

**Bestimmung des Widerstandes, Auftriebs und Drehmoments und
Simulation der Bewegung nichtsphärischer Partikel in laminaren und
turbulenten Strömungen mit dem Lattice-Boltzmann-Verfahren**

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

vorgelegt der
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
– Zentrum für Ingenieurwissenschaften –
der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

von
Herrn Andreas Hölzer
geboren am 08.01.1978 in Halle (Saale)

Halle (Saale), 1. Mai 2007

Gutachter:

Prof. Dr.-Ing. M. Sommerfeld

Prof. Dr. rer. nat. D. Bothe

Tag der Verteidigung: 3. Dezember 2007

urn:nbn:de:gbv:3-000012939

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=nbn%3Ade%3Agbv%3A3-000012939>]

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in der Zeit von November 2002 bis November 2006 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Mechanische Verfahrenstechnik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. M. Sommerfeld für die Möglichkeit der Durchführung dieser Arbeit an seinem Lehrstuhl und die großzügige wissenschaftliche Betreuung. Ich möchte mich bei Herrn Prof. D. Bothe für das gezeigte Interesse sowie die freundliche Übernahme des Koreferats herzlich bedanken.

Ich danke meinen Eltern, die mir meine bisherige Laufbahn erst ermöglicht und mich stets in jeder Hinsicht unterstützt haben.

Ich möchte mich bei meinen Freunden bedanken, die mir auch in schwierigen Zeiten zur Seite standen und mir in meinem Leben außerhalb der Universität Kraft und Rückhalt gegeben haben.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis.....	i
Symbolverzeichnis	iii
1 Einleitung	1
2 Numerische Methode	5
2.1 Erhaltungssätze der Fluidodynamik	5
2.2 Lattice-Boltzmann-Verfahren	6
2.2.1 Lattice-Boltzmann-Gleichung.....	6
2.2.2 Randbedingungen.....	10
2.3 Partikelberechnung.....	13
2.4 Konvergenzverhalten	16
2.5 Einfluss der Auflösung.....	18
2.6 Wandeinfluss.....	18
3 Widerstandskraft, Auftriebskraft und Drehmoment eines Einzelpartikels	23
3.1 Dimensionslose Kennzahlen	23
3.2 Historischer Abriss.....	25
3.3 Kugelumströmung.....	36
3.4 Widerstandskraft, Auftriebskraft und Drehmoment eines feststehenden Partikels in einer gleichförmigen Strömung.....	42
3.5 Widerstandskraft, Auftriebskraft und Drehmoment eines rotierenden Partikels in einer gleichförmigen Strömung.....	51
3.6 Widerstandskraft, Auftriebskraft und Drehmoment eines feststehenden Partikels in einer linearen Scherströmung.....	57
4 Korrelationsformel für den Widerstandsbeiwert.....	66
5 Wechselwirkung zwischen zwei Kugeln.....	76
5.1 Strömungskonfiguration.....	76
5.2 Literaturstudie	76
5.3 Ergebnisse	80
6 Einfluss von Turbulenz auf die Partikelbewegung	92
6.1 Numerische Turbulenzgenerierung.....	92
6.2 Einfluss der Turbulenz auf die Partikelbeiwerte.....	96
6.3 Einfluss der Turbulenz auf die Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit eines Partikels.....	100

7	Zusammenfassung	107
8	Summary	112
	Literaturverzeichnis.....	117

Symbolverzeichnis

Lateinische Symbole

$\underline{a}_k, \underline{b}_k$	Fourier-Koeffizienten	[N]
A_O	Oberflächeninhalt	[m ²]
$A_{O,Kugel}$	Oberflächeninhalt der volumenäquivalenten Kugel	[m ²]
A_{\perp}	Angeströmte Querschnittsfläche	[m ²]
$A_{\perp,Kugel}$	Querschnittsfläche der volumenäquivalenten Kugel	[m ²]
$A_{ }$	Mittlere Längsschnittfläche	[m ²]
$A_{ ,Kugel}$	Längsschnittfläche der volumenäquivalenten Kugel	[m ²]
c	Gitterkonstante	[m/s]
c_s	Schallgeschwindigkeit	[m/s]
c_A	Auftriebsbeiwert	[-]
c_M	Drehmomentenbeiwert	[-]
c_W	Widerstandsbeiwert	[-]
$c_{W Einzel}$	Widerstandsbeiwert der Einzelkugel	[-]
c_{WW}	Wechselwirkungsbeiwert	[-]
c/a	Achsenverhältnis	[-]
d	Kugel-, Scheiben- oder Zylinderdurchmesser	[m]
d_0	Partikelabstand	[m]
d_{A_O}	Durchmesser der Kugel mit gleichem Oberflächeninhalt	[m]
$d_{A_{\perp}}$	Durchmesser der Kugel mit gleich großer angeströmter Querschnittsfläche	[m]
$d_{A_{ }}$	Durchmesser der Kugel mit gleich großer Längsschnittfläche	[m]
d_V	Durchmesser der volumenäquivalenten Kugel	[m]
D_{trans}	Partikeltranslationsdispersionskoeffizient	[m ² /s]
D_{rot}	Partikelrotationsdispersionskoeffizient	[rad ² /s]
e	Mittlere kinetische Energie des Fluids	[J]
e_{turb}	Turbulente kinetische Energie des Fluids	[m ² /s ²]

\underline{f}	Volumenkraft	[N]
f	Verteilungsfunktion	[kg s ³ /m ⁶]
$f^{(0)}$	Gleichgewichtsverteilungsfunktion	[kg s ³ /m ⁶]
f_{σ_i}	Diskrete Verteilungsfunktion	[kg/m ³]
$f_{\sigma_i}^{(0)}$	Diskrete Gleichgewichtsverteilungsfunktion	[kg/m ³]
\underline{F}	Partikelkraft	[N]
F_A	Dynamische Auftriebskraft	[N]
F_W	Widerstandskraft	[N]
F_{WW}	Wechselwirkungskraft	[N]
$\underline{F}_{\sigma_i'}$	Diskrete Partikelkraft	[N]
h	Abstand zwischen der Seitenwand und der nächsten Partikeloberfläche	[m]
h_{ges}	Rechengebietshöhe	[m]
J_{aa}, J_{bb}, J_{cc}	Partikelhauptträgheitsmomente	[kg m ²]
k	Boltzmann-Konstante	[J/K]
k_i	Wellenzahl	[-]
K_{New}	Newtonscher Formfaktor	[-]
K_{St}	Stokesscher Formfaktor	[-]
Kn	Knudsen-Zahl	[-]
l	Minimale Partikelabmessung	[m]
L	Zylinderlänge	[m]
L_{Kr}	Periodenlänge	[m]
m	Fluidmasse	[kg]
m_{pa}	Partikelmasse	[kg]
m_T	Teilchenmasse	[kg]
\underline{M}	Partikeldrehmoment	[N m]
M_a, M_b, M_c	Partikeldrehmoment in den Hauptachsen	[N m]
$\underline{M}_{\sigma_i'}$	Diskretes Partikeldrehmoment	[N m]
Ma	Mach-Zahl	[-]
p	Druck	[Pa]

$\underline{p}_{\sigma i}$	Diskrete Impulsänderung	[kg/(m ² s)]
$q_{\sigma i}$	Parameter der Partikelrandbedingung	[-]
\underline{R}	Drehtensor	[-]
$R_i(\Delta t)$	Zeitliche Autokorrelationsfunktion	[m ² /s ²]
$R_{ij}(\Delta x_j)$	Räumliche Autokorrelationsfunktion	[m ² /s ²]
Re	Partikel-Reynolds-Zahl	[-]
Re_T	Taylor-Reynolds-Zahl	[-]
S_{Fl}	Fluiddrallzahl	[-]
S_{Pa}	Partikeldrallzahl	[-]
t	Zeit	[s]
t_+	Zeitpunkt nach der Teilchenkollision	[s]
T	Temperatur	[K]
Tu	Turbulenzgrad	[-]
\underline{u}	Fluidgeschwindigkeit	[m/s]
$\bar{\underline{u}}$	Zeitlich gemittelte Fluidgeschwindigkeit	[m/s]
\underline{u}'	Fluidschwankungsgeschwindigkeit	[m/s]
\underline{u}_{Ein}	Fluideintrittsgeschwindigkeit	[m/s]
\underline{u}_{Pa}	Partikelmittelpunktschwindigkeit	[m/s]
$\underline{u}_{Pa,\infty}$	Stationäre Partikelsinkgeschwindigkeit	[m/s]
\underline{u}_{Um}	Partikelumfanggeschwindigkeit	[m/s]
\underline{u}_{Wand}	Wandgeschwindigkeit	[m/s]
V_{Pa}	Partikelvolumen	[m ³]
\underline{x}	Ort	[m]
\underline{x}_{Pa}	Ort des Partikelmittelpunktes	[m]

Griechische Symbole

α	Partikelanströmwinkel	[°]
δ	Lagewinkel zweier Partikel	[°]
Δt	Zeitschrittweite	[s]
ΔV	Zellvolumen	[m ³]
Δx	Gitterweite	[m]

$\underline{\Delta x}_{\sigma i}$	Raumschrittweite	[m]
ε	Dissipationsrate	[m ² /s ³]
η	Dynamische Viskosität	[Pa s]
λ_{Int}	Integrales Längenmaß	[m]
λ_K	Kolmogorov-Längenmaß	[m]
λ_T	Taylor-Längenmaß	[m]
ν	Kinematische Viskosität	[m ² /s]
$\underline{\xi}$	Teilchengeschwindigkeit	[m/s]
$\underline{\xi}_{\sigma i}$	Diskrete Teilchengeschwindigkeit	[m/s]
ρ	Fluiddichte	[kg/m ³]
ρ_{Pa}	Partikeldichte	[kg/m ³]
$\underline{\sigma}_{Pa}$	Partikeldrehwinkel	[rad]
τ	Relaxationszeit	[s]
$\underline{\underline{\tau}}$	Spannungstensor	[Pa]
τ_{Int}	Integrales Zeitmaß	[s]
τ_K	Kolmogorov-Zeitmaß	[s]
τ_T	Taylor-Zeitmaß	[s]
τ_u	Partikelgeschwindigkeitszeitmaß	[s]
τ_ω	Partikelwinkelgeschwindigkeitszeitmaß	[s]
Φ	Sphärizität	[-]
Φ_\perp	Quersphärizität	[-]
$\Phi_{ }$	Längssphärizität	[-]
$\omega_a, \omega_b, \omega_c$	Partikelwinkelgeschwindigkeit in den Hauptachsen	[rad/s]
ω_{Kr}	Kreisfrequenz	[1/m]
$\underline{\omega}_{Fl}$	Fluidwinkelgeschwindigkeit	[rad/s]
$\underline{\omega}_{Pa}$	Partikelwinkelgeschwindigkeit	[rad/s]
ω_σ	Parameter der diskreten Gleichgewichtsverteilungsfunktion	[-]

1 Einleitung

Numerische Simulationen werden in der Industrie und Forschung standardmäßig angewandt, um technische Prozesse auszulegen und zu optimieren sowie um natürliche Vorgänge zu verstehen. Darunter befinden sich viele Prozesse, bei denen sich Partikel bewegen. Als Beispiele seien die Verbrennung von Kohlenstaub, die Bewegung von Papierfasern bei der Papierherstellung, die pneumatische Förderung von Feststoffen, Wirbelschichten, chemische Reaktoren mit Feststoffkatalysatoren, Gaszyklone, Sandstürme, die Ausbreitung von Schmutzpartikeln in der Atmosphäre und der Transport von Sedimenten in Flüssen genannt.

Für die numerische Simulation der Partikelbewegung ist das Wissen über die Partikelbeiwerte, d.h. den Widerstandsbeiwert, den dynamischen Auftriebsbeiwert und den Drehmomentenbeiwert der Partikel, nötig. Der Widerstandsbeiwert ist im Allgemeinen jedoch nur für nicht rotierende sphärische Einzelpartikel in einer gleichförmigen Strömung und der dynamische Auftriebsbeiwert und der Drehmomentenbeiwert für rotierende sphärische Einzelpartikel in einer gleichförmigen Strömung und für nicht rotierende sphärische Einzelpartikel in einer linearen Scherströmung bei kleinen Reynolds-Zahlen bekannt. Für nichtsphärische Partikel existieren gemittelte Korrelationen für den Widerstandsbeiwert bei bestimmten Orientierungen [62,72]. In der Praxis sind die Partikel jedoch nicht unter solchen idealen Bedingungen und die Partikelbeiwerte werden u.a. durch Scherströmungen und Partikelrotation bei großen Reynolds-Zahlen, durch die Partikelform und für nichtsphärische Partikel durch die Partikelorientierung beeinflusst. In dieser Arbeit wird der Einfluss der Reynolds-Zahl, der Partikelorientierung, der Partikelrotation, einer Scherströmung und der Partikel-Partikel-Wechselwirkung auf die Partikelbeiwerte untersucht.

Nach den einleitenden Worten dieses Kapitels wird in Kapitel 2 die innerhalb dieser Arbeit benutzte numerische Lattice-Boltzmann-Methode vorgestellt. Kapitel 3 dieser Arbeit ist nach dem Wissen des Autors die erste umfassende Studie der auf nichtsphärische Partikel verschiedener Formen wirkenden Widerstandskraft, dynamischen Auftriebskraft und des Drehmoments als Funktion des Anströmwinkels und der Reynolds-Zahl. Zur Bestimmung der Partikelbeiwerte werden mit dem Lattice-Boltzmann-Verfahren dreidimensionale numerische Simulationen der Strömung um diese Partikel durchgeführt. Nach einer umfassenden Literaturrecherche in Kapitel 3.2 wird in Kapitel 3.3 zu Validierungszwecken die Kugelumströmung in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl untersucht. Im ersten untersuchten Fall zu

nicht-sphärischen Partikeln in Kapitel 3.4 wird ein feststehendes Partikel gleichförmig angeströmt, im zweiten Fall (Kapitel 3.5) rotiert das Partikel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in einer gleichförmiger Strömung und im dritten Fall (Kapitel 3.6) wird das Partikel in einer linearen Scherströmung festgehalten. Im ersten Fall ergeben sich der sogenannte Standard-Widerstandsbeiwert, der Profilauftrieb und das Profildrehmoment, im zweiten Fall u.a. die sogenannte Magnus-Auftriebskraft und im dritten Fall u.a. die sogenannte Saffman-Auftriebskraft. Im ersten Fall werden als Partikelformen die Kugel, der Würfel, das Sphäroid mit dem Achsenverhältnis zwischen der langen Achse und den beiden kurzen von $c/a = 1,5$, der Quader mit $c/a = 1,5$ und zwei Zylinder mit $c/a = 1$ bzw. $1,5$ betrachtet. Im zweiten und dritten Fall werden als Körperformen die Kugel und das Sphäroid berücksichtigt und vier verschiedene Partikeldrehzahlen bzw. zwei verschiedene Fluidschergeschwindigkeiten simuliert. In allen Fällen betragen die untersuchten Partikel-Reynolds-Zahlen 0,3, 30, 90 und 240. In Kapitel 4 wird aus den Ergebnissen von Kapitel 3 und aus Literaturdaten eine neue Korrelationsformel für den Widerstandsbeiwert nicht-sphärischer Partikel im unterkritischen Bereich aufgestellt, die die Partikelorientierung über den gesamten Reynolds-Zahlen-Bereich berücksichtigt.

Weitere Faktoren, die die Partikelumströmung und damit die Partikelbeiwerte beeinflussen, sind die Partikel-Partikel-Wechselwirkung und die Turbulenz der Strömung. Um den Einfluss der Partikel-Partikel-Wechselwirkung zu bestimmen, wird in Kapitel 5 die Strömung um zwei gleich große feststehende Kugeln in einer gleichförmigen Strömung bei Partikel-Reynolds-Zahlen von 1, 50, 100 und 200 simuliert und der Widerstandsbeiwert, der dynamische Auftriebsbeiwert, der Drehmomentenbeiwert und zusätzlich der zwischen den Partikelmittelpunkten wirkende Wechselwirkungsbeiwert der zwei Kugeln berechnet. Diese Simulationen erfolgen über den gesamten Umfang möglicher Positionen zwischen den Kugeln und bei Abständen zwischen den Kugelmittelpunkten von 1,5, 3, 4,5 und 6 mal dem Kugeldurchmesser. In Kapitel 6 wird schließlich der Einfluss der Turbulenz auf die Bewegung von Zylindern mit Achsenverhältnissen von 1, 2, 3 und 4 in Abhängigkeit der Stokes-Zahl analysiert.

Neben den erwähnten Parametern, die innerhalb dieser Arbeit betrachtet werden, beeinflussen auch die Mach-Zahl, d.h. die Kompressibilität des Fluids, die Knudsen-Zahl, d.h. das Verhältnis zwischen der mittlerer freien Weglänge der Moleküle und der Partikelgröße, und

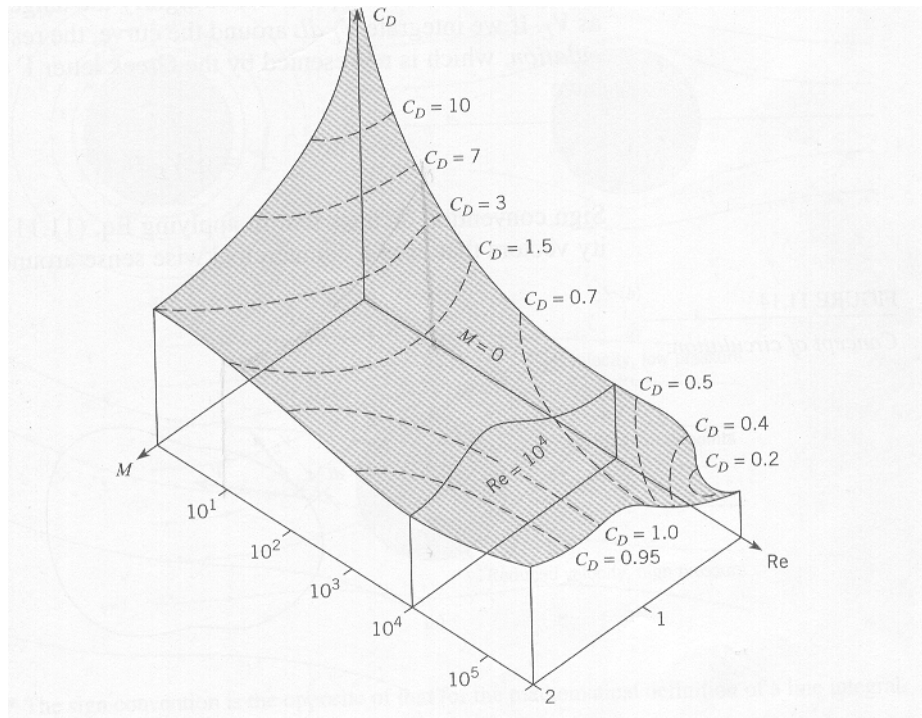


Abbildung 1.1 Widerstandsbeiwert einer Kugel als Funktion der Partikel-Reynolds-Zahl und der Mach-Zahl. Abbildung aus Crowe et al. [37].

Nicht-Newtonsche Eigenschaften des Fluids die Partikelbeiwerte. Innerhalb dieser Arbeit wird der Fall kleiner Mach-Zahlen, kleiner Knudsen-Zahlen und Newtonscher Fluide betrachtet.

Der Einfluss der Mach-Zahl auf den Widerstandsbeiwert der Kugel wurde umfassend von Crowe et al. [37] und Bailey und Hiatt [12] beschrieben. In Abbildung 1.1 ist das Diagramm 11.13 aus Crowe et al.'s Buch [37] dargestellt, das die Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes der Kugel von der Partikel-Reynolds-Zahl und der Mach-Zahl zeigt. Bei kleinen Reynolds-Zahlen nimmt der Widerstandsbeiwert mit steigender Mach-Zahl ab, wohingegen bei großen Reynolds-Zahlen das Gegenteil beobachtet werden kann.

Um den Einfluss der Knudsen-Zahl auf den Widerstandsbeiwert zu bestimmen, wertete Davies [39] mehrere experimentelle Arbeiten zum Widerstandsbeiwert von Kugeln im Stokes-Bereich aus. Er ermittelte, dass der Widerstandsbeiwert um den Faktor $1 + Kn(2,514 + 0,8 \exp(-0,55 / Kn))$, der auch als Cunningham-Korrektur bezeichnet wird, erniedrigt wird.

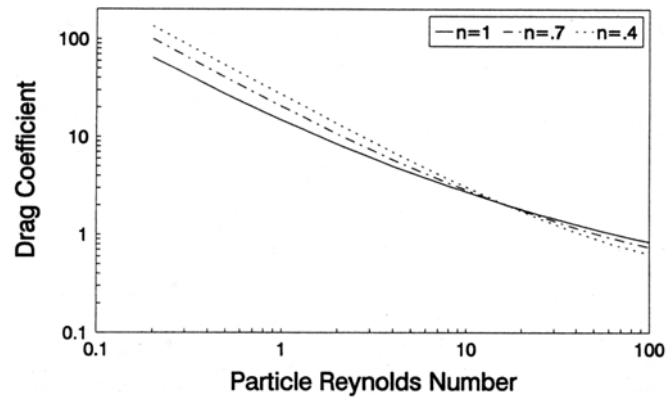


Abbildung 1.2 Widerstandsbeiwert einer Kugel als Funktion der modifizierten Partikel-Reynolds-Zahl Nicht-Newtonscher Fluide. Abbildung aus Graham und Jones [70].

Den Einfluss Nicht-Newtonscher Eigenschaften auf den Widerstandsbeiwert der Kugel studierten z.B. Briscoe et al. [22] experimentell und Graham und Jones [70] und Tripathi et al. [191] numerisch. Sie kamen zu dem Ergebnis, dass der Verlauf des Widerstandsbeiwertes der Kugel über der modifizierten Partikel-Reynolds-Zahl Nicht-Newtonscher Fluide bei kleinen Reynolds-Zahlen über dem und ab einer Partikel-Reynolds-Zahl von etwa 10 unter dem Verlauf Newtonscher Fluide liegt, wie in dem in Abbildung 1.2 dargestellten Diagramm von Graham und Jones [70] zu sehen.

2 Numerische Methode

2.1 Erhaltungssätze der Fluidodynamik

Die Fluidodynamik befasst sich mit der Beschreibung des makroskopischen Verhaltens von Strömungen in Fluiden, das durch die makroskopischen Größen der Dichte, des Druckes und der Geschwindigkeit charakterisiert wird. Mathematisch wird dieses Verhalten üblicherweise durch die auf der makroskopischen Ebene formulierten Erhaltungssätze von Masse und Impuls beschrieben. Die Gleichung für die Massenerhaltung, die auch als Kontinuitätsgleichung bezeichnet wird, lautet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u}) = 0 . \quad (2.1)$$

Die Impulserhaltungsgleichung oder Navier-Stokes-Gleichung kann ohne äußere Kräfte und unter Vernachlässigung der Volumenviskosität wie folgt geschrieben werden

$$\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u} \underline{u} + p \underline{I}) = \underline{\nabla} \cdot \underline{\tau} , \quad (2.2)$$

worin für den Spannungstensor

$$\underline{\tau} = \eta \left(\underline{\nabla} \underline{u} + (\underline{\nabla} \underline{u})^T - \frac{2}{3} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \underline{I} \right) \quad (2.3)$$

gilt und der Proportionalitätsfaktor η dynamische Viskosität heißt. Dieses Gleichungssystem besteht aus vier Gleichungen und fünf Unbekannten. Die zur Lösung des Gleichungssystems benötigte fünfte Gleichung ist die thermische Zustandsgleichung, die den Zusammenhang zwischen Druck und Dichte beschreibt. Die thermische Zustandsgleichung des idealen Gases lautet

$$p = c_s^2 \rho , \quad (2.4)$$

worin c_s die isotherme Schallgeschwindigkeit

$$c_s = \sqrt{\frac{kT}{m_T}} \quad (2.5)$$

ist.

2.2 Lattice-Boltzmann-Verfahren

2.2.1 Lattice-Boltzmann-Gleichung

Einen alternativen Ansatz zu der numerischen Lösung der auf der makroskopischen Ebene formulierten Erhaltungsgleichungen (2.1) und (2.2) stellt das Lattice-Boltzmann-Verfahren dar, das das Verhalten von Fluiden auf molekularer Ebene beschreibt. Die Lattice-Boltzmann-Gleichung ist eine spezielle finite Differenzenform der Boltzmann-Gleichung [76], wobei neben Ort und Zeit auch der Geschwindigkeitsraum diskretisiert wird. Vorteile des Lattice-Boltzmann-Verfahrens sind seine numerische Effizienz durch seine Einfachheit und den lokalen Charakter der Modellgleichungen und die direkte Berechnung der auf Wände, Hindernisse oder Partikel wirkenden Kräfte durch die Impulsänderung der Fluidteilchen bei Stößen auf eine feste Oberfläche.

Die Anwendbarkeit des Lattice-Boltzmann-Verfahrens für die Simulation von Suspensionen wurde z.B. von Ladd [98], Aidun et al. [3] und Qi [151] demonstriert. Sie simulierten die Durchströmung von Kugelpackungen [98], die Sedimentation von Partikeln [3,151] und die Rotation von Partikeln in Scherströmungen [3] und erhielten eine sehr gute Übereinstimmung mit Ergebnissen anderer numerischer Methoden, mit analytischen Ergebnissen und mit experimentellen Werten.

Die grundlegende Größe in der Boltzmann-Statistik ist die Verteilungsfunktion $f(\underline{x}, \underline{\xi}, t)$. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, ein Fluidteilchen am Ort \underline{x} mit der Geschwindigkeit $\underline{\xi}$ zu der Zeit t anzutreffen. Sie ist durch die Beziehung

$$m = \int_{\xi_i} \int_{x_i} f(\underline{x}, \underline{\xi}, t) d^3 x_i d^3 \xi_i \quad (2.6)$$

definiert, d.h. ihr Integral über ein Volumenelement $d^3 x_i$ und ein Geschwindigkeitselement $d^3 \xi_i$ ist die Masse der Fluidteilchen, die sich zur Zeit t im Volumenelement $d^3 x_i$ und im Geschwindigkeitselement $d^3 \xi_i$ befindet. Aus Gleichung (2.6) folgen die Momentengleichungen zur Bestimmung der Dichte, des Impulses und der mittleren kinetischen Energie des Fluids

$$\rho = \int_{\xi_i=-\infty}^{\infty} f(\underline{x}, \underline{\xi}, t) d^3 \xi_i, \quad (2.7)$$

$$\rho \underline{u} = \int_{\underline{\xi}_i = -\infty}^{\infty} \underline{\xi} f(\underline{x}, \underline{\xi}, t) d^3 \underline{\xi}_i \quad (2.8)$$

und

$$\rho e = \frac{m_T}{2} \int_{\underline{\xi}_i = -\infty}^{\infty} (\underline{\xi} - \underline{u})^2 f(\underline{x}, \underline{\xi}, t) d^3 \underline{\xi}_i . \quad (2.9)$$

Die zeitliche Entwicklung der Verteilungsfunktion wird durch die Boltzmann-Gleichung beschrieben. Die Boltzmann-Gleichung mit Einzelzeitrelaxation zur sogenannten Gleichgewichtsverteilung, auch BGK-Näherung [17] genannt, lautet

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{\xi} \cdot \underline{\nabla} \right) f(\underline{x}, \underline{\xi}, t) = -\frac{1}{\tau} \left(f(\underline{x}, \underline{\xi}, t) - f^{(0)}(\underline{x}, \underline{\xi}, t) \right), \quad (2.10)$$

in der τ die sogenannte Relaxationszeit ist. Für die Gleichgewichtsverteilung gilt

$$f^{(0)}(\underline{x}, \underline{\xi}, t) = \frac{\rho}{(2\pi c_s^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(\underline{\xi} - \underline{u})^2}{2c_s^2}} . \quad (2.11)$$

Die Gleichgewichtsverteilung erfüllt sowohl die thermische Zustandsgleichung des idealen Gases (2.4) als auch die sogenannte kalorische Zustandsgleichung des idealen Gases

$$e = \frac{3}{2} kT \quad (2.12)$$

zwischen der mittleren kinetischen Energie des Fluids und der Fluidtemperatur. Mit der Chapman-Enskog-Analyse kann gezeigt werden, dass mit folgender Beziehung für die Viskosität

$$\eta = \tau p = \tau c_s^2 \rho \quad (2.13)$$

die Boltzmann-Gleichung mit BGK-Näherung auf makroskopischer Ebene die Kontinuitätsgleichung (2.1) und die Navier-Stokes-Gleichung (2.2) erfüllt [80].

Durch die Diskretisierung der Teilchengeschwindigkeit in einen diskreten Satz von Geschwindigkeiten $\underline{\xi}_{\sigma i}$ entsteht aus der Boltzmann-Gleichung die diskrete Boltzmann-Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \underline{\xi}_{\sigma i} \cdot \underline{\nabla} \right) f_{\sigma i}(\underline{x}, t) = -\frac{1}{\tau} \left(f_{\sigma i}(\underline{x}, t) - f_{\sigma i}^{(0)}(\underline{x}, t) \right), \quad (2.14)$$

wobei σi die Richtung der diskreten Geschwindigkeiten bezeichnet. Durch die Diskretisierung der diskreten Boltzmann-Gleichung (2.14) in Raum und Zeit mittels finiter

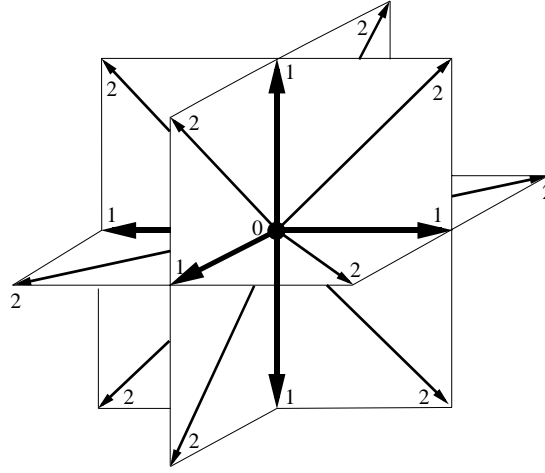


Abbildung 2.1 Diskrete Geschwindigkeitsvektoren im D3Q19 Modell.

Differenzen erhält man die Lattice-Boltzmann-Gleichung [28,152]

$$\boxed{f_{\alpha i}(\underline{x} + \underline{\xi}_{\alpha i} \Delta t, t + \Delta t) - f_{\alpha i}(\underline{x}, t) = -\frac{\Delta t}{\tau} \left(f_{\alpha i}(\underline{x}, t) - f_{\alpha i}^{(0)}(\underline{x}, t) \right)}, \quad (2.15)$$

wobei $\underline{\xi}_{\alpha i} \Delta t$ der Raumschrittweite $\Delta x_{\alpha i}$ entspricht. Diese Gleichung kann in zwei Teilschritte, nämlich in den Relaxations- oder Kollisionsschritt

$$f_{\alpha i}(\underline{x}, t_+) = f_{\alpha i}(\underline{x}, t) - \frac{\Delta t}{\tau} \left(f_{\alpha i}(\underline{x}, t) - f_{\alpha i}^{(0)}(\underline{x}, t) \right) \quad (2.16)$$

und in den Propagationsschritt

$$f_{\alpha i}(\underline{x} + \underline{\xi}_{\alpha i} \Delta t, t + \Delta t) = f_{\alpha i}(\underline{x}, t_+) \quad (2.17)$$

aufgeteilt werden.

Es gibt je nach Gitterform und Anzahl der Geschwindigkeitsvektoren verschiedene Möglichkeiten, die Teilchengeschwindigkeiten zu diskretisieren. Innerhalb dieser Arbeit wird das dreidimensionale D3Q19-Modell [152] verwendet, in dem die Raumgitter eine kubische Form mit der Gitterweite Δx besitzen und neunzehn diskrete Geschwindigkeiten existieren. Diese diskreten Geschwindigkeitsvektoren teilen sich in einen Vektor für ruhende Teilchen ($\sigma = 0$), in sechs waagerechte oder senkrechte Vektoren ($\sigma = 1$) und in zwölf diagonale Vektoren ($\sigma = 2$) auf. Sie sind in Abbildung 2.1 dargestellt und lauten wie folgt

$$\underline{\xi}_{\alpha i} = \begin{cases} (0,0,0), & \sigma = 0, \quad i = 1 \\ (\pm 1,0,0)c, (0,\pm 1,0)c, (0,0,\pm 1)c, & \sigma = 1, \quad i = 1 \dots 6 \\ (\pm 1,\pm 1,0)c, (\pm 1,0,\pm 1)c, (0,\pm 1,\pm 1)c, & \sigma = 2, \quad i = 1 \dots 12 \end{cases}, \quad (2.18)$$

wo c Gitterkonstante heißt, die gleich dem Verhältnis der Gitterweite zur Zeitschrittweite

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.19)$$

ist. Daraus folgt, dass die Verteilungsfunktionen in allen Richtungen in einem Zeitschritt um genau eine Zelle propagiert werden. Die Raumpunkte, die Informationsträger der Verteilungsfunktion sind, werden, wie in Abbildung 2.2 dargestellt, als Mittelpunkte der Zellen betrachtet und werden Knoten genannt.

Im D3Q19-Modell lautet die diskrete Gleichgewichtsverteilung

$$f_{\alpha}^{(0)}(\underline{x}, t) = \omega_{\sigma} \rho \left(1 + \frac{3 \underline{\xi}_{\alpha} \cdot \underline{u}}{c^2} + \frac{9 (\underline{\xi}_{\alpha} \cdot \underline{u})^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right)$$

$$\omega_{\sigma} = \begin{cases} 1/3, & \sigma = 0, & i = 1 \\ 1/18, & \sigma = 1, & i = 1 \dots 6 \\ 1/36, & \sigma = 2, & i = 1 \dots 12 \end{cases}, \quad (2.20)$$

worin

$$c = \sqrt{3}c_s \quad (2.21)$$

gilt. Mit (2.21) kann für die thermische Zustandsgleichung (2.4)

$$p = \frac{1}{3} \rho c^2 \quad (2.22)$$

geschrieben werden

Die diskreten Formen der Momentengleichungen (2.7) und (2.8) lauten

$$\rho = \sum_{\sigma} \sum_i f_{\alpha}(\underline{x}, t) \quad (2.23)$$

und

$$\rho \underline{u} = \sum_{\sigma} \sum_i \underline{\xi}_{\alpha} f_{\alpha}(\underline{x}, t). \quad (2.24)$$

Die Relaxationszeit bestimmt, analog zu Gleichung (2.13) für die Boltzmann-Gleichung, die Viskosität in der Lattice-Boltzmann-Gleichung durch die Beziehung [80]

$$\eta = \frac{1}{6} \rho c^2 (2\tau - \Delta t). \quad (2.25)$$

Die diskrete Gleichgewichtsverteilung (2.20) wurde aus einer Reihenentwicklung um die sogenannte absolute Gleichgewichtsverteilung, d.h. die Gleichgewichtsverteilung (2.11) mit $\underline{u} = 0$, bei konstanter Schallgeschwindigkeit gewonnen. Gemäß Gleichung (2.21) wird damit

die Konstanz der Gitterkonstante gewährleistet. Die Bedingung $\underline{u} = 0$ gilt nur für kleine Mach-Zahlen. Numerische Untersuchungen zeigen $Ma < 0,2$ als Grenze. Des Weiteren ist der Relaxationszeitparameter $\tau / \Delta t$ aus numerischen Stabilitätsgründen auf $\tau / \Delta t > 0,515$ begrenzt. Werden diese zwei Beschränkungen in die Definition für die Partikel-Reynolds-Zahl (3.1) eingesetzt und mit den Gleichungen (2.19), (2.21), (2.25) und (3.2) vereinfacht, so ergibt sich $Re < 40 / \sqrt{3} d_v / \Delta x$, wobei $d_v / \Delta x$ der dimensionslose Partikeldurchmesser ist. Die in dieser Arbeit rechentechnisch maximal mögliche Auflösung für eine Kugel ist ein Durchmesser $d_v / \Delta x$ von 24 Zellen. Daraus folgt $Re < \sqrt{3} 320$, also eine für die Kugel maximal simulierbare Partikel-Reynolds-Zahl von $\sqrt{3} 320 \approx 554$.

2.2.2 Randbedingungen

Die einfachste Randbedingung ist die periodische Randbedingung. Dabei treten die das Rechengebiet verlassenden Verteilungsfunktionen am gegenüberliegenden Rand wieder in das Rechengebiet ein. Als Randbedingungen für die Seitenwände wurden außerdem die Haftrandbedingung an einer beweglicher Wand und die Symmetrierandbedingung implementiert. Für die Haftrandbedingung an einer beweglichen Wand lautet, falls $\underline{\xi}_{\sigma'}$ auf die Wand zeigt und $\underline{\xi}_{\sigma}$ der in der Richtung entgegengesetzte Vektor von $\underline{\xi}_{\sigma'}$ ist (siehe Abbildung 2.2), die Gleichung für den Propagationsschritt [3]

$$f_{\sigma'}(\underline{x}, t + \Delta t) = f_{\sigma'}(\underline{x}, t_+) + 2\rho(\underline{x}, t_+) \omega_{\sigma} \frac{3}{c^2} \underline{u}_{Wand}(\underline{x}, t_+) \cdot \underline{\xi}_{\sigma'} . \quad (2.26)$$

Dabei wird angenommen, dass sich die Wand genau in der Mitte zwischen zwei Knoten befindet, siehe Abbildung 2.2. Die Grenzfläche hat somit die Form von Treppenstufen. In Abbildung 2.2 ist der Fall dargestellt, dass die Wand keine Geschwindigkeit hat ($\underline{u}_{Wand} = 0$); in diesem Fall werden die Verteilungsfunktionen in die Richtung, aus der sie kamen, wieder einfach zurückgeworfen. Für die Symmetrierandbedingung werden dagegen die Verteilungsfunktionen an der Wand reflektiert.

Am Eintritt kann ein beliebiges Strömungsprofil vorgegeben werden. Dazu wird auch am Eintritt die Wandrandbedingung (2.26) angewandt, wobei die Wandgeschwindigkeit durch die Eintrittsgeschwindigkeit ersetzt wird, d.h. [3]

$$f_{\sigma'}(\underline{x}, t + \Delta t) = f_{\sigma'}(\underline{x}, t_+) + 2\rho(\underline{x}, t_+) \omega_{\sigma} \frac{3}{c^2} \underline{u}_{Ein}(\underline{x}, t_+) \cdot \underline{\xi}_{\sigma'} . \quad (2.27)$$

Am Austritt gilt die senkrecht zur Austrittsfläche spannungsfreie Randbedingung [3], d.h. es treten keine Geschwindigkeitsgradienten senkrecht zur Austrittsfläche auf. Dazu werden die Verteilungsfunktionen von $\underline{\xi}_{\sigma i}$, falls $\underline{\xi}_{\sigma i}$ auf den Austritt zeigt, „umgekehrt“ propagiert, d.h.

$$f_{\sigma i}(\underline{x}, t + \Delta t) = f_{\sigma i}(\underline{x} + \underline{\xi}_{\sigma i} \Delta t, t_+) . \quad (2.28)$$

Zur Einhaltung der Massenerhaltung im gesamten Rechengebiet wird der Massenstrom am Ein- und Austritt durch die Bedingung

$$f_{01}(\underline{x}, t + \Delta t) = f_{01}(\underline{x}, t_+) + \delta(\underline{x}, t) \quad (2.29)$$

$$\delta(\underline{x}, t) = \sum_{\sigma i'_{Aus}} \left(f_{\sigma i'}(\underline{x}, t_+) - f_{\sigma i'}(\underline{x} + \underline{\xi}_{\sigma i'} \Delta t, t + \Delta t) \right) - \sum_{\sigma i'_{Ein}} 2\rho(\underline{x}, t_+) \omega_{\sigma} \frac{3}{c^2} \underline{u}_{Ein}(\underline{x}, t_+) \cdot \underline{\xi}_{\sigma i'}$$

für die Verteilungsfunktion ruhender Teilchen ($\underline{\xi}_{\sigma i} = 0$) gleichgesetzt. Es sei darauf hingewiesen, dass sowohl in der Eintrittsrandbedingung (2.27) als auch in der Austrittsrandbedingung (2.28) Teile der Verteilungsfunktion am Ein- bzw. Austritt reflektiert werden. Dies ist unphysikalisch, jedoch ist es unumgänglich, weil im Lattice-Boltzmann-Verfahren am Ein- und Austritt sowohl die in das Rechengebiet eintretenden als auch die das Rechengebiet verlassenden Verteilungsfunktionen in die Randbedingung einbezogen werden müssen.

Die Partikelrandbedingung ist prinzipiell gleich der Hafrandbedingung an einer beweglichen Wand (2.26), wobei anstelle der Wandgeschwindigkeit jetzt die Umfangsgeschwindigkeit des Partikels

$$\underline{u}_{Um}(\underline{x}) = \underline{u}_{Pa} + \underline{\omega}_{Pa} \times (\underline{x} - \underline{x}_{Pa}) \quad (2.30)$$

gesetzt wird. Jedoch wird für die Partikelrandbedingung der genaue Ort der Partikeloberfläche innerhalb einer Zelle in den σi -Richtungen mittels der Parameter $q_{\sigma i}$ berücksichtigt. Die Parameter $q_{\sigma i}$ sind in Abbildung 2.3 dargestellt und geben die relative Entfernung zwischen der Grenzfläche und dem nächsten Fluidknoten in σi -Richtung an. Die Partikelrandbedingung lautet [25]

$$f_{\sigma i}(\underline{x}, t + \Delta t) = 2q_{\sigma i} f_{\sigma i}(\underline{x}, t_+) + (1 - 2q_{\sigma i}) f_{\sigma i}(\underline{x} + \underline{\xi}_{\sigma i} \Delta t, t_+) + 2\rho(\underline{x}, t_+) \omega_{\sigma} \frac{3}{c^2} \underline{u}_{Um}(\underline{x}, t_+) \cdot \underline{\xi}_{\sigma i}$$

für $q_{\sigma i} < \frac{1}{2}$,

(2.31)

$$f_{\sigma i}(\underline{x}, t + \Delta t) = \frac{1}{2q_{\sigma i}} f_{\sigma i}(\underline{x}, t_+) + \frac{2q_{\sigma i} - 1}{2q_{\sigma i}} f_{\sigma i}(\underline{x}, t_+) + \frac{1}{q_{\sigma i}} \rho(\underline{x}, t_+) \omega_{\sigma} \frac{3}{c^2} \underline{u}_{Um}(\underline{x}, t_+) \cdot \underline{\xi}_{\sigma i}$$

für $q_{\sigma i} \geq \frac{1}{2}$.

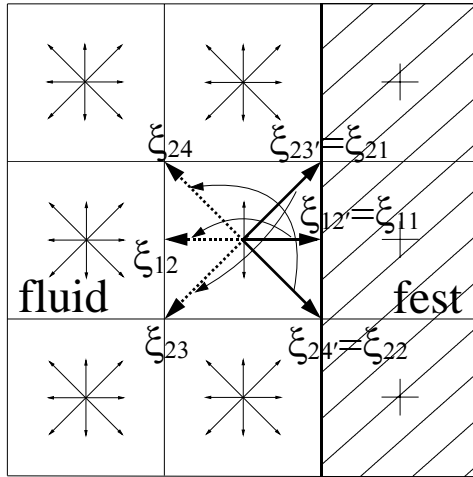


Abbildung 2.2 Wandrandbedingung (Treppe). Die Verteilungsfunktionen werden im Propagationsschritt wieder einfach zurückgeworfen.

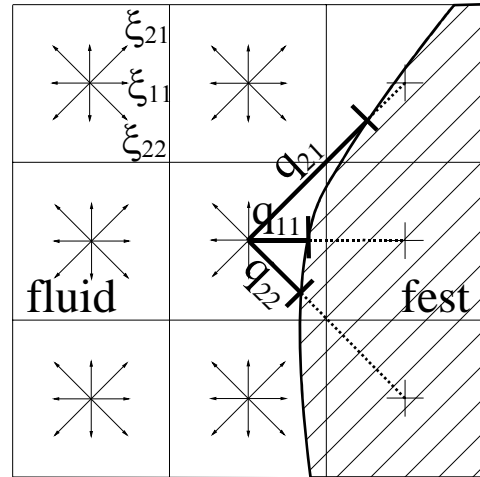


Abbildung 2.3 Parameter q_{α} zur Berücksichtigung der genauen Lage der Partikeloberfläche in der Partikelrandbedingung (gekrümmte Randbedingung).

Die auf ein Partikel, eine Wand oder ein sonstiges Hindernis wirkende Strömungskraft wird durch den Impulsaustausch zwischen dem Fluid und dem Hindernis berechnet [25,123]. Die Impulsänderung eines Fluidteilchens, d.h. die Differenz zwischen dem Impuls des Fluidteilchens nach und vor dem Stoß, zum Zeitpunkt $t + 0,5\Delta t$ ist

$$\underline{p}_{\alpha'}(\underline{x}, t + 0,5\Delta t) = f_{\alpha'}(\underline{x}, t + \Delta t) \underline{\xi}_{\alpha'} - f_{\alpha'}(\underline{x}, t_+) \underline{\xi}_{\alpha'} \quad (2.32)$$

$$\underline{p}_{\alpha'}(\underline{x}, t + 0,5\Delta t) = -(f_{\alpha'}(\underline{x}, t + \Delta t) + f_{\alpha'}(\underline{x}, t_+)) \underline{\xi}_{\alpha'} \quad (2.33)$$

bzw. die daraus resultierende Gegenkraft auf das Partikel

$$\underline{F}_{\alpha'}(\underline{x}, t + 0,5\Delta t) = -\frac{\Delta V}{\Delta t} \underline{p}_{\alpha'}(\underline{x}, t + 0,5\Delta t) \quad (2.34)$$

$$\underline{F}_{\alpha'}(\underline{x}, t + 0,5\Delta t) = \frac{\Delta V}{\Delta t} (f_{\alpha'}(\underline{x}, t + \Delta t) + f_{\alpha'}(\underline{x}, t_+)) \underline{\xi}_{\alpha'} \quad (2.35)$$

und das Drehmoment

$$\underline{M}_{\alpha'}(\underline{x}, t + 0,5\Delta t) = (\underline{x} - \underline{x}_{Pa}) \times \underline{F}_{\alpha'}(\underline{x}, t + 0,5\Delta t) \quad (2.36)$$

Um die Gesamtkraft und das Gesamtdrehmoment zu erhalten, müssen die Kräfte bzw. Drehmomente über die Partikeloberfläche und die diskreten Geschwindigkeitsvektoren aufsummiert

$$\underline{F}(t + 0,5\Delta t) = \sum_{\underline{x}} \sum_{\alpha'} \underline{F}_{\alpha'}(\underline{x}, t + 0,5\Delta t) \quad (2.37)$$

$$\underline{M}(t + 0,5\Delta t) = \sum_{\underline{x}} \sum_{\alpha'} \underline{M}_{\alpha'}(\underline{x}, t + 0,5\Delta t) \quad (2.38)$$

und über zwei Zeitpunkte

$$\underline{F}(t) = \frac{1}{2}(\underline{F}(t-0,5\Delta t) + \underline{F}(t+0,5\Delta t)) \quad (2.39)$$

$$\underline{M}(t) = \frac{1}{2}(\underline{M}(t-0,5\Delta t) + \underline{M}(t+0,5\Delta t)) \quad (2.40)$$

gemittelt werden.

Wechselt die Lage eines Knotens von fest auf fluid, so wird die Verteilungsfunktion dieses neuen Fluidknotens aus der Gleichgewichtsverteilung mit der Dichte, die gleich dem Durchschnitt der Dichten der benachbarten Fluidzellen ist, und mit der Fluidgeschwindigkeit, die analog zur Umfangsgeschwindigkeit des Partikels (2.30) $\underline{u} = \underline{u}_{Pa} + \underline{\omega}_{Pa} \times (\underline{x} - \underline{x}_{Pa})$ gesetzt wird, bestimmt [3].

2.3 Partikelberechnung

Zur Berechnung der Bewegung eines Partikels werden die Grundgesetze der Dynamik, d.h. das zweite Newtonsche Gesetz für die Translation

$$\underline{F} = m_{Pa} \frac{d\underline{u}_{Pa}}{dt} \quad (2.41)$$

und die Eulerschen Bewegungsgleichungen für die Rotation

$$\begin{aligned} M_a &= J_{aa} \frac{d\omega_a}{dt} - (J_{bb} - J_{cc})\omega_b\omega_c \\ M_b &= J_{bb} \frac{d\omega_b}{dt} - (J_{cc} - J_{aa})\omega_c\omega_a \\ M_c &= J_{cc} \frac{d\omega_c}{dt} - (J_{aa} - J_{bb})\omega_a\omega_b \end{aligned} \quad (2.42)$$

angewandt. Die Eulerschen Bewegungsgleichungen gelten nur im Hauptachsenkoordinatensystem (a,b,c) des Körpers. Dies ist das Koordinatensystem, in dem die Nichtdiagonalelemente des Trägheitstensors $(J_{ij}, i \neq j)$ verschwinden. Die Trägheitsmomente auf der Hauptdiagonalen lassen sich mit

$$J_{ii} = \int_V \rho \left((x_j - x_{Pa,j})^2 + (x_k - x_{Pa,k})^2 \right) dV \quad i \neq j, i \neq k, j \neq k \quad (2.43)$$

berechnen. Dessen diskrete Form

$$J_{ii} = \sum_n \rho_n \Delta V_n \left((x_{n,j} - x_{Pa,j})^2 + (x_{n,k} - x_{Pa,k})^2 \right) \quad i \neq j; i \neq k; j \neq k \quad (2.44)$$

wird numerisch für die Körper im Grundzustand gelöst, falls keine analytische Lösung existiert. Da, wie später in diesem Kapitel beschrieben, die in dieser Arbeit betrachteten Körper im Grundzustand zu den Koordinatenebenen spiegelsymmetrisch sind, sind die Trägheitsmomente um die Koordinatenachsen J_{xx} , J_{yy} und J_{zz} im Grundzustand gleich den Hauptträgheitsmomenten J_{aa} , J_{bb} und J_{cc} .

Mittels der kinematischen Gleichungen für die Translation

$$\underline{u}_{Pa} = \frac{dx_{Pa}}{dt} \quad (2.45)$$

und die Rotation

$$\underline{\omega}_{Pa} = \frac{d\sigma_{Pa}}{dt} \quad (2.46)$$

können aus der Translations- und der Winkelgeschwindigkeit die Lageparameter des Körpers, d.h. der Ortsvektor des Partikelmittelpunktes bzw. die drei Drehwinkel des Körpers, ermittelt werden. Das zweite Newtonsche Gesetz (2.41) und die kinematischen Gleichungen für die Translation (2.45) und die Rotation (2.46) werden durch das einfache Euler-Verfahren numerisch gelöst

$$\underline{F}^{t-1} = m_{Pa} \frac{\underline{u}_{Pa}^t - \underline{u}_{Pa}^{t-1}}{\Delta t} \quad (2.47)$$

$$\underline{u}_{Pa}^{t-1} = \frac{x_{Pa}^t - x_{Pa}^{t-1}}{\Delta t} \quad (2.48)$$

$$\underline{\omega}_{Pa}^{t-1} = \frac{\sigma_{Pa}^t - \sigma_{Pa}^{t-1}}{\Delta t} . \quad (2.49)$$

Für die Eulerschen Bewegungsgleichungen (2.42) wurde folgendes diskretes Schema gewählt

$$\begin{aligned} M_a^{t-1} &= J_{aa} \frac{\omega_a^t - \omega_a^{t-1}}{\Delta t} - (J_{bb} - J_{cc}) \omega_b^t \omega_c^t \\ M_b^{t-1} &= J_{bb} \frac{\omega_b^t - \omega_b^{t-1}}{\Delta t} - (J_{cc} - J_{aa}) \omega_c^t \omega_a^t . \\ M_c^{t-1} &= J_{cc} \frac{\omega_c^t - \omega_c^{t-1}}{\Delta t} - (J_{aa} - J_{bb}) \omega_a^t \omega_b^t \end{aligned} \quad (2.50)$$

Dieses nichtlineare Gleichungssystem ist nicht analytisch lösbar und muss daher iterativ gelöst werden.

Das auf das Partikel wirkende Drehmoment ist durch Gleichung (2.36) im raumfesten Koordinatensystem gegeben, wird aber in den Eulerschen Bewegungsgleichungen (2.50) im

körperfesten Hauptachsenkoordinatensystem benötigt. Mit den Winkelgeschwindigkeiten verhält es sich gerade umgekehrt. Sie werden mit den Eulerschen Bewegungsgleichungen im Hauptachsenkoordinatensystem berechnet, werden jedoch in der kinematischen Gleichung für die Rotation (2.49) im raumfesten Koordinatensystem benötigt. Die Transformation zwischen raum- und körperfestem Koordinatensystem wird genau wie die Drehung eines Körpers mathematisch durch die Abbildungsvorschrift

$$\underline{a}^* = \underline{R} \cdot \underline{a} \quad (2.51)$$

beschrieben, wobei \underline{R} der Drehtensor, \underline{a} der Vektor im körperfesten und \underline{a}^* der entsprechende Vektor im raumfesten Koordinatensystem bzw. \underline{a} der Vektor vor der Drehung und \underline{a}^* der entsprechende Vektor nach der Drehung ist. Die Determinante von Drehtensoren ist gleich eins, wodurch der Betrag eines Vektors vor und nach der Drehung unverändert bleibt. Drehtensoren sind des Weiteren orthogonal ($\underline{R}^{-1} = \underline{R}^T$). Für Drehungen um die Koordinatenachsen lauten die Matrizen der Drehtensoren

x-Achse als Drehachse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \sigma_x & -\sin \sigma_x \\ 0 & \sin \sigma_x & \cos \sigma_x \end{pmatrix}$$

y-Achse als Drehachse

$$\begin{pmatrix} \cos \sigma_y & 0 & \sin \sigma_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \sigma_y & 0 & \cos \sigma_y \end{pmatrix}$$

z-Achse als Drehachse

$$\begin{pmatrix} \cos \sigma_z & -\sin \sigma_z & 0 \\ \sin \sigma_z & \cos \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Gesamtdrehtensor, mit dem beliebige Drehungen möglich sind, ist durch drei Winkel eindeutig definiert. Die kinematischen Gleichungen für die Rotation (2.49) liefern die drei Drehwinkel σ_x , σ_y und σ_z . Aus diesen Winkeln kann im Allgemeinen jedoch nicht auf die Lage des Partikels geschlossen werden, weil verschiedene Reihenfolgen der Drehungen um die x -, y - und z -Achse im Allgemeinen einen verschiedenen Gesamtdrehtensor und damit eine verschiedene Gesamtdrehung zur Folge haben. Daher wird die Drehung innerhalb eines Zeitschrittes in mehrere kleinere Drehungen mit jeweils gleich großen Winkeln aufgeteilt, wobei der maximale Winkel $0,0001 \text{ rad}$ ist. Die Matrix des Drehtensors für die Drehung mit kleinem Winkel hat die Form [159]

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} \cos \sigma_y + \cos \sigma_z - 1 & -\sin \sigma_z & \sin \sigma_y \\ \sin \sigma_z & \cos \sigma_x + \cos \sigma_z - 1 & -\sin \sigma_x \\ -\sin \sigma_y & \sin \sigma_x & \cos \sigma_x + \cos \sigma_y - 1 \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Der Gesamtdrehtensor ergibt sich aus der skalaren Multiplikation der Drehtensoren aller Teilschritte

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}^n \cdot \underline{\underline{R}}^{n-1} \cdot \dots \cdot \underline{\underline{R}}^0 . \quad (2.53)$$

Es sei erwähnt, dass auch ein Gleichungssystem zur Bestimmung des Gesamtdrehtensors aus den körperfesten Winkelgeschwindigkeiten ohne Berücksichtigung von kleinen Teildrehungen existiert [68]. Dieses besitzt jedoch erstens eine Singularität um $\sigma_y = 0$. Zweitens hat das hier gewählte Verfahren den Vorteil, dass die Drehung um eine raumfeste Achse in dem Sinne völlig exakt ist, dass bei der Drehung um z.B. die x -Achse die Elemente der ersten Zeile des Drehtensors, d.h. die x -Komponenten, physikalisch korrekt unverändert bleiben.

Die in dieser Arbeit betrachteten Partikel werden mit der Gleichung [159]

$$\left(\frac{x - x_{Pa}}{a} \right)^d + \left(\frac{y - y_{Pa}}{b} \right)^e + \left(\frac{z - z_{Pa}}{c} \right)^f \leq 1 \quad d, e, f \geq 2; \quad d, e, f = 2n \quad n \in N \quad (2.54)$$

generiert. Mit dieser Gleichung lassen sich sämtliche zu den drei Koordinatenebenen spiegelsymmetrische einfache Körper beschreiben. Die Parameter a , b und c geben die halbe maximale Länge des Körpers in der x -, y - bzw. z -Richtung an. Für $d = e = f = 2$ beschreibt die Gleichung ein Ellipsoid. Je größer die Parameter d , e und f sind, desto eckiger ist die Form des Körpers in der $x-y$ - und $x-z$ -Ebene, in der $x-y$ - und $y-z$ -Ebene bzw. in der $x-z$ - und $y-z$ -Ebene. Hat einer der drei Parameter d , e oder f den Wert unendlich und die beiden anderen den Wert zwei und sind die beiden dazugehörigen Längen gleich groß, so beschreibt die Gleichung einen Zylinder. Für $d = e = f = \infty$ wird ein Quader wiedergegeben.

2.4 Konvergenzverhalten

Die Anzahl der Zeitschritte, die zum Erreichen des stationären Zustandes einer Partikelumströmung nötig sind, hängen von der Auflösung, der stationären Relativgeschwindigkeit zwischen Fluid und Partikel und der Viskosität ab. Für den in Kapitel 3.3 beschriebenen Fall der Umströmung einer feststehenden Kugel in einer gleichförmigen Strömung (siehe Abbildung 3.6) ist die Anzahl der Zeitschritte, die benötigt werden, um 99% des stationären c_w -Wertes zu erreichen, in Abbildung 2.4 als Funktion der Auflösung, in Abbildung 2.5 als

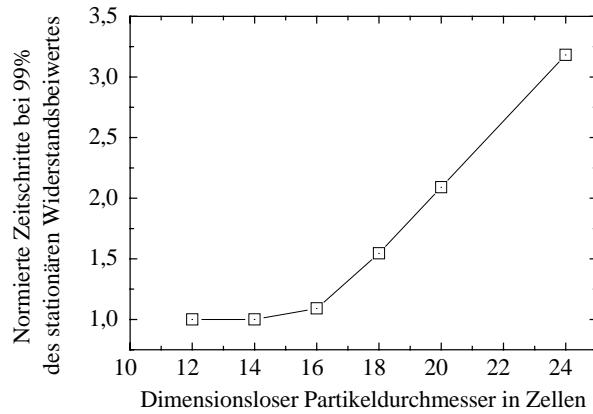


Abbildung 2.4 Normierte Zeitschritte zum Erreichen von 99% des stationären Widerstandsbeiwertes einer Kugel als Funktion der Auflösung.

Funktion der kinematischen Viskosität und in Abbildung 2.6 als Funktion der Fluidgeschwindigkeit, die hier gleich der Relativgeschwindigkeit ist, dargestellt. Mit steigender Auflösung, d.h. größerem dimensionslosen Partikeldurchmesser, steigt die Rechenzeit erwartungsgemäß an. Die Zeit bis zum Erreichen des 99%igen stationären Zustandes ist desto kleiner, je höher die Viskosität oder die Fluidgeschwindigkeit ist. Die Abhängigkeit von der Viskosität entspricht dem Trend der analytischen instationären Lösung für die Sinkgeschwindigkeit einer Kugel aus dem Ruhezustand im Stokes-Bereich ($u_{Pa} / u_{Pa,\infty} = 1 - e^{(-18(\rho / \rho_{Pa})\nu t / d^2)}$). Die kürzere Dauer mit steigender Relativgeschwindigkeit ist im Einklang mit der Lösung im Newton-

$$\text{Bereich } (u_{Pa} / u_{Pa,\infty} = \frac{1}{1 + (4/3)(\rho_{Pa} / \rho)(d / c_W u_{Pa,\infty} t)}).$$

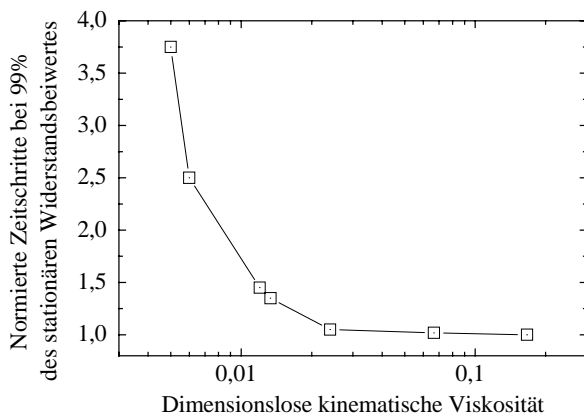


Abbildung 2.5 Normierte Zeitschritte zum Erreichen von 99% des stationären Widerstandsbeiwertes einer Kugel als Funktion der dimensionslosen Viskosität.

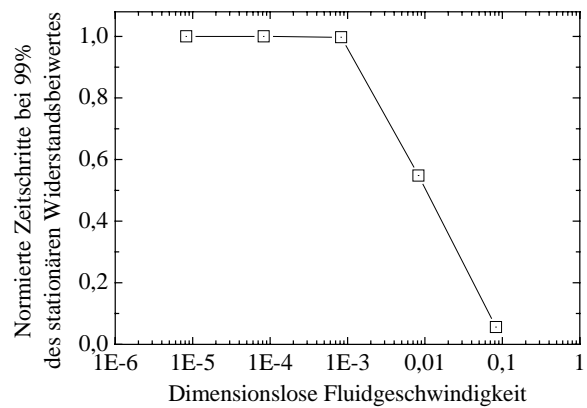


Abbildung 2.6 Normierte Zeitschritte zum Erreichen von 99% des stationären Widerstandsbeiwertes einer Kugel als Funktion der dimensionslosen Fluidgeschwindigkeit.

2.5 Einfluss der Auflösung

Die Anzahl der Zellen, mit der das Rechengebiet einschließlich des Partikels aufgelöst wird, kann das numerische Ergebnis der Strömung erheblich beeinflussen. Für einen waagerechten feststehenden Würfel und eine feststehende Kugel in einer gleichförmigen Strömung (Strömungskonfiguration siehe Abbildung 3.6) ist die Abhängigkeit des c_w -Wertes von der Auflösung in Abbildung 2.7 bzw. Abbildung 2.8 dargestellt. Erwartungsgemäß hat die Auflösung des Würfels aufgrund seiner ebenen Oberfläche weniger Einfluss auf die Strömung als die Auflösung der Kugel mit ihrer gekrümmten Oberfläche. Der Einfluss der Auflösung nimmt mit steigender Re -Zahl stark zu. Wie im Kapitel 2.2.2 erwähnt, berücksichtigt die Partikelrandbedingung die Krümmung der Partikeloberfläche innerhalb einer Zelle. Der Vergleich mit der Treppenstufenrandbedingung, d.h. der Randbedingung ohne Berücksichtigung der Krümmung der Partikeloberfläche innerhalb einer Zelle, für die Kugel in Abbildung 2.8 zeigt, dass durch die Berücksichtigung der Krümmung der Einfluss der Partikelauflösung erheblich reduziert wird.

2.6 Wandeinfluss

Die Abstände zwischen Partikel und den Rändern des Rechengebietes können einen bedeutenden Einfluss auf das Strömungsfeld ausüben. Ist der Abstand zwischen Partikel und Eintritt größer als der Abstand zwischen den Seitenwänden (h_{ges} in Abbildung 3.6), der

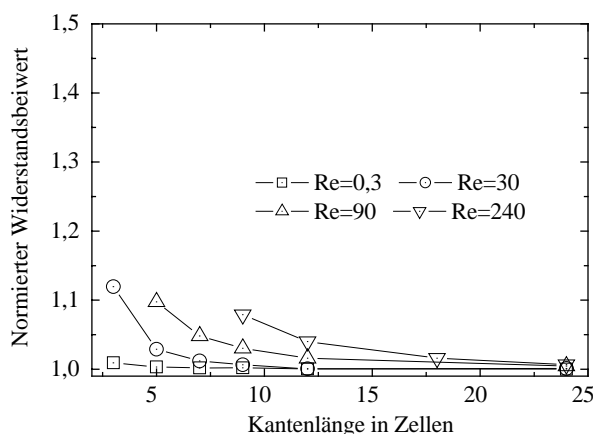


Abbildung 2.7 Normierter Widerstandsbeiwert eines Würfels als Funktion der Auflösung.

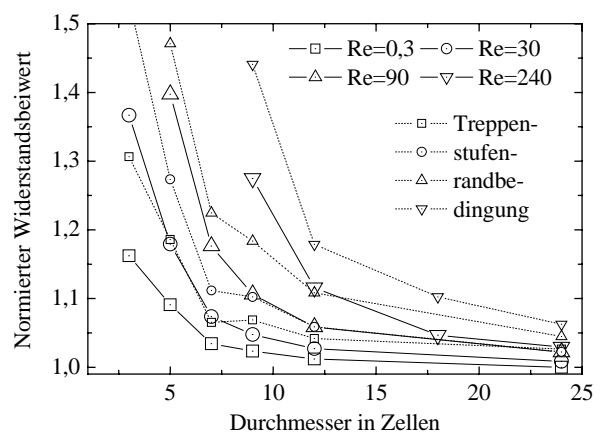


Abbildung 2.8 Normierter Widerstandsbeiwert einer Kugel als Funktion der Auflösung.

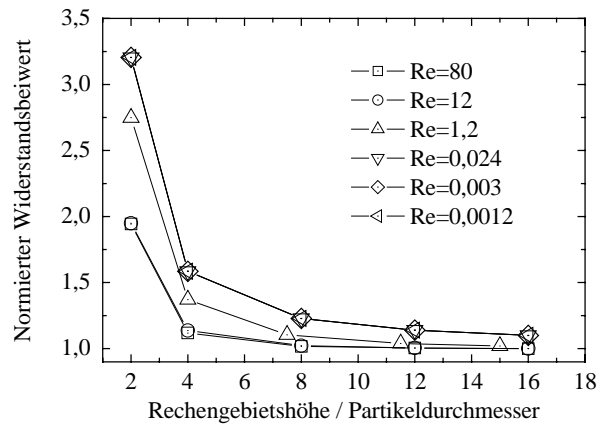


Abbildung 2.9 Normierter Widerstandsbeiwert einer rotierenden Kugel als Funktion der Rechengebietshöhe

Rechengebietshöhe genannt werden soll, und der Abstand zwischen Partikel und Austritt größer als 1,5 mal der Rechengebietshöhe, so haben Ein- und Austritt bei den hier untersuchten Re -Zahlen so gut wie keinen Einfluss auf die Strömung.

Für eine rotierende Kugel in einer gleichförmigen Strömung (Strömungskonfiguration siehe Abbildung 3.20) ist der Einfluss der Seitenwände auf den c_w -Wert in Abbildung 2.9 dargestellt. Darin ist die Abszisse die zum Partikeldurchmesser relative Höhe des Rechengebietes. Auf eine rotierende Kugel wirkt, wie in Kapitel 3.5 erläutert, aufgrund des Magnus-Effektes zusätzlich eine Auftriebskraft und ein Drehmoment, deren Beiwerte in Abbildung 2.10 und in Abbildung 2.11 als Funktion der Rechengebietshöhe dargestellt sind. Bei jeder untersuchten Re -Zahl wird der Drehmomentenbeiwert ab einer Rechengebietshöhe von 4 mal dem Partikeldurchmesser von den Seitenwänden kaum beeinflusst. Für den c_w -Wert und den Auftriebsbeiwert nimmt der Einfluss der Seitenwände mit zunehmender Re -Zahl ab. Die Graphen des c_w -Wertes streben bei kleinen und großen Re -Zahlen einer asymptotischen Funktion zu. Dagegen wächst der Einfluss der Seitenwände auf den Auftriebsbeiwert mit sinkender Re -Zahl immer weiter an. Daher ist der stärkste Einfluss überhaupt der der Seitenwände auf den Auftriebsbeiwert bei kleiner Re -Zahl.

Des Weiteren zeigen Rechnungen, dass der Einfluss der Seitenwände für verschiedene Partikelformen ungefähr gleich groß ist, wenn er als Funktion von h/d_v berücksichtigt wird,

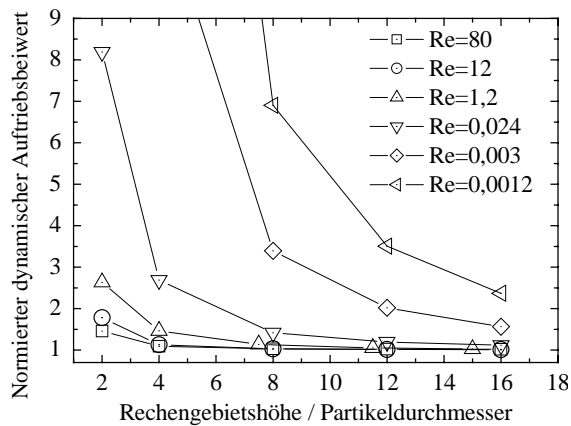


Abbildung 2.10 Normierter dynamischer Auftriebsbeiwert einer rotierenden Kugel als Funktion der Rechengebietshöhe.

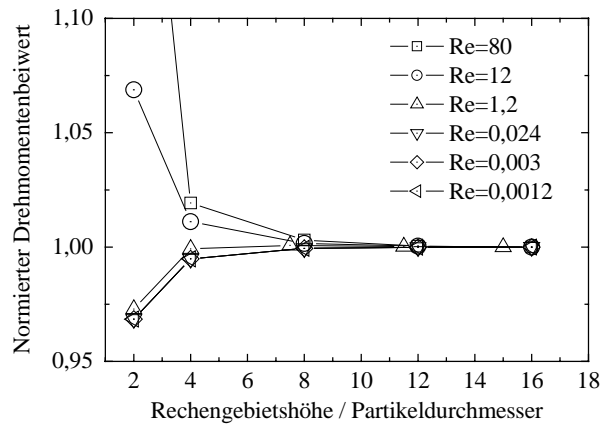


Abbildung 2.11 Normierter Drehmomentenbeiwert einer rotierenden Kugel als Funktion der Rechengebietshöhe.

wobei h der Abstand zwischen der Seitenwand und der nächsten Partikeloberfläche (siehe Abbildung 3.6) und d_v der Durchmesser der volumenäquivalenten Kugel ist. Dies wird für den c_w -Wert von feststehenden Partikeln in einer gleichförmigen Strömung bei $Re = 0,3$ in Abbildung 2.12 und bei $Re = 90$ in Abbildung 2.13 demonstriert. Die untersuchten Partikel sind die Kugel, der waagerechte Würfel und der quer- und längsangeströmte Quader mit dem Achsenverhältnis von 1,5. Alle Punkte in Abbildung 2.12 und Abbildung 2.13 liegen nahezu auf jeweils einer Kurve.

Es sei erwähnt, dass in einer ersten eigenen Veröffentlichung [81] der Einfluss der Seitenwände nur für die Kugel bestimmt und auf andere Partikelformen als Funktion von h'/d' angewandt wurde, wobei h' der Abstand zwischen Partikelmittelpunkt und der Seitenwand und d' die maximale Abmessung des Partikels senkrecht zur Seitenwand ist. Die Verwendung von h'/d' anstatt von h/d_v führt zu merklichen Veränderungen des c_w -Wertes nichtsphärischer Partikel bei $Re = 0,3$. Für diese Arbeit wurde der Einfluss der Seitenwände jedoch durchgehend als Funktion von h/d_v berücksichtigt. Ist der Abstand zu den vier Seitenwänden nicht gleich groß, so ergibt sich der gesamte Seitenwandeneinfluss aus dem arithmetischen Mittel der vier Seitenwandeneinflüsse.

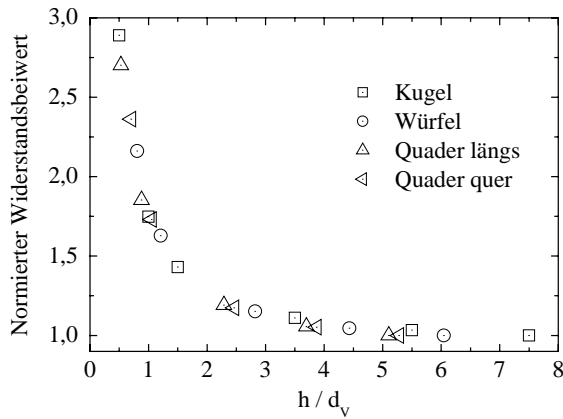


Abbildung 2.12 Normierter Widerstandsbeiwert der Kugel, des Würfels und des quer- und längsangeströmten Quaders als Funktion des Abstandes zwischen der Seitenwand und der nächsten Partikeloberfläche bei $Re = 0,3$.

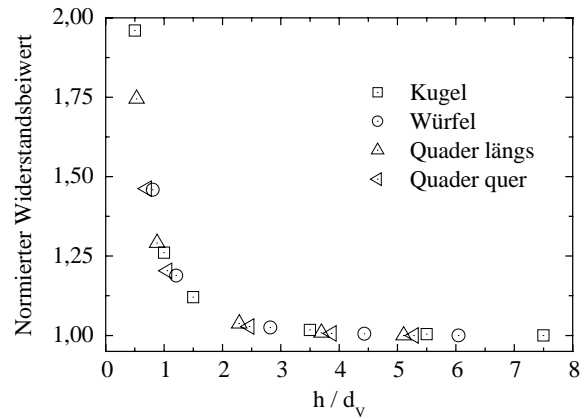


Abbildung 2.13 Normierter Widerstandsbeiwert der Kugel, des Würfels und des quer- und längsangeströmten Quaders als Funktion des Abstandes zwischen der Seitenwand und der nächsten Partikeloberfläche bei $Re = 90$.

Im Fall einer linearen Scherströmung, d.h. mit der Hafttrandbedingung an einer beweglichen Wand an der oberen und unteren Seitenwand (Abbildung 3.28), sind die Abhängigkeiten des c_w -Wertes und des Drehmomentenbeiwertes von den Seitenwänden denen bei Symmetriestandbedingung an allen Seitenwänden ähnlich. Ein gänzlich anderes Verhalten zeigt dagegen der Auftriebsbeiwert für $Re \leq 0,3$. Wie in Abbildung 2.14 zu sehen, verhält sich der Auftriebsbeiwert nicht mehr asymptotisch, sondern wächst in etwa linear mit steigender Rechengebietshöhe. Daher ist bei kleinen Re -Zahlen der Einfluss der oberen und unteren Wand auch bei großen Rechengebietshöhen maßgeblich. Dieses Verhalten wurde theoretisch von Vasseur und Cox [198] für eine Kugel vorausgesagt. Befindet sich die Kugel in der Mitte zwischen den zwei Seitenwänden, so bestimmten sie $v_1'/(ReU_m) = -0,036$ (Fig. 4 in [198]), was für den Auftriebsbeiwert

$$c_A = 48 \cdot 0,036 \cdot S_{Fl} h_{ges} / d \quad (2.55)$$

bedeutet. Vasseur und Cox' Gleichung ist in Abbildung 2.14 aufgetragen und stimmt sehr gut mit den Ergebnissen bei $Re = 0,12$ und $0,3$ überein. Der Graph bei $Re = 0,012$ verläuft jedoch weit unter Vasseur und Cox' Gleichung, scheint sich aber mit größer werdender Rechengebietshöhe dieser Gleichung anzunähern. Die Ursache dafür, dass der Graph bei $Re = 0,012$ die höchste Abweichung zu Vasseur und Cox' Gleichung aufweist, obwohl er die kleinste Re -Zahl besitzt und daher eine bessere Übereinstimmung zu erwarten ist, ist unklar

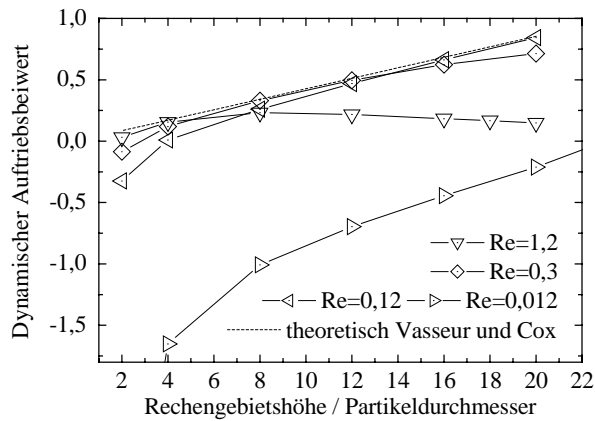


Abbildung 2.14 Dynamischer Auftriebsbeiwert einer Kugel in einer linearen Scherströmung als Funktion der Rechengebietshöhe bei $S_{Fl} = 0,025$.

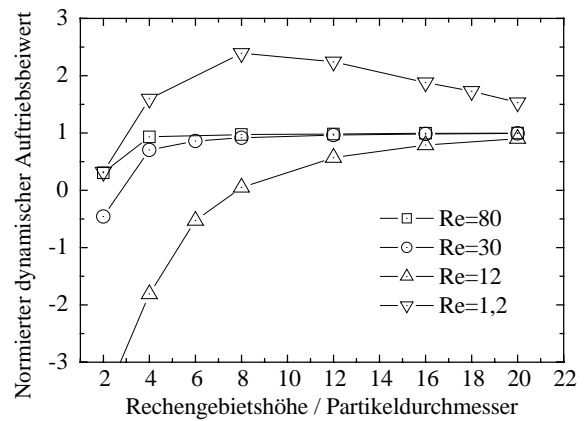


Abbildung 2.15 Normierter dynamischer Auftriebsbeiwert einer Kugel in einer linearen Scherströmung als Funktion der Rechengebietshöhe bei $S_{Fl} = 0,025$.

und bedarf weiterer Untersuchungen, die jedoch über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen würden. Für $Re \geq 1,2$ sind, wie Abbildung 2.15 zeigt, die Funktionen asymptotisch. Damit üben bei $Re \geq 1,2$ die Seitenwände auch mit Hafttrandbedingung an einer beweglichen Wand bei großen Rechengebietshöhen keinen Einfluss auf den Auftriebsbeiwert aus.

3 Widerstandskraft, Auftriebskraft und Drehmoment eines Einzelpartikels

3.1 Dimensionslose Kennzahlen

Mit Hilfe von Ähnlichkeitszahlen lassen sich physikalische Systeme miteinander vergleichen. Physikalische Systeme mit gleicher Ähnlichkeitszahl verhalten sich ähnlich. Zur Ableitung der Ähnlichkeitszahlen werden die das System beschreibenden Gleichungen in die dimensionslose Form überführt. Die Kontinuitätsgleichung (2.1) bleibt in dimensionsloser Form unverändert. Die Navier-Stokes-Gleichung (2.2) kann mit der Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{|\underline{u}| d_v \rho}{\eta} \quad (3.1)$$

dimensionslos dargestellt werden. Die thermische Zustandsgleichung (2.4) wird mittels der Mach-Zahl

$$Ma = \frac{|\underline{u}|}{c_s} \quad (3.2)$$

in die dimensionslose Form überführt. Es verhalten sich somit alle Strömungen mit gleichen Randbedingungen dimensionslos gleich, wenn die Reynolds-Zahl und die Mach-Zahl der Strömungen übereinstimmen. Wenn die Länge d_v in der Definition der Reynolds-Zahl eine Abmessung eines Partikels ist und für die Geschwindigkeit $|\underline{u}|$ die ungestörte Relativgeschwindigkeit des Fluids zum Partikelmittelpunkt gesetzt wird, so spricht man von der Partikel-Reynolds-Zahl. Innerhalb dieser Arbeit wird, wie bereits von Wadell [201] und Schulz [171] vorgeschlagen, für d_v der Durchmesser der Kugel mit dem gleichen Volumen wie das des Partikels

$$d_v = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi} V} \quad (3.3)$$

gesetzt.

Als dimensionslose Kenngrößen zur Beschreibung von Randbedingungen werden die Partikeldrallzahl und die Fluidrallzahl eingeführt. Die Partikeldrallzahl gibt die Winkelgeschwindigkeit eines Partikels an und ist als das Verhältnis zwischen der Umfangsgeschwindigkeit der volumenäquivalenten Kugel und der ungestörten Relativge-

schwindigkeit

$$S_{Pa} = \frac{|\underline{\omega}_{Pa}| \frac{d_V}{2}}{|\underline{u}|} \quad (3.4)$$

definiert. Analog zu der Partikeldrallzahl gibt die Fluidrallzahl die Winkelgeschwindigkeit des Fluids an und ist als

$$S_{Fl} = \frac{|\underline{\omega}_{Fl}| \frac{d_V}{2}}{|\underline{u}|} \quad (3.5)$$

definiert. Für die Fluidwinkelgeschwindigkeit gilt $\underline{\omega}_{Fl} = 0,5 \nabla \times \underline{u}$; in einer linearen Scherströmung ist sie gleich dem halben Geschwindigkeitsgradienten.

Auf ein Partikel wirken in einer Strömung die Widerstandskraft F_W , die Auftriebskraft F_A und das Drehmoment M . Die Widerstandskraft ist die Kraftkomponente, die parallel zur ungestörten Fluidströmung wirkt und die Auftriebskraft die Komponente, die senkrecht zur ungestörten Fluidströmung wirkt. Die Schwerkraft wird innerhalb dieser Arbeit nicht berücksichtigt; folglich erfahren die Partikel keinen Archimedes-Auftrieb und der Auftrieb stellt in dieser Arbeit allein den dynamischen Auftrieb dar. Der dimensionslose Widerstandsbeiwert ist als das Verhältnis von Widerstandskraft zu dem Staudruck mal der Querschnittsfläche der volumenäquivalenten Kugel

$$c_W = \frac{F_W}{\frac{1}{2} \rho \underline{u}^2 \frac{\pi}{4} d_V^2} \quad (3.6)$$

definiert. Analog gilt für den Auftriebsbeiwert

$$c_A = \frac{F_A}{\frac{1}{2} \rho \underline{u}^2 \frac{\pi}{4} d_V^2} \quad (3.7)$$

und für den Drehmomentenbeiwert

$$c_M = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho \underline{u}^2 \frac{\pi}{4} d_V^3} \quad (3.8)$$

3.2 Historischer Abriss

Die Frage nach den Mechanismen bei der Bewegung eines Körpers und später auch nach den dabei auf den Körper wirkenden Strömungskräften beschäftigt Wissenschaftler schon seit der Antike. Anregungen für diese Forschungen gaben die Ballistik mit der Frage nach der Bestimmung der Flugbahn von Geschossen, der Schiffbau und später der Autobau mit der Suche nach Strömungsprofilen mit geringem Widerstand sowie der Flugzeugbau mit der Suche nach Tragflächen mit großem Auftriebs- zu Widerstandsverhältnis. Heutzutage ist das Wissen über die auf einen Körper wirkenden Strömungskräfte für die Modellierung vieler technischer Prozesse, von denen einige in der Einleitung (Kapitel 1) genannt wurden, unerlässlich.

Leonardo da Vinci [199] beschäftigte sich mit der Frage nach Körpern geringen Widerstandes. Er erkannte durch Beobachtungen den Stromlinienkörper rechts oben von Abbildung 3.1 als Körper geringsten Widerstandes. Galilei [60] führte erste systematische Versuche zur Pendelbewegung und zur Bewegung von Körpern im freien Fall durch. Er erkannte, dass der Luftwiderstand die Ursache für die Abnahme der Amplitude beim Pendel ist und dass durch den Luftwiderstand die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers nicht beliebig zunimmt, sondern sich einem konstanten Wert nähert. Die erste experimentelle Bestimmung des Widerstandes eines Körpers führte Mariotte [117] durch, indem er in einem Fluss die Widerstandskraft einer senkrecht angeströmten Platte mittels eines Wägekreuzes ermittelte, siehe Abbildung 3.2. Als Ergebnis dieser Experimente erkannte er, dass die Widerstandskraft im Verhältnis zum Quadrat der Fluidgeschwindigkeit wirkt.

Erste theoretische Überlegungen über Gesetzmäßigkeiten zum Strömungswiderstand eines Körpers stammen von Newton [131] für den Fall, dass der Widerstand nur der Trägheit des Fluids entspringt. Er setzte unelastische Stöße der Fluidteilchen mit dem Körper voraus und

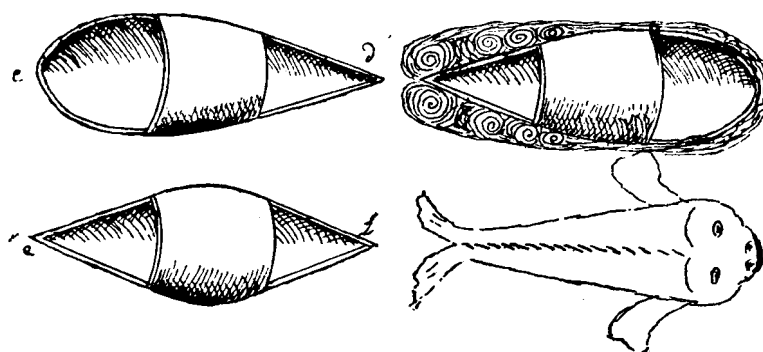


Abbildung 3.1 Abbildung da Vincis zur Demonstration des Widerstandes verschieden geformter Körper. Abbildung aus da Vinci [199].

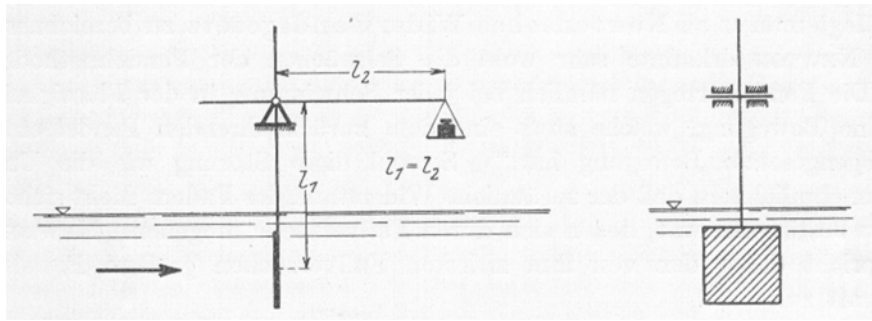


Abbildung 3.2 Mariottes Widerstandsversuch in fließendem Wasser. Abbildung aus Schiller [167].

bestimmte die auf den Körper wirkende Kraft aus der Änderung des Impulsstroms der aufprallenden Fluidteilchen. Er stellte für Kugeln und Zylinder das sogenannte quadratische oder Newtonsche Widerstandsgesetz $F_w \sim \rho \underline{u}^2 d^2$ auf, welches Mariotte bereits früher experimentell ermittelt hatte. Newton bestätigte dieses Gesetz durch Pendel- und Fallversuche mit Kugeln. Nach Newtons Theorie hängt der Strömungswiderstand von der Größe der angeströmten Querschnittsfläche und der Form der Vorderseite, nicht aber von der Rückseite oder der Länge des Körpers ab.

Die Probleme der Widerstandsmessung mittels der Fallmethode sind vielfältig. Erstens muss das Erreichen des stationären Zustandes abgewartet werden, zweitens ist die genaue Bestimmung der Geschwindigkeit kompliziert und drittens ergeben sich bei großen Re -Zahlen Schwankungen der Bewegung in Betrag und Richtung der Geschwindigkeit und bei nichtsphärischen Körpern auch in der Orientierung. Um diese Schwierigkeiten zu überwinden, entwickelte Robins [157] 1746 als neue Apparatur zur Widerstandsmessung den Rundlauf von Abbildung 3.3. Ein horizontaler Arm, an dessen Ende der zu untersuchende Körper befestigt ist, rotiert um eine vertikale Spindel. Im Gleichgewicht ist das Antriebsdrehmoment gleich dem Drehmoment der Widerstandskraft des Versuchskörpers. Die Nachteile der Rundlaufmethode sind erstens die nicht gleichmäßige Anströmung des Versuchskörpers aufgrund der Rotation und zweitens die nicht ruhende Luft, auch als Mitwind bezeichnet, da das gleiche Gebiet immer wieder durch den Versuchskörper durchquert wird. Dennoch blieb die Rundlaufmethode für die nächsten 100 Jahre die vorherrschende Methode der aerodynamischen Widerstandsmessung. Robins maß mit seinem Rundlauf den Widerstand von Kugeln und bestätigte das quadratische Widerstandsgesetz. Es sei erwähnt, dass bereits Robins für rotierende Kugeln den später in diesem Kapitel aufgeführten Magnus-Effekt klar erkannte und erste Messungen dazu ausführte. Ende des 18. Jahrhunderts wurden

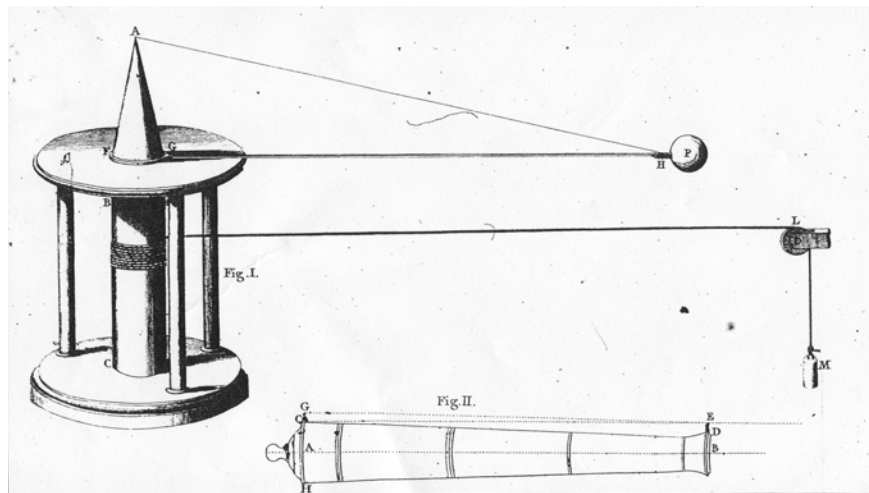


Abbildung 3.3 Rundlauf nach Robins. Abbildung aus Robins [157].

durch Hutton [83] mittels der Rundlaufmethode die Widerstandsbeiwerte von verschieden geformten Körpern wie Kugeln, Halbkugeln, Kegeln, Kreisscheiben und Rechteckplatten, letztere unter verschiedenen Anströmwinden, bestimmt. Seine Messungen bestätigten das quadratische Widerstandsgesetz und zeigten außerdem im Widerspruch zu Newtons Theorie, dass auch die Form der Rückseite des Körpers den Widerstand beeinflusst.

Um dem wachsenden Interesse des Schiffbaus an verbesserten Schiffsförmungen Rechnung zu tragen, wurde die erstmals von Borda [20] zur Bestimmung des Wasserwiderstandes benutzte Schleppmethode von d'Alembert, Condorcet und Bossut [4] im 18. Jahrhundert in großem Maßstab für schwimmende Schiffmodelle angewandt. Abbildung 3.4 zeigt ihre Versuchsanordnung. In einem Becken wurden die Versuchskörper durch ruhendes Wasser gezogen und die Geschwindigkeit bei Erreichen der gleichförmigen Bewegung notiert. Im Gleichgewicht ist die Widerstandskraft gleich der Gewichtskraft der Antriebsmasse. Beaufoy [15] führte neben Schleppversuchen von Schiffsförmungen auch umfangreiche Versuche für schwimmende und vollständig eingetauchte einfache Körper durch. Er erkannte auf der Suche nach möglichst stromlinienförmigen Körpern, dass die Form entlang des gesamten Körpers den Widerstand beeinflusst.

Die Entwicklung der Flugtechnik begann in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts und ging mit der Entwicklung geeigneter Tragflügelprofile einher. Lilienthal [108] bestimmte den dynamischen Auftrieb von ebenen und gewölbten Platten in Abhängigkeit des Anströmwindwinkels mit einem Rundlauf und, in Anlehnung an Mariottes Messungen in fließendem Wasser, im natürlichen Wind. Die Versuche im natürlichen Wind litten aber unter der starken

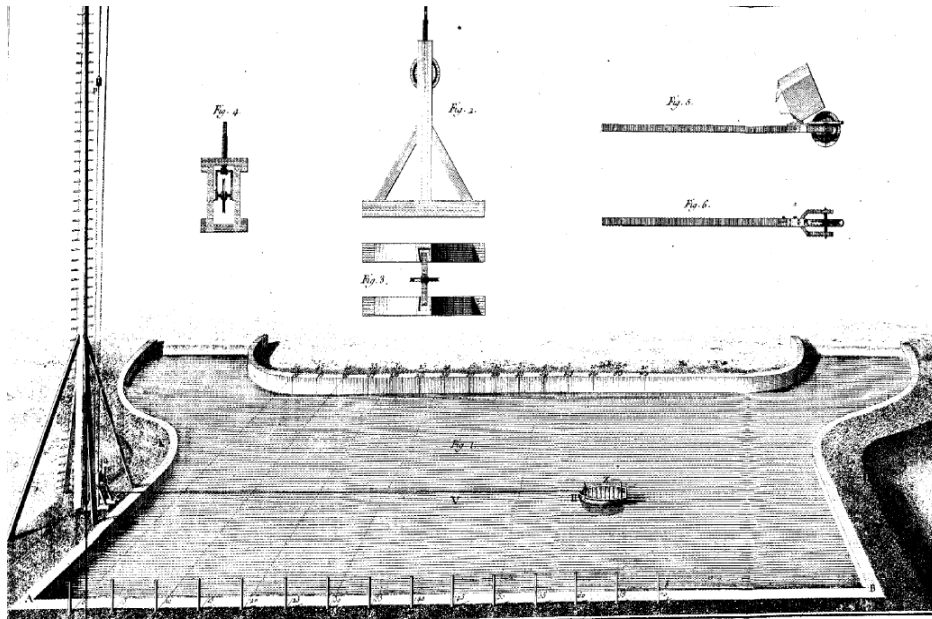


Abbildung 3.4 Schlepptest nach d'Alembert, Condorcet und Bossut. Abbildung aus d'Alembert et al. [4].

Schwankung der Luftgeschwindigkeit. Abhilfe schaffte der 1885 von Phillips [142] konstruierte Windkanal, in dem durch eine Dampfstrahlpumpe ein gleichmäßiger Luftstrom erzeugt wurde. Die ersten Windkanäle, die der Forderung nach örtlicher und zeitlicher Gleichmäßigkeit des Luftstroms genügend genau entsprachen, wurden von Prandtl 1909 in Göttingen und von Eiffel 1909 in Paris fertiggestellt [167] und markierten den Beginn der modernen fluiddynamischen Forschung.

Die erste analytische Formel zum Strömungswiderstand stellte Stokes [179] für die Kugel in einer gleichförmigen Strömung unter völliger Vernachlässigung der Trägheitskraft, auch Stokessche Annahme genannt, auf. Die Stokessche Annahme gilt genau nur bei $Re = 0$; in den Ingenieurwissenschaften findet sie jedoch im Bereich kleiner Partikel-Reynolds-Zahlen von etwa $Re < 0,3$, der auch als Stokes-Bereich bezeichnet wird, Anwendung. Stokes' Formel für den Strömungswiderstand lautet

$$\underline{F}_W = 3\pi\eta d \underline{u} \quad \text{bzw.} \quad c_W = \frac{24}{Re} . \quad (3.9)$$

Diese Gleichung wird als Stokessches Widerstandsgesetz bezeichnet. Oseen [139] zeigte, dass die völlige Vernachlässigung der Trägheitskraft auch bei noch so kleiner Re -Zahl unzulässig ist und bestimmte die verbesserte Formel

$$\underline{F}_W = 3\pi\eta d \underline{u} \left(1 + \frac{3}{16} Re \right) . \quad (3.10)$$

Lösungen mit höheren Gliedern in der Re -Zahl als dem linearen wurden von Goldstein [69]

$$\underline{F}_w = 3\pi\eta d \underline{u} \left(1 + \frac{3}{16} Re - \frac{19}{1280} Re^2 + \frac{71}{20480} Re^3 - \frac{30179}{34406400} Re^4 + \frac{122519}{560742400} Re^5 \right) \quad (3.11)$$

und von Proudman und Pearson [148]

$$\underline{F}_w = 3\pi\eta d \underline{u} \left(1 + \frac{3}{16} Re + \frac{9}{160} Re^2 \ln Re \right) \quad (3.12)$$

berechnet.

Oberbeck [133] leitete Integralgleichungen für die Umströmung von Sphäroiden im Stokes-Bereich ab und berechnete die Widerstandskraft eines verlängerten Sphäroids mit der Symmetrieachse parallel zur Strömungsrichtung. Oseen [139] erkannte, dass analytische Lösungen nur für Sphäroide existieren und berechnete die Widerstandskraft von verlängerten und abgeflachten Sphäroiden mit beliebiger Orientierung zur Strömungsrichtung einschließlich der Kreisscheibe als Spezialfall. Eine querangeströmte Kreisscheibe erfährt einen Widerstand von

$$\underline{F}_w = 8\eta d \underline{u} \quad (3.13)$$

und eine längsangeströmte Kreisscheibe einen Widerstand von

$$\underline{F}_w = \frac{16}{3} \eta d \underline{u}. \quad (3.14)$$

Ein verlängertes Sphäroid mit der Symmetrieachse parallel zur Strömungsrichtung mit einem Achsenverhältnis von $c/a = 1,95$ hat den geringsten Widerstandsbeiwert. Jedoch hat auch ein abgeflachtes Sphäroid mit der Symmetrieachse senkrecht zur Strömung mit $c/a = 0,702$ einen geringeren Widerstand als die Kugel. Mit zunehmendem und mit abnehmendem Achsenverhältnis steigen die Widerstandsbeiwerte monoton an.

Für die Widerstandskraft quer- und längsangeströmter langer Zylinder im Stokes-Bereich berechnete Burgers [27] mittels der Punktkraft-Methode

$$\underline{F}_w = 4\pi\eta L \underline{u} \left(\frac{\varepsilon}{1 + 0,5\varepsilon} \right) \quad (3.15)$$

bzw.

$$\underline{F}_w = 2\pi\eta L \underline{u} \left(\frac{\varepsilon}{1 - 0,72\varepsilon} \right) \quad (3.16)$$

mit $\varepsilon = \frac{1}{\ln(2L/d)}$. Batchelor [14] verbesserte diese Approximationen zu

$$\underline{F}_w = 4\pi\eta L \underline{u} \left(\frac{\varepsilon + 0,307\varepsilon^2}{1 + 0,5\varepsilon} + 0,119\varepsilon^3 \right) \quad (3.17)$$

bzw.

$$\underline{F}_w = 2\pi\eta L \underline{u} \left(\frac{\varepsilon + 0,307\varepsilon^2}{1 - 0,5\varepsilon} + 0,4255\varepsilon^3 \right). \quad (3.18)$$

Happel und Brenner [74] geben in ihrem Buch einen Überblick über die Widerstandskraft der oben erwähnten Körper.

Bei großen Re -Zahlen existieren nur Lösungen für quer- und längsangeströmte Platten. Für die Widerstandskraft einer querangeströmten Platte in einem reibungsfreien Fluid ermittelte Lord Rayleigh [153] aus Strömungsfeldberechnungen von Kirchhoff [94]

$$F_w = \frac{\pi}{4 + \pi} \rho \underline{u}^2 A_\perp. \quad (3.19)$$

Blasius [19] berechnete mittels der Grenzschichttheorie für den Widerstand einer glatten längsangeströmten Platte in einer laminaren Strömung $c_{w_l} = 1,327 / \sqrt{Re_l}$. Für turbulente Strömungen wurde die entsprechende Formel mit Hilfe experimenteller Daten für die Rohrreibung [18] und Messungen von Wieselsberger [203] zu $c_{w_l} = 0,074 / Re_l^{1/5}$ bestimmt [147]. In den beiden oben genannten Gleichungen wurde als Fläche in der Definitionsgleichung des Widerstandsbeiwertes c_{w_l} die Plattenoberfläche und als Durchmesser in der Definition der Reynolds-Zahl Re_l die Plattenlänge benutzt. Verwendet man stattdessen die in dieser Arbeit gültigen Definitionen (3.1), (3.3) und (3.6), d.h. die Fläche und den Durchmesser der volumenäquivalenten Kugel, so lauten die Gleichungen für den Widerstand einer längsangeströmten Platte in einer laminaren und turbulenten Strömung

$$c_w = 1,327 \frac{8}{\sqrt{6\pi}} \sqrt{\frac{\text{Tiefe}}{\text{Dicke}}} \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (3.20)$$

bzw.

$$c_w = 0,074 \frac{8}{6^{3/5} \pi^{2/5}} \left(\frac{\text{Tiefe}}{\text{Dicke}} \right)^{2/5} \left(\frac{\text{Länge}}{\text{Dicke}} \right)^{1/5} \frac{1}{Re^{1/5}}. \quad (3.21)$$

Eine zusätzliche Auftriebskraft und ein zusätzliches Drehmoment treten auf, wenn das Partikel rotiert oder wenn es sich in einer Scherströmung befindet. Im Fall eines rotierenden Partikels in einer gleichförmigen Strömung ist die zusätzliche Auftriebskraft die sogenannte Magnus-Kraft und im Fall eines feststehenden Partikels in einer linearen Scherströmung ist die zusätzliche Auftriebskraft die sogenannte Saffman-Kraft. Im Stokes-Bereich bestimmten Rubinow und Keller [161] analytisch für die Magnus-Kraft einer Kugel

$$\underline{F}_A = \frac{\pi}{8} d^3 \rho \underline{u} \times \underline{\omega}_{Pa} \quad \text{bzw.} \quad c_A = 2S_{Pa} , \quad (3.22)$$

wobei der Ausdruck für c_A nur gilt, falls $\underline{\omega}_{Pa}$ und \underline{u} senkrecht aufeinander stehen. Für die Saffman-Kraft einer Kugel im Stokes-Bereich und für $Re \ll S_{Fl}$ leitete Saffman [162] analytisch

$$F_{A,y} = \frac{6,46}{4} d^2 \sqrt{\rho\eta} \sqrt{\frac{du_x}{dy} u_x} \quad (3.23)$$

für den Fall her, dass \underline{u} nur eine Komponente in x -Richtung und einen Gradienten in y -Richtung hat. In allgemeiner Form lautet diese Gleichung [176]

$$\underline{F}_A = \frac{6,46}{4} \sqrt{2} d^2 \sqrt{\rho\eta} \sqrt{\frac{1}{|\underline{\omega}_{Fl}|}} \underline{u} \times \underline{\omega}_{Fl} \quad \text{bzw.} \quad c_A = \frac{4}{\pi} 6,46 \sqrt{\frac{S_{Fl}}{Re}} . \quad (3.24)$$

Diese Kraft wirkt in Richtung der höheren relativen Fluidgeschwindigkeit. McLaughlin [120] erweiterte Saffmans Lösung auf beliebige S_{Fl}/Re -Verhältnisse durch das Einfügen des zusätzlichen Faktors $9/(6,46\pi)J(\varepsilon)$ mit $\varepsilon = 2\sqrt{S_{Fl}/Re}$ in Saffmans Gleichung zu

$$F_{A,y} = \frac{9}{4\pi} J(\varepsilon) d^2 \sqrt{\rho\eta} \sqrt{\frac{du_x}{dy} u_x} . \quad (3.25)$$

Der Auftrieb in McLaughlins Gleichung nimmt mit kleiner werdendem ε stärker ab als in Saffmans Gleichung und wird negativ bei sehr kleinem ε . Auton [8] ermittelte für die Saffman-Kraft einer Kugel in einem reibungsfreien Fluid bei sehr kleinem S_{Fl} analytisch

$$\underline{F}_A = \frac{\pi}{6} d^3 \rho \underline{u} \times \underline{\omega}_{Fl} \quad \text{bzw.} \quad c_A = \frac{8}{3} S_{Fl} . \quad (3.26)$$

Die Kraft wirkt wieder in Richtung größerer relativer Fluidgeschwindigkeiten.

Das Drehmoment, das auf eine rotierende Kugel in einer gleichförmigen Strömung im Stokes-Bereich wirkt, wurde von Kirchhoff [93] analytisch zu

$$\underline{M} = -\pi d^3 \rho \nu \underline{\omega}_{Pa} \quad \text{bzw.} \quad c_M = 16 \frac{S_{Pa}}{Re} \quad (3.27)$$

bestimmt. Faxén [50] berechnete für das auf eine in einer linearen Scherströmung feststehende Kugel wirkende Drehmoment

$$\underline{M} = \pi d^3 \rho \nu \underline{\omega}_{Fl} \quad \text{bzw.} \quad c_M = 16 \frac{S_{Fl}}{Re} . \quad (3.28)$$

Aus und (3.27) und (3.28) folgt im Gleichgewicht $\underline{\omega}_{Pa} = \underline{\omega}_{Fl}$. Alle in diesem Kapitel erwähnten analytischen Lösungen sind nur für unbegrenzte Strömungen gültig. Ladenburg [99] und Faxén [50] bestimmten theoretisch und z.B. Fidleris und Whitmore [53] und Sutterby [180] ermittelten experimentell, dass angrenzende Wände zu einer Erhöhung des Widerstandes führen.

Die Bestimmung des Strömungswiderstandes von Partikeln in einer gleichförmigen Strömung war auch in neuerer Zeit Gegenstand zahlreicher experimenteller Arbeiten. Die Kugel war dabei die am meisten untersuchte Körperform. Ab der Mitte des 19. Jahrhunderts wurden die meisten experimentellen Werte des Strömungswiderstandes von Partikeln bei kleinen Re -Zahlen in Fallversuchen und bei großen Re -Zahlen in Windkanalversuchen ermittelt. Die ersten exakten Messungen zur Bestimmung des Widerstandes einer Kugel führten Allen [6], Arnold [7], Liebster [107], Lunnon [110], Möller [126], Schmiedel [168], Schulz [171] und Zeleny und McKeehan [210] in Fallversuchen, Roos und Willmarth [158] in Schleppversuchen sowie Bacon und Reid [10], Dryden und Kuethe [43], Eiffel [45,46], Flachsbarth [55], Föppl [57], Jacobs [84] und Wieselsberger [202,204] im Windkanal durch. Abbott [1], Dryden und Kuethe [43], Freeman [59], Higgins [79], Wieselsberger [202,] und Zahn et al. [211] maßen den Widerstand von längsangeströmten Sphäroiden oder Stromlinienkörpern im Windkanal und ermittelten für sie einen geringeren Widerstandsbeiwert als für die Kugel.

Den Widerstand von Kreisscheiben oder Platten bestimmten Blasius [18], Eiffel [45], Föppl [57,58], Gebers [63], Jones und Knudsen [89], Ludwig [109], Roos und Willmarth [158], Schmiedel [168], Schubauer und Dryden [170], Squires und Squires [177], Wieselsberger [203,204], Williams [205] und Willmarth et al. [206]. Querangeströmte Kreisscheiben und Platten haben einen hohen Widerstand über den gesamten Re -Zahlen-Bereich. Längsangeströmte Kreisscheiben und Platten haben einen hohen Widerstand bei kleinen Re -Zahlen, aber einen geringen Widerstand bei großen Re -Zahlen.

Chowdhury und Fritz [33] und Pettyjohn und Christiansen [141] führten umfangreiche Fallversuche mit Kugeln, Würfeln, Tetraedern, Oktaedern und Kuboktaedern durch. Für

jeweils verschiedene Achsenverhältnisse ermittelten McNown und Malaika [121] experimentell den Widerstand von querangeströmten Sphäroiden, Zylindern und Quadern, Becker [16], Heiss und Coull [77] und Marchildon und Gauvin [116] von Zylindern und Quadern und Gurel et al. [71], Johnson et al. [87], Schulz [171] und Sheaffer [173] von Quadern bei kleinen Re -Zahlen in Fallversuchen. Den Widerstand von Zylindern maßen u.a. auch Christiansen und Barker [34], Eiffel [45], Jayaweera und Mason [85], Jones und Knudsen [89], Kasper [90], Komar [95], Lasso und Weidman [101], Lee et al. [103], Ludwig [109], McKay et al. [119], Wieselsberger [204] und Williams [205]. Der Widerstand unregelmäßig geformter Partikel wie z.B. Minerale wurde in Fallversuchen von Baba und Komar [9], Briggs et al. [21], Heywood [78], Hottovy und Sylvester [82], Komar und Reimers [96], Miller und M'Inally [124], Needham und Hill [129], Pernolet [140], Schulz [171] und Richards [154] bestimmt. Isometrische Körper und Minerale erfahren einen geringen Widerstand bei kleinen Re -Zahlen und einen geringen oder mittleren Widerstand bei großen Re -Zahlen.

Experimentelle Daten des Widerstands- und Auftriebsbeiwertes in Abhängigkeit des Anströmwinkels existieren nur für gewölbte und ebene Platten [45,58,146] bei großen Re -Zahlen, deren Messungen durch das Interesse der Luftfahrt angeregt wurden.

Mit dem Aufkommen der Computertechnik stellen numerische Simulationen eine weitere Möglichkeit zur Erforschung von Strömungsverhältnissen und der auf Partikel wirkenden Strömungskräfte dar. Numerische Simulationen des Strömungsfeldes um eine feststehende Kugel in einer gleichförmigen Strömung werden ausführlich in Kapitel 3.3 diskutiert. Dagegen existieren nur wenige entsprechende dreidimensionale numerische Untersuchungen der Strömung um nichtsphärische Partikel. Masliyah und Epstein [118] bestimmten numerisch den Widerstand von Sphäroiden mit der Symmetrieachse parallel zur Strömung und mit Achsenverhältnissen von $0,2 \leq c/a \leq 5$ für $1 \leq Re \leq 100$. Wie von Oseen [139] theoretisch vorausgesagt, hatte das Sphäroid mit ungefähr $c/a = 2$ den geringsten Widerstand bei $Re = 1$. Dagegen besaß bei $Re = 100$ das Sphäroid mit $c/a = 5$ den geringsten Widerstand. Den höchsten Widerstand erfuhr das am meisten abgeplattete Sphäroid ($c/a = 0,2$) bei jeder untersuchten Re -Zahl. Das Verhältnis zwischen den Widerstandsbeiwerten der verschiedenen Sphäroide wuchs mit zunehmender Re -Zahl. Pitter et al. [143] und Comer und Kleinstreuer [36] ermittelten numerisch den Widerstand abgeplatteter Sphäroide mit $c/a = 0,05$ bei $0,1 \leq Re \leq 100$ bzw. mit $0,2 \leq c/a \leq 1$ bei $40 \leq Re \leq 120$. Ihre

berechneten Widerstandsbeiwerte stimmen sehr gut mit denen von Masliyah und Epstein [118] überein. Dwyer und Dandy [44] simulierten die Umströmung eines verlängerten Sphäroids mit $c/a = 1,5, 2$ und 3 bei $10 \leq Re \leq 100$, wenn die Symmetrieachse im Winkel von $0^\circ, 45^\circ$ und 90° zur Strömung steht. Bei jeder untersuchten Re -Zahl besaß das Sphäroid mit $c/a = 3$ bei 0° den geringsten Widerstand und dasselbe Sphäroid bei 90° den höchsten Widerstand.

Für den Stokes-Bereich bestimmten Youngren und Acrivos [209] numerisch den Widerstand von Zylindern mit $0,5 \leq c/a \leq 100$ mit der Symmetrieachse parallel zur Strömung. Ihre Ergebnisse sind in perfekter Übereinstimmung sowohl mit den experimentellen Ergebnissen von Heiss und Coull [77] als auch mit Batchelors theoretischem Ergebnis (3.18). Rosendahl [159] berechnete numerisch den Widerstand und den dynamischen Auftrieb eines Zylinders und eines Ellipsoids in Abhängigkeit des Anströmwinkels bei $Re \approx 1000$. Seine Rechnungen zeigen die starke Abhängigkeit des Widerstandes von der Partikelorientierung; bei Queranströmung war der Widerstand mehr als doppelt so groß wie bei Längsanströmung. Der Auftriebsbeiwert erreichte Werte von bis zu 50% des Widerstandsbeiwertes.

Die Widerstandsbeiwerte von feststehenden Partikeln in einer gleichförmigen Strömung aus einigen der oben genannten experimentellen und numerischen Untersuchungen sind in Abbildung 3.5 zusammengefasst. Man erkennt den starken Einfluss der Re -Zahl, der Partikelform und der Partikelorientierung. Bei kleinen Re -Zahlen haben die längsangeströmten Sphäroide den geringsten Strömungswiderstand und Kreisscheiben und Platten den höchsten Widerstand. Bei großen Re -Zahlen erfahren längsangeströmte Sphäroide, Stromlinienkörper und Platten den geringsten Widerstand und querangeströmte Kreisscheiben und Platten den größten Widerstand.

Für den Fall einer in einer gleichförmigen Strömung rotierenden Kugel wurden Messungen der Widerstandskraft und der Auftriebskraft von Maccoll [111], Davies [40], Tani [185] und Tanaka et al. [182] im Windkanal bei $Re \approx 10^5$ durchgeführt, wobei Tanaka zusätzlich Sphäroide untersuchte. Alle Autoren beobachteten eine negative Magnus-Kraft bei kleinen Winkelgeschwindigkeiten. Taneda [184] ermittelte das genaue Gebiet von Re -Zahl und Partikeldrallzahl, bei dem der negative Magnus-Effekt auftritt. Barkla und Auchterlonie [13] bestimmten die Magnus-Kraft indirekt aus der Periodendauer der Pendelbewegung einer

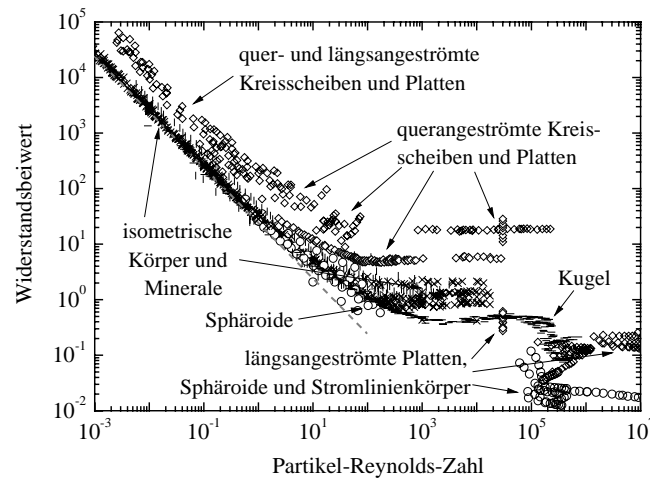


Abbildung 3.5 Widerstandsbeiwerte verschieden geformter Körper aus der Literatur in Abhängigkeit der Partikel-Reynolds-Zahl. ----, Stokes; —, Kugel [6,7,10,46,84,107,158,168,204]; ◇, Kreisscheiben und Platten [58,63,89,158,168,177,203,204,206]; ×, Isometrische Körper [33,77,121,141]; l, Minerale [78,82,129]; ○, Sphäroide und Stromlinienkörper [1,43,44,118,202].

rotierenden Kugel bei $Re \approx 10^3$. Tsuji et al. [192] und Oesterlé und Bui Dinh [134] ermittelten die Magnus-Kraft aus Partikeltrajektorien bei $Re \approx 1000$ bzw. $Re \approx 100$. Die Werte aus der Literatur weisen darauf hin, dass der Auftriebsbeiwert Rubinow und Kellers Gleichung (3.22) bei kleinen Re -Zahlen gehorcht und bei ungefähr $S_{pa} > 1,5$ und $Re > 500$ den Wert von etwa 0,5 annimmt, d.h. dass der Auftriebsbeiwert dann nicht oder nur schwach von der Re -Zahl und der Partikeldrallzahl abhängt. Sawatzki [166] führte Messungen und Dennis et al. [41] Simulationen zur Bestimmung des Drehmomentenbeiwertes einer in einem ruhenden Fluid rotierenden Kugel in Abhängigkeit der Re -Zahl durch. Bei $Re < 10$ stimmte der Drehmomentenbeiwert mit Kirchhoffs Gleichung (3.27) überein und nahm mit steigender Re -Zahl größere Werte im Vergleich zu Kirchhoffs Werte an.

Die Auftriebskraft einer Kugel in einer linearen Scherströmung wurde bei $Re < 1$ von Cherukat et al. [32] experimentell mit einem Bandapparat bestimmt. Der Auftrieb entsprach McLaughlins Gleichung [120]. Yamamoto et al. [208] ermittelten den Widerstand und den Auftrieb einer Kugel in einer schwachen linearen Scherströmung im Windkanal bei großen Re -Zahlen. Ein merklicher Einfluss der Scherströmung auf den Widerstand konnte nicht gefunden werden. Im Gegensatz zu Autons Gleichung (3.26) wirkte ihre Auftriebskraft in Richtung der Seite niedriger Geschwindigkeit. Auch Rife et al. [155] maßen die Auftriebskraft einer Kugel in einer schwachen linearen Scherströmung bei großen Re -Zahlen im

Windkanal und erzielten eine gute Übereinstimmung mit den Werten aus Autons Gleichung, jedoch ohne eine Aussage über die Richtung der Auftriebskraft zu geben.

Numerische Simulationen der Strömung um eine rotierende Kugel in einer gleichförmigen Strömung, um eine feststehende Kugel in einer linearen Scherströmung und um eine rotierende Kugel in einer linearen Scherströmung wurden von Ben Salem und Oesterle [165] und Kurose und Komori [97] bei Re -Zahlen bis zu 40 bzw. 500 durchgeführt. Cherukat et al. [31] berechneten die Auftriebskraft und die Winkelgeschwindigkeit und Bagchi und Balachandar [11] zusätzlich die Widerstandskraft einer Kugel in einer linearen Scherströmung bei $Re \leq 2$ bzw. $0,5 \leq Re \leq 200$, wobei die Kugel entweder frei rotierte oder ruhte. Bei kleinen Re -Zahlen hatte die Rotation kaum Auswirkung auf den Auftrieb, bei großen Re -Zahlen wurde der Auftrieb durch die Rotation erhöht. In allen vier oben erwähnten Literaturstellen stimmte bei kleinen Re -Zahlen die Saffman-Kraft gut mit McLaughlins Gleichung [120] überein. Sowohl Kurose und Komori [97] als auch Bagchi und Balachandar [11] ermittelten bei Re -Zahlen größer als etwa 60 eine negative Saffman-Kraft. Die ersten numerischen Simulationen der Strömung um eine feststehende Kugel in einer linearen Scherströmung wurden von Dandy und Dwyer [38] bei $Re \leq 100$ durchgeführt. Bei kleinen Re -Zahlen stimmte ihr Auftrieb besser mit Saffmans Gleichung (3.23) als mit McLaughlins (3.25) überein und eine negative Saffman-Kraft wurde nicht beobachtet. Sowohl Cherukat et al. [31] als auch Bagchi und Balachandar [11] erhielten eine gute Übereinstimmung ihrer Winkelgeschwindigkeit mit Faxéns Gleichung (3.28) bei kleinen Re -Zahlen und geringere Winkelgeschwindigkeiten verglichen mit Faxén bei größeren Re -Zahlen. Nirschl [132] bestimmte numerisch die Winkelgeschwindigkeit eines Sphäroids in einer linearen Scherströmung und erhielt auch für sie geringere mittlere Winkelgeschwindigkeiten mit steigender Re -Zahl.

3.3 Kugelumströmung

Seit den Stabilitätsuntersuchungen von Natarajan und Acrivos [128] ist allgemein anerkannt, dass die Kugelumströmung zwischen dem stationären axialsymmetrischen Regime und dem zeitabhängigen Regime ein stationäres nicht axialsymmetrisches Regime durchläuft. Die verschiedenen Strömungsregime lauten im Einzelnen wie folgt. Bei kleinen Re -Zahlen ist die Kugelumströmung stationär, axialsymmetrisch und ablösungsfrei (Bereich I). Die erste Änderung in der Strömung tritt bei Re_1 auf, bei der sich die Strömung ablöst, aber stationär

und axialsymmetrisch bleibt (Bereich II). Die Nachlaufänge und der Ablösewinkel wachsen mit steigender Re -Zahl. Der zweite Übergang findet bei Re_2 statt, wo die Strömung von axialsymmetrisch zu ebenensymmetrisch wechselt, aber weiterhin stationär bleibt (Bereich III). Bei dem dritten Übergang bei Re_3 wird die Strömung zeitlich periodisch, es bildet sich jedoch keine Wirbelstraße hinter der Kugel. Die Strömung bleibt ebenensymmetrisch (Bereich IV). Der vierte Übergang tritt bei Re_4 auf, bei dem sich zeitlich periodisch Wirbel ablösen und sich eine Wirbelstraße hinter der Kugel bildet. Die Strömung ist weiterhin ebenensymmetrisch (Bereich V). Bei dem fünften Übergang bei Re_5 bilden sich unregelmäßig geformte Wirbel und Zeitperiodizität und Ebenensymmetrie gehen verloren (Bereich VI). Es gibt zwei weitere Strömungsregime, die nur erwähnt werden sollen. Bei $Re \approx 800$ wird der Nachlauf turbulent, d.h. es treten kleinere Skalen der Fluidbewegung auf [92,164]. Bei der bekannten kritischen Re -Zahl von ungefähr $2,5 \cdot 10^5$ fällt der Widerstand infolge des Umschlages der Grenzschichtströmung von laminar zu turbulent [145] abrupt auf weniger als die Hälfte [10,43,46,55,84,202,204].

Saha [163] stellte anhand numerischer Simulationen fest, dass die Strömungsregime und die dazugehörigen Übergangs- Re -Zahlen der Strömung hinter einem Würfel sehr ähnlich denen der Strömung hinter einer Kugel sind, d.h. es treten auch dort ein stationäres symmetrisches Regime, ein stationäres ebenensymmetrisches Regime und ein instationäres ebenensymmetrisches Regime auf. Einig Autoren beobachteten periodische Bewegungen von frei fallenden Kreisscheiben [54,168,206] und langen Zylindern [115] ab ungefähr $Re = 100$ und eine chaotische Bewegung bei größeren Re -Zahlen, die auf ein Regime periodischer bzw. chaotischer Strömung auch für diese Partikelformen hinweisen.

In den eigenen numerischen Simulationen wird die Kugel mit dem Durchmesser d in einer gleichförmigen Strömung in der Mitte der Querschnittsfläche des Rechengebietes festgehalten. Dazu wird, wie in Abbildung 3.6 schematisch dargestellt, am Eintritt ($x = 0$) eine gleichförmige Strömung vorgegeben, am Austritt gilt die senkrecht zur Austrittsfläche spannungsfreie Randbedingung und an den Seitenwänden die Symmetrierandbedingung. Diese Randbedingungen würden ohne die Kugel zu einer gleichförmigen Strömung über das gesamte Rechengebiet führen. Ist die Strömung axialsymmetrisch, so ist die Symmetrierandbedingung an den Seitenwänden äquivalent zu der periodischen Randbedingung. Das

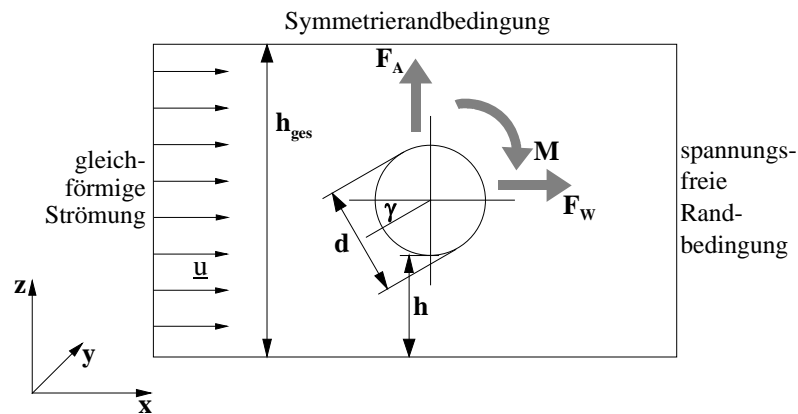


Abbildung 3.6 Strömungskonfiguration für die Kugelumströmung.

Rechengebiet ist quaderförmig und hat eine Größe von $14,5d \times 5d \times 6,2d$. Alle Partikelbeiwerte werden mit den Korrekturen für den Seitenwandeinfluss von Kapitel 2.6 berichtigt, um die Werte für unbegrenzte Strömungen zu erhalten. Um eine genügend genaue Auflösung des Strömungsfeldes um das Partikel zu gewährleisten, ist bis $Re = 240$ ein Kugeldurchmesser von 12 Zellen ausreichend. Bei größeren Re -Zahlen wird die Partikelauflösung linear größer bis zu einem Wert von 24 Zellen für den Kugeldurchmesser bei $Re = 480$. Die Widerstandsbeiwerte werden zusätzlich mit den Korrekturen für die Auflösung von Kapitel 2.5 berichtigt.

Experimentell und numerisch ermittelte Werte der Übergangs- Re -Zahlen Re_1, Re_2, \dots, Re_5 , einschließlich der eigenen, sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst. Die Bereiche der eigenen Übergangs- Re -Zahlen stimmen hervorragend mit der Literatur überein. Die verschiedenen Strömungsregime bei $Re \leq 400$, die experimentellen c_w -Werte von Allen [6], Arnold [7], Liebster [107], Schmiedel [168] und Roos und Willmarth [158] und die eigenen Ergebnisse sind in Abbildung 3.7 über die Re -Zahl dargestellt. Die experimentellen und die eigenen c_w -Werte stimmen sehr gut miteinander überein.

Abbildung 3.8 und Abbildung 3.9 zeigen die Druckverteilung auf der Kugeloberfläche bei $Re = 0,3$ bzw. $Re = 200$ in Abhängigkeit des in Abbildung 3.6 eingezeichneten Winkels γ . Die linke Achse zeigt den Druck im Verhältnis zum Staudruck und die rechte Achse zeigt den Druck im Verhältnis zur Widerstandskraft. Für $Re = 0,3$ ist zusätzlich die theoretische Druckverteilung nach Stokes [179] aufgetragen. Die berechnete Druckverteilung bei $Re = 0,3$ besitzt die gleiche Form wie die theoretische, d.h. die Druckverteilung ist invers punkt-

Experimentelle Übergangs- Re -Zahlen					
Autor	Re_1	Re_2	Re_3	Re_4	Re_5
Taneda [183]	24				
Nakamura [127]	7	190			
Magarvey und Bishop [112]		210	270	290	
Wu und Faeth [207]		200		280	
Provansal und Ormières [149]		180	280	310	360
Goldburg und Florsheim [66]			270		
Sakamoto und Haniu [164]			280	300	420
Schouveiler und Provansal [169]			270		
Numerische Übergangs- Re -Zahlen					
Autor	Re_1	Re_2	Re_3	Re_4	Re_5
Hamielec et al. [73]	22				
Rimon und Chen [156]	10				
Pruppacher et al. [150]	20				
Magnaudet et al. [114]	20				
Johnson und Patel [88]	20	211	270...280		
Dennis und Walker [42]	20,5				
Shirayama [174]	19				
Natarajan und Acrivos [128]		210	277,5		
Thompson et al. [187]		212	272		
Tomboulides und Orszag [188]		212	270...285	285...300	<500
Lee [104]		250...300		375...400	450...500
Ghidrsa und Dušek [64]			272,3		
Mittal [125]					350...375
Ploumhans et al. [144]					<500
Eigene Rechnung		200...240	240...280	280...320	320...360

Tabelle 3.1 Experimentell (obere Tabelle) und numerisch (untere Tabelle) ermittelte Werte der Partikel-Reynolds-Zahlen beim Übergang zwischen den verschiedenen Strömungsregimen der Kugelumströmung.

symmetrisch um den Kugelmittelpunkt mit dem Maximum am vorderen Staupunkt ($\gamma = 0^\circ$) und dem Minimum am hinteren Staupunkt ($\gamma = 180^\circ$). Der berechnete Druck am vorderen und hinteren Staupunkt ist jedoch um etwa 30% höher bzw. niedriger als der theoretische, was wahrscheinlich auf den Einfluss der Seitenwände zurückzuführen ist. Auch der unkorrigierte c_w -Wert ist nach Abbildung 2.9 für diese Rechengebietshöhe um etwas über 30% zu hoch.

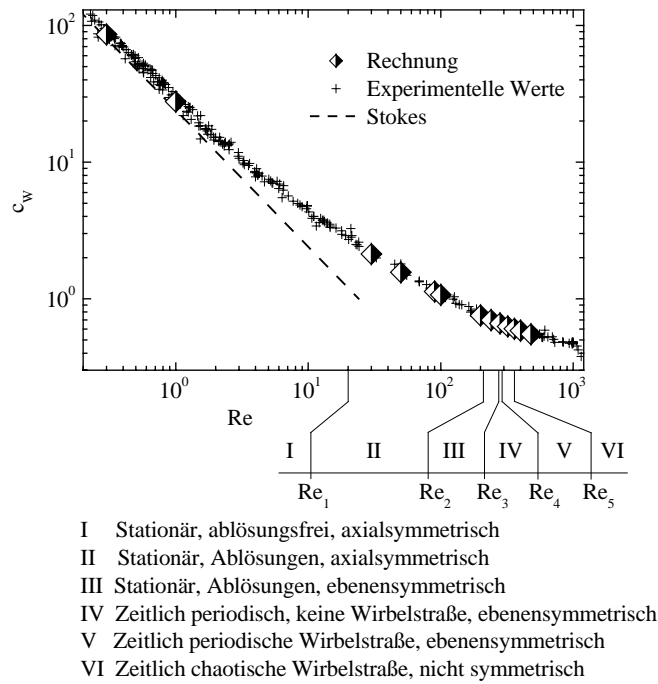


Abbildung 3.7 Vergleich zwischen experimentell ermittelten Widerstandsbeiwerten einer Kugel [6,7,107,158,168] und den eigenen numerischen Ergebnissen in Abhängigkeit der Partikel-Reynolds-Zahl einschließlich der verschiedenen Strömungsregime.

Für reibungsfreie Fluide, d.h. bei sehr großer Re -Zahl, ist die Druckverteilung nach der Potentialströmungstheorie punktsymmetrisch um den Kugelmittelpunkt mit zwei Maxima bei $\gamma = 0^\circ$ und 180° und dem Minimum bei $\gamma = 90^\circ$. Die Druckverteilung nach der Potentialströmungstheorie ist in Abbildung 3.9 für $Re = 200$ mit dargestellt. Die berechnete Druckverteilung hat mit der Potentialströmung gemeinsam, dass bei $\gamma = 0^\circ$ und 180° lokale Maxima und bei $\gamma = 90^\circ$ das Minimum auftreten. Die berechnete Druckverteilung stimmt mit Rimon und Chengs [156] und Tomboulides und Orszags [188] numerischen Ergebnissen von $Re = 200$, die auch in Abbildung 3.9 aufgetragen sind, sehr gut überein.

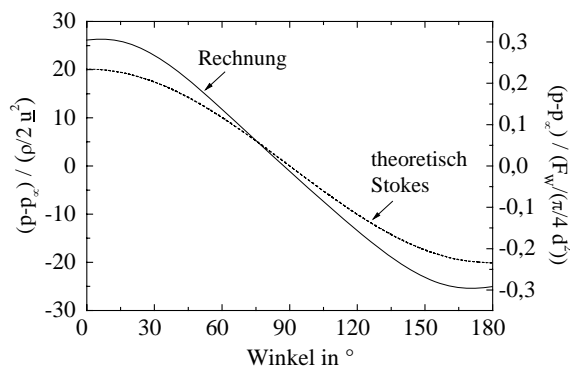


Abbildung 3.8 Druckverteilung an der Kugeloberfläche bei $Re = 0,3$.

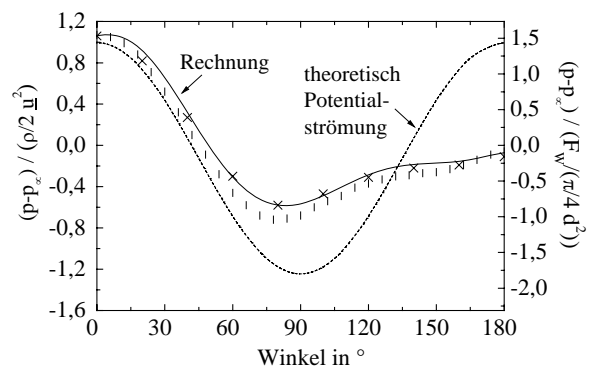


Abbildung 3.9 Druckverteilung an der Kugeloberfläche bei $Re = 200$. Numerische Literaturdaten |, Rimon und Cheng [156]; \times , Tomboulides und Orszag [188].

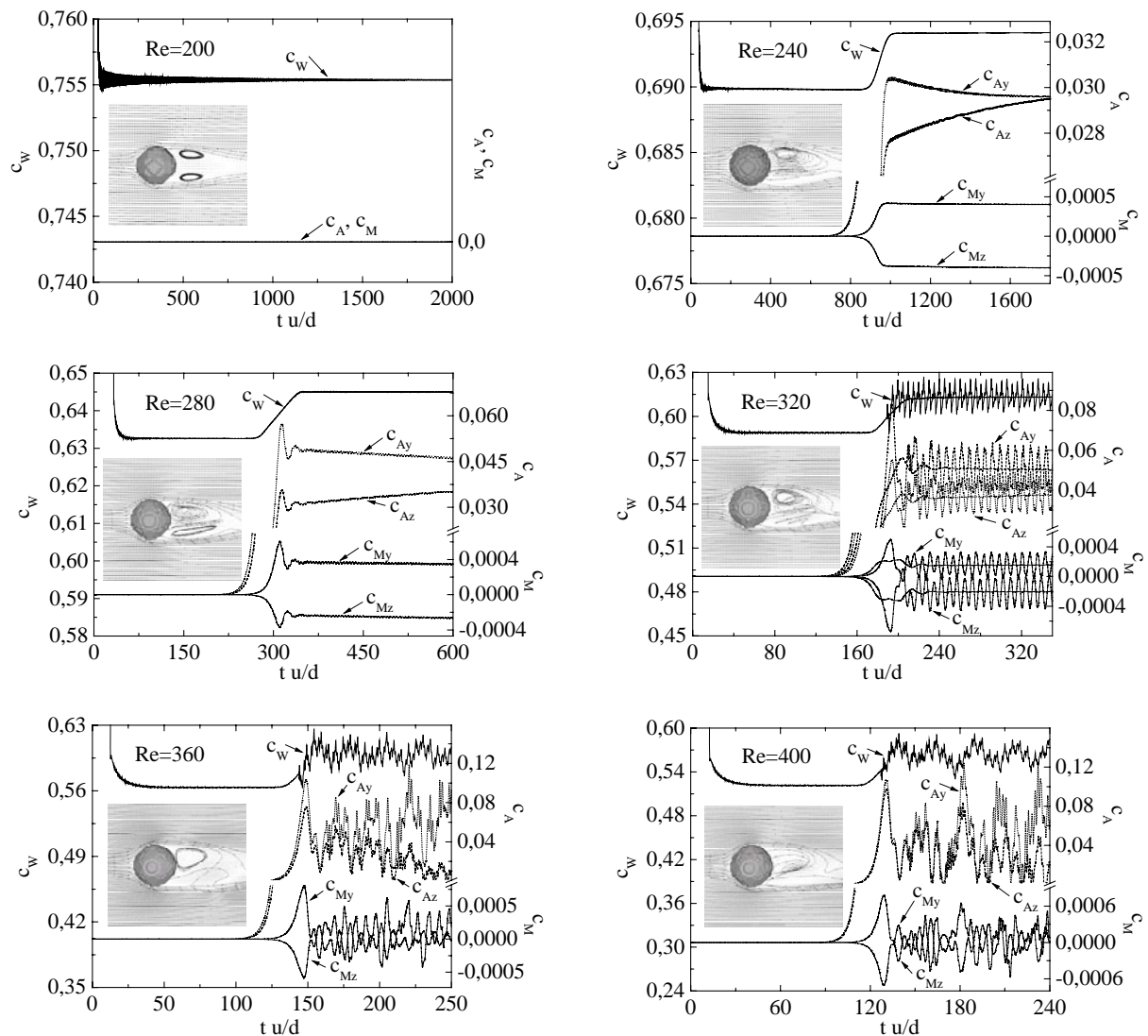


Abbildung 3.10 Zeitlicher Verlauf des Widerstands-, Auftriebs- und Drehmomentenbeiwertes einer Kugel bei $Re = 200, 240, 280, 320, 360$ und 400 .

Die zeitlichen Verläufe des c_w -Wertes, des Auftriebsbeiwertes und des Drehmomentenbeiwertes bei $Re = 200, 240, 280, 320, 360$ und 400 sind einschließlich jeweils eines Bildes der Strömung um die Kugel in den Diagrammen von Abbildung 3.10 dargestellt. Die Anfangsbedingung ist eine gleichförmige Strömung entlang des gesamten Rechengebietes, wodurch der c_w -Wert bei $t = 0$ sehr hoch und der Auftriebs- und der Drehmomentenbeiwert Null sind. Das Verhalten bei den verschiedenen Re -Zahlen ist mit der am Anfang dieses Kapitels aufgeführten Literatur konform. Bei $Re = 200$ (Bereich II) ist die Strömung stationär und axialsymmetrisch mit einem Wirbelring hinter der Kugel. Der Auftrieb und das Drehmoment sind Null. Bei $Re = 240$ (Bereich III) durchläuft die Strömung einen Übergang bei der dimensionslosen Zeit $tu/d \approx 1000$, bei dem ein Auftrieb und ein Drehmoment entstehen und sich der Widerstand abrupt erhöht. Die Strömung ist dann nicht mehr axialsymmetrisch,

jedoch symmetrisch in der $y = z$ -Ebene, die diagonal im Kanal liegt. Bei $Re = 280$ (Bereich IV) ist die Strömung bis auf das Auftreten kleiner periodischer Oszillationen identisch mit der bei $Re = 240$. Bei $Re = 320$ (Bereich V) hat sich eine Wirbelstraße hinter der Kugel gebildet und die Partikelbeiwerte oszillieren periodisch. Die Strömung bleibt nahezu ebenensymmetrisch in der $y = z$ -Ebene. Bei $Re = 360$ und 400 (Bereich VI) ist die Strömung unregelmäßig in Raum und Zeit. Alle Rechnungen sind zu Beginn axialsymmetrisch und stationär; Rechnungen mit nicht axialsymmetrischem oder instationärem Endzustand zeigen bei einer bestimmten Zeit einen scharfen Übergang zum anderen Zustand. Dieser Übergang entwickelt sich automatisch aufgrund des numerischen Rauschens. Es soll hervorgehoben werden, dass alle Daten des c_w -Wertes, des Auftriebsbeiwertes und des Drehmomentenbeiwertes, die in Kapitel 3.4, 3.5 und 3.6 vorgestellt werden, vor Erreichen einer möglicherweise existenten Übergangszeit bestimmt werden.

3.4 Widerstandskraft, Auftriebskraft und Drehmoment eines feststehenden Partikels in einer gleichförmigen Strömung

Zur Bestimmung des Standard-Widerstandsbeiwertes, des Profilauftriebs und des Profildrehmoments wird ein Partikel mit dem Achsenverhältnis c/a unter einem bestimmten Anströmwinkel α in der Mitte der Querschnittsfläche des Rechengebietes, wie in Abbildung 3.11 dargestellt, festgehalten. Als Partikelformen werden die Kugel, der Würfel, der Zylinder mit $c/a = 1$ und das Sphäroid, der Quader und der Zylinder mit jeweils $c/a = 1,5$ bei $Re = 0,3, 30, 90, 240$ und bei bestimmten Orientierungen auch bei $Re = 480$ untersucht. Die minimale Abmessung (l) jedes Partikels verhält sich wie der Kugeldurchmesser im Kapitel 3.3 zur Kugelumströmung, d.h. bei $Re \leq 240$ beträgt l 12 Zellen und bei $Re > 240$ ist l größer als 12 Zellen bis maximal 24 Zellen bei $Re = 480$. Die Strömungskonfiguration ist die gleiche wie im Kapitel 3.3 zur Kugelumströmung, d.h. eine gleichförmige Strömung am Eintritt, die senkrecht zur Austrittsfläche spannungsfreie Randbedingung am Austritt, die Symmetrierandbedingung an den Seitenwänden und ein quaderförmiges $14,5l \times 5l \times 6,2l$ großes Rechengebiet. Die periodische Randbedingung ist an den Seitenwänden im Allgemeinen nicht anwendbar, weil sich mit periodischen Randbedingungen eine nicht axialsymmetrische Strömung direkt nach dem Eintritt nach oben oder unten drehen würde. Alle Partikelbeiwerte werden mit Korrekturen für den Wandeinfluss (siehe Kapitel 2.6) und die Widerstandsbeiwerte auch mit Korrekturen für die Auflösung (siehe Kapitel 2.5)

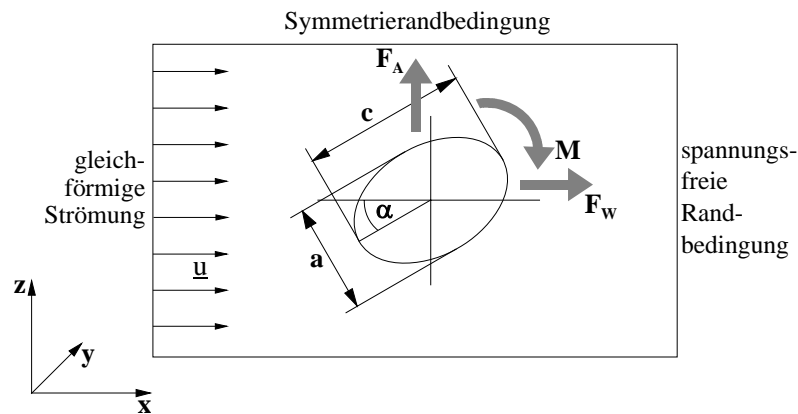


Abbildung 3.11 Strömungskonfiguration für ein feststehendes Partikel in einer gleichförmigen Strömung.

berichtigt. Wie in Abbildung 3.11 zu sehen, ist die Widerstandskraft positiv in x -Richtung, die Auftriebskraft ist positiv in z -Richtung und das Drehmoment ist positiv in y -Richtung.

In Abbildung 3.12 ist der c_w -Wert in Abhängigkeit des Anströmwinkels bei $Re = 0,3, 30, 90$ und 240 dargestellt. Die theoretischen Graphen der Kugel und des Sphäroids im Stokes-Bereich sind dem Diagramm für $Re = 0,3$ hinzugefügt. Zur Konstruktion des theoretischen Verlaufs des Sphäroids wurde Oseens theoretische Lösung für längsangeströmte ($\alpha = 0^\circ$) und querangeströmte ($\alpha = 90^\circ$) Sphäroide [139] und die Stokessche Annahme, dass die Gleichungen linear in der Geschwindigkeit sind, genutzt. Beide theoretischen Verläufe stimmen sehr gut mit den Rechnungen für die Kugel und das Sphäroid überein, die berechneten Werte sind jedoch wahrscheinlich aufgrund der mit $0,3$ für Oseens Lösung zu großen Re -Zahl etwas höher als die theoretischen Werte. Nach der Stokesschen Annahme ist für den Würfel der c_w -Wert konstant über dem Anströmwinkel; die Rechnungen zeigen jedoch, dass der Würfel bei $Re = 0,3$ kleine Schwankungen im c_w -Wert aufweist.

Der Würfel besitzt bei $Re = 0,3$ ein lokales Minimum im c_w -Wert bei $\alpha = 45^\circ$ und der Quader und beide Zylinder haben einen Wendepunkt um $\alpha \approx 45^\circ$. Der Grund dafür ist, dass diese Körper die beste Stromlinienform bei $\alpha = 45^\circ$ besitzen. Insgesamt sind die Schwankungen des c_w -Wertes bei $Re = 0,3$ jedoch relativ klein. Es soll noch einmal darauf hingewiesen werden, dass die Fläche in der Definition des c_w -Wertes (3.6) die Querschnittsfläche der volumenäquivalenten Kugel und daher unabhängig vom Anströmwinkel ist. Bei $Re \geq 30$ sind das lokale Minimum bzw. die Wendepunkte des Würfels, des Quaders und der Zylinder bei

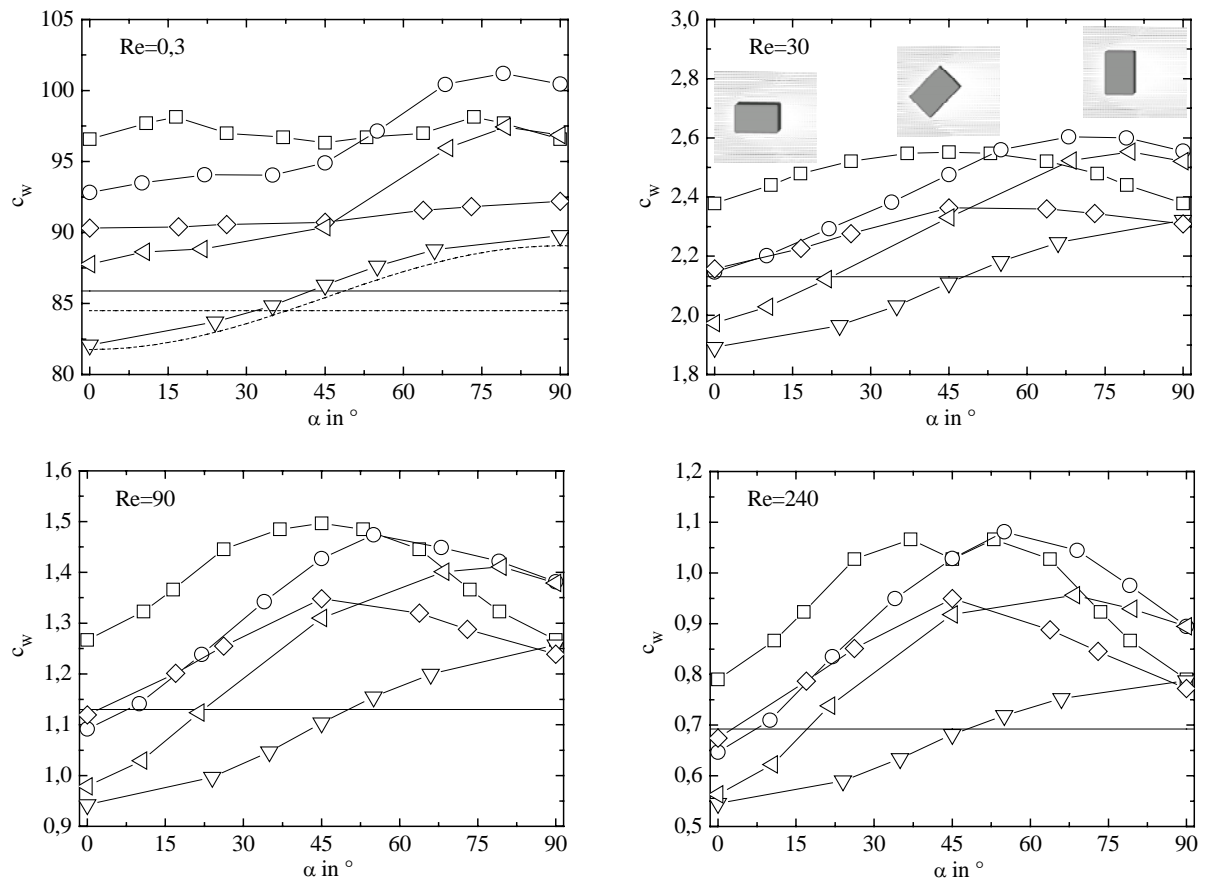


Abbildung 3.12 Widerstandsbeiwert von feststehenden Partikeln verschiedener Form in einer gleichförmigen Strömung in Abhängigkeit des Anströmwinkels bei $Re = 0,3, 30, 90$ und 240 . —, Kugel; ∇ , Sphäroid $c/a=1,5$; \square , Würfel; \circ , Quader $c/a=1,5$; \diamond , Zylinder $c/a=1$; \triangleleft , Zylinder $c/a=1,5$; --, Kugel und Sphäroid theoretisch im Stokes-Bereich mit Oseens Lösung bei 0° und 90° [139].

$\alpha \approx 45^\circ$ nicht mehr vorhanden. Vielmehr haben bei $Re \geq 30$ alle nichtsphärischen Partikel lokale Minima im c_w -Wert bei Orientierungen, bei denen die angeströmte Querschnittsfläche ein lokales Minimum aufweist, d.h. bei $\alpha = 0^\circ$ und, mit Ausnahme des Sphäroids, bei $\alpha = 90^\circ$. Des Weiteren besitzen bei $Re \geq 30$ die nichtsphärischen Partikel den maximalen Widerstand bei ungefähr der Orientierung, bei der die angeströmte Querschnittsfläche den größten Wert aufweist, z.B. der Würfel bei $\alpha = 45^\circ$. Die Ursache für die Änderung des Verhaltens mit der Re -Zahl ist der mit steigender Re -Zahl zunehmende Einfluss des Formwiderstandes aufgrund der zunehmenden relativen Druckänderung um die Körper, wie für die Kugel aus Abbildung 3.8 und Abbildung 3.9, rechte Achse, zu erkennen. Zusammenfassend hat die Stromlinienförmigkeit bei kleinen Re -Zahlen einen größeren Einfluss auf den Widerstand als bei großen Re -Zahlen und die Größe der angeströmten Querschnittsfläche hat bei großen Re -Zahlen einen größeren Einfluss als bei kleinen Re -Zahlen.

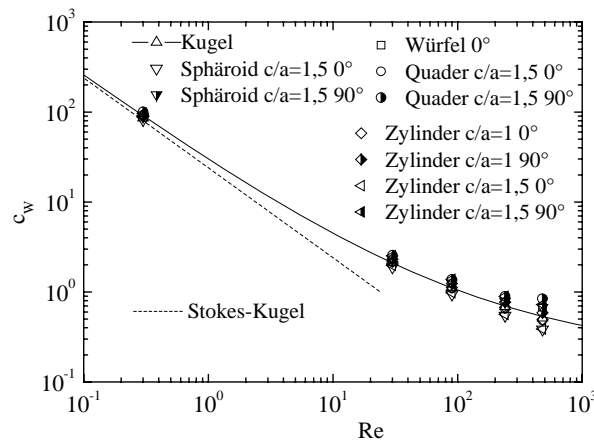


Abbildung 3.13 Widerstandsbeiwert von feststehenden Partikeln verschiedener Form in einer gleichförmigen Strömung in Abhängigkeit der Partikel-Reynoldszahl.

Das längsangeströmte Sphäroid besitzt den geringsten Widerstand aller Partikel bei jeder der hier untersuchten Re -Zahlen. Bei $Re \geq 90$ haben ferner alle längsangeströmten Partikel mit $c/a = 1,5$ einen geringeren Widerstand als die Kugel aufgrund ihrer kleinen angeströmten Querschnittsflächen. Der Quader oder der Würfel weisen wegen ihrer scharfen Kanten und Ecken den maximalen Widerstand bei jeder untersuchten Re -Zahl auf.

Die bislang einzigen vorhandenen Literaturdaten über den Widerstand eines dreidimensionalen nichtsphärischen Körpers in Abhängigkeit des Anströmwinkels sind die numerischen Ergebnisse von Dwyer und Dandy [44] für ein Sphäroid bei $\alpha = 0^\circ$, 45° und 90° und $10 \leq Re \leq 100$. Ihre c_w -Werte zeigen einen fast linearen Anstieg zwischen $\alpha = 0^\circ$, 45° und 90° in sehr guter Übereinstimmung mit den eigenen Ergebnissen für das Sphäroid.

In Abbildung 3.13 ist der c_w -Wert für die Partikel in längsangeströmter und querangeströmter Position über die Re -Zahl dargestellt. Man erkennt, dass die Streuung des c_w -Wertes mit steigender Re -Zahl stark wächst, oder mit anderen Worten, dass der Widerstand bei großen Re -Zahlen stärker von der Partikelform und der Orientierung beeinflusst wird als bei kleinen Re -Zahlen.

Abbildung 3.14 vergleicht den c_w -Wert der Kugel und des Würfels in Abhängigkeit der Re -Zahl mit experimentellen Werten. Wie im vorherigen Kapitel erläutert, stimmen die Werte für die Kugel sehr gut miteinander überein. Bei $Re = 240$ und 480 sind die experimentell bestimmten Werte für den Würfel mit $\alpha = 0^\circ$ erheblich höher als die numerischen Werte für

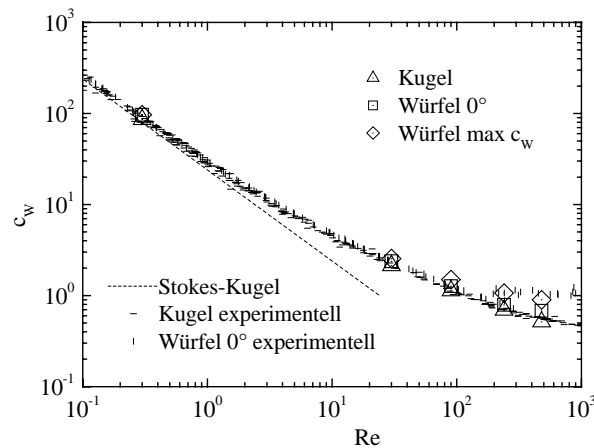


Abbildung 3.14 Vergleich zwischen experimentell ermittelten Widerstandsbeiwerten einer Kugel (Literaturquellen siehe Bildunterschrift von Abbildung 3.7) und eines Würfels [141] und den eigenen numerischen Ergebnissen in Abhängigkeit der Partikel-Reynoldszahl.

$\alpha = 0^\circ$, stimmen aber gut mit den maximalen numerischen c_w -Werten der jeweiligen Re -Zahl überein. Die Ursache für die in Fallversuchen höheren ermittelten c_w -Werte sind wahrscheinlich Bewegungsschwankungen des Würfels, wie sie von Saha [163] numerisch ab $Re \approx 270$ beobachtet wurden.

Im Allgemeinen ergeben sich bei angeströmten nichtsphärischen Partikeln ein Profilauftrieb und ein Profildrehmoment, da die Strömung und die Druckverteilung um die Körper nicht axialsymmetrisch ist, was Abbildung 3.15 beispielhaft für den Quader bei $\alpha = 45^\circ$ und $Re = 90$ zeigt. Genauer gesagt führen der hohe Druck an der stromaufwärtigen großen Seitenfläche und der niedrige Druck an der stromabwärtigen großen Seitenfläche zu einem in Abbildung 3.15 nach unten gerichteten Auftrieb.

Abbildung 3.16 zeigt den Auftriebsbeiwert als Funktion des Anströmwinkels bei $Re = 0,3$, 30 , 90 und 240 . Nach der Stokesschen Annahme besitzt der Würfel keinen Profilauftrieb. Die Rechnungen zeigen, dass der Würfel bei $Re = 0,3$ im Vergleich zum c_w -Wert einen sehr kleinen Auftrieb von maximal $0,1\%$ besitzt. Dagegen erreicht bei $Re = 30$ der Auftriebsbeiwert des Würfels maximal 3% des c_w -Wertes, bei $Re = 90$ 8% und bei $Re = 240$ 9% . Diese Zunahme des Auftriebs ist dadurch begründet, dass der Auftrieb des Würfels fast nur durch den Druck hervorgerufen wird und die Druckänderung um einen Körper, wie oben erwähnt, mit steigender Re -Zahl zunimmt. Der Zylinder mit $c/a = 1$ verhält sich aufgrund seiner dem Würfel ähnlichen Form ähnlich wie der Würfel.

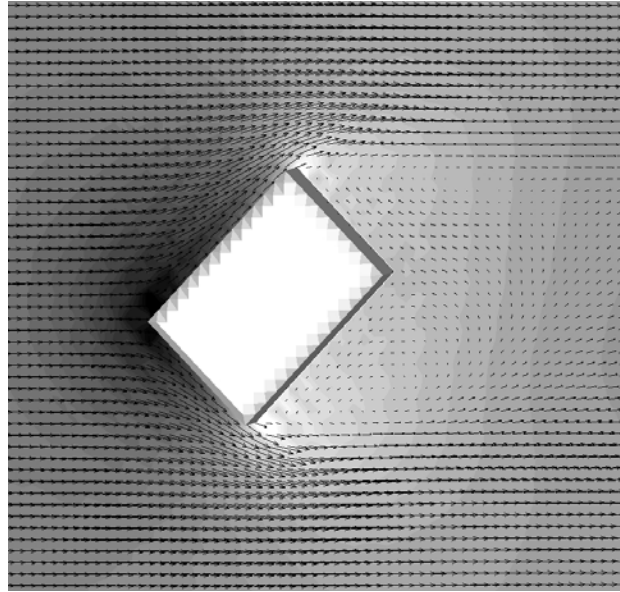


Abbildung 3.15 Geschwindigkeits- und Druckfeld um einen feststehenden Quader in einer gleichförmigen Strömung bei $\alpha = 45^\circ$ und $Re = 90$.

Der theoretische Verlauf für das Sphäroid, der wieder von Oseens Lösung für längs- und querangeströmte Sphäroide [139] und der Stokesschen Annahme abgeleitet wurde, ist dem Diagramm für $Re = 0,3$ hinzugefügt. Der theoretische Graph hat die Form einer Parabel und stimmt gut mit dem berechneten Verlauf für das Sphäroid überein. Darüber hinaus haben bei $Re = 0,3$ alle Graphen der Partikel mit $c/a = 1,5$ in etwa die Form einer Parabel mit dem Minimum bei ungefähr $\alpha = 45^\circ$. Auch bei $Re = 30$ und 90 bleibt der Graph des Sphäroids nahezu parabelförmig. Mit steigender Re -Zahl wird die Form der c_A -Graphen des Quaders und des Zylinders mit $c/a = 1,5$ unsymmetrisch und das Minimum verschiebt sich hin zu einem kleineren Anströmwinkel. Die Ursache dafür liegt in der Änderung der Strömung und der Druckverteilung um die Körper, die bei $Re = 0,3$ und bei jedem Anströmwinkel, wie für den Druck um die Kugel in Abbildung 3.8 zu sehen, nahezu symmetrisch um den Partikelmittelpunkt sind, jedoch bei $Re \geq 30$ im Allgemeinen keine Symmetrie aufweisen.

Bei $Re = 240$ treten bei Orientierungen, bei denen die angeströmten Querschnittsflächen der Partikel jeweils die größten Werte erreichen, hinter den nichtsphärischen Partikeln periodische Strömungsablösungen schon von Beginn der Rechnungen ein, die zu einer Erhöhung des Auftriebsbeiwertes führen. Wie bereits in Kapitel 3.3 erwähnt, wurde das mögliche Eintreten eines Strömungsübergangs zu einem späteren Zeitpunkt, bei dem z.B. Oszillationen in der Strömung auch bei anderen Orientierungen auftreten könnten, nicht abgewartet.

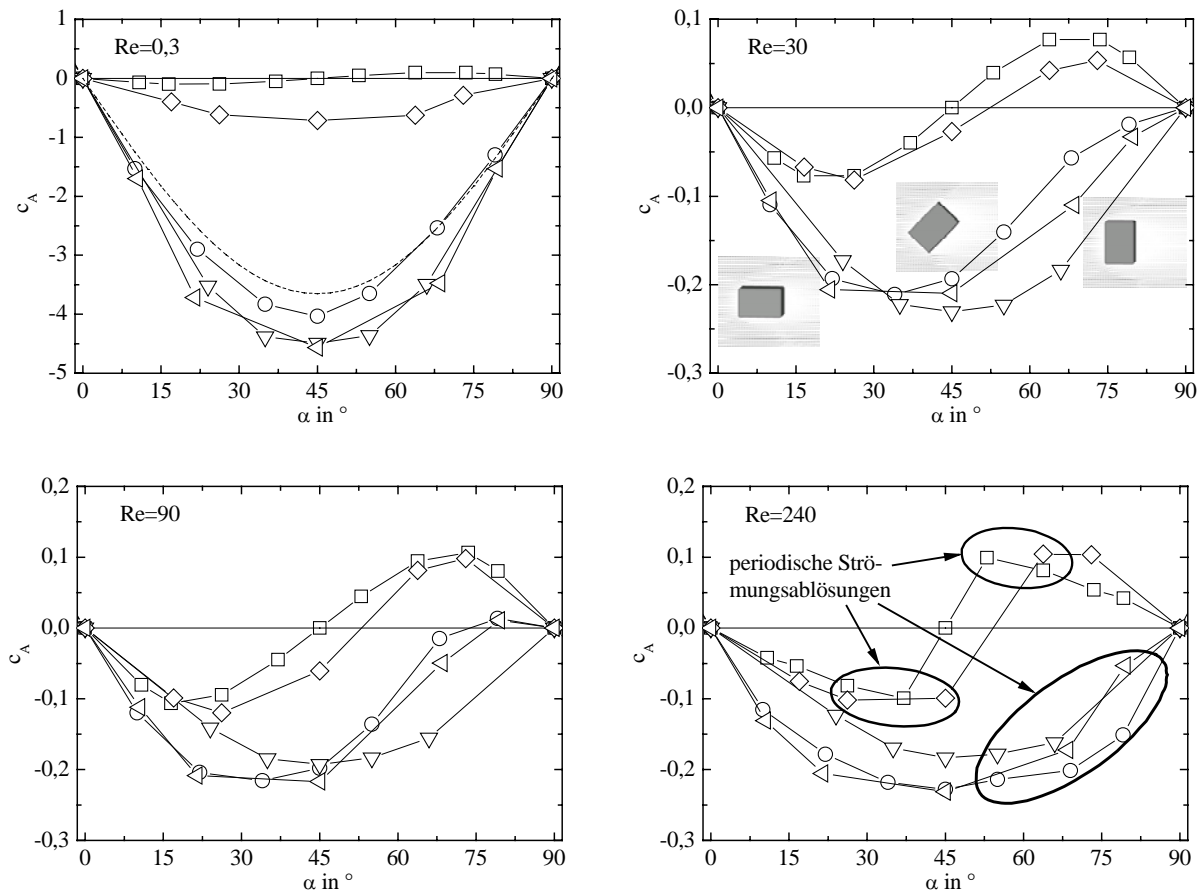


Abbildung 3.16 Auftriebsbeiwert von feststehenden Partikeln verschiedener Form in einer gleichförmigen Strömung in Abhängigkeit des Anströmwinkels bei $Re = 0,3, 30, 90$ und 240 . Symbole wie in Abbildung 3.12.

Die maximalen Auftriebsbeiwerte sind in Abbildung 3.17 über die Re -Zahl dargestellt. Es sollte darauf hingewiesen werden, dass die Mittelwerte (über alle Orientierungen) des Auftriebsbeiwertes, wie auch später im Text die Mittelwerte des Drehmomentenbeiwertes, die auf den ersten Blick vielleicht als die aussagekräftigeren Werte erscheinen, nicht dargestellt werden, weil sie bei Mittelung über 180° gleich Null sind. Die maximalen Auftriebsbeiwerte der Partikel mit $c/a = 1,5$ nehmen zwischen $Re = 0,3$ und $Re = 30$ stark ab. Weil der Würfel und der Zylinder mit $c/a = 1$ bei $Re = 0,3$ sehr kleine relative Auftriebsbeiwerte besitzen, erfahren ihr Auftriebsbeiwerte auch nur eine kleine Änderung zwischen $Re = 0,3$ und $Re = 30$. Für $Re \geq 30$ bleiben alle Auftriebsbeiwerte nahezu konstant. Ein Vergleich zwischen Abbildung 3.17 und Abbildung 3.13 zeigt, dass für jede Partikelform der Einfluss der Auftriebskraft im Vergleich zur Widerstandskraft mit steigender Re -Zahl zunimmt, so erreicht z.B. der maximale Auftriebsbeiwert des Sphäroids bei $Re = 240$ fast 30% des c_w -Wertes.

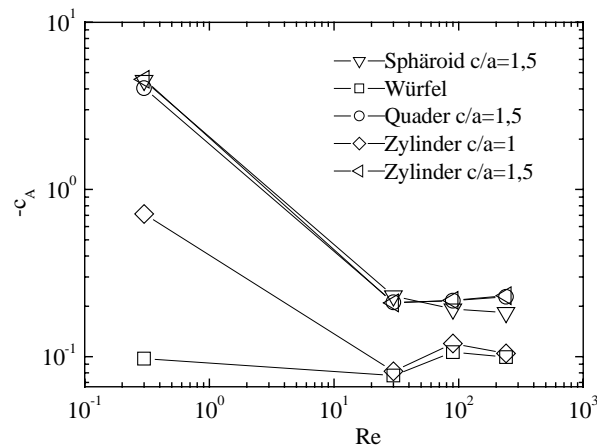


Abbildung 3.17 Maximaler Auftriebsbeiwert von feststehenden Partikeln verschiedener Form in einer gleichförmigen Strömung in Abhängigkeit der Partikel-Reynoldszahl.

Das Profildrehmoment nichtsphärischer Partikel mit $c/a=1,5$ wirkt bis auf wenige Ausnahmen in die Richtung, um das Partikel in die querangeströmte Position zu drehen, d.h. bei $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ entgegen dem Uhrzeigersinn. Die Ursache dafür ist der hohe Druck am vorderen Staupunkt (siehe Abbildung 3.15). Das Verhalten des Drehmomentenbeiwertes über den Anströmwinkel, das in Abbildung 3.18 dargestellt ist, ist dem des Auftriebsbeiwertes sehr ähnlich bis auf die Tatsache, dass sich mit steigender Re -Zahl die Minima des Quaders und des Zylinders mit $c/a=1,5$ hin zu größeren Anströmwinkeln verschieben und dass die periodischen Strömungsablösungen bei $Re = 240$ keinen sichtbaren Einfluss haben.

Ein Partikel ist in einer stabilen Lage, wenn erstens der Drehmomentenbeiwert Null ist und wenn zweitens der Anstieg des c_M -Graphen über den Anströmwinkel positiv ist. Die Partikel mit $c/a=1,5$ befinden sich in einer stabilen Lage in der querangeströmten Position ($\alpha = 90^\circ$) und der Quader bei $Re = 240$ auch in der längsangeströmten Position ($\alpha = 0^\circ$). Für ein Sphäroid in einem reibungsfreien Fluid wurde die querangeströmte Position auch theoretisch als die einzige stabile Lage vorausberechnet [100]. Der Würfel besitzt als stabile Lagen die äquivalenten Positionen bei $\alpha = 0^\circ$ und 90° . Der Zylinder mit $c/a=1$ ist in einer stabilen Position bei $\alpha = 90^\circ$ und bei $Re = 90$ und 240 auch bei 0° . Dieses Partikelverhalten stimmt mit der Beobachtung mehrerer Autoren [54,85,95,115,121,141,168,171,206] überein, dass bei stationärer Bewegung und bei etwa $Re > 1$ symmetrische Partikel mit der größten Hauptquerschnittsfläche senkrecht zur Bewegungsrichtung (querangeströmte Position) fallen.

Abbildung 3.19 zeigt die maximalen Drehmomentenbeiwerte der einzelnen Partikel in Abhängigkeit der Re -Zahl. Nach der Stokesschen Annahme wirkt kein Profildrehmoment auf

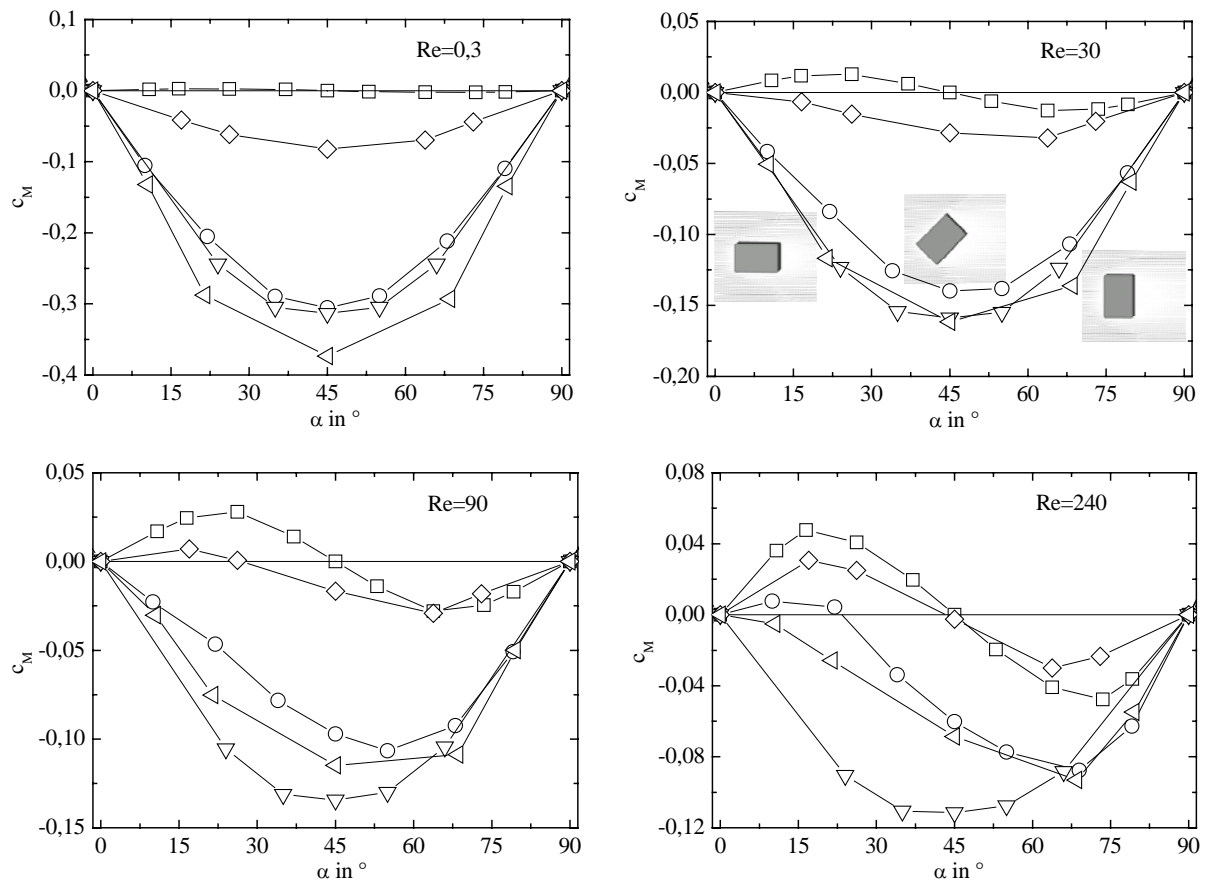


Abbildung 3.18 Drehmomentenbeiwert von feststehenden Partikeln verschiedener Form in einer gleichförmigen Strömung in Abhängigkeit des Anströmwinkels bei $Re = 0,3, 30, 90$ und 240 . Symbole wie in Abbildung 3.12.

ein Partikel mit drei senkrechten Symmetrieebenen [61], d.h. auf alle hier untersuchten Partikel. Dieses Verhalten wurde in Fallversuchen bei kleinen Re -Zahlen, bei denen nichtsphärische Partikel die Orientierung, mit der sie losgelassen wurden, beibehalten, bestätigt [85,121,141,168]. Nach den Rechnungen ist bei $Re = 0,3$ das Verhältnis zwischen dem Drehmomentenbeiwert und dem c_w -Wert maximal 0,4%, d.h. die Rotation ist im Vergleich zur Translation vernachlässigbar. Nach Abbildung 3.19 nehmen die maximalen Drehmomentenbeiwerte der Partikel mit $c/a = 1,5$ mit steigender Re -Zahl gleichmäßig ab, aber die Abnahme ist weitaus geringer als die des c_w -Wertes (Abbildung 3.13). Daher nimmt der Einfluss des Drehmomentenbeiwertes mit steigender Re -Zahl erheblich zu, z.B. erreicht der Drehmomentenbeiwert des Sphäroids bei $Re = 240$ 16% des c_w -Wertes. Aus dem gleichen Grund wie oben für den Auftriebsbeiwert dargelegt, sind die Drehmomentenbeiwerte des Würfels und des Zylinders mit $c/a = 1$ bei $Re = 0,3$ relativ gering, erreichen jedoch bei $Re = 240$ Werte von bis zu 5% des c_w -Wertes.

3.5 Widerstandskraft, Auftriebskraft und Drehmoment eines rotierenden Partikels in einer gleichförmigen Strömung

Die Kugel und das Sphäroid mit $c/a = 1,5$ rotieren mit jeweils vier verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten ($S_{pa} = 0,5, 1, 2$ und 3) in einer gleichförmigen Strömung bei $Re = 0,3, 30, 90$ und 240 . Für die Kugel werden diese vier Winkelgeschwindigkeiten auch bei $Re = 0,003$ und 480 simuliert. Die Randbedingungen (siehe Abbildung 3.20), die Auflösung und die Rechengebietsgröße sind die gleichen wie im vorherigen Kapitel 3.4 eines feststehenden Partikels in einer gleichförmigen Strömung.

Aufgrund der Partikelrotation ist die Strömung um eine Kugel in der Rotationsebene nicht mehr symmetrisch, was zu einer zusätzlichen Querkraft, der sogenannten Magnus-Kraft, und zu einem zusätzlichen Drehmoment führt. Dies wird in Abbildung 3.21 mittels der Stromlinien und des Druckfeldes um die mit $S_{pa} = 1$ rotierende Kugel bei $Re = 90$ veranschaulicht. Die Stromlinien vom unteren Rand der Kugel werden durch die Kugelrotation mit nach oben bewegt, was zu einer Ablenkung aller Stromlinien hinter der Kugel nach oben führt. Bei allen untersuchten Re -Zahlen kleiner gleich 240 tritt mit Ausnahme von $Re = 240$ und $S_{pa} = 2$ keine Wirbelströmung hinter der Kugel auf. Genauer gesagt bildet sich bei $Re = 240$ und $S_{pa} = 2$ eine Wirbelstraße, die vom oberen Rand der Kugel schräg nach oben stromabwärts führt. Die Partikeldrallzahl von 2 kann daher als eine Art „Resonanz“-Winkelgeschwindigkeit für $Re = 240$ angesehen werden. Des Weiteren existiert nur noch ein Staupunkt um die

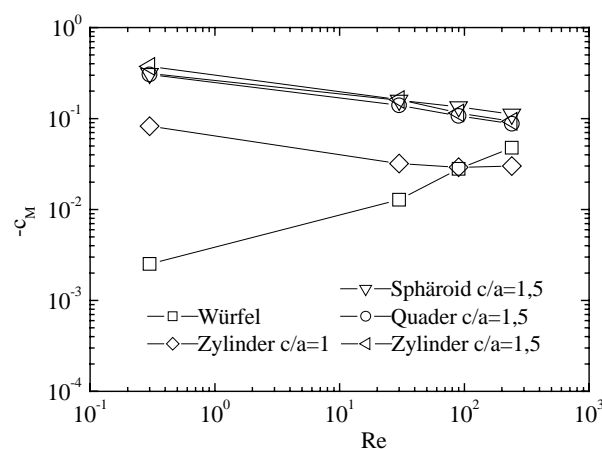


Abbildung 3.19 Maximaler Drehmomentenbeiwert von feststehenden Partikeln verschiedener Form in einer gleichförmigen Strömung in Abhängigkeit der Partikel-Reynolds-Zahl.

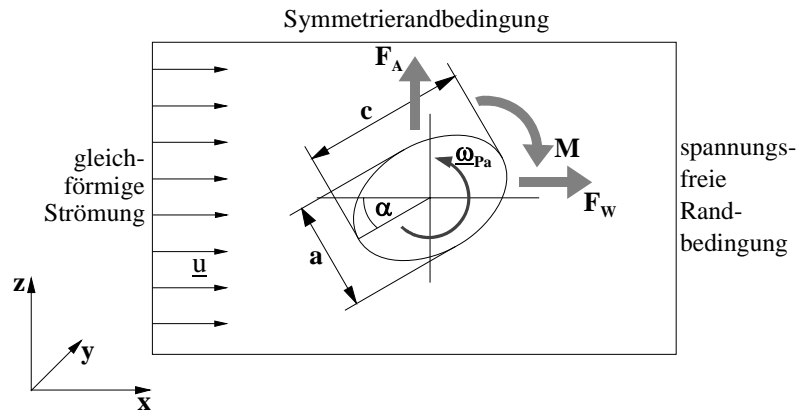


Abbildung 3.20 Strömungskonfiguration für ein rotierendes Partikel in einer gleichförmigen Strömung.

Kugel, der sich nicht mehr auf der Partikeloberfläche befindet, weil die Oberfläche eine Geschwindigkeit hat. Der Staupunkt befindet sich bei $Re = 0,3$ direkt über der Kugel und verschiebt sich mit steigender Re -Zahl stromaufwärts. Auch der Punkt höchsten Druckes liegt auf der oberen Halbkugel, fällt aber nicht mehr mit dem Staupunkt zusammen. Wie in Abbildung 3.21 zu sehen, befindet sich am unteren Rand der Kugel ein Gebiet niedrigen Druckes, was den Magnus-Auftrieb in die untere Richtung hervorruft. Auch der durch die viskosen Spannungen hervorgerufene Auftrieb zeigt bei jeder untersuchten Re -Zahl nach unten, ist aber merklich geringer als der durch Druck hervorgerufene Auftrieb.

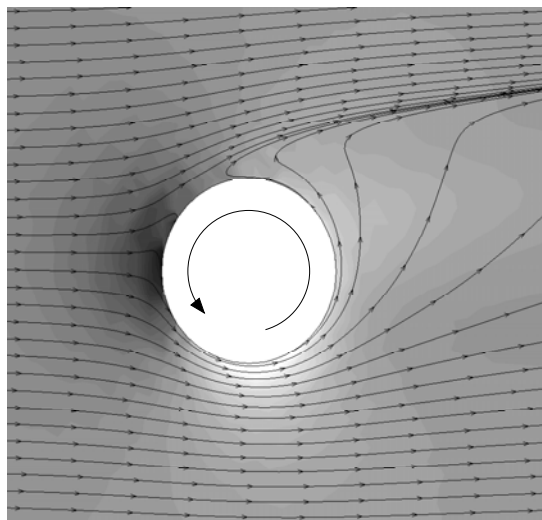


Abbildung 3.21 Stromlinien und Druckfeld um eine rotierende Kugel mit $S_{pa} = 1$ in einer gleichförmigen Strömung bei $Re = 90$.

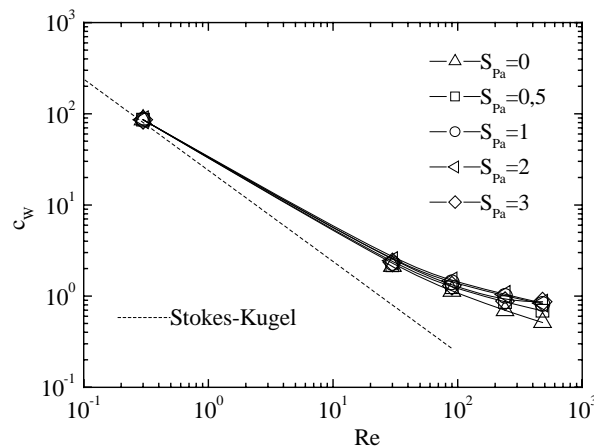


Abbildung 3.22 Widerstandsbeiwert einer rotierenden Kugel mit $S_{Pa} = 0, 0,5, 1, 2$ und 3 in einer gleichförmigen Strömung in Abhängigkeit der Partikel-Reynoldszahl.

Die c_w -Werte der Kugel, die in Abbildung 3.22 über die Re -Zahl aufgetragen sind, erhöhen sich bei jeder untersuchten Re -Zahl mit steigender Partikeldrallzahl bis zu $S_{Pa} = 2$ und werden bei $S_{Pa} = 3$ wieder geringer. Der Unterschied zwischen den c_w -Werten der Kugel bei den verschiedenen Partikeldrallzahlen ist bei $Re = 0,3$ vernachlässigbar klein, wird aber mit steigender Re -Zahl größer. Die mittleren c_w -Werte des Sphäroids zeigen, wenngleich stärker ausgeprägt, das gleiche Verhalten wie die c_w -Werte der Kugel.

Abbildung 3.23 zeigt die c_w -Werte der Kugel und des Sphäroids in Abhängigkeit des Anströmwinkels bei $Re = 0,3, 30, 90$ und 240 . Für das Sphäroid zeigt sich mit Partikelrotation eine Veränderung des Verlaufes des c_w -Wertes über den Anströmwinkel, weil das rotierende Sphäroid seine Lage permanent ändert und damit Gebiete laufend zwischen fluid und solid wechseln. Dadurch wechseln bei Partikelrotation auch die Gebiete niedrigen bzw. hohen Druckes laufend ihren Ort. Die Partikelrotation wirkt sich hauptsächlich auf die Höhe der Schwankungen des c_w -Wertes des Sphäroids mit der Orientierung aus, die sich mit steigender Partikeldrallzahl und mit steigender Re -Zahl sehr stark erhöht, d.h. sie ist bei $Re = 240$ und $S_{Pa} = 3$ maximal. Die Ursache dafür ist das starke Anwachsen der Druckänderung um das Sphäroid mit steigender Re -Zahl und mit steigender Partikeldrallzahl. Bei $Re = 90$ und 240 erfährt das Sphäroid mit $S_{Pa} = 3$ einen negativen Widerstand bei Winkeln von ungefähr $120^\circ < \alpha < 190^\circ$, weil in diesem Bereich hinter dem Sphäroid ein Gebiet hohen

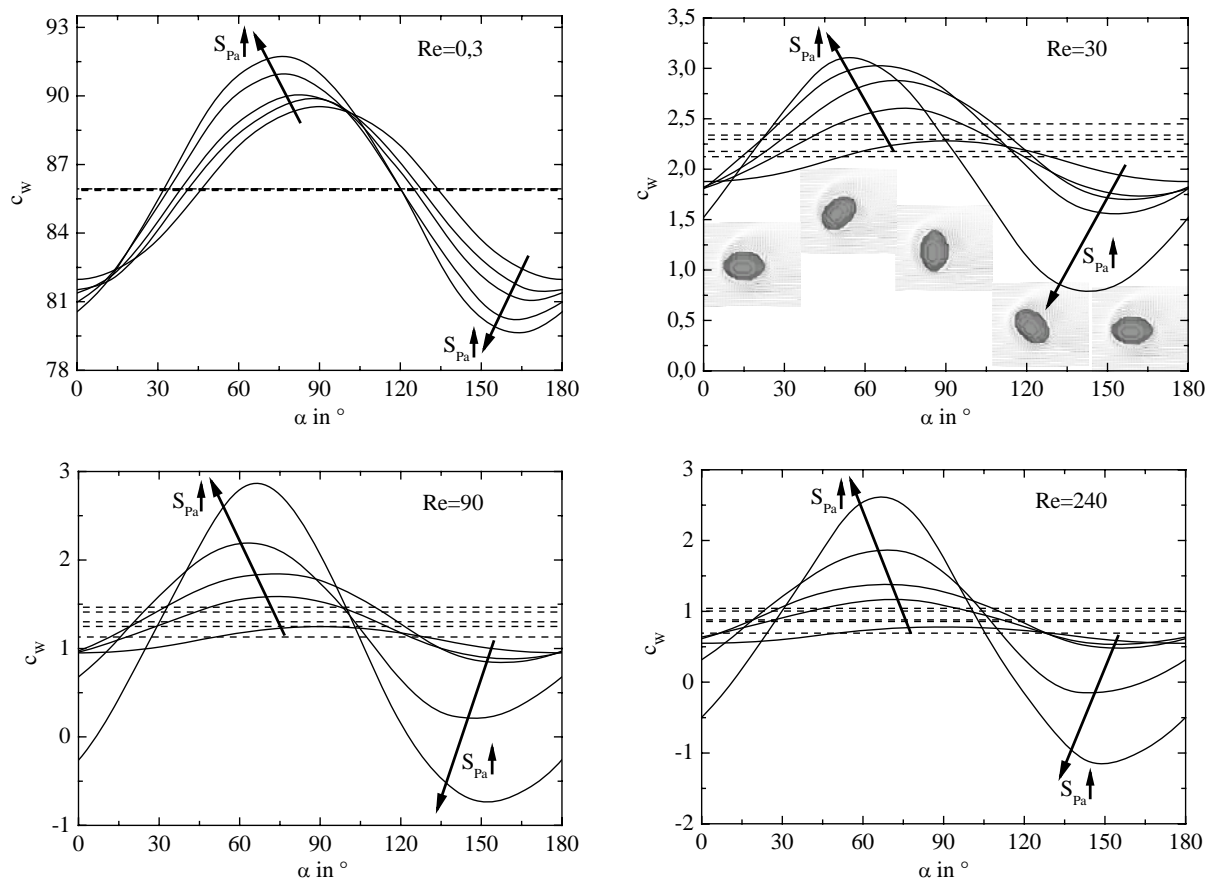


Abbildung 3.23 Widerstandsbeiwert einer rotierenden Kugel und eines Sphäroids ($c/a = 1,5$) mit $S_{Pa} = 0, 0,5, 1, 2$ und 3 in einer gleichförmigen Strömung in Abhängigkeit des Anströmwinkels bei $Re = 0,3, 30, 90$ und 240 . $--$, Kugel; $—$, Sphäroid.

Druckes vorhanden ist. Außerdem beeinflusst die Partikelrotation, wenn auch weniger stark, die Form der c_w -Graphen. Ohne Partikelrotation erfährt das Sphäroid das Minimum im c_w -Wert bei $\alpha = 0^\circ$ und das Maximum bei $\alpha = 90^\circ$. Mit Partikelrotation verschieben sich sowohl Maximum als auch Minimum hin zu kleineren Anströmwinkeln; bei $S_{Pa} = 3$ beträgt diese Verschiebung in etwa 30° .

Abbildung 3.24 zeigt den Auftriebsbeiwert der Kugel, der gleich dem Magnus-Auftriebsbeiwert ist, und den mittleren Auftriebsbeiwert des Sphäroids in Abhängigkeit der Re -Zahl. Eine Erhöhung der Partikeldrallzahl führt zu einer Erhöhung des Betrages des Auftriebs der Kugel bei jeder untersuchten Re -Zahl. Die Auftriebsbeiwerte der Kugel passen sich sehr gut der theoretischen Lösung bei kleinen Re -Zahlen (3.22) an, d.h. der Auftriebsbeiwert ist bei konstanter Partikeldrallzahl über die Re -Zahl konstant. Bei größeren Re -Zahlen als etwa $0,3$ werden die berechneten Auftriebsbeiwerte geringer als die theoretische Lösung für kleine

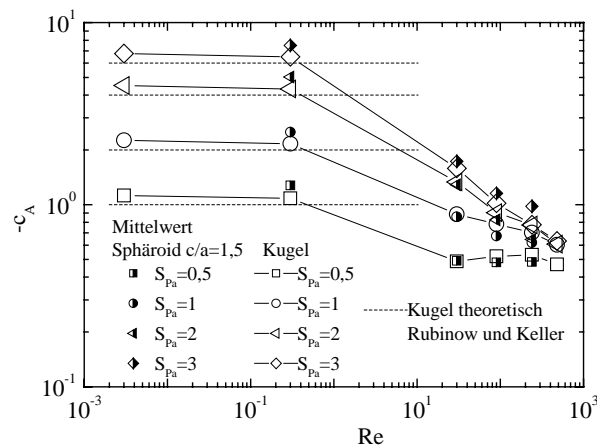


Abbildung 3.24 Auftriebsbeiwert einer rotierenden Kugel und mittlerer Auftriebsbeiwert eines rotierenden Sphäroids ($c/a=1,5$) mit $S_{pa} = 0,5, 1, 2$ und 3 in einer gleichförmigen Strömung in Abhängigkeit der Partikel-Reynoldszahl.

Re -Zahlen. Die Auftriebsbeiwerte von $S_{pa} = 1, 2$ und 3 sind in Übereinstimmung mit Literaturstellen [13,40,111,134,182,185] bei $Re = 240$ fast identisch bei dem Wert von ungefähr $0,7$ und bei $Re = 480$ bei dem Wert von $0,6$. Der Grund für dieses Verhalten liegt in dem Auftreten eines zusätzlichen Gebietes niedrigen Druckes bei $Re \geq 240$ und großer Partikeldrallzahl am oberen Rand der Kugel. Daher steigt der Auftrieb bei $Re \geq 240$ nicht unbegrenzt mit steigender Partikeldrallzahl, sondern nähert sich einem asymptotischen Wert an. Wie aus Abbildung 3.24 zu sehen, verhalten sich die mittleren Auftriebsbeiwerte des Sphäroids ähnlich wie die Auftriebsbeiwerte der Kugel.

Der Verläufe des Auftriebsbeiwertes der Kugel und des Sphäroids sind in Abbildung 3.25 in Abhängigkeit des Anströmwinkels dargestellt. Bei $Re = 0,3$ sind die Graphen des Sphäroids mit steigender Partikeldrallzahl hin zu kleineren Auftriebsbeiwerten und kleineren Anströmwinkeln nahezu parallelverschoben. Wie bei dem c_w -Wert steigen bei $Re = 30, 90$ und 240 die relativen Schwankungen des Auftriebsbeiwertes mit steigender Partikeldrallzahl drastisch an. Ursache ist wiederum der starke Anstieg der Druckänderung um das Sphäroid mit steigender Partikeldrallzahl. Der minimale Auftrieb bei $\alpha \approx 30^\circ$ ist auf das Auftreten eines Gebietes hohen Druckes am oberen Rand des Sphäroids und der maximale Auftrieb bei $\alpha \approx 120^\circ$ auf das Auftreten eines Gebietes niedrigen Druckes am oberen Rand des Sphäroids zurückzuführen.

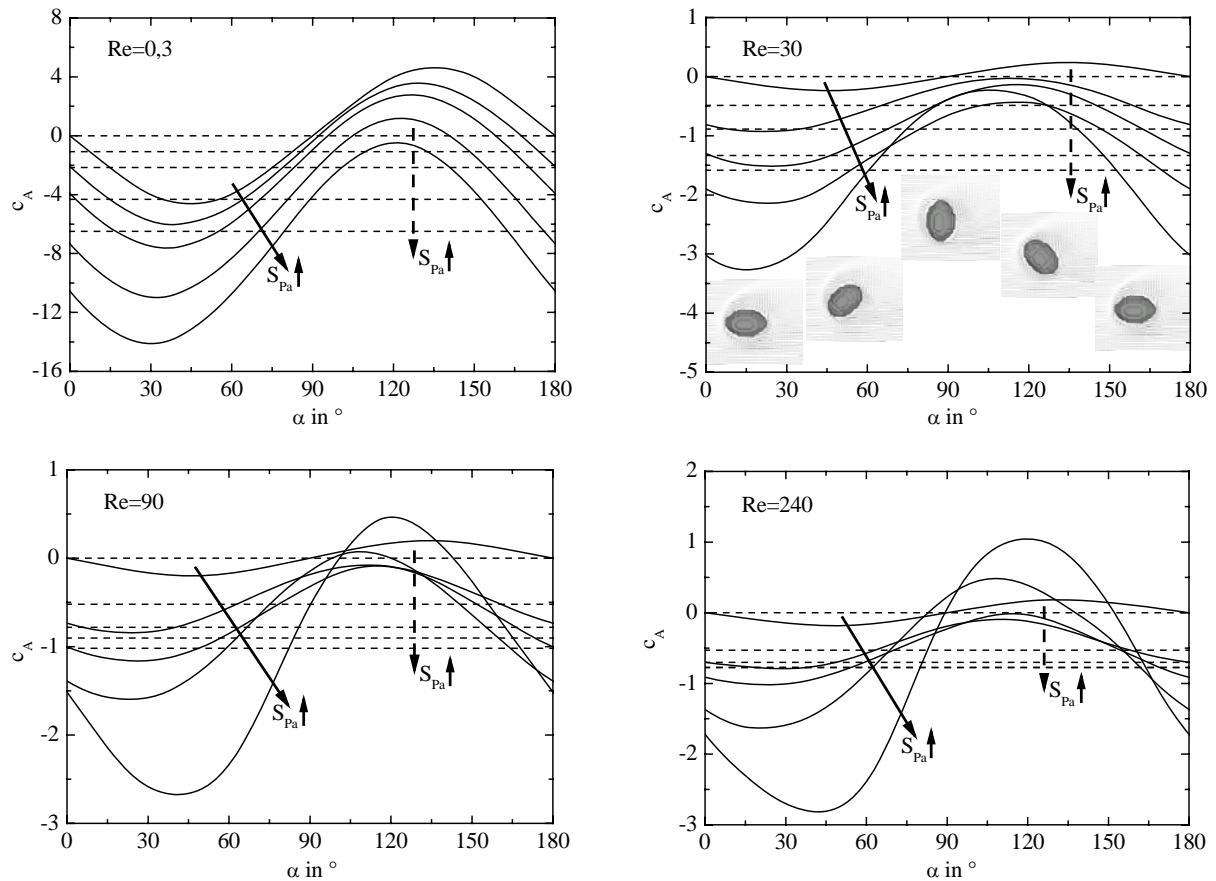


Abbildung 3.25 Auftriebsbeiwert einer rotierenden Kugel und eines Sphäroids ($c/a = 1,5$) mit $S_{Pa} = 0, 0,5, 1, 2$ und 3 in einer gleichförmigen Strömung in Abhängigkeit des Anströmwinkels bei $Re = 0,3, 30, 90$ und 240 . --, Kugel; —, Sphäroid.

Der Verlauf des Drehmomentenbeiwertes der Kugel und des mittleren Drehmomentenbeiwertes des Sphäroids sind in Abbildung 3.26 in Abhängigkeit der Re -Zahl dargestellt. Bei kleiner Re -Zahl geht der Drehmomentenbeiwert der Kugel in Kirchhoffs theoretische Lösung (3.27) über. Mit steigender Re -Zahl wird der Drehmomentenbeiwert höher als die theoretische Lösung. Auch Sawatzki [166] und Dennis et al. [41] ermittelten bei großen Winkelgeschwindigkeiten von Kugeln in einem ruhenden Fluid höhere Drehmomentenbeiwerte im Vergleich zu den theoretischen Werten. Das Drehmoment einer Kugel wird ausschließlich durch die viskosen Wandschubspannungen auf der Kugeloberfläche verursacht. Die Geschwindigkeitsgradienten und damit die viskosen Spannungen sind bei großen Re -Zahlen größer als bei kleinen Re -Zahlen, was zu einem höheren Drehmomentenbeiwert der Kugel bei großen Re -Zahlen im Vergleich zu den entsprechenden Werten im Stokes-Bereich führt. Die Mittelwerte des Sphäroids sind merklich höher als die Werte der Kugel, weil bei nichtsphärischen Partikeln auch die Druckverteilung um den Körper einen Anteil am Drehmoment hat und in die gleiche Richtung wie die viskosen Wandschubspannungen,

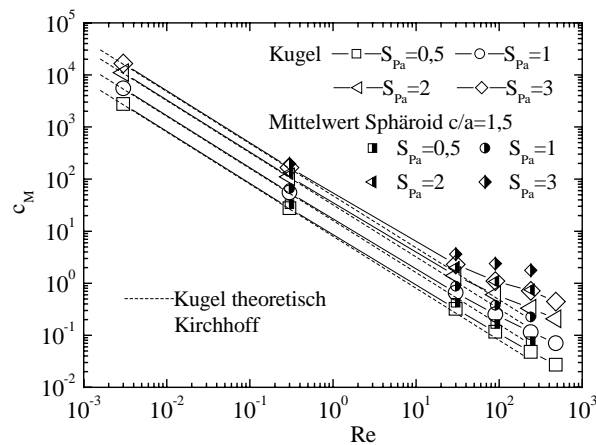


Abbildung 3.26 Drehmomentenbeiwert einer rotierenden Kugel und mittlerer Drehmomentenbeiwert eines rotierenden Sphäroids ($c/a=1,5$) mit $S_{Pa} = 0,5, 1, 2$ und 3 in einer gleichförmigen Strömung in Abhängigkeit der Partikel-Reynoldszahl.

nämlich entgegengesetzt zur Partikelrotation, wirkt. Weil mit steigender Re -Zahl die Druckänderung um einen Körper bedeutender wird, erhöht sich mit steigender Re -Zahl auch der Unterschied im Drehmomentenbeiwert zwischen der Kugel und dem Sphäroid, genauer gesagt von 19% bei $Re = 0,3$ zu 149% bei $Re = 240$ und $S_{Pa} = 3$.

In Abbildung 3.27 ist der Drehmomentenbeiwert als Funktion des Anströmwinkels dargestellt. Eine Vergrößerung der Partikeldrallzahl führt bei jedem Anströmwinkel und bei jeder untersuchten Re -Zahl zu einer Erhöhung des Drehmomentenbeiwertes der Kugel und des Sphäroids. Wie bei dem c_w -Wert und dem Auftriebsbeiwert erhöht sich die Schwankung des Drehmomentenbeiwertes des Sphäroids mit steigender Partikeldrallzahl und mit steigender Re -Zahl. Im Gegensatz zum c_w -Wert und Auftriebsbeiwert ist für den Drehmomentenbeiwert die Abhängigkeit vom Anströmwinkel im Vergleich zur Abhängigkeit von der Partikeldrallzahl gering, weil für das Drehmoment bei jedem Anströmwinkel die Druckspannungen in die gleiche Richtung wirken, nämlich entgegengesetzt zur Partikelrotation.

3.6 Widerstandskraft, Auftriebskraft und Drehmoment eines feststehenden Partikels in einer linearen Scherströmung

Die Kugel und das Sphäroid mit $c/a = 1,5$ befinden sich in linearen Scherströmungen mit Schergeschwindigkeiten von $S_{Fl} = 0,04$ und $S_{Fl} = 0,08$ bei $Re = 0,3, 30, 90$ und 240 . Für die Kugel werden auch $Re = 3$ und 480 simuliert. Abbildung 3.28 zeigt die Strömungs-

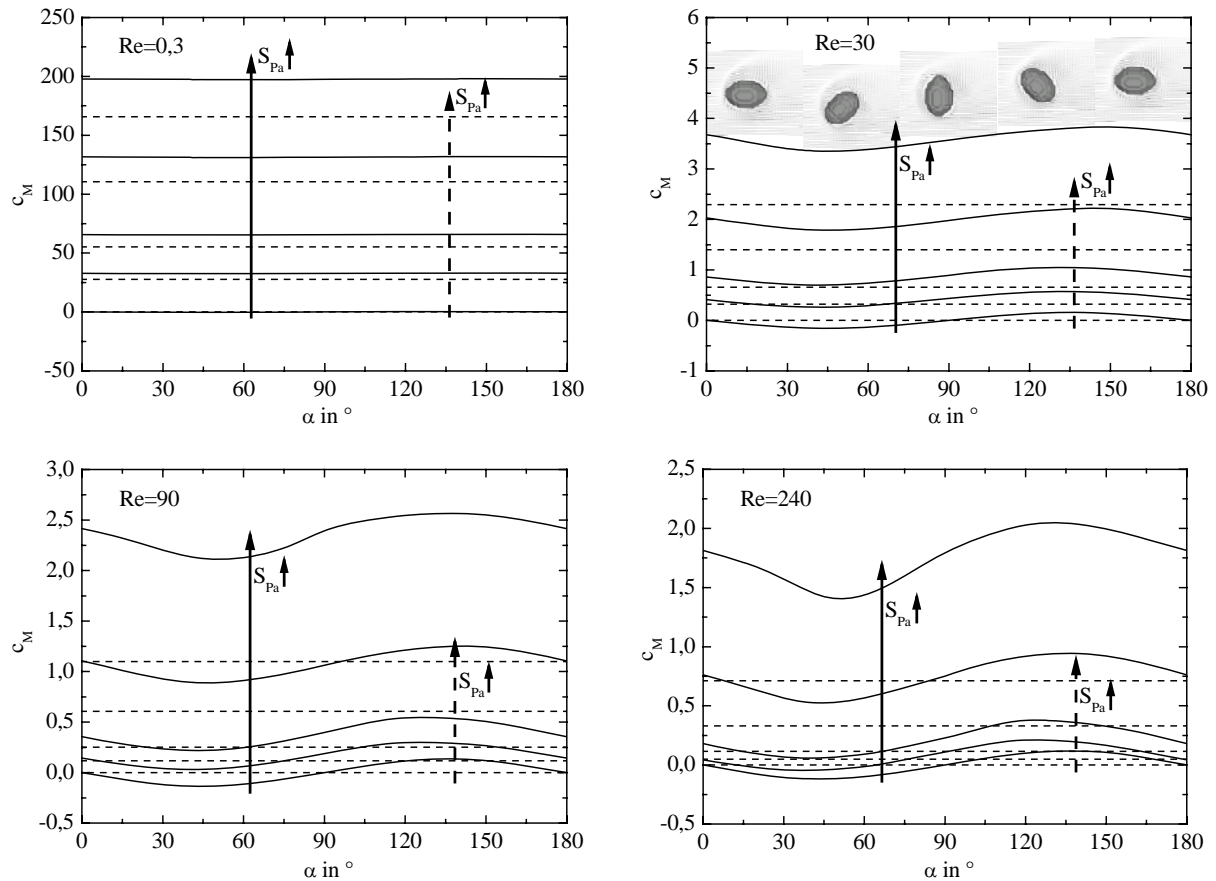


Abbildung 3.27 Drehmomentenbeiwert einer rotierenden Kugel und eines Sphäroids ($c/a = 1,5$) mit $S_{Pa} = 0, 0,5, 1, 2$ und 3 in einer gleichförmigen Strömung in Abhängigkeit des Anströmwinkels bei $Re = 0,3, 30, 90$ und 240 . $--$, Kugel; $—$, Sphäroid.

konfiguration; am Eintritt wird eine lineare Scherströmung mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{Fl} , die gleich dem halben Geschwindigkeitsgradienten des Fluids ist, und am Austritt die senkrecht zur Austrittsfläche spannungsfreie Randbedingung angenommen. An der vorderen und hinteren Seitenwand gilt die Symmetrierandbedingung und an der oberen und unteren Seitenwand die Hafttrandbedingung an einer beweglichen Wand. Mit diesen Randbedingungen würde sich ohne ein Partikel eine lineare Scherströmung über das gesamte Rechengebiet ausbilden.

Die Stromlinien und das Druckfeld um die Kugel mit $S_{Fl} = 0,08$ bei $Re = 90$ sind in Abbildung 3.29 dargestellt. Wie in der Abbildung zu sehen, ist die Strömung in der Scherebene nicht symmetrisch. Die Stromlinien, die vom unteren Rand (Seite niedriger Geschwindigkeit) der Kugel kommen, verlaufen hinter der Kugel in einer S-Kurve nach oben. Wenn Strömungsablösungen auftreten, gibt es nur einen kleinen Wirbel auf der Seite niedriger Geschwindigkeit, dessen Größe mit steigender Fluidzahl weiter abnimmt. Bei $Re = 0,3$

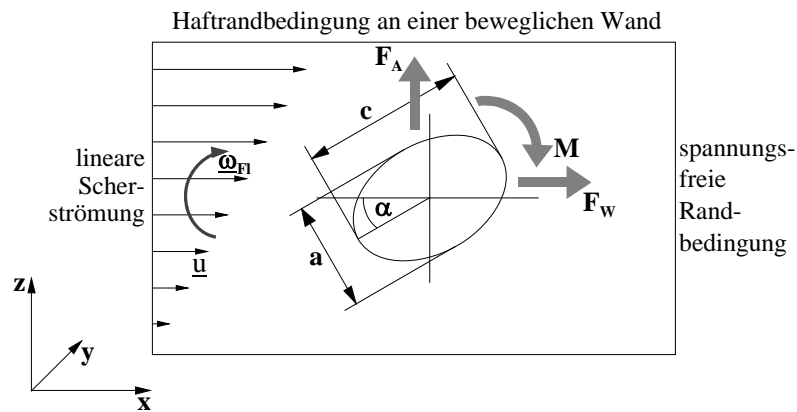


Abbildung 3.28 Strömungskonfiguration für ein feststehendes Partikel in einer linearen Scherströmung.

befindet sich der vordere Staupunkt, wie bei der gleichförmigen Strömung, nahezu direkt vor der Kugel und der Punkt maximalen Druckes hat sich in Richtung der Seite hoher Geschwindigkeit verschoben. Bei $Re \geq 30$ haben sich sowohl der vordere Staupunkt als auch der Punkt maximalen Druckes leicht in Richtung der Seite hoher Geschwindigkeit verschoben.

In Abbildung 3.30 sind die berechneten c_w -Werte der Kugel in Abhängigkeit der Re -Zahl aufgetragen. Abbildung 3.31 zeigt den c_w -Wert der Kugel und des Sphäroids in Abhängigkeit des Anströmwinkels bei $Re = 0,3, 30, 90$ und 240 . Der Widerstand wird bei $Re = 0,3, 30$ und 90 fast gar nicht von der Scherströmung beeinflusst. Bei $Re = 240$ erhöhen sich der Widerstand der Kugel und der maximale Widerstand des Sphäroids, der bei $\alpha = 90^\circ$ auftritt,

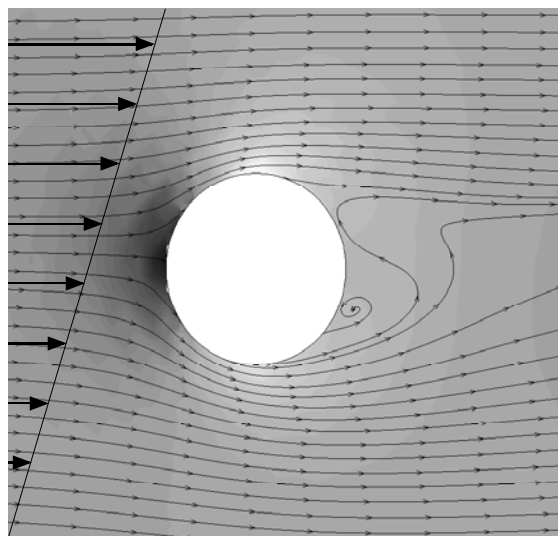


Abbildung 3.29 Stromlinien und Druckfeld um eine feststehende Kugel in einer linearen Scherströmung mit $S_{Fl} = 0,08$ bei $Re = 90$.

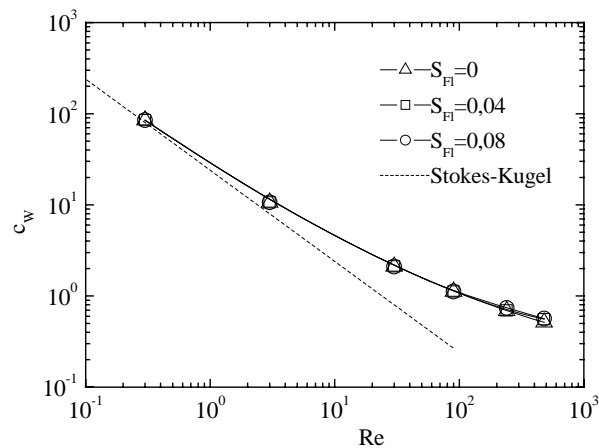


Abbildung 3.30 Widerstandsbeiwert einer feststehenden Kugel in einer linearen Scherströmung mit $S_{Fl} = 0, 0,04$ und $0,08$ in Abhängigkeit der Partikel-Reynoldszahl.

leicht mit steigender Fluidrallzahl, weil sich in diesen Fällen und nur in diesen Fällen die Druckänderung um den Körper mit steigender Fluidrallzahl merklich erhöht.

Wie im Kapitel 2.6 erläutert, ist bei $Re = 0,3$ der Einfluss der oberen und unteren Wand in Übereinstimmung mit Vasseur und Cox' Ergebnis (2.55) maßgeblich und der Auftriebsbeiwert erhöht sich in etwa linear mit der Rechengbietshöhe. Daher können die Ergebnisse bei $Re = 0,3$ nicht mit den für unbegrenzte Strömungen gültigen Lösungen von Saffman und McLaughlin (3.23) bzw. (3.25) verglichen werden. Abbildung 3.32 zeigt den Auftriebsbeiwert der Kugel und den mittleren Auftriebsbeiwert des Sphäroids über die Re -Zahl, wobei im linken Diagramm der Auftriebsbeiwert logarithmisch und im rechten Diagramm linear aufgetragen ist. Die Werte der Kugel nähern sich bei $Re = 0,3$ Vasseur und Cox' Lösung an. Wie im rechten Diagramm in Abbildung 3.32 zu sehen, wechselt bei beiden Fluidrallzahlen der Auftrieb der Kugel bei etwa $Re = 50$ und der mittlere Auftriebsbeiwert des Sphäroids bei etwa $Re = 90$ die Richtung. Die Beträge des Auftriebsbeiwertes der Kugel und des mittleren Auftriebsbeiwertes des Sphäroids sind sowohl vor als auch nach dem Wechsel der Richtung bei $S_{Fl} = 0,08$ höher als bei $S_{Fl} = 0,04$.

Bei $Re = 0,3$ und 3 wird der Saffman-Auftrieb der Kugel zum größten Teil durch die viskosen Spannungen hervorgerufen. Auf der stromaufwärtigen Seite sind die viskosen Wandschubspannungen auf der Seite hoher Geschwindigkeit größer als auf der Seite niedriger Geschwindigkeit und auf der stromabwärtigen Seite sind die viskosen Wandschubspannungen

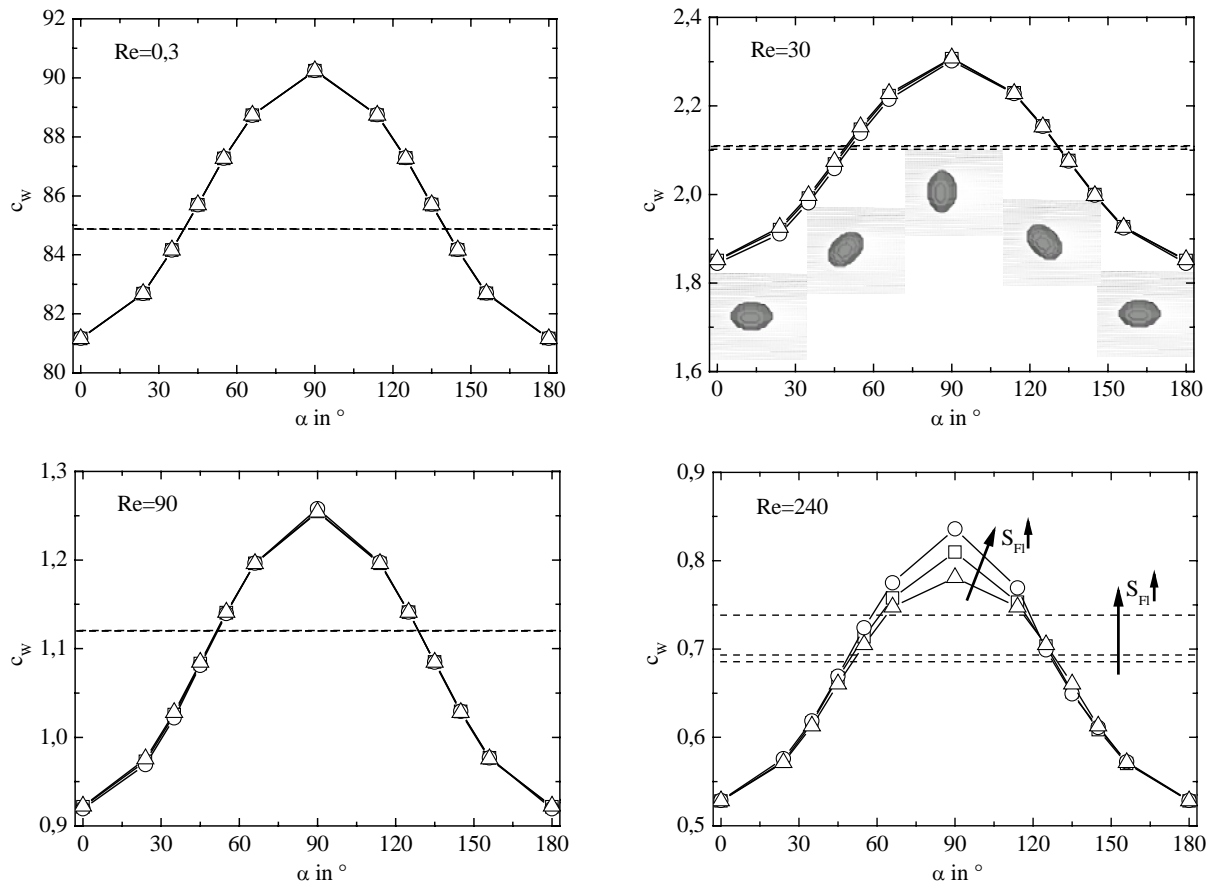


Abbildung 3.31 Widerstandsbeiwert einer feststehenden Kugel und eines Sphäroids ($c/a=1,5$) in einer linearen Scherströmung mit $S_{Fl} = 0, 0,04$ und $0,08$ in Abhängigkeit des Anströmwinkels bei $Re = 0,3, 30, 90$ und 240 . --, Kugel; —, Sphäroid; \triangle , $S_{Fl} = 0$; \square , $S_{Fl} = 0,04$; \circ , $S_{Fl} = 0,08$.

auf der Seite niedriger Geschwindigkeit größer als auf der Seite hoher Geschwindigkeit; damit führen die viskosen Wandschubspannungen auf beiden Seiten zu einem Auftrieb in Richtung der Seite hoher Geschwindigkeit. Der durch den Druck hervorgerufene Auftrieb wirkt auch in Richtung der Seite hoher Geschwindigkeit, ist aber wesentlich kleiner als der durch die viskosen Spannungen hervorgerufene Auftrieb. Im Gegensatz dazu wird bei $Re = 30, 90, 240$ und 480 der Auftrieb sowohl durch die Druckverteilung um den Körper als auch durch die viskosen Spannungen bestimmt. Auf der stromaufwärtigen Seite sind die viskosen Wandschubspannungen auf der Seite hoher Geschwindigkeit kleiner als auf der Seite niedriger Geschwindigkeit, was einen Auftrieb in Richtung der Seite niedriger Geschwindigkeit ergeben würde. Bei $Re = 30$ befindet sich jedoch ein großes Gebiet niedrigen Druckes am oberen Rand der Kugel (Seite hoher Geschwindigkeit) und führt insgesamt zu einem Auftrieb in Richtung der Seite hoher Geschwindigkeit. Wie in Abbildung 3.29 zu sehen, wird bei $Re \geq 90$ der Druck am unteren Rand der Kugel ähnlich klein wie der

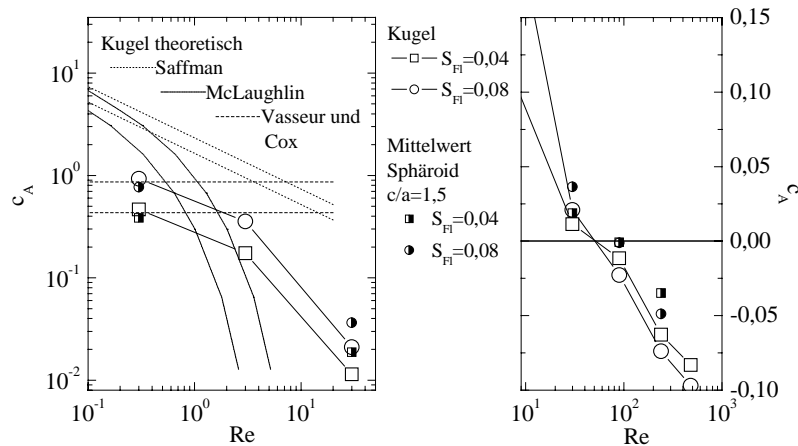


Abbildung 3.32 Auftriebsbeiwert einer feststehenden Kugel und mittlerer Auftriebsbeiwert eines feststehenden Sphäroids ($c/a = 1,5$) in einer linearen Scherströmung mit $S_{Fl} = 0,04$ und $0,08$ in Abhängigkeit der Partikel-Reynoldszahl.

Druck am oberen Rand. Weil außerdem der Druck auf der sehr stromaufwärtigen Seite auf der oberen Halbkugel (Seite hoher Geschwindigkeit) größer ist als auf der unteren Halbkugel (Seite niedriger Geschwindigkeit) wirkt bei $Re \geq 90$ auch der durch Druck hervorgerufene Auftrieb in Richtung der Seite niedriger Geschwindigkeit.

Der Richtungswechsel des Auftriebs einer Kugel trat bei Kurose und Komori [97] bei $Re \approx 60$ und bei Bagchi und Balachandar [11] bei $50 < Re < 100$ auf. Im Gegensatz dazu fanden Dandy und Dwyer [38] keine negative Saffman-Kraft. Mei [122] stellte auf der Basis von Dandy und Dwyers Arbeit eine weit gebräuchliche Approximationsformel für den Saffman-Auftrieb einer Kugel auf. Daher ist bis jetzt die Existenz der negativen Saffman-Kraft weitgehend nicht anerkannt.

Der Auftriebsbeiwert ist in Abbildung 3.33 über den Anströmwinkel aufgetragen. Bei $Re = 0,3$ wird der Auftriebsbeiwert des Sphäroids u.a. wieder von der unteren und oberen Wand bestimmt und der Verlauf des Auftriebsbeiwertes über den Anströmwinkel in einer Scherströmung ist dem in der gleichförmigen Strömung ähnlich, jedoch sind die Schwankungen in einer Scherströmung größer, weil Über- bzw. Unterdruck auf der Seite hoher Geschwindigkeit größere Werte annehmen. Bei $Re = 30$ wird der Saffman-Auftrieb, wie bei der Kugel, durch ein Gebiet niedrigen Druckes am oberen Rand des Sphäroids bestimmt. Daher ist der Saffman-Auftrieb des Sphäroids bei jedem Anströmwinkel positiv und die c_A -Graphen sind mit steigender Partikeldrallzahl hin zu größeren Auftriebsbeiwerten

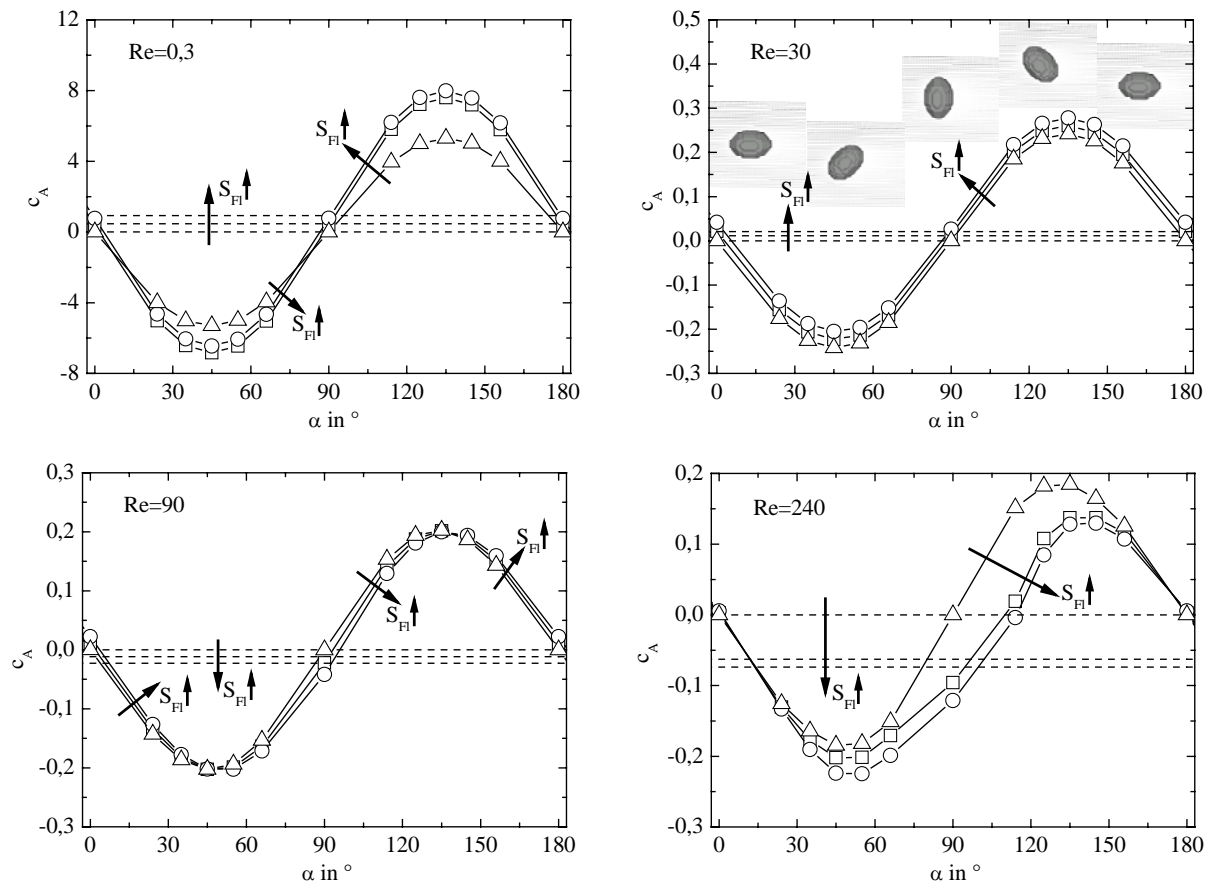


Abbildung 3.33 Auftriebsbeiwert einer feststehenden Kugel und eines Sphäroids ($c/a = 1,5$) in einer linearen Scherströmung mit $S_{Fl} = 0, 0,04$ und $0,08$ in Abhängigkeit des Anströmwinkels bei $Re = 0,3, 30, 90$ und 240 . Symbole wie in Abbildung 3.31.

nahezu parallelverschoben. Der Saffman-Auftrieb des Sphäroids wechselt nicht nur mit der Re -Zahl, sondern bei $Re = 90$ auch mit dem Anströmwinkel seine Richtung; so ist er bei $\alpha = 0^\circ$ positiv und bei $\alpha = 90^\circ$ negativ. Wie bei der Kugel wird der negative Saffman-Auftrieb des Sphäroids durch die Druck- und die viskose Spannungsverteilung auf der stromaufwärtigen Seite hervorgerufen. Bis auf $\alpha = 0^\circ$ ist der Saffman-Auftrieb bei $Re = 240$ durchgehend negativ. Des Weiteren ist bei $Re = 240$ die Differenz im Auftriebsbeiwert sowohl der Kugel als auch des Sphäroids zwischen $S_{Fl} = 0,04$ und $0,08$ wesentlich kleiner als zwischen $S_{Fl} = 0$ und $0,04$. Eine weitere Approximation dieses Verhaltens würde dazu führen, dass sich bei $Re = 240$ der Auftriebsbeiwert der Kugel und der mittlere Auftriebsbeiwert des Sphäroids mit steigender Fluidrallzahl den Wert von ungefähr $0,1$ asymptotisch annähern. Es sei erwähnt, dass ebenso der Magnus-Auftriebsbeiwert ein solch asymptotisches Verhalten mit steigender Partikeldrallzahl zeigte.

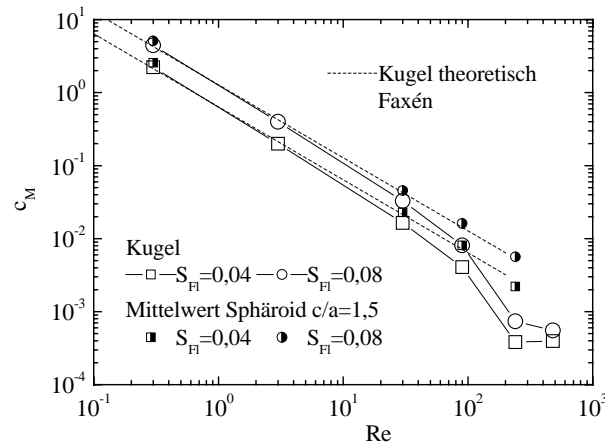


Abbildung 3.34 Drehmomentenbeiwert einer feststehenden Kugel und mittlerer Drehmomentenbeiwert eines feststehenden Sphäroids ($c/a=1,5$) in einer linearen Scherströmung mit $S_{Fl} = 0,04$ und $0,08$ in Abhängigkeit der Partikel-Reynolds-Zahl.

Aufgrund der viskosen Wandschubspannungen in einer Scherströmung wirkt auf die Kugel ein Drehmoment in Richtung der Fluidrotation. Wie in Abbildung 3.34 zu sehen, stimmt bis etwa $Re = 3$ der Drehmomentenbeiwert der Kugel sehr gut mit Faxéns theoretischer Lösung (3.28) bei kleinen Re -Zahlen überein. Zwischen $Re = 90$ und 240 erfährt der Drehmomentenbeiwert einen drastischen Abfall, was mit Bagchi und Balachandars Rechnungen [11] konform geht, und bleibt zwischen $Re = 240$ und 480 nahezu konstant. Die mittleren Drehmomentenbeiwerte des Sphäroids, die auch in Abbildung 3.34 dargestellt sind, liegen nahezu auf einer Geraden. Sie sind bei $Re = 0,3$ 15% höher als der Drehmomentenbeiwert der Kugel bei beiden Fluidrallzahlen und werden viel höher als der Drehmomentenbeiwert der Kugel bei größerer Re -Zahl, bei $Re = 240$ sind sie um 478% bzw. 664% bei $S_{Fl} = 0,04$ bzw. $S_{Fl} = 0,08$ höher. Dieser Trend ist der gleiche wie für das Magnus-Drehmoment und ist wieder dadurch begründet, dass der Drehmomentenbeiwert der Kugel allein durch die viskosen Wandschubspannungen hervorgerufen wird, aber für das Sphäroid der Druck einen zusätzlichen Einfluss hat.

Abbildung 3.35 zeigt den Drehmomentenbeiwert in Abhängigkeit des Anströmwinkels. Bei $Re = 0,3$ wirkt auf das Sphäroid das maximale Drehmoment in einer linearen Scherströmung in der querangeströmten Lage ($\alpha = 90^\circ$) und das minimale Drehmoment in der längsangeströmten Lage ($\alpha = 0^\circ$), was für die Winkelgeschwindigkeit theoretisch von Jeffery [86] und numerisch von Nirschl [132] berechnet wurde. Ferner unterscheiden sich die Graphen des

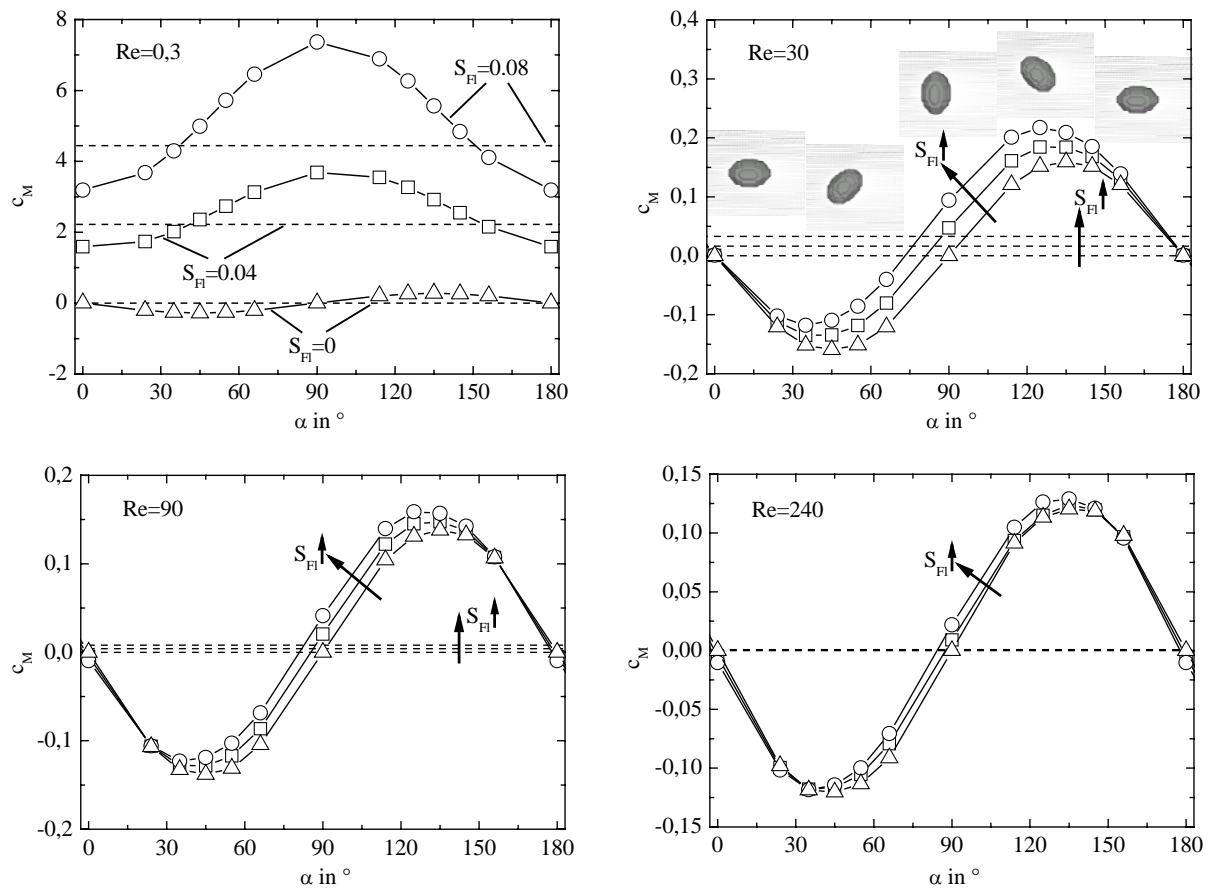


Abbildung 3.35 Drehmomentenbeiwert einer feststehenden Kugel und eines Sphäroids ($c/a=1,5$) in einer linearen Scherströmung mit $S_{Fl} = 0, 0,04$ und $0,08$ in Abhängigkeit des Anströmwinkels bei $Re = 0,3, 30, 90$ und 240 . Symbole wie in Abbildung 3.31.

Sphäroids für $S_{Fl} = 0,04$ und $0,08$ fast nur durch den Faktor 2. Das Verhältnis zwischen den Drehmomentenbeiwerten bei $\alpha = 90^\circ$ und 0° ist 2,31 bei beiden Fluiddrallzahlen, was Jefferys Wert von 2,24 für die Winkelgeschwindigkeit sehr nahe kommt. Bei $Re = 30, 90$ und 240 sind die Graphen denen in einer gleichförmigen Strömung ähnlich und werden diesen mit steigender Re -Zahl immer ähnlicher, d.h. der Einfluss der Scherströmung auf das Drehmoment nimmt im Vergleich zu dem Einfluss des Partikelprofils mit steigender Re -Zahl ab. Bei $Re = 30$ wirkt bei $\alpha = 0^\circ$ auf das Sphäroid ein sehr kleines und bei $Re = 90$ und 240 ein negatives Drehmoment, weil sich das Gebiet höchsten Druckes, wie bei der Kugel, auf der stromaufwärtigen Seite hoher Geschwindigkeit befindet und bei $\alpha = 0^\circ$ ein negatives Drehmoment erzeugt.

4 Korrelationsformel für den Standard-Widerstandsbeiwert

Korrelationsformeln für den c_w -Wert werden z.B. für die Bestimmung der Sinkgeschwindigkeit oder für die Simulation der Bewegung von Partikeln benötigt. Für die Kugel existieren hinreichend genaue Korrelationen, die über den gesamten unterkritischen Re -Zahlen-Bereich gültig sind [72,196]. Für nichtsphärische Partikel schlug Wadell [201] als Ergebnis der ihm bekannten Experimente von Pernolets Mineralen [140], Richards Mineralen [154], Schmiedels Kreisscheiben [168], Schulz' Würfeln [171] und dem Verlauf des c_w -Wertes der Kugel über die Re -Zahl die Sphärizität (Φ) als Parameter zur Beschreibung des c_w -Wertes vor. Die Sphärizität ist als das Verhältnis der Oberfläche der volumenäquivalenten Kugel ($A_{O,Kugel}$) zu der tatsächlichen Oberfläche des Partikels (A_O) definiert. In mathematischer Schreibweise lautet die Definition

$$\Phi = \frac{A_{O,Kugel}}{A_O} = \frac{\pi d_V^2}{A_O} \quad (4.1)$$

Wenn man mit d_{A_O} den Durchmesser der Kugel mit dem gleichen Oberflächeninhalt wie der des Partikels

$$d_{A_O} = \sqrt{\frac{1}{\pi} A_O} \quad (4.2)$$

einführt, so gilt für (4.1)

$$\Phi = \frac{d_V^2}{d_{A_O}^2} \quad (4.3)$$

Für eine Kugel ist die Sphärizität gleich 1 und für jede andere Körperform ist die Sphärizität kleiner als 1. In allen von Wadell ausgewerteten experimentellen Daten erhöhte sich der c_w -Wert mit abnehmender Sphärizität. Dieser Zusammenhang wurde von Pettyjohn und Christiansen [141] für isometrische Partikel experimentell bestätigt. Haider und Levenspiel [72] entwickelten aus Messdaten von Pettyjohn und Christiansen [141], Schmiedel [168], Squires und Squires [177] und Willmarth et al. [206] eine Korrelationsformel für den c_w -Wert, deren Parameter die Re -Zahl und die Sphärizität sind. Auch in Haider und Levenspiels Korrelation wird der c_w -Wert mit abnehmender Sphärizität stets größer.

Die Sphärizität kann jedoch den in Kapitel 3.4 aufgezeigten und z.B. bereits von Wadell [201] und Squires und Squires [177] klar ausgesprochenen Einfluss der Orientierung der Körper auf

den c_w -Wert nicht wiedergeben, weil die Sphärizität unabhängig von der Orientierung ist. Außerdem erfahren im Stokes-Bereich einige Sphäroide [139] und bei großen Re -Zahlen längsangeströmte Platten, Sphäroide und Stromlinienkörper [1,43,59,63,79,202,203,211] einen kleineren Widerstand als die Kugel, was durch die Sphärizität als Parameter auch nicht beschrieben werden kann.

Das Verhältnis des c_w -Wertes der Kugel im Stokes-Bereich zu dem c_w -Wert eines beliebig geformten Körpers bei gleicher Re -Zahl wird als Stokesscher Formfaktor

$$K_{Sr} = \frac{c_{w,Kugel}}{c_w} \quad \text{bzw. mit Gleichung (3.9)} \quad K_{Sr} = \frac{24}{Re c_w} \quad (4.4)$$

bezeichnet. Im Stokes-Bereich weisen theoretische (Kugel [179], Sphäroide [139], Zylinder [14]) und experimentelle (z.B. [33,77,121,141]) Untersuchungen darauf hin, dass der c_w -Wert aller Körper umgekehrt proportional zur Re -Zahl sinkt und somit der Stokessche Formfaktor unabhängig von der Re -Zahl ist.

Der Stokessche Formfaktor wurde von Heiss und Coull [77] für Quader mit quadratischer Grundfläche und für Zylinder in Abhängigkeit des Achsenverhältnisses für jeweils beide orthogonale Orientierungen experimentell bestimmt. In Abbildung 4.1 ist Fig. 3 aus Heiss und Coulls Veröffentlichung [77], die ihre experimentellen Ergebnisse und Oseens [139] theoretische Lösung für Sphäroide enthält, dargestellt. Zusätzlich sind diesem Diagramm Batchelors theoretische Ergebnisse (3.17) und (3.18) für quer- bzw. längsangeströmte lange Zylinder hinzugefügt. Jeder Körper besitzt genau ein Maximum im Stokesschen Formfaktor und mit steigendem und fallendem Achsenverhältnis wird der Stokessche Formfaktor Körper immer niedriger. Wie bereits in Kapitel 3.2 erwähnt, erfährt das verlängerte Sphäroid mit der Symmetrieachse parallel zur Strömungsrichtung mit einem Achsenverhältnis von $c/a = 1,95$ den geringsten c_w -Wert und auch das abgeflachte Sphäroid mit der Symmetrieachse senkrecht zur Strömung mit $c/a = 0,702$ hat einen geringeren Widerstand als die Kugel.

Als Formel für den Stokesschen Formfaktor bzw. den c_w -Wert im Stokes-Bereich schlägt Leith [105] die Gleichung

$$\frac{1}{K_{Sr}} = \frac{1}{3} \frac{d_{A_1}}{d_V} + \frac{2}{3} \frac{d_{A_0}}{d_V} \quad \text{bzw.} \quad c_w = \frac{8}{Re} \frac{d_{A_1}}{d_V} + \frac{16}{Re} \frac{d_{A_0}}{d_V} \quad (4.5)$$

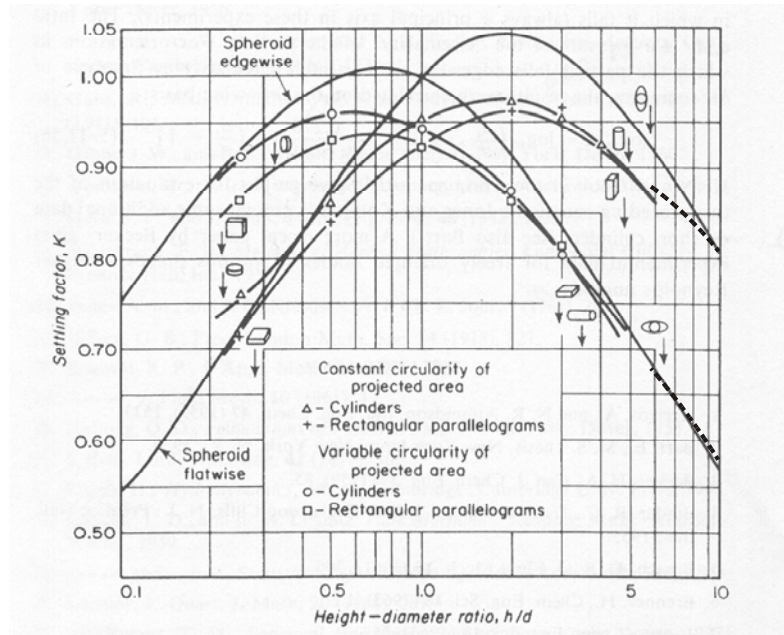


Abbildung 4.1 Stokesscher Formfaktor in Abhängigkeit des Achsenverhältnisses von Zylindern, Quadern und Sphäroiden. Abbildung aus Heiss und Coull [77], zusätzlich mit Batchelors theoretischem Ergebnis für Zylinder [14] versehen (---).

vor, in der $d_{A_{\perp}}$ der Durchmesser der Kugel mit gleich großer angeströmter Querschnittsfläche wie die des Partikels

$$d_{A_{\perp}} = \sqrt{\frac{4}{\pi} A_{\perp}} \quad (4.6)$$

ist. Der erste Summand in den Gleichungen (4.5) steht dabei für den Druck- oder Formwiderstand, der mit der Größe der angeströmten Querschnittsfläche assoziiert wird, und der zweite Summand steht für den Reibungswiderstand, der mit der Größe der Oberfläche assoziiert wird. Analog zur Sphärizität kann die Quersphärizität (Φ_{\perp}) als das Verhältnis der Querschnittsfläche der volumenäquivalenten Kugel ($A_{\perp, Kugel}$) zu der tatsächlich angeströmten Querschnittsfläche des Partikels (A_{\perp})

$$\Phi_{\perp} = \frac{A_{\perp, Kugel}}{A_{\perp}} = \frac{d_V^2}{d_{A_{\perp}}^2} \quad (4.7)$$

eingeführt werden. Damit können die Gleichungen (4.5) wie folgt geschrieben werden

$$\frac{1}{K_{St}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{\Phi_{\perp}}} + \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{\Phi}} \quad \text{bzw.} \quad c_w = \frac{8}{Re} \frac{1}{\sqrt{\Phi_{\perp}}} + \frac{16}{Re} \frac{1}{\sqrt{\Phi}} \quad (4.8)$$

Eigene Untersuchungen zeigen eine verbesserte Korrelation der Abhängigkeit des c_w -Wertes von der Orientierung und Partikelform von Abbildung 3.12 und Abbildung 4.1, wenn die

Längssphärizität anstatt der Quersphärizität verwendet wird. Die Längssphärizität ($\Phi_{||}$) ist gleich dem Verhältnis der Längsschnittfläche der volumenäquivalenten Kugel ($A_{||,Kugel}$) zu der Differenz zwischen der halben Oberfläche und der mittleren Längsschnittfläche des Partikels ($\frac{1}{2}A_o - A_{||}$)

$$\Phi_{||} = \frac{A_{||,Kugel}}{\frac{1}{2}A_o - A_{||}} = \frac{d_v^2}{2d_{A_o}^2 - d_{A_{||}}^2}, \quad (4.9)$$

mit $d_{A_{||}}$ als Durchmesser der Kugel mit gleich großer Längsschnittfläche wie die des Partikels

$$d_{A_{||}} = \sqrt{\frac{4}{\pi} A_{||}}. \quad (4.10)$$

Für eine Kugel sind Längsschnittfläche und Querschnittsfläche gleich groß, d.h. $A_{||,Kugel} = A_{\perp,Kugel}$. Die Längsschnittfläche eines nichtsphärischen Körpers ist abhängig vom Blickwinkel im Allgemeinen verschieden groß. Die mittlere Längsschnittfläche stellt das arithmetische Mittel über eine gesamte Drehung des Körpers dar. Die neu gefundene verbesserte Korrelation für den Stokes-Bereich lautet

$$\frac{1}{K_{St}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{\Phi_{||}}} + \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{\Phi}} \quad \text{bzw.} \quad c_w = \frac{8}{Re} \frac{1}{\sqrt{\Phi_{||}}} + \frac{16}{Re} \frac{1}{\sqrt{\Phi}}. \quad (4.11)$$

Für eine Kugel ($\Phi = \Phi_{||} = 1$) stimmt diese Korrelation mit dem Stokesschen Gesetz (3.9) überein. Für eine querangeströmte Kreisscheibe (3.13) sagt sie einen um 5% zu geringen c_w -Wert und für eine längsangeströmte Kreisscheibe (3.14) einen um 25% zu hohen c_w -Wert voraus.

Der mit Gleichung (4.11) korrelierte Stokessche Formfaktor für die Körper von Abbildung 4.1 ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Der Vergleich mit den analytisch und experimentellen Werten von Abbildung 4.1 zeigt, dass der Trend eines steigenden c_w -Wertes mit extremer werdendem Achsenverhältnis richtig wiedergegeben wird, der c_w -Wert von querangeströmten Körpern mit $c/a = 10$ aber um bis zu 30% zu niedrig und der c_w -Wert von längsangeströmten Körpern mit $c/a = 0,1$ um bis zu 16% zu hoch ist. Der Vergleich zwischen den korrelierten c_w -Werten und den entsprechenden numerischen c_w -Werten der Partikel aus Kapitel 3.4 (Abbildung 3.12) in Abhängigkeit des Anströmwinkels bei $Re = 0,3$ ist in Abbildung 4.3 dargestellt; durch die Längssphärizität wird das Minimum oder der Wendepunkt des Würfels, des Quaders und der Zylinder um $\alpha = 45^\circ$ ungefähr nachgebildet.

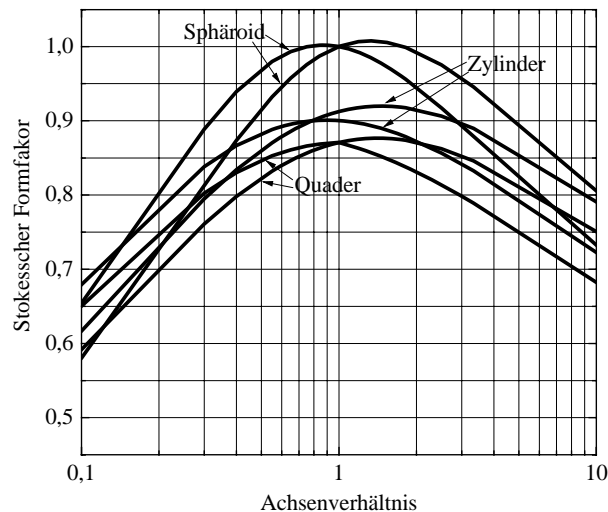


Abbildung 4.2 Korrelierter Stokesscher Formfaktor in Abhängigkeit des Achsenverhältnisses von Zylindern, Quadern und Sphäroiden.

Der Newtonsche Formfaktor ist, entgegengesetzt zum Stokesschen Formfaktor, als das Verhältnis des c_w -Wertes eines beliebig geformten Partikels zu dem c_w -Wert der Kugel im Newton-Bereich

$$K_{New} = \frac{c_w}{c_{w.Kugel}} \quad \text{bzw.} \quad K_{New} = \frac{c_w}{0,42} \quad (4.12)$$

definiert. Der Newton Bereich ist der Bereich hoher unterkritischer Re -Zahlen, in dem der c_w -Wert nahezu konstant ist. Nach Newtons theoretischen Betrachtungen [131] und experimentellen Untersuchungen (z.B. [141,158,170,204]) wird der c_w -Wert isometrischer und querangeströmter Partikel im Newton Bereich fast ausschließlich durch den Formwiderstand bestimmt. Ganser [62] bestimmte aus den Daten für isometrische Körper von Pettyjohn und Christiansen [141] und aus Daten für querangeströmte Kreisscheiben die Formel

$$K_{New} = 10^{1,8148(-\log \Phi)^{0,5743}} \quad \text{bzw.} \quad c_w = 0,42 \cdot 10^{1,8148(-\log \Phi)^{0,5743}} \quad (4.13)$$

als beste Korrelation für den Newtonschen Formfaktor, in der die Sphärizität wieder den einzigen Parameter darstellt und daher der Einfluss der Orientierung und ein kleinerer c_w -Wert als der der Kugel nicht wiedergegeben wird.

Bei großen Re -Zahlen ist, wie Abbildung 3.12 im Kapitel 3.4 zeigt, der Widerstand isometrischer Körper in etwa proportional zur Größe der angeströmten Querschnittsfläche oder der reziproken Quersphärizität. Tran-Cong et al. [190] ermittelten aus Fallversuchen mit

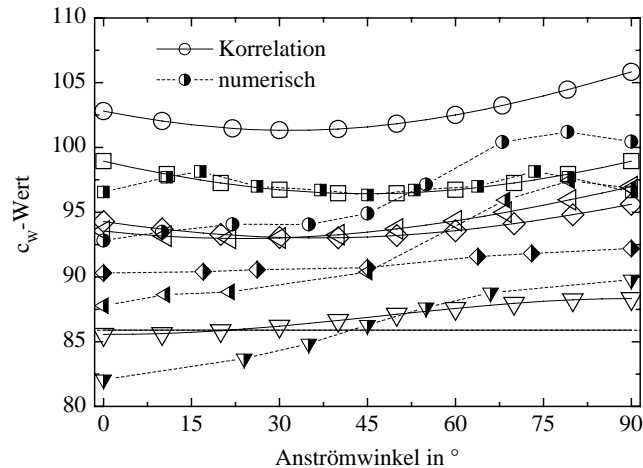


Abbildung 4.3 Vergleich zwischen den numerischen und korrelierten Widerstandsbeiwerten von Partikeln verschiedener Form in Abhängigkeit des Anströmwinkels bei $Re = 0,3$. Symbole wie in Abbildung 3.12.

Agglomeraten aus geordneten Kugel den gleichen Trend und bestimmten die Korrelation

$$K_{New} = \frac{1}{\sqrt{Rundheit}} \frac{1}{\Phi_{\perp}} \quad \text{bzw.} \quad c_w = \frac{0,42}{\sqrt{Rundheit}} \frac{1}{\Phi_{\perp}}, \quad (4.14)$$

die jedoch nur für Re -Zahlen bis 1500 und einen bestimmten Bereich von Quersphärizitäten gültig ist. Die sogenannte *Rundheit* ist gleich dem Verhältnis des Umfangs der Querschnittsfläche der Kugel mit gleich großer angeströmter Querschnittsfläche wie die des Partikels zu dem tatsächlichen Umfang der angeströmten Querschnittsfläche.

Längsangeströmte Kreisscheiben und Platten besitzen eine sehr kleine angeströmte Querschnittsfläche und eine sehr große Oberfläche. Daher ist für sie der Reibungswiderstand auch bei großen Re -Zahlen maßgeblich. Ihr c_w -Wert sinkt mit der Re -Zahl auch bei großen Re -Zahlen, was mathematisch durch die Gleichung (3.20) für laminar längsangeströmte Platten beschrieben wird. Gleichung (3.20) kann in

$$c_w = 1,327 \cdot 2 \left(\frac{8}{9} \right)^{\frac{1}{4}} \pi^{\frac{1}{4}} \left(\frac{Tiefe}{Länge} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\Phi^{\frac{3}{4}}} \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (4.15)$$

umgeschrieben werden und für quadratische Platten zu

$$c_w = 3,43 \frac{1}{\Phi^{\frac{3}{4}}} \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (4.16)$$

vereinfacht werden.

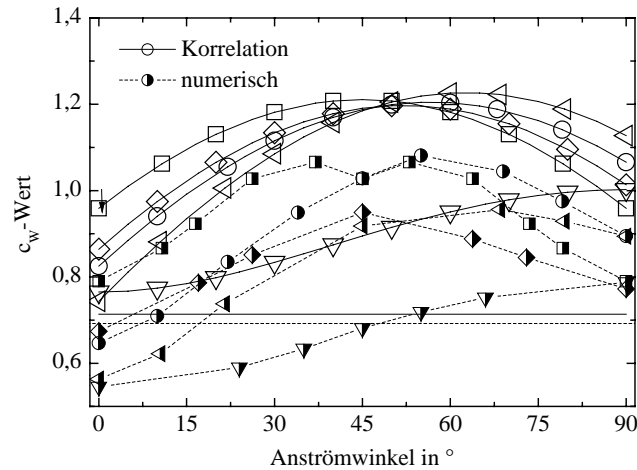


Abbildung 4.4 Vergleich zwischen den numerischen und korrelierten Widerstandsbeiwerten von Partikeln verschiedener Form in Abhängigkeit des Anströmwinkels bei $Re = 240$. Symbole wie in Abbildung 3.12.

Die beste Korrelation für den c_w -Wert bei großen Re -Zahlen ergibt sich aus einem Anteil gemäß Gleichung (4.16) und aus einem Anteil, der, wie in Gleichung (4.14), proportional zur angeströmten Querschnittsfläche ist, aber mit einem zu Gleichung (4.13) analogen Proportionalitätsfaktor

$$c_w = \frac{3}{\sqrt{Re}} \frac{1}{\Phi^{\frac{3}{4}}} + 0,42 \cdot 10^{0,4(-\log \Phi)^{0,2}} \frac{1}{\Phi_{\perp}} \quad (4.17)$$

In Abbildung 4.4 ist der Vergleich zwischen den korrelierten und den entsprechenden numerischen c_w -Werten der Partikel aus Kapitel 3.4 (Abbildung 3.12) in Abhängigkeit des Anströmwinkels bei $Re = 240$ dargestellt. Durch die Berücksichtigung der Quersphärizität wird die Abhängigkeit vom Anströmwinkel tendenziell richtig wiedergegeben.

Die Korrelationsformel für den c_w -Wert über den gesamten unterkritischen Re -Zahlen-Bereich erhält man aus der Addition der Gleichungen (4.11) und (4.17) und sie lautet wie folgt

$$c_w = \frac{8}{Re} \frac{1}{\sqrt{\Phi_{\parallel}}} + \frac{16}{Re} \frac{1}{\sqrt{\Phi}} + \frac{3}{\sqrt{Re}} \frac{1}{\Phi^{\frac{3}{4}}} + 0,42 \cdot 10^{0,4(-\log \Phi)^{0,2}} \frac{1}{\Phi_{\perp}} \quad (4.18)$$

Tabelle 4.1 zeigt die mittleren und maximalen relativen Abweichungen $\left| \frac{c_{w, \text{Korr}} - c_{w, \text{exp}}}{c_{w, \text{exp}}} \right|$ zwischen experimentellen Werten und den Korrelationsformeln von Haider und Levenspiel [72], Ganser [62] einschließlich Leith' Formel (4.8) für den

	Mittlere relative Abweichung				
	Haider und Levenspiel [72]	Ganser einschl. Leith [62]	Tran-Cong et al. [190]	Eigene (4.18)	Eigene (4.19)
	Kugel (683 Werte)	6,59 %	10,9 %	6,52 %	9,17 %
Isometrische Körper (655 Werte)	6,65 %	6,46 %	20,6 %	10,5 %	10,9 %
Quader und Zylinder (337 Werte)	42,3 %	38,4 %	46 %	27,2 %	29 %
Kreisscheiben und Platten (386 Werte)	$2 \cdot 10^3$ %	$1,8 \cdot 10^3$ %	38,7 %	17,7 %	16,8 %
Alle Daten (2061 Werte)	383 %	348 %	23,5 %	14,1 %	14,4 %

	Maximale relative Abweichung				
	Haider und Levenspiel [72]	Ganser einschl. Leith [62]	Tran-Cong et al. [190]	Eigene (4.18)	Eigene (4.19)
	Kugel (683 Werte)	44 %	43 %	44 %	45 %
Isometrische Körper (655 Werte)	50 %	55 %	84 %	68 %	68 %
Quader und Zylinder (305 Werte)	$1,1 \cdot 10^3$ %	$1,1 \cdot 10^3$ %	95 %	88 %	88 %
Kreisscheiben und Platten (386 Werte)	$2,1 \cdot 10^4$ %	$2,4 \cdot 10^4$ %	95 %	75 %	75 %

Tabelle 4.1 Mittlere (obere Tabelle) und maximale (untere Tabelle) relative Abweichungen zwischen den Korrelationsformeln von Haider und Levenspiel [72], Ganser einschließlich Leith [62], Tran-Cong et al. [190] und den neu aufgestellten Formeln (4.18) und (4.19) und experimentellen Werten (Literaturquellen siehe Bildunterschriften von Abbildung 4.5, Abbildung 4.6 und Abbildung 4.7).

Stokesschen Formfaktor, Tran-Cong et al. [190] und der neu aufgestellten Formel (4.18). Die neu aufgestellte Korrelation (4.18) ist im Vergleich zu experimentellen c_w -Werten für Kugeln und isometrische Körper in Abbildung 4.5 dargestellt. Für Kugeln und isometrische Partikel sagen die Korrelationen von Haider und Levenspiel und von Ganser den c_w -Wert exakter voraus als die neu aufgestellte Korrelation; z.B. geben Haider und Levenspiels sowie Gansers Gleichungen aufgrund der komplizierten Gleichungsform das Minimum im c_w -Wert bei mittlerer Re -Zahl wieder.

Abbildung 4.6 zeigt die neu aufgestellte Korrelation (4.18) für Quader und Zylinder im Vergleich zu experimentellen Ergebnissen und Abbildung 4.7 zeigt die neue Korrelation (4.18) für längs- und querangeströmte Kreisscheiben und Platten im Vergleich zu experimentellen Ergebnissen. Die neue Korrelation berücksichtigt die Orientierung der Körper über den gesamten Re -Zahlen-Bereich; so sagt sie für längsangeströmte Kreisscheiben und Platten einen hohen Widerstand bei kleinen Re -Zahlen und einen sehr niedrigen Widerstand bei

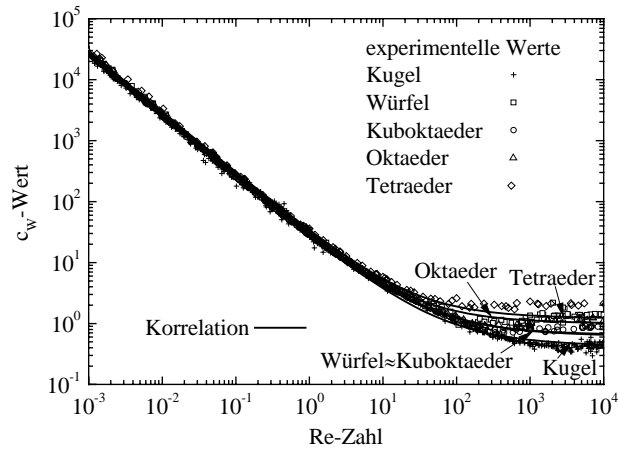


Abbildung 4.5 Vergleich zwischen den korrelierten und experimentellen Widerstandsbeiwerten von Kugeln [2,6,7,10,33,34,46,55,65,84,107,110,121,126,141,158,168,204,205,210] und isometrischen Körpern [33,71,121,141,171] in Abhängigkeit der Partikel-Reynolds-Zahl.

großen Re -Zahlen richtig voraus. Demgegenüber berücksichtigen die Formeln von Haider und Levenspiel und von Ganser nicht die Partikelorientierung bei großen Re -Zahlen und daher ist der von ihnen vorausgesagte Widerstand längsangeströmter Kreisscheiben und Platten bei großen Re -Zahlen um bis zu drei Größenordnungen zu hoch. Dies ist an der enorm hohen relativen Abweichung ihrer Werte für Kreisscheiben und Platten in Tabelle 4.1 zu erkennen. Die Korrelation von Tran-Cong et al. sagt dagegen bei kleinen Re -Zahlen einen zu niedrigen Widerstand für längsangeströmte Körper voraus. Für alle betrachteten Daten hat die neue Korrelationsformel (4.18) mit 14,1% die weitaus kleinste mittlere relative Abweichung

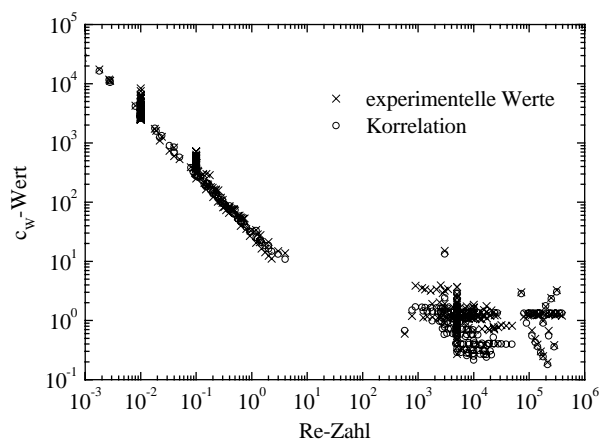


Abbildung 4.6 Vergleich zwischen den korrelierten und experimentellen Widerstandsbeiwerten von Quadern und Zylindern in Abhängigkeit der Partikel-Reynolds-Zahl [16,34,45,71,77,90,95,101,103,109,116,119,121,173,204,205].

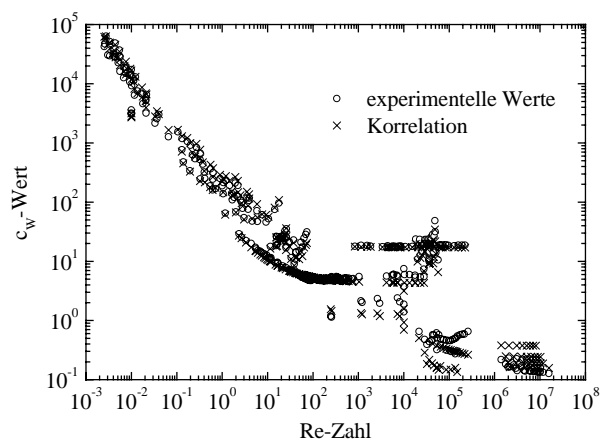


Abbildung 4.7 Vergleich zwischen den korrelierten und experimentellen Widerstandsbeiwerten von Kreisscheiben und Platten in Abhängigkeit der Partikel-Reynolds-Zahl [18,45,58,71,109,158,168,170,177,203,204,205,206].

im Vergleich zu den Abweichungen von 383%, 348% und 23,5% der Korrelationen von Haider und Levenspiel, Ganser bzw. Tran-Cong et al. (Tabelle 4.1) und stellt damit nach Wissen des Autors die genaueste vorhandene Korrelation für den c_w -Wert beliebig geformter Partikel dar.

Es sei erwähnt, dass auch Leith' Korrelation (4.8) eine gute Approximation für den Stokeschen Formfaktor darstellt. Sie gibt vor allem die Abhängigkeit des c_w -Wertes vom Anströmwinkel (Abbildung 4.3) schlechter wieder, die bei kleinen Re -Zahlen jedoch relativ unbedeutend ist. Der Vorteil von Gleichung (4.8) gegenüber der Gleichung (4.11) besteht darin, dass der Parameter der Quersphärizität in Gleichung (4.8) leichter zu ermitteln ist als der Parameter der Längssphärizität in Gleichung (4.11). In der allgemeinen Korrelationsformel (4.18) ist dann die Längssphärizität durch die Quersphärizität ersetzt und sie lautet

$$c_w = \frac{8}{Re} \frac{1}{\sqrt{\Phi_\perp}} + \frac{16}{Re} \frac{1}{\sqrt{\Phi}} + \frac{3}{\sqrt{Re}} \frac{1}{\Phi^{\frac{3}{4}}} + 0,42 \cdot 10^{0,4(-\log \Phi)^{0,2}} \frac{1}{\Phi_\perp} . \quad (4.19)$$

Die relativen Abweichungen zwischen dieser Korrelationsformel (4.19) und den experimentellen Werten sind in der letzten Spalte der Tabelle 4.1 eingetragen. Die mittlere relative Abweichung aller Daten ist mit 14,4% nur geringfügig höher als die mittlere Abweichung der Korrelationsformel (4.18) mit 14,1%. Damit ergibt sich auch für die vereinfachte Korrelationsformel (4.19) ein hoher Vertrauensbereich.

5 Wechselwirkung zwischen zwei Kugeln

5.1 Strömungskonfiguration

Die Widerstands-, Auftriebs- und Drehmomentenbeiwerte zweier gleich großer feststehender Kugeln in einer gleichförmigen Strömung werden in Abhängigkeit des Partikelabstandes (d_0), des Lagewinkels (δ) zwischen der Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte und der ungestörten Strömungsrichtung, siehe Abbildung 5.1, und der Re -Zahl bestimmt. Darüber hinaus wird als weitere Kraft die zwischen den Kugelmittelpunkten wirkende Wechselwirkungskraft (F_{ww}), die sich aus der Widerstands- und der Auftriebskraft beider Kugeln ergibt, berechnet. Analog zu den Gleichungen (3.6) und (3.7) für den Widerstands- bzw. den Auftriebsbeiwert gilt für den Wechselwirkungsbeiwert

$$c_{ww} = \frac{F_{ww}}{\frac{1}{2} \rho \underline{u}^2 \frac{\pi}{4} d_v^2} . \quad (5.1)$$

Wie in Abbildung 5.1 schematisch dargestellt, wird am Eintritt ($x=0$) eine gleichförmige Strömung vorgegeben, am Austritt gilt die senkrecht zur Austrittsfläche spannungsfreie Randbedingung und an den Seitenwänden gilt die Symmetrierandbedingung. Der Durchmesser der Kugeln (d) beträgt 12 Zellen. Der Abstand zwischen Eintritt und dem Mittelpunkt der vorderen Kugel ist $8d$, zwischen dem Austritt und dem Mittelpunkt der hinteren Kugel $15d$ und zwischen der Seitenwand und dem Mittelpunkt der nächsten Kugel $3d$. Die Widerstandskraft ist positiv in x -Richtung, die Auftriebskraft ist positiv in z -Richtung und das Drehmoment ist positiv in y -Richtung. Eine positive Wechselwirkungskraft bedeutet Anziehung zwischen den Partikeln, eine negative Wechselwirkungskraft bedeutet Abstoßung. In den folgenden Diagrammen dieses Kapitels sind die Ergebnisse für die Umgebungskugel dargestellt, die entsprechenden Werte der Zentralkugel bei dem Lagewinkel δ sind aus Symmetriegründen gleich den Werten der Umgebungskugel bei dem Lagewinkel $\delta - 180^\circ$.

5.2 Literaturstudie

Analytische Lösungen für die Strömung um zwei feststehende Partikel in einer gleichförmigen Strömung existieren nur im Stokes-Bereich. Smoluchowski [175] und Happel und Brenner [74] bestimmten mittels der sogenannten Spiegelungs- oder Superpositionsmethode

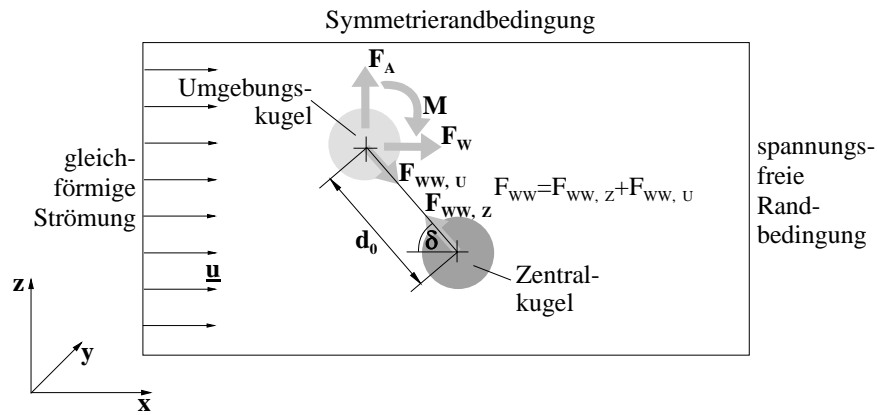


Abbildung 5.1 Strömungskonfiguration für die Umströmung zweier feststehender Kugeln.

Lösungen für die Widerstandskraft, die Auftriebskraft und das Drehmoment und Burgers [26] bestimmte mittels der Punktkraft-Methode die Widerstandskraft zweier gleich großer Kugeln für beliebige Positionen. Für $d_0 > 4d$ stimmen alle drei Lösungen nahezu vollständig miteinander überein. Auf beide Kugeln wirken die gleichen Kräfte, womit die Wechselwirkungskraft zwischen den Kugeln Null ist. Die Widerstandskraft ist im Vergleich zur Einzelkugel immer reduziert. Der kleinste Widerstand tritt in der Hintereinander-Anordnung ($\delta = 0^\circ$ bzw. 180°) und der größte in der Übereinander-Anordnung ($\delta = 90^\circ$) auf. Der Auftrieb der Kugeln ist in der Hintereinander- und Übereinander-Anordnung Null und erreicht seinen maximalen Betrag bei $\delta = 45^\circ$ bzw. 135° . Das Drehmoment wirkt auf die obere Kugel in Uhrzeigerrichtung und auf die untere entgegen der Uhrzeigerrichtung mit dem maximalen Betrag in der Übereinander-Anordnung. Die Widerstandskraft erhöht sich und die Auftriebskraft und das Drehmoment erniedrigen sich mit steigendem Partikelabstand.

Für den Fall zweier hintereinander angeordneter Kugeln erweiterte Faxén [52] Smoluchowskis Lösung zu höherer Ordnung. Stimson und Jeffery [178] mit einem Corrigendum von Faxén [51] fanden für die Hintereinander-Anordnung eine exakte analytische Lösung in Polarkoordinaten. Goldmann et al. [67] bestimmten für die Widerstandskraft und das Drehmoment eine exakte Lösung für den Fall zweier übereinander angeordneter Kugeln und konnten wegen der Linearität der Stokeschen Gleichungen in \underline{u} aus ihrer und aus Stimson und Jefferys Lösung die Kräfte und das Drehmoment für jede beliebige Position exakt berechnen. Diese theoretischen Verläufe des Widerstandsbeiwertes, des Auftriebsbeiwertes, des Wechselwirkungsbeiwertes und des Drehmomentenbeiwertes im Stokes-Bereich sind für $d_0 = 1,5d$ in Abhängigkeit des Lagewinkels in Abbildung 5.2, Abbildung 5.8, Abbildung 5.11 bzw. Abbildung 5.14 als gestrichelte Linie eingetragen.

Oseen [139] berechnete die auf beide Kugeln wirkenden Kräfte unter Berücksichtigung der Trägheitskraft des Fluids bei kleinen Re -Zahlen analytisch. Im Allgemeinen wirken auf beide Kugeln dann nicht mehr die gleichen Kräfte. Die vordere Kugel hat einen größeren Widerstand als die hintere, wodurch sich zwei hintereinander liegende Kugeln anziehen. Auf zwei übereinander angeordnete Kugeln wirkt ein Auftrieb in der Art, dass sich die Kugeln abstoßen.

Die ersten experimentellen Untersuchungen über die Wechselwirkung zwischen Partikeln sind die Fallversuche von Eveson et al. [48] und Happel und Pfeffer [75] im Stokes-Bereich. Eveson et al. maßen die Fallgeschwindigkeit zweier gleich großer Kugeln unter $\delta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ und 90° und Happel und Pfeffer in der Hintereinander-Anordnung bei verschiedenen Partikelabständen. Ihre Ergebnisse stimmen gut mit der Theorie überein; so erfuhren die Kugeln immer einen kleineren Widerstand als die Einzelkugel und den niedrigsten Widerstand überhaupt in der Hintereinander-Anordnung. Es trat keine Anziehung oder Abstoßung zwischen den Kugeln auf.

Rowe und Henwood [160] bestimmten den Widerstand und den Auftrieb zweier gleich großer Kugeln in verschiedenen Positionen bei $Re = 32, 64$ und 96 und Tsuji et al. [193] bestimmten den Widerstand in der Hintereinander-Anordnung und Übereinander-Anordnung bei $Re \approx 500$ jeweils in einem Wasserkanal mittels einer Pendelwaage, doch beide Untersuchungen litten unter großen Messschwankungen. Lee [102] maß mit einer in einer Kugel eingebauten Waage die Partikelkraft über den gesamten Umfang möglicher Lagewinkel bei $Re \approx 10^4$. Wie von Oseen vorausgesagt, war der Widerstand beider Kugeln nicht mehr identisch und es kam zur Anziehung in der Hintereinander-Anordnung und zur Abstoßung in der Übereinander-Anordnung. In der Übereinander-Anordnung war der Widerstand der Kugeln größer als der einer Einzelkugel. Tsuji et al. und Lee erhielten bei ihren Messungen bei großen Re -Zahlen außerdem einen erhöhten Widerstand der vorderen Kugel in der Hintereinander-Anordnung bei kleinen Partikelabständen.

Zhu et al. [213], Liang et al. [106], Chen und Lu [29] und Chen und Wu [30] führten bei mittleren Re -Zahlen um 100 ähnliche Messungen wie Rowe und Henwood [160] und Tsuji et al. [193] durch und ermittelten die gleichen Trends, nutzten jedoch eine elektronische Waage und erhielten so weitaus genauere Messergebnisse. Liang [106] berichtete in der

Übereinander-Anordnung bei $Re = 37$ von einem erniedrigten Widerstand im Einklang mit den Messungen im Stokes-Bereich von Eveson et al. und bei $Re = 50$ von einem erhöhten Widerstand im Einklang mit den Messungen der anderen Autoren bei großen Re -Zahlen.

Die erste numerische dreidimensionale Simulation der Strömung um zwei Partikel wurde von Tal et al. [181] für zwei hintereinander liegende gleich große Kugeln bei $Re = 40$ durchgeführt. Olsson und Fuchs [137,138] bestimmten den Widerstand und den Auftrieb bei $Re = 50, 100$ und 150 ; bei $Re = 50$ berücksichtigten sie den gesamten Umfang von Lagewinkeln bei Partikelabständen bis $4d$ und stellten den Auftriebsbeiwert und den Widerstandsbeiwert in jeweils einem Konturdiagramm dar [138]. Vargas und Eason [197] berechneten den Widerstandsbeiwert und den Wechselwirkungsbeiwert bei $Re = 15$ über den gesamten Umfang von Lagewinkeln. Bryden und Thompson [24] untersuchten numerisch die Strömung um zwei übereinander angeordnete Kugeln bei $Re = 300$. Tsuji et al. [194] bestimmten den Widerstand zweier Kugeln in der Hintereinander- und Übereinander-Anordnung bei $30 \leq Re \leq 250$. Die aufgezählten Literaturstellen bestätigten die Trends der experimentellen Arbeiten, d.h. es trat eine Anziehung in der Hintereinander-Anordnung, eine Abstoßung in der Übereinander-Anordnung, der kleinste Widerstand bei $\delta = 180^\circ$ und ein erhöhter Widerstand bei $Re \geq 50$ und $\delta = 90^\circ$ auf. Kim et al. [91] und Folkersma et al. [56] berechneten numerisch den Widerstand, den Auftrieb und das Drehmoment für zwei übereinander angeordnete Kugeln bei $Re = 50, 100$ und 150 bzw. bei $Re = 10$ und 50 . Sie erhielten bei $Re \geq 50$ für mittlere Partikelabstände im Gegensatz zu den oben erwähnten Autoren eine Anziehung und ein im Vergleich zu den oben erwähnten Autoren umgekehrtes Drehmoment.

Fast alle bisherigen numerischen Arbeiten betrachten nur die Fälle zweier hinter- oder übereinander angeordneter Kugeln. Nur Olsson und Fuchs [138] und Vargas und Eaton [197] ermittelten numerisch den Widerstandsbeiwert und den Auftriebs- bzw. den Wechselwirkungsbeiwert über den gesamten Umfang von Lagewinkeln bei der Re -Zahl von 50 bzw. 15 . In dieser Arbeit werden, soweit dem Autor bekannt, zum ersten Mal diese Berechnungen auch als Funktion der Re -Zahl durchgeführt und zusätzlich der Drehmomentenbeiwert bestimmt. Die Partikelbeiwerte werden wie bei Olsson und Fuchs [138] in der übersichtlichen Form von Konturdiagrammen dargestellt.

5.3 Ergebnisse

Es werden Re -Zahlen von 1, 50, 100 und 200, Partikelabstände von $1,5d$, $3d$, $4,5d$ und $6d$ und Lagewinkel über den gesamten Umfang ($\delta = 0^\circ$ bis 360°) mit einer Schrittweite von 15° betrachtet. Alle Partikelbeiwerte werden mit den Korrekturen für den Seitenwandeinfluss von Kapitel 2.6 und die c_w -Werte zusätzlich mit den Korrekturen für die Auflösung von Kapitel 2.5 berichtigt.

Abbildung 5.2 zeigt den zum c_w -Wert der Einzelkugel ($c_{w \text{ Einzel}}$) relativen c_w -Wert der Umgebungskugel bei $d_0 = 1,5d$ über den Lagewinkel. Dabei sind auch der theoretische Verlauf im Stokes-Bereich und die numerischen Ergebnisse von Olsson und Fuchs [137] bei $Re = 50$ und 100 eingetragen. Der theoretische Verlauf wurde aus Stimson und Jefferys [178] theoretischem Ergebnis für $\delta = 0^\circ$ bzw. 180° , Goldmann et al.'s [67] theoretischem Ergebnis für $\delta = 90^\circ$ und der Stokesschen Annahme, dass die Gleichungen linear in \underline{u} sind, berechnet. Die Form des Graphen für $Re = 1$ stimmt mit dem theoretischen Graph gut überein, die numerischen Werte sind jedoch aufgrund der mit 1 für den Stokes-Bereich zu großen Re -Zahl um durchschnittlich 14% höher als die theoretischen Werte. Außerdem ist der Graph, wie von Oseen [139] vorausgesagt, nicht mehr symmetrisch, d.h. bei $\delta = 180^\circ$ ist der c_w -Wert niedriger als bei $\delta = 0^\circ$. Die Graphen von Olsson und Fuchs [137] stimmen in der Form mit den eigenen Graphen hervorragend überein, ihre Werte liegen jedoch etwa konstant 2% unter den eigenen Werten. Wie in Abbildung 5.2 zu sehen, nimmt mit steigender Re -Zahl

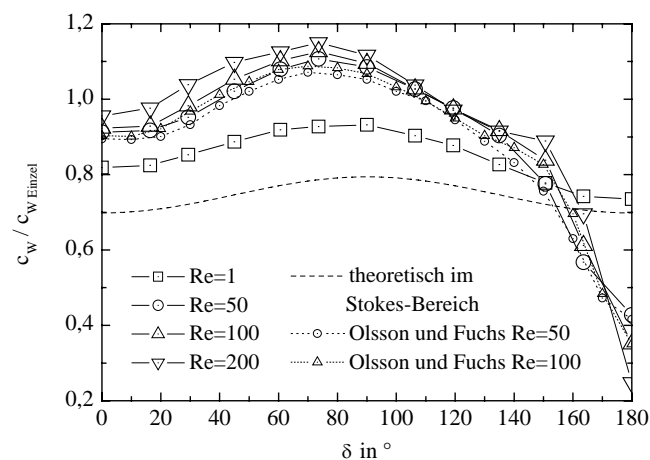


Abbildung 5.2 Relativer Widerstandsbeiwert der Umgebungskugel in Abhängigkeit des Lagewinkels bei $d_0 = 1,5d$ und $Re = 1, 50, 100$ und 200 .

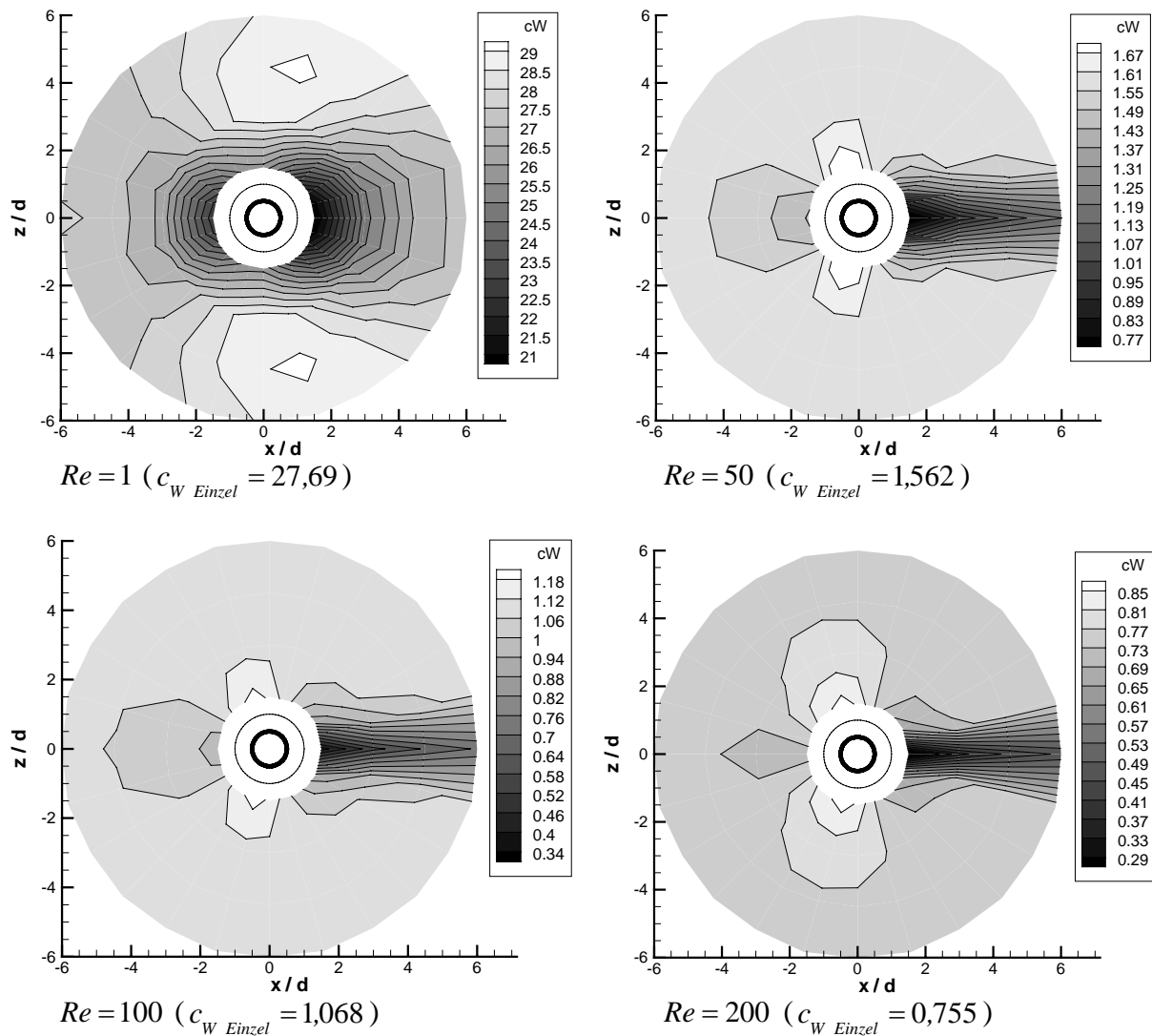


Abbildung 5.3 Widerstandsbeiwert der Umgebungskugel bei $Re = 1, 50, 100$ und 200 .

vor allem der c_w -Wert bei $\delta = 180^\circ$ ab. Ansonsten bleiben die Graphen in der Form ähnlich, d.h. der c_w -Wert steigt zwischen $\delta = 0^\circ$ und 90° bei $Re = 1$ und zwischen $\delta = 0^\circ$ und 75° bei $Re \geq 50$ monoton an und fällt dann bis 180° wieder monoton ab.

In Abbildung 5.3 ist der c_w -Wert der Umgebungskugel für alle zur Zentralkugel relativen Positionen als Kontur bei $Re = 1, 50, 100$ und 200 dargestellt. Die Zentralkugel befindet sich dabei im Koordinatenursprung ($x = z = 0$) und ist durch den dick gezeichneten schwarzen Kreis gekennzeichnet. Der zweite Kreis befindet sich bei $d_0 = d$ und stellt die Positionen dar, an denen die Umgebungskugel die Zentralkugel gerade berührt. Die c_w -Werte sind symmetrisch zur $z = 0$ -Achse. Der minimale c_w -Wert tritt bei jeder Re -Zahl im zentralen Nachlauf

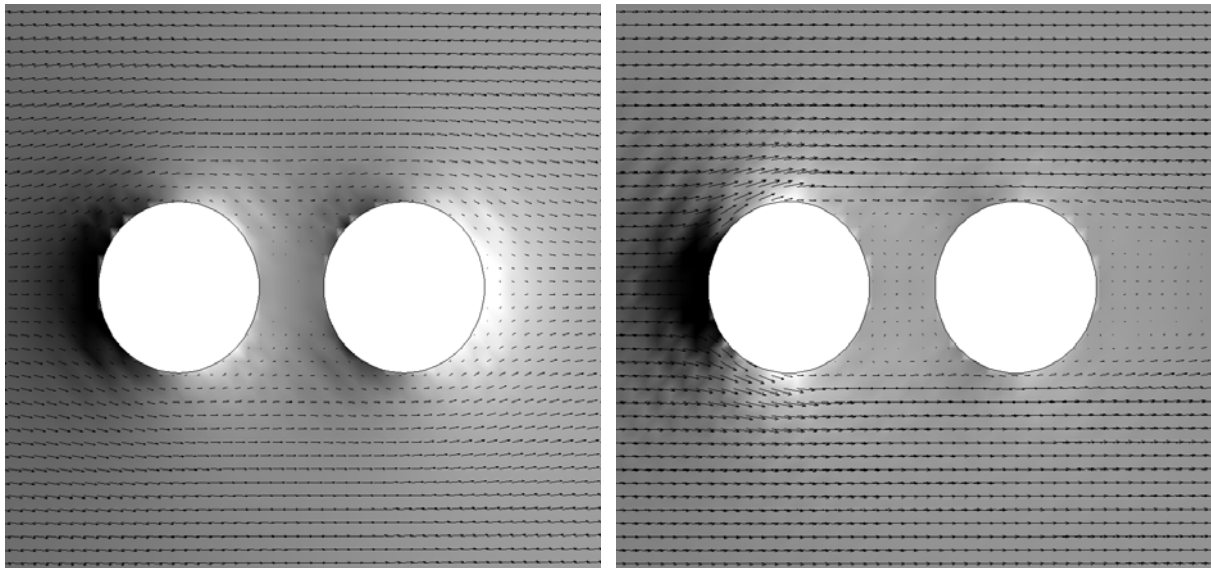


Abbildung 5.4 Geschwindigkeits- und Druckfeld um zwei hintereinander angeordnete Kugeln bei $d_0 = 1,5d$ und $Re = 1$ (links) bzw. $Re = 200$ (rechts).

der Zentralkugel ($\delta = 180^\circ$) bei $d_0 = 1,5d$ auf. Jedoch auch direkt vor der Zentralkugel ($\delta = 0^\circ$) ist bei jeder Re -Zahl der c_w -Wert niedriger als der einer Einzelkugel. Die Ursache für diese beiden Reduzierungen im c_w -Wert ist zum einen die Wechselwirkung zwischen dem niedrigen Druck im Nachlauf der vorderen Kugel und dem hohen Druck vor der hinteren Kugel, wie in Abbildung 5.4 für $Re = 1$ und 200 zu sehen. Dies führt zu einem geringeren Druckunterschied zwischen der Vorder- und Rückseite beider Kugeln und damit zu einem reduzierten Formwiderstand der Kugeln. Darüber hinaus „sieht“ die hintere Kugel eine kleinere Geschwindigkeit als eine Einzelkugel, wodurch der Widerstand der hinteren Kugel weiter erniedrigt wird. Dieser Effekt wird auch als Windschatteneffekt bezeichnet und das Nachlaufgebiet der vorderen Kugel als Windschatten. Der maximale c_w -Wert tritt bei jeder Re -Zahl ungefähr in der Übereinander-Anordnung (Abbildung 5.9) auf, weil in dieser Lage die Drücke vor und hinter den Kugeln nicht miteinander wechselwirken können. Bei $Re \geq 50$ ist der c_w -Wert in der Übereinander-Anordnung bei jedem Partikelabstand größer als der c_w -Wert der Einzelkugel.

Abbildung 5.5 zeigt den maximalen und minimalen c_w -Wert bei der Wechselwirkung zweier Kugeln in Abhängigkeit der Re -Zahl. Zwar nimmt auch der maximale c_w -Wert mit steigender Re -Zahl relativ zum Widerstand der Einzelkugel zu (um 5%, 11%, 13% und 15%

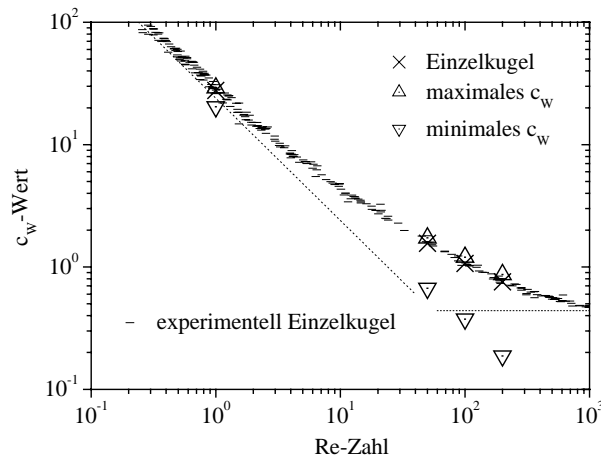


Abbildung 5.5 Vergleich zwischen experimentellen [6,7,107,158,168] und den eigenen numerischen Widerstandsbeiwerten einer Einzelkugel und den maximalen und minimalen Widerstandsbeiwerten bei der Wechselwirkung zweier Kugeln in Abhängigkeit der Partikel-Reynolds-Zahl.

bei $Re = 1, 50, 100$ bzw. 200), doch die Abnahme des minimalen c_w -Wertes gegenüber dem c_w -Wert der Einzelkugel mit steigender Re -Zahl ist weitaus deutlicher ausgeprägt (um 26%, 57%, 65% und 75% bei $Re = 1, 50, 100$ bzw. 200). Die Ursache für diese drastische Reduzierung des minimalen c_w -Wertes ist erstens das Sinken des Druckes im Nachlauf mit steigender Re -Zahl, was für die Einzelkugel ein Vergleich zwischen der Abbildung 3.8 und der Abbildung 3.9, rechte Achse, zeigt. Die zweite Ursache ist die Verstärkung des Windschatteneffektes mit steigender Re -Zahl durch das Wachsen der Nachlauflänge und des Ablöswinkels, d.h. der Größe des Nachlaufgebietes, der vorderen Kugel.

Das Verhältnis zwischen dem bei konstantem Partikelabstand über den Umfang gemittelten c_w -Wert der Umgebungskugel und dem jeweiligen c_w -Wert der Einzelkugel ist in Abhängigkeit des Partikelabstandes in Abbildung 5.6 aufgetragen. Bis auf den Bereich bei $d_0 \geq 4,5d$ und $Re = 1$ sind alle gemittelten c_w -Werte gegenüber dem c_w -Wert der Einzelkugel reduziert, aber auch bei $Re = 1$ ist der über die gesamte Fläche gemittelte c_w -Wert kleiner als der der Einzelkugel. Die stärkste Reduzierung tritt bei jeder Re -Zahl bei $d_0 = 1,5d$ auf.

Der Auftriebsbeiwert der Umgebungskugel ist in Konturdiagrammen in Abbildung 5.7 für $Re = 1, 50, 100$ und 200 dargestellt. Die Konturdiagramme sind invers symmetrisch bezüglich der $z = 0$ -Achse. Die leichten Unsymmetrien in den Diagrammen beruhen allein auf der

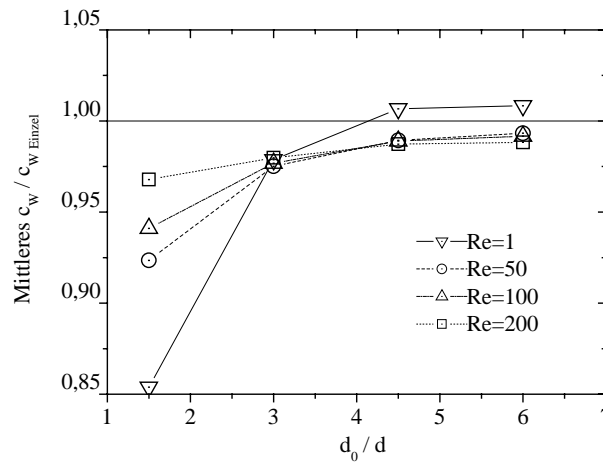


Abbildung 5.6 Über den Umfang gemittelter relativer Widerstandsbeiwert der Umgebungskugel in Abhängigkeit des Partikelabstandes.

fehlerhaften Darstellung durch das grafische Auswertungsprogramm. In der Hintereinander-Anordnung (Abbildung 5.4) wirkt auf die Kugeln kein Auftrieb, weil die Strömung axial-symmetrisch ist. Der Betrag des Auftriebsbeiwertes nimmt bei jedem Lagewinkel und jeder Re -Zahl mit steigendem Partikelabstand ab. Bei $Re = 1$ erfährt die Kugel den größten Auftrieb bei $\delta = 45^\circ$ bzw. -45° , bei $Re = 50$ und 100 bei $\delta = 75^\circ$ bzw. -75° und bei $Re = 200$ bei $\delta = 90^\circ$ bzw. -90° . Jedoch tritt bei $Re = 200$ im Nachlauf ein Gebiet mit fast genauso großem Auftriebsbeiwert wie dem größten auf. Bei $Re \geq 100$ bildet sich bei kleinen positiven und negativen Lagewinkeln ein Gebiet niedrigen Druckes am unteren bzw. oberen Rand der Umgebungskugel aus, das einen Auftrieb in Richtung der Zentralkugel verursacht.

Der oben beschriebene Verlauf des Auftriebsbeiwertes ist auch in Abbildung 5.8 zu erkennen, in der der auf den c_w -Wert der Einzelkugel bezogene Auftriebsbeiwert der Umgebungskugel bei $d_0 = 1,5d$ über den Lagewinkel aufgetragen ist. Das Minimum bei $\delta = 15^\circ$ der Graphen für $Re = 100$ und 200 wird durch das oben erwähnte Gebiet niedrigen Druckes am unteren Rand der Umgebungskugel verursacht. Der theoretische Verlauf im Stokes-Bereich und Olsson und Fuchs' [137] numerische Ergebnisse bei $Re = 50$ und 100 sind in dem Diagramm von Abbildung 5.8 mit aufgetragen. Im Vergleich zum theoretischen Graph ist der eigene numerische Auftriebsbeiwert bei $Re = 1$ bei kleinen Lagewinkeln höher. Die eigenen Ergebnisse und die Ergebnisse von Olsson und Fuchs [137] stimmen sehr gut miteinander überein.

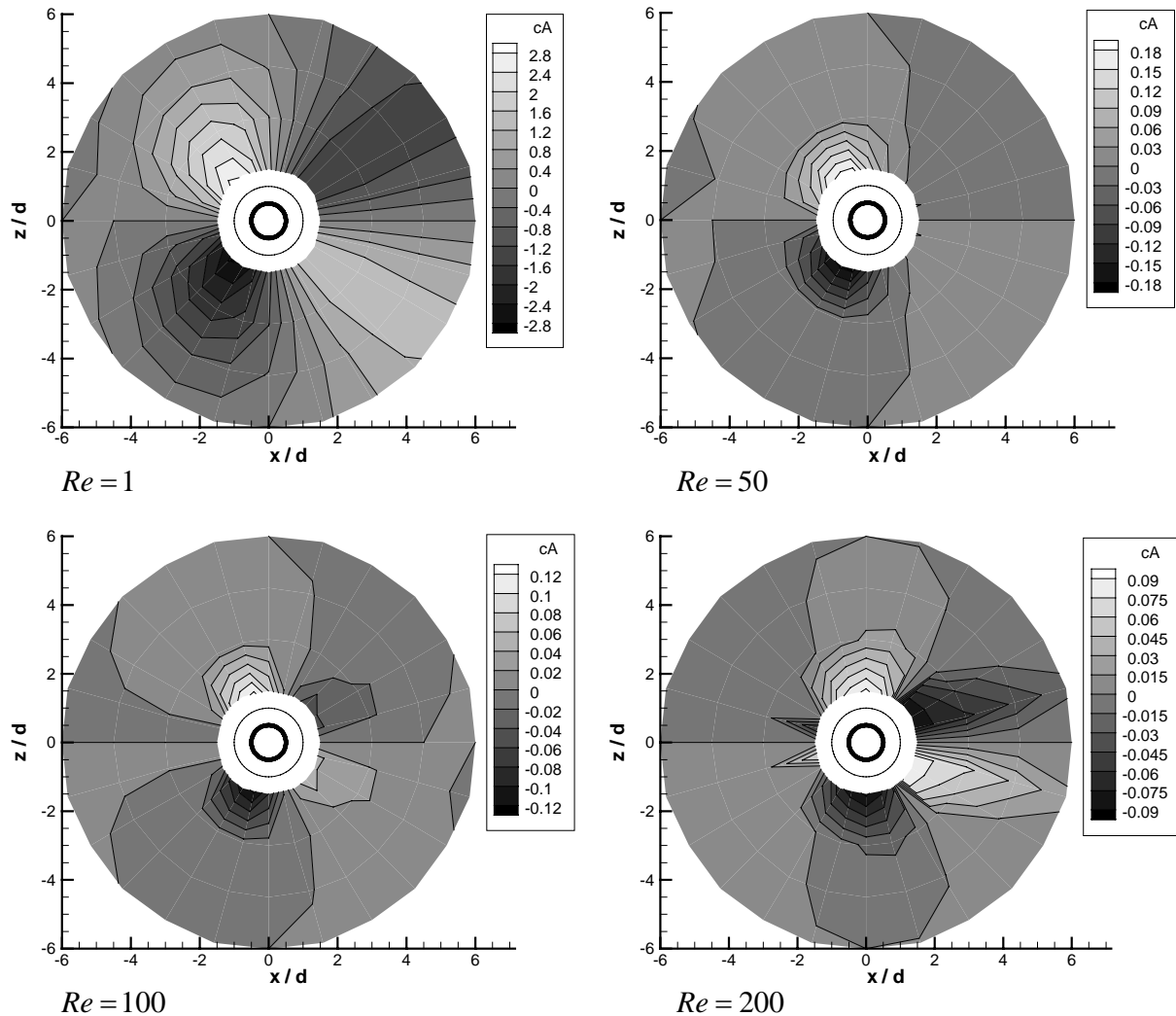


Abbildung 5.7 Auftriebsbeiwert der Umgebungskugel bei $Re = 1, 50, 100$ und 200 (Unsymmetrien in der Darstellung aufgrund des grafischen Auswertungsprogramms).

In der Übereinander-Anordnung wirkt bei jeder Re -Zahl auf die obere Kugel eine Kraft nach oben und auf die untere eine Kraft nach unten und die Kugeln stoßen sich ab. Abbildung 5.9 zeigt das Geschwindigkeits- und Druckfeld in der Übereinander-Anordnung bei $Re = 1$ und 200 . Bei $Re = 1$ ist aufgrund des „Blockierungseffektes“ im Spalt zwischen den Kugeln die Geschwindigkeit relativ gering und der Druck relativ hoch. Im Gegensatz dazu bildet sich bei $Re = 200$ durch den „Düseneffekt“ eine relativ hohe Geschwindigkeit und ein relativ niedriger Druck im Spalt aus. Jedoch sind bei $Re = 200$ der vordere Staupunkt und der Punkt höchsten Druckes in Richtung des Spaltes verschoben, wodurch die gesamte Druckverteilung auch hier eine Abstoßung der Kugeln bewirkt.

Der Wechselwirkungsbeiwert der Umgebungskugel bei $Re = 1, 50, 100$ und 200 ist als Kontur in Abbildung 5.10 dargestellt. Die Diagramme sind zusätzlich zur $z = 0$ -Achse auch

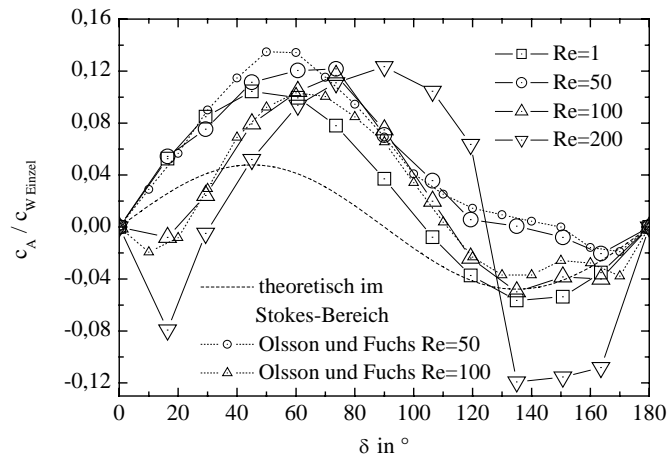


Abbildung 5.8 Relativer Auftriebsbeiwert der Umgebungskugel in Abhängigkeit des Lagewinkels bei $d_0 = 1,5d$ und $Re = 1, 50, 100$ und 200 .

zur $x=0$ -Achse symmetrisch, weil in einer Position beide Kugeln den gleichen Wechselwirkungsbeiwert besitzen. Alle Diagramme lassen sich in zwei Bereiche einteilen. Befinden sich die beiden Kugeln hintereinander oder schräg hintereinander, so ziehen sie sich aufgrund des Windschatteneffektes an; befinden sie sich übereinander oder schräg übereinander, so stoßen sie sich ab. Bei $Re = 50$ und 100 tritt bei $\delta = 30^\circ$ und 45° bzw. $\delta = -30^\circ$ und -45° ein Wechsel des Vorzeichens über den Partikelabstand ein; bei kleinem Abstand liegt eine Anziehung und bei großem Abstand eine Abstoßung vor. Im Allgemeinen nehmen jedoch nur die Beträge des Wechselwirkungsbeiwertes mit steigendem Partikelabstand ab.

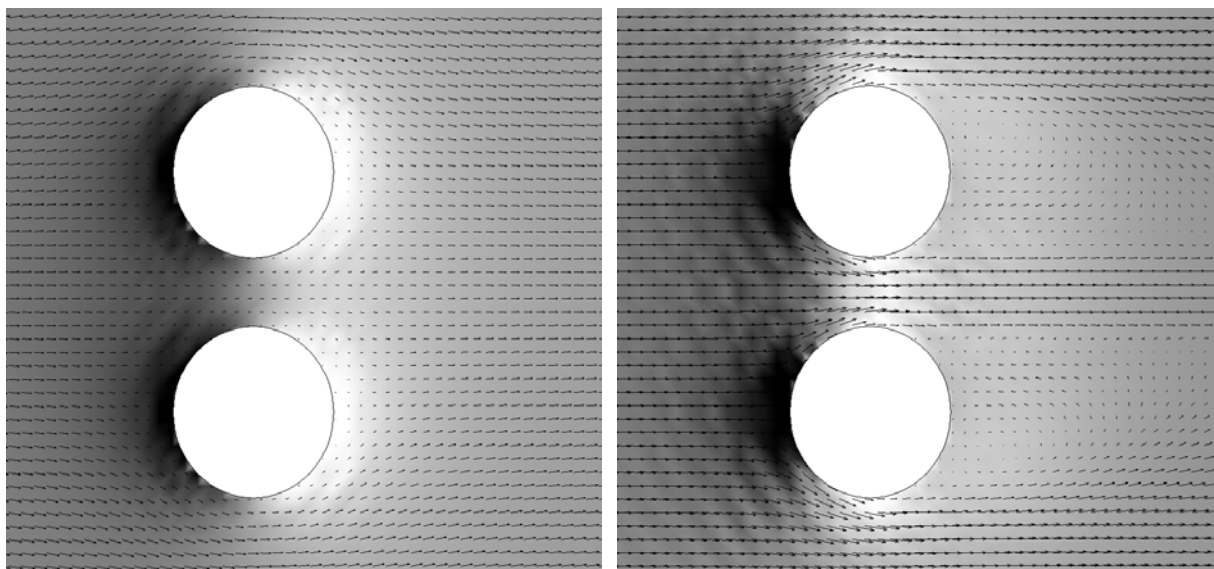


Abbildung 5.9 Geschwindigkeits- und Druckfeld um zwei übereinander angeordnete Kugeln bei $d_0 = 1,5d$ und $Re = 1$ (links) bzw. $Re = 200$ (rechts).

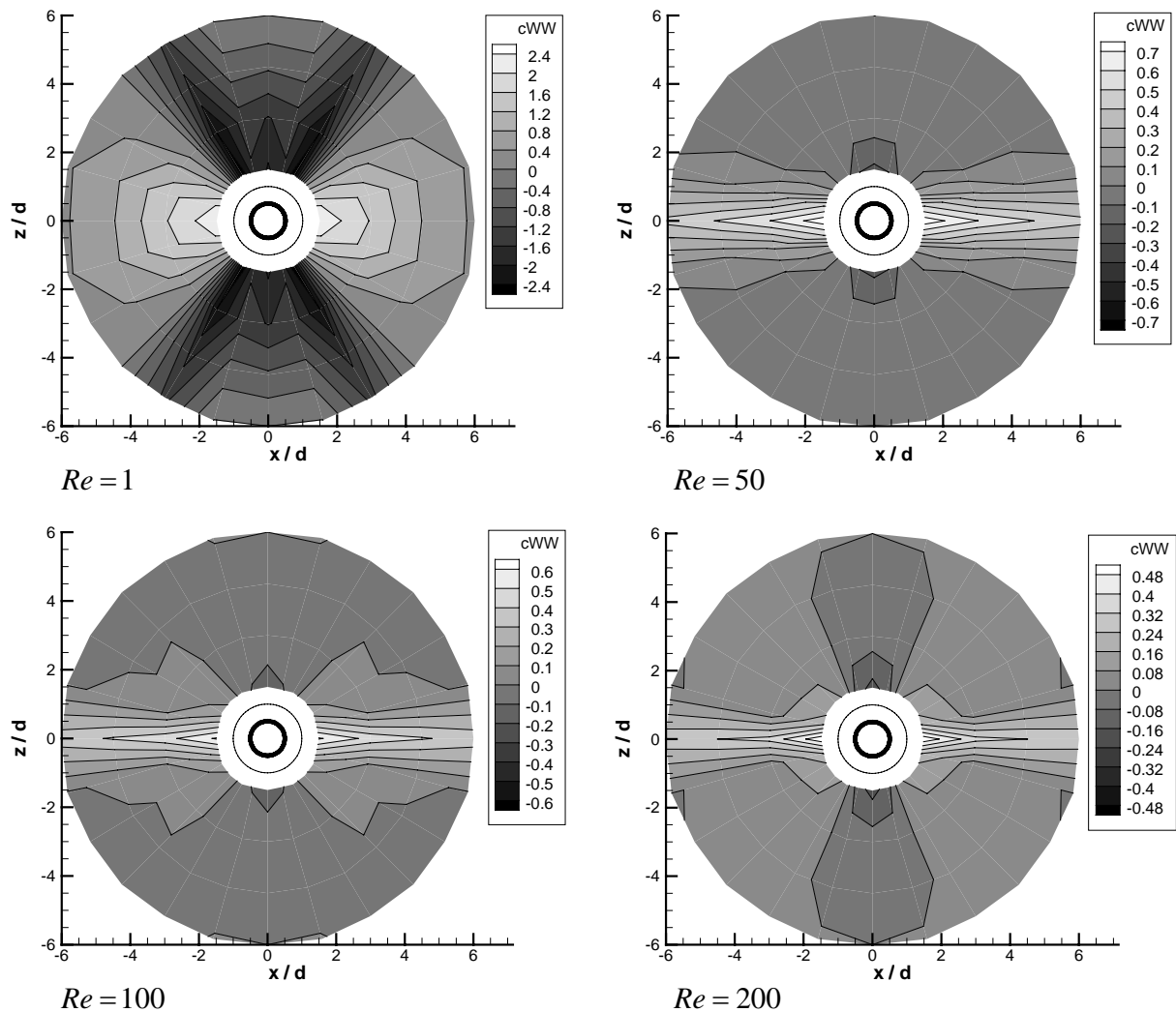


Abbildung 5.10 Wechselwirkungsbeiwert der Umgebungskugel bei $Re = 1, 50, 100$ und 200 .

In Abbildung 5.11 ist der Verlauf des Verhältnisses zwischen dem Wechselwirkungsbeiwert der Umgebungskugel bei $d_0 = 1,5d$ und dem jeweiligen c_w -Wert der Einzelkugel über den Lagewinkel aufgetragen. Theoretisch wirkt im Stokes-Bereich keine Kraft zwischen den Kugeln; gemäß Abbildung 5.11 hat der Wechselwirkungsbeiwert bei $Re = 1$ einen relativ geringen Betrag. Wie aus Abbildung 5.10 und Abbildung 5.11 zu erkennen, tritt der maximale Wechselwirkungsbeiwert (Anziehung) durch den Windschatteneffekt bei jeder Re -Zahl in der Hintereinander-Anordnung ($\delta = 0^\circ$ und 180°) auf. Bei $Re \geq 50$ übt der Windschatten den größten Einfluss überhaupt auf den Wechselwirkungsbeiwert aus. Damit hat bei $Re \geq 50$ der Wechselwirkungsbeiwert auch den größten Betrag in der Hintereinander-Anordnung und dieser ist auch bei großen Partikelabständen noch merklich ungleich Null. Der minimale Wechselwirkungsbeiwert (Abstoßung) tritt bei $Re = 1$ bei $\delta = 60^\circ$ bzw. -60° und bei $Re \geq 50$ in der Übereinander-Anordnung auf.

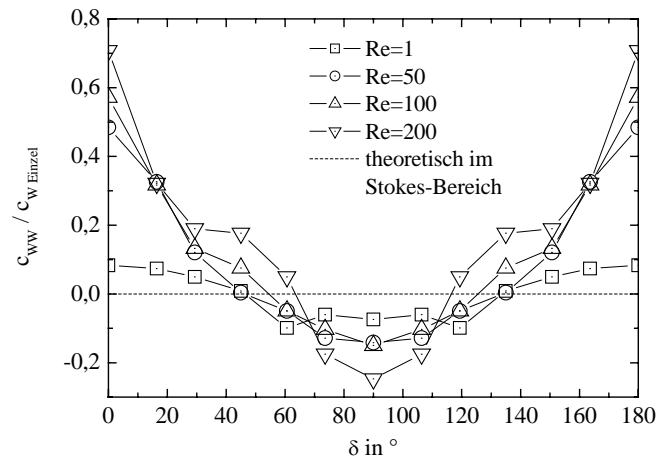


Abbildung 5.11 Relativer Wechselwirkungsbeiwert der Umgebungskugel in Abhängigkeit des Lagewinkels bei $d_0 = 1,5d$ und $Re = 1, 50, 100$ und 200 .

Bei $Re = 1$ überwiegen die negativen Wechselwirkungsbeiwerte (Abstoßung) und bei $Re \geq 50$ überwiegen die positiven Wechselwirkungsbeiwerte (Anziehung), d.h. der über die gesamte Fläche gemittelte Wechselwirkungsbeiwert ist bei $Re = 1$ negativ und bei $Re \geq 50$ positiv. Dies wird in Abbildung 5.12 verdeutlicht, wo der über den Umfang gemittelte relative Wechselwirkungsbeiwert über den Partikelabstand aufgetragen ist. Bei $Re = 1$ ist der gemittelte Wechselwirkungsbeiwert gegenüber dem c_W -Wert der Einzelkugel unbedeutend. Bei $Re \geq 50$ hat der gemittelte Wechselwirkungsbeiwert stark an Bedeutung gewonnen und nimmt betragsmäßig mit steigendem Partikelabstand monoton ab.

In den Konturdiagrammen von Abbildung 5.13 ist der Drehmomentenbeiwert der Umgebungskugel bei $Re = 1, 50, 100$ und 200 dargestellt. Wie bei dem Auftrieb erfahren die

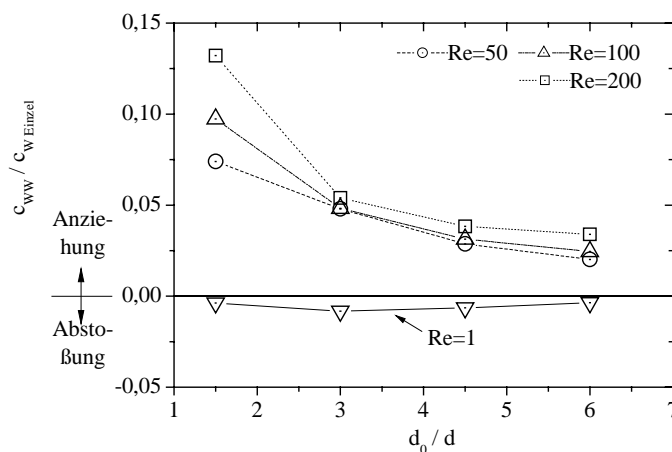


Abbildung 5.12 Über den Umfang gemittelter relativer Wechselwirkungsbeiwert der Umgebungskugel in Abhängigkeit des Partikelabstandes.

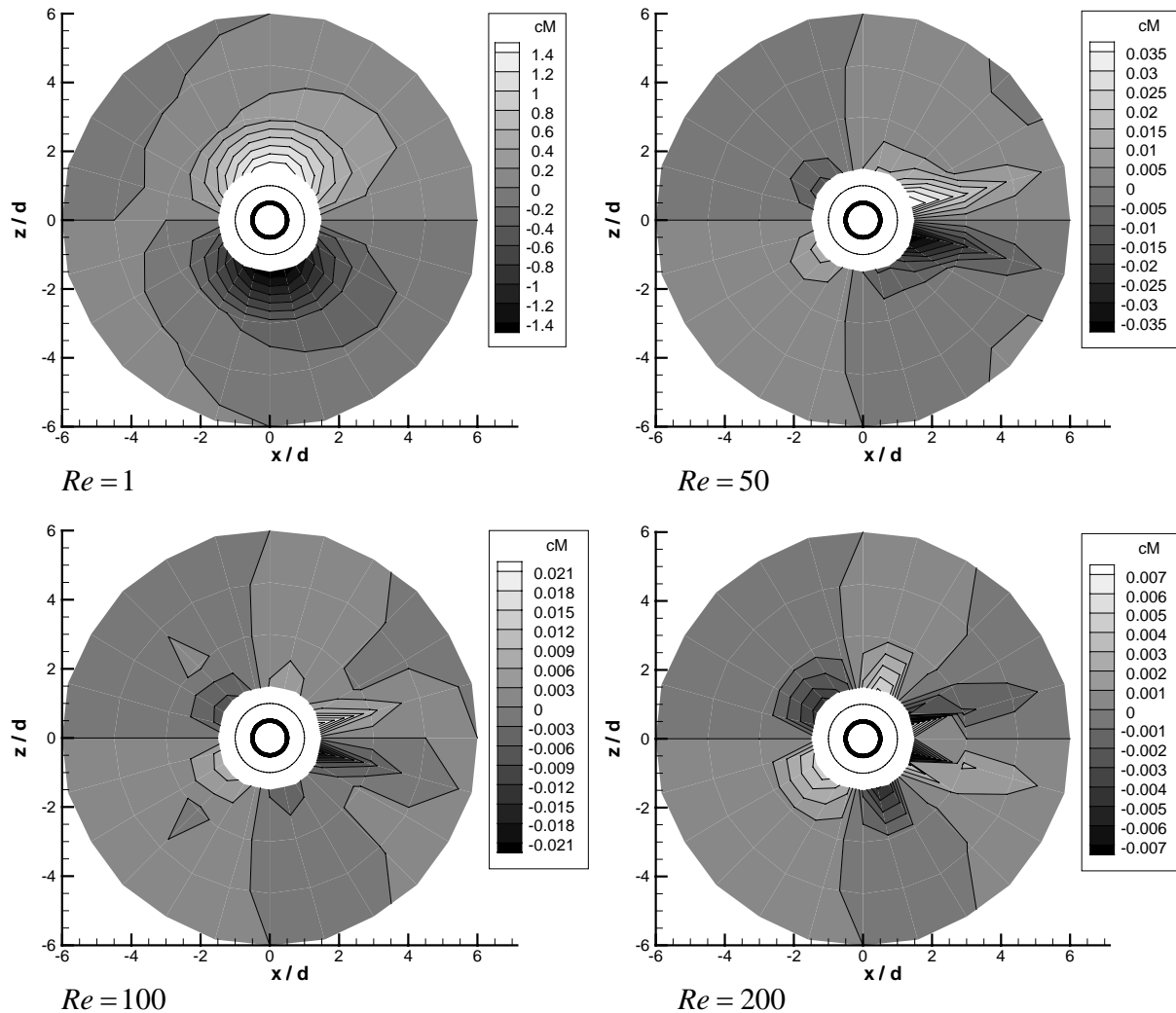


Abbildung 5.13 Drehmomentenbeiwert der Umgebungskugel bei $Re = 1, 50, 100$ und 200 (Unsymmetrien in der Darstellung aufgrund des grafischen Auswertungsprogramms).

Kugeln in der Hintereinander-Anordnung kein Drehmoment und die Werte sind invers symmetrisch zur $z = 0$ -Achse. Unsymmetrien in den Diagrammen wurden allein durch das grafische Auswertungsprogramm verursacht. Im Allgemeinen nimmt bei jedem Lagewinkel und jeder Re -Zahl der Drehmomentenbeiwert mit steigendem Partikelabstand im Betrag ab. Bei $Re = 1$ wirkt auf die obere Kugel das Drehmoment bis auf einen Bereich bei großen Partikelabständen und negativen x -Werten im Uhrzeigersinn und auf die untere Kugel entgegen dem Uhrzeigersinn. Bei $Re = 50$ kann das Konturdiagramm in etwa in die 4 Quadranten eingeteilt werden; im I. ($\delta = 90^\circ$ bis 180°) und III. Quadrant ($\delta = -90^\circ$ bis 0°) wirkt das Drehmoment im Uhrzeigersinn und im II. ($\delta = 0^\circ$ bis 90°) und IV. Quadrant ($\delta = -180^\circ$ bis -90°) entgegen dem Uhrzeigersinn. Bei $Re = 100$ und 200 ist die Verteilung des Drehmomentenbeiwertes vor allem im Nachlaufgebiet unregelmäßig.

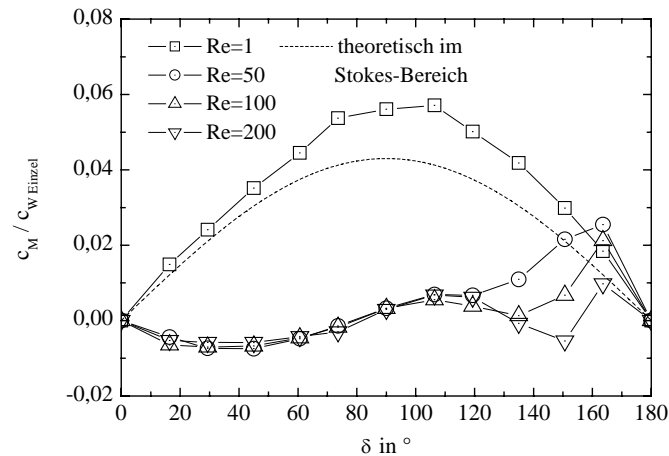


Abbildung 5.14 Relativer Drehmomentenbeiwert der Umgebungskugel in Abhängigkeit des Lagewinkels bei $d_0 = 1,5d$ und $Re = 1, 50, 100$ und 200 .

Abbildung 5.14 zeigt den zum c_w -Wert der Einzelkugel relativen Drehmomentenbeiwert der Umgebungskugel in Abhängigkeit des Lagewinkels bei $d_0 = 1,5d$. Der Verlauf bei $Re = 1$ ist dem theoretischen Ergebnis im Stokes-Bereich, der in Abbildung 5.14 mit eingezeichnet ist, ähnlich; bei kleinen Lagewinkeln sind jedoch die berechneten Drehmomentenbeiwerte um etwa 20% höher und bei großen Lagewinkeln um bis zu 50% höher als die theoretischen. Bei $Re \geq 50$ sind die Drehmomentenbeiwerte im Vergleich zum c_w -Wert der Einzelkugel unbedeutend. Das jeweils größte Drehmoment tritt bei $Re \geq 50$ bei $\delta = 165^\circ$ bzw. -165° , d.h. im Nachlaufgebiet, auf.

Abbildung 5.15 zeigt die Verhältnisse zwischen den im Betrag größten Auftriebs-, Wechselwirkungs- bzw. Drehmomentenbeiwert und dem jeweiligen c_w -Wert der Einzelkugel als Funktion der Re -Zahl. Der Einfluss der Auftriebskraft bleibt im Vergleich zum Einfluss der Widerstandskraft über die Re -Zahl nahezu konstant bei 12%, der Einfluss der Wechselwirkungskraft nimmt mit steigender Re -Zahl zu und der Einfluss des Drehmoments nimmt mit steigender Re -Zahl ab. Die relative Abnahme des Drehmomentenbeiwertes ist darin begründet, dass der Anteil der Druckverteilung am Widerstand mit steigender Re -Zahl wächst, die Druckverteilung bei Kugeln aber keinen Beitrag zum Drehmoment leistet. Der im Betrag größte Wechselwirkungsbeiwert tritt bei $Re \geq 50$, wie vorher in diesem Kapitel beschrieben, in der Hintereinander-Anordnung auf. Er sagt eine Anziehung beider Kugeln voraus und wird durch den Windschatteneffekt oder mit anderen Worten durch die c_w -Wert-Reduzierung der Kugel im Nachlauf verursacht. Weil, wie in Abbildung 5.5 zu erkennen, die

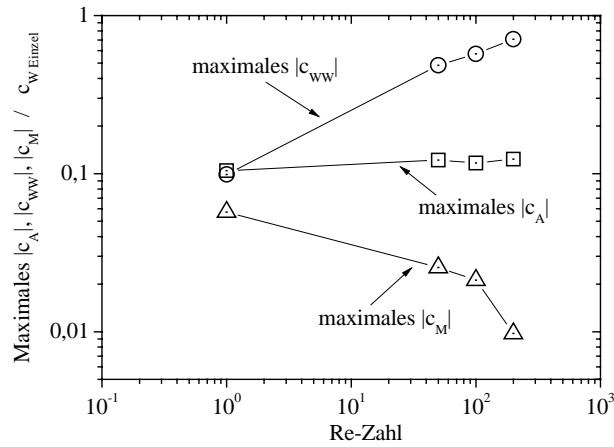


Abbildung 5.15 Relative größte Auftriebs-, Wechselwirkungs- und Drehmomentenbeiwerte bei der Wechselwirkung zweier Kugeln in Abhängigkeit der Partikel-Reynolds-Zahl.

c_W -Wert-Reduzierung mit steigender Re -Zahl zunimmt, erhöht sich dort auch der Wechselwirkungsbeiwert mit steigender Re -Zahl. Bei $Re = 200$ erreicht der maximale Wechselwirkungsbeiwert 71% des c_W -Wertes. Es sei erwähnt, dass ebenso der über die gesamte Fläche gemittelte Wechselwirkungsbeiwert mit steigender Re -Zahl an Bedeutung gewinnt, nämlich von 0,5% bei $Re = 1$ zu 4,9% des c_W -Wertes bei $Re = 200$.

6 Einfluss von Turbulenz auf die Partikelbewegung

6.1 Numerische Turbulenzgenerierung

Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Fällen von laminaren Strömungen sind in einer turbulenten Strömung die Geschwindigkeiten stochastisch verteilt. Zur statistischen Betrachtung der Turbulenz wird die Geschwindigkeit in den zeitlichen Mittelwert \bar{u} und in die Schwankungsgeschwindigkeit u'

$$\underline{u} = \bar{u} + \underline{u}' \quad (6.1)$$

aufgeteilt. Der Mittelwert der Schwankungsgeschwindigkeit ist definitionsgemäß Null. Der Turbulenzgrad (Tu) gibt das Verhältnis zwischen der mittleren rms-Schwankungsgeschwindigkeit $\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u_x'^2} + \overline{u_y'^2} + \overline{u_z'^2})}$ und der mittleren Strömungsgeschwindigkeit $|\bar{u}|$

$$Tu = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u_x'^2} + \overline{u_y'^2} + \overline{u_z'^2})}}{|\bar{u}|} \quad (6.2)$$

an.

Die Turbulenz wird numerisch durch das Spektralverfahren erzeugt [47]. Dabei wird eine Volumenkraft (\underline{f}) im Fourier-Raum bei kleinen Wellenzahlen $k_i \leq 2$ generiert. Diese erzeugt Bewegungen in großen Längenmaßen, aus denen sich die Bewegungen in kleinen Längenmaßen entwickeln und dort dissipieren. Die Fourier-Transformation lautet

$$\underline{f}(\underline{x}) = \frac{\underline{a}_0}{2} + \sum_{k_i=1}^{\infty} \underline{a}_k \cos(\omega_{Kr} \underline{k} \cdot \underline{x}) + \sum_{k_i=1}^{\infty} \underline{b}_k \sin(\omega_{Kr} \underline{k} \cdot \underline{x}) \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \underline{a}_k &= \frac{2}{L_{Kr}} \int_0^{L_{Kr}} \underline{f}(\underline{x}) \cos(\omega_{Kr} \underline{k} \cdot \underline{x}) d^3 x_i \\ \underline{b}_k &= \frac{2}{L_{Kr}} \int_0^{L_{Kr}} \underline{f}(\underline{x}) \sin(\omega_{Kr} \underline{k} \cdot \underline{x}) d^3 x_i \end{aligned} \quad (6.4)$$

In diesen Gleichungen ist L_{Kr} die Länge des Rechengbietes, die in den drei Raumrichtungen gleich groß angenommen wird, und $\omega_{Kr} = \frac{2\pi}{L_{Kr}}$ ist die sogenannte Kreisfrequenz. Die Größen

\underline{a}_k und \underline{b}_k heißen Fourier-Koeffizienten. Zur Erzeugung der Volumenkraft wird der Fourier-Koeffizient \underline{a}_0 Null gesetzt und die anderen Fourier-Koeffizienten werden durch Zufalls-

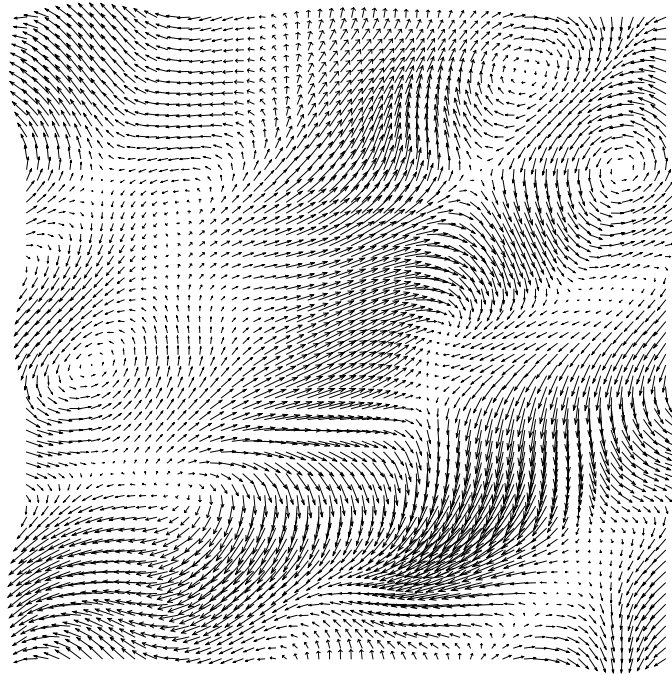


Abbildung 6.1 Geschwindigkeitsfeld einer turbulenten Strömung (Turbulenzparameter siehe Tabelle 6.2).

zahlen, die einer Normalverteilung mit dem Mittelwert Null genügen, berechnet. Die Höhe der Standardabweichung bestimmt dann den Turbulenzgrad. Da im diskreten Fall eine Kraft proportional zur Geschwindigkeitsänderung ist ($\underline{f} \approx \Delta \underline{u}$), wird die Volumenkraft als Geschwindigkeitsänderung in die Strömung eingeführt. Mit gleich großen Standardabweichungen in allen Raumrichtungen und periodischen Randbedingungen an den Rändern bildet sich eine homogene isotrope Turbulenz über das gesamte Rechengebiet. Abbildung 6.1 zeigt das Geschwindigkeitsfeld solch einer turbulenten Strömung. Die Schwankungsgeschwindigkeiten gehorchen per Definition einer Normalverteilung mit dem Mittelwert Null.

Weitere charakteristische Kenngrößen der Turbulenz sind die turbulente kinetische Energie (e_{turb}), die Dissipationsrate (ε), das Kolmogorov-Längenmaß und -Zeitmaß (λ_K bzw. τ_K), das Taylor-Längenmaß und -Zeitmaß (λ_T bzw. τ_T) sowie das integrale Längenmaß und Zeitmaß (λ_{Int} bzw. τ_{Int}). Die turbulente kinetische Energie ist das Skalarprodukt der Schwankungsgeschwindigkeiten

$$e_{turb} = \frac{1}{2} \overline{\underline{u}' \cdot \underline{u}'} . \quad (6.5)$$

Die Dissipationsrate ergibt sich aus

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \nu \overline{(\nabla \underline{u}' + (\nabla \underline{u}')^T) \cdot (\nabla \underline{u}' + (\nabla \underline{u}')^T)}. \quad (6.6)$$

Mit der Dissipationsrate können die Längenmaße und Zeitmaße nach Kolmogorov und Taylor wie folgt berechnet werden

$$\lambda_K = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (6.7)$$

$$\tau_K = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.8)$$

$$\lambda_T = \left(\frac{5\nu \left(\overline{u_x'^2} + \overline{u_y'^2} + \overline{u_z'^2} \right)}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.9)$$

$$\tau_T = \left(\frac{5\nu \left(\overline{u_x'^2} + \overline{u_y'^2} + \overline{u_z'^2} \right)}{\varepsilon^2} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (6.10)$$

Das integrale Längenmaß und das integrale Zeitmaß lassen sich aus der räumlichen Autokorrelationsfunktion

$$R_{ij}(\Delta x_j) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_i'(x, t) u_i'(x + \Delta x_j, t) dt \quad (6.11)$$

bzw. aus der zeitlichen Autokorrelationsfunktion

$$R_i(\Delta t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_i'(x, t) u_i'(x, t + \Delta t) dt \quad (6.12)$$

bestimmen. Der Anfangswert (bei $\Delta x_j = 0$ bzw. $\Delta t = 0$) der Autokorrelationsfunktionen gibt den Mittelwert der quadratischen Schwankungsgeschwindigkeit ($\overline{u_i'^2}$) an. Die Integration der mit $\overline{u_i'^2}$ normierten räumlichen Autokorrelationsfunktion nach Δx_j

$$\lambda_{Int, ij} = \frac{1}{\overline{u_i'^2}} \int_0^\infty R_{ij}(\Delta x_j) d(\Delta x_j) \quad (6.13)$$

liefert das integrale Längenmaß $\lambda_{Int, ij}$ und die Integration der normierten zeitlichen Autokorrelationsfunktion nach Δt

$$\tau_{Int, i} = \frac{1}{\overline{u_i'^2}} \int_0^\infty R_i(\Delta t) d(\Delta t) \quad (6.14)$$

liefert das integrale Zeitmaß $\tau_{Int, i}$.

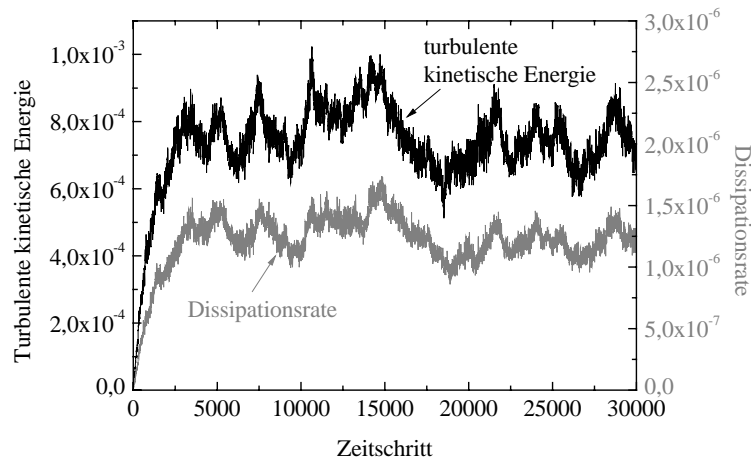


Abbildung 6.2 Zeitlicher Verlauf der über das Rechengebiet gemittelten turbulenten kinetischen Energie und Dissipationsrate (Turbulenzparameter siehe Tabelle 6.2).

Eine weitere turbulente Kenngröße ist die Taylor-Reynolds-Zahl. Diese basiert auf der rms-Schwankungsgeschwindigkeit und dem Taylor-Längenmaß und lautet analog zu (3.1)

$$Re_T = \frac{\sqrt{\frac{1}{3} \left(\overline{u_x'^2} + \overline{u_y'^2} + \overline{u_z'^2} \right)} \lambda_T}{\nu} \quad (6.15)$$

Die über das Rechengebiet gemittelte turbulente kinetische Energie und Dissipationsrate sind in Abbildung 6.2 über die Zeit für die Turbulenzparameter von Tabelle 6.2 aufgetragen. Beide Größen sind mit der Gitterweite Δx und der Zeitschrittweite Δt dimensionslos geschrieben. Es zeigt sich wie bei Eswaran und Pope [47] und Ten Cate et al. [186], dass nach einer Einstellzeit beide Größen um einen Mittelwert schwanken.

Die über alle Richtungen gemittelte räumliche Autokorrelationsfunktion ist für die Turbulenzparameter von Tabelle 6.3 in Abbildung 6.3 dargestellt. Transformiert man die räumliche Autokorrelationsfunktion mit Gleichung (6.4) in den Fourier-Raum, wobei typischerweise die Fourier-Koeffizienten anstatt durch $2/L_{Kr}$ durch π dividiert werden, so ist der Betrag aus den beiden Fourier-Koeffizienten die eindimensionale turbulente kinetische Energie zur jeweiligen Wellenzahl. Das aus der Autokorrelationsfunktion von Abbildung 6.3 berechnete eindimensionale Energiespektrum ist in Abbildung 6.4 dargestellt.

6.2 Einfluss der Turbulenz auf die Partikelbeiwerte

Wie im Kapitel 3.3 erwähnt, fällt bei der sogenannten kritischen Re -Zahl von ungefähr $2,5 \cdot 10^5$ der c_w -Wert einer Kugel abrupt auf weniger als die Hälfte [10,43,46,55,84,202,204]. Prandtl [145] konnte dieses Phänomen durch den Umschlag der Grenzschichtströmung von laminar zu turbulent erklären. Genauer gesagt wandert der Ablösepunkt weiter stromabwärts und das Totwassergebiet wird schmaler. Prandtl [145] wies bereits darauf hin, dass sich die kritische Re -Zahl mit höherem Turbulenzgrad hin zu kleineren Werten verschiebt, was durch weitere Messungen [10,43,55] bestätigt wurde.

Für längsangeströmte Platten gelten für den c_w -Wert die Gleichungen (3.20) und (3.21) in einer laminaren bzw. turbulenten Strömung, wobei der Übergang zwischen beiden Bereichen über die Plattenlänge fließend verlaufen kann. Beide Gleichungen sind in Abbildung 6.5, die Prandtl und Betz' Publikation [147] entnommen ist, dargestellt. Die turbulenten c_w -Werte (Gerade I) liegen höher als die laminaren Werte (Gerade III) bei gleicher Re -Zahl, weil die Geschwindigkeitsgradienten und damit die viskosen Spannungen in einer turbulenten Strömung größer sind. Das gleiche qualitative Ergebnis wie für die längsangeströmte Platte erhielten Dryden und Kuethé [43] für längsangeströmte Stromlinienkörper.

Im unterkritischen Bereich ermittelten Torobin und Gauvin [189] sowie Zarin [212] experimentell einen erhöhten Widerstand von Kugeln mit größerem Durchmesser als die turbulenten Mikromaße in einer turbulenten Strömung verglichen zur nicht turbulenten

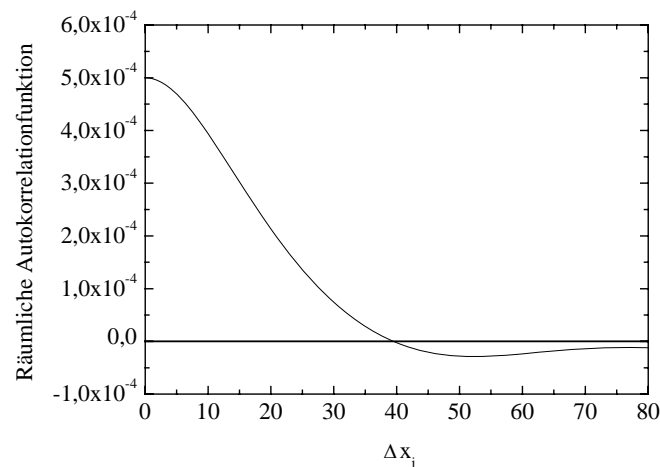


Abbildung 6.3 Über alle Richtungen gemittelte räumliche Autokorrelationsfunktion (Turbulenzparameter siehe Tabelle 6.3).

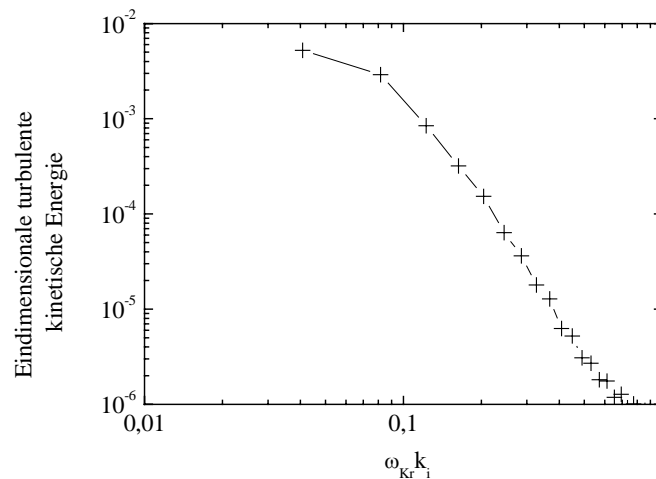


Abbildung 6.4 Eindimensionales Energiespektrum (Turbulenzparameter siehe Tabelle 6.3).

Strömung. Zarin [212] und Neve [130] erkannten, dass auch das Verhältnis zwischen den Partikelabmessungen und den Längenmaßen der Turbulenz einen Einfluss auf den Widerstand hat. Anderson und Uhlherr [5] maßen eine Erhöhung des c_w -Wertes von Kugeln mit Durchmessern, die in etwa die Größe des integralen turbulenten Längenmaßes haben, um etwa 10% in einer turbulenten Strömung im Vergleich zur laminaren Strömung. Warnica et al. [200] kamen experimentell zu dem Ergebnis, dass die Turbulenz keinen signifikanten Einfluss auf den c_w -Wert von Partikeln in Größenordnung des Kolmogorov-Längenmaßes hat. Schwartzberg und Treyball [172], Magelli et al. [113] und Brucato et al. [23] führten Sedimentationsversuche in turbulenten Strömungen durch und ermittelten, dass der c_w -Wert in turbulenten Strömungen stets höher als in laminaren Strömungen ist. Magelli et al. [113]

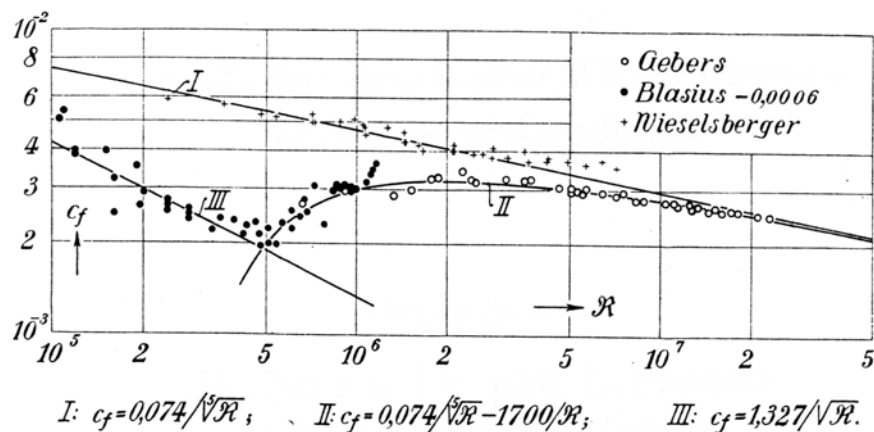


Abbildung 6.5 Widerstandsbeiwert einer längsangeströmten Platte in Abhängigkeit der Partikel-Reynolds-Zahl. Abbildung aus Prandtl und Betz [147].

Tu	17%
ν	0,0133
e	$2,55 \cdot 10^{-4}$
ε	$4,93 \cdot 10^{-7}$
λ_K	1,49
λ_T	8,42
λ_{Int}	10,3
τ_K	167
τ_T	531
τ_{Int}	787
Re_T	8,23

Tabelle 6.1 Turbulente Kenngrößen für die Umströmung einer Kugel bzw. eines Quaders (mit Δx und Δt dimensionslos geschrieben).

und Brucato et al. [23] fanden weiterhin, dass die Erhöhung des c_w -Wertes in Proportionalität zum Verhältnis zwischen dem Partikeldurchmesser und dem Kolmogorov-Längenmaß steht. Schubauer und Dryden [170] erhielten eine Erhöhung des Widerstandes einer im Vergleich zu den turbulenten Längenmaßen großen querangeströmten Platte mit steigendem Turbulenzgrad.

In den eigenen durchgeführten Simulationen wird eine Kugel bzw. ein Quader mit dem Achsenverhältnis $c/a = 1,5$ bei $Re = 90$ turbulent umströmt. Die dazugehörigen Turbulenzparameter sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst, wobei die Werte unter Verwendung der Gitterweite Δx und der Zeitschrittweite Δt dimensionslos dargestellt sind. Das Verhältnis zwischen dem Kugeldurchmesser bzw. der Kantenlänge des Würfels und dem Kolmogorov-Längenmaß beträgt in etwa 8. Die Strömungskonfiguration ist die gleiche wie in Kapitel 3.4 (siehe Abbildung 3.11).

Die zeitlich gemittelten c_w -Werte, Auftriebsbeiwerte und Drehmomentenbeiwerte in einer turbulenten Strömung sind in Abhängigkeit des Anströmwinkels im Vergleich zu den Werten bei gleichmäßiger Strömung in Abbildung 6.6, Abbildung 6.7 bzw. Abbildung 6.8 aufgetragen. Im Allgemeinen erhöhen sich alle drei Partikelbeiwerte durch die Turbulenz. Dies geht konform mit der in Experimenten [23,24,113,172,189,212] gefundenen c_w -Wert-Erhöhung von Partikeln mit im Bezug zum Kolmogorov-Längenmaß großen Abmessungen in einer turbulenten Strömung. Durch die über das gesamte Rechengebiet homogene Turbulenz-

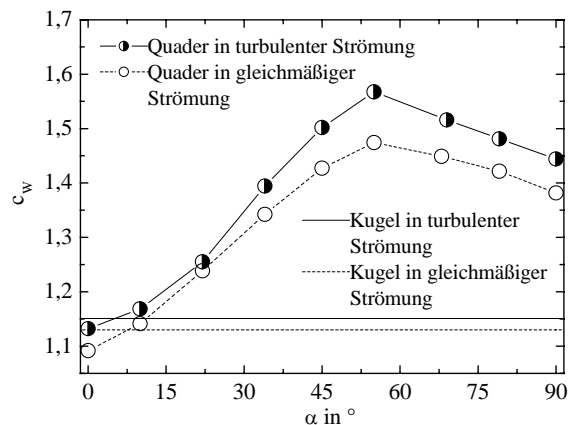


Abbildung 6.6 Vergleich zwischen dem zeitlich gemittelten Widerstandsbeiwert einer Kugel und eines Quaders ($c/a = 1,5$) in einer turbulenten Strömung und dem Widerstandsbeiwert in einer gleichmäßigen Strömung in Abhängigkeit des Anströmwinkels bei $Re = 90$.

generierung bilden sich relativ große Schwankungen in Geschwindigkeit und Druck auch um das Partikel herum aus. Damit einhergehend schwanken auch die Partikelbeiwerte sehr stark über die Zeit. In einem oszillierenden Fluid sind wegen der nicht linearen Abhängigkeit zwischen den Partikelbeiwerten und der Geschwindigkeit die mittleren Partikelbeiwerte allein aus theoretischer Sicht größer als die Partikelbeiwerte bei mittlerer Geschwindigkeit [195]. Dies stellt eine Erklärung für die Erhöhung aller Partikelbeiwerte unter Turbulenzbedingungen dar.

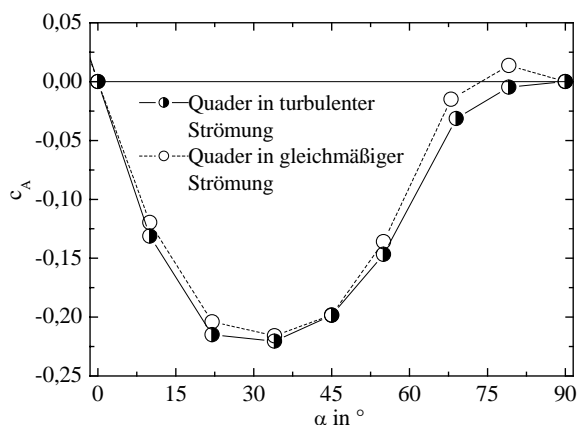


Abbildung 6.7 Vergleich zwischen dem zeitlich gemittelten Auftriebsbeiwert einer Kugel und eines Quaders ($c/a = 1,5$) in einer turbulenten Strömung und dem Auftriebsbeiwert in einer gleichmäßigen Strömung in Abhängigkeit des Anströmwinkels bei $Re = 90$.

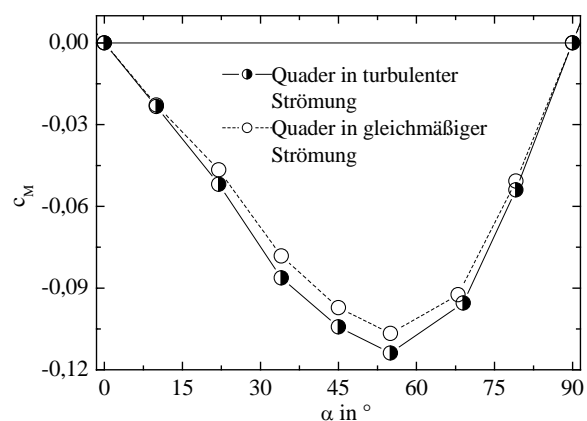


Abbildung 6.8 Vergleich zwischen dem zeitlich gemittelten Drehmomentenbeiwert einer Kugel und eines Quaders ($c/a = 1,5$) in einer turbulenten Strömung und dem Drehmomentenbeiwert in einer gleichmäßigen Strömung in Abhängigkeit des Anströmwinkels bei $Re = 90$.

6.3 Einfluss der Turbulenz auf die Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit eines Partikels

In den innerhalb dieser Arbeit bisher betrachteten Fällen ruhten die Partikel oder drehten sich mit einer definierten Winkelgeschwindigkeit. In den in diesem Kapitel untersuchten Fällen können sich die Partikel in einer homogenen isotropen turbulenten Strömung mit der mittleren Geschwindigkeit von Null frei bewegen. Fan und Ahmadi [49] studierten numerisch die Bewegung von ellipsoidalen Partikeln, die als sehr klein gegenüber den turbulenten Längensmaßen und daher als Massenpunkte betrachtet wurden, in einem turbulenten Strömungsfeld. Die rms-Geschwindigkeit und die rms-Winkelgeschwindigkeit waren für Partikel mit gleich großem Volumen nahezu unabhängig vom Achsenverhältnis. Die Dispersion unendlich dünner und trägheitsloser Fasern wurde theoretisch von Olson und Kerekes [136] und numerisch von Olson [135] berechnet. Sowohl die translatorische als auch die rotatorische Dispersion nahmen mit zunehmender Länge der Fasern ab.

Die Gleichungen zur Simulation der freien Bewegung eines Partikels sind in Kapitel 2.3 beschrieben. Es werden Einzelpartikel zylindrischer Form mit den vier verschiedenen Achsenverhältnissen $c/a = 1, 2, 3$ und 4 simuliert. Das Volumen der Partikel wird bei dem volumenäquivalenten Durchmesser von $d_v = 12$ konstant gehalten. Zwei verschieden große Rechengebiete der Größe von $60 \times 60 \times 60$ Zellen bzw. $154 \times 154 \times 154$ Zellen werden betrachtet; die entsprechenden turbulenten Kenngrößen sind in Tabelle 6.2 und Tabelle 6.3 zusammengefasst. Sämtliche Werte sind mit der Gitterweite Δx und der Zeitschrittweite Δt in die

ν	0,005
e	$7,5 \cdot 10^{-4}$
ε	$1,11 \cdot 10^{-6}$
λ_K	0,579
λ_T	5,809
λ_{Int}	8,91
τ_K	67,08
τ_T	311,99
τ_{Int}	398,5
Re_T	25,98

Tabelle 6.2 Turbulente Kenngrößen für das $60 \times 60 \times 60$ große Rechengebiet (mit Δx und Δt dimensionslos geschrieben).

ν	0,01
e	$7,5 \cdot 10^{-4}$
ε	$5,59 \cdot 10^{-7}$
λ_K	1,157
λ_T	11,59
λ_{Int}	19,9
τ_K	133,8
τ_T	621,8
τ_{Int}	889,9
Re_T	25,91

Tabelle 6.3 Turbulente Kenngrößen für das $154 \times 154 \times 154$ große Rechengebiet (mit Δx und Δt dimensionslos geschrieben).

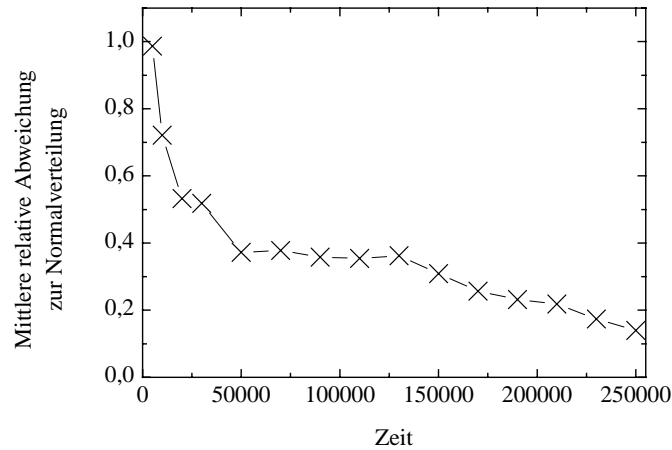


Abbildung 6.9 Mittlere relative Abweichung zwischen der berechneten Geschwindigkeitsverteilung und der theoretischen Normalverteilung eines zylindrischen Partikels mit $c/a = 4$ und $St = 40$ in Abhängigkeit der Zeit.

dimensionslose Form überführt worden. Das integrale turbulente Längenmaß besitzt in etwa die Größenordnung der Partikelabmessung.

Die Stokes-Zahl beschreibt die Fähigkeit eines Partikels, der Fluidströmung zu folgen. Die Partikel folgen der Strömung desto besser, je kleiner die Stokes-Zahl ist. Die hier verwandte Stokes-Zahl basiert auf dem integralen Zeitmaß und ist als

$$St = \frac{\rho_{Pa} d_{Pa}^2}{18\eta\tau_{int}} \quad (6.16)$$

definiert. Im kleinen Rechengbiet werden die Partikel mit jeweils den vier Stokes-Zahlen von $St = 1, 2, 4$ und 40 simuliert und im großen Rechengbiet mit den Stokes-Zahlen von $St = 0,9$ und 9 .

Im kleinen Rechengbiet werden immer mindestens 250000 Zeitschritte berechnet. Im großen Rechengbiet konnten wegen des großen Rechenaufwandes von ungefähr 30 Tage für 10000 Zeitschritte nur etwa 40000 Zeitschritte simuliert werden. In Abbildung 6.9 ist die mittlere relative Abweichung der berechneten Partikelgeschwindigkeitsverteilung zur theoretischen Normalverteilung $\left| \frac{h_{berechnet, i} - h_{theor, i}}{h_{theor, i}} \right|$ über die Zeit aufgetragen, wobei h_i die relative Häufigkeit der Klasse i darstellt. Die Geschwindigkeitsverteilung nähert sich mit steigender Zeit immer mehr der Normalverteilung an. Nach Abbildung 6.9 beträgt für $t = 40000$ die Abweichung von der Normalverteilung etwa 50% und bei $t = 250000$ 14%. Daher unterliegen die Ergebnisse im großen Rechengbiet einer großen statistischen Unsicherheit, aber auch

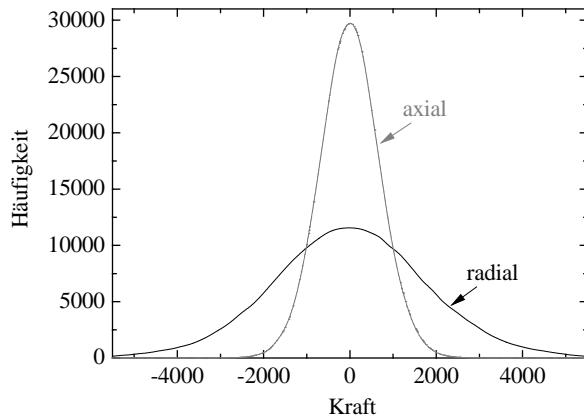


Abbildung 6.10 Häufigkeitsverteilung der radialen und axialen Kraftkomponente eines zylindrischen Partikels mit $c/a = 4$ und $St = 40$.

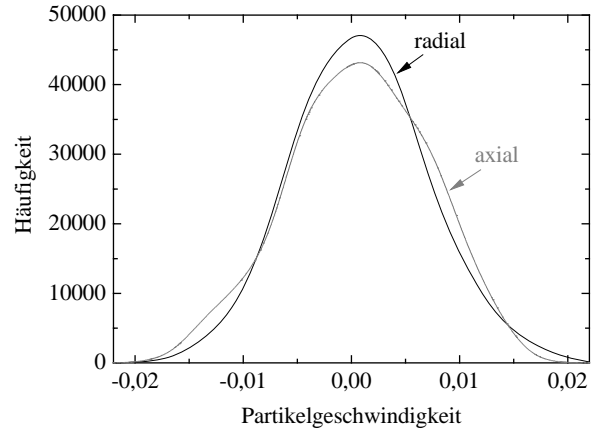


Abbildung 6.11 Häufigkeitsverteilung der radialen und axialen Geschwindigkeitskomponente eines zylindrischen Partikels mit $c/a = 4$ und $St = 40$.

die Rechnungen im kleinen Rechengebiet sind statistisch nicht vollkommen sicher. Trotz dieser statistischen Unsicherheiten zeigen die Ergebnisse im kleinen und großen Rechengebiet, wie später in Abbildung 6.14, Abbildung 6.15 und Abbildung 6.16 zu sehen, die gleichen Trends. Nun folgend werden, wenn nicht anders gekennzeichnet, nur die Ergebnisse für das kleine Rechengebiet näher beschrieben.

Die Kräfte, Drehmomente, Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten der Partikel gehorchen einer Normalverteilung, weil die Fluidgeschwindigkeiten per Definition normalverteilt sind. Dies ist beispielhaft für die (dimensionslosen) Kräfte und Geschwindigkeiten des Partikels mit $c/a = 4$ und $St = 40$ in Abbildung 6.10 bzw. Abbildung 6.11 dargestellt. Dabei sind die im körperfesten Koordinatensystem axialen und radialen Komponenten getrennt aufgetragen. Wie man aus Abbildung 6.10 sehen kann, ist für das Partikel mit $c/a = 4$ der rms-Wert der radialen Kraftkomponente größer als der rms-Wert der axialen Kraftkomponente, weil die Querschnittsfläche in Radialrichtung größer als die Querschnittsfläche in Axialrichtung ist. Der Unterschied zwischen der radialen und der axialen Kraft führt zu einem unterschiedlichen Kurzzeitverhalten der radialen und axialen Geschwindigkeit, welches in Abbildung 6.12 aufgetragen ist. Der Verlauf der axialen Geschwindigkeit ist glatter als Verlauf der radialen Geschwindigkeit.

Die rms-Werte der radialen und axialen Partikelgeschwindigkeit sind dagegen praktisch identisch (Abbildung 6.11), was zu einem gleichen Langzeitverhalten der radialen und axialen

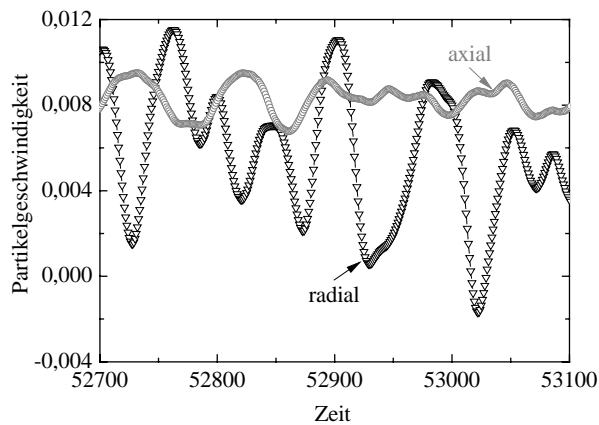


Abbildung 6.12 Kurzzeitverhalten der radialen und axialen Geschwindigkeitskomponente eines zylindrischen Partikels mit $c/a = 4$ und $St = 40$.

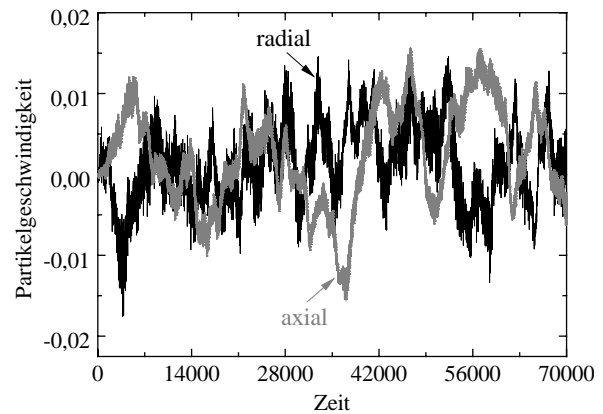


Abbildung 6.13 Langzeitverhalten der radialen und axialen Geschwindigkeitskomponente eines zylindrischen Partikels mit $c/a = 4$ und $St = 40$.

Geschwindigkeit führt, das in Abbildung 6.13 dargestellt ist. Das Partikeldrehmoment und die Partikelwinkelgeschwindigkeit verhalten sich in gleicher Weise wie die Partikelkraft und die Partikelgeschwindigkeit; für längliche Zylinder ($c/a > 1$) ist das radiale Drehmoment wegen des durchschnittlich größeren Hebelarms größer als das axiale Drehmoment, die rms-Werte der radialen und axialen Partikelwinkelgeschwindigkeit sind jedoch wieder nahezu gleich groß.

Die Untersuchung der Abhängigkeit der rms-Partikelgeschwindigkeit und der rms-Partikelwinkelgeschwindigkeit von der Stokes-Zahl zeigt erwartungsgemäß eine Abnahme beider Größen mit steigender Stokes-Zahl. Abbildung 6.14 zeigt dieses Verhalten im Detail für das Partikel mit $c/a = 1$. Die relative rms-Partikelgeschwindigkeit nimmt dabei stärker mit steigender Stokes-Zahl ab als die rms-Partikelwinkelgeschwindigkeit.

Die Abhängigkeiten der zur rms-Fluidgeschwindigkeit bzw. rms-Fluidwinkelgeschwindigkeit relativen rms-Partikelgeschwindigkeit und rms-Partikelwinkelgeschwindigkeit vom Achsenverhältnis bei $St = 1, 2, 4$ und 40 sind in Abbildung 6.15 bzw. Abbildung 6.16 dargestellt. Die Ergebnisse des großen Rechengebietes bei $St = 0,9$ und 9 sind auch in den Diagrammen eingetragen; sie folgen den gleichen Trends wie im kleinem Rechengebiet, sind jedoch, wie oben erwähnt, statistisch unsicherer und sollen daher nicht weiter betrachtet werden. Die rms-Partikelgeschwindigkeit nimmt mit steigendem Achsenverhältnis monoton ab, wobei die Abnahme bei kleiner Stokes-Zahl stärker ausgeprägt ist. Diese Abnahme mit steigender Länge und damit steigender Oberfläche wurde auch von Olson [135] sowie Olson und

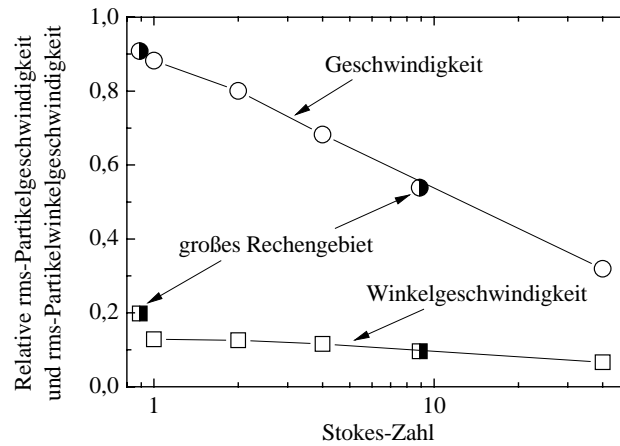


Abbildung 6.14 Relative rms-Geschwindigkeit und rms-Winkelgeschwindigkeit eines zylindrischen Partikels mit $c/a = 1$ in Abhängigkeit der Stokes-Zahl.

Kerekes [136] für unendlich dünne und trägheitslose Fasern vorausgesagt. Die Ursache ist die Mittelung der turbulenten Fluidschwankungen über die Partikeloberfläche, oder mit anderen Worten, dass sich mit steigender Oberfläche die Fluidschwankungen gegenseitig mehr und mehr aufheben.

Im Gegensatz dazu erreicht die rms-Partikelwinkelgeschwindigkeit ein Maximum bei dem Achsenverhältnis von etwa 2,5, um danach monoton zu sinken. Auch dieses Verhalten wird verstärkt bei den kleinen untersuchten Stokes-Zahlen beobachtet. Die Ursache für das, im Gegensatz zu den rms-Partikelgeschwindigkeiten, Auftreten eines Maximums ist wahrscheinlich, dass für die Winkelgeschwindigkeit die Fluidschwankungen nicht einfach über die Oberfläche gemittelt werden, sondern auch der Hebelarm berücksichtigt werden muss. Der mittlere Hebelarm nimmt mit steigendem Achsenverhältnis zu und bewirkt, im Gegensatz zum Einfluss der Oberfläche, eine größere rms-Partikelwinkelgeschwindigkeit.

Der Translationsdispersionskoeffizient gibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Partikels an und kann für große Zeiten mit

$$D_{trans, i} = \overline{u_i'^2} \tau_{u, i} \quad (6.17)$$

berechnet werden. Analog gilt für den Rotationsdispersionskoeffizienten

$$D_{rot, i} = \overline{\omega_i'^2} \tau_{\omega, i} \quad (6.18)$$

mit den Partikelzeitmaß für die Geschwindigkeit $\tau_{u, i}$, das analog zu (6.14) berechnet wird, wobei u_i dann die Partikelgeschwindigkeit darstellt, und dem entsprechenden Zeitmaß für die Partikelwinkelgeschwindigkeit $\tau_{\omega, i}$.

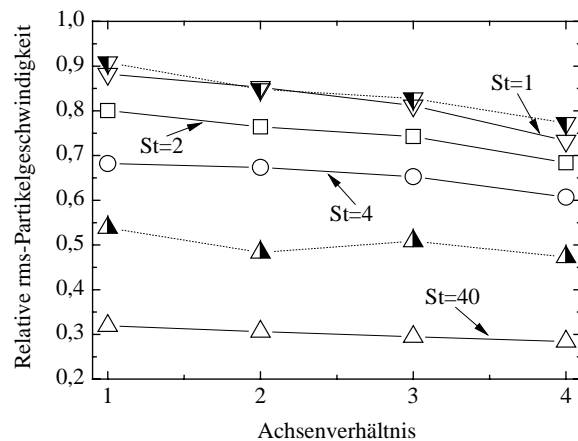


Abbildung 6.15 Relative rms-Geschwindigkeit eines zylindrischen Partikels in Abhängigkeit des Achsenverhältnisses bei $St=1, 2, 4$ und 40 und für das große Rechengebiet bei $St=0,9$ (▼) und 9 (▲).

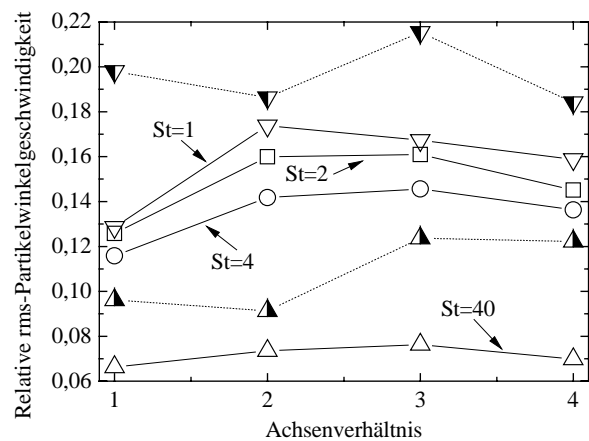


Abbildung 6.16 Relative rms-Winkelgeschwindigkeit eines zylindrischen Partikels in Abhängigkeit des Achsenverhältnisses bei $St=1, 2, 4$ und 40 und für das große Rechengebiet bei $St=0,9$ (▼) und 9 (▲).

Die Partikelzeitmaße nehmen mit steigender Stokes-Zahl aufgrund des Trägheitseffektes zu. Die Zeitmaße der Partikel mit einer Stokes-Zahl größer oder gleich 4 sind größer als die des Fluids. Die Partikelzeitmaße sind im Gegensatz zu den rms-Partikelgeschwindigkeiten und rms-Partikelwinkelgeschwindigkeiten nicht isotrop. Das Partikelzeitmaß der Geschwindigkeit in axialer Richtung ist für längliche Zylinder größer als das Partikelzeitmaß in radialer Richtung, weil der rms-Wert der axialen Kraftkomponente kleiner als der rms-Wert der radialen Kraftkomponente ist (Abbildung 6.10). Das gleiche gilt für das Partikelzeitmaß der Winkelgeschwindigkeit, d.h. für längliche Zylinder ist das Partikelzeitmaß der Winkelgeschwindigkeit in axialer Richtung größer als das Partikelzeitmaß in radialer Richtung, weil der rms-Wert des axialen Drehmoments kleiner als der rms-Wert des radialen Drehmoments ist.

Durch die Anisotropie der Partikelzeitmaße sind auch die Partikeldispersionskoeffizienten nicht isotrop. Die über die drei Raumrichtungen gemittelten Partikeldispersionskoeffizienten für die Translation und die Rotation sind in Abbildung 6.17 bzw. Abbildung 6.18 in Abhängigkeit des Achsenverhältnisses dargestellt. Die Funktionen folgen, im Gegensatz zu den rms-Partikelgeschwindigkeiten und rms-Partikelwinkelgeschwindigkeiten, nicht mehr eindeutigen monotonen Trends. Eine Ursache dafür ist, dass die Partikelzeitmaße nicht genau bestimmt werden konnten, weil die zeitlichen Partikelautokorrelationsfunktionen noch über- oder unterschwingen. Dennoch sind die Trends zu erkennen, dass sowohl die translatorische

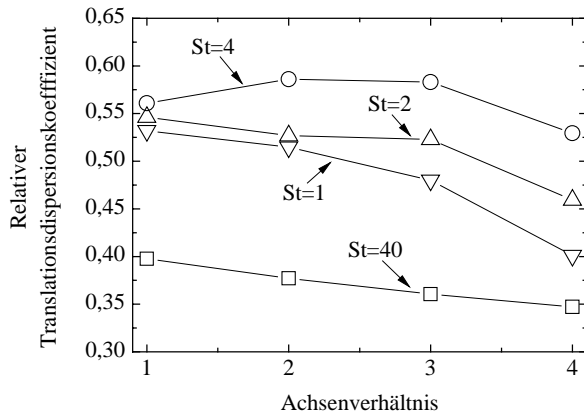


Abbildung 6.17 Relativer Translationsdispersionskoeffizient eines zylindrischen Partikels in Abhängigkeit des Achsenverhältnisses bei $St = 1, 2, 4$ und 40 .

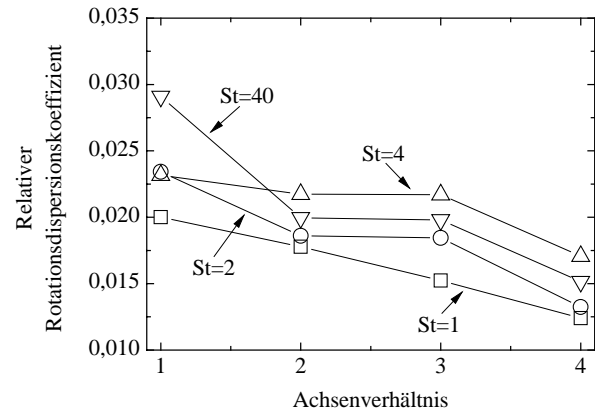


Abbildung 6.18 Relativer Rotationsdispersionskoeffizient eines zylindrischen Partikels in Abhängigkeit des Achsenverhältnisses bei $St = 1, 2, 4$ und 40 .

als auch die rotatorische Partikeldispersion mit zunehmendem Achsenverhältnis abnehmen. Die Abhängigkeit von der Stokes-Zahl ist für die Partikeldispersionskoeffizienten schwächer als für die rms-Partikelgeschwindigkeiten. Die translatorische und die rotatorische Partikeldispersionen zeigen bis auf $c/a = 1$ bei dem Rotationsdispersionskoeffizienten ein Maximum bei $St = 4$. Bei dieser Stokes-Zahl sind die Dichten von Fluid und Partikel gerade gleich groß.

7 Zusammenfassung

Es wurden mit dem Lattice-Boltzmann-Verfahren dreidimensionale numerische Simulationen der Partikelumströmung unter verschiedenen Bedingungen durchgeführt und der Widerstands-, der dynamische Auftriebs- und der Drehmomentenbeiwert der Partikel bestimmt. Die Simulationen der Kugelumströmung bei Partikel-Reynolds-Zahlen von kleiner oder gleich 400 bestätigen die jüngsten Ergebnisse aus der Literatur, d.h. die Strömung durchläuft ein stationäres ebenensymmetrisches und ein instationäres ebenensymmetrisches Regime zwischen dem stationären axialsymmetrischen Regime bei kleinen Reynolds-Zahlen und dem instationären nicht symmetrischen Regime bei großen Reynolds-Zahlen. Der Übergang zwischen der stationären axialsymmetrischen Strömung und der stationären ebenensymmetrischen Strömung tritt zwischen den Partikel-Reynolds-Zahlen von 200 und 240 auf, zwischen der stationären ebenensymmetrischen Strömung und der instationären ebenensymmetrischen Strömung bei der Partikel-Reynolds-Zahl von ungefähr 280 und zwischen der instationären ebenensymmetrischen Strömung und der instationären nicht symmetrischen Strömung zwischen den Partikel-Reynolds-Zahlen von 320 und 360. In allen Fällen ist die Strömung im Anfangszustand axialsymmetrisch. Ist die Strömung im Endzustand nicht axialsymmetrisch, so durchläuft sie zu einem bestimmten Zeitpunkt einen Übergang zum nicht axialsymmetrischen Zustand.

Im ersten untersuchten Fall zu nichtsphärischen Partikeln wurde die Abhängigkeit der Partikelbeiwerte von der Form und der Orientierung feststehender isometrischer Einzelkörper in einer gleichförmigen Strömung, d.h. den sogenannten Standardbedingungen, bei Partikel-Reynolds-Zahlen von 0,3, 30, 90 und 240 bestimmt. Der Einfluss der Partikelorientierung und der Partikelform auf den Strömungswiderstand erhöht sich mit steigender Reynolds-Zahl. Die Stromlinienförmigkeit hat bei kleinen Reynolds-Zahlen einen größeren Einfluss auf den Widerstand als bei großen Reynolds-Zahlen und die Größe der angeströmten Querschnittsfläche hat bei großen Reynolds-Zahlen einen größeren Einfluss als bei kleinen Reynolds-Zahlen. Die Verläufe des Profilauftriebs und des Profildrehmoments über die Orientierung ändern mit der Reynolds-Zahl ihre Form, weil sich die Strömung und die Druckverteilung um die Körper von nahezu symmetrisch um den Partikelmittelpunkt bei jeder Orientierung bei der Partikel-Reynolds-Zahl von 0,3 zu im Allgemeinen nicht symmetrisch bei größeren Reynolds-Zahlen ändern. Zusätzlich wächst die Druckänderung um die Körper mit steigender Reynolds-Zahl. Sowohl der Einfluss des Profilauftriebsbeiwertes als auch der

Einfluss des Profildrehmomentenbeiwertes nimmt relativ zum Widerstandsbeiwert mit steigender Reynolds-Zahl zu.

Im zweiten Fall wurde der Einfluss der Partikelrotation und im dritten Fall der Einfluss einer linearen Scherströmung auf die Beiwerte der Kugel und des Sphäroids bei Partikel-Reynolds-Zahlen von 0,3, 30, 90 und 240 untersucht. Die zusätzliche Auftriebskraft eines rotierenden Partikels in einer gleichförmigen Strömung ist die sogenannte Magnus-Kraft und die zusätzliche Auftriebskraft eines feststehenden Partikels in einer linearen Scherströmung ist die sogenannte Saffman-Kraft. Der Einfluss der Partikelrotation auf den Widerstand ist vernachlässigbar bei der Partikel-Reynolds-Zahl von 0,3, aber signifikant bei den größeren untersuchten Partikel-Reynolds-Zahlen. Im Detail verursacht die Partikelrotation eine Erhöhung des Kugelwiderstandes und des (über die Orientierung) mittleren Widerstandes des Sphäroids sowie größere Schwankungen des Widerstandes des Sphäroids über die Orientierung. Im Gegensatz dazu hat die lineare Scherströmung bei den innerhalb dieser Arbeit betrachteten kleinen Schergeschwindigkeiten nahezu keinen Einfluss auf den Widerstand.

Die Magnus-Kraft und die Saffman-Kraft können sowohl bei kleinen als auch bei großen Reynolds-Zahlen von Bedeutung sein. Sowohl der mittlere Magnus-Auftriebsbeiwert als auch der mittlere Saffman-Auftriebsbeiwert des Sphäroids verhalten sich ähnlich wie die entsprechenden Beiwerte der Kugel. Bei großen Partikel-Reynolds-Zahlen und großen Partikeldrehzahlen beträgt der Magnus-Auftriebsbeiwert der Kugel ungefähr 0,6 unabhängig von der Drehzahl. Wie für den Widerstand führt die Partikelrotation bei Partikel-Reynolds-Zahlen größer oder gleich 30 zu starken Schwankungen des Auftriebs des Sphäroids über die Orientierung. Bei der Partikel-Reynolds-Zahl von 0,3 wird in der verwendeten Strömungskonfiguration der Auftrieb eines Partikels in einer linearen Scherströmung u.a. durch die obere und untere Seitenwand bestimmt und kann nicht mit den bekannten theoretischen Lösungen für unbegrenzte Strömungen von Saffman [162] und McLaughlin [120] verglichen werden. Die Ergebnisse der Kugel stimmen jedoch mit der für die gleiche Strömungskonfiguration berechneten theoretischen Vorhersage von Vasseur und Cox [198] überein. Bei der Partikel-Reynolds-Zahl von 0,3 wirken der Saffman-Auftrieb der Kugel und der mittlere Saffman-Auftrieb des Sphäroids in Richtung der größeren relativen Fluidgeschwindigkeit. Der Saffman-Auftrieb der Kugel ändert bei der Partikel-Reynolds-Zahl von ungefähr 50 die Richtung, was die Ergebnisse von Kurose und Komori [97] und Bagchi

und Balachandar [11] bestätigt, und der mittlere Saffman-Auftrieb des Sphäroids ändert die Richtung bei der Partikel-Reynolds-Zahl von ungefähr 90.

Bei der Partikel-Reynolds-Zahl von 0,3 können, je nach Drehzahl bzw. Schergeschwindigkeit, die durch die Partikelrotation und die lineare Scherströmung hervorgerufenen Drehmomentenbeiwerte um einige Größenordnungen höher sein als der durch das Partikelprofil hervorgerufene Drehmomentenbeiwert. Die Variation des durch die Partikelrotation hervorgerufenen Drehmomentenbeiwertes des Sphäroids über die Orientierung erhöht sich mit steigender Reynolds-Zahl. Dagegen ist das durch die lineare Scherströmung hervorgerufene Drehmoment bei der Partikel-Reynolds-Zahl von 240 unbedeutend. Sowohl im Fall der Partikelrotation als auch der linearen Scherströmung ist der mittlere Drehmomentenbeiwert des Sphäroids höher als der entsprechende Drehmomentenbeiwert der Kugel, weil die Druckverteilung einen Anteil am Drehmomentenbeiwert des Sphäroids, aber nicht am Drehmomentenbeiwert der Kugel, hat. Diese Differenz nimmt mit steigender Reynolds-Zahl zu.

Anhand der oben erwähnten eigenen numerischen Berechnungen und experimentell ermittelter Literaturdaten wurde für den Widerstandsbeiwert im unterkritischen Bereich die Korrelationsformel

$$c_w = \frac{8}{Re} \frac{1}{\sqrt{\Phi_{||}}} + \frac{16}{Re} \frac{1}{\sqrt{\Phi}} + \frac{3}{\sqrt{Re}} \frac{1}{\Phi^{\frac{3}{4}}} + 0,42 \cdot 10^{0,4(-\log \Phi)^{0,2}} \frac{1}{\Phi_{\perp}}$$

aufgestellt, die von der Form, der Orientierung und der Reynolds-Zahl (Re) des Partikels abhängig ist. Die Sphärizität gibt das Verhältnis zwischen der Oberfläche der volumenäquivalenten Kugel und der Oberfläche des Partikels ($\Phi = A_{O,Kugel} / A_O$) an, die Quersphärizität ist das Verhältnis zwischen der angeströmten Querschnittsfläche der volumenäquivalenten Kugel und der angeströmten Querschnittsfläche des Partikels ($\Phi_{\perp} = A_{\perp,Kugel} / A_{\perp}$) und die Längsphärizität ist das Verhältnis zwischen der Längsschnittfläche der volumenäquivalenten Kugel und der Differenz zwischen der halben Oberfläche und der mittleren Längsschnittfläche des Partikels ($\Phi_{||} = A_{||,Kugel} / (0,5A_O - A_{||})$). Die neu aufgestellte Korrelationsformel berücksichtigt die Partikelorientierung über den gesamten Reynolds-Zahlen-Bereich. Die mittlere relative Abweichung zwischen der neuen Korrelation und 2061 ausgewerteten experimentellen Daten aus der Literatur für verschieden geformte Partikel beträgt 14,1% und ist die niedrigste Abweichung aller dem Autor bekannten Korrelationsformeln. Ersetzt man in der neu aufgestellten Korrelationsformel die Längsphärizität durch die leichter zugängliche

Quersphärizität, so ergibt sich eine nur leicht erhöhte Abweichung von 14,4%. Damit kann auch diese vereinfachte Korrelationsformel mit hohem Vertrauen angewandt werden.

Im vierten Fall wurde der Einfluss der Wechselwirkung zweier Kugeln auf den Widerstandsbeiwert, dynamischen Auftriebsbeiwert, Drehmomentenbeiwert und zusätzlich auf den zwischen den Partikelmittelpunkten wirkenden Wechselwirkungsbeiwert für verschiedene relative Positionen bei Partikel-Reynolds-Zahlen von 1, 50, 100 und 200 bestimmt. Der größte Effekt ist die Widerstandsreduzierung der hinteren Kugel im Windschatten der vorderen Kugel bei jeder untersuchten Reynolds-Zahl. Bei den Partikel-Reynolds-Zahlen von größer oder gleich 50 tritt dadurch auch die größte Wechselwirkung in der Hintereinander-Anordnung auf, die eine Anziehung beider Kugeln bewirkt. Der Einfluss des Windschattens und daher die Widerstandsreduzierung und die Anziehung im Windschatten erhöhen sich mit steigender Reynolds-Zahl.

Beide Kugeln erfahren bei jeder untersuchten Reynolds-Zahl den höchsten Widerstand ungefähr in der Übereinander-Anordnung. In der Übereinander-Anordnung tritt bei der Partikel-Reynolds-Zahl von 1 der „Blockierungseffekt“, d.h. eine geringe Geschwindigkeit und ein hoher Druck, im Spalt zwischen den Kugeln und bei der Partikel-Reynolds-Zahl von 200 der „Düseneffekt“, d.h. eine hohe Geschwindigkeit und ein niedriger Druck, im Spalt auf. Dennoch stoßen sich in der Übereinander-Anordnung die Kugeln bei jeder Reynolds-Zahl voneinander ab.

Der über den gesamten Raum gemittelte Widerstandsbeiwert ist bei jeder untersuchten Reynolds-Zahl geringfügig kleiner als der Widerstandsbeiwert der Einzelkugel. Der über den gesamten Raum gemittelte Wechselwirkungsbeiwert ist bei der Partikel-Reynolds-Zahl von 1 negativ (Abstoßung), beträgt aber nur 0,5% des Widerstandsbeiwertes der Einzelkugel. Bei den Partikel-Reynolds-Zahlen größer oder gleich 50 ist der gemittelte Wechselwirkungsbeiwert dagegen positiv (Anziehung) und wird im Bezug zum Widerstandsbeiwert mit steigender Reynolds-Zahl immer bedeutender. Der maximale Auftriebsbeiwert bleibt relativ zum Widerstandsbeiwert der Einzelkugel über den gesamten Reynolds-Zahlen-Bereich in etwa konstant bei 12%. Das Verhältnis des maximalen Drehmomentenbeiwertes zu dem Widerstandsbeiwert der Einzelkugel beträgt bei der Partikel-Reynolds-Zahl von 1 6% und nimmt mit steigender Reynolds-Zahl ab.

Im letzten untersuchten Fall konnten sich volumenäquivalente Einzelpartikel zylindrischer Form in einer homogenen isotropen turbulenten Strömung frei bewegen. Die Zylinder besaßen einen volumenäquivalenten Kugeldurchmesser von 12 Zellen, Achsenverhältnisse von 1, 2, 3 und 4 und Stokes-Zahlen zwischen 1 und 40. Die Abmessungen der Zylinder waren in der Größenordnung des integralen Längenmaßes der turbulenten Strömung. Längliche Zylinder, d.h. Zylinder mit einem Achsenverhältnis größer als 1, besitzen unterschiedliche rms-Werte der Kräfte und Drehmomente in radialer und axialer Richtung und dadurch ein unterschiedliches Kurzzeitverhalten und unterschiedliche Zeitmaße in radialer und axialer Richtung. Dagegen sind die rms-Geschwindigkeiten und die rms-Winkelgeschwindigkeiten und damit das Langzeitverhalten in radialer und axialer Richtung für jeden Zylinder identisch. Aufgrund des Trägheitseffektes nehmen die rms-Partikelgeschwindigkeit und die rms-Partikelwinkelgeschwindigkeit mit steigender Stokes-Zahl ab und die Partikelzeitmaße nehmen mit steigender Stokes-Zahl zu. Die Translations- und Rotationsdispersionskoeffizienten, die sich sowohl aus der rms-Partikelgeschwindigkeit bzw. der rms-Partikelwinkelgeschwindigkeit als auch aus den Partikelzeitmaßen ergeben, erreichen ein Maximum bei der Stokes-Zahl von 4, bei der die Dichten von Fluid und Partikel gleich groß sind. Die Translations- und Rotationsdispersionskoeffizienten nehmen im Allgemeinen mit steigendem Achsenverhältnis ab.

Die in dieser Arbeit ermittelten Zusammenhänge zwischen der auf Partikeln wirkenden Widerstandskraft, dynamischen Auftriebskraft und des Drehmoments und verschiedenen Strömungsbedingungen sollen einen Beitrag zur Verbesserung des Verständnisses der Partikelbewegung in laminaren und turbulenten Strömungen leisten. Sie stellen des Weiteren eine Basis für die Weiterentwicklung Lagrangscher Simulationen der Bewegung nicht-sphärischer Partikel dar.

8 Summary

Three-dimensional numerical simulations of the flow around particles have been performed under different conditions using the Lattice Boltzmann method and the drag, lift and moment coefficients of the particles have been determined. The simulations of the flow past a sphere at particle Reynolds numbers lower than or equal to 400 confirm recent results from the literature, i.e. the flow undergoes a steady planar symmetric and an unsteady planar symmetric regime between the steady axisymmetric regime at low Reynolds numbers and the unsteady non-symmetric regime at high Reynolds numbers. The transition between steady axisymmetric flow and steady planar symmetric flow occurs between the particle Reynolds numbers of 200 and 240, between steady planar symmetric flow and unsteady planar symmetric flow at the particle Reynolds number of approximately 280 and between unsteady planar symmetric flow and unsteady non-symmetric flow between the particle Reynolds numbers of 320 and 360. In all cases the flow past a sphere is axisymmetric at the initial stage. If the flow is non-axisymmetric in the final stage, the flow undergoes a transition to the non-axisymmetric stage at a certain time.

In the first case for non-spherical particles studied, the resistance coefficients have been determined as a function of the shape and the orientation of single stationary isometric particles in a uniform flow, i.e. the so called standard conditions, at particle Reynolds numbers of 0.3, 30, 90 and 240. The influence of the particle orientation and the particle shape on the drag increases with increasing Reynolds numbers. The particle streamlining has a greater influence on the drag at low rather than at high Reynolds numbers and the size of the projected area has a greater influence at high rather than at low Reynolds numbers. The curves of the profile lift and profile torque versus the orientation change their shapes with the Reynolds number, since the flow and the pressure distribution around the bodies change from almost symmetric around the particle centre at every orientation at the particle Reynolds number of 0.3 to generally non-symmetric at higher Reynolds numbers. In addition, the pressure change around the body increases with increasing Reynolds number. The influence of both the profile lift coefficient and the profile moment coefficient relative to the drag coefficient increases with increasing Reynolds number.

In the second case the influence of particle rotation and in the third case the influence of linear shear flow on the resistance coefficients of the sphere and the spheroid were studied at particle Reynolds numbers of 0.3, 30, 90 and 240. The additional lift force on a rotating

particle in a uniform flow is the so-called Magnus force and the additional lift force on a stationary particle in a linear shear flow is the so-called Saffman force. The effect of particle rotation on the drag is negligible at the particle Reynolds number of 0.3 but significant at the higher particle Reynolds numbers considered. In detail, the particle rotation causes an increase of the sphere drag and the mean (over the orientation) spheroid drag as well as a stronger variation of the drag of the spheroid with respect to the orientation. In contrast, the linear shear flow has almost no influence on the drag for the low shear rates considered within this work.

The Magnus force and the Saffman force can be of importance both at low and at high Reynolds numbers. Both the mean Magnus lift coefficient and the mean Saffman lift coefficient of the spheroid behave similarly to the corresponding values of the sphere. At high particle Reynolds numbers and high frequencies of particle revolution, the Magnus lift coefficient of the sphere is approximately 0.6, independent of the frequency of revolution. As for the drag, at particle Reynolds numbers higher than or equal to 30, the particle rotation leads to strong variations of the lift of the spheroid with respect to the orientation. At the particle Reynolds number of 0.3, the lift of a particle in a linear shear flow is among other factors determined by the top and bottom wall in the current flow configuration and can not be compared to the well known theoretical solutions valid for unbounded flows of Saffman [162] and McLaughlin [120]. Nevertheless, the results for the sphere agree with the theoretical prediction of Vasseur and Cox [198] calculated for the same flow configuration. At the particle Reynolds number of 0.3, the Saffman lift of the sphere and the mean Saffman lift of the spheroid act towards the larger relative fluid velocity. The Saffman lift of the sphere changes direction at the particle Reynolds number of approximately 50, which confirms the results of Kurose and Komori [97] and Bagchi and Balachandar [11], and the mean Saffman lift of the spheroid changes direction at the particle Reynolds number of approximately 90.

At the particle Reynolds number of 0.3, the moment coefficients due to particle rotation and linear shear flow can be several orders of magnitude larger than the moment coefficient due to particle profile, depending on the frequency of revolution and on the shear rate, respectively. The variation of the moment coefficient of the spheroid due to particle rotation over the orientation increases with increasing Reynolds number. In contrast, at the particle Reynolds number of 240, the torque due to linear shear flow is irrelevant. In both cases of particle rotation and linear shear flow the mean moment coefficient of the spheroid is larger than the corresponding moment coefficient of the sphere, since the pressure distribution has a share in

the torque of the spheroid, but not in the torque of the sphere. This difference increases with increasing Reynolds number.

On the basis of the present numerical simulations mentioned above and of experimental data from the literature, the correlation formula for the drag coefficient in the subcritical region

$$c_w = \frac{8}{Re} \frac{1}{\sqrt{\Phi_{||}}} + \frac{16}{Re} \frac{1}{\sqrt{\Phi}} + \frac{3}{\sqrt{Re}} \frac{1}{\Phi^{\frac{3}{4}}} + 0.42 \cdot 10^{0.4(-\log \Phi)^{0.2}} \frac{1}{\Phi_{\perp}}$$

was established, which depends on the shape, the orientation and the Reynolds number (Re) of the particle. The sphericity represents the ratio between the surface area of the volume equivalent sphere and the surface area of the particle ($\Phi = A_{O,sphere} / A_O$), the crosswise sphericity is the ratio between the projected cross-sectional area of the volume equivalent sphere and the projected cross-sectional area of the particle ($\Phi_{\perp} = A_{\perp,sphere} / A_{\perp}$) and the lengthwise sphericity is the ratio between the projected longitudinal-sectional area of the volume equivalent sphere and the difference between half the surface area and the mean projected longitudinal-sectional area of the particle ($\Phi_{||} = A_{||,sphere} / (0.5A_O - A_{||})$). The new correlation formula established considers the particle orientation over the entire range of Reynolds numbers. The mean relative deviation between the new correlation and 2061 experimental data from the literature for differently shaped particles is 14.1% and is the smallest deviation of all correlation formulas known to the author. If in the new correlation formula the lengthwise sphericity is substituted by the more easily determinable crosswise sphericity, the deviation becomes 14.4%. Thus, this simplified formula can also be applied with high confidence.

In the fourth case the influence of the interaction of two spheres on the drag coefficient, lift coefficient, moment coefficient and additionally on the interaction coefficient, which acts between the particle centres, was determined at several relative positions at particle Reynolds numbers of 1, 50, 100 and 200. The strongest effect is the drag reduction of the trailing sphere in the slipstream of the leading sphere at every Reynolds number considered. Thus, at particle Reynolds numbers higher than or equal to 50, the strongest interaction also appears in the tandem position, which causes an attraction between both spheres. The influence of the slipstream and therefore the drag reduction and the attraction in the slipstream increase with increasing Reynolds number.

Both spheres approximately experience the largest drag in the side-by-side arrangement at every Reynolds number considered. In the side-by-side arrangement, the “blockage effect”, i.e. low velocity and high pressure, in the gap between the spheres occurs at the Reynolds number of 1 and the “nozzle effect”, i.e. high velocity and low pressure, in the gap occurs at the Reynolds number of 200. Nevertheless, both spheres repel each other in the side-by-side arrangement at every Reynolds number.

The drag coefficient averaged over the whole space is slightly smaller than the drag coefficient of the single sphere at every Reynolds number considered. The interaction coefficient averaged over the whole space is negative (repulsion) at the particle Reynolds number of 1, but its value is only 0.5% of the drag coefficient of the single sphere. At particle Reynolds numbers higher than or equal to 50, the averaged interaction coefficient is positive (attraction) and becomes more and more important with increasing Reynolds number compared to the drag coefficient. The maximum lift coefficient remains nearly constant at 12% relative to the drag coefficient of the single sphere over the entire range of Reynolds numbers. The ratio of the maximum moment coefficient to the drag coefficient of the single sphere is 6% at the particle Reynolds number of 1 and decreases with increasing Reynolds number.

In the last case investigated, volume equivalent single cylindrical particles could move freely in a homogeneous isotropic turbulent flow field. The cylinders had a volume equivalent sphere diameter of 12 cells, axis ratios of 1, 2, 3 and 4 and Stokes numbers between 1 and 40. The dimensions of the cylinders were of the order of magnitude of the integral length scale of the turbulent flow. Elongated cylinders, i.e. cylinders with an axis ratio larger than 1, have different rms values of forces and torques in longitudinal and radial direction and therefore a different short-time behaviour and different time scales in longitudinal and radial direction. In contrast, the rms velocities and the rms angular velocities and therefore the long-time behaviour in the longitudinal and the radial direction are identical for every cylinder. Due to the inertia effect, the rms particle velocity as well as the rms particle angular velocity decrease with increasing Stokes number and the particle time scales increase with increasing Stokes number. The translational and rotational dispersion coefficients, resulting from the rms particle velocity and the rms particle angular velocity, respectively, as well as from the particle time scales reach a maximum at the Stokes number of approximately 4, where the

densities of the particle and the fluid are identical. The translational and rotational dispersion coefficients in general decrease with increasing axis ratio.

The relationships between the drag force, lift force and torque acting on particles and different flow conditions determined in this work shall make a contribution to the enhancement of the understanding of the motion of particles in laminar and turbulent flows. In addition, they give a basis for the further development of Lagrange' simulations of the motion of non-spherical particles.

Literaturverzeichnis

- [1] Abbott, I. H.: The Drag of Two Streamline Bodies as Affected by Protuberances and Appendages. *NACA Report No. 451*, 1934.
- [2] Achenbach, E.: Experiments on the flow past spheres at very high Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics* **54**, 565-575, 1972.
- [3] Aidun, C. K., Lu, Y., Ding, E.-J.: Direct analysis of particulate suspensions with inertia using the discrete Boltzmann equation. *Journal of Fluid Mechanics* **373**, 287-311, 1998.
- [4] d'Alembert, J. R., Condorcet, N., Bossut, C.: *Nouvelles Expériences sur la Résistance des Fluides*. Jombert, Paris, 1777.
- [5] Anderson, T. J., Uhlherr, P. H. T.: The Influence of Stream Turbulence on the Drag of Freely Entrained Spheres. *Proceedings of the 6th Australasian Fluid Mechanics Conference*, 541-545, 2001.
- [6] Allen, H. S.: The Motion of a Sphere in a Viscous Fluid. *Philosophical Magazine*, Ser. 5 **50**, 323-339, 1900.
- [7] Arnold, H. D.: Limitations imposed by Slip and Inertia Terms upon Stokes's Law for the Motion of Spheres through Liquids. *Philosophical Magazine*, Ser. 6 **22**, 755-775, 1911.
- [8] Auton, T. R.: The lift force on a spherical body in a rotational flow. *Journal of Fluid Mechanics* **183**, 199-218, 1987.
- [9] Baba, J., Komar, P. D.: Settling Velocities of Irregular Grains at Low Reynolds Numbers. *Journal of Sedimentary Petrology* **51**, 121-127, 1981.
- [10] Bacon, D. L., Reid, E. G.: The Resistance of Spheres in Wind Tunnels and in Air. *NACA Report No. 185*, 1924.
- [11] Bagchi, P., Balachandar, S.: Effect of free rotation on the motion of a solid sphere in linear shear flow at moderate Re. *Physics of Fluids* **14**, 2719-2737, 2002.
- [12] Bailey, A. B., Hiatt, J.: Sphere Drag Coefficients for a Broad Range of Mach and Reynolds Numbers. *AIAA Journal* **10**, 1436-1440, 1972.
- [13] Barkla, H. M., Auchterlonie, L. J.: The Magnus or Robins effect on rotating spheres. *Journal of Fluid Mechanics* **47**, 437-447, 1971.
- [14] Batchelor, G. K.: Slender-body theory for particles of arbitrary cross-section in Stokes flow. *Journal of Fluid Mechanics* **44**, 419-440, 1970.
- [15] Beaufoy, M.: *Nautical and Hydraulic Experiments*. at the private press of Henry Beaufoy, London, 1834.
- [16] Becker, H. A.: The Effects of Shape and Reynolds Number on Drag in the Motion of a Freely Oriented Body in an Infinite Fluid. *The Canadian Journal of Chemical Engineering* **37**, 85-91, 1959.
- [17] Bhatnagar, P. L., Gross, E. P., Krook, M.: A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems. *Physical Review* **94**, 511-525, 1954.
- [18] Blasius, H.: Das Aehnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. *Mitteilungen über Forschungsarbeiten des VDI* **131**, 1-40, 1913.

- [19] Blasius, H.: Grenzsichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **56**, 1-37, 1908.
- [20] Borda, J.-C. de: *Expériences sur la Résistance des Fluides*. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, 358-376, 1763.
- [21] Briggs, L. I., McCulloch, D. S.: The Hydraulic Shape of Sand Particles. *Journal of Sedimentary Petrology* **32**, 645-656, 1962.
- [22] Briscoe, B. J., Luckham, P. F., Ren, S. R.: The settling of spheres in clay suspensions. *Powder Technology* **76**, 165-174, 1993.
- [23] Brucato, A., Grisafi, F., Montante, G.: Particle drag coefficients in turbulent fluids. *Chemical Engineering Science* **53**, 3295-3314, 1998.
- [24] Brydon, A. D., Thompson, M. C.: Flow Interaction Between Two Spheres at Moderate Reynolds Numbers. *Proceedings of the 14th Australasian Fluid Mechanics Conference*, 693-696, 2001.
- [25] Bouzidi, M., Firdaouss, M., Lallemand, P.: Momentum transfer of a Boltzmann-lattice fluid with boundaries. *Physics of Fluids* **13**, 3452-3459, 2001.
- [26] Burgers, J. M.: On the influence of the concentration of a suspension upon the sedimentation velocity. *Proceedings Koninklijke Nederlandske Akademie van Wetenschappen* **44**, 1177-1184, 1942.
- [27] Burgers, J. M.: On the Motion of Small Particles of Elongated Form. Suspended in a Viscous Liquid. *Report on Viscosity and Plasticity* **2**, 113-184, 1938.
- [28] Chen, H., Chen, S., Matthaeus, W. H.: Recovery of the Navier-Stokes equations using a lattice-gas Boltzmann method. *Physical Review A* **45**, 5339-5341, 1992.
- [29] Chen, R. C., Lu, Y. N.: The flow characteristics of an interacting particle at low Reynolds numbers. *International Journal of Multiphase Flow* **25**, 1645-1655, 1999.
- [30] Chen, R. C., Wu, J. L.: The flow characteristics between two interactive spheres. *Chemical Engineering Science* **55**, 1143-1158, 2000.
- [31] Cherukat, P., McLaughlin, J. B., Dandy, D. S.: A computational study of the inertial lift on a sphere in linear shear flow field. *International Journal of Multiphase Flow* **25**, 15-33, 1999.
- [32] Cherukat, P., McLaughlin, J. B., Graham, A. L.: The Inertial Lift on a Rigid Sphere Translating in a Linear Shear Flow Field. *International Journal of Multiphase Flow* **20**, 339-353, 1994.
- [33] Chowdhury, K. C. R., Fritz, W.: Sinkversuche mit isometrischen Teilchen in Flüssigkeiten. *Chemical Engineering Science* **11**, 92-98, 1959.
- [34] Christiansen, E. B., Barker, D. H.: The Effect of Shape and Density on the Free Settling of Particles at High Reynolds Numbers. *AIChE Journal* **11**, 145-151, 1965.
- [35] Clift, R. C., Gauvin, W. H.: The motion of particles in turbulent gas streams. *Proceedings Chemeca '70* **1**, 14-28, 1970.
- [36] Comer, J. K., Kleinstreuer, C.: A Numerical Investigation of Laminar Flow Past Nonspherical Solids and Droplets. *Transactions of the ASME: Journal of Fluids Engineering* **117**, 170-175, 1995.
- [37] Crowe, C. T., Roberson, J. A., Elger, D. F.: *Engineering Fluid Mechanics*. John Wiley & Sons, New York, 2001.

- [38] Dandy, D. S., Dwyer, H. A.: A sphere in shear flow at finite Reynolds number: effect of shear on particle lift, drag and heat transfer. *Journal of Fluid Mechanics* **216**, 381-410, 1990.
- [39] Davies, C. N.: Definitive Equations for the Fluid Resistance of Spheres. *The Proceedings of the Physical Society* **57**, 259-270, 1945.
- [40] Davies, J. M.: The Aerodynamics of Golf Balls. *Journal of Applied Physics* **20**, 821-828, 1949.
- [41] Dennis, S. C. R., Singh, S. N., Ingham, D. B.: The steady flow due to a rotating sphere at low and moderate Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics* **101**, 257-279, 1980.
- [42] Dennis, S. C. R., Walker, J. D. A.: Calculation of the steady flow past a sphere at low and moderate Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics* **48**, 771-789, 1971.
- [43] Dryden, H. L., Kuethe, A. M.: Effect of Turbulence in Wind Tunnel Measurements. *NACA Technical Report No. 342*, 1931.
- [44] Dwyer, H. A., Dandy, D. S.: Some influences of particle shape on drag and heat transfer. *Physics of Fluids A* **2**, 2110-2118, 1990.
- [45] Eiffel, G.: *La résistance de l'air et de l'aviation expériences effectuées au laboratoire du Champ-de-Mars*, H. Dunod et E. Pinat, Paris, 1910.
- [46] Eiffel, G.: Sur la résistance des sphères dans l'air en mouvement. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* **155**, 1597-1599, 1912.
- [47] Eswaran, V., Pope, S. B.: An Examination of Forcing in Direct Numerical Simulations of Turbulence. *Computer & Fluids* **16**, 257-278, 1988.
- [48] Eveson, G. F., Hall, E. W., Ward, S. G.: Interaction between two equal-sized equal-settling spheres moving through a viscous liquid. *British Journal of Applied Physics* **10**, 43-47, 1959; Eveson, G. F.: Correspondence. *British Journal of Applied Physics* **11**, 88, 1960.
- [49] Fan, F.-G., Ahmadi, G.: Dispersion of Ellipsoidal Particles in an Isotropic Pseudo-Turbulent Flow Field. *Transactions of the ASME: Journal of Fluids Engineering* **117**, 154-161, 1995.
- [50] Faxén, H.: Der Widerstand gegen die Bewegung einer starren Kugel in einer zähen Flüssigkeit, die zwischen zwei parallelen ebenen Wänden eingeschlossen ist. *Annalen der Physik* **68**, 89-119, 1922.
- [51] Faxén, H.: Die Geschwindigkeit zweier Kugeln, die unter Einwirkung der Schwere in einer zähen Flüssigkeit fallen. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **7**, 79-80, 1927.
- [52] Faxén, H.: Gegenseitige Einwirkung zweier Kugeln, die in einer zähen Flüssigkeit fallen. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik* **19**, Nr. 13, 1925.
- [53] Fidleris, V., Whitmore, R. L.: Experimental determination of the wall effect for spheres falling axially in cylindrical vessels. *British Journal of Applied Physics* **12**, 490-494, 1961.
- [54] Field, S. B., Klaus, M., Moore, M. G., Nori, F.: Chaotic dynamics of falling disks. *Nature* **388**, 252-254, 1997.
- [55] Flachsbart, O.: Neue Untersuchungen über den Luftwiderstand von Kugeln. *Physikalische Zeitschrift* **28**, 461-469, 1927.

- [56] Folkersma, R., Stein, H. N., van de Vosse, F. N.: Hydrodynamic interactions between two identical spheres held fixed side by side against a uniform stream directed perpendicular to the line connecting the spheres' centres. *International Journal of Multiphase Flow* **26**, 877-887, 2000.
- [57] Föppl, O.: Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt von Eiffel, verglichen mit den Göttinger Resultaten. *Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt* **3**, 118-121, 1912.
- [58] Föppl, O.: *Windkräfte an ebenen und gewölbten Platten*. Dissertation, Springer, Berlin, 1911.
- [59] Freeman, H. B.: Force Measurements on a 1/40-Scale Model of the U.S. Airship "Akron". *NACA Report No. 432*, 1933.
- [60] Galilei, G.: *Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallkräfte betreffend, erster und zweiter Tag*. Übersetzt von Arthur von Oettingen, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1917.
- [61] Gans, R.: Wie fallen Stäbe und Scheiben in einer reibenden Flüssigkeit. *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften* **41**, 191-203, 1911.
- [62] Ganser, G. H.: A rational approach to drag prediction of spherical and nonspherical particles. *Powder Technology* **77**, 143-152, 1993.
- [63] Gebers, F.: Ein Beitrag zur experimentellen Ermittlung des Wasserwiderstandes gegen bewegte Körper. *Schiffbau* **9**, 435-452, 1908.
- [64] Ghidersa, B., Dušek, J.: Breaking of axisymmetry and onset of unsteadiness in the wake of a sphere. *Journal of Fluid Mechanics* **423**, 33-69, 2000.
- [65] Gibbs, R. J., Matthews, M. D., Link, D. A.: The Relationship Between Sphere Size and Settling Velocity. *Journal of Sedimentary Petrology* **41**, 7-18, 1971.
- [66] Goldburg, A., Florsheim, B. H.: Transition and Strouhal Number for the Incompressible Wake of Various Bodies. *Physics of Fluids* **9**, 45-50, 1966.
- [67] Goldmann, A. J., Cox, R. G., Brenner, H.: The slow motion of two identical arbitrarily oriented spheres through a viscous fluid. *Chemical Engineering Science* **21**, 1151-1170, 1966.
- [68] Goldstein, H.: *Klassische Mechanik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1981.
- [69] Goldstein, S.: The Steady Flow of Viscous Fluid past a Fixed Spherical Obstacle at Small Reynolds Numbers. *Proceedings of the Royal Society of London Series A* **123**, 225-235, 1929.
- [70] Graham, D. I., Jones, T. E. R.: Settling and transport of spherical particles in power-law fluids at finite Reynolds number. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **54**, 465-488, 1994.
- [71] Gurel, S., Ward, S. G., Whitmore, R. L.: Studies of the viscosity and sedimentation of suspensions. Part 3.-The sedimentation of isometric and compact particles. *British Journal of Applied Physics* **6**, 83-87, 1955.
- [72] Haider, A., Levenspiel, O.: Drag Coefficient and Terminal Velocity of Spherical and Nonspherical Particles. *Powder Technology* **58**, 63-70, 1989.

- [73] Hamielec, A. E., Hoffman, T. W., Ross, L. L.: Numerical Solution of the Navier-Stokes Equation for Flow Past Spheres. *AIChE Journal* **13**, 212-224, 1967.
- [74] Happel, J., Brenner, H.: *Low Reynolds number hydrodynamics*. Martinus Nijhoff Publishers, Den Haag, 1983.
- [75] Happel, J., Pfeffer, R.: The Motion of Two Spheres Following Each Other in a Viscous Fluid. *AIChE Journal* **6**, 129-133, 1960.
- [76] He, X., Luo, L.-S.: A priori derivation of the lattice Boltzmann equation. *Physical Review E* **55**, 6333-6336, 1997; He, X., Luo, L.-S.: Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation. *Physical Review E* **56**, 6811-6817, 1997.
- [77] Heiss, J. F., Coull, J.: The Effect of Orientation and Shape on the Settling Velocity of Non-Isometric Particles in a Viscous Medium. *Chemical Engineering Progress* **48**, 133-140, 1952.
- [78] Heywood, H.: Measurement of the Fineness of Powdered Materials. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* **140**, 257-308, 1938.
- [79] Higgins, G. J.: Tests of the N.P.L. Airship Models in the Variable Density Wind Tunnel. *NACA Technical Notes No. 264*, 1927.
- [80] Hölzer, A.: *Simulation der Bewegung nicht-sphärischer Partikel in turbulenten Strömungen mit dem Lattice-Boltzmann-Verfahren*. Diplomarbeit, Halle, 2002.
- [81] Hölzer, A., Sommerfeld, M.: Lattice Boltzmann Simulations to Determine Forces Acting on Non-Spherical Particles. in *IUTAM Symposium on Computational Approaches to Disperse Multiphase Flow*. Springer, Heidelberg, 2006.
- [82] Hottovy, J. D., Sylvester, N. D.: Drag Coefficients for Irregularly Shaped Particles. *Industrial and Engineering Chemistry Process Design and Development* **18**, 433-436, 1979.
- [83] Hutton, C.: Resistance of the Air Determined by the Whirling-Machine. *Tracts on mathematical and philosophical subjects* **3**, 163-208, 1786.
- [84] Jacobs, E. N.: Sphere Drag Tests in the Variable Density Wind Tunnel. *NACA Technical Notes No. 312*, 1929.
- [85] Jayaweera, K. O. L. F., Mason, B. J.: The behaviour of freely falling cylinders and cones in a viscous fluid. *Journal of Fluid Mechanics* **22**, 709-720, 1965.
- [86] Jeffery, G. B.: Experimental Investigation of the Wake behind a Sphere at Low Reynolds Numbers. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A* **102**, 161-179, 1922.
- [87] Johnson, D. L., Leith, D., Reist, P. C.: Drag on Non-Spherical, Orthotropic Aerosol Particles. *Journal of Aerosol Science* **18**, 87-97, 1987.
- [88] Johnson, T. A., Patel, V. C.: Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300. *Journal of Fluid Mechanics* **378**, 19-70, 1999.
- [89] Jones, A. M., Knudsen, J. G.: Drag Coefficients at Low Reynolds Numbers For Flow Past Immersed Bodies. *AIChE Journal* **7**, 20-25, 1961.
- [90] Kasper, G., Niida, T., Yang, M.: Measurements of Viscous Drag on Cylinders and Chains of Spheres with Aspect Ratios Between 2 and 50. *Journal of Aerosol Science* **16**, 535-556, 1985.

- [91] Kim, I., Elgobashi, S., Sirigano, W. A.: Three-dimensional flow over two spheres placed side by side. *Journal of Fluid Mechanics* **246**, 465-488, 1993.
- [92] Kim, H. J., Durbin, P. A.: Observations of the frequencies in a sphere wake and of drag increase by acoustic excitation. *Physics of Fluids* **31**, 3260-3265, 1988.
- [93] Kirchhoff, G.: *Vorlesungen über Mathematische Physik*, Teubner, Leipzig, 1876.
- [94] Kirchhoff, G.: Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **70**, Heft 14, 289-298, 1869.
- [95] Komar, P. D.: Settling Velocities of Circular Cylinders at Low Reynolds Numbers. *Journal of Geology* **88**, 327-336, 1980.
- [96] Komar, P. D., Reimers, C. E.: Grain Shape Effects on Settling Rates. *Journal of Geology* **86**, 193-209, 1978.
- [97] Kurose, R., Komori, S.: Drag and lift forces on a rotating sphere in a linear shear flow. *Journal of Fluid Mechanics* **384**, 183-206, 1999.
- [98] Ladd, A. J. C.: Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation. Part 1. Theoretical foundation. *Journal of Fluid Mechanics* **271**, 285-309, 1994; Ladd, A. J. C.: Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation. Part 2. Numerical results. *Journal of Fluid Mechanics* **271**, 311-339, 1994.
- [99] Ladenburg, R.: Über den Einfluß von Wänden auf die Bewegung einer Kugel in einer reibenden Flüssigkeit. *Annalen der Physik* **23**, 447-458, 1907.
- [100] Lamb, H.: *Hydrodynamics*, 6th ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1932.
- [101] Lasso, I. A., Weidman, P. D.: Stokes drag on hollow cylinders and conglomerates. *Physics of Fluids* **29**, 3921-3934, 1986.
- [102] Lee, K. C.: Aerodynamic Interaction Between Two Spheres at Reynolds Numbers Around 10^4 . *Aeronautical Quarterly* **30**, 371-385, 1979.
- [103] Lee, P. S., Niida, T., Shaw, D. T.: The Dynamics of Particles with Translation-Rotation Coupling in the Stokes Flow Regime. *Aerosol Science and Technology* **1**, 259-270, 1982.
- [104] Lee, S.: A numerical study of the unsteady wake behind a sphere in a uniform flow at moderate Reynolds numbers. *Computer & Fluids* **29**, 639-667, 2000.
- [105] Leith, D.: Drag on Nonspherical Objects. *Aerosol Science and Technology* **6**, 153-161, 1987.
- [106] Liang, S.-C., Hong, T., Fan, L.-S.: Effects of Particle Arrangements on the Drag Force of a Particle in the Intermediate Flow Regime. *International Journal of Multiphase Flow* **22**, 285-306, 1996.
- [107] Liebster, H.: Über den Widerstand von Kugeln. *Annalen der Physik* **82**, 541-562, 1927.
- [108] Lilienthal, O.: *Der Vogelflug als Grundlage der Fliegerkunst*. R. Oldenbourg, München, 1910.
- [109] Ludwig, J.: Sinkversuche mit Festteilchen verschiedener Gestalt in Flüssigkeiten. *Chemiker-Zeitung* **22**, 774-777, 1955.
- [110] Lunnon, R. G.: Fluid Resistance to Moving Spheres. *Proceedings of the Royal Society of London Series A* **118**, 680-694, 1928.

- [111] Maccoll, J. W.: Aerodynamics of a Spinning Sphere. *Journal of the Royal Aeronautical Society* **32**, 777-798, 1928.
- [112] Magarvey, R. H., Bishop, R. L.: Transition Ranges for Three-Dimensional Wakes. *Canadian Journal of Physics* **39**, 1418-1422, 1961.
- [113] Magelli, F., Fajner, D., Nocenti, M., Pasquali, G.: Solid Distribution in Vessels Stirred with Multiple Impellers. *Chemical Engineering Science* **45**, 615-625, 1990.
- [114] Magnaudet, J., Rivero, M., Fabre, J.: Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical particle. Part 1. Steady straining flow. *Journal of Fluid Mechanics* **284**, 97-135, 1995.
- [115] Marchildon, E. K., Clamen, A., Gauvin, W. H.: Drag and Oscillatory Motion of Freely Falling Cylindrical Particles. *The Canadian Journal of Chemical Engineering* **42**, 178-182, 1964.
- [116] Marchildon, E. K., Gauvin, W. H.: Effects of Acceleration and Deceleration and Particle Shape on Single-Particle Drag Coefficients in Still Air. *AIChE Journal* **25**, 938-948, 1964.
- [117] Mariotte, E.: *Grund-Lehren der Hydrostatick und Hydraulick*. Übersetzt von D. Johann Christoph Meinig, Johann Friedrich Brauns sel. Erben, Leipzig, 1723.
- [118] Masliyah, J. H., Epstein, N.: Numerical study of steady flow past spheroids. *Journal of Fluid Mechanics* **44**, 493-512, 1970.
- [119] McKay, G., Murphy, W. R., Hillis, M.: Settling Characteristics of Discs and Cylinders. *Chemical Engineering Research and Design* **66**, 107-112, 1988.
- [120] McLaughlin, J. B.: Inertial migration of a small sphere in linear shear flows. *Journal of Fluid Mechanics* **224**, 261-274, 1991.
- [121] McNown, J. S., Malaika, J.: Effects of Particle Shape on Settling Velocity at Low Reynolds Numbers. *Transactions, American Geophysical Union* **31**, 74-82, 1950.
- [122] Mei, R.: An Approximate Expression for the Shear Lift Force on a Spherical Particle at Finite Reynolds Number. *International Journal of Multiphase Flow* **18**, 145-147, 1992.
- [123] Mei, R., Yu, D., Shyy, W., Luo, L.-S.: Force evaluation in the lattice Boltzmann method involving curved geometry. *Physical Review E* **65**, 041023, 2002.
- [124] Miller, W., M'Inally, T. W.: Falling Velocities of Minerals Through Water. *Journal of the Royal Technical College* **3**, 682-689, 1936.
- [125] Mittal, R.: Planar Symmetry in the Unsteady Wake of a Sphere. *AIAA Journal* **37**, 388-390, 1999.
- [126] Möller, W.: Experimentelle Untersuchungen zur Hydrodynamik der Kugel. *Physikalische Zeitschrift* **39**, 57-80, 1938.
- [127] Nakamura, I.: Steady wake behind a sphere. *Physics of Fluids* **19**, 5-8, 1976.
- [128] Natarajan, R., Acrivos, A.: The instability of the steady flow past spheres and disks. *Journal of Fluid Mechanics* **254**, 323-344, 1993.
- [129] Needham, L. W., Hill, N. W.: The Settling of Mineral Particles in Water. *Fuel in Science and Practice* **26**, 101-115, 1947.
- [130] Neve, R. S.: The importance of turbulence macroscale in determining the drag coefficient of spheres. *International Journal of Heat and Fluid Flow* **7**, 28-36, 1986.

- [131] Newton, I.: *Mathematische Prinzipien der Naturlehre*. Herausgegeben von J. Ph. Wolfers, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1963.
- [132] Nirschl, H.: *Partikelbewegungen in Scherströmungen ohne und mit Berücksichtigung des Einflusses angrenzender Wände*, VDI Verlag, Düsseldorf, 1997.
- [133] Oberbeck, A.: Ueber stationäre Flüssigkeitsbewegungen mit Berücksichtigung der inneren Reibung. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **81**, 62-80, 1876.
- [134] Oesterlé, B., Dinh, T. B.: Experiments on the lift of a spinning sphere in a range of intermediate Reynolds numbers. *Experiments in Fluids* **25**, 16-22, 1998.
- [135] Olson, J. A.: The motion of fibres in turbulent flow, stochastic simulation of isotropic homogeneous turbulence. *International Journal of Multiphase Flow* **27**, 2083-2103, 2001.
- [136] Olson, J. A., Kerekes, R. J.: The motion of fibres in turbulent flow. *Journal of Fluid Mechanics* **377**, 47-64, 1998.
- [137] Olsson, P. J., Fuchs, L.: Simulation of the flow past multiple spheres. in *ECCOMAS '96: Computational Fluid Dynamics*. 78-84, John Wiley & Sons, New York, 1996.
- [138] Olsson, P. J., Fuchs, L.: The interaction of spherical particles in a fluid flow governed by the Navier-Stokes Equations. *Proceedings of the 4th ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference*, 180-185, 1998.
- [139] Oseen, C. W.: *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1927.
- [140] Pernolet, M.: A l'étude des préparations mécaniques des minerais, ou expériences propres à établir la théorie des différents systèmes usités ou possibles. *Annales des Mines*, Ser. 4 **20**, 379-569, 1851.
- [141] Pettyjohn, E. S., Christiansen, E. B.: Effect of Particle Shape on Free-Settling Rates of Isometric Particles. *Chemical Engineering Progress* **44**, 157-172, 1948.
- [142] Phillips, H.: Experiments with Currents of Air. *Engineering* **40**, 160-161, 1885.
- [143] Pitter, R. L., Pruppacher, H. R., Hamielec, A. E.: A Numerical Study of Viscous Flow Past a Thin Oblate Spheroid at Low and Intermediate Reynolds Numbers. *Journal of the Atmospheric Sciences* **30**, 125-134, 1973.
- [144] Ploumhans, P., Winckelmans, G. S., Salmon, J. K., Leonard, A., Warren, M. S.: Vortex Methods for Direct Numerical Simulations of Three-Dimensional Bluff Body Flows: Application to the Sphere at $Re=300, 500, \text{ and } 1000$. *Journal of Computational Physics* **178**, 427-463, 2002.
- [145] Prandtl, L.: Der Luftwiderstand von Kugeln. *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, 177-190, 1914.
- [146] Prandtl, L., Betz, A.: *Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen Lfg. 1-4*. R. Oldenbourg, München, 1921-1932.
- [147] Prandtl, L., Betz, A.: Über den Reibungswiderstand strömender Luft. *Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen* **3**, 1-5, 1927.
- [148] Proudman, I., Pearson, J. R. A.: Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* **2**, 237-262, 1957.

- [149] Provansal, M., Ormières, D.: Étude expérimentale de l'instabilité du sillage d'une sphère. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série II b* **326**, 489-494, 1998; Ormières, D., Provansal, M.: Transition to Turbulence in the Wake of a Sphere. *Physical Review Letter* **83**, 80-83, 1999.
- [150] Pruppacher, H. R., Le Clair, B. P., Hamielec, A. E.: Some relations between drag and flow pattern of viscous flow past a sphere and a cylinder at low and intermediate Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics* **44**, 781-790, 1970.
- [151] Qi, D.: Lattice-Boltzmann simulations of particles in non-zero-Reynolds-number flows. *Journal of Fluid Mechanics* **385**, 41-62, 1999.
- [152] Qian, Y. H., d'Humières, D., Lallemand, P.: Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation. *Europhysics Letters* **17**, 479-484, 1992.
- [153] Lord Rayleigh, F. R. S.: On the Resistance of Fluids. *Philosophical Magazine* **5**, No. 13, 430-441, 1876.
- [154] Richards, R. H.: Velocity of Galena and Quartz Falling in Water. *Transactions of the American Institute of Mining Engineers* **38**, 210-235, 1908.
- [155] Rife, J., He, J., Song, Y., Wallis, G. B.: Measurements of the drift force. *Nuclear Engineering and Design* **175**, 71-76, 1997.
- [156] Rimon, Y., Cheng, S. I.: Numerical Solution of a Uniform Flow over a Sphere at Intermediate Reynolds Numbers. *Physics of Fluids* **12**, 949-959, 1969.
- [157] Robins, B.: An account of the experiments, relating to the resistance of the air, exhibited at different times before the Royal Society, in the year 1746. *Mathematical Tracts of the late Benjamin Robins* **1**, No.3, 200-217, 1761.
- [158] Roos, F. W., Willmarth, W. W.: Some Experimental Results on Sphere and Disk Drag. *AIAA Journal* **9**, 285-291, 1971.
- [159] Rosendahl, L. A.: *Extending the modelling framework for gas-particle systems*. Dissertation, Aalborg University, Aalborg, 1998.
- [160] Rowe, P. N., Henwood, G. A.: Drag Forces in a Hydraulic Model of a Fluidised Bed- Part I. *Transactions of the Institution of Chemical Engineers* **39**, 43-54, 1961.
- [161] Rubinow, S. I., Keller, J. B.: The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid. *Journal of Fluid Mechanics* **11**, 447-459, 1961.
- [162] Saffman, P. G.: The lift on a small sphere in a slow shear flow. *Journal of Fluid Mechanics* **22**, 385-400, 1965; Saffman, P. G.: Corrigendum. *Journal of Fluid Mechanics* **31**, 624, 1968.
- [163] Saha, A. K.: Three-dimensional numerical simulation of the transition of flow past a cube. *Physics of Fluids* **16**, 1630-1646, 2004.
- [164] Sakamoto, H., Haniu, H.: The formation mechanism and shedding frequency of vortices from a sphere in uniform shear flow. *Journal of Fluid Mechanics* **287**, 151-171, 1995.
- [165] Salem, M. B., Oesterle, B.: A Shear Flow Around a Spinning Sphere: Numerical Study at Moderate Reynolds Numbers. *International Journal of Multiphase Flow* **24**, 563-585, 1998.
- [166] Sawatzki, O.: Das Strömungsfeld um eine rotierende Kugel. *Acta Mechanica* **9**, 159-214, 1970.

- [167] Schiller, L.: *Handbuch der Experimentalphysik Band IV, 2. Teil: Hydro- und Aerodynamik. Widerstand und Auftrieb*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1932.
- [168] Schmiedel, J.: Experimentelle Untersuchungen über die Fallbewegung von Kugeln und Scheiben in reibenden Flüssigkeiten. *Physikalische Zeitschrift* **29**, 593-610, 1928.
- [169] Schouveiler, L., Provansal, M.: Periodic Wakes of Low Aspect Ratio Cylinders with Free Hemispherical Ends. *Journal of Fluids and Structures* **15**, 565-573, 2001.
- [170] Schubauer, G. B., Dryden, H. L.: The Effect of Turbulence on the Drag of Flat Plates. *NACA Report No. 546*, 1937.
- [171] Schulz, P.: Neue Bestimmungen der Konstanten der Fallgesetze in der nassen Aufbereitung mit Hilfe der Kinematographie und Betrachtungen über das Gleichfälligkeitgesetz. Dissertation, Noske, Leipzig, 1914.
- [172] Schwartzberg, H. G., Treyball, R. E.: Fluid and Particle Motion in Turbulent Stirred Tanks. *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals* **7**, 1-12, 1968.
- [173] Sheaffer, A. W.: Drag on Modified Rectangular Prisms. *Journal of Aerosol Science* **18**, 11-16, 1987.
- [174] Shirayama, S.: Flow Past a Sphere: Topological Transitions of the Vorticity Field. *AIAA Journal* **30**, 349-358, 1992.
- [175] Smoluchowski, M. M.: Über die Wechselwirkung von Kugeln, die sich in einer zähen Flüssigkeit bewegen. *Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles A* **1**, 28-39, 1911.
- [176] Sommerfeld, M.: Bewegung fester Partikel in Gasen und Flüssigkeiten. in *VDI-Wärmeatlas*, Lca1, Springer, Berlin, 2002.
- [177] Squires, L., Squires, W.: The Sedimentation of Thin Discs. *Transactions of the American Institute of Chemical Engineers* **33**, 1-12, 1937.
- [178] Stimson, M., Jeffery, G. B.: The Motion of Two Spheres in a Viscous Fluid. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A* **111**, 110-116, 1926.
- [179] Stokes, G. G.: On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* **9**, 8-106, 1851.
- [180] Sutterby, J. L.: Falling Sphere Viscometry. I. Wall and Inertial Corrections to Stokes' Law in Long Tubes. *Transactions of the Society of Rheology* **17**, 559-573, 1973; Sutterby, J. L.: Falling Sphere Viscometry. II. End Effects in Short Tubes. *Transactions of the Society of Rheology* **17**, 575-585, 1973.
- [181] Tal, R., Lee, D. N., Sirigano, W. A.: Heat and momentum transfer around a pair of spheres in viscous flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **27**, 1953-1962, 1984.
- [182] Tanaka, T., Yamagata, K., Tsuji, Y.: Experiment of Fluid Forces on a Rotating Sphere and Spheroid. *The Second KSME-JSME Fluids Engineering Conference, Seoul*, 366-369, 1990.
- [183] Taneda, S.: Experimental Investigation of the Wake behind a Sphere at Low Reynolds Numbers. *Journal of the Physical Society of Japan* **11**, 1104-1108, 1956.
- [184] Taneda, S.: Negative Magnus Effect. *Reports of Research Institute for Applied Mechanics* **5**, 123-128, 1957.

- [185] Tani, I.: Baseball's Curved Balls. *Kagaku* **20**, 405-409, 1950 (in Japanese).
- [186] Ten Cate, A., Derksen, J. J., Van den Akker, H. E. A.: Lattice-Boltzmann DNS of solid particles in forced isotropic turbulence. *Proceedings of the International Conference on Multiphase Flow*, 2001.
- [187] Thompson, M. C., Leweke, T., Provansal, M.: Kinematics and Dynamics of Sphere Wake Transition. *Journal of Fluids and Structures* **15**, 575-585, 2001.
- [188] Tomboulides, A. G., Orszag, S. A.: Numerical investigation of transitional and weak turbulent flow past a sphere. *Journal of Fluid Mechanics* **416**, 45-73, 2000.
- [189] Torobin, L. B., Gauvin, W. H.: The Drag Coefficients of Single Spheres Moving in Steady and Accelerated Motion in a Turbulent Fluid. *AIChE Journal*. **7**, 615-619, 1961.
- [190] Tran-Cong, S., Hay, M., Michaelides, E. E.: Drag coefficients of irregularly shaped particles. *Powder Technology* **139**, 21-32, 2004.
- [191] Tripathi, A., Chhabra, R. P., Sundararajan, T.: Power Law Fluid Flow over Spheroidal Particles. *Industrial & Engineering Chemistry Research* **33**, 403-410, 1994.
- [192] Tsuji, Y., Morikawa, Y., Mizuno, O.: Experimental Measurements of the Magnus Force on a Rotating Sphere at Low Reynolds Numbers. *Transactions of the ASME: Journal of Fluids Engineering* **107**, 484-488, 1985.
- [193] Tsuji, Y., Morikawa, Y., Kozo, T.: Fluid-Dynamic Interaction Between Two Spheres. *International Journal of Multiphase Flow* **8**, 71-82, 1982.
- [194] Tsuji, T., Narutomi, R., Yokomine, T., Ebara, S., Shimizu, A.: Unsteady three-dimensional simulation of interactions between flow and two particles. *International Journal of Multiphase Flow* **29**, 1431-1450, 2003.
- [195] Tunstall, E. B., Houghton, G.: Retardation of falling spheres by hydrodynamic oscillations. *Chemical Engineering Science* **23**, 1067-1081, 1968.
- [196] Turton, R., Levenspiel, O.: A Short Note on the Drag Correlation for Spheres. *Powder Technology* **47**, 83-86, 1986.
- [197] Vargas, S., Easson, W. J.: Forces Between Two Spheres at Low Reynolds Numbers. *Proceedings of the 3rd International Symposium on Two-Phase Flow Modelling and Experimental*, II-1097-1102, 2004.
- [198] Vasseur, P., Cox, R. G.: The lateral migration of a spherical particle in two-dimensional shear flows. *Journal of Fluid Mechanics* **78**, 385-413, 1976.
- [199] Vinci, L. da: *Del Moto e Misura dell'Acqua*. Nicola Zanichelli, Bologna, 1923.
- [200] Warnica, W. D., Renksizbulut, M., Strong, A. B.: Drag coefficients of spherical liquid droplets. *Experiments in Fluids* **18**, 258-276, 1995.
- [201] Wadell, H.: The Coefficient of Resistance as a Function of Reynolds Number for Solids of Various Shapes. *Journal of the Franklin Institute* **217**, 459-490, 1934.
- [202] Wieselsberger, C.: Der Luftwiderstand von Kugeln. *Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt* **5**, 140-145, 1914.
- [203] Wieselsberger, C.: Untersuchungen über den Reibungswiderstand von stoffbespannten Flächen. *Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen* **1**, 120-126, 1923.
- [204] Wieselsberger, C.: Versuche über den Luftwiderstand gerundeter und kantiger Körper. *Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen* **2**, 22-35, 1923.

- [205] Williams, G. P.: Particle Roundness and Surface Texture Effects on Fall Velocity. *Journal of Sedimentary Petrology* **36**, 255-259, 1966.
- [206] Willmarth, W. W., Hawk, N. E., Harvey, R. L.: Steady and Unsteady Motions and Wakes of Freely Falling Disks. *Physics of Fluids* **7**, 197-208, 1964.
- [207] Wu, J.-S., Faeth, G. M.: Sphere Wakes in Still Surroundings at Intermediate Reynolds Numbers. *AIAA Journal* **31**, 1448-1455, 1993.
- [208] Yamamoto, F., Koukawa, M., Monya, H., Teranishi, A., Miyamoto, H.: An Experimental Study for Simulation of Pneumatic Conveying. *JSME International Journal, Series B* **36**, 294-299, 1993.
- [209] Youngren, G. K., Acrivos, A.: Stokes flow past a particle of arbitrary shape: a numerical method of solution. *Journal of Fluid Mechanics* **69**, 377-403, 1975.
- [210] Zeleny, J., McKeehan, L. W.: The Terminal Velocity of Fall of Small Spheres in Air. *The Physical Review* **30**, 535-560, 1910.
- [211] Zahm, A. F., Smith, R. H., Loudon, F. A.: Drag of C-Class Airship Hulls of Various Fineness Ratios. *NACA Report No. 291*, 1929.
- [212] Zarin, N. A.: Measurement of Non-Continuum and Turbulence Effects on Subsonic Sphere drag. *NASA Contractor Report 1585*, 1970.
- [213] Zhu, C., Liang, S.-C., Fan L.-S.: Particle Wake Effects on the Drag Force of an Interacting Particle. *International Journal of Multiphase Flow* **20**, 117-129, 1994.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Andreas Hölzer
Geburtsdatum: 08.01.1978
Geburtsort: Halle (Saale)
Staatsangehörigkeit: Deutsch
Familienstand: Ledig

Bildungsweg

1984 – 1991 Polytechnische Oberschule „Juri Gagarin“ in Halle
1991 – 1996 Gymnasium im Bildungszentrum in Halle
11/1996 – 08/1997 Grundwehrdienst in Sontra (Hessen)
10/1997 – 10/2002 Studium der Verfahrenstechnik an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Abschluss Dipl.-Ing.

Berufliche Erfahrungen

11/2002 – 11/2006 Wissenschaftlicher Mitarbeiter und Doktorand am Lehrstuhl für Mechanische Verfahrenstechnik, Arbeitsgruppe Mehrphasenströmung, an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

- Dissertation: „Bestimmung des Widerstandes, Auftriebs und Drehmoments und Simulation der Bewegung nicht-sphärischer Partikel in laminaren und turbulenten Strömungen mit dem Lattice-Boltzmann-Verfahren“
- Seminarleiter der Übungen zur Mechanischen Verfahrenstechnik I und II
- Mitarbeit am Drittmittelprojekt zwischen dem oben genannten Lehrstuhl und der Robert Bosch GmbH
- Marie Curie-Stipendiat der EU am Institut für Wärme- und Krafttechnik der Universität Lund, Schweden (03/2004 – 05/2004, drei Monate)

seit 12/2006 Trainee im Bereich Luftzerlegungsanlagen bei der Linde AG, Pullach

Veröffentlichungen

Vorträge und Vortragsbeteiligungen

- 2003, Baden-Baden, Deutschland, GVC (VDI)-Fachausschusssitzung Mehrphasenströmungen
A. Hölzer, M. Sommerfeld: „Simulation der Bewegung nichtsphärischer Partikel in laminaren und turbulenten Strömungen mit dem Lattice-Boltzmann-Verfahren”
- 2003, Honolulu, USA, 4th ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference
M. Sommerfeld, A. Hölzer: „Lattice Boltzmann Simulation to Determine Forces Acting on Non-Spherical Particles”
- 2004, Bremen, Deutschland, GVC (VDI)-Fachausschusssitzung Mehrphasenströmungen
M. Sommerfeld, A. Hölzer: „Bestimmung der auf nichtsphärische Partikel wirkenden Kräfte mit dem Lattice-Boltzmann-Verfahren und Ableitung einer Korrelationsformel für den Widerstandsbeiwert”
- 2004, Braunschweig, Deutschland, International Conference for Mesoscopic Methods in Engineering and Science
A. Hölzer: „Determination of Forces Acting on Non-Spherical Particles by LBM and Derivation of a Correlation Formula for the Drag Coefficient”
- 2004, Chicago, USA, IUTAM Symposium on Recent Advances in Disperse Multiphase Flow Simulation
M. Sommerfeld, A. Hölzer: „Determination of Resistance Coefficients for Non-Spherical Particles in Laminar and Turbulent Flow by LBM”
- 2005, Luxemburg, 76th GAMM Scientific Annual Conference
A. Hölzer, M. Sommerfeld: „Determination of Resistance Coefficients for Non-Spherical Particles in Laminar and Turbulent Flow by the Lattice Boltzmann Method”
- 2005, Udine, Italien, 13th IUTAM Advanced School on Dispersion of Particles in Turbulent Flows
M. Sommerfeld, A. Hölzer: „Lattice Boltzmann Simulations on the Behaviour of Non-Spherical Particles in Laminar and Turbulent Flow”
- 2006, Überlingen, Deutschland, GVC (VDI)-Fachausschusssitzung Mehrphasenströmungen
M. Sommerfeld, A. Hölzer: „Die Wechselwirkung zwischen zwei Kugeln in einer laminaren Strömung”
- 2006, Miami, USA, ASME Joint U.S.-European Fluids Engineering Summer Meeting
M. Sommerfeld, A. Hölzer: „Transport of Non-Spherical Particles in Turbulence: Application of the LBM”

Artikel

- 2003, Proceedings of the 4th ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference
A. Hölzer, M. Sommerfeld: „Lattice Boltzmann Simulation to Determine Forces Acting on Non-Spherical Particles”
- 2006, IUTAM Symposium on Computational Approaches to Disperse Multiphase Flow, Springer, Heidelberg
A. Hölzer, M. Sommerfeld: „Lattice Boltzmann Simulations to Determine Forces Acting on Non-Spherical Particles”
- 2006, Proceedings of the ASME Joint U.S.-European Fluids Engineering Summer Meeting
A. Hölzer, M. Sommerfeld: „Transport of Non-Spherical Particles in Turbulence: Application of the LBM”
- 2007, Journal of Multiphase Flow **33** (7), 707-725
L. Prahl, A. Hölzer, D. Arlov, J. Revstedt, M. Sommerfeld, L. Fuchs: „On the interaction between two fixed spherical particles”
- 2007, Powder Technology (im Druck)
A. Hölzer, M. Sommerfeld: „New simple correlation formula for the drag coefficient of non-spherical particles”
- 2007, Computers & Fluids (unter Begutachtung)
A. Hölzer, M. Sommerfeld: „Lattice Boltzmann simulations to determine drag, lift and torque acting on non-spherical particles”

Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich, Andreas Hölzer, die vorliegende Dissertation selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und die den benutzten Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form als Dissertation eingereicht und ist als Ganzes noch nicht veröffentlicht. Ich versichere, dass ich mich bis zum heutigen Tage weder an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg noch anderwärtig um den Doktorgrad beworben habe.

Halle (Saale), im Mai 2007

Andreas Hölzer