_H ds + \int_0^t (p_n f_{2n}(s), v)_H dW_2(s). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Mit S_n sei die Lösungsmenge von (3.1.3) bezeichnet.

Weiter werden folgende Bedingungen vorausgesetzt.

(H0) Der Anfangswert $U_0 \in H$ ist eine \mathcal{F}_0 -messbare Zufallsgröße mit $E \|U_0\|_H^2 < \infty$.

(H1) Für die Operatoren A, B gelten:

(i) Die Abbildung A besitzt die Carathéodory-Eigenschaft. D. h., zusätzlich zur Messbarkeit ist $u \mapsto A(\omega, t, u) \in V^*$ stetig in $u \in V$ für fast alle $\omega \in \Omega$ und $t \in [0, T]$.

(ii) Es gibt Konstanten $c_1, c_2 > 0$, so dass

$$-2\langle A(t, u), u \rangle + \|B(t, u)\|_H^2 + c_1 \|u\|_V^2 \leq c_2 \|u\|_H^2$$

für alle $\omega \in \Omega, t \in [0, T]$ und $u \in V$ gilt.

(iii) Für alle $u, v \in V$ und alle $\omega \in \Omega, t \in [0, T]$ ist

$$-2\langle A(t, u) - A(t, v), u - v \rangle + \|B(t, u) - B(t, v)\|_H^2 \leq c_3 \|u - v\|_H^2$$

mit einer Konstante $c_3 > 0$ erfüllt.

(iv) Die Ungleichung

$$\|A(t, u)\|_{V^*}^2 \leq c_4(1 + \|u\|_V^2)$$

gilt für eine positive Konstante c_4 und alle $\omega \in \Omega, t \in [0, T], u \in V$.

(H2) Die mengenwertigen Abbildungen $F_i, i = 1, 2$ genügen den Bedingungen:

(i) Für fast alle $\omega \in \Omega$ und jedes $t \in [0, T]$ sind $u \mapsto F_i(\omega, t, u)$ Lipschitz-stetig bezüglich der Hausdorff-Distanz mit den Konstanten $L_i > 0$.

(ii) Es existieren Konstanten $d_i > 0$ mit

$$\|F_i(t, u)\|_H^2 = \sup \{ \|f\|_H^2 : f \in F_i(t, u) \} \leq d_i \|u\|_H^2$$

für alle $\omega \in \Omega, t \in [0, T], u \in H$.

Bemerkung 3.1.4 Die Voraussetzung (H1)(i) der Stetigkeit von $A(t, u)$ bezüglich $u \in V$ stellt eine Verschärfung gegenüber den Forderungen des Satzes A.6.4 dar.

Viele Operatoren erfüllen diese Bedingung. Hierzu wird folgendes Beispiel angegeben.

Es sei $A(u) = A_0 u + f(u)$ mit $A_0 : V \rightarrow V^*, A_0 = -\Delta$ und $f : H \rightarrow H$ Lipschitz-stetig mit Konstante $L > 0$, wobei $V = H_0^1(O), H = L^2(O)$ sind.

Offensichtlich ist auch A_0 von V in V^* stetig, denn nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist

$$\begin{aligned} \|A_0 u\|_{V^*} &= \sup_{v \in V, \|v\|_V \leq 1} |\langle A_0 u, v \rangle| = \sup_{v \in V, \|v\|_V \leq 1} |(\nabla u, \nabla v)_H| \\ &\leq \sup_{v \in V, \|v\|_V \leq 1} \|\nabla u\|_H \|\nabla v\|_H \leq \sup_{v \in V, \|v\|_V \leq 1} \|u\|_V \|v\|_V \\ &\leq \|u\|_V. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Stetigkeit von A . Wegen der Definition A.5.1 eines Evolutions-tripels mit den Konstanten c, d und

$$\begin{aligned} \|Au - Av\|_{V^*} &\leq \|A_0(u - v)\|_{V^*} + d\|f(u) - f(v)\|_H \\ &\leq \|u - v\|_V + d \cdot L\|u - v\|_H \\ &\leq (1 + c \cdot d \cdot L)\|u - v\|_V \end{aligned}$$

für alle $u, v \in V$ ergibt sich sogar die Lipschitz-Stetigkeit von $A : V \rightarrow V^*$.

3.2 Existenz von Lösungen

Der nachfolgende Satz gibt Auskunft über die Approximierbarkeit der Lösungsmenge S durch die Folge $(S_n)_{n \geq 1}$ von Lösungsmengen der endlichdimensionalen Probleme.

Satz 3.2.1 *Sind die Annahmen (H0), (H1) und (H2) erfüllt, dann ist*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n \subseteq S \subseteq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ in } L^2(\Omega \times [0, T]; H).$$

Damit konvergiert S_n gegen S im Sinne von Kuratowski.

Analog zum Galerkin-Verfahren für Gleichungen wird zunächst die Lösbarkeit der approximierenden Probleme (3.1.3) über den endlichdimensionalen Teilräumen untersucht. Mit Hilfe von a priori Schranken für die Folge der Lösungen und der Gültigkeit von Selektionseigenschaften wird weiter gezeigt, dass der Grenzwert der Lösungsfolge die Aufgabe (3.1.1) löst.

Im Beweis finden die nachfolgenden Lemmata Verwendung.

Lemma 3.2.2 *Unter den Annahmen (H0)-(H2) sind die Lösungsmengen S_n für (3.1.3) mit $n = 1, 2, \dots$ nicht-leer.*

Beweis.

Wie in Abschnitt 3.1 ausgeführt wurde, ist die Folge stochastischer Differentialinklusionen (3.1.3) über den endlichdimensionalen Teilräumen H_n durch

$$\begin{aligned} dU_n(t) + A_n(t, U_n(t))dt &+ p_n B(t, U_n(t))dW_1(t) \\ &\in p_n F_1(t, U_n(t))dt + p_n F_2(t, U_n(t))dW_2(t), \\ U_n(0) &= p_n U_0 \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$ gegeben.

Der Beweis wird hier in Anlehnung an den Beweis zum Satz 2.3.2 geführt. Demnach besteht der erste Schritt in der Lösung der Anfangswertaufgaben für $U_n(t) \in V_n$, $n \geq 1$

$$\begin{aligned} dU_n(t) + A_n(t, U_n(t))dt &+ p_n B(t, U_n(t))dW_1(t) \\ &= p_n f_{1n}(t)dt + p_n f_{2n}(t)dW_2(t), \\ U_n(0) &= p_n U_0, \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

mit nach Satz 1.2.8 Lipschitz-stetig (über H_n) wählbaren Selektoren $f_{in}(t) \in F_i(t, U_n(t))$.

Für die Lösbarkeit der Aufgabe (3.2.1) sind vorab die Bedingungen des Satzes A.6.1 von Krylov und Rozovskij für endlichdimensionale Itô-Gleichungen in V_n zu überprüfen.

Unter Berücksichtigung der Eigenschaften der Projektion in Satz A.1.5 und (H0) erfüllt $p_n U_0$ die Voraussetzungen an die Anfangswertbedingung.

Daher sind Messbarkeit, Stetigkeit, Monotonie, Koerzivität und Wachstumsbeschränktheit der eingehenden Größen $A_n, p_n B, p_n f_{in}, i = 1, 2$ nachzuweisen.

Wegen der Annahmen **(H1)**(i), (ii), der Beziehungen (3.1.4) und (3.1.5) des Operators A sowie den Eigenschaften der Projektion sind $A_n, p_n B$ messbar und stetig.

Nach den Sätzen 1.1.3, 1.2.7 und Annahme **(H2)**(i) existieren für $u \in V_n$ messbare wie stetige Selektoren $f_{in}(t) \in F_i(t, u)$, deren Projektionen $p_n f_{in}$ ebenfalls messbar und sogar Lipschitz-stetig sind.

Die Eigenschaft der Monotonie

$$\begin{aligned} & -2\langle A_n(t, u) - A_n(t, v), u - v \rangle + \|p_n B(t, u) - p_n B(t, v)\|_H^2 \\ & \quad + 2\langle p_n f_{1n}(t) - p_n \tilde{f}_{1n}(t), u - v \rangle_H + \|p_n f_{2n}(t) - p_n \tilde{f}_{2n}(t)\|_H^2 \\ & \leq c_3 \|u - v\|_H^2 + \|f_{1n}(t) - \tilde{f}_{1n}(t)\|_H^2 + \|u - v\|_H^2 + \|f_{2n}(t) - \tilde{f}_{2n}(t)\|_H^2 \\ & \leq (1 + c_3 + L_1^2 + L_2^2) \|u - v\|_H^2 \end{aligned}$$

ergibt sich für $f_{in}(t) \in F_i(t, u), \tilde{f}_{in}(t) \in F_i(t, v)$ aus (3.1.5), **(H1)**(iii), **(H2)**(i) und der Nicht-Expansivität der Projektion für alle $u, v \in V_n$.

Die Annahmen **(H1)**(ii), **(H1)**(iv), **(H2)**(ii), die Selbst-Adjungiertheit und Beschränktheit von p_n sowie die Darstellungen (3.1.4), (3.1.5) von A_n führen für alle $u \in V_n$ auf die Koerzivität über V_n und die Wachstumsbeschränktheit.

Damit besitzt die Aufgabe (3.2.1) nach dem Satz A.6.1 und der Bemerkung A.6.2 eine Lösung mit den dort beschriebenen Eigenschaften.

Folglich existieren Prozesse und entsprechende Selektoren, die der Gleichung (3.2.1) bzw. (3.1.7) genügen und die Inklusion (3.1.3) lösen. Also ist $S_n \neq \emptyset$ für jedes $n \geq 1$. \square

Das nächste Lemma gibt a priori Schranken und entsprechende Grenzwerte an.

Lemma 3.2.3 *Für die Lösungen $U_n \in S_n$ und Operatoren in Aufgabe (3.1.3) gilt mit positiven, von $n \geq 1$ unabhängigen Konstanten $M_1, M_2, M_3, M_4 \geq 0$:*

$$(i) \quad E \|U_n(t)\|_H^2 \leq M_1 \text{ für alle } t \in [0, T],$$

$$E \int_0^T \|U_n(s)\|_V^2 ds \leq M_2,$$

$$E \int_0^T \|A(s, U_n(s))\|_{V^*}^2 ds \leq M_3,$$

$$E \int_0^T \|p_n B(s, U_n(s))\|_H^2 ds \leq M_4.$$

Demnach ergeben sich für Teilfolgen mit $n \rightarrow \infty$ die Beziehungen:

$$(ii) \quad U_n(t) \xrightarrow{w} U(t) \text{ in } L^2(\Omega; H) \text{ für alle } t \in [0, T],$$

$$U_n \xrightarrow{w} \tilde{U} \text{ in } L^2(\Omega \times [0, T]; V),$$

$$U_n \xrightarrow{w} U \text{ in } L^2(\Omega \times [0, T]; H),$$

$$A(\cdot, U_n(\cdot)) \xrightarrow{w} \tilde{A}(\cdot) \text{ in } L^2(\Omega \times [0, T]; V^*),$$

$$p_n B(\cdot, U_n(\cdot)) \xrightarrow{w} \tilde{B}(\cdot) \text{ in } L^2(\Omega \times [0, T]; H).$$

Beweis.

Für $U_n \in S_n$, $n \geq 1$ folgt aus Gleichung (3.1.7) mit der Itô-Formel für das Normquadrat gemäß Satz A.5.3

$$\begin{aligned} \|U_n(t)\|_H^2 &= \|U_n(0)\|_H^2 - 2 \int_0^t \langle A_n(s, U_n(s)), U_n(s) \rangle ds \\ &\quad - 2 \int_0^t (p_n B(s, U_n(s)), U_n(s))_H dW_1(s) + \int_0^t \|p_n B(s, U_n(s))\|_H^2 ds \\ &\quad + 2 \int_0^t (p_n f_{1n}(s), U_n(s))_H ds \\ &\quad + 2 \int_0^t (p_n f_{2n}(s), U_n(s))_H dW_2(s) + \int_0^t \|p_n f_{2n}(s)\|_H^2 ds. \end{aligned}$$

Mit Erwartungswertbildung, $\langle A_n(t, U_n(t)), U_n(t) \rangle = \langle A(t, U_n(t)), U_n(t) \rangle$ für $U_n(t) \in V_n$ nach (3.1.5) und der Ungleichung $2(a, b) \leq a^2 + b^2$ schätzt man weiter ab

$$\begin{aligned} E\|U_n(t)\|_H^2 &\leq E\|U_n(0)\|_H^2 - 2E \int_0^t \langle A(s, U_n(s)), U_n(s) \rangle ds \\ &\quad + E \int_0^t \|p_n B(s, U_n(s))\|_H^2 ds \\ &\quad + E \int_0^t \|U_n(s)\|_H^2 ds + E \int_0^t \|p_n f_{1n}(s)\|_H^2 ds \\ &\quad + E \int_0^t \|p_n f_{2n}(s)\|_H^2 ds. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Nach den Voraussetzungen der Koerzivität **(H1)**(ii), der Beschränktheit **(H2)**(ii) und den Eigenschaften der Projektion p_n gilt

$$E\|U_n(t)\|_H^2 \leq E\|U_0\|_H^2 + (1 + c_2 + d_1 + d_2) \int_0^t E\|U_n(s)\|_H^2 ds.$$

Demzufolge existiert nach dem Lemma von Gronwall eine positive Konstante M_1 , so dass für alle $t \in [0, T]$

$$E\|U_n(t)\|_H^2 \leq M_1 \tag{3.2.3}$$

mit $M_1 = M_1(U_0, c_2, d_1, d_2, T)$ erfüllt ist.

Über die Ungleichung (3.2.2), obiges Ergebnis (3.2.3) und die Annahme **(H1)**(ii) weist man die Existenz einer weiteren positiven Konstante $M_2 > 0$ nach, zusätzlich abhängig von c_1 , für die

$$E \int_0^t \|U_n(s)\|_V^2 ds \leq M_2 \tag{3.2.4}$$

für alle $t \in [0, T]$, also auch $t = T$ zutrifft.

Die dritte Schranke ergibt sich aus der Annahme **(H1)**(iv) und der vorherigen Abschätzung (3.2.4). Mithin gibt es eine positive Konstante $M_3 > 0$, abhängig von c_4, T und M_2 mit

$$E \int_0^T \|A(s, U_n(s))\|_{V^*}^2 ds \leq M_3.$$

Unter Berücksichtigung der Eigenschaft des Projektionsoperators führen **(H1)**(ii), (iv) und die Abschätzung (3.2.3) zur Existenz von $M_4 > 0$ mit

$$E \int_0^T \|p_n B(s, U_n(s))\|_H^2 ds \leq M_4.$$

In reflexiven Banachräumen besitzen beschränkte Folgen stets schwach konvergente Teilfolgen. Folglich können wegen der soeben gezeigten Beschränktheit der Ausdrücke in Lemma 3.2.3(i) Teilfolgen ausgewählt werden, der Einfachheit halber erneut mit n indiziert, so dass die Beziehungen (ii) gelten.

Speziell folgt weiter aus der Abschätzung (3.2.3) und

$$U_n \xrightarrow{w} U \text{ in } L^2(\Omega \times [0, T]; H)$$

die Gleichheit $U = \tilde{U}$ für fast alle $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$, da V in H dicht eingebettet ist. \square

Lemma 3.2.4 *Die schwachen Grenzwerte der Lösungen aus Lemma 3.2.3 erfüllen für alle $v \in V$ die Gleichung*

$$\begin{aligned} (U(t), v)_H &+ \int_0^t \langle \tilde{A}(s), v \rangle ds + \int_0^t (\tilde{B}(s), v)_H dW_1(s) \\ &= (U_0, v)_H + \int_0^t (f_1(s), v)_H ds + \int_0^t (f_2(s), v)_H dW_2(s). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Beweis.

Für \mathcal{F}_t -messbare, H -wertige Prozesse $(h(t))_{t \in [0, T]}$ mit $E \int_0^T \|h(t)\|_H^2 dt < \infty$ wird durch

$$\int_0^t h(s) dW(s)$$

ein linearer, stetiger Operator definiert, der den Raum aller \mathcal{F}_t -messbaren Prozesse aus $L^2(\Omega \times [0, T]; H)$ in sich abbildet. Da jeder lineare, stark stetige Operator auch schwach stetig ist, gilt für $n \rightarrow \infty$

$$\int_0^t h_n(s) dW(s) \xrightarrow{w} \int_0^t h(s) dW(s)$$

in $L^2(\Omega \times [0, T]; H)$ und in $L^2(\Omega; H)$ für jedes $t \in [0, T]$, wenn h_n schwach gegen h in $L^2(\Omega \times [0, T]; H)$ konvergiert.

Des Weiteren lässt sich für $h_n \xrightarrow{w} h$ in $L^2(\Omega \times [0, T]; H)$ die Gültigkeit von

$$\int_0^t h_n(s) ds \xrightarrow{w} \int_0^t h(s) ds$$

in $L^2(\Omega \times [0, T]; H)$ und für jedes t in $L^2(\Omega; H)$ zeigen. Diese Konvergenzaussagen sind in Satz A.2.1 zusammengefasst.

Es gilt somit nach Lemma 3.2.3(ii) in $L^2(\Omega \times [0, T]; H)$ für $n \rightarrow \infty$

$$\int_0^t p_n B(s, U_n(s)) dW_1(s) \xrightarrow{w} \int_0^t \tilde{B}(s) dW_1(s). \quad (3.2.6)$$

Aus der Beschränktheit **(H2)**(ii) und der Abschätzung (3.2.3) ergeben sich $f_{in}(t) \xrightarrow{w} f_i(t)$ in $L^2(\Omega; H)$ für jedes $t \in [0, T]$ und $f_{in} \xrightarrow{w} f_i$ in $L^2(\Omega \times [0, T]; H)$ für eine Teilfolge und $i = 1, 2$.

Für alle $v \in V_n$ gilt mit $n \rightarrow \infty$

$$(p_n f_{in}(t), v)_H = (f_{in}(t), p_n v)_H = (f_{in}(t), v)_H \rightarrow (f_i(t), v)_H.$$

Da die Teilräume V_n so gewählt sind, dass sich jedes Element $v \in V$ beliebig gut durch eine Linearkombination von Elementen $v_n \in V_n$ approximieren lässt, behält die obige Aussage ihre Gültigkeit für alle $v \in V$.

Die stetige Einbettung von $L^2(\Omega \times [0, T]; V)$ in $L^2(\Omega \times [0, T]; H)$ führt somit für $n \rightarrow \infty$ auf

$$p_n f_{in} \xrightarrow{w} f_i \text{ in } L^2(\Omega \times [0, T]; H) \quad (3.2.7)$$

und ebenso

$$\int_0^t p_n f_{1n}(s) ds \xrightarrow{w} \int_0^t f_1(s) ds, \quad (3.2.8)$$

$$\int_0^t p_n f_{2n}(s) dW_2(s) \xrightarrow{w} \int_0^t f_2(s) dW_2(s) \quad (3.2.9)$$

jeweils in $L^2(\Omega \times [0, T]; H)$ und $L^2(\Omega; H)$ für jedes $t \in [0, T]$.

Für beliebige Zufallsgrößen $X \in L^2(\Omega; \mathbb{R})$ und $\phi \in C_0^\infty[0, T]$ folgt aus (3.1.7) für alle $v_m \in V_m, m \leq n$

$$\begin{aligned} & E \int_0^T X \phi(t) (U_n(t), v_m)_H dt \\ & + E \int_0^T X \phi(t) \left(\int_0^t \langle A_n(s, U_n(s)), v_m \rangle ds + \int_0^t (p_n B(s, U_n(s)), v_m)_H dW_1(s) \right) dt \\ & = E \int_0^T X \phi(t) (U_n(0), v_m)_H dt \\ & + E \int_0^T X \phi(t) \left(\int_0^t (p_n f_{1n}(s), v_m)_H ds + \int_0^t (p_n f_{2n}(s), v_m)_H dW_2(s) \right) dt. \end{aligned}$$

Zu jedem $v \in V$ existiert eine Folge $(v_m)_{m \geq 1} \subseteq V_m$, so dass v_m gegen v in V und damit auch in H für $m \rightarrow \infty$ konvergiert.

Mit den Konvergenzaussagen des Lemmas 3.2.3, der Gleichung (3.1.5) und den Grenzwerten in (3.2.6), (3.2.8), (3.2.9) leitet man für alle $v \in V$ und $n \rightarrow \infty$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
& E \int_0^T X\phi(t)(U(t), v)_H dt \\
& \quad + E \int_0^T X\phi(t) \left(\int_0^t \langle \tilde{A}(s), v \rangle ds + \int_0^t (\tilde{B}(s), v)_H dW_1(s) \right) dt \\
& = E \int_0^T X\phi(t)(U_0, v)_H dt \\
& \quad + E \int_0^T X\phi(t) \left(\int_0^t (f_1(s), v)_H ds + \int_0^t (f_2(s), v)_H dW_2(s) \right) dt \quad (3.2.10)
\end{aligned}$$

her.

Insbesondere da X und ϕ beliebig wählbar sind, behält die obige Gleichung für alle $v \in V$ ihre Gültigkeit in der Form (3.2.5)

$$\begin{aligned}
(U(t), v)_H & + \int_0^t \langle \tilde{A}(s), v \rangle ds + \int_0^t (\tilde{B}(s), v)_H dW_1(s) \\
& = (U_0, v)_H + \int_0^t (f_1(s), v)_H ds + \int_0^t (f_2(s), v)_H dW_2(s)
\end{aligned}$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 für fast alle $t \in [0, T]$.

Aus dem Satz A.6.4 von Krylov und Rozovskij für Evolutionstriplet folgt, dass $U(t)$ mit einem H -wertigen, \mathcal{F}_t -messbaren Prozess identifiziert werden kann, der für fast alle $t \in [0, T]$ Werte in V annimmt, die Gleichung (3.2.5) für $\omega \in \Omega'$ mit $P(\Omega') = 1$ erfüllt sowie für $t \in [0, T]$ auf Ω' stetig in H ist.

Die Modifikation sei wieder mit U bezeichnet. □

Lemma 3.2.5 *Der in Gleichung (3.2.5) definierte Grenzwert $U(t)$ ist Lösung der stochastischen Differentialinklusion (3.1.1), d. h.*

$$S \neq \emptyset.$$

Beweis.

Zu zeigen sind für fast alle $t \in [0, T]$ die Gleichheit von $\tilde{A}(t) = A(t, U(t))$, $\tilde{B}(t) = B(t, U(t))$ und die Selektionseigenschaft $f_i(t) \in F_i(t, U(t))$ P -f. s., $i = 1, 2$.

Als erstes erfolgt die Überprüfung von $\tilde{A}(t) = A(t, U(t))$ sowie $\tilde{B}(t) = B(t, U(t))$ in Anlehnung an die Ausführungen in [67].

Mit der Itô-Formel für das Normquadrat angewendet auf (3.2.5) erhält man

$$\begin{aligned}
\|U(t)\|_H^2 &= \|U_0\|_H^2 - 2 \int_0^t \langle \tilde{A}(s), U(s) \rangle ds \\
&\quad - 2 \int_0^t (\tilde{B}(s), U(s))_H dW_1(s) + \int_0^t \|\tilde{B}(s)\|_H^2 ds \\
&\quad + 2 \int_0^t (f_1(s), U(s))_H ds \\
&\quad + 2 \int_0^t (f_2(s), U(s))_H dW_2(s) + \int_0^t \|f_2(s)\|_H^2 ds. \tag{3.2.11}
\end{aligned}$$

Für beliebige \mathcal{F}_t -messbare, V -wertige Prozesse $(Y(t))_{t \in [0, T]}$ mit $E \int_0^T \|Y(s)\|_V^2 ds < \infty$ und eine positive Konstante c wird

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= E \int_0^T e^{-cs} \left[-2 \langle A(s, U_n(s)) - A(s, Y(s)), U_n(s) - Y(s) \rangle \right. \\
&\quad + \|p_n B(s, U_n(s)) - p_n B(s, Y(s))\|_H^2 \\
&\quad + 2(p_n f_{1n}(s) - p_n f_1^Y(s), U_n(s) - Y(s))_H \\
&\quad + \|p_n f_{2n}(s) - p_n f_2^Y(s)\|_H^2 \\
&\quad \left. - c \|U_n(s) - Y(s)\|_H^2 \right] ds \tag{3.2.12}
\end{aligned}$$

eingeführt. Hierbei sind $f_i^Y(t)$ \mathcal{F}_t -messbare, stetige Selektoren von $F_i(t, Y(t))$, die nach Satz 1.1.3 und Satz 1.2.7 für $i = 1, 2$ existieren, und $U_n \in S_n$.

Bei entsprechender Wahl der Konstante c ergibt sich $\Delta_n \leq 0$ mit den Eigenschaften der Projektion in Satz A.1.5, der Monotoniebedingung **(H1)**(iii) und der Lipschitz-Stetigkeit der Abbildungen F_1, F_2 nach **(H2)**(i).

Es wird eine Zerlegung $\Delta_n = \Delta_n^1 + \Delta_n^2$ vorgenommen mit

$$\begin{aligned}
\Delta_n^1 &= E \int_0^T e^{-cs} \left[-2 \langle A_n(s, U_n(s)), U_n(s) \rangle + \|p_n B(s, U_n(s))\|_H^2 \right. \\
&\quad \left. + 2(p_n f_{1n}(s), U_n(s))_H + \|p_n f_{2n}(s)\|_H^2 - c \|U_n(s)\|_H^2 \right] ds
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\Delta_n^2 &= E \int_0^T e^{-cs} \left[-2 \left(\langle A(s, Y(s)), Y(s) \rangle - \langle A(s, Y(s)), U_n(s) \rangle - \langle A(s, U_n(s)), Y(s) \rangle \right) \right. \\
&\quad - 2(p_n B(s, U_n(s)), p_n B(s, Y(s)))_H + \|p_n B(s, Y(s))\|_H^2 \\
&\quad + 2 \left((p_n f_1^Y(s), Y(s))_H - (p_n f_1^Y(s), U_n(s))_H - (p_n f_{1n}(s), Y(s))_H \right) \\
&\quad - 2(p_n f_{2n}(s), p_n f_2^Y(s))_H + \|p_n f_2^Y(s)\|_H^2 \\
&\quad \left. + 2c(U_n(s), Y(s))_H - c \|Y(s)\|_H^2 \right] ds.
\end{aligned}$$

Dabei geht die Beziehung (3.1.5) aus Bemerkung 3.1.2 in die Darstellung von Δ_n^1 ein. Aus Gleichung (3.1.7) folgt mit der Itô-Formel

$$\begin{aligned} Ee^{-ct} \|U_n(t)\|_H^2 &= E \|U_n(0)\|_H^2 \\ &+ E \int_0^t e^{-cs} \left[-2 \langle A_n(s, U_n(s)), U_n(s) \rangle + \|p_n B(s, U_n(s))\|_H^2 \right. \\ &\left. + 2(p_n f_{1n}(s), U_n(s))_H + \|p_n f_{2n}(s)\|_H^2 - c \|U_n(s)\|_H^2 \right] ds. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Darstellung

$$\Delta_n^1 = Ee^{-cT} \|U_n(T)\|_H^2 - E \|U_n(0)\|_H^2$$

und folglich

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^1 = Ee^{-cT} \|U(T)\|_H^2 - E \|U_0\|_H^2 + \delta e^{-cT} \quad (3.2.13)$$

für $\delta = \limsup_{n \rightarrow \infty} E \|U_n(T)\|_H^2 - E \|U(T)\|_H^2$.

Aufgrund der schwachen Konvergenz von $U_n(t)$ in $L^2(\Omega; H)$ nach Lemma 3.2.3(ii) für $t = T$ ist $\delta \geq 0$.

Andererseits folgt mittels Gleichung (3.2.11) und partieller Integration

$$\begin{aligned} Ee^{-cT} \|U(T)\|_H^2 - E \|U_0\|_H^2 &= E \int_0^T e^{-cs} \left[-2 \langle \tilde{A}(s), U(s) \rangle + \|\tilde{B}(s)\|_H^2 + 2(f_1(s), U(s))_H \right. \\ &\left. + \|f_2(s)\|_H^2 - c \|U(s)\|_H^2 \right] ds. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Mit den Gleichungen (3.2.13) und (3.2.14) erhält man so

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^1 &= E \int_0^T e^{-cs} \left[-2 \langle \tilde{A}(s), U(s) \rangle + \|\tilde{B}(s)\|_H^2 + 2(f_1(s), U(s))_H \right. \\ &\left. + \|f_2(s)\|_H^2 - c \|U(s)\|_H^2 \right] ds + \delta e^{-cT}. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^2 &= E \int_0^T e^{-cs} \left[-2 \langle A(s, Y(s)), Y(s) \rangle + 2 \langle A(s, Y(s)), U(s) \rangle \right. \\ &+ 2 \langle \tilde{A}(s), Y(s) \rangle - 2 \langle \tilde{B}(s), B(s, Y(s)) \rangle_H + \|B(s, Y(s))\|_H^2 \\ &+ 2(f_1^Y(s), Y(s))_H - 2(f_1^Y(s), U(s))_H - 2(f_1(s), Y(s))_H \\ &- 2(f_2(s), f_2^Y(s))_H + \|f_2^Y(s)\|_H^2 \\ &\left. + 2c(U(s), Y(s))_H - c \|Y(s)\|_H^2 \right] ds \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

mit den Aussagen über die schwache Konvergenz in Lemma 3.2.3(ii), der Grenzwertbeziehung (3.2.7) sowie den Eigenschaften der Projektion.

Bei Beachtung von $\Delta_n \leq 0$ lässt sich demnach aus den Grenzwerten (3.2.15) und (3.2.16)

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \Delta_n &= E \int_0^T e^{-cs} \left[-2 \langle \tilde{A}(s) - A(s, Y(s)), U(s) - Y(s) \rangle + \|\tilde{B}(s) - B(s, Y(s))\|_H^2 \right. \\ &\quad + 2(f_1(s) - f_1^Y(s), U(s) - Y(s))_H \\ &\quad \left. + \|f_2(s) - f_2^Y(s)\|^2 - c\|U(s) - Y(s)\|_H^2 \right] ds \\ &\quad + \delta e^{-cT} \\ &\leq 0 \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

schließen.

Insbesondere für $Y(s) = U(s)$ gelten

$$f_2(s) = f_2^Y(s), \quad B(s, U(s)) = \tilde{B}(s)$$

und

$$\delta = \limsup_{n \rightarrow \infty} E\|U_n(T)\|_H^2 - E\|U(T)\|_H^2 = 0. \tag{3.2.18}$$

Weiterhin führt die Abschätzung (3.2.17) zu

$$\begin{aligned} E \int_0^T e^{-cs} \left[-2 \langle \tilde{A}(s) - A(s, Y(s)), U(s) - Y(s) \rangle \right. \\ \left. + 2(f_1(s) - f_1^Y(s), U(s) - Y(s))_H - c\|U(s) - Y(s)\|_H^2 \right] ds \leq 0. \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

Es sei $(Z(t))_{t \in [0, T]}$ ein beliebiger V -wertiger Prozess, \mathcal{F}_t -messbar mit $E \int_0^T \|Z(t)\|_V^2 dt < \infty$ und $\alpha > 0$ eine Konstante. Aus der Beziehung (3.2.19) leitet sich für $Y(t) = U(t) + \alpha Z(t)$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} E \int_0^T e^{-cs} \left[2\alpha \langle \tilde{A}(s) - A(s, U(s) + \alpha Z(s)), Z(s) \rangle \right. \\ \left. - 2\alpha(f_1(s) - f_1^{U+\alpha Z}(s), Z(s))_H - c\alpha^2 \|Z(s)\|_H^2 \right] ds \leq 0 \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

ab. Nach erfolgter Division durch α und dem anschließenden Grenzwertübergang für $\alpha \rightarrow 0$ haben die Stetigkeit von A und die Lipschitz-Stetigkeit von F_1 bezüglich der Hausdorff-Distanz

$$E \int_0^T 2e^{-cs} \langle \tilde{A}(s) - A(s, U(s)), Z(s) \rangle ds \leq 0$$

zur Folge. Hieraus ergibt sich $\tilde{A}(t) = A(t, U(t))$ für fast alle $t \in [0, T]$, da $Z(t)$ letztlich beliebig wählbar ist.

Im zweiten Teil des Beweises wird für den Nachweis der Selektionseigenschaft der Lipschitz-stetigen Abbildungen F_1, F_2 abermals der Satz 1.2.9 von Hu und Papageorgiou angewendet.

Für $f_{in} \xrightarrow{w} f$ in $L^2(\Omega \times [0, T]; H)$ und

$$f_{in}(\omega, t) \in G(\omega, t) = \{g \in L^2(\Omega \times [0, T]; H) : E\|g(t)\|_H^2 \leq dM_1\}, \quad d = \max\{d_1, d_2\}$$

ist

$$f_i(t) \in \overline{\text{conv}} \left(w\text{-}\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{f_{in}(t)\} \right). \quad (3.2.21)$$

Aufgrund der schwachen Konvergenz von $U_n(t)$ in $L^2(\Omega; H)$ erhält man für $t = T$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E\|U_n(T)\|_H^2 \geq E\|U(T)\|_H^2$$

und mit der Beziehung (3.2.18) folgt daraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\|U_n(T)\|_H^2 = E\|U(T)\|_H^2.$$

Eine Folge konvergiert stark, wenn sowohl die schwache als auch die starke Konvergenz der Normen gegeben ist. Aus den obigen Schlussfolgerungen ergibt sich somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\|U_n(T) - U(T)\|_H^2 = 0. \quad (3.2.22)$$

Im Sinne der a priori Abschätzungen (3.2.3) und (3.2.4) hängt der Grenzwert $U(T)$ nicht von der gewählten Teilfolge ab. Damit enthält jede Teilfolge eine Teilfolge, die in $L^2(\Omega; H)$ gegen $U(T)$ konvergiert. Folglich ist die Konvergenzaussage (3.2.22) für die gesamte Folge erfüllt. Anstatt T sind auch beliebige Zeitpunkte $t \in [0, T]$ wählbar.

Wegen $f_{in}(t) \in F_i(t, U_n(t))$, $U_n(t) \rightarrow U(t)$ in $L^2(\Omega; H)$, **(H2)**(i) und der abgeschlossenen, konvexen Bildmengen der Prozesse F_i per Definition 1.3.1(a) folgt

$$\overline{\text{conv}} \left(w\text{-}\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{f_{in}(t)\} \right) \subseteq \overline{\text{conv}} \left(w\text{-}\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_i(t, U_n(t)) \right) \subseteq F_i(t, U(t)).$$

Damit ist $f_i(t) \in F_i(t, U(t))$ P -f. s. für $i = 1, 2$ und fast alle $t \in [0, T]$ nach Erkenntnis (3.2.21) bewiesen.

Man erhält die Lösung $U(t)$ der stochastischen Differentialinklusion (3.1.1) als Grenzwert der Folge $(U_n(t))_{n \geq 1}$, d. h. $S \neq \emptyset$. □

Bemerkung 3.2.6 Neben der Konvergenz von $U_n(t) \rightarrow U(t)$ in $L^2(\Omega; H)$ für jedes $t \in [0, T]$ und $n \rightarrow \infty$ gilt wegen Abschätzung (3.2.3) auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \int_0^T \|U_n(t) - U(t)\|_H^2 dt = 0.$$

Für eine Teilfolge folgt dann mit Wahrscheinlichkeit 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|U_n(t) - U(t)\|_H^2 dt = 0.$$

Beweis von Satz 3.2.1.

Im ersten Teil des Beweises wird die Inklusion $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n} \subseteq S$ gezeigt.

Es sei $(U_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von Lösungen der endlichdimensionalen Probleme (3.1.3) mit $U_n \in S_n$ für jedes $n \geq 1$ und $U_n \rightarrow U$, $n \rightarrow \infty$ in $L^2(\Omega \times [0, T]; H)$. Dann ist nach Definition 1.1.1(a) des oberen Grenzwertes einer Mengenfølge $U \in \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n}$. Somit bleibt nachzuweisen, dass der Grenzwert U Element der Lösungsmenge S ist.

Lemma 3.2.2 stellt die Lösbarkeit der endlichdimensionalen stochastischen Differentialinklusionen (3.1.3) sicher. Für die Lösungen U_n , die Operatoren A_n , $p_n B$ und die Selektoren $p_n f_{in}$, $i = 1, 2$ gelten nach Lemma 3.2.3 und Lemma 3.2.4 Wachstumsbeschränkungen. Mit diesen a priori Schranken existieren schwache Grenzwerte, für die in den Lemmata 3.2.4 und 3.2.5 die Gültigkeit der Gleichung

$$\begin{aligned} (U(t), v)_H &+ \int_0^t \langle A(s, U(s)), v \rangle ds \\ &= (U_0, v)_H + \int_0^t (f_1(s), v)_H ds + \int_0^t (f_2(s), v)_H dW(s) \end{aligned}$$

P -f. s. für alle $t \in [0, T]$ und $v \in V$ bewiesen wurde. Dabei sind $f_i(t)$ Selektoren der mengenwertigen Abbildungen F_i an der Stelle $U(t)$ mit $f_i(t) \in F_i(t, U(t))$ für $i = 1, 2$. Hieraus folgt $U \in S$. Also ist zum einen $S \neq \emptyset$ und zum anderen

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n} \subseteq S. \quad (3.2.23)$$

Der zweite Teil des Beweises zu Satz 3.2.1 befasst sich mit dem Nachweis von $S \subseteq \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n}$.

Nach Lemma 3.2.5 ist bekannt, dass die stochastische Differentialinklusion (3.1.1) wenigstens eine Lösung besitzt, d. h., es ist $S \neq \emptyset$.

Zu einer Lösung $U \in S$ wird eine Folge $(U_n)_{n \geq 1}$ gesucht, für die $U_n \in S_n$ gilt und U_n gegen U konvergiert für $n \rightarrow \infty$ in $L^2(\Omega \times [0, T]; H)$.

Über die metrische Projektion $\text{proj}[\cdot; \cdot]$ (vgl. Definition A.1.1) und $f_i(t) \in F_i(t, U(t))$ werden die Größen

$$\begin{aligned} g_{in}(t) &= \text{proj}[f_i(t); p_n F_i(t, U(t))], \\ h_{in}(t, u) &= \text{proj}[g_{in}(t); p_n F_i(t, u)] \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

für $u \in H$, $i = 1, 2$ eingeführt und das dazugehörige endlichdimensionale Problem

$$\begin{aligned} dU_n(t) + A_n(t, U_n(t))dt + p_n B(t, U_n(t))dW_1(t) \\ &= h_{1n}(t, U_n(t))dt + h_{2n}(t, U_n(t))dW_2(t), \\ U_n(0) &= p_n U(0) = p_n U_0 \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

betrachtet. Anzumerken ist die Eindeutigkeit der Abbildungen in (3.2.24) infolge der Projektion auf abgeschlossene und konvexe Mengen eines Hilbertraumes.

Für die Lösbarkeit der Gleichung sind wiederum die Bedingungen des Satzes A.6.1 von Krylov und Rozovskij für endlichdimensionale Situationen zu überprüfen.

Unter Berücksichtigung der projizierten Abbildungen und der Restriktion des Operators A bezüglich des Raumes V_n gemäß (3.1.5) gelten die Eigenschaften **(H0)**, **(H1)** auch für $p_n U_0$, $p_n B$ und A_n .

Per Definition sind h_{in} Selektoren der $p_n F_i$ für $i = 1, 2$ mit $h_{in}(t, u) \in p_n F_i(t, u)$ für $u \in H_n$ und genügen der Annahme **(H2)** aufgrund der Darstellung (3.1.6) sowie der Projektionseigenschaften. Gemäß Satz A.1.2 folgt die Messbarkeit von h_{in} bezüglich t . Nach Satz 9.5.3 in Aubin und Frankowska [7], S. 375 existiert ein bezüglich des zweiten Argumentes von F_i Lipschitz-stetiger Selektor $h_{in}^u(t, v) \in p_n F_i(t, v)$, der die Bedingung $h_{in}(t, u) = h_{in}^u(t, u)$ erfüllt.

Damit ergeben sich die Monotonie, Koerzivität und Beschränktheit analog dem Vorgehen in Lemma 3.2.2. Mithin ist das Anfangswertproblem (3.2.25) lösbar nach Satz A.6.1, und es ist $U_n \in S_n$.

Nach der Anwendung der Itô-Formel und Erwartungswertbildung folgt für Lösungen U_n, U mit $f_i(t) \in F_i(t, U(t))$, $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
E\|U_n(t) - U(t)\|_H^2 &= E\|U_n(0) - U(0)\|_H^2 \\
&\quad + 2E \int_0^t \langle A_n(s, U_n(s)) - A(s, U(s)), U(s) - U_n(s) \rangle ds \\
&\quad + E \int_0^t \|p_n B(s, U_n(s)) - B(s, U(s))\|_H^2 ds \\
&\quad + 2E \int_0^t \langle h_{1n}(s, U_n(s)) - f_1(s), U_n(s) - U(s) \rangle_H ds \\
&\quad + E \int_0^t \|h_{2n}(s, U_n(s)) - f_2(s)\|_H^2 ds. \tag{3.2.26}
\end{aligned}$$

Für den zweiten und dritten Term in Gleichung (3.2.26) gilt mit der Ungleichung $(a - b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$

$$\begin{aligned}
&2E \int_0^t \langle A_n(s, U_n(s)) - A(s, U(s)), U(s) - U_n(s) \rangle ds \\
&\quad + E \int_0^t \|p_n B(s, U_n(s)) - B(s, U(s))\|_H^2 ds \\
&\leq 2E \int_0^t \langle A_n(s, U_n(s)) - A(s, p_n U(s)), U(s) - U_n(s) \rangle ds \\
&\quad + 2E \int_0^t \langle A(s, p_n U(s)) - A(s, U(s)), U(s) - U_n(s) \rangle ds \\
&\quad + 2E \int_0^t \|p_n B(s, U_n(s)) - p_n B(s, U(s))\|_H^2 ds \\
&\quad + 2E \int_0^t \|p_n B(s, U(s)) - B(s, U(s))\|_H^2 ds.
\end{aligned}$$

Mit Gleichung (3.1.5) und Annahme **(H1)**(iii) ergibt sich hierfür

$$\begin{aligned}
& 2E \int_0^t \langle A_n(s, U_n(s)) - A(s, U(s)), U(s) - U_n(s) \rangle ds \\
& \quad + E \int_0^t \|p_n B(s, U_n(s)) - B(s, U(s))\|_H^2 ds \\
& \leq 2E \int_0^t \langle A_n(s, U_n(s)) - A(s, p_n U(s)), U(s) - p_n U(s) \rangle ds \\
& \quad + 2E \int_0^t \langle A(s, U_n(s)) - A(s, p_n U(s)), p_n U(s) - U_n(s) \rangle ds \\
& \quad + 2E \int_0^t \langle A(s, p_n U(s)) - A(s, U(s)), U(s) - U_n(s) \rangle ds \\
& \quad + 2E \int_0^t \|B(s, U_n(s)) - B(s, U(s))\|_H^2 ds + 2E \int_0^t \|p_n B(s, U(s)) - B(s, U(s))\|_H^2 ds \\
& \leq 2E \int_0^t \langle A_n(s, U_n(s)) - A(s, p_n U(s)), U(s) - p_n U(s) \rangle ds \\
& \quad + c_3 E \int_0^t \|U_n(s) - p_n U(s)\|_H^2 ds \\
& \quad + 2E \int_0^t \langle A(s, p_n U(s)) - A(s, U(s)), U(s) - U_n(s) \rangle ds \\
& \quad + 2c_3 E \int_0^t \|U_n(s) - U(s)\|_H^2 ds + 2E \int_0^t \|p_n B(s, U(s)) - B(s, U(s))\|_H^2 ds \\
& \leq 2E \int_0^t \langle A_n(s, U_n(s)) - A(s, p_n U(s)), U(s) - p_n U(s) \rangle ds \\
& \quad + 2E \int_0^t \langle A(s, p_n U(s)) - A(s, U(s)), U(s) - U_n(s) \rangle ds \\
& \quad + 2c_3 E \int_0^t \|U(s) - p_n U(s)\|_H^2 ds + 4c_3 E \int_0^t \|U_n(s) - U(s)\|_H^2 ds \\
& \quad + 2E \int_0^t \|p_n B(s, U(s)) - B(s, U(s))\|_H^2 ds.
\end{aligned}$$

Da $A_n(\cdot, U_n(\cdot))$, $A(\cdot, p_n U(\cdot))$ sowie U_n, U nach **(H1)**(vi), Lemma 3.2.3 sowie (3.1.5) in $L^2(\Omega \times [0, T]; V^*)$ bzw. $L^2(\Omega \times [0, T]; V)$ beschränkt sind und $p_n U(t) \rightarrow U(t)$ in V gilt, konvergiert der erste Term gegen 0 für $n \rightarrow \infty$.

Die Stetigkeit von A in **(H1)**(i) führt zur Konvergenz des zweiten Ausdrucks gegen 0, denn aus $p_n U(t) \rightarrow U(t)$ in V folgt $A(t, p_n U(t)) \rightarrow A(t, U(t))$ in V^* für $n \rightarrow \infty$.

Mit $p_n U(t) \rightarrow U(t)$ bzw. $p_n B(t, U(t)) \rightarrow B(t, U(t))$ in H bilden auch dritter und letzter Term in der obigen Abschätzung eine Nullfolge.

Damit gibt es für Beziehung (3.2.26) nach der Grenzwertdefinition zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0(\varepsilon)$, so dass für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} E\|U_n(t) - U(t)\|_H^2 &\leq \varepsilon + 4c_3E \int_0^t \|U_n(s) - U(s)\|_H^2 ds \\ &\quad + 2E \int_0^t (h_{1n}(s, U_n(s)) - f_1(s), U_n(s) - U(s))_H ds \\ &\quad + E \int_0^t \|h_{2n}(s, U_n(s)) - f_2(s)\|_H^2 ds \end{aligned}$$

gilt, wobei zusätzlich $p_n U(0) = U_n(0) \rightarrow U(0)$ in H berücksichtigt wird. Über die Ungleichung $2ab \leq a^2 + b^2$ wird diese Aussage weiter abgeschätzt zu

$$\begin{aligned} E\|U_n(t) - U(t)\|_H^2 &\leq \varepsilon + 4c_3E \int_0^t \|U_n(s) - U(s)\|_H^2 ds \\ &\quad + E \int_0^t \|h_{1n}(s, U_n(s)) - f_1(s)\|_H^2 ds + E \int_0^t \|U_n(s) - U(s)\|_H^2 ds \\ &\quad + E \int_0^t \|h_{2n}(s, U_n(s)) - f_2(s)\|_H^2 ds. \end{aligned}$$

Die Lipschitz-Stetigkeit der Abbildung F_1 in H führt auf folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} \|h_{1n}(s, U_n(s)) - f_1(s)\|_H &\leq \|h_{1n}(s, U_n(s)) - g_{1n}(s)\|_H + \|g_{1n}(s) - f_1(s)\|_H \\ &= d(g_{1n}(s), p_n F_1(s, U_n(s))) + d(f_1(s), p_n F_1(s, U(s))) \\ &\leq h(p_n F_1(s, U(s)), p_n F_1(s, U_n(s))) + \|f_1(s) - p_n f_1(s)\|_H \\ &\leq L_1 \|U(s) - U_n(s)\|_H + \|f_1(s) - p_n f_1(s)\|_H \end{aligned}$$

bei Beachtung der Definition (3.2.24) von g_{1n} , h_{1n} .

Ein analoges Vorgehen für $\|h_{2n}(s, U_n(s)) - f_2(s)\|_H$ ergibt schließlich

$$\begin{aligned} E\|U_n(t) - U(t)\|_H^2 &\leq \varepsilon + (1 + 4c_3 + 2L_1^2 + 2L_2^2) \cdot E \int_0^t \|U_n(s) - U(s)\|_H^2 ds \\ &\quad + 2E \int_0^t \|f_1(s) - p_n f_1(s)\|_H^2 ds + 2E \int_0^t \|f_2(s) - p_n f_2(s)\|_H^2 ds. \end{aligned}$$

Für $p_n f_i(t) \rightarrow f_i(t)$, $n \rightarrow \infty$ in H gibt es einen weiteren Index $n_1(\varepsilon) \geq n_0(\varepsilon)$, so dass für alle $n \geq n_1(\varepsilon)$ und $\varepsilon > 0$ gilt

$$E\|U_n(t) - U(t)\|_H^2 \leq \varepsilon + (1 + 4c_3 + 2L_1^2 + 2L_2^2) \cdot \int_0^t E\|U_n(s) - U(s)\|_H^2 ds.$$

Mit dem Lemma von Gronwall folgt die Konvergenz von $U_n(t)$ gegen $U(t)$ in $L^2(\Omega; H)$ für $t \in [0, T]$ bzw. $U_n \rightarrow U$ in $L^2(\Omega \times [0, T]; H)$.

Demzufolge ist $U \in \varinjlim_{n \rightarrow \infty} S_n$ und damit auch $S \subseteq \varinjlim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Die Aussage des Satzes ergibt sich mit der Inklusion (3.2.23) auf diese Weise:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n \subseteq S \subseteq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Da die umgekehrte Relation stets erfüllt ist, konvergiert S_n im Sinn von Kuratowski gegen S entsprechend der Definition 1.1.1(b). \square

Der folgende Satz beschäftigt sich mit einer weiteren Konvergenzaussage.

Folgerung 3.2.7 *Unter den Bedingungen des Satzes 3.2.1 gilt sogar*

$$S_n \xrightarrow{h} S \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis.

Nach der Konstruktion von Mengen S_n und den Abschätzungen in Lemma 3.2.3 und Lemma 3.2.4 gibt es eine Konstante $M > 0$, so dass

$$S_n \subseteq B_M = \{u \in L^2(\Omega \times [0, T]; V) : \|u\|_{L^2(\Omega \times [0, T]; V)} \leq M\}$$

für alle $n \geq 1$ gilt. Folglich ist B_M eine abgeschlossene, konvexe und beschränkte Teilmenge des $L^2(\Omega \times [0, T]; V)$. Da nach Voraussetzung eine kompakte Einbettung der Räume V und H besteht, gilt dies ebenfalls für die Einbettung $L^2(\Omega \times [0, T]; V) \subseteq L^2(\Omega \times [0, T]; H)$. Somit ist B_M eine kompakte Teilmenge des $L^2(\Omega \times [0, T]; H)$.

Mit den Sätzen 3.2.1 und 1.1.2 folgt die Konvergenz von S_n gegen S bezüglich der Hausdorff-Distanz. \square

Der Beweis des Existenzsatzes 3.2.1 mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens orientiert sich an den Beweisgedanken des Satzes A.6.4 von Krylov und Rozovskij [67] für Differentialgleichungen.

Die Modifikationen betreffen an dieser Stelle Existenzaussagen für stochastische Differentialinklusionen und damit die Erweiterung auf mengenwertige Abbildungen.

In der zweiten Teilmengenaussage von Satz 3.2.1 und in der Folgerung 3.2.7 werden zusätzlich Ergebnisse von Hu und Papageorgiou [53] genutzt.

Während sich die zitierte Arbeit nur auf deterministische Differentialinklusionen fokussiert, ergeben sich hier vergleichbare Resultate für den stochastischen Fall.

Bemerkung 3.2.8 Für stochastische Differentialinklusionen

$$\begin{aligned} dU(t) + A(t, U(t))dt + B(t, U(t))dW_1(t) &\in -F_1(t, U(t))dt - F_2(t, U(t))dW_2(t) \\ U(0) &= U_0 \end{aligned}$$

mit maximal-monotonen, mengenwertigen Abbildungen F_1, F_2 und der für allgemeine Hilberträume H entsprechend abgewandelten Annahme **(H2)** aus Kapitel 2 führt das Galerkin-Verfahren nicht zum Erfolg.

Probleme treten im Beweis des Lemmas 3.2.4 auf. So ist mit der Definition von Δ_n in (3.2.12) die Abschätzung $\Delta_n \leq 0$ nicht haltbar. Diese ist jedoch Voraussetzung für den Nachweis der Übereinstimmung von \tilde{A} und A sowie \tilde{B} und B .

Im Fall, dass F_2 mengenwertig und Lipschitz-stetig statt maximal-monoton ist, kann zwar die Gleichheit $\tilde{B}(t) = B(t, U(t))$ gezeigt werden, aber aus der Ungleichung (3.2.20) folgt nicht $\tilde{A}(t) = A(t, U(t))$. Hierfür fehlt die Lipschitz-Stetigkeit der maximal-monotonen Abbildung F_1 .

Weiter gelingt es nicht, mit maximal-monotonem Drift- bzw. Diffusionsterm die Aussage $S \subseteq \varliminf_{n \rightarrow \infty} S_n$ zu beweisen.

3.3 Beispiel

Mit der in dieser Arbeit vorgenommenen Anwendung des Galerkin-Verfahrens auf stochastische Differentialinklusionen mit mengenwertigen Lipschitz-stetigen Abbildungen lassen sich beispielsweise Existenzaussagen für Probleme der Steuertheorie formulieren und deren Lösungsmengen durch die Lösungen endlichdimensionaler Aufgaben approximieren.

Für die Aufgabe der Steuerung einer stochastischen parabolischen Differentialgleichung werden die Voraussetzungen aus Abschnitt 3.1 für den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) und die Wiener Prozesse $(W_1(t))_{t \in [0, T]}$, $(W_2(t))_{t \in [0, T]}$ unterstellt.

Beispiel 3.3.1 Gegeben sei die durch $\phi(\cdot, \cdot)$ gesteuerte Gleichung

$$\begin{aligned} dU(t, x) - \Delta U(t, x)dt &= f_1(t, x, U(t, x))dt + f_2(t, x, U(t, x))dW_1(t) \\ &+ g_1(t, x, \phi(t, x))dt + g_2(t, x, \phi(t, x))dW_2(t) \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

für $x \in O \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ und $t \in [0, T]$ mit der Anfangs- und Randwertbedingung

$$\begin{aligned} U(0, x) &= U_0(x) \quad \text{für } x \in O, \\ U(t, x) &= 0 \quad \text{für } (t, x) \in [0, T] \times \partial O \end{aligned}$$

und

$$|\phi(t, x)| \leq q \quad \text{für fast alle } (t, x) \in [0, T] \times O, q > 0.$$

Dabei ist das Gebiet O beschränkt mit einem stückweise glatten Rand.

Zusätzlich gelten die Annahmen:

(B0) Der Anfangswert U_0 ist eine \mathcal{F}_0 -messbare Zufallsgröße mit $E|U_0(x)|^2 < \infty$ für $x \in O$.

(B1) Die Funktionen $f_i : [0, T] \times O \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $i = 1, 2$ genügen den Bedingungen:

(i) Die Abbildungen $(t, x) \mapsto f_i(t, x, u)$ sind messbar für $(t, x) \in [0, T] \times O$ und alle $u \in \mathbb{R}$.

(ii) Für fast alle $(t, x) \in [0, T] \times O$ und $L > 0$ gelte die Lipschitz-Stetigkeit von f_i für alle $u, v \in \mathbb{R}$ in der Form

$$|f_i(t, x, u) - f_i(t, x, v)| \leq L|u - v|.$$

(iii) Die Wachstumsbedingung

$$|f_i(t, x, u)| \leq c(1 + |u|)$$

ist für alle $t \in [0, T]$, $x \in O$ und $u \in \mathbb{R}$ mit einer positiven Konstante c erfüllt.

(B2) Für die Steuerung $\phi : \Omega \times [0, T] \times O \rightarrow \mathbb{R}$ gelten:

(i) Bezüglich $(\omega, t, x) \in \Omega \times [0, T] \times O$ ist ϕ messbar.

(ii) Die Funktionen $g_i : [0, T] \times O \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllen

$$g_i(t, x, \phi) = a_i(x)\phi(t, x)$$

mit $a_i \in L^2(O)$ und $i = 1, 2$.

Zunächst wird das obige Problem (3.3.1) in eine stochastische Differentialinklusion überführt.

Es seien die Räume $V = H_0^1(O)$ und $H = L^2(O)$ für das Evolutionstripel gewählt und die Abbildung $A : V \rightarrow V^*$ durch

$$\langle Au, v \rangle = \int_O \sum_{j=1}^N \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} dx \quad (3.3.2)$$

für alle $u, v \in V$ definiert.

Weiterhin sind die Nemytskij-Operatoren $\widehat{f}_i : [0, T] \times H \rightarrow H$ zu f_i mit

$$\widehat{f}_i(t, u)(x) = f_i(t, x, u(t, x))$$

sowie lineare, beschränkte Operatoren $M_i : L^\infty(O) \rightarrow H$ durch

$$(M_i \phi)(x) = a_i(x)\phi(x) \quad (3.3.3)$$

für $i = 1, 2$ erklärt.

Die mengenwertigen Abbildungen $F_i : [0, T] \times H \rightarrow 2^H$ mit abgeschlossenen, konvexen Bildmengen werden mittels

$$F_i(t, u) = \widehat{f}_i(t, u) + M_i\Phi$$

und

$$\Phi = \{\phi \in L^\infty(O) : |\phi(x)| \leq q \text{ für fast alle } x \in O\} \quad (3.3.4)$$

für $i = 1, 2$ erzeugt.

Schließlich lässt sich das gesteuerte Rand-Anfangswertproblem (3.3.1) alternativ als stochastische Differentialinklusion über (V, H, V^*)

$$\begin{aligned} dU(t) + A(t, U(t))dt &\in F_1(t, U(t))dt + F_2(t, U(t))dW(t), \\ U(0) &= U_0 \end{aligned}$$

auffassen.

Nach Satz 3.2.1 ist diese Aufgabe lösbar, denn die Annahmen **(H0)**-**(H2)** lassen sich wie folgt zeigen.

Die Gültigkeit von **(H0)** erschließt sich über **(B0)**. Für die Überprüfung von **(H1)** bezüglich der Eigenschaften des Operators A mit der Definition (3.3.2) sei auf Grecksch und Tudor [45], S. 46ff verwiesen.

Des Weiteren sind die Abbildungen $t \mapsto F_i(t, u)$, $i = 1, 2$ messbar für jedes $u \in H$, da sich die Messbarkeit der f_i nach Voraussetzung **(B1)**(i) auf die Nemytskij-Operatoren \widehat{f}_i überträgt.

Aus der Annahme **(B1)**(ii) und der Eigenschaft $h(A + C, B + D) \leq h(A, B) + h(C, D)$ der Hausdorff-Distanz für beliebige, nicht-leere Teilmengen A, B, C, D eines normierten Raumes folgt

$$\begin{aligned} h(F_i(t, u), F_i(t, v)) &= h(\widehat{f}_i(t, u) + M_i\Phi, \widehat{f}_i(t, v) + M_i\Phi) \\ &\leq \|\widehat{f}_i(t, u) - \widehat{f}_i(t, v)\|_H \\ &\leq L\|u - v\|_H, \end{aligned}$$

d. h., F_i ist Lipschitz-stetig für alle $u, v \in H$.

Die Wachstumsbedingung in **(H1)**(iii) ist mit **(B1)**(iii) und den Definitionen (3.3.3), (3.3.4) wegen

$$\begin{aligned} \|F_i(t, u)\|_H &\leq \|\widehat{f}_i(t, u)\|_H + \|M_i\Phi\|_H \\ &\leq c(1 + \|u\|_H) + q\|a_i\|_H \end{aligned}$$

für alle $u \in H$ erfüllt, wobei die Definition der Noem nach (1.1.1) verwendet wird. Insofern existiert damit auch eine Lösung des gesteuerten Problems.

Im Fall, dass die Funktionen $f_i \equiv 0$, $i = 1, 2$ sind, erhält man für die Rand-Anfangswertaufgabe (3.3.1) eine stochastische Differentialinklusion mit konstanten Mengen $M_i\Phi$ auf der rechten Seite, die ebenfalls nach Satz 3.2.1 wenigstens eine Lösung besitzt.

Die deterministische Version dieses Beispiels wird in Hu und Papageorgiou [52], Kapitel 1.7.6 untersucht.

Kapitel 4

Spezielle unendlichdimensionale stochastische Differentialinklusionen mit maximal-monotonen Abbildungen - Die Methode von Ober- und Unterlösung

Einen Überblick über die Untersuchung deterministischer Differentialgleichungen mittels Ober- und Unterlösung bieten unter anderem die Monographien von Heikkilä und Lakshmikantham [49], Lakshmikantham und Vatsala [68]. Mit dem mengenwertigen Fall beschäftigen sich unter anderem Carl und Heikkilä [23], Fiacca, Matzacos, Papageorgiou und Servadei [37], Hu und Papageorgiou [51].

Die zugrunde liegende Idee lässt sich anhand des folgenden Beispiels erläutern. Gegeben sei die Differentialgleichung $\dot{u} = f(t, u)$ für $t \in [0, T]$ und $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Anfangswertbedingung $u(0) = u_0$. Die Funktionen $f_1, f_2 : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ werden so gewählt, dass die entsprechenden Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned}\dot{v} &= f_1(t, v), & v(0) &= u_0, \\ \dot{w} &= f_2(t, w), & w(0) &= u_0\end{aligned}$$

vergleichsweise einfach zu lösen sind. Angenommen für alle $(t, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ gilt

$$f_1(t, u) \leq f(t, u) \leq f_2(t, u).$$

Dann können die Lösungen $v(t), w(t)$, als Unter- und Oberlösung von $u(t)$ bezeichnet, dazu genutzt werden, die Lösungsmenge des Ausgangsproblems durch

$$v(t) \leq u(t) \leq w(t)$$

einzuschränken. Bei der Lösungsanordnung findet ein Vergleichssatz wie zum Beispiel bei Walter [88] Anwendung.

Es ist bekannt, dass die Methode von Ober- und Unterlösung zusammen mit monotonen Iterationsverfahren zu monotonen Folgen führt, die gegen eine Lösung der Originalaufgabe konvergieren. Des Weiteren gelangen zusätzliche Aussagen hinsichtlich der Ordnungsstruktur der Lösungsmenge, die Existenz einer Minimal- und Maximallösung betreffend. Entsprechende Aussagen für Differentialgleichungen werden in [68] diskutiert, während für den Fall der Differentialinklusionen die Arbeiten von Cardinali und Papageorgiou [21], Carl, Grossman und Pao [22] sowie Carl und Motreanu [24] hervorzuheben sind.

Im Folgenden wird die Methode von Ober- und Unterlösung erstmals für die Lösung stochastischer Differentialinklusionen mit maximal-monotonen Abbildungen adaptiert. Nach der Vorstellung der benötigten Annahmen schließt sich der Beweis eines Existenzsatzes an. Dieser wird durch einen Eindeutigkeitssatz in Abschnitt 4.3 ergänzt. Für die Bestimmung von Ober- und Unterlösungen im Einzelfall werden in Abschnitt 4.4 Vergleichssätze dargelegt. Die beispielhafte Anwendung der Resultate bildet den Abschluss des Kapitels.

4.1 Problemstellung

Gegeben seien ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , reellwertige, unabhängige Wiener Prozesse $(W_1(t))_{t \in [0, T]}$, $(W_2(t))_{t \in [0, T]}$, die bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ adaptiert sind. Die Filtration erfüllt die üblichen Bedingungen.

Weiterhin ist der Lipschitz-Rand ∂O des beschränkten Gebietes $O \subset \mathbb{R}^N$ in zwei disjunkte Mengen $\partial O_1, \partial O_2$ zerlegbar und $Q = [0, T] \times O$.

Für die Untersuchung über einem Evolutionstripel $V \subseteq H \subseteq V^*$ werden die Räume

$$V = \{v \in H^1(O) : v = 0 \text{ auf } \partial O_1\}, \quad H = L^2(O)$$

gewählt.

Der Raum V , versehen mit der $H^1(O)$ -Topologie, ist ein abgeschlossener Teilraum von $H^1(O)$. Es gilt

$$H_0^1(O) \subseteq V \subseteq H^1(O) \subseteq L^2(O) \subseteq H^{-1}(O).$$

Da sowohl $H_0^1(O)$ als auch $H^1(O)$ kompakt in $L^2(O)$ eingebettet sind, folgt diese Eigenschaft auch für $V \subseteq H$.

Betrachtet wird nun die parabolische stochastische Differentialinklusion

$$\begin{aligned} dU(t, x) + AU(t, x)dt + g_1(t, x, U(t, x))dt + g_2(t, x, U(t, x))dW_1(t) \\ \in -F_1(t, x, U(t, x))dt - F_2(t, x, U(t, x))dW_2(t) \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

für $t \in [0, T]$ und $x \in O$ mit den Anfangs- und Randwertbedingungen

$$\begin{aligned} U(0, x) &= U_0(x), \\ U(t, x) &= 0 \text{ auf } [0, T] \times \partial O_1, \quad \frac{\partial U(t, x)}{\partial \nu} = 0 \text{ auf } [0, T] \times \partial O_2, \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

wobei ν für die äußere Normale steht.

In die Aufgabe (4.1.1) mit den Bedingungen (4.1.2) gehen der nicht-lineare, elliptische Differentialoperator $A : V \rightarrow V^*$ mit

$$Au = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$$

und die Carathéodory-Funktionen $k : Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i : Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, 2$ ein. Diese sind bezüglich $(t, x) \in Q$ messbare und in $s \in \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

Die mengenwertigen Abbildungen $F_i : \Omega \times [0, T] \times O \times \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ werden durch

$$F_i(\omega, t, x, s) = [f_i(\omega, t, x, s), \bar{f}_i(\omega, t, x, s)]$$

eingeführt, wobei die gegebenen Funktionen $f_i : \Omega \times [0, T] \times O \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wachsend in s sind und

$$\begin{aligned} f_i(\omega, t, x, s) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f_i(\omega, t, x, s - \varepsilon), \\ \bar{f}_i(\omega, t, x, s) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f_i(\omega, t, x, s + \varepsilon) \end{aligned}$$

für alle $(t, x, s) \in [0, T] \times O \times \mathbb{R}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 und $i = 1, 2$ gelten. Demnach sind die so definierten mengenwertigen Abbildungen F_i maximal-monoton bezüglich s . Schließlich sei U_0 eine \mathcal{F}_0 -messbare Zufallsgröße mit Werten in H .

Der Lösungsbegriff basiert erneut auf der Existenz von Selektoren mit entsprechenden Eigenschaften.

Definition 4.1.1 Ein \mathcal{F}_t -messbarer, V -wertiger stochastischer Prozess $(U(t))_{t \in [0, T]}$ mit

$$E \int_0^T \|U(t)\|_V^2 dt < \infty, \quad E \|U(t)\|_H^2 < \infty$$

für alle $t \in [0, T]$ heißt Lösung der stochastischen Differentialinklusion (4.1.1), wenn gilt:

- (i) Der Prozess $U(t)$ besitzt P -f. s. zeit-stetige Trajektorien in H .
- (ii) Es gibt \mathcal{F}_t -messbare, H -wertige Prozesse $(h_i(t))_{t \in [0, T]}$, $h_i : \Omega \times [0, T] \times O \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für fast alle $(t, x) \in Q$ und $i = 1, 2$

$$h_i(t, x) \in F_i(t, x, U(t, x)) \tag{4.1.3}$$

P -f. s. gilt mit

$$E \int_0^T \|h_1(t)\|_H^2 dt < \infty, \quad E \int_0^T \|h_2(t)\|_H^2 dt < \infty.$$

(iii) Für alle $v \in M$, $M \subseteq V$ dicht und alle $t \in [0, T]$ ist

$$\begin{aligned}
& \int_O U(t, x)v(x)dx \\
& + \int_0^t \int_O \sum_{j=1}^N k(s, x, U(s, x)) \cdot \frac{\partial U(s, x)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} dx ds \\
& + \int_0^t \int_O g_1(s, x, U(s, x))v(x)dx ds + \int_0^t \int_O g_2(s, x, U(s, x))dW_1(s) v(x)dx \\
& = \int_O U_0(x)v(x)dx - \int_0^t \int_O h_1(s, x)v(x)dx ds \\
& - \int_0^t \int_O h_2(s, x)dW_2(s) v(x)dx \tag{4.1.4}
\end{aligned}$$

P -f. s. erfüllt.

Auf die Darstellung der Lösung in Gleichung (4.1.4) mittels Skalarprodukt und Dualitätsabbildung wird in diesem Kapitel verzichtet.

Im Weiteren werden Ober- und Unterlösungen definiert.

Definition 4.1.2

(a) Ein \mathcal{F}_t -messbarer, $H^1(O)$ -wertiger stochastischer Prozess $(\bar{U}(t))_{t \in [0, T]}$ wird Oberlösung zu (4.1.1) genannt, wenn für alle $v \in V \cap L_+^2(O)$, $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
& \int_O \bar{U}(t, x)v(x)dx \\
& + \int_0^t \int_O \sum_{j=1}^N k(s, x, \bar{U}(s, x)) \cdot \frac{\partial \bar{U}(s, x)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} dx ds \\
& + \int_0^t \int_O g_1(s, x, \bar{U}(s, x))v(x)dx ds + \int_0^t \int_O g_2(s, x, \bar{U}(s, x))dW_1(s) v(x)dx \\
& \geq \int_O U_0(x)v(x)dx - \int_0^t \int_O \underline{f}_1(s, x, \bar{U}(s, x))v(x)dx ds \\
& - \int_0^t \int_O \underline{f}_2(s, x, \bar{U}(s, x))dW_2(s) v(x)dx \tag{4.1.5}
\end{aligned}$$

P -f. s. und $\bar{U}(0, x) \geq U_0(x)$ für alle $x \in O$, $\bar{U}(t, x) \geq 0$ auf $[0, T] \times \partial O_1$ sowie $\frac{\partial \bar{U}(t, x)}{\partial \nu} \geq 0$ auf $[0, T] \times \partial O_2$ gelten.

- (b) Ein \mathcal{F}_t -messbarer, $H^1(O)$ -wertiger stochastischer Prozess $(\underline{U}(t))_{t \in [0, T]}$ heißt Unterlösung zu (4.1.1), wenn für alle $v \in V \cap L^2_+(O)$, $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
& \int_O \underline{U}(t, x) v(x) dx \\
& + \int_0^t \int_O \sum_{j=1}^N k(s, x, \underline{U}(s, x)) \cdot \frac{\partial \underline{U}(s, x)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} dx ds \\
& + \int_0^t \int_O g_1(s, x, \underline{U}(s, x)) v(x) dx ds + \int_0^t \int_O g_2(s, x, \underline{U}(s, x)) dW_1(s) v(x) dx \\
& \leq \int_O U_0(x) v(x) dx - \int_0^t \int_O \bar{f}_1(s, x, \underline{U}(s, x)) v(x) dx ds \\
& - \int_0^t \int_O \bar{f}_2(s, x, \underline{U}(s, x)) dW_2(s) v(x) dx
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

P -f. s. und $\underline{U}(0, x) \leq U_0(x)$ für alle $x \in O$, $\underline{U}(t, x) \leq 0$ auf $[0, T] \times \partial O_1$ sowie $\frac{\partial \underline{U}(t, x)}{\partial \nu} \leq 0$ auf $[0, T] \times \partial O_2$ gelten.

Die folgenden Voraussetzungen werden getroffen.

(H0) Der Anfangswert $U_0 \in H$ ist \mathcal{F}_0 -messbar und besitzt endliches zweites Moment $E \|U_0\|_H^2 < \infty$.

(H1) Es existieren eine Funktion $r \in L^\infty(Q)$ sowie eine Konstante $k_0 > 0$, so dass die Carathéodory-Funktion k die Wachstumsbeschränkungen

$$|k(t, x, s)| \leq r(t, x) \quad \text{und} \quad k(t, x, s) \geq k_0 > 0$$

für fast alle $(t, x) \in Q$ und für alle $s \in [\underline{U}(t, x), \bar{U}(t, x)]$ erfüllt.

(H2) Die \mathcal{F}_t -messbaren Prozesse $(f_i(t))_{t \in [0, T]}$, $i = 1, 2$ genügen den Bedingungen:

- (i) Die Abbildungen $s \mapsto f_i(\omega, t, x, s)$ sind P -f. s. wachsend für fast alle $(t, x) \in Q$.
- (ii) Es gibt eine nicht-negative Konstante α und Funktionen $p_i \in L^2(Q)$ mit

$$|f_i(t, x, s)| \leq p_i(t, x)$$

P -f. s. für fast alle $(t, x) \in Q$ und $s \in [\underline{U}(t, x) - \alpha, \bar{U}(t, x) + \alpha]$.

(H3) Für die Carathéodory-Funktionen g_i existieren beschränkende Funktionen $q_i \in L^2(Q)$, $i = 1, 2$, so dass

$$|g_i(t, x, s)| \leq q_i(t, x)$$

für fast alle $(t, x) \in Q$ und $s \in [\underline{U}(t, x), \bar{U}(t, x)]$ gilt.

4.2 Existenz von Lösungen

Der nächste Satz trifft eine Aussage über die Existenz von Lösungen der Aufgabe, die durch Unter- und Oberlösung begrenzt sind.

Satz 4.2.1 *Es seien \underline{U}, \bar{U} Unter- und Oberlösungen mit $\underline{U}(t, x) \leq \bar{U}(t, x)$ P-f. s. für fast alle $t \in [0, T]$ und $x \in O$.*

Sind die Voraussetzungen (H0)-(H3) erfüllt, dann besitzt die stochastische Differentialinklusion (4.1.1) mit (4.1.2) mindestens eine Lösung $U \in [\underline{U}, \bar{U}]$.

Der Beweis gliedert sich in vier Teile. In einem ersten Schritt wird ein regularisiertes und trunkiertes Problem eingeführt. Der Trunkierungsoperator T ist dabei durch

$$\tilde{U}(t, x) = TU(t, x) = \begin{cases} \underline{U}(t, x), & \text{für } U(t, x) < \underline{U}(t, x); \\ U(t, x), & \text{für } \underline{U}(t, x) \leq U(t, x) \leq \bar{U}(t, x); \\ \bar{U}(t, x), & \text{für } U(t, x) > \bar{U}(t, x) \end{cases}$$

definiert. Für $\varepsilon > 0$ sind die Regularisierungen f_i^ε von f_i , $i = 1, 2$ mit

$$f_i^\varepsilon(t, x, s) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t, x, s - \xi) J\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) d\xi$$

gegeben, wobei $J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Glättungsfunktion mit $\int_{\mathbb{R}} J(z) dz = 1$ ist.

Damit wird das Hilfsproblem formuliert. Gesucht ist eine Lösung $U_\varepsilon \in L^2(\Omega \times Q)$, die für alle $v \in M$, $M \subseteq V$ dicht und für alle $t \in [0, T]$ der Gleichung

$$\begin{aligned} & \int_O U_\varepsilon(t, x) v(x) dx \\ & + \int_0^t \int_O \sum_{j=1}^N k(s, x, TU_\varepsilon(s, x)) \cdot \frac{\partial U_\varepsilon(s, x)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} dx ds \\ & + \int_0^t \int_O g_1(s, x, TU_\varepsilon(s, x)) v(x) dx ds + \int_0^t \int_O g_2(s, x, TU_\varepsilon(s, x)) dW_1(s) v(x) dx \\ & = \int_O U_0(x) v(x) dx - \int_0^t \int_O f_1^\varepsilon(s, x, TU_\varepsilon(s, x)) v(x) dx ds \\ & - \int_0^t \int_O f_2^\varepsilon(s, x, TU_\varepsilon(s, x)) dW_2(s) v(x) dx \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

P-f. s. genügt.

Anschließend wird eine Linearisierung von Problem (4.2.1) betrachtet, in dem man TU_ε in den Nicht-Linearitäten durch ein beliebiges, aber festes Element y ersetzt. Der Satz A.6.4 von Krylov und Rozovskij sichert die Existenz einer eindeutigen Lösung.

Mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Schauder A.3.1 folgt im dritten Schritt die Lösbarkeit von (4.2.1). Schließlich zeigt man über den Selektionsnachweis für die speziellen maximal-monotonen Abbildungen, dass der Grenzwert U für $\varepsilon \rightarrow 0$ Lösung des Originalproblems ist.

Lemma 4.2.2 *Das regularisierte und trunkierte Problem (4.2.1) besitzt wenigstens eine Lösung für beliebige $\varepsilon > 0$ mit $0 < \varepsilon < \alpha$, $\alpha > 0$.*

Beweis.

Nach der Überführung von Beziehung (4.1.4) in die Gleichung (4.2.1) durch die Regularisierten f_i^ε , $i = 1, 2$ und den Trunkierungsoperator T erfolgt die Herleitung des linearen Problems. Dazu wählt man ein beliebiges, aber festes, \mathcal{F}_t -messbares Element $y \in L^2(\Omega \times Q)$ mit $y(0, x) = U_0(x)$, setzt dieses für TU_ε in die Funktionen $k, f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon, g_1, g_2$ der Gleichung (4.2.1) ein und erhält P -f. s. für alle $t \in [0, T]$, $v \in M$

$$\begin{aligned}
& \int_O z_\varepsilon(t, x)v(x)dx \\
& + \int_0^t \int_O \sum_{j=1}^N k(s, x, y(s, x)) \cdot \frac{\partial z_\varepsilon(s, x)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} dx ds \\
& + \int_0^t \int_O g_1(s, x, y(s, x))v(x)dx ds + \int_0^t \int_O g_2(s, x, y(s, x))dW_1(s) v(x)dx \\
& = \int_O U_0(x)v(x)dx - \int_0^t \int_O f_1^\varepsilon(s, x, y(s, x))v(x)dx ds \\
& - \int_0^t \int_O f_2^\varepsilon(s, x, y(s, x))dW_2(s) v(x)dx. \tag{4.2.2}
\end{aligned}$$

Der Satz A.6.4 von Krylov und Rozovskij für Itô-Gleichungen über einem Evolutionstriplett sichert mit den Annahmen **(H0)**-**(H3)** die Existenz einer eindeutigen Lösung $z_\varepsilon(t, x)$, \mathcal{F}_t -messbar mit P -f. s. zeit-stetigen Trajektorien in H und

$$E\|z_\varepsilon(t)\|_H^2 < \infty \text{ für alle } t \in [0, T], \quad E \int_0^T \|z_\varepsilon(t)\|_V^2 dt < \infty.$$

Mit der Lösbarkeit des linearen Problems wird nun die Frage nach Lösungen für die Aufgabe (4.2.1) beantwortet. Der Lösungsprozess z_ε ist durch einen Operator S_ε beschreibbar, der auf y angewendet wird. Für $S_\varepsilon : L^2(\Omega \times Q) \rightarrow L^2(\Omega \times Q)$ lautet die entsprechende Operatorgleichung

$$\begin{aligned}
z_\varepsilon(t, x) & = S_\varepsilon y(t, x) \\
& = y(0, x) + \int_0^t \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k(s, x, y(s, x)) \cdot \frac{\partial z_\varepsilon(s, x)}{\partial x_j} \right) ds \\
& - \int_0^t f_1^\varepsilon(s, x, y(s, x))ds - \int_0^t f_2^\varepsilon(s, x, y(s, x))dW_2(s) \\
& - \int_0^t g_1(s, x, y(s, x))ds - \int_0^t g_2(s, x, y(s, x))dW_1(s)
\end{aligned}$$

mit

$$z_\varepsilon(0, x) = y(0, x) = U_0(x).$$

Jedem \mathcal{F}_t -messbaren Prozess $y \in L^2(\Omega \times Q)$ mit der Anfangswertbedingung $y(0, x)$ wird eine Lösung $z_\varepsilon \in L^2(\Omega \times Q)$ des linearen Problems (4.2.2) zugeordnet. Diese Zuordnung ist eindeutig.

Der Fixpunktsatz von Schauder A.3.1 setzt einen kompakten Operator voraus, der nicht-leere, abgeschlossene, konvexe und beschränkte Mengen eines Banachraumes in sich selbst abbildet.

Zunächst wird die Beschränktheit der Lösung z_ε untersucht.

Die Itô-Formel für das Normquadrat A.5.3 angewendet auf Gleichung (4.2.2) führt zu

$$\begin{aligned}
E \int_O z_\varepsilon(t, x)^2 dx &= E \int_O U_0(x)^2 dx \\
&\quad - 2E \int_0^t \int_O (f_1^\varepsilon(s, x, y(s, x)) + g_1(s, x, y(s, x))) z_\varepsilon(s, x) dx ds \\
&\quad + E \int_0^t \int_O (f_2^\varepsilon(s, x, y(s, x)))^2 dx ds \\
&\quad + E \int_0^t \int_O (g_2(s, x, y(s, x)))^2 dx ds \\
&\quad - 2E \int_0^t \int_O \sum_{j=1}^N k(s, x, y(s, x)) \cdot \frac{\partial z_\varepsilon(s, x)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial z_\varepsilon(s, x)}{\partial x_j} dx ds.
\end{aligned}$$

Mit den Ungleichungen $|2a \cdot b| \leq \eta \cdot a^2 + \frac{1}{\eta} \cdot b^2$ für beliebiges $\eta > 0$ und $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ ebenso wie mit dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned}
&E \int_O z_\varepsilon(t, x)^2 dx + 2E \int_0^t \int_O \sum_{j=1}^N k(s, x, y(s, x)) \cdot \left(\frac{\partial z_\varepsilon(s, x)}{\partial x_j} \right)^2 dx ds \\
&\leq E \int_O U_0(x)^2 dx \\
&\quad + 2\eta E \int_0^t \int_O (f_1^\varepsilon(s, x, y(s, x)))^2 dx ds + 2\eta E \int_0^t \int_O (g_1(s, x, y(s, x)))^2 dx ds \\
&\quad + \frac{1}{\eta} \int_0^t E \int_O z_\varepsilon(s, x)^2 dx ds \\
&\quad + E \int_0^t \int_O (f_2^\varepsilon(s, x, y(s, x)))^2 ds dx + E \int_0^t \int_O (g_2(s, x, y(s, x)))^2 ds dx \\
&\leq C + \frac{1}{\eta} \int_0^t E \int_O z_\varepsilon(s, x)^2 dx ds. \tag{4.2.3}
\end{aligned}$$

Hierbei ist C eine positive Konstante, unabhängig von ε , die sich aus den Annahmen **(H0)**-**(H3)** und der gleichmäßigen L^2 -Beschränktheit der Regularisierten $f_1^\varepsilon(t, x, y(t, x))$, $f_2^\varepsilon(t, x, y(t, x))$ ergibt.

Wegen der Positivität der Funktion k nach **(H1)** folgt aus der letzten Ungleichung

$$E \int_O z_\varepsilon(t, x)^2 dx \leq C + \frac{1}{\eta} \int_0^t E \int_O z_\varepsilon(s, x)^2 dx ds.$$

Das Lemma von Gronwall liefert schließlich die Beschränktheit, d. h., es gilt mit $D > 0$

$$E \int_O z_\varepsilon(t, x)^2 dx \leq C \cdot \exp \left\{ \frac{t}{\eta} \right\} \leq D.$$

Schließlich werden die partiellen Ableitungen von z_ε nach x entsprechend der Beziehung (4.2.3) mit der Annahme **(H1)** und der letzten Ungleichung durch eine Konstante $G > 0$ abgeschätzt zu

$$\begin{aligned} & 2k_0 E \int_0^t \|\nabla z_\varepsilon(s)\|_H^2 ds \\ & \leq 2E \int_0^t \int_O \sum_{j=1}^N k(s, x, y(s, x)) \cdot \frac{\partial z_\varepsilon(s, x)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial z_\varepsilon(s, x)}{\partial x_j} dx ds \\ & \leq C + \frac{1}{\eta} \int_0^t E \int_O z_\varepsilon(s, x)^2 dx ds - E \int_O z_\varepsilon(t, x)^2 dx \\ & \leq G. \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Zusammengefasst erhält man für jedes $t \in [0, T]$ mit $\tilde{G} > 0$

$$E \|z_\varepsilon(t)\|_H^2 \leq D, \quad E \int_0^t \|z_\varepsilon(s)\|_H^2 ds \leq D \cdot t \tag{4.2.5}$$

und aus (4.2.4)

$$E \int_0^t \|z_\varepsilon(s)\|_{H^1(O)}^2 ds = E \int_0^t \|z_\varepsilon(s)\|_V^2 ds \leq \tilde{G}. \tag{4.2.6}$$

Damit ist $z_\varepsilon \in L^2(\Omega \times [0, T]; H)$ und $z_\varepsilon \in L^2(\Omega \times [0, T]; V)$. Insbesondere gehören die Bilder $S_\varepsilon y$ zu einer bzgl. $L^2(\Omega \times [0, T]; V)$ beschränkten Menge, wenn die Prozesse y in einer beschränkten Menge liegen.

Es sei $B_R \subset L^2(\Omega \times Q)$ eine Kugel mit Radius $R > 0$ und

$$B_R = \left\{ y \in L^2(\Omega \times Q) : E \int_0^T \int_O y(t, x)^2 dx dt \leq D \cdot T = R \right\}.$$

Demzufolge liegt eine Abbildung der Kugel B_R über S_ε in sich selbst vor.

Aufgrund der kompakten Einbettung des Raumes V in H gehört die Lösung z_ε zu einer nicht-leeren, abgeschlossenen, konvexen und beschränkten Menge in $L^2(\Omega \times [0, T]; V)$, die relativ kompakt in $L^2(\Omega \times [0, T]; H)$ ist (vgl. Bemerkung A.5.2).

Für die Kompaktheit des Operators verbleibt der Nachweis der Stetigkeit.

Es seien $z_{1\varepsilon} = S_\varepsilon y_1$ und $z_{2\varepsilon} = S_\varepsilon y_2$. Damit ist $(z_{2\varepsilon}(0, x) - z_{1\varepsilon}(0, x)) = 0$ für alle $x \in O$ und für beliebige $v \in M$ gilt die Gleichung P -f. s. für alle $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
& \int_O (z_{2\varepsilon}(t, x) - z_{1\varepsilon}(t, x)) v(x) dx \\
& + \int_0^t \int_O \sum_{j=1}^N k(s, x, y_2(s, x)) \cdot \frac{\partial(z_{2\varepsilon}(s, x) - z_{1\varepsilon}(s, x))}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} dx ds \\
& = \int_0^t \int_O \left(k(s, x, y_1(s, x)) - k(s, x, y_2(s, x)) \right) \cdot \sum_{j=1}^N \frac{\partial z_{1\varepsilon}(s, x)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} dx ds \\
& - \int_0^t \int_O (f_1^\varepsilon(s, x, y_2(s, x)) - f_1^\varepsilon(s, x, y_1(s, x))) v(x) dx ds \\
& - \int_0^t \int_O (f_2^\varepsilon(s, x, y_2(s, x)) - f_2^\varepsilon(s, x, y_1(s, x))) dW_2(s) v(x) dx \\
& + \int_0^t \int_O (g_1(s, x, y_1(s, x)) - g_1(s, x, y_2(s, x))) v(x) dx ds \\
& + \int_0^t \int_O (g_2(s, x, y_1(s, x)) - g_2(s, x, y_2(s, x))) dW_1(s) v(x) dx.
\end{aligned}$$

Die Anwendung der Itô-Formel für das Normquadrat und zum Beweis der Beschränktheit analoge Überlegungen führen zu

$$\begin{aligned}
& E \int_O (z_{2\varepsilon}(t, x) - z_{1\varepsilon}(t, x))^2 dx \\
& + 2E \int_0^t \int_O \sum_{j=1}^N k(s, x, y_2(s, x)) \cdot \left(\frac{\partial(z_{2\varepsilon}(s, x) - z_{1\varepsilon}(s, x))}{\partial x_j} \right)^2 dx ds \\
& \leq \frac{1}{\eta} E \int_0^t \int_O \sum_{j=1}^N \left((k(s, x, y_1(s, x)) - k(s, x, y_2(s, x))) \cdot \frac{\partial z_{1\varepsilon}(s, x)}{\partial x_j} \right)^2 dx ds \\
& + \eta E \int_0^t \int_O \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial(z_{2\varepsilon}(s, x) - z_{1\varepsilon}(s, x))}{\partial x_j} \right)^2 dx ds \\
& + \frac{1}{\eta} E \int_0^t \int_O (f_1^\varepsilon(s, x, y_2(s, x)) - f_1^\varepsilon(s, x, y_1(s, x)))^2 dx ds \\
& + 2\eta E \int_0^t \int_O (z_{2\varepsilon}(s, x) - z_{1\varepsilon}(s, x))^2 dx ds \\
& + E \int_0^t \int_O (f_2^\varepsilon(s, x, y_2(s, x)) - f_2^\varepsilon(s, x, y_1(s, x)))^2 ds dx \\
& + \frac{1}{\eta} E \int_0^t \int_O (g_1(s, x, y_1(s, x)) - g_1(s, x, y_2(s, x)))^2 dx ds \\
& + E \int_0^t \int_O (g_2(s, x, y_1(s, x)) - g_2(s, x, y_2(s, x)))^2 ds dx.
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung wird weiter mit Voraussetzung **(H1)** abgeschätzt

$$\begin{aligned}
& E \int_O (z_{2\varepsilon}(t, x) - z_{1\varepsilon}(t, x))^2 dx + (2k_0 - \eta) E \int_0^t \int_O \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial(z_{2\varepsilon}(s, x) - z_{1\varepsilon}(s, x))}{\partial x_j} \right)^2 dx ds \\
& \leq \frac{1}{\eta} E \int_0^t \int_O \sum_{j=1}^N \left((k(s, x, y_1(s, x)) - k(s, x, y_2(s, x))) \cdot \frac{\partial z_{1\varepsilon}(s, x)}{\partial x_j} \right)^2 dx ds \\
& \quad + \frac{1}{\eta} E \int_0^t \int_O (f_1^\varepsilon(s, x, y_2(s, x)) - f_1^\varepsilon(s, x, y_1(s, x)))^2 dx ds \\
& \quad + E \int_0^t \int_O (f_2^\varepsilon(s, x, y_2(s, x)) - f_2^\varepsilon(s, x, y_1(s, x)))^2 ds dx \\
& \quad + 2\eta E \int_0^t \int_O (z_{2\varepsilon}(s, x) - z_{1\varepsilon}(s, x))^2 dx ds \\
& \quad + \frac{1}{\eta} E \int_0^t \int_O (g_1(s, x, y_1(s, x)) - g_1(s, x, y_2(s, x)))^2 dx ds \\
& \quad + E \int_0^t \int_O (g_2(s, x, y_1(s, x)) - g_2(s, x, y_2(s, x)))^2 ds dx. \tag{4.2.7}
\end{aligned}$$

Mit der speziellen Wahl von η , so dass $2k_0 - \eta > 0$ ist, wird die linke Seite durch das Weglassen des positiven Terms verkleinert. Wegen der Stetigkeit der Funktionen $k, f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon, g_1, g_2$ bezüglich der letzten Variablen und der Schranke in (4.2.5) kann auf der rechten Seite eine Abschätzung nach oben vorgenommen werden. Gemäß dem Satz von Lebesgue entstehen gegen 0 konvergente Terme für $\|y_2 - y_1\|_{L^2(\Omega \times Q)} \rightarrow 0$.

Nach Anwendung des Lemmas von Gronwall folgt

$$E \int_O (z_{2\varepsilon}(t, x) - z_{1\varepsilon}(t, x))^2 dx \rightarrow 0 \tag{4.2.8}$$

für $\|y_2 - y_1\|_{L^2(\Omega \times Q)} \rightarrow 0$, d. h., es ist $E \|z_{2\varepsilon}(t) - z_{1\varepsilon}(t)\|_H^2 \rightarrow 0$.

Ähnlich den Abschätzungen im Fall der Beschränktheit von S_ε zeigt man, dass

$$E \int_0^t \left\| \frac{\partial(z_{2\varepsilon}(s) - z_{1\varepsilon}(s))}{\partial x} \right\|_H^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{und damit} \quad E \int_0^t \|z_{2\varepsilon}(s) - z_{1\varepsilon}(s)\|_V^2 ds \rightarrow 0$$

für $\|y_2 - y_1\|_{L^2(\Omega \times Q)} \rightarrow 0$ und $t \in [0, T]$ zutrifft.

Die Konvergenz von $(z_{2\varepsilon} - z_{1\varepsilon})$ gegen 0 in $L^2(\Omega \times Q)$ ist dann eine Folgerung des Satzes von Lebesgue, in dem die Aussage (4.2.8) bezüglich t über $[0, T]$ integriert wird. Also gilt die Stetigkeit der Abbildung S_ε von $L^2(\Omega \times Q)$ in sich selbst.

Infolgedessen sind alle Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Schauder erfüllt, und es existiert ein Fixpunkt $y \in L^2(\Omega \times Q)$, der $y(t, x) = S_\varepsilon y(t, x)$ genügt. Die trunkierte und regularisierte Gleichung (4.2.1) besitzt somit eine Lösung. \square

Lemma 4.2.3 *Es existieren eine Folge $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$, $0 < \varepsilon_n < \alpha$ und Prozesse $(U(t))_{t \in [0, T]}$, $(h_1(t))_{t \in [0, T]}$ und $(h_2(t))_{t \in [0, T]}$ derart, dass die Konvergenzaussagen*

$$(i) \ U_{\varepsilon_n} \xrightarrow{w} U \quad \text{in } L^2(\Omega \times [0, T]; V),$$

$$(ii) \ U_{\varepsilon_n} \rightarrow U \quad \text{in } L^2(\Omega \times Q),$$

$$(iii) \ f_1^{\varepsilon_n}(\cdot, \cdot, TU_{\varepsilon_n}) \xrightarrow{w} h_1(\cdot, \cdot), \quad f_2^{\varepsilon_n}(\cdot, \cdot, TU_{\varepsilon_n}) \xrightarrow{w} h_2(\cdot, \cdot) \quad \text{in } L^2(\Omega \times Q)$$

für $\varepsilon_n \rightarrow 0$ gelten.

Beweis.

In einem reflexiven Banachraum besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.

Während des vorangegangenen Abschnittes wurde gezeigt, dass $E \int_0^T \|U_{\varepsilon}(t)\|_V^2 dt \leq \tilde{G}$ nach Ungleichung (4.2.6) gilt. Demnach existiert eine schwach konvergente Teilfolge $(U_{\varepsilon_n})_{\varepsilon_n \geq 0}$ im reflexiven Raum $L^2(\Omega \times [0, T]; V)$.

Des Weiteren ist der Raum V kompakt in H eingebettet. D. h., jede beschränkte Folge besitzt in reflexiven Räumen eine Teilfolge, die bezüglich H stark konvergiert. Die zweite Aussage des Lemmas resultiert demzufolge aus der Abschätzung (4.2.5) und dem Satz von Lebesgue.

Die Regularisierten $f_i^{\varepsilon_n}(\cdot, \cdot, TU_{\varepsilon_n})$, $i = 1, 2$ sind nach Definition und Annahme **(H2)**(ii) gleichmäßig beschränkt in $L^2(\Omega \times Q)$. Also gibt es Teilfolgen mit den in Lemma 4.2.3 aufgeführten schwachen Grenzwerten in $L^2(\Omega \times Q)$. \square

Das folgende Lemma befasst sich mit der Selektionseigenschaft.

Lemma 4.2.4 *Es seien $(U_n(t))_{t \in [0, T]}$, $\tilde{U}_n(t, x) \in [\underline{U}(t, x), \overline{U}(t, x)]$ eine Folge \mathcal{F}_t -messbarer Prozesse, $\tilde{U}(t, x)$ der starke Grenzwert in $L^2(\Omega \times Q)$ mit*

$$E \int_0^t \int_O (\tilde{U}_n(t, x) - \tilde{U}(t, x))^2 dx ds \rightarrow 0$$

und $\varepsilon_n > 0$ eine Folge mit $\varepsilon_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Dann sind die schwachen Grenzwerte $h_1, h_2 \in L^2(\Omega \times Q)$ Selektoren der mengenwertigen Abbildungen F_1 und F_2 , d. h., aus den Beziehungen

$$h_1^n = f_1^{\varepsilon_n}(\tilde{U}_n) \xrightarrow{w} h_1 \quad \text{und} \quad h_2^n = f_2^{\varepsilon_n}(\tilde{U}_n) \xrightarrow{w} h_2$$

folgen

$$h_1(t, x) \in F_1(t, x, \tilde{U}(t, x)) \quad \text{und} \quad h_2(t, x) \in F_2(t, x, \tilde{U}(t, x)).$$

Beweis.

Zunächst wird die Eigenschaft

$$f(t, x, \tilde{U}_n - \varepsilon_n) \leq f^{\varepsilon_n}(t, x, \tilde{U}_n) \leq f(t, x, \tilde{U}_n + \varepsilon_n) \quad (4.2.9)$$

für eine Funktion f bewiesen, die der Annahme **(H2)** genügt.

Für eine Folge ε_m mit $\varepsilon_m \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$ gilt mit der Definition der Regularisierten

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon_m} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x, \tilde{U}_n - \xi) J\left(\frac{\xi}{\varepsilon_m}\right) d\xi &= \lim_{m \rightarrow \infty} f^{\varepsilon_m}(t, x, \tilde{U}_n) \\ &= f(t, x, \tilde{U}_n). \end{aligned}$$

Nach der Grenzwertdefinition gibt es für jedes $\eta > 0$ einen Index $m_0(\eta)$, so dass für alle $m \geq m_0(\eta)$

$$|f^{\varepsilon_m}(t, x, \tilde{U}_n) - f(t, x, \tilde{U}_n)| < \eta$$

gilt bzw.

$$-\eta < f^{\varepsilon_m}(t, x, \tilde{U}_n) - f(t, x, \tilde{U}_n) < \eta$$

oder äquivalent dazu

$$-\eta + f(t, x, \tilde{U}_n) < f^{\varepsilon_m}(t, x, \tilde{U}_n) < \eta + f(t, x, \tilde{U}_n). \quad (4.2.10)$$

Aufgrund der Monotonie von $f(t, x, s)$ bezüglich s nach **(H2)**(i), können die folgenden Ungleichungen aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} f(t, x, \tilde{U}_n) - \eta &\geq f(t, x, \tilde{U}_n - \varepsilon_m) - \eta, \\ f(t, x, \tilde{U}_n) + \eta &\leq f(t, x, \tilde{U}_n + \varepsilon_m) + \eta. \end{aligned}$$

Mit der Ungleichung (4.2.10) ergibt sich nun

$$f(t, x, \tilde{U}_n - \varepsilon_m) - \eta \leq f^{\varepsilon_m}(t, x, \tilde{U}_n) \leq f(t, x, \tilde{U}_n + \varepsilon_m) + \eta.$$

Für hinreichend große n , $n \geq m_0(\eta)$ erhält man daraus auch

$$f(t, x, \tilde{U}_n - \varepsilon_n) - \eta \leq f^{\varepsilon_n}(t, x, \tilde{U}_n) \leq f(t, x, \tilde{U}_n + \varepsilon_n) + \eta.$$

Da $\eta > 0$ beliebig angenommen wird, folgt die Aussage (4.2.9)

$$f(t, x, \tilde{U}_n - \varepsilon_n) \leq f^{\varepsilon_n}(t, x, \tilde{U}_n) \leq f(t, x, \tilde{U}_n + \varepsilon_n)$$

für beliebige $\varepsilon_n \in (0, \alpha)$ und alle $t \in [0, T]$, $x \in O$.

Ausgehend von der Annahme, dass \tilde{U}_n stark in $L^2(\Omega \times Q)$ konvergiert, gibt es eine Teilfolge $(\tilde{U}_{n_j})_{n_j \geq 1}$, die fast überall gegen \tilde{U} konvergent ist, d. h. $\tilde{U}_{n_j}(t, x) \rightarrow \tilde{U}(t, x)$ gilt für P -fast alle $\omega \in \Omega$ in $L^2(Q)$.

Für fast alle $\omega \in \Omega$ gibt es für Lebesgue fast alle t, x eine weitere Teilfolge $n_{j_r}(\omega, t, x)$, so dass bei festem ω die Folge $U_{n_{j_r}}(\omega, t, x)$ Lebesgue fast überall gegen $U(\omega, t, x)$ konvergiert.

Mit dem Satz von Egorov folgt die Existenz einer messbaren Menge $Q' \subset Q$ mit Lebesgue-Maß $m(Q') < \delta$ für $\delta > 0$, so dass die Konvergenz $\tilde{U}_{n_{j_r}}(\omega, t, x) \rightarrow \tilde{U}(\omega, t, x)$ gleichmäßig in $Q \setminus Q'$ für $\varepsilon_{n_{j_r}} \rightarrow 0$ gilt.

Weiter gibt es ein $\varepsilon_{n_{j_0}} \in (0, \alpha)$ für beliebig gegebenes $\rho \in (0, \alpha)$ derart, dass

$$|\tilde{U}_n(\omega, t, x) - \tilde{U}(\omega, t, x)| < \frac{\rho}{2} \quad \text{in } Q/Q' \quad \text{für alle } \varepsilon_{n_{j_r}} \quad \text{und } 0 < \varepsilon_{n_{j_r}} < \min \left\{ \varepsilon_{n_{j_0}}, \frac{\rho}{2} \right\}.$$

Aus der Ungleichung (4.2.9) und der Monotonie der Funktionen f_i , $i = 1, 2$ im letzten Argument folgen

$$\begin{aligned} f_i^{\varepsilon_{n_{j_r}}}(\omega, t, x, \tilde{U}_{n_{j_r}}(\omega, t, x)) &\leq f_i\left(\omega, t, x, \tilde{U}(\omega, t, x) + \frac{\rho}{2} + \varepsilon_n\right) \\ &\leq f_i(\omega, t, x, \tilde{U}(\omega, t, x) + \rho) \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

und

$$f_i(\omega, t, x, \tilde{U}(\omega, t, x) - \rho) \leq f_i^{\varepsilon_{n_{j_r}}}(\omega, t, x, \tilde{U}_{n_{j_r}}(\omega, t, x)). \quad (4.2.12)$$

Bei Betrachtung der vorhergehenden zwei Ungleichungen (4.2.11) und (4.2.12) ergibt sich der Grenzwert $h_i^{n_{j_r}}(\omega, t, x) = f_i^{\varepsilon_{n_{j_r}}}(\omega, t, x, \tilde{U}_{n_{j_r}}(\omega, t, x)) \rightarrow h_i(t, x)$ bei $\varepsilon_{n_{j_r}} \rightarrow 0$.

Damit gilt für alle $\phi \in L_+^2(Q \setminus Q')$ P -f. s.

$$\begin{aligned} \int_{Q \setminus Q'} f_i(t, x, \tilde{U}(t, x) - \rho) \phi(t, x) dx dt &\leq \int_{Q \setminus Q'} h_i(t, x) \phi(t, x) dx dt \\ &\leq \int_{Q \setminus Q'} f_i(t, x, \tilde{U}(t, x) + \rho) \phi(t, x) dx dt. \end{aligned}$$

Der Satz von Lebesgue führt für $\rho \in (0, \alpha)$ mit $\rho \rightarrow 0$ zu

$$\int_{Q \setminus Q'} \underline{f}_i(t, x, \tilde{U}(t, x)) \phi(t, x) dx dt \leq \int_{Q \setminus Q'} h_i(t, x) \phi(t, x) dx dt \leq \int_{Q \setminus Q'} \overline{f}_i(t, x, \tilde{U}(t, x)) \phi(t, x) dx dt.$$

Da alle $\phi \in L_+^2(Q \setminus Q')$ die Ungleichungskette erfüllen, folgt hieraus P -f. s. in $Q \setminus Q'$

$$h_i(t, x) \in [\underline{f}_i(t, x, \tilde{U}(t, x)), \overline{f}_i(t, x, \tilde{U}(t, x))] = F_i(t, x, \tilde{U}(t, x)).$$

Insbesondere ist $\delta > 0$ beliebig klein wählbar, so dass für fast alle ω, t, x die Behauptung des Lemmas

$$h_i(t, x) \in F_i(t, x, \tilde{U}(t, x)), \quad i = 1, 2$$

P -f. s. nachgewiesen ist. □

Beweis von Satz 4.2.1.

Für die eingeführte regularisierte und trunkierte Aufgabe (4.2.1) existiert nach Lemma 4.2.2 eine Lösung. Mit den Konvergenzaussagen des Lemmas 4.2.3, den Konvergenzaussagen des Satzes A.2.1, der Stetigkeit des Trunkierungsoperators T und der Funktionen k, g_1, g_2 folgt aus (4.2.1) für $\varepsilon_n \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
& \int_O U(t, x)v(x)dx \\
& + \int_0^t \int_O \sum_{j=1}^N k(s, x, TU(s, x)) \cdot \frac{\partial U(s, x)}{\partial x_j} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} dx ds \\
& + \int_0^t \int_O g_1(s, x, TU(s, x))v(x)dx ds + \int_0^t \int_O g_2(s, x, TU(s, x))dW_1(s) v(x)dx \\
& = \int_O U_0(x)v(x)dx - \int_0^t \int_O h_1(s, x)v(x)dx ds \\
& - \int_0^t \int_O h_2(s, x)dW_2(s) v(x)dx \tag{4.2.13}
\end{aligned}$$

für alle $v \in M, t \in [0, T]$.

Dabei gilt die Selektionseigenschaft $h_i(t, x) \in F_i(t, x, TU(t, x)), i = 1, 2$ nach Lemma 4.2.4 mit $\tilde{U} = TU$.

Letztendlich bleibt zu zeigen, dass jede Lösung des trunkierten Problems (4.2.13) zwischen Ober- und Unterlösung liegt und somit die Gleichung (4.1.4) erfüllt.

Eine Oberlösung \bar{U} ist für alle $t \in [0, T]$ und $v \in V \cap L_+^2(O)$ entsprechend der Definition 4.1.2 (a), Gleichung (4.1.5) gegeben.

In der Differenz von (4.1.5) und (4.2.13) erhält man für festes $t \in [0, T]$ und mit speziellen Funktionen $v(x) = (U(t, x) - \bar{U}(t, x))^+ = \max\{U(t, x) - \bar{U}(t, x); 0\} \in V$

$$\begin{aligned}
& \int_O (U(t, x) - \bar{U}(t, x)) (U(t, x) - \bar{U}(t, x))^+ dx \\
& + \int_0^t \int_O \sum_{j=1}^N k(s, x, TU(s, x)) \cdot \frac{\partial U(s, x)}{\partial x_j} \frac{\partial (U(s, x) - \bar{U}(s, x))^+}{\partial x_j} dx ds \\
& - \int_0^t \int_O \sum_{j=1}^N k(s, x, \bar{U}(s, x)) \cdot \frac{\partial \bar{U}(s, x)}{\partial x_j} \frac{\partial (U(s, x) - \bar{U}(s, x))^+}{\partial x_j} dx ds \\
& + \int_0^t \int_O (g_1(s, x, TU(s, x)) - g_1(s, x, \bar{U}(s, x))) (U(s, x) - \bar{U}(s, x))^+ dx ds \\
& + \int_0^t \int_O (g_2(s, x, TU(s, x)) - g_2(s, x, \bar{U}(s, x))) (U(s, x) - \bar{U}(s, x))^+ dW_1(s) dx \\
& \leq \int_0^t \int_O (\underline{f}_1(s, x, \bar{U}(s, x)) - h_1(s, x)) (U(s, x) - \bar{U}(s, x))^+ dx ds \\
& + \int_0^t \int_O (\underline{f}_2(s, x, \bar{U}(s, x)) - h_2(s, x)) (U(s, x) - \bar{U}(s, x))^+ dW_2(s) dx.
\end{aligned}$$

Es sei $O' = \{x : U(t, x) > \bar{U}(t, x)\}$. Durch Erwartungswertbildung und die Eigenschaften des Trunkierungsoperators T ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} & E \int_{O'} (U(t, x) - \bar{U}(t, x))^2 dx \\ & + E \int_0^t \int_{O'} \sum_{j=1}^N k(s, x, \bar{U}(s, x)) \cdot \left(\frac{\partial(U(s, x) - \bar{U}(s, x))}{\partial x_j} \right)^2 dx ds \\ & \leq E \int_0^t \int_{O'} (\underline{f}_1(s, x, \bar{U}(s, x)) - h_1(s, x)) (U(s, x) - \bar{U}(s, x)) dx ds. \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Die Funktion f_1 wächst bezüglich der letzten Variablen, also gilt

$$\underline{f}_1(s, x, \bar{U}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_1(s, x, \bar{U} - \varepsilon) \leq h_1(s, x).$$

Damit ist das Produkt unter dem Integral der rechten Seite in (4.2.14) negativ für $x \in O'$. Insbesondere gilt für die linke Seite der Beziehung (4.2.14) wegen der Annahme **(H1)**

$$\begin{aligned} 0 & \leq E \int_{O'} (U(t, x) - \bar{U}(t, x))^2 dx \\ & \leq E \int_{O'} (U(t, x) - \bar{U}(t, x))^2 dx + k_0 E \int_0^t \int_{O'} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial(U(s, x) - \bar{U}(s, x))}{\partial x_j} \right)^2 dx ds. \end{aligned}$$

Folglich ist $(U(t, x) - \bar{U}(t, x))^+ = 0$, d. h. $U(t, x) \leq \bar{U}(t, x)$ für Lebesgue fast alle x und alle t , P -f. s.

Eine ähnliche Untersuchung für die Unterlösung führt schließlich zu

$$\underline{U}(t, x) \leq U(t, x) \leq \bar{U}(t, x) \quad P\text{-f. s.}$$

Jede Lösung des trunkierten Problems (4.2.13) löst damit das Originalproblem, da für $U = TU$ die Gleichung (4.1.4) der Originalaufgabe erfüllt ist. \square

Bemerkung 4.2.5 *Der Spezialfall $V = H_0^1(O)$ wird in der Arbeit von Bauwe und Grecksch [13] behandelt.*

Bemerkung 4.2.6 *Für maximal-monotone Abbildungen kann alternativ zu der hier verwendeten Regularisierung f_ε mit dem Glättungsoperator J auch die Yosida-Approximation F_λ gewählt werden.*

Entsprechend ihrer Eigenschaften in Satz 1.2.4 sind kaum Änderungen für den Beweis des Existenzsatzes 4.2.1 zu beachten. Lediglich der Selektionsnachweis in Lemma 4.2.4 gestaltet sich nach Proposition 1.2.2(ii) einfacher für die Yosida-Approximationen $F_{1\lambda}, F_{2\lambda}$ und die zugehörigen Lösungen U_λ .

Die Nemytskij-Operatoren der Abbildungen F_i , der Resolventen $J_{i\lambda}$, Yosida-Approximationen $F_{i\lambda}$ und Minimalselektionen F_i^0 in $L^2(\Omega \times Q)$ seien mit \widehat{F}_i , $\widehat{J}_{i\lambda}$, $\widehat{F}_{i\lambda}$ und \widehat{F}_i^0 bezeichnet für $i = 1, 2$.

Da nach Proposition 1.2.6 die Maximal-Monotonie von \widehat{F}_i erhalten bleibt, gilt es, die Konvergenz von $\widehat{J}_{i\lambda}(U_\lambda)$ für die Anwendung von Proposition 1.2.2(ii) nachzuweisen.

Es ist

$$\begin{aligned} \|\widehat{J}_{i\lambda}(U_\lambda) - U\|_{L^2(\Omega \times Q)} &\leq \|\widehat{J}_{i\lambda}(U_\lambda) - U_\lambda\|_{L^2(\Omega \times Q)} + \|U_\lambda - U\|_{L^2(\Omega \times Q)} \\ &= \lambda \|\widehat{F}_{i\lambda}(U_\lambda)\|_{L^2(\Omega \times Q)} + \|U_\lambda - U\|_{L^2(\Omega \times Q)} \\ &\leq \lambda \|\widehat{F}_i^0(U_\lambda)\|_{L^2(\Omega \times Q)} + \|U_\lambda - U\|_{L^2(\Omega \times Q)}. \end{aligned}$$

Wegen der Eigenschaften der Yosida-Approximation, der Beschränktheit der Minimalselektion durch \bar{f} , der Annahme **(H2)** (ii) und der Konvergenz von $U_\lambda \rightarrow U$ in $L^2(\Omega \times Q)$ nach Lemma 4.2.3 konvergiert nunmehr $\widehat{J}_{i\lambda}(U_\lambda)$ gegen U für $\lambda \rightarrow 0$.

Aus $\widehat{F}_{i\lambda}(U_\lambda) \in \widehat{F}_i(\widehat{J}_{i\lambda}(U_\lambda))$, $\widehat{F}_{i\lambda}(U_\lambda) \xrightarrow{w} h_i$ in $L^2(\Omega \times Q)$ gemäß Lemma 4.2.3 und $\widehat{J}_{i\lambda}(U_\lambda) \rightarrow U$ folgt $h_i \in \widehat{F}_i(U)$ mit der stark-schwach Abgeschlossenheit von \widehat{F}_i .

Damit ist der Satz 4.2.1 auch mit Hilfe der Yosida-Approximation als Regularisierung beweisbar.

Der Satz 1.2.9 von Hu und Papageorgiou kann ebenfalls als Möglichkeit des Selektionsnachweises genutzt werden. Auf die Durchführung wird an dieser Stelle verzichtet. Es sei hierfür auf das Vorgehen in Abschnitt 3.2 und Proposition 1.2.2(i) verwiesen.

4.3 Eindeutigkeit von Lösungen

Für die parabolische Aufgabe (4.1.1) gibt es keine eindeutige Lösung, da auch hier das Problem der Unvereinbarkeit von Lipschitz-Stetigkeit und Maximal-Monotonie für mengenwertige Abbildungen auftritt.

Man kann jedoch im Fall quasilinearer stochastischer Differentialinklusionen ohne mengenwertige Diffusion

$$dU(t, x) + AU(t, x)dt + g(t, x, U(t, x))dW(t) \in -F(t, x, U(t, x))dt \quad (4.3.1)$$

für $t \in [0, T]$ und $x \in O$ mit den Anfangs- und Randwertbedingungen

$$\begin{aligned} U(0, x) &= U_0(x) \quad \text{für } x \in O, \\ U(t, x) &= 0 \quad \text{auf } [0, T] \times \partial O_1, \quad \frac{\partial U(t, x)}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } [0, T] \times \partial O_2 \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

die Frage der eindeutigen Lösbarkeit als Folgerung des Satzes 4.2.1 positiv beantworten.

Die Problembeschreibung aus Abschnitt 4.1 wird übernommen, wobei $(W(t))_{t \in [0, T]}$ ein reellwertiger, \mathcal{F}_t -adaptierter Wiener Prozess ist und F durch eine Funktion f über das Intervall $F = [\underline{f}, \bar{f}]$ wie in Abschnitt 4.1 erzeugt wird.

Es werden im Vergleich zu den Annahmen aus Abschnitt 4.1 die folgenden Änderungen vorgenommen.

(H1') Für die Carathéodory-Funktion $k : Q \rightarrow \mathbb{R}$, existieren eine Funktion $r \in L^\infty(Q)$ sowie eine Konstante $k_0 > 0$, so dass die Beschränktheitsbedingungen

$$|k(t, x)| \leq r(t, x) \quad \text{und} \quad k(t, x) \geq k_0 > 0$$

für fast alle $(t, x) \in Q$ erfüllt sind.

(H2') Für die \mathcal{F}_t -messbare Funktion $f : \Omega \times [0, T] \times O \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gelten:

- (i) Die Abbildung $s \mapsto f(\omega, t, x, s)$ wächst P -f. s. für fast alle $(t, x) \in Q$.
- (ii) Es gibt eine nicht-negative Konstante α und eine Funktion $p \in L^2(Q)$ mit

$$|f(t, x, s)| \leq p(t, x)$$

für fast alle $(t, x) \in Q$, P -f. s., $s \in [\underline{U}(t, x) - \alpha, \bar{U}(t, x) + \alpha]$.

(H3') Die Carathéodory-Funktion $g : Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist für fast alle $(t, x) \in Q$ und $s \in [\underline{U}(t, x), \bar{U}(t, x)]$ durch eine Funktion $q \in L^2(Q)$ beschränkt mit

$$|g(t, x, s)| \leq q(t, x).$$

Zusätzlich sei g Lipschitz-stetig mit einer Konstante $L > 0$, so dass

$$|g(t, x, s_1) - g(t, x, s_2)| \leq L|s_1 - s_2|$$

für fast alle $(t, x) \in Q$ und $s_1, s_2 \in [\underline{U}(t, x), \bar{U}(t, x)]$ erfüllt ist.

Satz 4.3.1 *Unter den Voraussetzungen **(H0)**, **(H1')**, **(H2')**, **(H3')** besitzt die stochastische Differentialinklusion (4.3.1) mit (4.3.2) eine eindeutig bestimmte Lösung $U \in [\underline{U}, \bar{U}]$.*

Beweis.

Die Existenz einer Lösung mit $U(t, x) \in [\underline{U}(t, x), \bar{U}(t, x)]$ folgt direkt aus Satz 4.2.1. Somit gilt es die Eindeutigkeit zu beweisen.

Es seien U, U' Lösungen des Problems (4.3.1), (4.3.2). Damit gibt es Selektoren $h(t, x) \in F(t, x, U(t, x))$ und $h'(t, x) \in F(t, x, U'(t, x))$, so dass für alle $v \in M$, $M \subseteq V$ dicht und $t \in [0, T]$ P -f. s. gilt:

$$\begin{aligned} & \int_O (U(t, x) - U'(t, x)) v(x) dx \\ & + \int_0^t \int_O \sum_{j=1}^N k(s, x) \cdot \left(\frac{\partial U(s, x)}{\partial x_j} - \frac{\partial U'(s, x)}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} dx ds \\ & + \int_0^t \int_O (g(s, x, U(s, x)) - g(s, x, U'(s, x))) dW(s) v(x) dx \\ & = - \int_0^t \int_O (h(s, x) - h'(s, x)) v(x) dx ds. \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Wird erneut die Itô-Formel des Satzes A.5.3 angewendet, so erhält man unter Beachtung der Eigenschaften des Erwartungswertes, der Monotonie von F sowie der Bedingungen **(H1')** und **(H3')**

$$\begin{aligned} & E \int_O (U(t, x) - U'(t, x))^2 dx + k_0 E \int_0^t \int_O \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial U(s, x)}{\partial x_j} - \frac{\partial U'(s, x)}{\partial x_j} \right)^2 dx ds \\ & \leq L^2 \int_0^t E \int_O |U(s, x) - U'(s, x)|^2 dx ds. \end{aligned}$$

Das Lemma von Gronwall liefert wiederum

$$E \int_O (U(t, x) - U'(t, x))^2 dx = 0$$

und somit auch

$$E \int_0^t \int_O \left(\frac{\partial U(s, x)}{\partial x_j} - \frac{\partial U'(s, x)}{\partial x_j} \right)^2 dx ds = 0$$

für alle $t \in [0, T]$, $j = 1, \dots, N$.

Folglich ist $U(t, x) = U'(t, x)$ für alle $t \in [0, T]$, Lebesgue fast alle $x \in O$ mit Wahrscheinlichkeit 1.

Abschließend wird die Eindeutigkeit des Selektors gezeigt.

Angenommen es gibt zu einer Lösung U zwei Selektoren $h(t, x)$, $h''(t, x) \in F(t, x, U(t, x))$, die den Gleichungen

$$\begin{aligned} & \int_O U(t, x) v(x) dx \\ & + \int_0^t \int_O \sum_{j=1}^N k(s, x) \cdot \frac{\partial U(s, x)}{\partial x_j} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} dx ds + \int_0^t \int_O g(s, x, U(s, x)) dW(s) v(x) dx \\ & = - \int_0^t \int_O h(s, x) v(x) dx ds, \\ & \int_O U(t, x) v(x) dx \\ & + \int_0^t \int_O \sum_{j=1}^N k(s, x) \cdot \frac{\partial U(s, x)}{\partial x_j} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} dx ds + \int_0^t \int_O g(s, x, U(s, x)) dW(s) v(x) dx \\ & = - \int_0^t \int_O h''(s, x) v(x) dx ds \end{aligned}$$

genügen.

Durch Subtraktion erhält man schließlich

$$\int_0^t \int_O (h(s, x) - h''(s, x)) v(x) dx ds = 0$$

für alle $v \in M$.

Demzufolge muss $h(t, x) = h''(t, x)$ fast überall gelten und der Satz 4.3.1 ist bewiesen. \square

Bemerkung 4.3.2 *Chipot [27] führt in Kapitel 12.1 den Eindeutigkeitsnachweis für deterministische parabolische partielle Differentialgleichungen mit Funktionen $k = k(t, x, s)$.*

4.4 Vergleichsresultate

Voraussetzung für die Anwendung des Satzes 4.2.1 ist die Existenz von Ober- und Unterlösungen zu stochastischen Differentialinklusionen der Art (4.1.1). Die Bestimmung dieser beschränkenden Funktionen gestaltet sich jedoch schwieriger als im deterministischen Fall. Unter anderem sind für deterministische Differentialgleichungen bei Heikkilä und Lakshmikantham [49], Walter [87] entsprechende Ergebnisse aufgeführt.

Eine direkte Übertragung der deterministischen Untersuchungen ist wegen der nicht-regulären Trajektorien der Wiener Prozesse nicht möglich.

Ausgehend von skalaren oder endlichdimensionalen stochastischen Differentialgleichungen für $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} dX_i(t) &= A_i(t, X(t))dt + B_i(t, X(t))dW(t), \\ X_i(0) &= X_{i0} \end{aligned}$$

beschäftigen sich viele Autoren mit dem Vergleich der Lösungen $X_1(t)$ und $X_2(t)$.

Hajek veröffentlicht in [47] eine ausführliche Abhandlung von Vergleichsresultaten für eindimensionale stochastische Differentialgleichungen. Er betrachtet sowohl unterschiedliche Drift- als auch Diffusionsterme. Die Anordnung der dazugehörigen Lösungen erfolgt im Mittel bezüglich einer konvexen Funktion.

Mit Wahrscheinlichkeit 1 gültige Vergleiche werden in den Arbeiten von Assing und Manthey [5], Górski [43] unter Nutzung von Explosionszeiten dargestellt. Die Vergleichssätze werden für unterschiedliche Drifts, aber gleiche Diffusionen bewiesen.

Im Folgenden werden zwei Aussagen für den Vergleich von Lösungen im endlich- und unendlichdimensionalen Fall vorgestellt.

Die Notation der zitierten Autoren bleibt weitestgehend erhalten.

Es seien (Ω, \mathcal{F}, P) ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ eine Filtration, den üblichen Bedingungen genügend, und $W(t) = (W_1(t), \dots, W_d(t))$ ein d -dimensionaler, \mathcal{F}_t -adaptierter Wiener Prozess mit unabhängigen Komponenten für $t \in [0, T]$.

Ferreya und Sundar untersuchen in [36] das endlichdimensionale System mit unterschiedlichen Drift- und Diffusionstermen

$$\begin{aligned} X_j(t) &= X_{0j} + \int_0^t b_j(\omega, s, X(s)) ds + \int_0^t Z_j(s) g_j(X_j(s)) dW_j(s), \\ Y_j(t) &= Y_{0j} + \int_0^t c_j(\omega, s, Y(s)) ds + \int_0^t Z_j(s) h_j(Y_j(s)) dW_j(s) \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

für $j = 1, \dots, d$, $d \geq 1$, wobei $Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_d(t))$ ein stetiger, d -dimensionaler, \mathcal{F}_t -adaptierter Prozess ist und $X(t), Y(t)$ koordinatenweise gegeben sind mit $X_0 = X(0)$, $Y_0 = Y(0)$. Alle nachfolgenden Gleichungen und Ungleichungen sind entsprechend koordinatenweise zu verstehen.

Hervorzuheben ist die Abhängigkeit der Diffusionskoeffizienten von den j -ten Koordinaten der Lösungen.

Bei gewisser Ordnung der Anfangsbedingungen $X_0, Y_0 \in \mathbb{R}^d$, der eingehenden Funktionen $g_j, h_j : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $j = 1, \dots, d$ und $b, c : \Omega \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $b = (b_1, \dots, b_d)$, $c = (c_1, \dots, c_d)$ wird eine Aussage über das Verhalten der Lösungsprozesse $(X(t))_{t \geq 0}$ und $(Y(t))_{t \geq 0}$ formuliert.

Dazu sind die folgenden Annahmen zu treffen:

(V0) Für die Anfangsbedingungen gilt $X_0 \leq Y_0$.

(V1) Die Funktionen b, c sind \mathcal{F}_t -messbar für alle $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ und stetig in (t, x) für alle $\omega \in \Omega$.

(V2) Es gibt eine Konstante $K_1 > 0$, so dass b, c Lipschitz- und Wachstumsbedingungen genügen für alle $t \in [0, \infty)$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ und fast alle $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} |b(\omega, t, x) - b(\omega, t, y)| &\leq K_1 |x - y|, \\ |c(\omega, t, x) - c(\omega, t, y)| &\leq K_1 |x - y|, \\ |b(\omega, t, x)| + |c(\omega, t, x)| &\leq K_1 \sqrt{1 + |x|^2}. \end{aligned}$$

(V3) Die Funktionen g_j, h_j sind stetig differenzierbar für $j = 1, \dots, d$ und mit $K_2 > 0$ gelte für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |g_j(x) - g_j(y)| &\leq K_2 |x - y|, \\ |h_j(x) - h_j(y)| &\leq K_2 |x - y|, \\ |g_j(x)| + |h_j(x)| &\leq K_2 \sqrt{1 + |x|^2}. \end{aligned}$$

(V4) Für $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$ und alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ mit $x \leq y$ ist die Ungleichung

$$\bar{b}(\omega, t, x) \leq \bar{c}(\omega, t, y)$$

erfüllt, wobei

$$\begin{aligned}\bar{b}_j(\omega, t, x) &= \frac{b_j(\omega, t, x)}{g_j(x)} - \frac{(Z_j(t))^2}{2} \cdot \frac{dg_j(x)}{dx}, \\ \bar{c}_j(\omega, t, x) &= \frac{c_j(\omega, t, x)}{h_j(x)} - \frac{(Z_j(t))^2}{2} \cdot \frac{dh_j(x)}{dx}\end{aligned}$$

sind.

(V5) Es gilt für alle $u \in \mathbb{R}$

$$-\infty < \int_{Y_{j_0}}^u \frac{dx}{h_j(x)} \leq \int_{X_{j_0}}^u \frac{dx}{g_j(x)} < \infty.$$

Bemerkung 4.4.1 Anzumerken ist, dass in den Annahmen (V1), (V2), (V4) zum Teil $x, y \in \mathbb{R}^d$ und in (V3), (V5) $x, y \in \mathbb{R}$ bzw. $u \in \mathbb{R}$ gefordert wird.

Satz 4.4.2 (Vgl. Ferreyra, Sundar [36], Satz 3)

Mit den Voraussetzungen (V0)-(V5) gilt für die Lösungen X, Y des Systems (4.4.1) stochastischer Differentialgleichungen

$$P \{X(t) \leq Y(t) : t \geq 0\} = 1.$$

Für unendlichdimensionale Probleme sind dagegen kaum Ergebnisse vorhanden. In [41] beweisen Geiß und Manthey für ein Cauchy-Problem mit nicht-zufälligen Koeffizienten einen Vergleichssatz.

Es seien (Ω, \mathcal{F}, P) ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, die den üblichen Bedingungen genügt, und $W(t, x)$ ein d -dimensionales Wiener Feld.

Zu betrachten sei die Aufgabe

$$\begin{aligned}dU(t, x) &= \frac{1}{2} \Delta U(t, x) dt + f(U(t, x)) dt + \sigma(U(t, x)) dW(t, x), \\ U(0, x) &= \psi(x)\end{aligned}\tag{4.4.2}$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$.

Dabei sind $\psi : \Omega \rightarrow C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ und $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ stetige Abbildungen.

Die nachfolgenden Voraussetzungen werden benötigt:

(V0 $^\infty$) Der Anfangswert ψ ist \mathcal{F}_0 -messbar.

(V1 $^\infty$) Die Abbildung σ ist beschränkt und erfüllt für eine streng monoton wachsende

Funktion $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\rho(0) = 0$ und $\int_{\mathbb{R}_+} \rho^{-2}(u) du = \infty$ die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^d |\sigma_{jk}(u) - \sigma_{jk}(v)| \leq \rho(|u_j - v_j|)$$

für alle $u, v \in \mathbb{R}^d$ und $j = 1, \dots, d$.

(V2 $^\infty$) Die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ genügen den Bedingungen:

(i) Es gilt für $u, v \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, 2$ und eine Konstante $K > 0$ sowie $p > 0$ eine Wachstumsbeschränkung

$$|f_i(u)| \leq K(1 + |u|^p).$$

(ii) Die Lipschitz-Bedingung

$$(f_i(u) - f_i(v))(u - v) \leq L(|u - v|^2 + |u - v|)$$

ist für $u, v \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, 2$ und $L > 0$ erfüllt.

(iii) Die Ungleichung

$$f_{1j}(u) < f_{2j}(v)$$

gilt für $u \in \mathbb{R}$ mit $j = 1, \dots, d$, wann immer $u_j = v_j$ und $u_l \leq v_l$ mit $l \neq j$ ist.

Sind $U_1, U_2 : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ eindeutige Lösungen des Cauchy-Problems (4.4.2) mit den entsprechenden Funktionen f_1, f_2 und Anfangswertfunktionen ψ_1 bzw. ψ_2 , dann gibt der nächste Satz Auskunft über die Beziehung der Lösungen zueinander.

Satz 4.4.3 (Vgl. Geiß, Manthey [41], Satz 2.2)

Unter den obigen Annahmen (V0 $^\infty$), (V1 $^\infty$), (V2 $^\infty$) folgt für eindeutige Lösungen U_1, U_2 von (4.4.2) aus

$$\psi_1(x) \leq \psi_2(x) \quad P\text{-f.s.}$$

die Anordnung

$$U_1(t, x) \leq U_2(t, x) \quad P\text{-f.s.}$$

Mit den Sätzen 4.4.2 und 4.4.3 lassen sich nun Unter- und Oberlösungen entsprechend an (4.1.1) angepasste Aufgaben bestimmen.

Für den stochastischen Fall sind bei der Entwicklung monotoner iterativer Techniken auch Aussagen zu Maximal- und Minimallösungen einer Lösungsmenge möglich. Dieser Ansatz wird in der vorliegenden Arbeit nicht weiter verfolgt.

4.5 Beispiele

Für die hier erzielten Erkenntnisse der Anwendung der Methode von Ober- und Unterlösung auf stochastische Differentialinklusionen werden zwei Beispiele vorgestellt.

Auf endlichdimensionalen Räumen behält der Existenzsatz 4.2.1 seine Gültigkeit. Das Beispiel 2.4.1 aus dem Kapitel 2 über endlichdimensionale Inklusionen wird erneut betrachtet.

Beispiel 4.5.1 *Für das Problem des Lymphsystems von Pettersson [79] kann eine Lösung, deren Existenz nach Satz 2.2.1 bzw. Satz 2.3.2 eindeutig gesichert ist, mit Hilfe von Ober- und Unterlösung eingeschränkt werden.*

Die Grundlage für die Anordnung von Lösungen stochastischer Differentialgleichungen mit unterschiedlichem Drift-, aber gleichem Diffusionsterm bildet dabei der Satz 4.4.2 von Ferreyra und Sundar.

Anhand der maximal-monotonen Abbildung A für $0 \leq c$ und $0 \leq k_1 < k_2$

$$Au = \begin{cases} k_1 u, & u < c; \\ [k_1 u, k_2 u], & u = c; \\ k_2 u, & u > c \end{cases}$$

lassen sich leicht Funktionen zur Bestimmung von Ober- und Unterlösung finden.

Z. B. seien $f^u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige, beschränkte Funktion, die oberhalb der abschnittsweise linearen Funktion

$$f^u(u) \geq f(u) = \begin{cases} k_1 u + (k_2 - k_1)c, & u < c, \\ k_2 u, & u \geq c \end{cases}$$

verläuft und $f^o : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f^o(u) = k_1 u$ gegeben.

Dann gilt für beliebige Selektoren $h(u) \in Au$, $u \in \mathbb{R}$ der Ungleichungskette

$$-f^u(u) \leq -h(u) \leq -f^o(u),$$

dass die eindeutigen Lösungen der Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} dU^u(t) &= b(t, U^u(t))dt - f^u(U^u(t))dt + \sigma(t, U^u(t))dW(t), \\ dU^o(t) &= b(t, U^o(t))dt - f^o(U^o(t))dt + \sigma(t, U^o(t))dW(t), \\ U^u(0) &= U(0) = U^o(0) \end{aligned}$$

als Unterlösung U^u bzw. Oberlösung U^o für die stochastische Differentialinklusion

$$\begin{aligned} dU(t) &\in b(t, U(t))dt - AU(t)dt + \sigma(t, U(t))dW(t), \\ U(0) &= U_0 \end{aligned}$$

geeignet sind. Dies folgt aus der Überprüfung der Annahmen des Satzes 4.4.2.

Mit den an die Aufgabe gestellten Voraussetzungen in Beispiel 2.4.1 sind die Bedingungen des Existenzsatzes 4.2.1 erfüllt, so dass eine Lösung zwischen Ober- und Unterlösung existiert.

Im nächsten Beispiel wird ein spezielles Problem der Art (4.1.1) dieses Kapitels betrachtet.

Beispiel 4.5.2 *Die mengenwertige stochastische Dirichlet-Aufgabe*

$$dU(t, x) \in \Delta U(t, x)dt - F_1(U(t, x))dt - F_2(U(t, x))dW(t)$$

mit der Anfangswertbedingung $U(0, x) = \psi(x)$ für alle $x \in O$ und der Randwertbedingung $U(t, x) = 0$ für $(t, x) \in [0, T] \times \partial O$ wird untersucht. In die Aufgabenstellung (4.1.1) gehen nur von der Lösung U abhängige Abbildungen F_1, F_2 sowie $k \equiv 1$ und $g_1, g_2 \equiv 0$ ein. Da die Randwertbedingung auf dem gesamten Randgebiet gilt, ist es sinnvoll den Raum $V = H_0^1(O)$ zu wählen.

Existieren Ober-, Unterlösungen und sind diese bekannt, so trifft Satz 4.2.1 eine Aussage über die Lösbarkeit der Aufgabe (vgl. auch [13]).

Um den Vergleichssatz von Geiß und Manthey 4.4.3 anzuwenden, wird die mengenwertige Diffusion F_2 durch eine einwertige, stetige Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ersetzt, die der Bedingung $(\mathbf{V1}^\infty)$ genügt. Die maximal-monotone Abbildung F_1 wird auch hier mittels Intervallbildung durch eine gegebene, wachsende Funktion f erzeugt. Erfüllen die stetigen, nicht-zufälligen Funktionen $f^u, f^o : O \rightarrow \mathbb{R}$ die Annahme $(\mathbf{V2}^\infty)$ mit

$$-f^u(u) \leq -\bar{f}(u) \leq -f^\varepsilon(u) \leq -\underline{f}(u) \leq -f^o(u)$$

für alle $u \in \mathbb{R}$, so folgt mit Satz 4.4.3 aus der Ungleichung

$$\psi^u(x) \leq \psi(x) \leq \psi^o(x)$$

die Ordnung der eindeutigen Lösungen von

$$dU^u(t, x) = \Delta U^u(t, x)dt - f^u(U^u(t, x)) - g(U^u(t, x))dW(t), \quad U^u(0, x) = \psi^u(x)$$

und entsprechend

$$dU^o(t, x) = \Delta U^o(t, x)dt - f^o(U^o(t, x)) - g(U^o(t, x))dW(t), \quad U^o(0, x) = \psi^o(x)$$

mit

$$U^u(t, x) \leq U(t, x) \leq U^o(t, x) \quad P\text{-f.s.}$$

Anhang

A.1 Projektionen

Definition A.1.1 Für einen vollständigen metrischen Raum X mit der Metrik $d(\cdot, \cdot)$ und eine nicht-leere Teilmenge $B \subseteq X$ ist die *metrische Projektion* $\text{proj}[\cdot, B] : X \rightarrow 2^B$ von $a \in X$ auf B definiert durch

$$\text{proj}[a; B] = \{b \in B : d(a, b) = d(a, B)\}.$$

Satz A.1.2 (Vgl. Aubin, Frankowska [7], Korollar 8.2.13)

Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \sigma)$ ein σ -finites Maßraum, X ein vollständiger, separabler, metrischer Raum, $d(\cdot, \cdot)$ eine Metrik darauf, $F : \Omega \rightarrow 2^X$ eine messbare Abbildung mit abgeschlossenen Bildern und $f : \Omega \rightarrow X$ eine messbare Funktion.

Dann ist die Projektion

$$\text{proj}[f(\omega); F(\omega)] = \{x \in F(\omega) : d(x, F(\omega)) = d(f(\omega), F(\omega))\}$$

messbar.

Satz A.1.3 (Vgl. Rockafellar, Wets [84], Korollar 12.20, Beispiel 2.25)

Für nicht-leere, abgeschlossene Mengen $C \subset \mathbb{R}^n$ ist die Projektion $P_C : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^C$ monoton. Ist C zusätzlich konvex, so ergibt sich die Stetigkeit von $P_C : \mathbb{R}^n \rightarrow C$.

Bemerkung A.1.4 Die metrische Projektion in abgeschlossene, konvexe Teilmengen eines Hilbertraumes wird als orthogonale Projektion bezeichnet.

Satz A.1.5 (Eigenschaften der orthogonalen Projektion, vgl. Deutsch [32], 5.5, 5.8)

Es seien B ein abgeschlossener, konvexer Teilraum des Hilbertraumes H und P die orthogonale Projektion von H nach B .

Dann ist P ein linearer, stetiger Operator und es gelten:

- (i) P ist eindeutig,
- (ii) $P = P^2$ bzw. $Px = P(P(x))$, für alle $x \in H$,
- (iii) $\|Px\|_H \leq \|x\|_H$ für alle $x \in H$,

- (iv) $\|Px\|_H = \|x\|_H$ für alle $x \in B$,
- (v) $(Px, y)_H = (x, Py)_H$ für alle $x, y \in H$,
- (vi) P ist nicht-expansiv, d. h., für alle $x, y \in H$ gilt $\|Px - Py\|_H \leq \|x - y\|_H$.

A.2 Konvergenzaussagen

Satz A.2.1 (Vgl. Breckner [19], Proposition A.3)

Gegeben seien ein Banachraum X , ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , ein Wiener Prozess $(W(t))_{t \in [0, T]}$, Prozesse $(x_n(t))_{t \in [0, T]}$, $n \geq 1$, $(x(t))_{t \in [0, T]}$ die bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ adaptiert sind.

Konvergiert die Folge $(x_n)_{n \geq 1} \in L^2(\Omega \times [0, T]; X)$ schwach gegen $x \in L^2(\Omega \times [0, T]; X)$, so gelten die folgenden Aussagen für $n \rightarrow \infty$:

- (i) $\int_0^t x_n(s) ds \xrightarrow{w} \int_0^t x(s) ds$ und
 $\int_0^t x_n(s) dW(s) \xrightarrow{w} \int_0^t x(s) dW(s)$ in $L^2(\Omega \times [0, T]; X)$,
- (ii) $\int_0^T x_n(s) ds \xrightarrow{w} \int_0^T x(s) ds$ und
 $\int_0^T x_n(s) dW(s) \xrightarrow{w} \int_0^T x(s) dW(s)$ in $L^2(\Omega; X)$.

A.3 Der Fixpunktsatz von Schauder

Satz A.3.1 (Vgl. Zeidler [95], Satz 1.C)

Es seien X ein Banachraum und $Y \subset X$ eine beschränkte, abgeschlossene, konvexe und nicht-leere Teilmenge.

Dann besitzt ein kompakter Operator $A : Y \rightarrow Y$ einen Fixpunkt.

A.4 Die Ungleichung von Burkholder-Davis-Gundy

Satz A.4.1 (Vgl. Revuz, Yor [82], Satz IV.4.1, Korollar IV.4.2 und Karatzas [55], 2.13)

Mit $M_t^* = \sup_{s \leq t} |M(s)|$ existieren für alle stetigen, lokalen Martingale M , die bei Null verschwinden, Konstanten c_p und C_p , so dass

$$c_p E \left[\langle M, M \rangle_\infty^{\frac{p}{2}} \right] \leq E [(M_\infty^*)^p] \leq C_p E \left[\langle M, M \rangle_\infty^{\frac{p}{2}} \right]$$

gilt für $0 < p < \infty$. Dabei bezeichnet $\langle M, M \rangle$ die quadratische Variation von M .

Es sei G ein beschränkter, vorhersagbarer Prozess und T eine beliebige Stoppzeit. Dann ist

$$\begin{aligned} c_p E \left[\left(\int_0^T G^2(s) d\langle M, M \rangle_s \right)^{\frac{p}{2}} \right] &\leq E \left[\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t G(s) dM(s) \right|^p \right] \\ &\leq C_p E \left[\left(\int_0^T G^2(s) d\langle M, M \rangle_s \right)^{\frac{p}{2}} \right] \end{aligned}$$

erfüllt.

A.5 Die Itô-Formel für das Normquadrat

Das stochastische Äquivalent zur partiellen Integration des Normquadrats wird in Krylov und Rozovskij [67] formuliert.

Zuvor wird der Begriff des Evolutionstripels eingeführt.

Definition A.5.1 Ein *Evolutionstripel* $V \subseteq H \subseteq V^*$ ist definiert durch:

- (i) V ist ein reeller, separabler und reflexiver Banachraum, H ein reeller, separabler Hilbertraum.
- (ii) Der Raum V liegt dicht in H und die Einbettung $V \subseteq H$ ist stetig.
- (iii) Es gibt eine Konstante $c_1 > 0$, so dass für alle $v \in V$ die Ungleichung

$$\|v\|_H \leq c_1 \|v\|_V$$

gilt und für alle $h \in H \subseteq V^*$, $v \in V$

$$\langle h, v \rangle_V = (h, v)_H$$

erfüllt ist, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ die Dualitätsabbildung zwischen V und V^* und $(\cdot, \cdot)_H$ das Skalarprodukt in H bezeichnet.

Demnach gibt es eine Konstante $c_2 > 0$ mit

$$\|h\|_{V^*} \leq c_2 \|h\|_H$$

für alle $h \in H$.

Bemerkung A.5.2 Eine Einbettung $X \subseteq Y$ heißt *stetig*, wenn aus der Konvergenz $x_n \rightarrow x$ in X folgt, dass x_n gegen x in Y konvergiert für $n \rightarrow \infty$.

Gilt zusätzlich, dass jede beschränkte Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ in X eine konvergente Teilfolge $(x_{n'})_{n' \geq 1}$ in Y enthält, so wird die Einbettung $X \subseteq Y$ *kompakt* genannt.

Es seien $V \subseteq H \subseteq V^*$ ein Evolutionstripel, (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ eine wachsende Familie von σ -Algebren mit $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ und $(W(t))_{t \in [0, T]}$ ein reellwertiger, \mathcal{F}_t -adaptierter Wiener Prozess.

Für eine \mathcal{F}_0 -messbare Zufallsgröße $h_0 \in H$ mit $E\|h_0\|_H^2 < \infty$, einen \mathcal{F}_t -messbaren, V^* -wertigen Prozess $(v^*(t))_{t \in [0, T]}$ und einen \mathcal{F}_t -messbaren, H -wertigen Prozess $(g(t))_{t \in [0, T]}$ mit

$$E \int_0^T \|v^*(t)\|_{V^*}^2 dt < \infty, \quad E \int_0^T \|g(t)\|_H^2 dt < \infty$$

sei der Prozess $(h(t))_{t \in [0, T]}$

$$h(t) = h_0 + \int_0^t v^*(s) ds + \int_0^t g(s) dW(s)$$

in V^* mit Wahrscheinlichkeit 1 für alle $t \in [0, T]$ definiert.

Satz A.5.3 (Vgl. Krylov, Rozovskij [67], Satz 1.3.2)

Angenommen es existiert ein V -wertiger Prozess $(v(t))_{t \in [0, T]}$, so dass $h(t) = v(t)$ für fast alle $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$ gilt.

Dann gibt es eine Menge $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ mit $P(\tilde{\Omega}) = 1$, so dass der Prozess $h(t)$ für alle $\omega \in \tilde{\Omega}$ H -wertig, \mathcal{F}_t -messbar und stetig in H bezüglich t ist. Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned} \|h(t)\|_H^2 &= \|h_0\|_H^2 + 2 \int_0^t \langle v^*(s), v(s) \rangle_V ds \\ &\quad + 2 \int_0^t (g(s), v(s))_H dW(s) + \int_0^t \|g(s)\|_H^2 ds. \end{aligned}$$

A.6 Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Itô-Gleichungen

Krylov und Rozovskij beweisen in [67] Existenzsätze für allgemeine Itô-Gleichungen.

Existenzsatz für endlichdimensionale Itô-Gleichungen

Gegeben seien ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , eine wachsende Familie von σ -Algebren $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ mit $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ und ein reellwertiger Wiener Prozess $(W(t))_{t \in [0, T]}$.

Die Abbildungen $a, b : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ sind für alle $x \in \mathbb{R}^d, d \geq 1$ messbar bezüglich \mathcal{F}_t und stetig in x für jedes $\omega \in \Omega, t \in [0, T]$.

Mit der \mathcal{F}_0 -messbaren, d -dimensionalen Anfangswertbedingung x_0 werden Itô-Gleichungen

$$x(t) = x_0 + \int_0^t a(s, x(s)) ds + \int_0^t b(s, x(s)) dW(s) \quad (\text{A.1})$$

in \mathbb{R}^d betrachtet.

Für die nachfolgenden Voraussetzungen existieren pfadweise eindeutige Lösungen der Gleichung (A.1).

(A1) Für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ ist $\int_0^T |a(t, x)| dt < \infty$ fast überall, P -f. s.

(A2) Es sei $R > 0$ eine beliebige Konstante. Dann erfüllen die Abbildungen a, b für jedes $t \in [0, T]$, P -f. s. und alle $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ mit $|x|, |y| \leq R$ die Eigenschaft der Monotonie

$$2(x - y)(a(t, x) - a(t, y)) + |b(t, x) - b(t, y)|^2 \leq K_1(x - y)^2$$

und der Koerzivität

$$2za(t, z) + |b(t, z)|^2 \leq K_2(1 + z^2),$$

wobei K_1, K_2 positive Konstanten sind.

Satz A.6.1 (Vgl. Krylov, Rozovskij [67], Satz 2.3.1)

Unter den Annahmen (A1) und (A2) gibt es einen stetigen, \mathcal{F}_t -messbaren Prozess $(x(t))_{t \in [0, T]}$, der die Gleichung (A.1) für alle $t \in [0, T]$ mit Wahrscheinlichkeit 1 erfüllt.

Sind $(x(t))_{t \in [0, T]}$ und $(y(t))_{t \in [0, T]}$ stetige, \mathcal{F}_t -messbare Prozesse, für die (A.1) für jedes t fast sicher gilt, dann ist

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - y(t)| > 0 \right\} = 0.$$

Bemerkung A.6.2 Gilt zusätzlich für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$ die Beschränktheit

$$|a(t, x)|^2 \leq K_3(1 + x^2)$$

mit einer Konstante $K_3 > 0$, so ergeben sich für die Lösung $x(t)$ und alle $t \in [0, T]$

$$E|x(t)|^2 < \infty \quad \text{und} \quad E \int_0^t |x(s)|^2 ds < \infty.$$

Existenzsatz für unendlichdimensionale Itô-Gleichungen

Es seien wiederum (Ω, \mathcal{F}, P) ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ eine wachsende Familie von σ -Algebren mit $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $(W(t))_{t \in [0, T]}$ ein reellwertiger Wiener Prozess und $V \subseteq H \subseteq V^*$ ein Evolutionstripel.

Die Operatoren $A : \Omega \times [0, T] \times V \rightarrow V^*$ und $B : \Omega \times [0, T] \times H \rightarrow H$ genügen folgenden Messbarkeitsbedingungen. Für alle $v \in V$ sind $A(\omega, t, v), B(\omega, t, v)$ messbar in $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$, \mathcal{F}_t -messbar für jedes $t \in [0, T]$ und alle $v \in V$.

Über dem Evolutionstripel wird die Itô-Gleichung

$$v(t) = u_0 + \int_0^t A(s, v(s)) ds + \int_0^t B(s, v(s)) dW(s) \tag{A.2}$$

untersucht, wobei die \mathcal{F}_0 -messbare Zufallsgröße u_0 Werte in H annimmt.

Des Weiteren gelten die Annahmen:

(A1[∞]) Die Abbildung $\lambda \mapsto \langle A(t, u + \lambda v), w \rangle_V$ ist stetig für alle $u, v, w \in V$, $\omega \in \Omega$, $t \in [0, T]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

(A2[∞]) Es gibt eine Konstante $K_1 > 0$, so dass die Monotonie mit

$$2\langle A(t, u) - A(t, v), u - v \rangle_V + \|B(t, u) - B(t, v)\|_H^2 \leq K_1 \|u - v\|_H^2$$

für alle $u, v \in V$ und $\omega \in \Omega, t \in [0, T]$ gilt.

(A3[∞]) Die Koerzivität

$$2\langle A(t, u), u \rangle_V + \|B(t, u)\|_H^2 + K_2 \|u\|_V^p \leq f + K_1 \|u\|_H^2$$

ist für alle $u \in V$, $\omega \in \Omega$ und $t \in [0, T]$ erfüllt mit einer Konstante $K_2 > 0$, $p \in (1, \infty)$ und einer nicht-negativen Funktion $f : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, die in (ω, t) messbar und \mathcal{F}_t -messbar für alle t ist.

(A4[∞]) Der Operator A ist wachstumsbeschränkt, d. h., es gilt für alle $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$ und $u \in V$

$$\|A(t, u)\|_{V^*}^2 \leq f^{\frac{1}{q}} + K_1 \|u\|_V^{p-1}$$

mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(A5[∞]) Es sind $E\|u_0\|_H^2 < \infty$ und $E \int_0^T f(t) dt < \infty$.

Definition A.6.3

(a) Eine auf $\Omega \times [0, T]$ definierte Funktion $v(\omega, t)$ mit Werten in V , die \mathcal{F}_t -messbar und messbar in (ω, t) ist, heißt Lösung bzw. V -Lösung der Gleichung (A.2), wenn

$$E \int_0^T (\|v(t)\|_V^p + \|v(t)\|_H^2) dt < \infty$$

und die Beziehung (A.2) als Gleichung in V^* für fast alle $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$ gelten.

(b) Eine auf $\Omega \times [0, T]$ definierte Funktion $u(\omega, t)$ mit Werten in H , die \mathcal{F}_t -messbar und stark stetig in H bezüglich t ist, heißt H -Lösung der Gleichung (A.2), wenn:

(i) Für fast alle $t \in [0, T]$ genügt der Prozess $(u(t))_{t \in [0, T]}$ P -f. s. $u(t) \in V$ und

$$E \int_0^T (\|u(t)\|_V^p + \|u(t)\|_H^2) dt < \infty.$$

(ii) Es gibt eine Menge $\Omega' \subset \Omega$ mit $P(\Omega') = 1$, so dass die Gleichung

$$u(t) = u_0 + \int_0^t A(s, u(s)) ds + \int_0^t B(s, u(s)) dW(s)$$

für jedes $\omega \in \Omega'$ und $t \in [0, T]$ erfüllt ist.

Liegt die Gleichheit $u(\omega, t) = v(\omega, t)$ für fast alle $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$ vor, so ist u als H -Lösung die stetige Modifikation einer Lösung v .

Satz A.6.4 (Vgl. Krylov, Rozovskij [67], Satz 2.2.1, Satz 2.2.3)

Unter den Voraussetzungen **(A1 $^\infty$)**-**(A5 $^\infty$)** besitzt die Gleichung (A.2) eine Lösung v und diese eine stetige Modifikation u .

Für die Lösung v und ihre stetige Modifikation $u \in H$ gilt

$$E \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_H^2 + E \int_0^T \|v(t)\|_V^p dt \leq c \left(E \|u_0\|_H^2 + E \int_0^T f(t) dt \right),$$

wobei die Konstante c von K_1, K_2, p und T abhängt.

Literaturverzeichnis

- [1] AHMED, N. U.: Nonlinear stochastic differential inclusions on Banach space. In: *Stochastic Anal. Appl.* 12 (1994), Nr. 1, S. 1-10
- [2] AHMED, N. U.: Existence of solutions of nonlinear stochastic differential inclusions on Banach space. In: LAKSHMIKANTHAM, V. (Hrsg.): *Proceedings of the first world congress (World congress of nonlinear analysts '92, Tampa, FL, USA, 19-26 August, 1992)*. Berlin : de Gruyter, 1996, S. 1699-1712
- [3] ALBERTY, J. ; CARSTENSEN, C.: Numerical analysis of time-depending primal elastoplasticity with hardening. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 37 (2000), Nr. 4, S. 1271-1294
- [4] ANTONELLI, P. L. ; KŘIVAN, V.: Fuzzy differential inclusions as substitutes for stochastic differential equations in population biology. In: *Open Syst. Inf. Dyn.* 1 (1992), Nr. 2, S. 217-232
- [5] ASSING, S. ; MANTHEY, R.: The behavior of solutions of stochastic differential inequalities. In: *Probab. Theory Relat. Fields* 103 (1995), Nr. 4, S. 493-514
- [6] AUBIN, J. P. ; CELLINA, A.: *Differential Inclusions : Set-valued Maps and Viability Theory*. Berlin : Springer, 1984 (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 264).
- [7] AUBIN, J. P. ; FRANKOWSKA, H.: *Set-Valued Analysis*. Boston : Birkhäuser, 1990 (Systems and Control : Foundations and Applications 2).
- [8] AUMANN, R. J.: Integrals of set-valued functions. In: *J. Math. Anal. Appl.* 12 (1965), S. 1-12
- [9] BAIER, R.: *Mengenwertige Integration und die diskrete Approximation erreichbarer Mengen*. Bayreuth : Universität Bayreuth, 1995 (Bayreuther Mathematische Schriften 50).
- [10] BALASUBRAMANIAM, P. ; NTOUYAS, S. K. ; VINAYAGAM, D.: Existence of solutions of nonlinear stochastic differential inclusions in a Hilbert space. In: *Commun. Appl. Nonlinear Anal.* 12 (2005), Nr. 2, S. 1-15

- [11] BARBU, V. ; DA PRATO, G.: *The stochastic obstacle problem for the harmonic oscillator with damping*. Pisa : Scuola Normale Superiore, 2005 (Scuola Normale Superiore Pisa, Preprint di Mathematica 9). - Preprint
- [12] BASTIEN, J. ; LAMARQUE, C. H. ; HOLLAND, M.: Study of a maximal monotone model with a delay term. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 41 (2003), Nr. 4, S. 1286-1300
- [13] BAUWE, A. ; GRECKSCH, W.: A parabolic stochastic differential inclusion. In: *Tagungsband zum Workshop „Stochastische Analysis“, 27.09.2004 - 29.09.2004*, Klingenthal
- [14] BENCHOHRA, M. ; NTOUYAS, S. K.: On second order differential inclusions with periodic boundary conditions. In: *Acta Math. Univ. Comen., New Ser.* 69 (2000), Nr. 2, S. 173-181
- [15] BENSOUSSAN, A. ; LIONS, J. L.: *Impulse Control and Quasivariational Inequalities*. Tonbridge : Trans-Inter-Scientia, 1984.
- [16] BENSOUSSAN, A. ; RASCANU, A.: Stochastic variational inequalities in infinite dimensional spaces. In: *Numer. Funct. Anal. Optimization* 18 (1997), Nr. 1-2, S. 19-54
- [17] BERNARDIN, F.: Multivalued stochastic differential equations : Convergence of a numerical scheme. In: *Set-Valued Anal.* 11 (2003), Nr. 4, S. 393-415
- [18] BOÇSAN, G.: On Wiener stochastic integral of a multifunction. In: *Seminarul de Teoria Probabilitatilor si Aplicatii* 82 (1987)
- [19] BRECKNER, H. I.: *Approximation and optimal control of the stochastic Navier-Stokes equation*. Halle : Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, 1999. - Dissertation
- [20] CALVO, N. ; DÍAZ, J. I. ; DURANY, J. ; SCHIAVI, E. ; VÁZQUEZ, C.: On a doubly nonlinear parabolic obstacle problem modelling ice sheet dynamics. In: *SIAM J. Appl. Math.* 63 (2002), Nr. 2, S. 683-707
- [21] CARDINALI, T. ; PAPAGEORGIOU, N. S.: Periodic problems and problems with discontinuities for nonlinear parabolic equations. In: *Czech. Math. J.* 50 (2000), Nr. 3, S. 467-497
- [22] CARL, S. ; GROSSMAN, CHR. ; PAO, C. V.: Existence and monotone iterations for parabolic differential inclusions. In: *Commun. Appl. Nonlinear Anal.* 3 (1996), Nr. 1, S. 1-24
- [23] CARL, S. ; HEIKKILÄ, S.: *Nonlinear Differential Equations in Ordered Spaces*. Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2000 (Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 111).

- [24] CARL, S. ; MOTREANU, D.: Extremal solutions of quasilinear parabolic sub-differential inclusions. In: *Differential and Integral Equations* 16 (2003), Nr. 2, S. 241-255
- [25] CASTAING, C. ; VALADIER, M.: *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*. Berlin : Springer, 1977 (Lecture Notes in Mathematics 580).
- [26] CÉPA, E. ; LÉPINGLE, D.: Diffusing particles with electrostatic repulsion. In: *Probab. Theory Relat. Fields*. 107 (1997), S. 429-449
- [27] CHIPOT, M.: *Elements of Nonlinear Analysis*. Basel : Birkhäuser, 2000 (Birkhäuser Advanced Texts).
- [28] DA PRATO, G. ; FRANKOWSKA, H.: A stochastic Filippov theorem. In: *Stochastic Anal. Appl.* 12 (1994), Nr. 4, S. 409-426
- [29] DA PRATO, G. ; ZABCZYK, J.: *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1992 (Encyclopedia of mathematics and its applications 45).
- [30] DEIMLING, K.: *Multivalued Differential Equations*. Berlin : Walter de Gruyter, 1992 (De Gruyter Studies in Nonlinear Analysis and Applications 1).
- [31] DEIMLING, K.: *Nonlinear Functional Analysis*. Berlin : Springer, 1985.
- [32] DEUTSCH, F.: *Best Approximation in Inner Product Spaces*. New York : Springer, 2001 (CMS books in mathematics 7).
- [33] DÍAZ, G. ; DÍAZ, J. I.: On a stochastic parabolic PDE arising in climatology. In: *RACSAM, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat.* 96 (2002), Nr. 1, S. 123-128
- [34] DÍAZ, J. I. ; SCHIAVI, E.: On a degenerate parabolic/hyperbolic system in glaciology giving rise to a free boundary. In: *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.* 38B (1999), Nr.5, S. 649-673
- [35] EVANS, L. C.: *Partial Differential Equations*. Providence : American Math. Soc., 2002 (Graduate studies in mathematics 19).
- [36] FERREYRA, G. ; SUNDAR, P.: Comparison of solutions of stochastic equations and applications. In: *Stochastic Anal. Appl.* 18 (2000), Nr. 2, S. 211-229
- [37] FIACCA, A. ; MATZAKOS, N. ; PAPAGEORGIOU, N. S. ; SERVADEI, R.: Nonlinear elliptic differential equations with multivalued nonlinearities. In: *Czech. Math. J.* 53 (2003), Nr. 1, S. 135-159
- [38] FILIPPOV, A. F.: *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1988 (Mathematics and its Application).

- [39] FRITSCH, H.: Existence of strong solutions of a stochastic differential inclusion : 1. The locally Lipschitz case. *Reports of the Institute of Optimization and Stochastics, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg*, 2000-08 (2000)
- [40] GAJEWSKI, H. ; GRÖGER, K. ; ZACHARIAS, K.: *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*. Berlin : Akademie-Verlag, 1974 (Mathematische Lehrbücher und Monographien : Abt. 2, Mathematische Monographien 38).
- [41] GEISS, C. ; MANTHEY, R.: Comparison theorems for stochastic differential equations in finite and infinite dimensions. In: *Stochastic Processes Appl.* 53 (1994), Nr. 1, S. 23-35
- [42] GLODDE, B. ; NIEPAGE, H. D.: *Einführung in die mengenwertige Analysis und die Theorie der Kontingentgleichungen*. Berlin : Sekt. Math. d. Humboldt-Univ., 1981 (Humboldt-Universität zu Berlin, Sektion Mathematik 41). - Seminarbericht
- [43] GÓRSKI, M.: On strong comparison theorems for multidimensional stochastic differential equations. In: *Bull. Pol. Acad. Sci., Math.* 47 (1999), Nr. 2, S. 183-189
- [44] GRECKSCH, W.: *Stochastische Evolutionsgleichungen und deren Steuerung*. Leipzig : BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1987 (Teubner-Texte zur Mathematik 98).
- [45] GRECKSCH, W. ; TUDOR, C.: *Stochastic Evolution Equations : A Hilbert Space Approach*. Berlin : Akademie-Verlag, 1995 (Mathematical Research 85).
- [46] GROSSMANN, CHR. ; ROOS, H. G.: *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Stuttgart : Teubner, 1992 (Teubner-Studienbücher : Mathematik).
- [47] HAJEK, B.: Mean stochastic comparison of diffusions. In: *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.* 68 (1985), S. 315-329
- [48] HAUSSMANN, U. G. ; PARDOUX, E.: Stochastic variational inequalities of parabolic type. In: *Appl. Math. Optimization* 20 (1989), Nr. 2, S. 163-192
- [49] HEIKKILÄ, S. ; LAKSHMIKANTHAM, V.: *Monotone Iterative Techniques for Discontinuous Nonlinear Differential Equations*. New York : Marcel Dekker Inc., 1994 (Pure and Applied Mathematics 181).
- [50] JUNG, E. J. ; KIM, J. H.: On set-valued stochastic integrals. In: *Stochastic Anal. Appl.* 21 (2003), Nr. 2, S. 401-418
- [51] HU, S. ; PAPAGEORGIOU, N. S.: *Handbook of Multivalued Analysis. I : Theory*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1997 (Mathematics and its Applications 419).
- [52] HU, S. ; PAPAGEORGIOU, N. S.: *Handbook of Multivalued Analysis. II : Applications*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2000 (Mathematics and its Applications 500).

- [53] HU, S. ; PAPAGEORGIOU, N. S.: Galerkin approximations for nonlinear evolution inclusions. In: *Commentat. Math. Univ. Carol.* 35 (1994), Nr. 4, S. 705-720
- [54] JAKUBOWSKI, A. ; KAMENSKII, M. I. ; RAYNAUD DE FITTE, P.: Existence of weak solutions to stochastic evolution inclusions.
<http://arxiv.org/abs/math.PR/0407512>, August 2004
- [55] KARATZAS, I.: A tutorial introduction to stochastic analysis and its applications.
<http://www.math.columbia.edu/~ik/tutor.pdf>, Mai 2007
- [56] KIM, B. K. ; KIM, J. H.: Stochastic integrals of set-valued processes and fuzzy processes. In: *J. Math. Anal. Appl.* 236 (1999), Nr. 2, S. 480-502
- [57] KISIELEWICZ, M.: *Differential Inclusions and Optimal Control*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1990 (Mathematics and its Applications, East European Series 44).
- [58] KISIELEWICZ, M.: Set-valued stochastic integrals and stochastic inclusions. In: *Disc. Mathematicae* 13 (1993), S. 119-126
- [59] KISIELEWICZ, M.: Properties of solution set of stochastic inclusions. In: *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* 6 (1993), Nr. 3, S. 217-235
- [60] KLOEDEN, P. E. ; PLATEN, E.: *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Berlin : Springer, 1992 (Applications of Mathematics 23).
- [61] KLUGE, R.: *Nichtlineare Variationsungleichungen und Extremalaufgaben : Theorie und Näherungsverfahren*. Berlin : Dt. Verl. der Wiss., 1979 (Mathematische Monographien 12).
- [62] KRAVETS, T. N.: On the problem of stochastic differential inclusions. In: *J. Sov. Math.* 53 (1991), Nr. 4, S. 398-403. - Übersetzung *Teor. Sluchajnykh Protsessov* 15 (1987), S. 54-59
- [63] KREE, P.: Diffusion equation for multivalued stochastic differential equations. In: *J. Funct. Anal.* 49 (1982), S. 73-90
- [64] KREINOVICH, V. ; LI, S. ; OGURA, Y.: *Limit Theorems and Applications of Set-Valued and Fuzzy Set-Valued Random Variables*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2002 (Theory and decision library, Series B, Mathematical and statistical methods 43).
- [65] KŘIVAN, V.: Differential inclusions as a methodology tool in population biology. In: SNOREK, M. (Hrsg.) ; SUJANSKY, M. (Hrsg.) ; VERBRAECK, A. (Hrsg.): *Modeling and simulation 1995 : Proceedings of the 9th European Simulation Multiconference*. San Diego : The Society for Computer Simulation, 1995, S. 544-547
- [66] KŘIVAN, V.: Individual behavior and population dynamics. In: CANDEV, M. (Hrsg.): *Lecture notes on biomathematics and bioinformatics '95*. Sofia : DATECS Publ., 1995, S. 17-31

- [67] KRYLOV, N. V. ; ROZOVSKIJ, B. L.: Stochastic evolution equations. In: *J. Sov. Math.* 16 (1981), S. 1233-1277
- [68] LAKSHMIKANTHAM, V. ; VATSALA, A. S.: *Generalized Quasilinearization for Nonlinear Problems*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1998 (Mathematics and its Applications 440).
- [69] MICHTA, M.: Optimal solutions to stochastic differential inclusions. In: *Appl. Math.* 29 (2002), Nr. 4, S. 387-398
- [70] MICHTA, M.: Stochastic inclusions with multivalued integrators. In: *Stochastic Anal. Appl.* 20 (2002), Nr. 4, S. 847-862
- [71] MICHTA, M. ; MOTYL, J.: High order stochastic inclusions and their applications. In: *Stochastic Anal. Appl.* 23 (2005), Nr. 2, S. 401-420
- [72] MICHTA, M. ; MOTYL, J.: Second order stochastic inclusion. In: *Stochastic Anal. Appl.* 22 (2004), Nr. 3, S. 701-720
- [73] MICHTA, M. ; RYBINSKI, L. E.: Selections of set-valued stochastic processes. In: *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* 11 (1998), Nr. 1, S. 73-78
- [74] MOTYL, J.: Note on strong solutions of stochastic inclusions. In: *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* 8 (1995), Nr. 3, S. 291-297
- [75] MOTYL, J.: Existence of solutions of set-valued Itô equation. In: *Bull. Pol. Acad. Sci., Math.* 46 (1998), Nr. 4, S. 419-430
- [76] NAUMANN, J.: *Einführung in die Theorie parabolischer Variationsungleichungen*. Leipzig : Teubner, 1984 (Teubner-Texte zur Mathematik 64).
- [77] ØKSENDAL, B.: *Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications*. 6. Aufl. Berlin : Springer, 2003 (Universitext).
- [78] PAO, C. V.: *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*. New York : Plenum Press, 1992.
- [79] PETERSSON, R.: Yosida approximations for multivalued stochastic differential equations. In: *Stochastics Stochastics Rep.* 52 (1995), Nr. 1-2, S. 107-120
- [80] PETERSSON, R.: Existence theorem and Wong-Zakai approximations for multivalued stochastic differential equations. In: *Probab. Math. Stat.* 17 (1997), Nr. 1, S. 29-45
- [81] RASCANU, A.: Deterministic and stochastic differential equations in Hilbert spaces involving multivalued maximal monotone operators. In: *Panam. Math. J.* 6 (1996), Nr. 3, S. 83-119
- [82] REVUZ, D. ; YOR, M.: *Continuous martingales and Brownian motion*. Berlin : Springer, 1991 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 293).

- [83] ROCKAFELLAR, R. T.: On the maximal monotonicity of subdifferential mappings. In: *Pac. J. Math.* 33 (1970), S. 209-216
- [84] ROCKAFELLAR, R. T. ; WETS, R. J. B.: *Variational Analysis*. Berlin : Springer, 1998 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 317).
- [85] SMIRNOV, G. V.: *Introduction to the Theory of Differential Inclusions*. Providence : American Mathematical Society, 2002 (Graduate Studies in Mathematics 41).
- [86] VOM SCHEIDT, J.: *Stochastic Equations of Mathematical Physics*. Berlin : Akademie-Verlag, 1990 (Mathematische Lehrbücher und Monographien : Abt. 2, Mathematische Monographien 76).
- [87] WALTER, W.: *Differential and Integral Inequalities*. Berlin : Springer, 1970 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 55).
- [88] WALTER, W.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen : Eine Einführung*. 5. Aufl. Berlin : Springer, 1993 (Springer-Lehrbuch).
- [89] YOSIDA, K.: *Functional Analysis*. Berlin : Springer, 1995 (Classics in Mathematics) - Reprint der 6. Auflage, 1980.
- [90] YOST, D.: There can be no Lipschitz version of Michael's selection theorem. In: *Proceedings of the Analysis Conference : Singapore 1986*, Amsterdam : North-Holland, 1988 (North-Holland Math. Stud. 150), S. 295-299
- [91] ZEIDLER, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. II/A : Linear Monotone Operators*. New York : Springer, 1990.
- [92] ZEIDLER, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. II/B : Nonlinear Monotone Operators*. New York : Springer, 1990.
- [93] ZEIDLER, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. III : Variational Methods and Optimization*. New York : Springer, 1985.
- [94] ZEIDLER, E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. IV : Applications to Mathematical Physics*. New York : Springer, 1988.
- [95] ZEIDLER, E.: *Applied Functional Analysis. I : Applications to Mathematical Physics*. New York : Springer, 1995 (Applied Mathematical Sciences 108).

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Anne Bauwe
Geburtsdatum: 28. Februar 1978
Geburtsort: Oschatz

Schulbildung

09/1984 – 07/1991 Bertolt-Brecht-Oberschule in Halle
09/1991 – 06/1996 Frieden-Gymnasium in Halle,
Abschluss: Abitur

Studium

10/1996 – 12/2002 Studium der Wirtschaftsmathematik
an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg,
Abschluss: Diplom-Wirtschaftsmathematikerin
2003 Förderpreis 2003 der Gothaer Lebensversicherung a. G.
seit 04/2003 Promotionsstudium am Institut für Optimierung
und Stochastik an der Martin-Luther-Universität
Halle-Wittenberg
04/2003 – 02/2006 Graduiertenstipendium des Landes Sachsen-Anhalt
09/2006 Mitarbeiterin am Institut für Optimierung
und Stochastik an der Martin-Luther-Universität
Halle-Wittenberg

Halle (Saale), 18. Juni 2007

Anne Bauwe

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst habe, dass ich keine anderen als die genannten Quellen benutzt habe und dass ich die den benutzten Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Halle (Saale), 18. Juni 2007

Anne Bauwe