

# **Zur Klassifizierung mehrdimensionaler Parkettsysteme, insbesondere unter Heranziehung der Invariante Entropie**

**Dissertation**



zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt der

Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät  
der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

von Frau Katrin Hirsch  
geb. am 1. Februar 1972 in Leipzig

Gutachter:

1. Prof. Dr. C. Bandt (Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald)
2. Prof. Dr. B. Kamiński (Nikolaus-Kopernikus-Universität Toruń)
3. Doz. Dr. K. Richter (Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg)

Halle (Saale), den 8. Juli 1999

An dieser Stelle möchte ich meiner Betreuerin, Frau Doz. Dr. sc. K. Richter für die Unterstützung bei der Anfertigung dieser Arbeit meinen herzlichen Dank aussprechen.

Herrn Diplom-Mathematiker S. Trojahn danke ich für seine Hilfe bei der rechentechnischen Umsetzung des Algorithmus zur Entropieabschätzung.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>4</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>7</b>
<b>1 Eine wesentliche Klasse topologischer dynamischer Systeme — mehrdimensionale Parkettsysteme</b>	<b>9</b>
1.1 Topologische dynamische Systeme und ihre Klassifizierung . . . . .	9
1.2 $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsysteme als spezielle Konfigurationenräume . . . . .	14
<b>2 Die topologische Entropie von <math>\mathbb{Z}^d</math>-Parkettsystemen</b>	<b>32</b>
2.1 Zum Begriff der topologischen Entropie von Homöomorphismengruppen . . . . .	33
2.2 Die topologische Entropie von $\mathbb{Z}^d$ -Quadersystemen . . . . .	37
2.2.1 Ein-dimensionale Quadersysteme . . . . .	37
2.2.2 Mehrdimensionale Quadersysteme . . . . .	46
2.2.2.1 $\mathbb{Z}^d$ -Quadersysteme der topologischen Entropie Null . . . . .	47
2.2.2.2 Zur Abschätzung der Entropie mehrdimensionaler Quadersysteme .	56
<b>3 Untersuchungen zum Faktorbegriff für <math>d</math>-dimensionale Parkettsysteme (<math>d \geq 1</math>)</b>	<b>72</b>
3.1 Beschreibungsmöglichkeiten für die Faktorbeziehung zwischen $d$ -dimensionalen Parkettsystemen . . . . .	73
3.2 Faktoruntersuchung für 1-dimensionale Quadersysteme – vollständige Charakterisierung . . . . .	78
3.3 Faktoreigenschaften von ein- und mehrdimensionalen Quadersystemen – qualitative Unterschiede . . . . .	87
3.4 Faktoruntersuchungen für mehrdimensionale Quadersysteme – hinreichende Bedingungen . . . . .	98
<b>4 Selbstaffine Parkettierungen des <math>\mathbb{Z}^d</math> und erzeugte Parkettsysteme</b>	<b>108</b>
4.1 Selbstaffinität von Parkettierungen des Gitters $\mathbb{Z}^d$ . . . . .	109
4.2 Zur Dynamik des von einer fast-periodischen selbstaffinen Parkettierung erzeugten Parkettsystems . . . . .	117
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>129</b>

## Vorwort

Die Theorie dynamischer Systeme beschäftigt sich mit Abbildungsgruppen und Abbildungshalbgruppen von Maßräumen oder topologischen Räumen. Die Gewinnung von Klassifizierungsaussagen, d. h. die Suche nach Invarianten bezüglich geeigneter Äquivalenzbegriffe, ist dabei ein Kernproblem aller Untersuchungen. Ausgehend von speziellen Fragestellungen findet man in diesem Zusammenhang auch Begriffe wie topologische Dynamik, symbolische Dynamik, topologische Ergodentheorie oder Entropietheorie.

Die vorgelegte Arbeit ist der Untersuchung einer speziellen Klasse topologischer dynamischer Systeme, den  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystemen (Definition 1.25) gewidmet. Diese Systeme ordnen sich in die von D. Ruelle ([55]) begründete Theorie der Konfigurationenräume ein.

Topologische und maßtheoretische Untersuchungen zur Dynamik ein-dimensionaler Konfigurationenräume (auch  $\mathbb{Z}$ -Subshifts oder topologische Markovketten genannt) nehmen in der Entwicklung der Ergodentheorie einen wichtigen Platz ein (siehe z. B. M.Morse, G.Hedlund [44], W.Parry [48] und R.F.Williams [66]). Diese Systeme haben u. a. in der Informations- und Codierungstheorie (siehe [41],[4]) und in der Wahrscheinlichkeitstheorie (siehe [44],[41],[16]) große Bedeutung erlangt. In der Ergodentheorie finden sie bei der Untersuchung spezieller dynamischer Systeme, z. B. Systeme mit Generator (vgl. [16]) oder Systeme hyperbolischen Typs wie Anosov- bzw. U-Diffeomorphismen (z. B. in [58]) oder Axiom-A-Diffeomorphismen ([7],[9], [59]), Anwendung.

Eine Motivation für die Untersuchung von Konfigurationenräumen über dem Gitter  $\mathbb{Z}^d$  der Dimension  $d \in \mathbb{N}$  sind beispielsweise Modellkonstruktionen der statistischen Mechanik. Die Beschreibung von Gleichgewichtszuständen physikalischer Systeme ist ein zentrales Problem der statistischen Mechanik. Häufig besitzen solche Systeme eine natürliche Gitterstruktur, oder es besteht die Möglichkeit, durch Diskretisierung ein Gitter zu unterlegen. Der Formalismus zur thermodynamischen Beschreibung von Gleichgewichtszuständen eines physikalischen Systems wurde von G.W.Gibbs begründet (zur Theorie der Gibbs-Maße siehe z. B. [58],[9],[55]). D.Ruelle entwickelt in [55] den Formalismus der Konfigurationenräume, welcher unter anderem die Untersuchung von Gleichgewichtszuständen eines thermodynamischen Systems unabhängig von Gibbs-Maßen erlaubt. (In der Regel beschränkt man sich bei diesen Untersuchungen auf Konfigurationenräume auf dem Gitter  $\mathbb{Z}^d$ .) Diese Konfigurationenräume über einer abzählbar unendlichen Menge  $L$  zeichnen sich gerade dadurch aus, daß jedes „Teilchen“ des Systems je einen Punkt der Menge  $L$  belegen kann, die Belegung des gesamten Gitters aber nur bei Einhaltung gewisser Restriktionen auf bestimmten endlichen Teilmengen von  $L$  möglich ist. Dabei soll die Menge der für die Belegung eines Gitterpunktes geltenden Restriktionen endlich und unabhängig von der Lage des Punktes sein (Translationsinvarianz). (Vgl. Definition 1.18.)

Motiviert durch Modellkonstruktionen (z. B. zur Beschreibung von Flüssigkristallen, [29]), in denen die Teilchen des Systems nicht nur jeweils einen Punkt des Gitters belegen können, sondern das System aus „mehratomigen Molekülen“ besteht, entwickelt H.Michel in [43] den Begriff des Mengenkonfigurationenraumes über einer abzählbar unendlichen Menge  $L$ . Die zentrale Rolle bei diesem Formalismus spielt eine Familie  $\mathcal{G}$  endlicher Teilmengen von  $L$  (die Familie der „Molekülformen“),

mit deren Elementen Zerlegungen („Parkettierungen“) von  $L$  konstruiert werden können. Letztere bilden die Grundlage für die sogenannten Mengenkonfigurationen auf  $L$ . Für den Fall  $L = \mathbb{Z}^d$  und einer translationsinvarianten Familie  $\mathcal{G}$  existiert eine endliche Familie  $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$  derart, daß  $\mathcal{G}$  durch Verschiebung der Elemente von  $\mathcal{G}_0$  auf dem Gitter  $\mathbb{Z}^d$  entsteht. Der zugehörige Mengenkonfigurationenraum wird dann auch  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystem mit der Proto-Baustein-Menge  $\mathcal{G}_0$  genannt.

Das Anliegen dieser Arbeit besteht darin, einen Beitrag zur Klassifizierung, speziell zur Aufklärung der Faktorstruktur dieser topologischen dynamischen Systeme, zu liefern. Dazu wird insbesondere die topologische Entropie als eine wesentliche Größe zur Beschreibung der Komplexität und Reichhaltigkeit dynamischer Systeme untersucht.

In Kapitel 1 dieser Arbeit werden zunächst einige wichtige Begriffe und Fragestellungen der Theorie topologischer dynamischer Systeme dargestellt. Die Einführung der Begriffe  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenraum und  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystem zur Beschreibung wesentlicher Beispielklassen dynamischer Systeme erfolgt im zweiten Abschnitt dieses Kapitels. Auf der Grundlage eines Resultates von D.Ruelle, wonach jeder Punktkonfigurationenraum über dem Gitter  $\mathbb{Z}^d$  topologisch konjugiert zu einem  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenraum der Ordnung  $(2, \dots, 2)$  ist, kann jeder Punktkonfigurationenraum durch ein Tupel von Matrizen dargestellt werden. (Die Restriktionensysteme von  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenräumen der Ordnung  $(2, \dots, 2)$  beschränken sich auf „unmittelbar benachbarte“ Gitterpunkte der Koordinatenachsen.) Die Beschreibung eines  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystems mit Hilfe der Matrizen des nach einem Satz von H.Michel existierenden topologisch konjugierten Punktkonfigurationenraumes über dem Gitter  $\mathbb{Z}^d$  ist jedoch (insbesondere für  $d > 1$ ) oftmals nicht zur Untersuchung der topologischen Dynamik eines Parkettsystems geeignet. Stattdessen sollte die geometrische Struktur der Elemente eines Parkettsystems zur Behandlung dynamischer Fragestellungen stärker herangezogen werden. In diesem Sinne beschränken wir uns in den Kapiteln 2 und 3 der Arbeit auf die Untersuchung solcher Parkettsysteme, deren Molekülformen Quader des Gitters  $\mathbb{Z}^d$  sind. (Diese Systeme werden  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersysteme genannt.) Die dadurch eintretenden Vereinfachungen bedeuten jedoch keineswegs eine Trivialisierung der behandelten Probleme, sondern führen auf eine hinsichtlich ihrer Struktur und Mannigfaltigkeit interessante Teilklasse mehrdimensionaler dynamischer Systeme.

Kapitel 2 widmet sich der Untersuchung der topologischen Entropie der Shift-Wirkung auf  $d$ -dimensionalen Parkettsystemen. In Anlehnung an die Einführung der Entropie einer stetigen Abbildung  $T$  eines kompakten topologischen Raumes  $X$  in [1] wird zunächst der Begriff der topologischen Entropie von Homöomorphismengruppen als  $(\mathbb{Z}^d, +)$ -Wirkungen definiert. Schwerpunkt des zweiten Abschnittes dieses Kapitels ist die Gewinnung von Aussagen über das Verhalten der Entropie von  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersystemen. Für die Gitterdimension  $d = 1$  werden Resultate von G.Schwenzfeger ([56]) zur Struktur der Eigenwertgleichung der zugehörigen Übergangsmatrix verwendet. Die von G.Schwenzfeger erarbeiteten Aussagen zum qualitativen Verhalten der Entropie ein-dimensionaler Quadersysteme werden verschärft, insbesondere wird eine Charakterisierung von Systemen gleicher Entropie angegeben. Für Gitterdimensionen  $d > 1$  wird die Frage nach der Struktur von Quadersystemen verschwindender topologischer Entropie beantwortet. Darüber hinaus wird ein Verfahren zur Gewinnung oberer und unterer Schranken für die Entropie beliebiger  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersysteme ent-

wickelt.

Gegenstand des 3. Kapitels ist die Untersuchung des topologischen Faktorbegriffes für die Klasse der  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersysteme. Im ersten Teil wird ein grundlegender Satz zur Beschreibung von Faktorabbildungen zwischen Parkettsystemen über dem Gitter  $\mathbb{Z}^d$  durch endliche „Blockabbildungen“ bewiesen. Dieses Resultat stellt eine Verallgemeinerung des aus der Theorie ein-dimensionaler Subshifts bekannten Theorems von Hedlund ([28]) dar. Der zweite Abschnitt dieses Kapitels liefert eine vollständige Charakterisierung von Faktorbeziehungen zwischen ein-dimensionalen Quadersystemen durch Eigenschaften ihrer Baustein-Mengen. Dazu werden insbesondere Aussagen zur Struktur periodischer Elemente und die in Kapitel 2 angegebenen Eigenschaften der topologischen Entropie ein-dimensionaler Quadersysteme herangezogen. Ein weiterer Schwerpunkt dieses Kapitels ist die Beschreibung von Quadersystemen über dem Gitter  $\mathbb{Z}^d$ , welche ein Faktor-Quadersystem der Entropie Null besitzen. Dabei werden wesentliche qualitative Unterschiede in der Faktorstruktur von Quadersystemen der Gitterdimension  $d > 1$  gegenüber ein-dimensionalen Systemen deutlich. Die Erarbeitung hinreichender Bedingungen für das Bestehen von Faktorbeziehungen zwischen Quadersystemen der Dimension  $d > 1$ , welche die explizite Konstruktion der Faktorabbildung erlauben, schließt das 3. Kapitel ab.

Eine Einbeziehung der geometrischen Struktur der Elemente eines Parkettsystems in Untersuchungen zur Dynamik kann auch erfolgen, indem die von Parkettierungen mit speziellen Eigenschaften erzeugten Teilsysteme betrachtet werden. Eine solche Eigenschaft ist beispielsweise die Selbstähnlichkeit bzw. Selbstaffinität von Parkettierungen. (Diese hat in den vergangenen Jahren insbesondere in Zusammenhang mit der Modellierung sogenannter „Quasikristalle“ in der Physik Aufmerksamkeit erlangt, siehe z. B. [57].) Die Erarbeitung einer geeigneten Definition dieser Eigenschaft für Parkettierungen des Gitters  $\mathbb{Z}^d$  steht im Mittelpunkt des ersten Abschnittes von Kapitel 4. Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels wird die eindeutige Ergodizität des von einer selbstaffinen Parkettierung des  $\mathbb{Z}^d$  erzeugten Teil-Parkettsystems bewiesen. Darüber hinaus werden Mischungseigenschaften des entstehenden maßtheoretischen dynamischen Systems untersucht.

# Symbolverzeichnis

## Allgemeine Symbole:

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	– Mengen der reellen bzw. komplexen Zahlen
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$	– Mengen der natürlichen bzw. ganzen Zahlen
$n!$	– Fakultät von $n \in \mathbb{N}$ , d. h. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$
$\lfloor x \rfloor$	– die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich $x \in \mathbb{R}$ ist
$\lceil x \rceil$	– die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich $x \in \mathbb{R}$ ist
$\mathbb{Z}^d$	– Menge der $d$ -Tupel $z = (z_1, \dots, z_d)$ ganzer Zahlen
$e_i$ ( $i = 1, \dots, d$ )	– $i$ -ter Einheitsvektor in $\mathbb{Z}^d$
$\ z\ $ ( $z \in \mathbb{Z}^d$ )	– Maximumnorm auf $\mathbb{Z}^d$ , d. h. $\ z\  := \max_{i=1, \dots, d}  z_i $
$\prec$	– lexikographische Ordnung auf $\mathbb{Z}^d$
$ S $	– Kardinalität der diskreten Menge $S$
$A + B$ für $A, B \subset \mathbb{Z}^d$	– $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$
$L^T$	– die Transponierte der Matrix $L$
$\langle u, v \rangle$	– Skalarprodukt der Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^d$ , d. h. $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^d u_i v_i$

## Auswahl spezieller Symbole:

Symbol	– Bedeutung	Seite
$A_H(x, T^{\mathbb{Z}^d})$	– Periodenhauptgruppe des Elementes $x \in X$	10
$A_H(X, T^{\mathbb{Z}^d})$	– $\bigcap_{x \in X} A_H(x, T^{\mathbb{Z}^d})$	10
$B(R, y)$	– $\{x \in \mathbb{Z}^d \mid \ x - y\  \leq R\}$ , Kugel mit dem Radius $R \in \mathbb{R}$ , $R \geq 0$ um $y \in \mathbb{Z}^d$	113
$C(\xi_{ A}^*), C(\mathcal{P}_{ A})$	– der von $\xi_{ A}^*$ bzw. $\mathcal{P}_{ A}$ erzeugte Zylinder in $\Omega^*$	19
$d(\Omega^*)$	– eigentliche Dimension des Quadersystems $\Omega^*$	46
$\Delta(\Omega^*)(x)$	– das charakteristische Polynom des $\mathbb{Z}^1$ -Parkettsystems $\Omega^*$	40
$\Delta_0(\Omega^*)(x)$	– das charakteristische Polynom des $\mathbb{Z}^1$ -Parkettsystems $\Omega^*$ modulo $x$	40
$\mathcal{G}_0$	– Proto-Baustein-Menge eines Parkettsystems $\Omega^*$	17
$\mathcal{G}$	– $\mathcal{G}_0 + \mathbb{Z}^d$ , Menge aller Bausteine eines $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystems $\Omega^*$	17
$h_t(T^{\mathbb{Z}^d})$	– topologische Entropie der Wirkung $T^{\mathbb{Z}^d}$	34
$h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^d}_{ \Omega^*})$	– topologische Entropie der Shift-Wirkung auf dem $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystem $\Omega^*$	35
$(\underline{L}^{(1)}, \dots, \underline{L}^{(d)})$	– $d$ -Tupel der Übergangsmatrizen eines $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenraumes $\Omega$ bzw. eines $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystems $\Omega^*$	26
$L_{\mathcal{A}}(A)$	– Anzahl der in der endlichen Menge $A \subset \mathbb{Z}^d$ enthaltenen Verschiebungen der Teilparkettierung $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$	119
$M_{\mathcal{P}}$	– Unterteilungsmatrix der selbstaffinen Parkettierung $\mathcal{P}$	113

<u>Symbol</u>	<u>Bedeutung</u>	<u>Seite</u>
$\mathcal{M}_0(\Omega^*, n)$	– Menge aller von $\mathcal{Z}(n)$ erzeugten Teilkonfigurationen im Parkettsystem $\Omega^*$	19
$N(A, \Omega^*)$	– Anzahl aller von $A \subset \mathbb{Z}^d$ ( $ A  < \infty$ ) erzeugten Teilparkettierungen des Parkettsystems $\Omega^*$	35
$\Omega = (\mathbb{Z}^d, S, \mathcal{F}, (\bar{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{F}})$	– $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenraum zum Alphabet $S$	14
$\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0, (\Omega_G)_{G \in \mathcal{G}_0})$	– $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystem mit der Proto-Baustein-Menge $\mathcal{G}_0$ und den Farbenmengen $\Omega_G$ ( $G \in \mathcal{G}_0$ ), auch abkürzend für das dynamische System $(\Omega^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d} _{\Omega^*})$	18
$\Omega_{\mathcal{P}}^*$	– das von der Parkettierung $\mathcal{P} \in \Omega^*$ erzeugte Parkettsystem	117
$\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m, \{n(j)\}_{j=1}^m)$	– $\mathbb{Z}^d$ -Quadersystem mit Bausteinfärbungen	29
$\Omega_{\underline{\alpha}}^* \ (\underline{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1}^d \in \mathbb{N}^d)$	– das durch Streckung aller Quaderausdehnungen von $\Omega^*$ um $\alpha_i$ in Richtung $e_i$ ( $i = 1, \dots, d$ ) gebildete Quadersystem	51
$\text{Orb}_T(x)$	– Orbit von $x \in X$ unter der Wirkung $T$	11
$p^{(j)}(b_j)$	– die Projektion des Gitters $\mathbb{Z}^d$ ( $d > 1$ ) auf den Hyperraum $\{z \in \mathbb{Z}^d : z_j = 0\}$ ( $j \in \{1, \dots, d\}$ ) mit dem Parameter $b_j \in \mathbb{N}$ , $b_j > 1$	88
$\text{Per}_{(q_1, \dots, q_d)}(X, T^{\mathbb{Z}^d})$	– Anzahl der Elemente $x \in X$ mit den Perioden $q_i e_i$ ( $i = 1, \dots, d$ )	11
$\mathcal{P}, \mathcal{R}$	– Parkettierungen von $\mathbb{Z}^d$	17
$\mathcal{P}_{ A}$	– die von $A \subset \mathbb{Z}^d$ ( $ A  < \infty$ ) erzeugte Teilparkettierung in $\mathcal{P} \in \pi(\mathcal{G}_0)$	18
$\pi(\mathcal{G}_0)$	– Menge aller Parkettierungen des $\mathbb{Z}^d$ mit Verschiebungen von Elementen aus $\mathcal{G}_0$	17
$\sigma = \sigma^{\mathbb{Z}^d} = (\sigma^a)_{a \in \mathbb{Z}^d}$	– Shift-Wirkung der Gruppe $(\mathbb{Z}^d, +)$ auf $S^{\mathbb{Z}^d}$	16
$\sigma^{\mathbb{Z}^d} _{\Omega^*}$	– Shift-Wirkung der Gruppe $(\mathbb{Z}^d, +)$ auf dem Parkettsystem $\Omega^*$	19
$\varphi = (\tilde{\varphi}, \{a_1, \dots, a_k\})$	– verallgemeinerte expandierende affine Abbildung des $\mathbb{Z}^d$	110
$\xi = (\xi_z)_{z \in \mathbb{Z}^d} \in \Omega$	– Konfiguration im Punktkonfigurationenraum $\Omega$	15
$\xi^* = (\xi_H^*)_{H \in \mathcal{P}}$	– Konfiguration eines $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystems $\Omega^*$	18
$\xi_{ A}^*$	– die von $A \subset \mathbb{Z}^d$ ( $ A  < \infty$ ) erzeugte Teilkonfiguration in $\xi^* \in \Omega^*$	19
$\Xi(\mathcal{P})$	– Menge der Verschiebungsvektoren zwischen Bausteinen der Parkettierung $\mathcal{P}$	123
$\mathcal{Z}(n) \subset \mathbb{Z}^d$	– der im Nullpunkt zentrierte Würfel der Kantenlänge $2n+1$ in $\mathbb{Z}^d$ ( $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ )	19
$\mathcal{Z}^+(n)$	– $\{z \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq z_i \leq n, i = 1, \dots, d\}$ ( $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ )	35

# Kapitel 1

## Eine wesentliche Klasse topologischer dynamischer Systeme — mehrdimensionale Parkettsysteme

### 1.1 Topologische dynamische Systeme und ihre Klassifizierung

Im Mittelpunkt der Theorie dynamischer Systeme steht die Untersuchung von Abbildungsgruppen oder -halbgruppen von Maßräumen oder topologischen Räumen. Die klassische Ergodentheorie untersucht Wirkungen  $\{T^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  bzw.  $\{T^t\}_{t \in \mathbb{R}}$  der Gruppen  $(\mathbb{Z}, +)$  bzw.  $(\mathbb{R}, +)$ . Die Betrachtung von Wirkungen allgemeiner Gruppen wurde zum einen durch Fragestellungen der statistischen Mechanik (Gittermodelle) motiviert, aber auch durch die Erkenntnis, daß klassische dynamische Systeme wie geodätische Flüsse als Gruppenwirkung auf eine topologische Gruppe darstellbar sind.

**Definition 1.1** Es sei  $X$  ein kompakter metrisierbarer topologischer Raum. Wir bezeichnen mit  $\text{Aut}(X)$  die Gruppe der stetigen Automorphismen von  $X$ .

Ein Homöomorphismus  $T : (\mathbb{Z}^d, +) \rightarrow \text{Aut}(X)$ ,  $a \mapsto T^a$ , wird **Wirkung der Gruppe**  $(\mathbb{Z}^d, +)$  auf  $X$  (oder:  $\mathbb{Z}^d$ -Wirkung auf  $X$ ) genannt.

Das Paar  $(X, \{T^a\}_{a \in \mathbb{Z}^d})$  wird als (kompaktes) **topologisches dynamisches System** bezeichnet. Es wird auch die kürzere Schreibweise  $(X, T^{\mathbb{Z}^d})$  benutzt.

Ein Kernproblem der Theorie dynamischer Systeme ist die Untersuchung verschiedener Äquivalenzbegriffe und der durch diese induzierten Klasseneinteilungen. Wesentlich ist dabei die Suche nach Invarianten bezüglich dieser Äquivalenzbegriffe.

**Definition 1.2** Die kompakten topologischen dynamischen Systeme  $(X, T^{\mathbb{Z}^d})$  und  $(Y, S^{\mathbb{Z}^d})$  heißen zueinander (stark) **topologisch konjugiert**, wenn ein Homöomorphismus  $\varphi : X \rightarrow Y$  existiert, so daß gilt

$$\varphi \circ T^a = S^a \circ \varphi \quad (\forall a \in \mathbb{Z}^d). \quad (1.1)$$

**Bemerkung 1.3** Der Begriff der (starken) topologischen Konjugiertheit definiert eine Äquivalenzrelation auf dem Raum aller kompakten topologischen dynamischen Systeme  $(X, T^{\mathbb{Z}^d})$ . Man betrachtet einen weiteren Klassifizierungsbegriff, der eine Halbordnung auf dem Raum der kompakten topologischen dynamischen Systeme definiert.

**Definition 1.4** 1. Ein kompaktes topologisches dynamisches System  $(X', T'^{\mathbb{Z}^d})$  heißt ein **topologischer Faktor** des kompakten topologischen dynamischen Systems  $(X, T^{\mathbb{Z}^d})$ , wenn eine stetige Surjektion  $\psi : X \rightarrow X'$  existiert mit der Eigenschaft

$$\psi \circ T^a = T'^a \circ \psi \quad (\forall a \in \mathbb{Z}^d). \quad (1.2)$$

Wir benutzen die Schreibweisen  $(X, T^{\mathbb{Z}^d}) \geq (X', T'^{\mathbb{Z}^d})$  und  $(X, T^{\mathbb{Z}^d}) \stackrel{\psi}{\geq} (X', T'^{\mathbb{Z}^d})$ .

2. Zwei kompakte topologische dynamische Systeme  $(X, T^{\mathbb{Z}^d})$ ,  $(Y, S^{\mathbb{Z}^d})$  werden zueinander **schwach topologisch äquivalent** (oder schwach topologisch konjugiert) genannt, wenn  $(X, T^{\mathbb{Z}^d}) \geq (Y, S^{\mathbb{Z}^d})$  und  $(Y, S^{\mathbb{Z}^d}) \geq (X, T^{\mathbb{Z}^d})$  gilt.

**Bemerkung 1.5** Aus der starken topologischen Konjugiertheit zweier topologischer dynamischer Systeme folgt auch deren schwache topologische Äquivalenz. Dagegen existieren schwach topologisch äquivalente dynamische Systeme, die **nicht** stark topologisch konjugiert sind (vgl. beispielsweise [64]).

Klassifizierung dynamischer Systeme bedeutet vor allem Suche nach Invarianten bezüglich verschiedener Äquivalenzbegriffe. Als Invarianten bezeichnet man Größen oder Eigenschaften, die Systeme derselben Äquivalenzklasse gemeinsam haben. Im folgenden werden einige solche Größen beziehungsweise Eigenschaften eingeführt.

**Definition 1.6** Es sei  $(X, T^{\mathbb{Z}^d})$  ein kompaktes topologisches dynamisches System.

Ein Element  $x \in X$  heißt **periodisch**, wenn ein  $a \in \mathbb{Z}^d$  existiert mit  $T^a(x) = x$ . Dann wird  $a$  eine **Periode** von  $x \in X$  genannt. Existieren  $d$  linear unabhängige Perioden  $a^{(i)} \in \mathbb{Z}^d$  ( $i = 1, \dots, d$ ) für ein  $x \in X$ , so wird  $x$  auch  **$d$ -periodisch** genannt.

**Bemerkung 1.7** Ist ein Element  $x$  des kompakten topologischen dynamischen Systems  $(X, T^{\mathbb{Z}^d})$   $d$ -periodisch, so existiert ein  $a \in \mathbb{Z}^d$  derart, daß  $T^{a_i e_i}(x) = x$  für alle  $i = 1, \dots, d$  gilt.

**Folgerung 1.8** Ist  $(X, T^{\mathbb{Z}^d})$  ein kompaktes topologisches dynamisches System, so ist für jedes  $x \in X$  die Menge  $A_H(x, T^{\mathbb{Z}^d}) := \{a \in \mathbb{Z}^d \mid T^a(x) = x\}$  aller Perioden von  $x$  ein Normalteiler der additiven Gruppe  $(\mathbb{Z}^d, +)$ .

Die Menge  $A_H(X, T^{\mathbb{Z}^d}) := \bigcap_{x \in X} A_H(x, T^{\mathbb{Z}^d})$  ist der Nichteffektivitätskern  $\ker T$  der Wirkung  $T$  von  $(\mathbb{Z}^d, +)$  auf  $X$ .

**Definition 1.9** Es sei  $(X, T^{\mathbb{Z}^d})$  ein kompaktes topologisches dynamisches System.

1.  $A_H(x)$  heißt **Periodenhauptgruppe** von  $x \in X$ ; jede Untergruppe  $A = A(x)$  von  $A_H(x)$  heißt **Periodengruppe** von  $x \in X$ . Ist der Index  $n = [\mathbb{Z}^d : A]$  einer solchen Untergruppe  $A$  in  $\mathbb{Z}^d$  endlich, so wird  $n \in \mathbb{N}$  ein **Periodenindex** von  $x \in X$  genannt. Für  $A_H(x)$  heißt die Ordnung  $|\mathbb{Z}^d/A_H(x)|$  der Faktorgruppe  $\mathbb{Z}^d/A_H(x)$ , falls sie endlich ist, der **primitive Periodenindex** von  $x$ .
2. Die Teilmenge  $\text{Orb}_T(x) := \{T^a(x) \in X \mid a \in \mathbb{Z}^d\}$  von  $X$  wird **Orbit** von  $x$  unter der Wirkung  $T$  von  $(\mathbb{Z}^d, +)$  genannt. Die Zahl  $|\text{Orb}_T(x)|$  heißt die **Orbitgröße** von  $x$ .

**Bemerkung 1.10** 1. Falls die Orbitgröße  $|\text{Orb}_T(x)| =: \tau$  endlich ist, so ist  $\tau$  der primitive Periodenindex für jedes  $y \in \text{Orb}_T(x)$ .

2. Für  $d = 1$  ist der primitive Periodenindex von  $x \in X$  die kleinste natürliche Zahl  $p$  mit  $T^p(x) = x$ , d. h. die betragsmäßig kleinste Periode von  $x$ . Weiter ist jeder Periodenindex von  $x \in X$  eine Periode von  $x$ .
3. Allgemein ist jeder Periodenindex eines Elementes  $x \in X$  ein Vielfaches des primitiven Periodenindex von  $x$ , und jedes Vielfache des primitiven Periodenindex von  $x$  ist auch ein Periodenindex.

**Bemerkung 1.11** Ist  $(X, T^{\mathbb{Z}^d})$  ein kompaktes topologisches dynamisches System, so bezeichnet  $\text{Per}_{(q_1, \dots, q_d)}(X, T^{\mathbb{Z}^d})$  für beliebig vorgegebene Zahlen  $q_i \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, \dots, d$ , die Anzahl der Elemente von  $X$ , die die Perioden  $q_i e_i$  ( $i = 1, \dots, d$ ) besitzen. Dann ist  $n := \prod_{i=1}^d q_i$  Periodenindex jedes Elementes  $x \in X$  mit  $T^{q_i e_i}(x) = x$  ( $i = 1, \dots, d$ ).

Die Größe  $\text{Per}_{(q_1, \dots, q_d)}(X, T^{\mathbb{Z}^d})$  ist Invariante bezüglich starker topologischer Konjugiertheit.

**Definition 1.12** 1. Ein kompaktes topologisches dynamisches System  $(X, T^{\mathbb{Z}^d})$  heißt **topologisch transitiv**, wenn für beliebige zwei offene Mengen  $\emptyset \neq U, V \subset X$  gilt:

$$\exists a \in \mathbb{Z}^d : \quad X \cap U \cap T^a V \neq \emptyset. \quad (1.3)$$

2. Ein kompaktes topologisches dynamisches System  $(X, T^{\mathbb{Z}^d})$  heißt **topologisch (stark) mischend**, wenn für beliebige zwei nichtleere offene Mengen  $U, V \subset X$  gilt:

$$\exists n \in \mathbb{N} : \quad X \cap U \cap T^a V \neq \emptyset \quad \forall a \in \mathbb{Z}^d \text{ mit } \|a\| > n. \quad (1.4)$$

**Bemerkung 1.13** 1. Ist ein topologisches dynamisches System  $(X, T^{\mathbb{Z}^d})$  topologisch transitiv bzw. topologisch mischend, so wird auch die Wirkung  $T$  der Gruppe  $(\mathbb{Z}^d, +)$  auf  $X$  topologisch transitiv bzw. topologisch mischend genannt.

2. Topologisch (stark) mischende dynamische Systeme  $(X, T^{\mathbb{Z}^d})$  sind gemäß Definition 1.12 auch topologisch transitiv.

Topologische Transitivität eines dynamischen Systems  $(X, T^{\mathbb{Z}^d})$  ist äquivalent zur Existenz eines in  $X$  dichten Orbits.

**Bemerkung 1.14** 1. Die Eigenschaften topologische Transitivität und topologische Mischung sind Invarianten bezüglich topologischer Konjugiertheit dynamischer Systeme. Des Weiteren sind Faktoren eines topologisch transitiven (bzw. mischenden) dynamischen Systems auch topologisch transitiv (bzw. mischend).

2. Eine weitere, in engem Zusammenhang mit Periodizität und Mischungseigenschaften stehende, Invariante bezüglich topologischer Konjugiertheit dynamischer Systeme ist die topologische Entropie. Diese Größe wird in Kapitel 2 für Homöomorphismengruppen  $T^{\mathbb{Z}^d}$  als Wirkungen der Gruppe  $(\mathbb{Z}^d, +)$  definiert und für eine spezielle Klasse topologischer dynamischer Systeme genauer untersucht.

Eine wichtige Klasse topologischer dynamischer Systeme bilden die Systeme mit Generatoreigenschaft (siehe auch [16].) Dazu zählen unter anderem expandierende Abbildungen auf dem Kreis, hyperbolische Automorphismen des Torus und  $\mathbb{Z}^d$ -Subshifts.

Die Generatoreigenschaft ist invariant bezüglich topologischer Konjugiertheit topologischer dynamischer Systeme.

**Definition 1.15** Es sei  $(X, T^{\mathbb{Z}^d})$  ein kompaktes topologisches dynamisches System. Eine endliche offene Überdeckung  $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i = 1, \dots, s\}$  von  $X$  heißt **Generator** für  $T$ , wenn für jede Auswahl von Mengen  $A_z \in \mathfrak{U}$  ( $z \in \mathbb{Z}^d$ ) der Durchschnitt

$$\bigcap_{z \in \mathbb{Z}^d} T^{-z}(\overline{A_z})$$

höchstens einen Punkt enthält.

(Dabei bezeichnet  $\overline{A}$  den topologischen Abschluß einer Menge  $A \subset X$ .)

**Satz 1.16 (für  $d = 1$  in [35])** Besitzt das topologische dynamische System  $(X, T^{\mathbb{Z}^d})$  einen Generator, so existieren eine Zahl  $k \in \mathbb{N}$  und eine abgeschlossene translationsinvariante Teilmenge  $\Omega \subset Y := \{1, \dots, k\}^{\mathbb{Z}^d}$  derart, daß  $(X, T^{\mathbb{Z}^d})$  topologischer Faktor von  $(\Omega, \sigma^{\mathbb{Z}^d})$  ist.

(Dabei bezeichnet  $\sigma^a$  für jedes  $a \in \mathbb{Z}^d$  die Translation um den Vektor  $a$  auf  $Y$ . Eine Teilmenge  $\Omega \subset Y$  heißt translationsinvariant, wenn  $\sigma^a(\Omega) = \Omega$  für jedes  $a \in \mathbb{Z}^d$  gilt. Der Produktraum  $Y = \{1, \dots, k\}^{\mathbb{Z}^d}$  wird mit der Produkttopologie der diskreten Topologie auf  $\{1, \dots, k\}$  versehen.)

**Beweisidee:** Ist  $\mathfrak{U} = \{U_1, \dots, U_k\}$  ein Generator für  $T$ , so definiert man  $Y := \{1, \dots, k\}^{\mathbb{Z}^d}$  und

$$\Omega := \{y \in Y \mid \bigcap_{z \in \mathbb{Z}^d} T^{-z}(\overline{U_{y_z}}) \neq \emptyset\}.$$

Da  $\mathfrak{U}$  Generator für  $T$  ist, wird durch

$$\psi(y) = x \iff \bigcap_{z \in \mathbb{Z}^d} T^{-z}(\overline{U_{y_z}}) = \{x\} \quad (y \in Y)$$

eine Abbildung  $\psi : \Omega \rightarrow X$  definiert.

Wegen  $\bigcap_{z \in \mathbb{Z}^d} T^{-z}(\overline{U_{y_{z-a}}}) = T^a \bigcap_{z \in \mathbb{Z}^d} T^{-z}(\overline{U_{y_z}})$  für jedes  $y \in \Omega$  und jedes  $a \in \mathbb{Z}^d$ , ist mit  $y \in \Omega$

auch  $\sigma^a y$  ein Element von  $\Omega$ . D. h.,  $\Omega$  ist translationsinvariant.

Man überlegt sich weiter, daß  $\Omega$  abgeschlossen in der Produkttopologie der diskreten Topologie von  $\{1, \dots, k\}$  auf  $Y = \{1, \dots, k\}^{\mathbb{Z}^d}$  ist.

Da  $\mathfrak{U}$  eine Überdeckung von  $X$  ist, existiert für jedes Element  $x \in X$  eine Familie  $\{y_z\}_{z \in \mathbb{Z}^d} \in Y$  von Indizes mit  $T^z(x) \in U_{y_z}$  ( $\forall z \in \mathbb{Z}^d$ ). Für  $y := (y_z)_{z \in \mathbb{Z}^d}$  gilt also  $\{x\} \subset \bigcap_{z \in \mathbb{Z}^d} T^{-z}(\overline{U_{y_z}})$ . Folglich ist  $\psi(y) = x$ , das heißt,  $\psi$  ist surjektiv. Weiterhin ist  $\psi$  eine stetige Abbildung.

Für  $(\Omega, \sigma^{\mathbb{Z}^d}) \geq (X, T^{\mathbb{Z}^d})$  ist noch die Gültigkeit von  $\psi \circ \sigma^a = T^a \circ \psi$  für alle  $a \in \mathbb{Z}^d$  zu zeigen. Für beliebiges  $y \in Y$  gilt

$$T^a(\psi(y)) = T^a \bigcap_{z \in \mathbb{Z}^d} T^{-z}(\overline{U_{y_z}}) = \bigcap_{z \in \mathbb{Z}^d} T^{-z}(\overline{U_{y_{z-a}}}) = \psi(\sigma^a y),$$

womit die Aussage des Satzes bewiesen ist. ■

**Bemerkung 1.17** 1. Ein topologisches dynamisches System  $(\Omega, \sigma^{\mathbb{Z}^d})$  mit einer abgeschlossenen translationsinvarianten Teilmenge  $\Omega \subset S^{\mathbb{Z}^d}$  ( $|S| < \infty$ ) und der Einschränkung des Shifts  $\sigma$  als Wirkung der Gruppe  $(\mathbb{Z}^d, +)$  auf  $\Omega$  wird  **$\mathbb{Z}^d$ -Subshift** genannt.

2. Die Aussage des Satzes 1.16 begründet ein großes Interesse an der Klassifizierung von  $\mathbb{Z}^d$ -Subshifts als Modellsysteme für topologische dynamische Systeme mit Generator.

Motiviert durch Fragestellungen der statistischen Mechanik ist die Untersuchung von  $\mathbb{Z}^d$ -Subshifts folgender Struktur von Interesse:

- (a) Jedem Gitterpunkt  $z \in \mathbb{Z}^d$  sei ein Zustand in Form eines Elementes einer endlichen Menge  $S$  zugeordnet (z. B. Spin, Vorhandensein eines Teilchens, ...).
- (b) Die Zuordnung eines Zustandes zu einem Gitterpunkt unterliegt gewissen Restriktionen bezüglich der Zustände auf endlich vielen benachbarten Gitterpunkten.
- (c) Die Anzahl der für einen Gitterpunkt zu berücksichtigenden Restriktionen ist endlich.
- (d) Das zu berücksichtigende Restriktionensystem ist invariant gegenüber Verschiebung des Gitters.

$\mathbb{Z}^d$ -Subshifts mit diesen Eigenschaften ordnen sich in die von D. Ruelle begründete Theorie der Konfigurationenräume ein und werden  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenräume (oder  $\mathbb{Z}^d$ -Subshifts endlichen Typs) genannt.

$\mathbb{Z}^1$ -Subshifts spielen in der Theorie dynamischer Systeme eine wichtige Rolle, zum Beispiel bei der Untersuchung von Systemen hyperbolischen Typs wie Anosov- bzw. U-Diffeomorphismen, und finden Anwendung in der Information- und Codierungstheorie (siehe [4], [41]) sowie der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Bernoulli- und Markovshift, siehe [44], [41], [16]).

Der Begriff des  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenraumes wird im folgenden Abschnitt 1.2 definiert. Daran schließen sich Überlegungen zu grundlegenden Eigenschaften und Beschreibungsmöglichkeiten dieser Systeme an, die an Beispielen erläutert werden.

Die im Mittelpunkt dieser Arbeit stehenden Parkettsysteme über dem Gitter  $\mathbb{Z}^d$  ergeben sich als

eine natürliche Weiterentwicklung der  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenräume zur Beschreibung von Gittermodellen mit einer „molekularen“ Struktur. Nach Satz 1.33 bilden diese Systeme eine (echte) Teilklasse der Familie der  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenräume.

## 1.2 $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsysteme als spezielle Konfigurationenräume

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist das Gitter  $\mathbb{Z}^d$  der **Dimension**  $d \in \mathbb{N}$ .

**Definition 1.18 (D.Ruelle, [55])** Es sei  $S = \{1, \dots, s\}$  eine endliche Menge von **Farben**, **Symbolen** oder **Zuständen**, die **Alphabet** genannt werden soll und  $\mathcal{F}$  ein nichtleeres lokal-endliches System von endlichen Teilmengen  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$  mit der Eigenschaft

$$[\Lambda \in \mathcal{F}] \implies [\Lambda + a \in \mathcal{F}, \forall a \in \mathbb{Z}^d] \quad (\text{Translationsinvarianz von } \mathcal{F}). \quad (1.5)$$

(Dabei ist  $\mathcal{F}$  genau dann lokal-endlich, wenn für jedes  $x$  höchstens endlich viele Elemente  $\Lambda \in \mathcal{F}$  mit  $x \in \Lambda$  existieren.) Weiter sei eine Familie von Mengen  $\bar{\Omega}_\Lambda \subset S^\Lambda$  ( $\Lambda \in \mathcal{F}$ ) mit

$$\bar{\Omega}_{\Lambda+a} = \{\eta = (\xi_{x-a})_{x \in \Lambda+a} \in S^{\Lambda+a} \mid \xi = (\xi_z)_{z \in \Lambda} \in \bar{\Omega}_\Lambda\} \quad (\text{Translationsinvarianz von } (\bar{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{F}})$$

$\forall \Lambda \in \mathcal{F}, \forall a \in \mathbb{Z}^d$ , gegeben. Wir bezeichnen für jedes  $\xi = (\xi_z)_{z \in \mathbb{Z}^d} \in S^{\mathbb{Z}^d}$  und jede Teilmenge  $A \subset \mathbb{Z}^d$  mit dem Symbol  $\xi|_A := (\xi_z)_{z \in A}$  die Projektion von  $\xi$  auf  $A$ .

Die Menge

$$\Omega := \{\xi \in S^{\mathbb{Z}^d} \mid \xi|_\Lambda \in \bar{\Omega}_\Lambda, \forall \Lambda \in \mathcal{F}\} \quad (1.6)$$

wird  **$\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenraum** genannt.

Bezeichnung:  $\Omega = (\mathbb{Z}^d, S, \mathcal{F}, (\bar{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{F}})$ .

**Beispiel 1.19** Ein zwei-dimensionales Gittergas mit 2 Teilchensorten und der Bedingung, daß jedes Teilchen einer Sorte vollständig von Teilchen der anderen Sorte umgeben ist („hard-core“-Wechselwirkung), kann durch den folgenden  $\mathbb{Z}^2$ -Punktkonfigurationenraum  $\Omega$  beschrieben werden: dazu sei  $S := \{1, 2\}$  und  $\mathcal{F} := \{\Lambda_0 + z \mid z \in \mathbb{Z}^d\}$  mit  $\Lambda_0 := \{0, e_1, e_2, -e_1, -e_2\}$ . Die angegebene Restriktion hinsichtlich der Teilchenbelegung der nächsten Nachbarpunkte eines mit einem gewissen Teilchen belegten Gitterpunktes kann durch

$$\bar{\Omega}_{\Lambda_0+z} = \{\xi \in S^{\Lambda_0+z} \mid [\xi_z = k \ (k \in S)] \implies [\xi_x = k+1 \pmod{2}, \forall x \in \Lambda_0 + z, x \neq z]\} \quad (z \in \mathbb{Z}^2)$$

zum Ausdruck gebracht werden. Man überlegt sich, daß damit jede Menge  $\bar{\Omega}_{\Lambda_0+z}$  ( $z \in \mathbb{Z}^2$ ) aus genau zwei Einfärbungen von  $\Lambda_0 + z$  besteht, diese sind:

$$\eta^{(1)} = \begin{array}{c} \bullet_2 \\ \bullet_2 \end{array} \quad \text{und} \quad \eta^{(2)} = \begin{array}{c} \bullet_1 \\ \bullet_1 \end{array}$$

Der  $\mathbb{Z}^2$ -Punktkonfigurationenraum  $\Omega = (\mathbb{Z}^2, S, \mathcal{F}, (\bar{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{F}})$  besteht dann aus den zwei Konfigurationen  $\xi$  und  $\sigma^{e_1}\xi$ , wobei für jedes  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$  gilt

$$\xi_z = \begin{cases} 1 & : z_1 + z_2 = 0 \pmod{2} \\ 2 & : z_1 + z_2 = 1 \pmod{2} \end{cases}$$

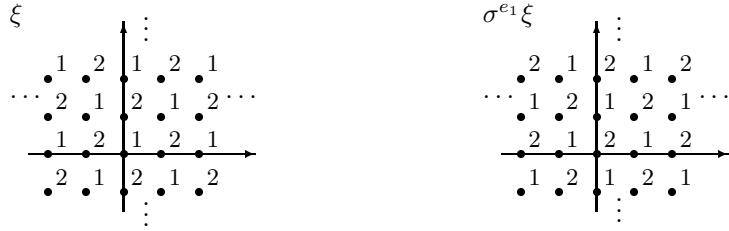


Abbildung 1.1: Ausschnitte der beiden Konfigurationen des  $\mathbb{Z}^2$ -Punktkonfigurationenraumes  $\Omega$  zur Modellierung eines Gittergases

(vgl. Abbildung 1.1).

**Bemerkung 1.20** 1. Ein Element  $\xi = (\xi_z)_{z \in \mathbb{Z}^d} \in S^{\mathbb{Z}^d}$  wird als **Färbung des Gitters  $\mathbb{Z}^d$**  mit Symbolen aus  $S$  angesehen. Für eine endliche Menge  $B \subset \mathbb{Z}^d$  heißt die Projektion  $\xi|_B = (\xi_z)_{z \in B} \in S^B$  **Block** mit der **Basis**  $B$  oder **Färbung** von  $B$ .

Damit ist eine Färbung  $\xi \in S^{\mathbb{Z}^d}$  des Gitters  $\mathbb{Z}^d$  genau dann ein Element des  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenraumes  $\Omega = (\mathbb{Z}^d, S, \mathcal{F}, (\bar{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{F}})$ , wenn jeder Block  $\xi|_\Lambda$  mit der Basis  $\Lambda \in \mathcal{F}$  zur Menge  $\bar{\Omega}_\Lambda$  gehört.

Die Elemente von  $\Omega$  werden **Konfigurationen** genannt.

2. Man beachte, daß  $\Omega = (\mathbb{Z}^d, S, \mathcal{F}, (\bar{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{F}}) = \emptyset$  möglich ist. Ändert man beispielsweise im zwei-dimensionalen Punktkonfigurationenraum  $\Omega$  aus Beispiel 1.19 die Menge  $\Lambda_0$  ab zu  $\Lambda'_0 := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid |x_i| \leq 1, i = 1, 2\}$  und verwendet analoge Restriktionen

$$\bar{\Omega}_{\Lambda'_0 + z} = \{\xi \in S^{\Lambda'_0 + z} \mid [\xi_z = k \ (k \in S)] \implies [\xi_x = k + 1 \pmod{2}, \forall x \in \Lambda'_0 + z, x \neq z]\}$$

$(z \in \mathbb{Z}^d)$ , so folgt  $\Omega = (\mathbb{Z}^2, S, \mathcal{F}', (\bar{\Omega}_{\Lambda'})_{\Lambda' \in \mathcal{F}'}) = \emptyset$ .

3. Für einen nichtleeren Punktkonfigurationenraum  $\Omega = (\mathbb{Z}^d, S, \mathcal{F}, (\bar{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{F}})$  können weitere Mengensysteme  $\mathcal{F}'$  und  $(\bar{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda' \in \mathcal{F}'}$  derart existieren, daß die Konfigurationen von  $\Omega' = (\mathbb{Z}^d, S, \mathcal{F}', (\bar{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda' \in \mathcal{F}'})$  und  $\Omega$  identisch sind.

So kann der in Beispiel 1.19 untersuchte  $\mathbb{Z}^2$ -Punktkonfigurationenraum  $\Omega = \{\xi, \sigma^{e_1}\xi\}$  auch als Punktkonfigurationenraum  $\Omega'$  mit  $\mathcal{F}' = \{\{x, x + e_1\}, \{x, x + e_2\} \mid x \in \mathbb{Z}^2\}$  und den Restriktionen  $\bar{\Omega}'_{\{x, x + e_1\}} = \{(1, 2), (2, 1)\}$ ,  $\bar{\Omega}'_{\{x, x + e_2\}} = \{(1, 2), (2, 1)\}$  ( $x \in \mathbb{Z}^2$ ) beschrieben werden.

**Bemerkung 1.21** 1. Jeder  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenraum  $\Omega = (\mathbb{Z}^d, S, \mathcal{F}, (\bar{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{F}})$  ist abgeschlossen in der Produkttopologie der diskreten Topologie auf  $S^{\mathbb{Z}^d}$ , also kompakt in der Spurtopologie auf  $\Omega$ , die vom System der Subbasismengen

$$_x[\omega] := \{\xi = (\xi_z)_{z \in \mathbb{Z}^d} \in \Omega \mid \xi_x = \omega\} \quad (\omega \in S, x \in \mathbb{Z}^d) \quad (1.7)$$

erzeugt wird.

2. Die folgenden beiden Metriken sind topologisch äquivalent und mit der Produkttopologie auf  $S^{\mathbb{Z}^d}$  verträglich:

(a) Mit  $\mathfrak{Z}_l := \{z \in \mathbb{Z}^d \mid \max_{i=1,\dots,d} |z_i| = l\}$  ( $l = 0, 1, \dots$ ) und  $\bar{d}(u, v) = \begin{cases} 1 & : u = v \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$   
 $(u, v \in S)$  sei für beliebige Konfigurationen  $\xi, \eta \in S^{\mathbb{Z}^d}$

$$d_1(\xi, \eta) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{|\mathfrak{Z}_l|^3} \sum_{z \in \mathfrak{Z}_l} \bar{d}(\xi_z, \eta_z) \quad (1.8)$$

(b) Für  $\xi, \eta \in S^{\mathbb{Z}^d}$  und festen Parameter  $x \in (0, 1)$  sei

$$d_2^x(\xi, \eta) := \begin{cases} 0 & : \xi = \eta \\ x^{\min\{|z| : z \in \mathbb{Z}^d, \xi_z \neq \eta_z\}} & : \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.9)$$

**Definition 1.22** Für jedes  $a \in \mathbb{Z}^d$  wird die Abbildung  $\sigma^a : S^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow S^{\mathbb{Z}^d}$ , die durch  $(\sigma^a \xi)_z := \xi_{z-a}$  ( $\forall z \in \mathbb{Z}^d, \xi \in S^{\mathbb{Z}^d}$ ) definiert ist, als **Shift** um den Vektor  $a \in \mathbb{Z}^d$  bezeichnet.

Die Wirkung  $\sigma : a \mapsto \sigma^a$  der Gruppe  $(\mathbb{Z}^d, +)$  auf  $S^{\mathbb{Z}^d}$  wird **Shift-Wirkung** (von  $(\mathbb{Z}^d, +)$ ) auf  $S^{\mathbb{Z}^d}$  genannt.

**Bemerkung 1.23** Wegen der Translationsinvarianz von  $\mathcal{F}$  und  $(\bar{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{F}}$  ist jeder  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenraum  $\Omega = (\mathbb{Z}^d, S, \mathcal{F}, (\bar{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{F}})$  invariant unter der Shift-Wirkung  $\sigma^{\mathbb{Z}^d}$ . D. h.,  $(\Omega, \sigma^{\mathbb{Z}^d}|_\Omega)$  bildet ein kompaktes topologisches dynamisches System im Sinne der Definition 1.1. Wir benutzen im folgenden den Begriff  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenraum auch zur Bezeichnung dieses dynamischen Systems.

**Bemerkung 1.24** Bei der Beschreibung von Gittersystemen, deren wesentliche Bestandteile „Moleküle“ verschiedener Formen sind, wie sie beispielsweise zur Modellierung von Flüssigkristallen auftreten (vgl. [29]), als  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenräume entstehen schon für den Fall geometrisch einfacher „Molekülfommen“ relativ große Alphabete bzw. relativ komplizierte Restriktionensysteme.

Sei beispielsweise ein System über dem Gitter  $\mathbb{Z}^2$  als Punktkonfigurationenraum zu beschreiben, dessen Konfigurationen aus Anordnungen von „Molekülen“ der Formen  $G_1 = \begin{smallmatrix} & \bullet \\ \text{---} & \text{---} \\ & 0 \end{smallmatrix}$ ,  $G_2 = \begin{smallmatrix} & \bullet \\ & \text{---} \\ 0 & \bullet \end{smallmatrix}$ ,

$G_3 = \begin{smallmatrix} & \bullet \\ \text{---} & \text{---} \\ 0 & \bullet \end{smallmatrix}$ ,  $G_4 = \begin{smallmatrix} & \bullet \\ 0 & \text{---} \\ & \text{---} \end{smallmatrix}$  auf dem Gitter derart bestehen, daß dieses vollständig und ohne Überlappungen überdeckt ist. (Abbildung 1.2 zeigt einen Ausschnitt einer solchen Überdeckung des Gitters  $\mathbb{Z}^2$ .)

Wir benutzen dazu zum Beispiel die Menge  $S := \{(G_i, y) \mid y \in G_i, i = 1, \dots, 4\}$  als Alphabet des Punktkonfigurationenraumes  $\Omega$  und ordnen jedem Gitterpunkt  $x \in \mathbb{Z}^2$  die Form  $G_i$  ( $i \in \{1, \dots, 4\}$ ) des eindeutig bestimmten Moleküls, welches  $x$  überdeckt, und die relative Lage von  $x$  auf diesem Molekül zu. Das Mengensystem  $\mathcal{F}$  und die Restriktionen  $\bar{\Omega}_\Lambda$ ,  $\Lambda \in \mathcal{F}$ , sind so zu wählen, daß die Bedingung der Überschneidungsfreiheit der Moleküle einer Gitterüberdeckung zum Ausdruck gebracht wird.

Mit  $\mathcal{F} = \{\Lambda_x \mid x \in \mathbb{Z}^2\}$  und  $\Lambda_x := \{x + z : z = (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2, |z_i| \leq 1, i = 1, 2\}$  ( $x \in \mathbb{Z}^2$ ) ist gesichert, daß für jedes  $x \in \mathbb{Z}^2$  alle weiteren Punkte, die von dem auf  $x$  liegenden Molekül bedeckt

werden, zur Menge  $\Lambda_x$  gehören. Die Restriktionenmengen

$$\Omega_{\Lambda_x} := \{ \xi \in S^{\Lambda_x} \mid [\xi_x = (G_i, y) \wedge x' \text{ wird vom Molekül } G_i + x - y \text{ belegt}] \implies [\xi_{x'} = (G_i, y + x' - x)] \}$$

bringen die Bedingung zum Ausdruck, daß sich die Färbung zweier Punkte  $x, x'$ , die vom gleichen Molekül  $G = G_i + x - y$  belegt sind, nur in der 2. Koordinate unterscheiden, und zwar gerade um ihre Verschiebung  $x' - x$ .

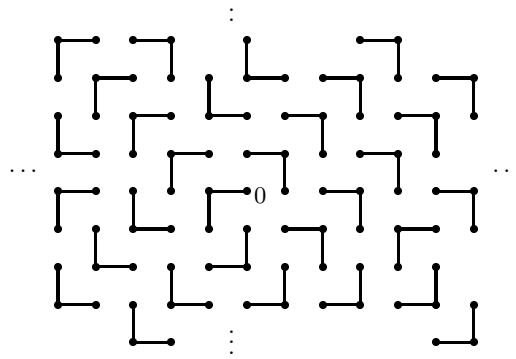


Abbildung 1.2: Ausschnitt einer Überdeckung des Gitters  $\mathbb{Z}^2$  durch Moleküle in Winkelform.

Die Beschreibung dieses einfachen molekularen Gittermodells als ein  $\mathbb{Z}^2$ -Punktkonfigurationenraum führt auf ein Alphabet  $S$  der Kardinalität  $|S| = 12$  und relativ umfangreiche Restriktionenmengen  $\bar{\Omega}_{\Lambda_x}$  ( $x \in \mathbb{Z}^2$ ). Es erscheint somit sinnvoll, einen neuen Konfigurationenraum zu definieren, der die Struktur molekularer Gittermodelle effektiver beschreibt. Ein solcher Raum wurde von H. Michel unter dem Begriff  $\mathbb{Z}^d$ -Mengengittersystem eingeführt (siehe [43]).

**Definition 1.25** 1. Es sei  $\mathcal{G}_0$  eine nichtleere endliche Familie endlicher Teilmengen  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{Z}^d$  mit den Eigenschaften

- (a) jedes  $G \in \mathcal{G}_0$  enthält  $0 \in \mathbb{Z}^d$  an erster Stelle bezüglich der lexikographischen Ordnung  $\prec$  auf  $\mathbb{Z}^d$ ;
- (b) die Menge  $\pi(\mathcal{G}_0)$  aller Familien  $\mathcal{P} = (G_i)_{i \in I \subset \mathbb{N}}$  von Mengen  $G_i \in \mathcal{G} := \mathcal{G}_0 + \mathbb{Z}^d$  ( $\forall i \in I$ ) mit
  - (i)  $G_i \cap G_j = \emptyset$  ( $i, j \in I, i \neq j$ )
  - (ii)  $\bigcup_{i \in I} G_i = \mathbb{Z}^d$ .
ist nicht leer;
- (c) für jedes  $G \in \mathcal{G}_0$  existiert ein  $\mathcal{P} \in \pi(\mathcal{G}_0)$  mit  $G \in \mathcal{P}$ .

Weiter sei für jedes  $G \in \mathcal{G}_0$  eine endliche Menge  $\emptyset \neq \Omega_G$  von **Farben** oder **Zuständen** gegeben. Mit der Festlegung  $\Omega_H := \Omega_G$  für  $H = G + a$  ( $a \in \mathbb{Z}^d, G \in \mathcal{G}_0$ ) heißt die Menge

$$\Omega^* := \bigcup_{\mathcal{P} \in \pi(\mathcal{G}_0)} \prod_{H \in \mathcal{P}} \Omega_H \quad (1.10)$$

ein  $\mathbb{Z}^d$ -**Parkettsystem**. Bezeichnung:  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0, (\Omega_G)_{G \in \mathcal{G}_0})$ .

2. Die Menge  $\mathcal{G}_0$  wird **Proto-Baustein-Menge** des Parkettsystems  $\Omega^*$  genannt. Die Elemente  $\mathcal{P} \in \pi(\mathcal{G}_0)$  heißen **Parkettierungen** des Gitters  $\mathbb{Z}^d$  mit der Proto-Baustein-Menge  $\mathcal{G}_0$ . Als **Bausteine** werden die Elemente  $H \in \mathcal{G}$  einer Parkettierung  $\mathcal{P} \in \pi(\mathcal{G}_0)$  bezeichnet.

**Bemerkung 1.26** 1. Die Bezeichnung  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystem findet man beispielsweise bei W.P. Gabriel ([20]). Die Begriffe  $\mathbb{Z}^d$ -Mengengittersystem oder  $\mathbb{Z}^d$ -Mengenkonfigurationenraum (in [43],[26]) für Parkettsysteme über dem Gitter werden insbesondere zur Hervorhebung des Unterschiedes zum Begriff des  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenraumes verwendet.

2. Die Forderung an die Proto-Bausteine eines Parkettsystems, den Nullpunkt an lexikographisch erster Stelle zu enthalten, stellt keine wesentliche Einschränkung dar. Allgemeiner (vgl. insbesondere die ursprüngliche Definition von H. Michel in [43]) kann man von einer nichtleeren lokal-endlichen Familie  $\mathcal{G}$  endlicher Teilmengen  $G \subset \mathbb{Z}^d$  ausgehen, die zusätzlich translationsinvariant ist, d. h. die Eigenschaft  $G + a \in \mathcal{G}, \forall G \in \mathcal{G}, \forall a \in \mathbb{Z}^d$  besitzt. Jedes Element  $G \in \mathcal{G}$  besitzt dann eine eindeutige Darstellung  $G = G_0 + z$  ( $z \in \mathbb{Z}^d$ ) derart, daß  $0 \in \mathbb{Z}^d$  in  $G_0$  das bezüglich der lexikographischen Ordnung erste Element ist. Wegen der Lokal-Endlichkeit von  $\mathcal{G}$  gibt es nur endlich viele verschiedene Mengen  $G_0$  mit dem Nullpunkt an erster Stelle und  $G_0 + z \in \mathcal{G}$  für  $z \in \mathbb{Z}^d$ .
3. Ein Element  $\xi^*$  eines gegebenen  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystems  $\Omega^*$  ist charakterisiert durch eine Parkettierung  $\mathcal{P} \in \pi(\mathcal{G}_0)$  und die Einfärbung der Bausteine von  $\mathcal{P}$ . Wir benutzen deshalb die Schreibweise  $\xi^* = (\xi_H^*)_{H \in \mathcal{P}}$  mit  $\xi_H^* \in \Omega_H$  ( $H \in \mathcal{P}$ ).
4. Falls  $|\Omega_G| = 1 \forall G \in \mathcal{G}_0$  gilt, so wird das  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0, (\Omega_G)_{G \in \mathcal{G}_0})$  mit der Menge  $\pi(\mathcal{G}_0)$  aller Parkettierungen mit Bausteinen aus  $\mathcal{G}_0$  identifiziert und abkürzend  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0)$  geschrieben.
5. Die bei der Definition des Begriffs Parkettsystem gemachte Voraussetzung  $\pi(\mathcal{G}_0) \neq \emptyset$  ist wegen der Unentscheidbarkeit des Tiling-Problems in der Ebene (und damit auch in jedem Raum der Dimension  $d > 2$ ) nicht durch einen allgemeinen Algorithmus für alle möglichen Mengen  $\mathcal{G}_0$  zu überprüfen. (Vgl. [54],[25], [20] zur Unentscheidbarkeitsproblematik.)

**Definition 1.27** Es sei  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0, (\Omega_G)_{G \in \mathcal{G}_0})$  ein  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystem.

1. Eine endliche Familie  $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_t\}$  ( $t \in \mathbb{N}$ ) von Bausteinen  $H_i \in \mathcal{G}$  ( $i = 1, \dots, t$ ) derart, daß eine Parkettierung  $\mathcal{P} \in \pi(\mathcal{G}_0)$  mit  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$  existiert, wird eine **Teilparkettierung** in  $\Omega^*$  genannt.

Die Elemente der Teilparkettierung seien gemäß ihrer Anordnung in Bezug auf die lexikographische Ordnung  $\prec$  in  $\mathbb{Z}^d$  numeriert, d. h. mit  $H_i = \sigma^{a(i)} G_{j(i)}$  ( $a(i) \in \mathbb{Z}^d$ ,  $G_{j(i)} \in \mathcal{G}_0$ ,  $i = 1, \dots, t$ ) gilt  $a(1) \prec \dots \prec a(t)$ .

2. Für eine beliebige endliche Teilmenge  $A \subset \mathbb{Z}^d$  und eine Parkettierung  $\mathcal{P} \in \pi(\mathcal{G}_0)$  heißt  $\mathcal{P}_{|A} := \{H \in \mathcal{P} \mid H \cap A \neq \emptyset\}$  die **von A erzeugte Teilparkettierung**.

Ist  $\xi^*$  eine Konfiguration in  $\Omega^*$  und  $A \subset \mathbb{Z}^d$  eine endliche Teilmenge, so wird  $\xi_{|A}^* := (\xi_H^*)_{H \in \mathcal{P}_{|A}}$  die **von  $A$  erzeugte Teilkonfiguration** genannt.

3. Für  $\xi^* \in \Omega^*$  und  $A \subset \mathbb{Z}^d$ ,  $|A| < \infty$  heißt

$$C(\xi_{|A}^*) := \{\eta^* \in \Omega^* \mid \xi_{|A}^* \subset \eta^*\} \quad (1.11)$$

der **von  $\xi_{|A}^*$  erzeugte Zylinder** in  $\Omega^*$ .

**Bemerkung 1.28** Ist  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0, (\Omega_G)_{G \in \mathcal{G}_0})$  ein  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystem, so definiert die Familie von Subbasismengen

$$G[\omega] := \{\xi^* = (\xi_H^*)_{H \in \mathcal{P}} \mid G \in \mathcal{P} \in \pi(\mathcal{G}_0), \xi_G^* = \omega\} \quad (G \in \mathcal{G}, \omega \in \Omega_G) \quad (1.12)$$

eine Topologie auf  $\Omega^*$ .

**Definition 1.29** Es sei  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0, (\Omega_G)_{G \in \mathcal{G}_0})$  ein  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystem. Für jeden Vektor  $a \in \mathbb{Z}^d$  wird die Abbildung  $\sigma^a : \Omega^* \rightarrow \Omega^*$ , die für  $\xi^* = (\xi_H^*)_{H \in \mathcal{P}} \in \Omega^*$  durch  $\sigma^a(\xi^*) := (\xi_{K-a}^*)_{K \in \mathcal{R}}$  mit  $\mathcal{R} := \mathcal{P} + a$  definiert ist, als **Shift** um den Vektor  $a$  bezeichnet. Die Wirkung  $\sigma : a \mapsto \sigma^a$  von  $(\mathbb{Z}^d, +)$  auf  $\Omega^*$  wird **Shift-Wirkung** auf  $\Omega^*$  genannt. Wir verwenden auch die Schreibweise  $\sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega^*}$  zur Hervorhebung des zugrundeliegenden Parkettsystems  $\Omega^*$ .

**Bemerkung 1.30** Die von endlichen Teilkonfigurationen  $\xi_{|A}^*$  in einem Parkettsystem  $\Omega^*$  erzeugten Zylinder sind offene Mengen in der durch die Subbasismengen (1.12) definierten Topologie.

Für jede Zahl  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  sei

$$\mathcal{Z}(n) := \{z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{Z}^d : |z_i| \leq n, \quad \forall i = 1, \dots, n\}$$

der im Nullpunkt zentrierte Würfel der Kantenlänge  $2n + 1$  in  $\mathbb{Z}^d$ .

Weiter bezeichne für ein  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystem  $\Omega^*$  das Symbol  $\mathcal{M}_0(\Omega^*, n) = \{\xi_{|\mathcal{Z}(n)}^* \mid \xi^* \in \Omega^*\}$  die Menge aller von  $\mathcal{Z}(n)$  erzeugten Teilkonfigurationen in  $\Omega^*$ . Dann bildet die Familie  $\{C(\xi_{|\mathcal{Z}(n)}^*) \mid \xi_{|\mathcal{Z}(n)}^* \in \mathcal{M}_0(\Omega^*, n), n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$  eine Umgebungsbasis der in Definition 1.28 eingeführten Topologie auf  $\Omega^*$ .

Ist  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0)$  ein Parkettsystem ohne zusätzliche Einfärbungen der Bausteine, so ist  $\mathcal{M}_0(\Omega^*, n) := \{\mathcal{P}_{|\mathcal{Z}(n)} \mid \mathcal{P} \in \Omega^*\}$  die Menge aller vom zentrierten Würfel  $\mathcal{Z}(n)$  erzeugten Teilparkettierungen in  $\Omega^*$ . Analog bezeichnet für  $\mathcal{P} \in \Omega^*$  und endliche Menge  $A \subset \mathbb{Z}^d$ , das Symbol  $C(\mathcal{P}_{|A}) := \{\mathcal{R} \in \Omega^* \mid \mathcal{P}_{|A} \subset \mathcal{R}\}$  den von der Teilparkettierung  $\mathcal{P}_{|A}$  erzeugten Zylinder in  $\Omega^*$ .

**Beispiel 1.31** Das in Bemerkung 1.24 betrachtete Gittersystem aus allen überschneidungsfreien Überdeckungen des Gitters  $\mathbb{Z}^2$  mit Verschiebungen der Winkel-Moleküle  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , kann als Parkettsystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \mathcal{G}_0, (\Omega_G)_{G \in \mathcal{G}_0})$  mit  $\mathcal{G}_0 = \{G_i, i = 1, \dots, 4\}$  und  $|\Omega_{G_i}| = 1$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) beschrieben werden. Die von  $A = \mathcal{Z}(1)$  erzeugte Teilparkettierung der in Abbildung 1.2 dargestellten Parkettierung  $\mathcal{P} \in \pi(\mathcal{G}_0) \equiv \Omega^*$  enthält 5 Bausteine (siehe Abbildung 1.3(a)). Ein Element  $\mathcal{R} \neq \mathcal{P}$  des von  $\mathcal{P}_{|\mathcal{Z}(1)}$  erzeugten Zylinders  $C(\mathcal{P}_{|\mathcal{Z}(1)})$  ist in Abbildung 1.3(b) skizziert.

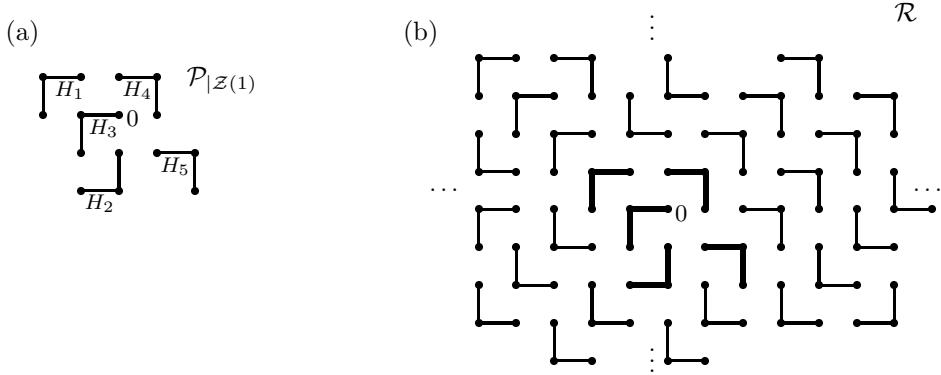


Abbildung 1.3: (a) Die von  $Z(1)$  erzeugte Teilparkettierung in  $\mathcal{P}$ . (b) Eine Parkettierung  $\mathcal{R} \in C(\mathcal{P}|_{Z(1)})$ .

**Bemerkung 1.32** Aus der Definition des Begriffs  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystem folgt die Invarianz jedes Parkettsystems  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0, (\Omega_G)_{G \in \mathcal{G}_0})$  unter der Shift-Wirkung. Im Sinne der Definition 1.1 bildet  $(\Omega^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega^*})$  ein topologisches dynamisches System, welches im folgenden selbst als  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystem bezeichnet wird.

Die Kompaktheit von  $\Omega^*$  ist eine unmittelbare Konsequenz aus dem folgenden Satz von Michel über die Relation zwischen Parkettsystemen und Punktkonfigurationenräumen auf dem Gitter  $\mathbb{Z}^d$ .

**Satz 1.33 (H. Michel,[43])** Ist  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0, (\Omega_G)_{G \in \mathcal{G}_0})$  ein  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystem, so existieren ein  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenraum  $\Omega = (\mathbb{Z}^d, S, \mathcal{F}, (\bar{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{F}})$  und ein Homöomorphismus  $\Phi : \Omega^* \rightarrow \Omega$  derart, daß

$$\sigma^a \circ \Phi = \Phi \circ \sigma^a \quad (\forall a \in \mathbb{Z}^d).$$

Das heißt, zu jedem  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystem existiert ein topologisch konjugierter  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenraum.

**Beispiel 1.34** Die dem Beweis des Satzes 1.33 zugrundeliegende Konstruktionsidee soll am Beispiel des zwei-dimensionalen Parkettsystems  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{G_1, G_2\}, (\Omega_{G_i})_{i \in \{1,2\}})$  mit  $G_i = \{0, e_i\}$  ( $i = 1, 2$ ) und  $\Omega_{\{0, e_1\}} = \Omega_{\{0, e_2\}} = \{0, 1\}$  verdeutlicht werden. (Ein solches Parkettsystem kann zum Beispiel zur Beschreibung eines der in [29] betrachteten Gittermodelle für zwei-dimensionale Flüssigkristalle verwendet werden.) In Abbildung 1.4 (a) ist ein Ausschnitt einer Parkettierung aus  $\pi(\mathcal{G}_0)$  dargestellt.

Wir bilden die endliche Menge

$$S := \{(y, G_i, \omega) \mid y \in G_i, i = 1, 2, \omega \in \{0, 1\}\}$$

aller Tripel, bestehend aus einem Proto-Baustein  $G_i$  von  $\Omega^*$ , einem Punkt  $y$  dieses Bausteines und einer seiner möglichen Farben  $\omega$ . Es gilt  $|S| = 8$ , da jeder der beiden Proto-Bausteine  $G_i$  ( $i = 1, 2$ )

aus 2 Gitterpunkten besteht und 2 Einfärbungen besitzt.

Zur Konstruktion einer Abbildung  $\Phi : \Omega^* \rightarrow S^{\mathbb{Z}^2}$  werden die folgenden beiden Abbildungen  $\tau : \mathbb{Z}^2 \times \pi(\mathcal{G}_0) \rightarrow \mathcal{G}_0$  und  $\rho : \mathbb{Z}^2 \times \pi(\mathcal{G}_0) \rightarrow \mathbb{Z}^2$  herangezogen, die durch

$$\left. \begin{array}{l} \tau(x, \mathcal{P}) := G_i \\ \rho(x, \mathcal{P}) := z \end{array} \right\} \iff x \in G_i \in \mathcal{P} \text{ und } G = G_i + z$$

für jedes  $x \in \mathbb{Z}^2$  und jede Parkettierung  $\mathcal{P} \in \pi(\mathcal{G}_0)$  definiert sind. Ist  $\xi^* = (\xi_G^*)_{G \in \mathcal{P}}$  gegeben, so setzen wir als Färbung des Punktes  $x \in \mathbb{Z}^2$  in der Konfiguration  $\xi := \Phi(\xi^*)$  gerade

$$\xi_x := (x - z, G_i, \xi_{G_i+z}^*) \iff x \in G = G_i + z \in \mathcal{P}. \quad (1.13)$$

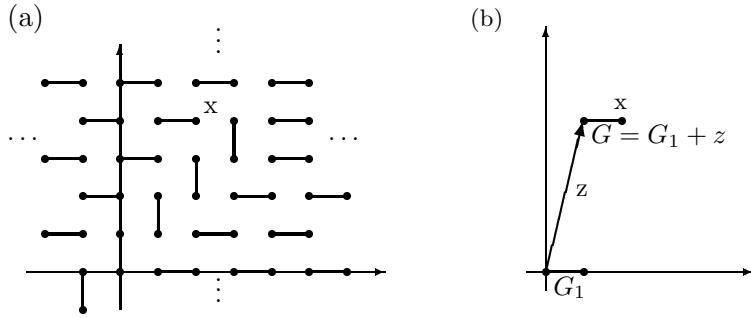


Abbildung 1.4: (a) Ausschnitt einer Parkettierung  $\mathcal{P} \in \pi(\mathcal{G}_0)$  für  $\mathcal{G}_0 = \{\{0, e_1\}, \{0, e_2\}\}$ .  
(b) Zur Definition von  $(\Phi(\xi^*))_x$  für eine Konfiguration  $\xi^*$  mit der zugrundeliegenden Parkettierung  $\mathcal{P}$  aus (a).

Das bedeutet gemäß Abbildung 1.4(b): dem Punkt  $x \in \mathbb{Z}^2$  wird der Buchstabe  $(x - z, G_i, \xi_{G_i+z}^*)$  aus  $S$  zugeordnet, falls der  $x$  überdeckende Baustein  $G \in \mathcal{P}$  um  $z \in \mathbb{Z}^2$  gegenüber  $G_i$  verschoben ist und die Farbe  $\xi_G^* = \xi_{G_i+z}^*$  trägt.

Wir bilden weiter das translationsinvariante Mengensystem  $\mathcal{F} := \{\Lambda_x \mid x \in \mathbb{Z}^2\}$  mit

$$\Lambda_x := \bigcup_{x \in G \in \mathcal{G}} G = \{x, x + e_1, x - e_1, x + e_2, x - e_2\} \quad (x \in \mathbb{Z}^2).$$

Mit der Festlegung

$$\bar{\Omega}_{\Lambda_x} = \{\xi \in S^{\Lambda_x} \mid [\xi_x = (y, G_i, \omega) \wedge x' \in G_i + x - y] \implies [\xi_{x'} = (y + x' - x, G_i, \omega)]\}$$

für jedes  $x \in \mathbb{Z}^2$  ist  $(\bar{\Omega}_{\Lambda})_{\Lambda \in \mathcal{F}}$  ein translationsinvariantes Restriktionensystem.

Wir zeigen nun, daß  $\xi := \Phi(\xi^*)$  für jede Konfiguration  $\xi^* \in \Omega^*$  ein Element des durch  $\mathcal{F}$  und  $(\bar{\Omega}_{\Lambda})_{\Lambda \in \mathcal{F}}$  definierten Punktkonfigurationenraumes  $\Omega \subset S^{\mathbb{Z}^2}$  ist. Falls  $\xi_x = (y, G_i, \omega)$  und  $x' \in G_i + x - y$  gilt, so führt (1.13) wegen  $x' \in G_i + x' - (y + x' - x)$  auf die Einfärbung  $\xi_{x'} = (y + x' - x, G_i, \omega)$ , d. h. die Restriktionen aus  $\bar{\Omega}_{\Lambda_x}$  sind erfüllt. (Die Restriktionen bedeuten gerade, daß sich die Färbung zweier Punkte  $x, x'$ , die vom gleichen Baustein  $G$  einer Parkettierung überdeckt werden, nur in der ersten Koordinate unterscheidet, und zwar um ihre Verschiebung  $x' - x$ .)

Zum Beweis von  $\sigma^a \circ \Phi = \Phi \circ \sigma^a$  ( $\forall a \in \mathbb{Z}^2$ ) benutzt man die zur Definition (1.13) äquivalente Darstellung

$$\xi_x = \left( x - \rho(x, \mathcal{P}), \tau(x, \mathcal{P}), \xi_{\tau(x, \mathcal{P}) + \rho(x, \mathcal{P})}^* \right) \quad (x \in \mathbb{Z}^2)$$

und die Eigenschaft

$$\tau(x - a, \mathcal{P}) = \tau(x, \mathcal{P} + a) \quad \text{und} \quad \rho(x - a, \mathcal{P}) = \rho(x, \mathcal{P} + a) - a \quad (a \in \mathbb{Z}^2)$$

der Abbildungen  $\tau$  und  $\rho$ .

**Folgerung 1.35** Jedes  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystem  $\Omega^*$  ist kompakt in der durch Subbasismengen (1.12) definierten Topologie auf  $\Omega^*$ .

**Bemerkung 1.36** 1. Für jede Gitterdimension  $d \in \mathbb{N}$  existieren  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenräume  $\Omega$ , die kein zugehöriges topologisch stark konjugiertes  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystem besitzen.

Nimmt man beispielsweise die Existenz eines  $\mathbb{Z}^2$ -Parkettsystems  $\Omega^*$  an, welches topologisch stark konjugiert zu dem in Beispiel 1.19 betrachteten zwei-dimensionalen Punktkonfigurationenraum  $\Omega = \{\xi, \sigma^{e_1}\xi\}$  ist, so müßte die Proto-Baustein-Menge  $\mathcal{G}_0$  von  $\Omega^*$  wegen der Perioden  $(2, 0), (0, 2), (1, 1) \in \mathbb{Z}^2$  der Konfiguration  $\xi \in \Omega$  einen der Bausteine  $G_0 := \{0\}$ ,  $G_1 := \{0, e_1\}$ ,  $G_2 := \{0, e_2\}$  enthalten. Gilt aber  $G_i \in \mathcal{G}_0$  ( $i = 1, 2$ ), so ist  $|\pi(\mathcal{G}_0)| = \infty$  und folglich  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \mathcal{G}_0, (\Omega_G)_{G \in \mathcal{G}_0})$  für keine Wahl von Farbenmengen  $\Omega_G$ ,  $G \in \mathcal{G}_0$  stark konjugiert zu  $\Omega$ . Ist dagegen  $G_0 \in \mathcal{G}_0$ , so besitzt die Konfiguration  $\xi^* = (\xi_H^*)_{H \in \mathcal{P}}$  mit der nur aus 1-Punkt-Bausteinen bestehenden Parkettierung  $\mathcal{P} = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{Z}^2\}$  und der konstanten Färbung  $\xi_{\{x\}}^* = \omega \in \Omega_{\{0\}}$  ( $\forall x \in \mathbb{Z}^2$ ) kein Urbild in  $\Omega$ .

2. Betrachtet man für fest vorgegebenes endliches Alphabet  $S$  die Räume

$$\mathcal{L}(S^{\mathbb{Z}^d}) := \{\Omega \subset S^{\mathbb{Z}^d} \mid \Omega \text{ ist Punktkonfigurationenraum}\}$$

und

$$\mathcal{L}^*(S^{\mathbb{Z}^d}) := \{\Omega \in \mathcal{L}(S^{\mathbb{Z}^d}) \mid \exists \text{ zu } \Omega \text{ topologisch konjugiertes } \mathbb{Z}^d\text{-Parkettsystem } \Omega^*\},$$

so ist mithin  $\mathcal{L}^*(S^{\mathbb{Z}^d}) \subsetneq \mathcal{L}(S^{\mathbb{Z}^d})$  richtig. Wir statteten  $\mathcal{L}(S^{\mathbb{Z}^d})$  mit der Hausdorffmetrik  $\delta$  aus, die durch

$$\delta(\Omega_1, \Omega_2) := \max \left( \max_{\xi \in \Omega_1} \min_{\eta \in \Omega_2} \bar{d}(\xi, \eta), \max_{\eta \in \Omega_2} \min_{\xi \in \Omega_1} \bar{d}(\xi, \eta) \right) \quad (\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{L}(S^{\mathbb{Z}^d}))$$

definiert ist, wobei  $\bar{d}$  eine mit der Produkttopologie auf  $S^{\mathbb{Z}^d}$  verträgliche Metrik auf  $S^{\mathbb{Z}^d}$  ist. (Vgl. z. B. Bemerkung 1.21.)

Dann gilt, der Raum  $\mathcal{L}^*(S^{\mathbb{Z}^1})$  ist dicht in  $\mathcal{L}(S^{\mathbb{Z}^1})$ . Für die Gitterdimension  $d > 1$  ist  $\mathcal{L}^*(S^{\mathbb{Z}^d})$  dicht in der Familie  $\mathcal{L}_m(S^{\mathbb{Z}^d})$  aller topologisch mischenden Punktkonfigurationenräume mit dem Alphabet  $S$ . (Zum Beweis dieser Aussagen vergleiche man [27].)

3. Mit Hilfe des Satzes 1.33 ist es möglich, den Abstand zweier Konfigurationen  $\xi^* = (\xi_H^*)_{H \in \mathcal{P}}$ ,  $\eta^* = (\eta_K^*)_{K \in \mathcal{R}}$  eines  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystems  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0, (\Omega_G)_{G \in \mathcal{G}_0})$  als den Abstand der zugehörigen Punktkonfigurationen  $\Phi(\xi^*), \Phi(\eta^*) \in \Phi(\Omega^*)$  zu definieren, z. B. durch

$$d(\xi^*, \eta^*) := \sum_{l \geq 0} \frac{1}{|\mathfrak{Z}_l|^3} \sum_{z \in \mathfrak{Z}_l} \bar{d}((\Phi(\xi^*))_z, (\Phi(\eta^*))_z), \quad (1.14)$$

wobei  $\mathfrak{Z}_l$  und  $\bar{d}(\cdot, \cdot)$  in Bemerkung 1.21 definiert wurden.

Nach der im Beweis von Satz 1.33 angegebenen Konstruktion des Homöomorphismus  $\Phi$  (vgl. auch Beispiel 1.34) liefert ein Punkt  $z \in \mathbb{Z}^d$  genau dann einen nichtverschwindenden Beitrag zu  $d(\xi^*, \eta^*)$ , wenn die den Punkt  $z$  belegenden Bausteine  $H \in \mathcal{P}$ ,  $K \in \mathcal{R}$  verschieden sind oder unterschiedliche Farben tragen. Die Wichtung von  $\bar{d}((\Phi(\xi^*))_z, (\Phi(\eta^*))_z)$  mit dem Faktor  $1/|\mathfrak{Z}_l|^3$  führt dazu, daß für die Größe des Abstandes  $d(\xi^*, \eta^*)$  im wesentlichen nur die Belegung des Nullpunktes  $0 \in \mathbb{Z}^d$  in den Konfigurationen ausschlaggebend ist.

Eine stärkere Differenzierung zwischen Konfigurationen  $\xi^*, \eta^* \in \Omega^*$  wird durch eine veränderte Definition der „Schalen“  $\mathfrak{Z}_l$  ( $l = 0, 1, \dots$ ) erreicht. Bezeichnen dazu für beliebige ganze Zahlen  $q_1, \dots, q_d \geq 0$  mit

$$Q^0 \equiv Q^0(q_1, \dots, q_d) := \{z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{Z}^d : |z_i| \leq q_i, i = 1, \dots, d\}$$

den im Nullpunkt zentrierten Quader mit den Seitenlängen  $2q_i + 1$  ( $i = 1, \dots, d$ ) in  $\mathbb{Z}^d$ . Weiter sei

$$\mathfrak{Z}_l(Q^0) := \bigcup_{\substack{(j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{Z}^d \\ \max_i |j_i| = l}} \{Q^0 + (j_1(2q_1 + 1), \dots, j_d(2q_d + 1))\} \quad (l = 0, 1, \dots)$$

für jede nichtnegative ganze Zahl  $l$  die Familie aller Quader  $Q = Q^0 + z$ , deren Mittelpunkt  $z$  die Norm  $\|z\| = (2q_i + 1)l$  mit gewissem  $i \in \{1, \dots, d\}$  besitzt. (Vgl. Abbildung 1.5 für  $d = 2$ .)

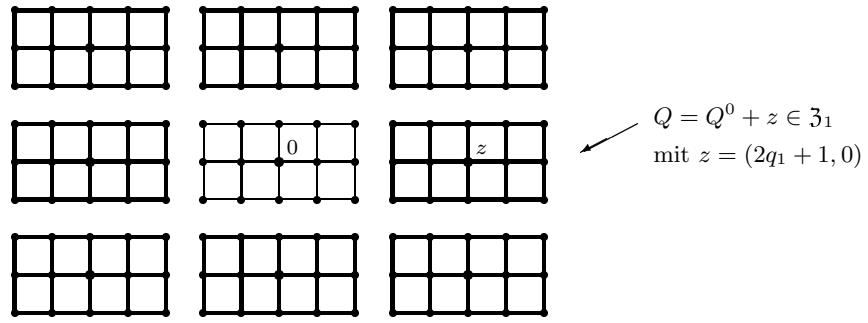


Abbildung 1.5: Die 2-dimensionale Schalen  $\mathfrak{Z}_0$  und  $\mathfrak{Z}_1$  für Parameter  $q_1 = 2, q_2 = 1$ .

Damit definieren wir

$$d_{Q^0}(\xi^*, \eta^*) := \sum_{l \geq 0} \frac{1}{|\mathfrak{Z}_l(Q^0)|^3} \sum_{Q \in \mathfrak{Z}_l(Q^0)} \frac{1}{|Q^0|} \sum_{z \in Q} \left( \bar{\delta}(\mathcal{P}_{|z}, \mathcal{R}_{|z}) + \bar{d}(\xi_{\mathcal{P}_{|z}}^*, \eta_{\mathcal{R}_{|z}}^*) \right), \quad (1.15)$$

wobei  $\bar{\delta}(\cdot, \cdot)$  eine Metrik auf dem Raum aller endlichen Teilmengen des Gitters  $\mathbb{Z}^d$  ist. Man beachte, daß die letzte Summe in (1.15) als Abstand der vom Quader  $Q$  erzeugten Teilkonfigurationen  $\xi_Q^*, \eta_Q^*$  aufgefaßt werden kann.

Offenbar ist  $d_{Q^0}(\cdot, \cdot)$  für jeden festen Quader  $Q^0 \equiv Q^0(q_1, \dots, q_d)$  eine Metrik auf dem Parkettsystem  $\Omega^*$ , die mit der in Definition 1.28 eingeführten Topologie verträglich ist. Weiter ist jedes Parkettsystem  $\Omega^*$  kompakt in  $d_{Q^0}(\cdot, \cdot)$ .

Um die Unterschiede zwischen zwei Konfigurationen eines Parkettsystems gut herauszuarbeiten, ist es sinnvoll, die Parameter  $q_1, \dots, q_d$  zur Definition des Quaders  $Q^0$  an die Ausdehnungen der Bausteine des Parkettsystems anzupassen sowie für  $\bar{\delta}(\cdot, \cdot)$  eine Hausdorffmetrik zu verwenden.

**Definition 1.37** 1. Das Parkettsystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0, (\Omega_G)_{G \in \mathcal{G}_0})$  besitzt die **Ordnung**  $(o_1, \dots, o_d) \in \mathbb{N}^d$ , wenn für jeden Proto-Baustein  $G \in \mathcal{G}_0$  und beliebige zwei Punkte  $x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in G$  gilt  $|x_i - y_i| < o_i, \forall i = 1, \dots, d$ .

2. Ein Punktkonfigurationenraum  $\Omega = (\mathbb{Z}^d, S, \mathcal{F}, (\bar{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{F}})$  wird **von der Ordnung**  $(o_1, \dots, o_d) \in \mathbb{N}^d$  genannt, falls für jede Menge  $\Lambda \in \mathcal{F}$  und beliebige zwei Punkte  $x, y \in \Lambda$  gilt:  $|x_i - y_i| < o_i, \forall i = 1, \dots, d$ .

**Bemerkung 1.38** Die Ordnung eines  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystems bzw. eines  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenraumes ist nicht eindeutig bestimmt. Ist ein  $d$ -Tupel  $(o_1, \dots, o_d) \in \mathbb{N}^d$  Ordnung des Parkettsystems  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0, (\Omega_G)_{G \in \mathcal{G}_0})$ , so ist jedes  $d$ -Tupel  $(o'_1, \dots, o'_d) \in \mathbb{N}^d$  mit der Eigenschaft  $o'_i \geq o_i$  ( $i = 1, \dots, d$ ) ebenfalls Ordnung von  $\Omega^*$ .

**Satz 1.39 (D. Ruelle, [55])** Zu jedem  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenraum  $\Omega = (\mathbb{Z}^d, S, \mathcal{F}, (\bar{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{F}})$  existiert ein topologisch konjugierter  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenraum  $\Omega' = (\mathbb{Z}^d, S', \mathcal{F}', (\bar{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda' \in \mathcal{F}'})$  der Ordnung  $(2, \dots, 2) \in \mathbb{N}^d$  mit

$$\mathcal{F}' = \{\{x + e_j\} \mid x \in \mathbb{Z}^d, j = 1, \dots, d\}.$$

**Bemerkung 1.40** Der Beweis des Satzes 1.39 ist konstruktiv. Dazu wählt man eine ganze Zahl  $l \geq 0$  derart, daß jede Menge  $\Lambda \in \mathcal{F}$ , die den festen Punkt  $x \in \mathbb{Z}^d$  enthält, im Würfel  $M(x) := \{y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{Z}^d : |x_i - y_i| \leq l, i = 1, \dots, d\}$  enthalten ist. (Wegen der Translationsinvarianz von  $\mathcal{F}$  ist die Zahl  $l$  unabhängig vom Punkt  $x$  wählbar.)

Mit der Menge  $S' := \{\xi_{|M(0)|} \mid \xi \in \Omega\}$  aller Einfärbungen von  $M(0)$  in  $\Omega$  als Alphabet, und den Restriktionenmengen

$$\bar{\Omega}'_{\{x, x+e_j\}} := \{(\xi, \eta) \in S'^2 \mid \xi_{|M(x) \cap M(y)} = \eta_{|M(x) \cap M(y)}\} \quad (x \in \mathbb{Z}^d, j = 1, \dots, d)$$

ist  $\Omega' = (\mathbb{Z}^d, S', \mathcal{F}', (\bar{\Omega}'_{\Lambda'})_{\Lambda' \in \mathcal{F}'})$  vermöge der durch  $(\Phi(\xi'))_x := (\xi'_x)_x$  ( $\xi' \in \Omega'$ ) definierten Abbildung  $\Phi : \Omega' \rightarrow \Omega$  topologisch konjugiert zu  $\Omega$ .

Man beachte, daß für den Übergang zu einem topologisch konjugierten Punktkonfigurationenraum, dessen Restriktionen auf unmittelbar benachbarte Gitterpunkte beschränkt sind, im allgemeinen eine erhebliche Vergrößerung des Alphabets notwendig ist. Speziell gilt  $|S'| \leq |S|^{(2l+1)^d}$ .

**Definition 1.41** Ist  $\Omega = (\mathbb{Z}^d, S, \mathcal{F}, (\bar{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{F}})$  ein  $d$ -dimensionaler Punktkonfigurationenraum der Ordnung  $(2, \dots, 2)$  mit  $\mathcal{F} = \{\{x + e_j\} \mid x \in \mathbb{Z}^d, j = 1, \dots, d\}$ , so heißen die Matrizen  $L^{(j)} = (L_{ik}^{(j)})_{1 \leq i, k \leq s}$  ( $j = 1, \dots, d$ ) mit

$$L_{ik}^{(j)} = \begin{cases} 1 & : \xi_{\{0, e_j\}} = (i, k) \in \bar{\Omega}_{\{0, e_j\}} \\ 0 & : \xi_{\{0, e_j\}} = (i, k) \notin \bar{\Omega}_{\{0, e_j\}} \end{cases} \quad (i, k = 1, \dots, s, j \in \{1, \dots, d\})$$

die **definierenden Matrizen** von  $\Omega$ .

**Bemerkung 1.42** Gemäß Satz 1.39 existiert zu jedem nichtleeren  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenraum  $\Omega$  ein topologisch konjugierter  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenraum  $\Omega'$  der Ordnung  $(2, \dots, 2)$ . Damit kann  $\Omega$  ein  $d$ -Tupel  $(L^{(1)}, \dots, L^{(d)})$  von definierenden Matrizen zugeordnet werden. Nach Satz 1.33 kann auch zu jedem Parkettsystem eine Familie von definierenden Matrizen angegeben werden.

**Beispiel 1.43** Der in Beispiel 1.34 konstruierte 2-dimensionale Punktkonfigurationenraum  $\Omega = (\mathbb{Z}^2, S, \mathcal{F}, (\bar{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{F}})$  zur Beschreibung eines Parkettsystems mit 2 „Stäbchenbausteinen“ kann als ein Punktkonfigurationenraum  $\Omega'$  mit  $\mathcal{F}' = \{\{x, x + e_1\}, \{x, x + e_2\} \mid x \in \mathbb{Z}^2\}$  beschrieben werden, wenn man beachtet, daß die Restriktionenmengen  $\bar{\Omega}_{\Lambda_x}$  ( $x \in \mathbb{Z}^2$ ) wegen  $G_i = \{0, e_i\}$  ( $i = 1, 2$ ) nur Bedingungen an die Färbungen der zwei benachbarten Punkte  $x, x + e_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) in  $\Lambda_x$  stellen. Mit dem Alphabet  $S' := \{1, \dots, 8\}$ , der Zuordnung

$$(0, G_1, \omega) \mapsto 2\omega - 1, \quad (e_1, G_1, \omega) \mapsto 2\omega \quad (\omega \in \{1, 2\})$$

$$(0, G_2, \omega) \mapsto 2\omega + 3, \quad (e_2, G_2, \omega) \mapsto 2\omega + 4 \quad (\omega \in \{1, 2\})$$

und den Restriktionenmengen

$$\bar{\Omega}'_{\{0, e_1\}} = \{(1, 2), (3, 4), (r, 1), (r, 3), (r, 5), (r, 6), (r, 7), (r, 8) \mid r = 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\bar{\Omega}'_{\{0, e_2\}} = \{(5, 6), (7, 8), (r, 1), (r, 2), (r, 3), (r, 4), (r, 5), (r, 7) \mid r = 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

ist  $\Omega' = (\mathbb{Z}^2, S', \{\{x, x + e_j\} \mid j = 1, 2, x \in \mathbb{Z}^2\}, (\bar{\Omega}'_{\{0, e_j\}})_{j \in \{1, 2\}})$  topologisch konjugiert zu  $\Omega$ .

Die definierenden Matrizen  $L^{(1)}$  und  $L^{(2)}$  von  $\Omega'$  haben die Form

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung 1.44** Die definierenden Matrizen  $L^{(1)}, \dots, L^{(d)}$  eines  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenraumes können Informationen zu erlaubten Blöcken enthalten, die in keiner Konfiguration  $\xi \in \Omega$  vorkommen. Sinnvoll ist somit die folgende Definition.

**Definition 1.45** Ist  $\Omega = (\mathbb{Z}^d, S, \mathcal{F}, (\bar{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{F}})$  ein  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenraum der Ordnung  $(2, \dots, 2)$ , so heißt das  $d$ -Tupel  $\underline{L} = (\underline{L}^{(1)}, \dots, \underline{L}^{(d)})$  von  $\{0, 1\}^{s \times s}$ -Matrizen  $\underline{L}^{(j)} = (\underline{L}_{ik}^{(j)})_{1 \leq i, k \leq s}$  ( $j = 1, \dots, d$ ) mit

$$\underline{L}_{ik}^{(j)} := \begin{cases} 1 & , \text{ wenn der Block } (i, k) \text{ mit der Basis } (0, e_j) \text{ in } \Omega \text{ vorkommt} \\ 0 & , \text{ wenn der Block } (i, k) \text{ mit der Basis } (0, e_j) \text{ in keinem } \xi \in \Omega \text{ vorkommt} \end{cases}$$

das  $d$ -Tupel der **Übergangsmatrizen** von  $\Omega$ .

**Bemerkung 1.46** Für ein-dimensionale Punktkonfigurationenräume (diese werden auch Subshifts endlichen Typs oder topologische Markov-Ketten genannt) sind definierende Matrix  $L \equiv L^{(1)}$  und Übergangsmatrix  $\underline{L} \equiv \underline{L}^{(1)}$  identisch, falls in jeder Zeile und jeder Spalte von  $L$  wenigstens ein '1'-Eintrag auftritt. (Besteht die  $i$ -te Zeile oder Spalte ausschließlich aus '0'-Einträgen, so kommt das Symbol  $i \in S$  in keiner Konfiguration  $\xi \in \Omega$  vor und kann folglich aus dem Alphabet  $S$  entfernt werden.) Die Übergangsmatrix  $\underline{L}$  stellt ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung der Eigenschaften der Shift-Wirkung, wie Periodizität oder Mischung, dar. Wesentliche Resultate dazu sind in folgendem Satz zusammengestellt.

**Satz 1.47 (vgl. [16])** Ist  $\Omega = (\mathbb{Z}^1, S, \mathcal{F}, (\bar{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{F}})$  ein ein-dimensionaler Punktkonfigurationenraum mit der Übergangsmatrix  $\underline{L}$ , so gilt:

1.  $\text{Sp}(\underline{L}^n)$  ist die Anzahl der periodischen Konfigurationen in  $\Omega$  mit der Periode  $n \in \mathbb{N}$ .
2.  $(\Omega, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_\Omega)$  ist genau dann topologisch transitiv, wenn die Übergangsmatrix  $\underline{L}$  irreduzibel ist, d. h., wenn für beliebige Symbole  $i, k \in S$  eine natürliche Zahl  $n = n(i, k)$  existiert, so daß  $\underline{L}_{ik}^n > 0$  gilt.
3.  $(\Omega, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_\Omega)$  ist genau dann topologisch mischend, wenn die Übergangsmatrix  $\underline{L}$  primitiv ist, d. h., wenn eine natürliche Zahl  $n$  existiert, so daß  $\underline{L}^n$  eine Matrix mit nur echt positiven Elementen ist.

**Bemerkung 1.48** 1. Die Einträge  $\underline{L}_{ik}^n$  ( $i, k \in S$ ) der  $n$ -ten Potenz der Übergangsmatrix  $\underline{L}$  eines  $\mathbb{Z}^1$ -Punktkonfigurationenraumes  $\Omega$  geben die Anzahl der verschiedenen Blöcke  $\xi|_{[x, x+n-1]}$  ( $x \in \mathbb{Z}^1$ ) der Länge  $n$  in  $\Omega$  an, für die  $\xi_x = i$  und  $\xi_{x+n-1} = k$  gilt. Die Aussagen 2. und 3. von Satz 1.47 bedeuten folglich, daß es zur Untersuchung ein-dimensionaler Punktkonfigurationenräume auf Transitivität und Mischung ausreicht, Subbasismengen  ${}_x[i]$  ( $x \in \mathbb{Z}^1, i \in S$ ) zu betrachten.

2. Für Punktkonfigurationenräume der Gitterdimension  $d > 1$  genügt es im allgemeinen nicht, die definierenden Bedingungen (1.3) bzw. (1.4) für topologische Transitivität oder Mischung nur für Subbasismengen zu verifizieren.

Analoge Aussagen zu den in Satz 1.47 gemachten sind im Fall  $d > 1$  auch nicht zu erwarten, da für Überlegungen zur Charakterisierung möglicher Einfärbungen von Teilmengen des Gitters  $\mathbb{Z}^d$  nicht mehr nur Potenzen einer Matrix heranzuziehen sind, sondern Produkte mehrerer Matrizen und ihrer Potenzen. Dabei lassen sich Eigenschaften einzelner Matrizen i. a.

nicht auf ihre Produkte übertragen.

Betrachtet man für die definierenden Matrizen  $L^{(1)}, L^{(2)}$  eines  $\mathbb{Z}^2$ -Punktkonfigurationenraumes  $\Omega$  das Produkt  $L^{(1)}L^{(2)}$ , so ist das Matrixelement  $(L^{(1)}L^{(2)})_{ij}$  genau dann von 0 verschieden, wenn ein  $k \in S$  existiert, so daß  $L_{ik}^{(1)} = L_{kj}^{(2)} = 1$  gilt. Das bedeutet, daß ausgehend von den definierenden Matrizen der Block  $(i, k, j)$  mit der Basis  $(0, e_1, e_1 + e_2)$  erlaubt ist. Dieser Block muß sich jedoch nicht zu einer Konfiguration  $\xi \in \Omega$  fortsetzen lassen. Die Betrachtung des Produktes  $L^{(2)}L^{(1)}$  führt auf eine analoge Aussage, wobei es wegen der Nicht-Kommutativität des Matrizenproduktes möglich ist, daß wegen  $(L^{(2)}L^{(1)})_{ij} = 0$  kein Block  $(i, k, j)$  ( $k \in S$ ) mit der Basis  $(0, e_2, e_1 + e_2)$  in  $\Omega$  erlaubt ist. In diesem Fall existiert keine Konfiguration  $\xi \in \Omega$  mit  $\xi_0 = i$  und  $\xi_{e_1 + e_2} = j$ .

Gibt es also auch nur einen einzigen „Weg“, über den ein „Symbolübergang“  $i \mapsto j$  vom Punkt 0 zu einem beliebigen Punkt  $z \in \mathbb{Z}^d$  durch eine '0' in der „entsprechenden“ Produktmatrix verboten wird, so ist eine solche Einfärbung für jede Konfiguration  $\xi \in \Omega$  ausgeschlossen.

Zur Untersuchung möglicher Einfärbungen endlicher Teilmengen des Gitters  $\mathbb{Z}^d$  ist die Betrachtung der folgenden Matrizenoperation hilfreich. In der Matrizenmenge  $\{0, 1\}^{s \times s}$  wird die Operation  $*$ -Matrizenmultiplikation für Matrizen  $L_1, L_2 \in \{0, 1\}^{s \times s}$  durch

$$(L_1 * L_2)_{ij} := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } (L_1 L_2)_{ij} > 0 \\ 0 & , \text{ falls } (L_1 L_2)_{ij} = 0 \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, s)$$

erklärt, wobei  $L_1 L_2$  die gewöhnliche Matrizenmultiplikation bezeichnet.

Kommutieren die definierenden Matrizen eines  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenraumes  $\Omega$ , d. h. es gilt

$$L^{(i)} * L^{(j)} = L^{(j)} * L^{(i)} \quad \text{und} \quad L^{(i)} * (L^{(j)})^T = (L^{(j)})^T * L^{(i)} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, s\},$$

so sind die definierenden Matrizen auch die Übergangsmatrizen von  $\Omega$ . Für  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenräume, die durch kommutierende Matrizen definiert sind, lassen sich Aussagen zum Zusammenhang von Transitivität bzw. Mischung und Eigenschaften der Übergangsmatrizen beweisen, die als natürliche Übertragung der in Satz 1.47 angegebenen Resultate auf Dimensionen  $d > 1$  angesehen werden können. Man vergleiche dazu z. B. [39] und [40].

**Beispiel 1.49** Der in Beispiel 1.19 eingeführte  $\mathbb{Z}^2$ -Punktkonfigurationenraum zur Beschreibung eines „hard-core“-Gittergases besitzt die definierenden Matrizen  $L^{(1)} = L^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Diese Matrizen kommutieren und sind daher zugleich die Übergangsmatrizen von  $\Omega$ .

Dagegen kommutieren die in Beispiel 1.43 angegebenen definierenden Matrizen des zwei-dimensionalen Parkettsystems mit 2 „Stäbchenbausteinen“ nicht. Z. B. gilt  $(L^{(1)} * L^{(2)})_{18} = 0$  und  $(L^{(2)} * L^{(1)})_{18} = 1$ .

Die definierenden Matrizen eines  $d$ -dimensionalen Parkettsystems  $\Omega^*$  kommutieren im allgemeinen nicht. Zum Beispiel läßt sich eine überschneidungsfreie Bausteinüberdeckung der Achsen  $z_1 e_1$  und  $z_2 e_2$  ( $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ ) des ebenen Gitters nicht stets zu einer Parkettierung des gesamten Gitters  $\mathbb{Z}^2$  fortsetzen.

Die Untersuchung von Parkettsystemen auf Transitivität und Mischung kann also aus verschiedenen Gründen i. allg. nicht von einem Matrizenkalkül Gebrauch machen. Ausgehend von der Definition offener Mengen in Parkettsystemen als beliebige Vereinigungen von Mengen von Konfigurationen, die jeweils eine (endliche) Teilkonfiguration gemeinsam haben, lässt sich jedoch die folgende hinreichende Bedingung für topologische Mischung von Parkettsystemen angeben.

**Satz 1.50 ([43])** *Hinreichend für topologische Mischung eines  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystems  $(\Omega^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d})$  ist folgende Eigenschaft:*

*Für je zwei Teilparkettierungen  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  von  $\Omega^*$  existiert eine natürliche Zahl  $m = m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  derart, daß für jedes  $a \in \mathbb{Z}^d$  mit  $\|a\| > m$  eine Parkettierung  $\mathcal{P}$  von  $\Omega^*$  existiert mit  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$  und  $\sigma^a \mathcal{B} \subset \mathcal{P}$ .*

**Bemerkung 1.51** *Zum Beweis der topologischen Mischung eines  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystems  $\Omega^*$  reicht es somit aus, die Fortsetzbarkeit von zwei beliebigen Teilparkettierungen  $\mathcal{A}$  und  $\sigma^a \mathcal{B}$  des Parkettsystems zu einer gemeinsamen Parkettierung  $\mathcal{P}$  für jedes hinreichend große  $a \in \mathbb{Z}^d$  zu zeigen.*

*Wegen der Unentscheidbarkeit des Tiling-Problems des  $\mathbb{Z}^d$  für jedes  $d > 1$  gibt es keinen Algorithmus, der es erlaubt, diese Frage für jede beliebige Proto-Baustein-Menge zu beantworten. Im einfachen Spezialfall, daß der Ein-Punkt-Baustein  $G_0 = \{0\}$  ein Proto-Baustein des Parkettsystems  $\Omega^*$  ist, folgt aus Satz 1.50 sofort die topologische Mischung von  $\Omega^*$ . Dagegen ist es schon für andere Mengen relativ einfach geformter Proto-Bausteine schwierig, die Gültigkeit der in Satz 1.50 angegebenen hinreichenden Bedingung nachzuweisen.*

An dieser Stelle ist zu bemerken, daß die Mächtigkeiten der für die Einfärbung der Bausteine eines Parkettsystems zur Verfügung stehenden Farbenmengen  $\Omega_G$  ( $G \in \mathcal{G}_0$ ) keinen wesentlichen Einfluß auf die Dynamik des Systems besitzen (vgl. insbesondere Satz 1.50 zur topologischen Mischung). Ein wesentlicher Grund hierfür besteht darin, daß in der Definition des Begriffes Parkettsystem (siehe Definition 1.25) keinerlei Restriktionen hinsichtlich der Einfärbung „benachbarter“ Bausteine aufgestellt werden. Im Sinne einer Beschränkung der Überlegungen auf die wesentlichen Merkmale eines Parkettsystems (die Parkettierungen) wird in der vorgelegten Arbeit weitestgehend auf die Möglichkeit zusätzlicher Bausteinfärbungen verzichtet.

Die Definition des Begriffes  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystem in 1.25 schränkt die geometrische Form der Proto-Bausteine nicht ein. Insbesondere sind sowohl Bausteine mit „Löchern“ als auch unzusammenhängende Bausteine zugelassen. Schließt man solche Proto-Bausteine aus, so bleiben Untersuchungen zur Klassifizierung von  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystemen in Hinblick auf topologische Konjugiertheit oder den Faktorbegriff für Dimensionen  $d > 1$  dennoch sehr schwierig. Man beachte dabei die schon mehrfach erwähnte Unentscheidbarkeitsproblematik, aber auch das Fehlen einer allgemeinen Theorie zur Klassifizierung von  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenräumen für  $d > 1$ . Zur Beschreibung eines  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystems als Punktkonfigurationenraum der Ordnung  $(2, \dots, 2)$  wird im allgemeinen ein sehr großes Alphabet benötigt, so daß es nicht vielversprechend erscheint, Eigenschaften von Parkettsystemen durch Betrachtung der entsprechend hochdimensionierten Übergangsmatrizen zu untersuchen.

Stattdessen sollte die geometrische Struktur der Bausteine von Parkettsystemen zur Klassifizierung herangezogen werden. Dabei ist die Einschränkung der Überlegungen auf eine Familie von  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystemen sinnvoll, deren Bausteine geometrisch einfach zu beschreiben sind. Parkettsysteme, deren Bausteine Quader in  $\mathbb{Z}^d$  sind, bilden eine solche Teilkasse.

**Definition 1.52** Ein  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0, (\Omega_G)_{G \in \mathcal{G}_0})$  heißt  **$\mathbb{Z}^d$ -Quadersystem**, wenn die Proto-Baustein-Menge von der Gestalt  $\mathcal{G}_0 = \{G_1, \dots, G_m\}$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) mit

$$G_j = \{z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq z_i < l_i(j), i = 1, \dots, d\} \quad (j = 1, \dots, m)$$

ist und die Vektoren  $\underline{l}(j) := (l_1(j), \dots, l_d(j)) \in \mathbb{N}^d$ ,  $j = 1, \dots, m$  die Ordnungsbeziehung  $\underline{l}(1) \prec \dots \prec \underline{l}(m)$  erfüllen. Der Vektor  $\underline{l}(j)$  wird als die Ausdehnung des „Quaders“  $G_j$  bezeichnet ( $j = 1, \dots, m$ ).

Mit der Anzahl der Farben  $n(j) := |\Omega_{G_j}|$  des Proto-Bausteins  $G_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) schreiben wir abkürzend  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m, \{n(j)\}_{j=1}^m)$ .

**Bezeichnung 1.53** Für gegebene Quadersysteme  $\Omega_i^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}^{(i)}(j)\}_{j=1}^{m_i}, \{n^{(i)}(j)\}_{j=1}^{m_i})$  ( $i = 1, 2$ ) wird mit  $G_j^{(i)}$  ( $i = 1, 2, j \in \{1, \dots, m_i\}$ ) der Proto-Baustein der Ausdehnung  $\underline{l}^{(i)}(j)$  von  $\Omega_i^*$  bezeichnet.

**Bemerkung 1.54** Untersuchungen zur topologischen Konjugiertheit sowie zur topologischen Entropie ein-dimensionaler Quadersysteme findet man in der Dissertation von G. Schwenzfefer ([56]). (Darin werden diese Systeme in Anlehnung an die Kettenstruktur von Polymeren als Polymersysteme bezeichnet.) Dazu wurde vor allem die Beschreibbarkeit ein-dimensionaler Quadersysteme als  $\mathbb{Z}^1$ -Punktkonfigurationenräume der Ordnung 2 und die spezielle Blockstruktur der zugehörigen Übergangsmatrizen verwendet. (Vgl. auch Abschnitt 2.2.1 dieser Arbeit.) Die Resultate von G. Schwenzfefer machen bereits für die Dimension  $d = 1$  die Vielfalt der Dynamik  $d$ -dimensionaler Quadersysteme deutlich und legen die Untersuchung weiterer Fragestellungen, wie z. B. des topologischen Faktorbegriffs, für diese Systeme nahe.

In [56] wurde unter anderem gezeigt, daß zwei ein-dimensionale Quadersysteme genau dann topologisch konjugiert sind, wenn ihre Proto-Baustein- und Farbenmengen identisch sind. Die Übertragung dieses Resultates auf beliebige Gitterdimensionen  $d > 1$  ist Inhalt des folgenden Satzes.

**Satz 1.55** Zwei  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersysteme  $\Omega_i^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}^{(i)}(j)\}_{j=1}^{m_i}, \{n^{(i)}(j)\}_{j=1}^{m_i})$  ( $i = 1, 2$ ) sind genau dann topologisch konjugiert, wenn gilt:

$$\{(\underline{l}^{(1)}(j), n^{(1)}(j)) \mid j = 1, \dots, m_1\} = \{(\underline{l}^{(2)}(j), n^{(2)}(j)) \mid j = 1, \dots, m_2\}. \quad (1.16)$$

**Beweis:**

1. Ist die Bedingung (1.16) erfüllt, so sind die Konfigurationen von  $\Omega_1^*$  und  $\Omega_2^*$  identisch. Folglich sind  $\Omega_1^*$  und  $\Omega_2^*$  vermöge der identischen Abbildung topologisch konjugiert.

2. Die Quadersysteme  $\Omega_1^*$  und  $\Omega_2^*$  seien topologisch konjugiert. Angenommen, die Bedingung (1.16) sei nicht erfüllt.

Diese Annahme wird unter Verwendung der Invarianten  $\text{Per}_{(q_1, \dots, q_d)}(\Omega_i^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega_i^*})$  ( $i = 1, 2$ ) bezüglich topologischer Konjugiertheit zum Widerspruch geführt.

Dazu werden folgende Aussagen zur Periodizität von Parkettierungen eines  $d$ -dimensionalen Quadersystems  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0, (\Omega_G)_{G \in \mathcal{G}_0})$  verwendet.

- (a) Für beliebiges  $(q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{N}^d$  ist  $\text{Per}_{(q_1, \dots, q_d)}(\Omega^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega^*})$  genau dann größer als Null, wenn eine Parkettierung  $\mathcal{P} \in \pi(\mathcal{G}_0)$  existiert, so daß die von  $R(q_1, \dots, q_d) := \{z \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq z_i \leq q_i, i = 1, \dots, d\}$  erzeugte Teilparkettierung  $\mathcal{P}|_{R(q_1, \dots, q_d)}$  die Eigenschaft

$$\sigma^{q_i e_i} \mathcal{P}_x = \mathcal{P}_{x+q_i e_i} \quad (\forall x \in R(q_1, \dots, q_d) \text{ mit } x_i = 0) \quad (1.17)$$

für jedes  $i = 1, \dots, d$  besitzt. (Anschaulich bedeutet (1.17) gerade, daß die von  $R(q_1, \dots, q_d)$  erzeugte Teilparkettierung „periodischen Randbedingungen“ genügt.)

- (b) Die Ausdehnung jedes Bausteines einer Teilparkettierung  $\mathcal{P}|_{R(q_1, \dots, q_d)}$  ( $(q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{N}^d$ ), die die Eigenschaft (1.17) besitzt, ist koordinatenweise nicht größer als  $(q_1, \dots, q_d)$ .
- (c) Ist  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m, \{n(j)\}_{j=1}^m)$  ein  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersystem, so gilt für jedes  $j = 1, \dots, m$  die Beziehung

$$\text{Per}_{\underline{l}(j)}(\Omega^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d}) \geq n(j) \cdot \prod_{i=1}^d l_i(j) > 0. \quad (1.18)$$

Bezeichne  $j_0 \in \{1, \dots, \min(m_1, m_2)\}$  den kleinsten Index  $j$ , für den die Tupel  $(\underline{l}^{(1)}(j), n^{(1)}(j))$  und  $(\underline{l}^{(2)}(j), n^{(2)}(j))$  voneinander verschieden sind.

Wir betrachten zunächst den Fall  $\underline{l}^{(1)}(j_0) \neq \underline{l}^{(2)}(j_0)$  und nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\underline{l}^{(1)}(j_0) \prec \underline{l}^{(2)}(j_0)$  an. Nach Eigenschaft (1.18) gilt  $\text{Per}_{\underline{l}^{(1)}(j_0)}(\Omega_1^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega_1^*}) > 0$ , woraus wegen der vorausgesetzten topologischen Konjugiertheit von  $\Omega_1^*$  und  $\Omega_2^*$  auch die Positivität von  $\text{Per}_{\underline{l}^{(1)}(j_0)}(\Omega_2^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega_2^*})$  folgt.

Dies ist gemäß Aussage (a) gleichbedeutend mit der Existenz einer Parkettierung  $\mathcal{P}^{(2)}$  in  $\pi(\mathcal{G}_0^{(2)})$  derart, daß die Teilparkettierung  $\mathcal{P}^{(2)}|_{R(\underline{l}^{(1)}(j_0))}$  die „periodische Randbedingung“ (1.17) erfüllt. Nach Aussage (b) enthält eine solche Teilparkettierung nur Quader mit Ausdehnungen  $\underline{l}^{(2)}(j)$ , die koordinatenweise kleiner oder gleich  $\underline{l}^{(1)}(j_0)$  und (nach der gemachten Voraussetzung an  $j_0$ ) verschieden von  $\underline{l}^{(1)}(j_0)$  sind.

Da  $\underline{l}^{(1)}(j_0)$  die kleinste nicht-gemeinsame Quaderausdehnung der beiden Proto-Baustein-Mengen ist, sind folglich alle in  $\mathcal{P}^{(2)}|_{R(\underline{l}^{(1)}(j_0))}$  auftretenden Quadertypen Elemente von  $\mathcal{G}_0^{(1)}$ .

Mithin gilt

$$\begin{aligned} & \{\mathcal{P}^{(2)} \in \pi(\mathcal{G}_0^{(2)}) \mid \sigma^{l_i^{(1)}(j_0)e_i} \mathcal{P}^{(2)} = \mathcal{P}^{(2)}, i = 1, \dots, d\} \\ & \subset \{\mathcal{P}^{(1)} \in \pi(\mathcal{G}_0^{(1)}) \mid \sigma^{l_i^{(1)}(j_0)e_i} \mathcal{P}^{(1)} = \mathcal{P}^{(1)}, i = 1, \dots, d\} \end{aligned}$$

und wegen  $n^{(1)}(j) = n^{(2)}(j)$  ( $\forall j < j_0$ ) also  $\text{Per}_{\underline{l}^{(1)}(j_0)}(\Omega_2^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega_2^*}) \leq \text{Per}_{\underline{l}^{(1)}(j_0)}(\Omega_1^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega_1^*})$ .

Andererseits besitzt die Parkettierung  $\tilde{\mathcal{P}}^{(1)} \in \pi(\mathcal{G}_0^{(1)})$ , die aus achsenparallelen Verschiebungen des Proto-Bausteins  $G_{j_0}^{(1)}$  der Ausdehnung  $\underline{l}^{(1)}(j_0)$  besteht, die Perioden  $l_i^{(1)}(j_0)e_i$

$(i = 1, \dots, d)$ . Wegen  $\tilde{\mathcal{P}}^{(1)} \notin \pi(\mathcal{G}_0^{(2)})$  nach Voraussetzung an  $\underline{l}^{(1)}(j_0)$  ist somit die Ungleichung  $\text{Per}_{\underline{l}^{(1)}(j_0)}(\Omega_2^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega_2^*}) < \text{Per}_{\underline{l}^{(1)}(j_0)}(\Omega_1^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega_1^*})$  im Widerspruch zur topologischen Konjugiertheit von  $\Omega_1^*$  und  $\Omega_2^*$  richtig.

Zu betrachten bleibt noch der Fall, daß  $\underline{l}^{(1)}(j_0) = \underline{l}^{(2)}(j_0)$  und  $n^{(1)}(j_0) \neq n^{(2)}(j_0)$  gilt. Daraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} & \{\mathcal{P}^{(2)} \in \pi(\mathcal{G}_0^{(2)}) \mid \sigma^{l_i^{(1)}(j_0)e_i} \mathcal{P}^{(2)} = \mathcal{P}^{(2)}, i = 1, \dots, d\} \\ &= \{\mathcal{P}^{(1)} \in \pi(\mathcal{G}_0^{(1)}) \mid \sigma^{l_i^{(1)}(j_0)e_i} \mathcal{P}^{(1)} = \mathcal{P}^{(1)}, i = 1, \dots, d\}. \end{aligned}$$

Weiter kann jede der  $\prod_{i=1}^d l_i^{(1)}(j_0)$  verschiedenen Parkettierungen in  $\pi(\mathcal{G}_0^{(k)})$  ( $k = 1, 2$ ), die aus achsenparallelen Verschiebungen des Proto-Bausteines der Ausdehnung  $\underline{l}^{(1)}(j_0)$  besteht, auf genau  $n^{(k)}(j_0)$  ( $k = 1, 2$ ) unterschiedliche Arten periodisch eingefärbt werden. Da alle anderen Parkettierungen der Menge  $\{\mathcal{P}^{(1)} \in \pi(\mathcal{G}_0^{(1)}) \mid \sigma^{l_i^{(1)}(j_0)e_i} \mathcal{P}^{(1)} = \mathcal{P}^{(1)}, i = 1, \dots, d\}$  aus Quadern der Ausdehnungen  $\underline{l}^{(1)}(j)$  mit  $j < j_0$  bestehen, folgt aus der Voraussetzung an  $j_0$  gerade

$$\text{Per}_{\underline{l}^{(1)}(j_0)}(\Omega_1^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega_1^*}) - \text{Per}_{\underline{l}^{(1)}(j_0)}(\Omega_2^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega_2^*}) = (n^{(1)}(j_0) - n^{(2)}(j_0)) \prod_{i=1}^d l_i^{(1)}(j_0) \neq 0.$$

Dies steht im Widerspruch zur topologischen Konjugiertheit von  $\Omega_1^*$  und  $\Omega_2^*$ , das heißt, die Annahme, Bedingung (1.16) sei verletzt, ist falsch.  $\blacksquare$

Satz 1.55 charakterisiert die durch den Begriff der topologischen Konjugiertheit definierte Zerlegung in Äquivalenzklassen auf dem Raum der  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersysteme als Zerlegung in ein-elementige Mengen. Daran schließt sich in natürlicher Weise die Frage nach einer möglichen Beschreibung des topologischen Faktorbegriffes für diese Familie von Parkettsystemen an. Für die Behandlung dieses Problemkreises (in Kapitel 3) erweist sich die topologische Entropie als ein wichtiges Hilfsmittel. Die Entropie ist als ein Maß für die Reichhaltigkeit und Komplexität eines topologischen dynamischen Systems auch von eigenständigem Interesse. Das folgende Kapitel ist deshalb der ausführlichen Untersuchung dieser Größe für die uns interessierenden Parkettsystems über dem Gitter  $\mathbb{Z}^d$  gewidmet.

## Kapitel 2

# Die topologische Entropie von $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystemen

Der Ende der 50-er Jahre von A. N. Kolmogorov, V. A. Rochlin und Ya. G. Sinai entwickelte Begriff der maßtheoretischen Entropie  $h_\mu(T)$  eines maßtheoretischen dynamischen Systems  $(X, \mu, T)$  als Invariante bezüglich maßtheoretischer Isomorphie erlangte fundamentale Bedeutung in der Ergodentheorie.

So stellt die 1970 von D. S. Ornstein ([45]) angegebene Charakterisierung der Entropie als vollständige Invariante von Bernoullishifts einen wichtigen Beitrag in der Untersuchung des Isomorphieproblems maßtheoretischer dynamischer Systeme dar. Auf der Grundlage dieser Arbeit konnten in den folgenden Jahren für zahlreiche dynamische Systeme, wie z. B. für

- mischende Markovketten (N. A. Friedman, D. S. Ornstein, [19]),
- ergodische Automorphismen des  $n$ -dimensionalen Torus (Y. Katznelson, [33]),
- Bernoulli-Flüsse (D. S. Ornstein, [46]),
- geodätische Flüsse auf kompakten Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung (D. S. Ornstein, B. Weiss, [47]),

die Entropie durch Existenznachweise von schwachen bzw. sehr schwachen erzeugenden Bernoulli-Zerlegungen als vollständige Invariante nachgewiesen werden.

In Anlehnung an die Definition der maßtheoretischen Entropie definierten R. A. Adler, A. Konheim und M. H. McAndrew ([1]) im Jahre 1965 den Begriff der topologischen Entropie  $h_t(T)$  einer stetigen Abbildung  $T$  eines kompakten topologischen Raumes  $X$  und vermuteten die Gültigkeit des Variationsprinzips der topologischen Entropie  $h_t(T) = \sup_{\mu \in \mathfrak{M}(T)} h_\mu(T)$ , wobei  $\mathfrak{M}(T)$  die Menge aller  $T$ -invarianten Maße  $\mu$  auf  $X$  bezeichnet. Dazu bewies L. W. Goodwyn ([24]) 1969 die Ungleichung  $h_t(T) \geq h_\mu(T)$  für alle  $T$ -invarianten Maße  $\mu$ . Für Homöomorphismen topologischer Räume endlicher Dimension wurde das Variationsprinzip 1970/71 von E. I. Dinaburg ([17],[18]) gezeigt. Schließlich wurde dessen Gültigkeit 1971 von T. N. T. Goodman ([23]) auch für beliebige kompakte Räume bewiesen. Daran schließt sich unmittelbar eine weiteres Untersuchungsgebiet der

Ergodentheorie an, nämlich die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit  $T$ -invarianter Maße mit maximaler Entropie (vgl. [16],[55]).

Von R. Bowen wurde eine allgemeinere Möglichkeit der Definition der topologischen Entropie (z. B. für nicht kompakte Räume) entwickelt (Hausdorffdimension-topologische Entropie). Im Fall kompakter Räume stimmen die Entropiewerte mit den Werten der klassischen Definition überein. (Näheres hierzu findet man in [6],[8] und [9].)

Das vor allem durch Fragestellungen der Statistischen Mechanik begründete Interesse an Wirkungen allgemeinerer Gruppen, insbesondere der additiven Gruppen  $(\mathbb{Z}^d, +)$  ( $d > 1$ ) führte zur Definition des maßtheoretischen Entropiebegriffs für  $\mathbb{Z}^d$ -Wirkungen in Arbeiten von J.P. Conze ([11], u.a. Verallgemeinerung der Formel von Abramov) sowie Y. Katznelson und B. Weiss ([34], u.a. Bernoulli-Eigenschaft von  $\mathbb{Z}^d$ -Wirkungen).

Von D. Ruelle wurde dann die topologische Entropie von  $\mathbb{Z}^d$ -Wirkungen (als Spezialfall des topologischen Druckes) im Zusammenhang mit Überlegungen zu Gibbsmaßen auf Konfigurationenräumen eingeführt.

Im folgenden ersten Abschnitt dieses Kapitels wird der Begriff der topologischen Entropie von Homöomorphismengruppen als  $(\mathbb{Z}^d, +)$ -Wirkung analog zu dem in [1] dargestellten Entropiebegriff stetiger Abbildungen dargestellt.

## 2.1 Zum Begriff der topologischen Entropie von Homöomorphismengruppen

Wir betrachten im folgenden ein kompaktes topologisches dynamisches System  $(X, T^{\mathbb{Z}^d})$ .

**Definition 2.1** 1. Eine offene Überdeckung  $\mathfrak{A}$  des Raumes  $X$  wird **minimal** genannt, wenn es keine Teilüberdeckung von  $\mathfrak{A}$  gibt, die weniger Elemente enthält.

2. Für eine offene Überdeckung  $\mathfrak{A}$  von  $X$  heißt die Größe  $H(\mathfrak{A}) := \log N(\mathfrak{A})$  die **Entropie** von  $\mathfrak{A}$ , wobei  $N(\mathfrak{A})$  die Kardinalität einer minimalen Teilüberdeckung von  $\mathfrak{A}$  angibt. (Wegen der Kompaktheit des Raumes  $X$  existiert für jede offene Überdeckung  $\mathfrak{A}$  von  $X$  eine endliche Teilüberdeckung, die  $X$  überdeckt. Die Zahl  $N(\mathfrak{A})$  ist also für jede offene Überdeckung wohldefiniert.)

3. Sind  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  offene Überdeckungen des Raumes  $X$ , so wird die Überdeckung  $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} := \{A \cap B \mid A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\}$  das **Supremum** von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  genannt.

4. Eine offene Überdeckung  $\mathfrak{B}$  des Raumes  $X$  heißt **feiner** als die offene Überdeckung  $\mathfrak{A}$  ( $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ ), wenn jedes Element von  $\mathfrak{B}$  Teilmenge eines Elementes von  $\mathfrak{A}$  ist.

**Eigenschaft 2.2** 1. Die Relation  $\prec$  ist eine reflexive Halbordnung, die Operation  $\vee$  eine assoziative kommutative Operation in der Menge aller offenen Überdeckungen des Raumes  $X$ .

2.  $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \implies [H(\mathfrak{A}) \leq H(\mathfrak{B}) \text{ und } H(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) = H(\mathfrak{B})]$ .

3.  $H(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \leq H(\mathfrak{A}) + H(\mathfrak{B})$ .

4. Für alle  $z \in \mathbb{Z}^d$  gilt

- (a)  $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \implies T^z \mathfrak{A} \prec T^z \mathfrak{B}$ ,
- (b)  $T^z(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) = T^z \mathfrak{A} \vee T^z \mathfrak{B}$ ,
- (c)  $N(\mathfrak{A}) = N(T^z \mathfrak{A})$ .

Wir definieren für eine Überdeckung  $\mathfrak{A}$  des Raumes  $X$  und eine beliebige endliche Teilmenge  $R$  in  $\mathbb{Z}^d$  die Überdeckung  $\mathfrak{A}_R := \bigvee_{z \in R} T^z \mathfrak{A}$  und fragen nach dem Verhalten von  $\frac{1}{|R_n|} H(\mathfrak{A}_{R_n})$  für eine wachsende Folge  $\{R_n\}$  endlicher Teilmengen  $R_n \subset \mathbb{Z}^d$ .

Der Grenzwert  $R_n \rightarrow \mathbb{Z}^d$  liefert ein Maß für die „Durchmischung“ des Raumes  $X$  (in Bezug auf die feste Überdeckung  $\mathfrak{A}$ ) unter Wirkung der Homöomorphismengruppe  $T^{\mathbb{Z}^d}$ . Es gelten folgende Aussagen:

- für jede Folge  $\{R_n\}$  von Parallellepipeden in  $\mathbb{Z}^d$  mit  $d(R_n) \rightarrow \infty$  (dabei bezeichnet  $d(R_n)$  das Minimum der Diagonalenlängen von  $R_n$ ) existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|R_n|} H(\mathfrak{A}_{R_n})$  und ist unabhängig von der Wahl der Folge  $\{R_n\}$  (vgl. [12]); insbesondere kann statt  $R_n \rightarrow \mathbb{Z}^d$  auch der Grenzwert  $R_n \rightarrow \mathbb{Z}_-^d := \{z \in \mathbb{Z}^d \mid z_i < 0, i = 1, \dots, d\}$  im Sinne einer „Gruppenvergangenheit“ verwendet werden.
- Bezeichnet  $R_a := \{z \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq z_i < a_i\}$  mit  $a \in \mathbb{N}^d$  einen Quader in  $\mathbb{Z}^d$ , so existiert mit der Vereinbarung  $(a \rightarrow \infty) \iff (\min_{i=1, \dots, d} a_i \rightarrow \infty)$  der Grenzwert  $\lim_{a \rightarrow \infty} |R_a|^{-1} H(\mathfrak{A}_{R_a})$ . Der Grenzwert existiert allgemeiner sogar für Folgen endlicher Teilmengen  $R_n \subset \mathbb{Z}^d$ , die nach unendlich im Sinne von vanHove ([63]) streben ( $R_n \rightarrow \infty$ ), d. h., es gilt  $|R_n| \rightarrow \infty$  und  $\frac{|(R_n + a) \setminus R_n|}{|R_n|} \rightarrow 0$  für jedes feste  $a \in \mathbb{Z}^d$  (siehe [55]).
- Für allgemeinere Gruppen  $G$  kann ein solches Konzept ebenfalls entwickelt werden. Im Fall amenabler lokal kompakter Gruppen ersetzen beispielsweise Føllner-Mengen die Parallellepide  $R_n \subset \mathbb{Z}^d$ . (Eine Folge  $\{G_n\}$  mit  $G_n \subset G$  heißt Føllner-Folge, wenn für beliebige, endliche viele Elemente  $h_1, \dots, h_k$  der Gruppe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(h_1 G_n \cap \dots \cap h_k G_n)}{m(G_n)} = 1$  gilt, wobei  $m$  das Haar-Maß der Gruppe  $G$  bezeichnet.)

**Definition 2.3** Der Grenzwert  $h(\mathfrak{A}, T^{\mathbb{Z}^d}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|R_n|} H(\mathfrak{A}_{R_n})$  heißt **topologische Entropie** der Überdeckung  $\mathfrak{A}$  des Raumes  $X$  bezüglich der Wirkung  $T^{\mathbb{Z}^d}$ .

**Folgerung 2.4** Für jede offene Überdeckung  $\mathfrak{A}$  des Raumes  $X$  gilt

- 1.  $0 \leq h(\mathfrak{A}, T^{\mathbb{Z}^d}) \leq H(\mathfrak{A})$ ,
- 2.  $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \implies h(\mathfrak{A}, T^{\mathbb{Z}^d}) \leq h(\mathfrak{B}, T^{\mathbb{Z}^d})$ .

**Definition 2.5**  $h_t(T^{\mathbb{Z}^d}) := \sup(h(\mathfrak{A}, T^{\mathbb{Z}^d}) \mid \mathfrak{A} \text{ offene Überdeckung von } X)$  heißt **topologische Entropie der Wirkung  $T^{\mathbb{Z}^d}$** .

Die Berechnung der topologischen Entropie nach dieser Definition ist oft recht schwierig, da im allgemeinen unendlich viele offene Überdeckungen zur Supremumsbildung heranzuziehen sind. Der Begriff der verfeinernden Folge kann die Situation oftmals vereinfachen. (Man vergleiche auch [20] und [31] zur allgemeinen Unentscheidbarkeitsproblematik der Entropieberechnung.)

**Definition 2.6** Eine Folge  $\{\mathfrak{A}_n\}$  von offenen Überdeckungen eines kompakten topologischen Raumes  $X$  heißt **verfeinernde Folge**, wenn gilt

1.  $\mathfrak{A}_n \prec \mathfrak{A}_{n+1}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) und
2. zu jeder offenen Überdeckung  $\mathfrak{B}$  von  $X$  existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}_n$ .

**Folgerung 2.7** Unter Verwendung von Folgerung 2.4 ergibt sich: Ist  $\{\mathfrak{A}_n\}$  eine verfeinernde Folge von Überdeckungen des Raumes  $X$ , so gilt  $h_t(T^{\mathbb{Z}^d}) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(\mathfrak{A}_n, T^{\mathbb{Z}^d})$ .

**Folgerung 2.8** 1. Ist  $(X, T^{\mathbb{Z}^d}) = (\Omega^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega^*})$  ein  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystem mit der Proto-Baustein-Menge  $\mathcal{G}_0$ , so ist die Überdeckung  $\mathfrak{A} := \{C(\{G\}) \mid G \in \mathcal{G}_0^-\}$  mit  $\mathcal{G}_0^- := \{H \in \mathcal{G} \mid 0 \in H\}$  und  $C(\{G\}) := \{\mathcal{P} \in \Omega^* \mid G \in \mathcal{P}\}$  eine Zerlegung von  $\Omega^*$  und topologischer Generator. Die Überdeckungen  $\mathfrak{A}_{\mathcal{Z}(n)} := \bigvee_{z \in \mathcal{Z}(n)} \sigma^z \mathfrak{A}$  mit  $\mathcal{Z}(n) = \{z \in \mathbb{Z}^d \mid -n \leq z_i \leq n, i = 1, \dots, d\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) bilden offenbar eine verfeinernde Folge. Mithin gilt

$$h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega^*}) = h(\mathfrak{A}, \sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega^*}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\mathcal{Z}(n)|} H(\mathfrak{A}_{\mathcal{Z}(n)}).$$

Zur Veranschaulichung von  $H(\mathfrak{A}_{\mathcal{Z}(n)})$  betrachten wir für ein fest gewähltes  $z \in \mathbb{Z}^d$  die Überdeckung  $\mathfrak{A} \vee \sigma^z \mathfrak{A} = \{C(\{G\}) \cap C(\{\sigma^z H\}) \mid G, H \in \mathcal{G}_0^-\}$  mit

$$C(\{G\}) \cap C(\{\sigma^z H\}) = \{\mathcal{P} \in \Omega^* \mid G \in \mathcal{P}, \sigma^z H \in \mathcal{P}\} \quad (G, H \in \mathcal{G}_0^-).$$

Die Überdeckung  $\mathfrak{A} \vee \sigma^z \mathfrak{A}$  ist als Zerlegung von  $\Omega^*$  auch minimal, folglich gilt

$$N(\mathfrak{A} \vee \sigma^z \mathfrak{A}) = | \{(G, H) \in (\mathcal{G}_0^-)^2 \mid \exists \mathcal{P} \in \Omega^* : \mathcal{P}|_{\{0, z\}} = \{G, \sigma^z H\} \} |.$$

D. h.,  $N(\mathfrak{A} \vee \sigma^z \mathfrak{A})$  gibt die Anzahl der verschiedenen Teilparkettierungen in  $\Omega^*$  an, die von der Menge  $\{0, z\} \subset \mathbb{Z}^d$  erzeugt werden.

Analog überlegt man sich, daß  $N(\mathfrak{A}_{\mathcal{Z}(n)})$  die Anzahl der verschiedenen vom zentrierten Würfel  $\mathcal{Z}(n)$  erzeugten Teilparkettierungen in  $\Omega^*$  angibt. Bezeichnet man für beliebige endliche Teilmengen  $A \subset \mathbb{Z}^d$  mit  $N(A, \Omega^*)$  die Anzahl der verschiedenen von  $A$  erzeugten Teilparkettierungen in  $\Omega^*$ , so ist  $H(\mathfrak{A}_{\mathcal{Z}(n)}) = \log N(\mathcal{Z}(n), \Omega^*)$  richtig.

Für die topologische Entropie eines  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystems  $(\Omega^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega^*})$  gilt also

$$h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega^*}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\mathcal{Z}(n)|} \log N(\mathcal{Z}(n), \Omega^*). \quad (2.1)$$

Entsprechend den Ausführungen im Anschluß an Eigenschaft 2.2 ist beispielsweise mit  $\mathcal{Z}^+(n) := \{z \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq z_i \leq n\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) auch

$$h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega^*}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\mathcal{Z}^+(n)|} \log N(\mathcal{Z}^+(n), \Omega^*).$$

2. Analog ist für einen  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenraum  $\Omega$  mit dem Alphabet  $S = \{1, \dots, s\}$  die Überdeckung  $\mathfrak{A} := \{\mathfrak{a}_0[i] \mid i = 1, \dots, s\}$  mit  $\mathfrak{a}_0[i] := \{\xi \in \Omega \mid \xi_0 = i\}$  ( $i \in S$ ) eine Zerlegung von  $\Omega$ , und  $\{\mathfrak{A}_{\mathcal{Z}(n)}\}$  bildet eine verfeinernde Folge von Überdeckungen. Man erhält also

$$h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\mathcal{Z}(n)|} H(\mathfrak{A}_{\mathcal{Z}(n)}),$$

wobei  $H(\mathfrak{A}_{\mathcal{Z}(n)}) = \log N(\mathcal{Z}(n), \Omega)$  mit der Anzahl  $N(\mathcal{Z}(n), \Omega)$  der in  $\Omega$  auftretenden Blöcke zur Basis  $\mathcal{Z}(n)$  ist. Wie für  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsysteme kann auch hier die Folge  $\{\mathcal{Z}^+(n)\}$  zur Entropieberechnung herangezogen werden:  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega}) = \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathcal{Z}^+(n)|^{-1} \log N(\mathcal{Z}^+(n), \Omega)$ .

**Bemerkung 2.9** Für einen ein-dimensionalen Punktkonfigurationenraum  $\Omega$  mit der Übergangsmatrix  $\underline{L}$  ist die Anzahl  $N(\mathcal{Z}^+(n), \Omega)$  der in  $\Omega$  auftretenden Blöcke der Länge  $n+1$  gerade gleich  $\sum_{i,j \in S} \underline{L}_{ij}^n$ . Unter Verwendung des Spektralradiustheorems erhält man daraus das folgende Resultat von W. Parry.

**Satz 2.10** ([48]) Ist  $\Omega$  ein ein-dimensionaler Punktkonfigurationenraum mit der Übergangsmatrix  $\underline{L}$ , so gilt

$$h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega}) = \log \lambda,$$

wobei  $\lambda$  der Spektralradius der Matrix  $\underline{L}$  ist. Das heißt,  $\lambda$  ist der Eigenwert maximalen Betrages von  $\underline{L}$ .

Die Aussage von Satz 2.10 liefert ein wichtiges Hilfsmittel zur Bestimmung der topologischen Entropie ein-dimensionaler Punktkonfigurationenräume, welches vermöge des Satzes 1.33 auch für ein-dimensionale Parkettsysteme Anwendung findet. Bei der Entropieberechnung für  $\mathbb{Z}^1$ -Parkettsysteme mit Hilfe dieses Eigenwertkalküls ist jedoch das i. allg. recht große Format und die oft komplizierte Struktur der zugehörigen Übergangsmatrix problematisch.

Für die Klasse der ein-dimensionalen Quadersysteme ist es G. Schwenzfeger in [56] unter Ausnutzung grundlegender Resultate aus der Theorie nichtnegativer ganzzahliger Matrizen gelungen, eine algebraische Gleichung zur Bestimmung des Eigenwertes  $\lambda$  maximalen Betrages anzugeben. Diese Eigenwertgleichung und die daraus ableitbaren Aussagen zum qualitativen Verhalten ein-dimensionaler Quadersysteme stehen im Mittelpunkt des ersten Teils des folgenden Abschnitts 2.2. Für  $\mathbb{Z}^d$ -Punktkonfigurationenräume der Dimension  $d > 1$  ist schon die Ermittlung nichttrivialer Schranken für die topologische Entropie weitaus schwieriger als im ein-dimensionalen Fall, da die Aussagekraft geeigneter Matrizenprodukte für die Abschätzung der Anzahl verschiedener Blöcke mit der Basis  $\mathcal{Z}(n)$  nur gering ist. (Für Entropieuntersuchungen im Fall kommutierender Übergangsmatrizen vergleiche man [40].)

## 2.2 Die topologische Entropie von $\mathbb{Z}^d$ -Quadersystemen

### 2.2.1 Ein-dimensionale Quadersysteme

**Bemerkung 2.11** 1. Jedes ein-dimensionale Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^1, \{l(j)\}_{j=1}^m)$  ist topologisch konjugiert zu dem  $\mathbb{Z}^1$ -Punktkonfigurationenraum  $\Omega = (\mathbb{Z}^1, S, \mathcal{F}, (\bar{\Omega}_\Lambda)_{\Lambda \in \mathcal{F}})$  der Ordnung 2 mit

- $S := \{1, \dots, N\}$  mit  $N := \sum_{j=1}^m l(j)$ ,
- $\mathcal{F} := \{\{x, x+1\} \mid x \in \mathbb{Z}^1\}$  und
- den Restriktionen

$$\bar{\Omega}_{\{0,1\}} := \{(k, k+1) \mid k \in S \setminus S_E\} \cup \bigcup_{k \in S_E} \{(k, 1), (k, 1+l(1)), \dots, (k, 1 + \sum_{j=1}^{m-1} l(j))\},$$

$$\text{wobei } S_E := \{\sum_{j=1}^{m_0} l(j) \mid 1 \leq m_0 \leq m\}.$$

Daraus erhält man unmittelbar die Übergangsmatrix  $\underline{L}$  von  $\Omega$  mit folgender Blockstruktur:  
 $\underline{L} = (L_{rs})_{1 \leq r, s \leq m}$ , wobei

$$L_{rr} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{l(r) \times l(r)} \quad \text{und} \quad L_{rs} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{l(r) \times l(s)} \quad (r \neq s)$$

gilt. Dabei beschreibt die Matrix  $L_{rr}$  die möglichen Übergänge „innerhalb“ eines Bausteines der Länge  $l(r)$  und  $L_{rs}$  den Übergang „zwischen“ zwei verschiedenen Bausteinen der Längen  $l(r)$  und  $l(s)$ .

Analog erhält man die Übergangsmatrix eines Quadersystems  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^1, \{l(j)\}_{j=1}^m, \{n(j)\}_{j=1}^m)$  mit zusätzlichen Baustein einfärbungen: die Blockmatrix  $L_{rr}$  vom Format  $l(r) \times l(r)$  tritt entsprechend  $n(j)$ -mal in  $\underline{L}$  auf.

2. Jedes  $\mathbb{Z}^1$ -Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^1, \{l(j)\}_{j=1}^m)$  ist topologisch transitiv, das heißt die zugehörige Übergangsmatrix  $\underline{L}$  ist irreduzibel. Unter Verwendung des Theorems von Perron-Frobenius (siehe dazu z. B. [21]) folgt damit aus Satz 2.10 die Gültigkeit von  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega^*}) = \log \lambda$ , wobei  $\lambda$  der eindeutig bestimmte einfache positiv reelle Eigenwert maximalen Betrages von  $\underline{L}$  ist.
- Zum Beweis der Transitivität von  $\Omega^*$  reicht es aus, für beliebige zwei Zylinder  $C(\mathcal{A}_i)$  ( $i = 1, 2$ ) mit  $\mathcal{A}_i \in \mathcal{M}_0(\Omega^*, n_i)$ , ( $i = 1, 2, n_1, n_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) die Existenz eines  $a \in \mathbb{Z}^1$  derart zu zeigen, daß  $C(\mathcal{A}_1) \cap \sigma^a C(\mathcal{A}_2) \neq \emptyset$  gilt.

Die Teilparkettierungen  $\mathcal{A}_i$  ( $i = 1, 2$ ) mögen die Darstellungen

$$\mathcal{A}_i = \{\sigma^{x^{(i)}(r)} G_{j_{r,i}} \mid r = 1, \dots, t(i)\} \quad (i = 1, 2)$$

mit  $x^{(i)}(1) < \dots < x^{(i)}(t(i)) \in \mathbb{Z}^1$  und Bausteinen  $G_{j_{r,i}} \in \mathcal{G}_0$  ( $r = 1, \dots, t(i), i = 1, 2$ ) besitzen. Seien weiter  $\mathcal{P}^{(i)} \in C(\mathcal{A}_i)$  ( $i = 1, 2$ ) beliebige Parkettierungen mit  $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{P}^{(i)}$

$(i = 1, 2)$ . Besitzt der Baustein  $G_{j_{t(1)},1}$  in  $\mathcal{A}_1$  die Länge  $l(j_{t(1)},1)$ , so ist für  $a := x^{(1)}(t(1)) - x^{(2)}(1) + l(j_{t(1)},1)$  der Durchschnitt  $C(\mathcal{A}_1) \cap \sigma^a C(\mathcal{A}_2)$  nicht leer: die Parkettierung  $\mathcal{P} \in \Omega^*$ , die aus allen Bausteinen von  $\mathcal{P}^{(1)}$ , die die Punkte  $z \leq x^{(1)}(t(1)) + l(j_{t(1)},1) - 1$  überdecken, und allen Bausteinen von  $\sigma^a \mathcal{P}^{(2)}$ , die die Gitterpunkte  $z \geq x^{(1)}(t(1)) + l(j_{t(1)},1)$  überdecken, gebildet wird, ist offenbar ein Element der Zylinder  $C(\mathcal{A}_1)$  und  $\sigma^a C(\mathcal{A}_2)$  (siehe Abbildung 2.1).

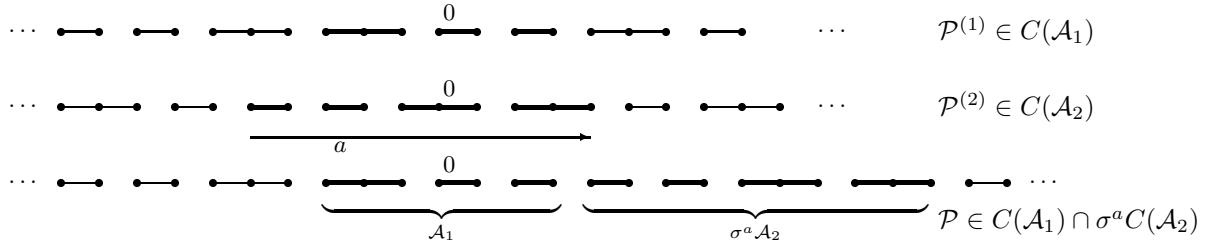


Abbildung 2.1: Zur Konstruktion eines  $a \in \mathbb{Z}^1$  mit  $C(\mathcal{A}_1) \cap \sigma^a C(\mathcal{A}_2) \neq \emptyset$  für gegebene Teilparkettierungen  $\mathcal{A}_i \in \mathcal{M}_0(\Omega^*, n_i)$  ( $i = 1, 2$ ) am Beispiel  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^1, \{2, 3\})$ .

Die Ermittlung der Eigenwertgleichung der im allgemeinen sehr hoch dimensionierten Übergangsmatrix  $\underline{L}$  eines  $\mathbb{Z}^1$ -Quadersystems  $\Omega^*$  macht vom Begriff der „vollständigen Fusionsmatrix“ Gebrauch, der von R. F. Williams ([66]) im Zusammenhang mit Untersuchungen zur topologischen Konjugiertheit von  $\mathbb{Z}^1$ -Punktkonfigurationenräumen eingeführt wurde.

Wir führen folgende Konstruktion aus: enthält die Matrix  $\underline{L}$  vom Format  $n \times n$  ( $n \geq 2$ ) zwei identische Zeilen mit den Nummern  $p < q$ , so wird die  $n \times (n-1)$ -Matrix  $U$  durch Einfügen des Einheitsvektors  $e_{q-1}$  zwischen die  $(p-1)$ -te und die  $p$ -te Zeile der  $(n-1)$ -dimensionalen Einheitsmatrix gebildet. Weiter sei  $V$  die durch Streichen der  $p$ -ten Zeile aus  $\underline{L}$  entstehende Matrix. Dann gilt  $\underline{L} = U \cdot V$ , und wir bezeichnen die  $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix  $\underline{L}_1 := V \cdot U$  als **Fusionsmatrix** von  $\underline{L}$ .

Die sukzessive Fortsetzung dieser Konstruktion solange bis keine identischen Zeilen in der entstehenden Fusionsmatrix auftreten, führt auf die eindeutig bestimmte **vollständige Fusionsmatrix**  $\underline{L}_0$  von  $\underline{L}$ . (Sind mehr als zwei Zeilen in  $\underline{L}$  identisch, so ist bei der Konstruktion nur darauf zu achten, daß stets die Zeile mit der kleineren Nummer gestrichen wird, nicht jedoch auf die Reihenfolge der Auswahl zweier identischer Zeilen.)

**Satz 2.12 (Satz 3.3 in [56])** Die vollständige Fusionsmatrix  $\underline{L}_0$  der Übergangsmatrix  $\underline{L}$  eines  $\mathbb{Z}^1$ -Quadersystems  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^1, \{l(j)\}_{j=1}^m, \{n(j)\}_{j=1}^m)$  hat die Form

$$\underline{L}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{l(m)} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$\text{mit } a_\nu = \begin{cases} n(j) & \text{für } \nu = l(m) - l(j) + 1 \quad (j \in \{1, \dots, m\}) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.3)$$

**Beispiel 2.13** Zur Veranschaulichung der Beweisidee von Satz 2.12 betrachten wir das Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^1, \{2, 3\})$  (ohne Bausteinfärbungen) mit der Übergangsmatrix

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bemerken zunächst, daß die Zeilen mit den Nummern  $l(1) = 2$  und  $l(1) + l(2) = 5$  identisch sind. (Allgemein sind für ein Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^1, \{l(j)\}_{j=1}^m, \{n(j)\}_{j=1}^m)$  gerade die Zeilen mit den Nummern  $l(1)$  und  $N = \sum_{j=1}^m n(j)l(j)$  identisch.)

Weiter ist zu beachten, daß das oben beschriebene Verfahren zur Konstruktion einer Fusionsmatrix bei Gleichheit der Zeilen mit den Nummern  $p < q$  auch auf folgende Weise durchgeführt werden kann:

- i) Die  $p$ -te Zeile in  $\underline{L}$  wird gleich Null gesetzt.
- ii) Addition der  $p$ -ten Spalte zur  $q$ -ten Spalte von  $\underline{L}$ .
- iii) In der entstehenden Matrix wird die  $p$ -te Spalte gleich Null gesetzt.
- iv) Alle nur mit Nullen besetzten Zeilen und Spalten werden gestrichen.

Die Ausführung des Schrittes iv) braucht bei der iterativen Durchführung dieses Verfahrens zur Bestimmung der vollständigen Fusionsmatrix erst nach der Eliminierung aller nichtverschwindenden identischen Zeilen zu erfolgen. Damit ist eine Änderung der Zeilen- und Spaltennummern nach jedem Iterationsschritt unnötig.

Wenden wir dieses Verfahren einmal auf die Übergangsmatrix  $\underline{L}$  von  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^1, \{2, 3\})$  an, so erhalten wir die Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , deren  $(l(1) - 1)$ -te und  $(l(1) + l(2) - 1)$ -te Zeile identisch sind.

(Allgemein sind die Zeilen mit den Nummern  $l(1) - 1$  und  $N - 1$  identisch.) Nochmalige Anwendung des Verfahrens führt also auf die Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , die nach Streichen der nur mit Nullen besetzten Zeilen und Spalten gerade die vollständige Fusionsmatrix  $\underline{L}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  ergibt.

Allgemein wird dieses Verfahren  $l(1)$ -mal angewendet, und die dabei entstehende Matrix hat folgende Eigenschaften:

- die ersten  $l(1)$  Zeilen und Spalten bestehen nur aus Nullen,
- alle restlichen Elemente stimmen mit denen der Matrix  $\underline{L}$  überein mit Ausnahme eines '1'-Eintrages an der Position  $(N, N - l(1) + 1)$ .

Nach  $n(1)l(1)$  Iterationsschritten sind entsprechend die ersten  $n(1)l(1)$  Zeilen und Spalten nur von Nullen besetzt. Des Weiteren steht an der Stelle  $(N, N - l(1) + 1)$  die Zahl  $n(1)$ . Induktion nach der Zahl  $m$  der Proto-Bausteine führt unter Beachtung der abschließenden Streichung aller nur mit Nullen besetzten Zeilen und Spalten auf die in Satz 2.12 angegebene vollständige Fusionsmatrix  $\underline{L}_0$ .

**Folgerung 2.14 (Folgerung 3.4 in [56])** Das charakteristische Polynom der Übergangsmatrix  $\underline{L}$  eines Quadersystems  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^1, \{l(j)\}_{j=1}^m, \{n(j)\}_{j=1}^m)$  hat die Form

$$\Delta(\underline{L})(x) = x^{N-l(m)}(x^{l(m)} - \sum_{j=1}^{m-1} n(j)x^{l(m)-l(j)} - n(m)), \quad (2.4)$$

wobei  $N = \sum_{j=1}^m n(j)l(j)$  ist.

**Definition 2.15** Sei  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^1, \mathcal{G}_0, (\Omega_G)_{G \in \mathcal{G}_0})$  ein  $\mathbb{Z}^1$ -Parkettsystem mit der Übergangsmatrix  $\underline{L}$ . Dann wird das charakteristische Polynom der Übergangsmatrix  $\underline{L}$  auch als das **charakteristische Polynom des Parkettsystems  $\Omega^*$**  bezeichnet, und man schreibt  $\Delta(\Omega^*)(x) := \Delta(\underline{L})(x)$ . Als **charakteristisches Polynom von  $\Omega^*$  modulo  $x$**  bezeichnen wir das Polynom  $\Delta_0(\Omega^*)(x) := \Delta(\Omega^*)(x)/x^k$ , wobei  $k \in \mathbb{N}$  die größte Potenz von  $x$  bezeichnet, die  $\Delta(\Omega^*)(x)$  teilt.

**Bemerkung 2.16** Das charakteristische Polynom modulo  $x$  eines ein-dimensionalen Quadersystems  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^1, \{l(j)\}_{j=1}^m, \{n(j)\}_{j=1}^m)$  hat die Gestalt

$$\Delta_0(\Omega^*)(x) = x^{l(m)} - \sum_{j=1}^{m-1} n(j)x^{l(m)-l(j)} - n(m). \quad (2.5)$$

**Bemerkung 2.17** Nach Satz 2.10 ist die topologische Entropie eines ein-dimensionalen Quadersystems  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^1, \{l(j)\}_{j=1}^m, \{n(j)\}_{j=1}^m)$  gerade  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega^*}) = \log \lambda$ , wobei  $\lambda$  die eindeutig bestimmte positive reelle Wurzel maximalen Betrages von  $\Delta_0(\Omega^*)(x)$  ist.

Mit der Bezeichnung  $S_{\Omega^*}(x) := \sum_{j=1}^m \frac{n(j)}{x^{l(j)}}$  ( $x \in \mathbb{R}, x > 0$ ) gilt also

$$\Delta_0(\Omega^*)(x) = x^{l(m)}(1 - S_{\Omega^*}(x)).$$

Da  $S_{\Omega^*}$  eine monoton fallende Funktion im Intervall  $[1, \infty)$  ist, sind folgende zwei Aussagen richtig:

1.  $\lambda$  ist die einzige reelle Wurzel von  $\Delta_0(\Omega^*)(x)$  im Intervall  $[1, \infty)$ , und es gilt  $S_{\Omega^*}(\lambda) = 1$ .
2. Für alle reellen Zahlen  $x \geq 1$  gilt:

$$\log x \underset{(>)}{<} h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega^*}) \iff 1 \underset{(>)}{<} S_{\Omega^*}(x).$$

Wir wenden uns nun der Untersuchung quantitativer und qualitativer Eigenschaften der topologischen Entropie ein-dimensionaler Quadersysteme ohne zusätzliche Bausteineinfärbungen zu. Dabei ist insbesondere von Interesse, für welche Quadersysteme die topologische Entropie verschwindet und wie sich diese bei gewissen Veränderungen der Proto-Baustein-Menge (wie zum Beispiel Hinzunahme von Bausteinen oder Vergrößerung einzelner Quaderlängen) ändert. Des Weiteren fragen wir danach, wann die topologische Entropie von zwei Quadersystemen übereinstimmt.

**Satz 2.18** Für die topologische Entropie eines  $\mathbb{Z}^1$ -Quadersystems  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^1, \{l(j)\}_{j=1}^m)$  gilt

$$0 \leq h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega^*}) < \log 2. \quad (2.6)$$

Die topologische Entropie des Quadersystems  $\Omega^*$  verschwindet genau dann, wenn die Zahl  $m$  der Proto-Bausteine gleich 1 ist.

**Beweis:**

1. Die Nichtnegativität von  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega^*})$  folgt unmittelbar aus Aussage 1. in Bemerkung 2.17.

Ist die Zahl  $m$  der Proto-Bausteine größer als 1, so ist wegen  $S_{\Omega^*}(1) = m > 1$  die Entropie  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega^*}) > \log 1 = 0$ .

Für  $m = 1$  gilt dagegen  $\Delta_0(\Omega^*)(x) = x^{l(1)} - 1$ , und  $\lambda = 1$  ist die einzige reelle Wurzel der Eigenwertgleichung.

2. Es gilt

$$S_{\Omega^*}(2) = \sum_{j=1}^m 2^{-l(j)} \leq 1 - 2^{-l(m)} < 1,$$

woraus mit Aussage 2. in Bemerkung 2.17 die behauptete Ungleichung  $\log 2 > h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega^*})$  folgt.  $\blacksquare$

**Satz 2.19 (Satz 4.1 in [56]<sup>1</sup>)** Gegeben seien zwei Quadersysteme  $\Omega_i^* = (\mathbb{Z}^1, \{l^{(i)}(j)\}_{j=1}^{m_i})$  ( $i = 1, 2$ ). Dann folgt aus jeder der folgenden zwei Bedingungen

1.  $m_1 = m_2 > 1, \quad l^{(1)}(j) \geq l^{(2)}(j) \quad (\forall j = 1, \dots, m_1)$  und

$$\exists j_0 \in \{1, \dots, m_1\} : \quad l^{(1)}(j_0) > l^{(2)}(j_0),$$

2.  $\{l^{(1)}(j)\}_{j=1}^{m_1} \subsetneq \{l^{(2)}(j)\}_{j=1}^{m_2}$ ,

die Ungleichung  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_1^*}) < h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_2^*})$ .

**Beweis:** Es gelte  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_i^*}) = \log \lambda_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Aus der Gültigkeit von 1. folgt dann  $\lambda_1^{-l^{(1)}(j)} \leq \lambda_1^{-l^{(2)}(j)} \quad (\forall j = 1, \dots, m_1)$ . Wegen  $m_1 > 1$  gilt  $\lambda_1 > 1$  und folglich sogar  $\lambda_1^{-l^{(1)}(j_0)} < \lambda_1^{-l^{(2)}(j_0)}$ . Mithin gilt  $1 = S_{\Omega_1^*}(\lambda_1) < S_{\Omega_2^*}(\lambda_1)$ . Das heißt gemäß Aussage 2. in Bemerkung 2.17 gerade  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_1^*}) = \log \lambda_1 < h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_2^*})$ .

Ebenso folgt aus der Gültigkeit von Bedingung 2. die Ungleichung  $1 = S_{\Omega_1^*}(\lambda_1) < S_{\Omega_2^*}(\lambda_1)$ , und damit die behauptete Entropieungleichung.  $\blacksquare$

Die Interpretation der topologischen Entropie eines  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystems als ein Maß für die Vielfalt und Kompliziertheit seiner Parkettierungen wird durch Satz 2.19 für den Fall ein-dimensionaler Quadersysteme verdeutlicht. Werden die Zahlen  $m$  und  $l(j)$  ( $j = 1, \dots, m$ ) als Anzahl der zur Verfügung stehenden „Moleküle“ und als deren „Moleküllängen“ aufgefaßt, so besagt der Satz mit anderen Worten, daß Verkürzung der Moleküllängen bzw. Hinzunahme neuer Moleküle die Entropie eines gegebenen  $\mathbb{Z}^1$ -Quadersystems vergrößert.

<sup>1</sup>Die Formulierung dieses Satzes bei Schwenzfeger ist nicht korrekt, da im Fall  $m_1 = m_2 = 1$  die Entropien der Quadersysteme  $\Omega_i^*$  ( $i = 1, 2$ ) auch für  $l^{(1)}(1) < l^{(2)}(1)$  gleich sind.

**Bezeichnung 2.20** Sei  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^1, \{l(j)\}_{j=1}^m)$  ein ein-dimensionales Quadersystem und  $\alpha$  eine beliebige natürliche Zahl. Das Quadersystem mit der Menge der Bausteinlängen  $\{\alpha l(j)\}_{j=1}^m$  wird mit dem Symbol  $\Omega_{(\alpha)}^*$  bezeichnet.

**Satz 2.21** Ist  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^1, \{l(j)\}_{j=1}^m)$  ein  $\mathbb{Z}^1$ -Quadersystem, so gilt für jede natürliche Zahl  $\alpha$ :

$$h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_{(\alpha)}^*}) = \frac{1}{\alpha} h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega^*}).$$

**Beweis:** Es gilt

$$S_{\Omega_{(\alpha)}^*}(x) = \sum_{j=1}^m x^{-\alpha l(j)} \quad (\forall x > 0).$$

Folglich ist für die (eindeutig bestimmte) reelle Zahl  $\lambda \in [1, \infty)$  mit  $S_{\Omega^*}(\lambda) = 1$  folgende Gleichungskette richtig:

$$S_{\Omega_{(\alpha)}^*}(\lambda) = \sum_{j=1}^m \lambda^{-\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha l(j)} = S_{\Omega^*}(\lambda) = 1.$$

Das heißt aber gerade

$$h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_{(\alpha)}^*}) = \log(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}) = \frac{1}{\alpha} h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega^*}).$$

■

**Bemerkung 2.22** Aus den Entropiewerten für Quadersysteme, deren Bausteinlängen keinen gemeinsamen Teiler größer als 1 besitzen, lassen sich nach Satz 2.21 die Entropiewerte aller ein-dimensionalen Quadersysteme ohne Bausteinfärbungen bestimmen.

Man bemerke in diesem Zusammenhang auch, daß ein  $\mathbb{Z}^1$ -Quadersystem genau dann topologisch mischend ist, wenn dessen Quaderlängen teilerfremd sind (siehe [56]). Folglich ergibt sich die topologische Entropie eines nicht topologisch mischenden Quadersystems gerade durch „Skalierung“ der topologischen Entropie des „zugehörigen“ mischenden Quadersystems.

Zum Abschluß der Untersuchungen zur Entropie ein-dimensionaler Quadersysteme wenden wir uns der Frage zu, wann zwei gegebene Quadersysteme die gleiche topologische Entropie besitzen.

**Satz 2.23** Zwei ein-dimensionale Quadersysteme  $\Omega_i^* = (\mathbb{Z}^1, \{l^{(i)}(j)\}_{j=1}^{m_i})$  ( $i = 1, 2$ ) mit  $l^{(1)}(m_1) \geq l^{(2)}(m_2)$  besitzen genau dann dieselbe topologische Entropie, wenn ein Polynom  $p(x) = \sum_{i=0}^n x^{a_i}$  ( $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) mit Parametern  $0 =: a_0 < a_1 < \dots < a_n \in \mathbb{N}$  derart existiert, daß  $\Delta_0(\Omega_1^*)(x) = p(x)\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$  gilt. Dann ist

$$\{l^{(1)}(j)\}_{j=1}^{m_1} = [\bigcup_{q=0}^n \{a_n - a_{n-q} + l^{(2)}(k) \mid k = 1, \dots, m_2\}] \setminus \{a_n - a_r \mid r = 0, \dots, n-1\}, \quad (2.7)$$

und die Parameter  $a_0, \dots, a_n$  erfüllen die folgenden zwei Bedingungen:

1. für jedes  $q \in \{0, \dots, n-1\}$  existiert ein Index  $p \in \{q+1, \dots, n\}$  mit

$$a_p - a_q \in \{l^{(2)}(k) \mid k = 1, \dots, m_2\};$$

2. für alle  $r \in \{1, \dots, n\}$  und alle  $\rho \in \{0, \dots, r-1\}$  gilt

$$a_r - a_\rho \notin \{l^{(2)}(k) - l^{(2)}(j) \mid k, j = 1, \dots, m_2; l^{(2)}(k) \neq a_r - a_{\bar{r}}, \forall \bar{r} < r; l^{(2)}(j) \neq a_\rho - a_{\bar{\rho}}, \forall \bar{\rho} < \rho\}.$$

**Beweis:**

- Für die topologische Entropie zweier gegebener Quadersysteme  $\Omega_i^* = (\mathbb{Z}^1, \{l^{(i)}(j)\}_{j=1}^{m_i})$  ( $i = 1, 2$ ) mit  $l^{(1)}(m_1) \geq l^{(2)}(m_2)$  gelte  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1} |_{\Omega_i^*}) = \log \lambda_i$  mit  $\lambda_i \in [1, 2)$  ( $i = 1, 2$ ). Dann ist  $\lambda_1 = \lambda_2$  genau dann richtig, wenn der Quotient  $\Delta_0(\Omega_1^*)(x)/\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$  ein Polynom  $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$  ist, welches keine Wurzeln besitzt, die betragsmäßig größer als  $\lambda_2$  sind. Die Ausführung der Polynomdivision  $\Delta_0(\Omega_1^*)(x)/\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$  zeigt, daß

$$p(x) = x^{a_n} + \sum_{i=1}^{n-1} b_i x^{a_i} + x^{a_0} \quad (2.8)$$

mit  $a_0 := 0 < a_1 < \dots < a_n = l^{(1)}(m_1) - l^{(2)}(m_2) \in \mathbb{N}$  und  $b_i \in \{-1, +1\}$  ( $i = 1, \dots, n_1$ ) gilt, falls  $\Delta_0(\Omega_1^*)(x)$  durch das Polynom  $\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$  teilbar ist.

Man überlegt sich weiter, daß für ein beliebiges Quadersystem  $\Omega_2^* = (\mathbb{Z}^1, \{l^{(2)}(j)\}_{j=1}^{m_2})$  das Produkt  $p(x)\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$ , wobei  $p(x)$  die in (2.8) angegebene Struktur besitzt, nur dann das charakteristische Polynom modulo  $x$  eines Quadersystems  $\Omega_1^* = (\mathbb{Z}^1, \{l^{(1)}(j)\}_{j=1}^{m_1})$  ergibt, wenn die Koeffizienten  $b_i = 1$  für alle  $i = 1, \dots, n_1$  sind.

- Wir zeigen nun, daß das Produkt  $p(x)\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$  mit  $p(x) = \sum_{i=0}^n x^{a_i}$  genau dann charakteristisches Polynom modulo  $x$  für ein zweites Quadersystem  $\Omega_1^* = (\mathbb{Z}^1, \{l^{(1)}(j)\}_{j=1}^{m_1})$  ist, wenn die Bedingungen 1. und 2. an die Parameter  $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_n \in \mathbb{N}$  erfüllt sind. Für  $n = 0$  ist  $p(x) \equiv 1$  und folglich  $p(x)\Delta_0(\Omega_2^*)(x) =: \Delta_0(\Omega_1^*)(x)$  das charakteristische Polynom modulo  $x$  eines Quadersystems.

Für  $n \geq 1$  wird der Beweis durch Induktion nach  $n$  geführt.

Im Fall  $n = 1$  hat das Produkt  $p(x)\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$  die Form

$$p(x)\Delta_0(\Omega_2^*)(x) = x^{l^{(2)}(m_2)+a_1} - \sum_{j=1}^{m_2} x^{l^{(2)}(m_2)-l^{(2)}(j)+a_1} + x^{l^{(2)}(m_2)} - \sum_{j=1}^{m_2} x^{l^{(2)}(m_2)-l^{(2)}(j)}.$$

Nach (2.5) ist dieses Polynom genau dann charakteristisches Polynom modulo  $x$  eines Quadersystems, wenn der Term  $x^{l^{(2)}(m_2)}$  von einem gewissen Term  $-x^{l^{(2)}(m_2)-l^{(2)}(k)+a_1}$  ( $k \in \{1, \dots, m_2\}$ ) kompensiert wird und keiner der verbleibenden Terme  $-x^{l^{(2)}(m_2)-l^{(2)}(j)+a_1}$  ( $j \neq k$ ) und  $-x^{l^{(2)}(m_2)-l^{(2)}(j)}$  ( $j = 1, \dots, m_2$ ) doppelt auftritt. Das heißt aber gerade, es gilt  $a_1 = a_1 - a_0 \in \{l^{(2)}(k) \mid k = 1, \dots, m_2\}$  und

$$a_1 - l^{(2)}(j) \neq -l^{(2)}(i) \quad \forall i, j = 1, \dots, m_2 \quad \text{mit } l^{(2)}(j) \neq a_1.$$

Diese Eigenschaften sind offenbar äquivalent zu den Bedingungen 1. und 2. Das zum Polynom  $p(x)\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$  gehörige Quadersystem besitzt  $2m_2 - 1 = (n+1)(m_2 - 1) + 1$  Proto-Bausteine mit den Längen

$$[\{a_1 + l^{(2)}(j) \mid j = 1, \dots, m_2\} \cup \{l^{(2)}(j) \mid j = 1, \dots, m_2\}] \setminus \{a_1\}.$$

Wir nehmen nun an, die Behauptung sei für ein gewisses  $n \in \mathbb{N}$  richtig. Unter dieser Voraussetzung wird das Produkt  $p(x)\Delta_0(\Omega_2^*) = (x^{a_{n+1}} + \dots + x^{a_1} + 1)\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$  mit Parametern  $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1} \in \mathbb{N}$  betrachtet, die die Bedingungen 1. und 2. des Satzes erfüllen.

Man kann dann schreiben

$$p(x)\Delta_0(\Omega_2^*)(x) = x^{a_1}(\underbrace{x^{b_n} + \dots + x^{b_1} + x^{b_0}}_{=:q(x)})\Delta_0(\Omega_2^*)(x) + \Delta_0(\Omega_2^*)(x),$$

wobei  $b_j := a_{j+1} - a_1$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Wegen  $b_k - b_j = a_{k+1} - a_{j+1}$  ( $k, j = 0, \dots, n$ ) erfüllen die Parameter  $b_0 = 0 < \dots < b_n$  die Bedingungen 1. und 2. des Satzes.

Mithin ist  $q(x)\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$  das charakteristische Polynom modulo  $x$  eines  $\mathbb{Z}^1$ -Quadersystems ohne Bausteinfarbungen. Insbesondere werden in

$$x^{a_1}q(x)\Delta_0(\Omega_2^*)(x) = x^{a_1+b_n+l^{(2)}(m_2)} - \sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^{m_2} x^{a_1+b_k+l^{(2)}(m_2)-l^{(2)}(j)} + \sum_{k=0}^{n-1} x^{a_1+b_k+l^{(2)}(m_2)}$$

alle Terme  $x^{a_1+b_k+l^{(2)}(m_2)} = x^{a_{k+1}+l^{(2)}(m_2)}$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ) mit positiven Vorzeichen durch Terme  $-x^{a_1+b_i+l^{(2)}(m_2)-l^{(2)}(j)} = -x^{a_{i+1}+l^{(2)}(m_2)-l^{(2)}(j)}$  ( $i \in \{0, \dots, n-1\}, j \in \{1, \dots, m_2\}$ ) mit negativen Vorzeichen eliminiert. Des Weiteren tritt keiner der verbleibenden Terme zweimal in der Summe auf.

Zu betrachten bleibt noch die Summe  $x^{a_1}q(x)\Delta_0(\Omega_2^*)(x) + x^{l^{(2)}(m_2)} - \sum_{i=1}^{m_2} x^{l^{(2)}(m_2)-l^{(2)}(i)}$ .

Nach Bedingung 1. existiert ein  $p \in \{1, \dots, n+1\}$  derart, daß

$$a_p - a_0 = a_p \in \{l^{(2)}(j) \mid j = 1, \dots, m_2\}$$

gilt. Folglich ist  $x^{l^{(2)}(m_2)} - x^{a_p+l^{(2)}(m_2)-l^{(2)}(j)} = 0$  für ein gewisses  $j \in \{1, \dots, m_2\}$  richtig.

Weiter tritt kein Term  $-x^{l^{(2)}(m_2)-l^{(2)}(i)}$  ( $i = 1, \dots, m_2$ ) bereits in  $x^{a_1}q(x)\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$  auf: aus

$$a_r \notin \{l^{(2)}(k) - l^{(2)}(\kappa) \mid k, \kappa = 1, \dots, m_2; l^{(2)}(k) \neq a_r - a_{\bar{r}}, \forall \bar{r} < r\}$$

folgt gerade  $l^{(2)}(m_2) - l^{(2)}(i) \neq a_r + l^{(2)}(m_2) - l^{(2)}(k)$  für alle  $i, k = 1, \dots, m_2$  mit  $l^{(2)}(k) \neq a_r - a_{\bar{r}}$  ( $\bar{r} < r$ ) und alle  $r = 1, \dots, n$ .

Somit ist  $p(x)\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$  tatsächlich das charakteristische Polynom modulo  $x$  eines Quadersystems  $\Omega_1^* = (\mathbb{Z}^1, \{l^{(1)}(j)\}_{j=1}^{m_1})$ . Dieses besitzt  $m_1 = (n+2)(m_2-1) + 1$  Proto-Bausteine. (Man beachte, daß  $x^{a_1}q(x)\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$  aus  $(n+1)(m_2-1) + 2$  Termen besteht, die genau  $(n+1)(m_2-1) + 1$  Proto-Bausteinen entsprechen. Dazu kommen  $m_2 + 1$  Terme des Polynoms  $\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$ , von denen einer durch einen Term von  $x^{a_1}q(x)\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$  eliminiert wird.)

Die Längen dieser Proto-Bausteine liest man direkt aus dem Polynom  $p(x)\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$  ab:

$$[\bigcup_{q=0}^{n+1} \{a_{n+1} - a_{n+1-q} + l^{(2)}(j) \mid j = 1, \dots, m_2\}] \setminus \{a_{n+1} - a_r \mid r = 0, \dots, n\}.$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion haben wir folglich bewiesen, daß die Bedingungen 1. und 2. an die Parameter  $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_n$  hinreichend dafür sind, daß

$p(x)\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$  charakteristisches Polynom modulo  $x$  eines  $\mathbb{Z}^1$ -Quadersystems ist.

Zum Beweis der Notwendigkeit von 1. und 2. nehmen wir zunächst an, Bedingung 1. sei nicht erfüllt. Das heißt, es existiert ein  $q \in \{0, \dots, n-1\}$  derart, daß

$$a_p - a_q \notin \{l^{(2)}(j) \mid j = 1, \dots, m_2\} \quad \forall p = q+1, \dots, n$$

gilt. Dann wird der Term  $x^{a_q+l^{(2)}(m_2)}$  in  $p(x)\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$  nicht durch einen Term  $-x^{a_p+l^{(2)}(m_2)-l^{(2)}(j)}$  ( $p > q; j \in \{1, \dots, m_2\}$ ) kompensiert. Das Produkt  $p(x)\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$  ist mithin nicht das charakteristische Polynom modulo  $x$  eines  $\mathbb{Z}^1$ -Quadersystems.

Ist andererseits die Bedingung 2. nicht erfüllt, so existieren Indizes  $r \in \{1, \dots, n\}$  und  $\rho \in \{0, \dots, r-1\}$  derart, daß

$$a_r - a_\rho = l^{(2)}(k) - l^{(2)}(j) \quad \text{für ein } l^{(2)}(k) \neq a_r - a_{\bar{r}}, \forall \bar{r} < r \text{ und } l^{(2)}(j) \neq a_\rho - a_{\bar{\rho}}, \forall \bar{\rho} < \rho.$$

Dann gilt  $x^{a_r+l^{(2)}(m_2)-l^{(2)}(k)} = x^{a_\rho+l^{(2)}(m_2)-l^{(2)}(j)}$ . Wegen der Einschränkungen  $l^{(2)}(k) \neq a_r - a_{\bar{r}}, \forall \bar{r} < r$ , und  $l^{(2)}(j) \neq a_\rho - a_{\bar{\rho}}, \forall \bar{\rho} < \rho$ , treten diese beiden Terme tatsächlich im Produktpolynom  $p(x)\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$  auf. Folglich ist  $p(x)\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$  nicht das charakteristische Polynom modulo  $x$  eines  $\mathbb{Z}^1$ -Quadersystems.

Damit ist die Notwendigkeit der Bedingungen 1. und 2. dafür, daß das Produkt  $p(x)\Delta_0(\Omega_2^*)$  mit  $p(x) = \sum_{i=0}^n x^{a_i}$  charakteristisches Polynom modulo  $x$  eines  $\mathbb{Z}^1$ -Quadersystems ohne Bausteinfärbungen ist, gezeigt. ■

**Folgerung 2.24** Für jedes ein-dimensionale Quadersystem  $\Omega^*$  existieren unendlich viele verschiedene  $\mathbb{Z}^1$ -Quadersysteme, deren topologische Entropie mit  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega^*})$  übereinstimmt.

Insbesondere ist die topologische Entropie keine vollständige Invariante bezüglich (starker) topologischer Konjugiertheit für  $\mathbb{Z}^1$ -Quadersysteme (vgl. Satz 1.55 zur topologischen Konjugiertheit von Quadersystemen).

Im folgenden zweiten Teil dieses Abschnitts widmen wir uns der Untersuchung der topologischen Entropie von Quadersystemen der Gitterdimension  $d > 1$ . Gegenüber der Dimension  $d = 1$  wird sich die Gewinnung qualitativer und quantitativer Aussagen über das Entropieverhalten weitaus schwieriger gestalten, da insbesondere kein Matrix- und Eigenwertkalkül zur Verfügung steht.

## 2.2.2 Mehrdimensionale Quadersysteme

**Definition 2.25** 1. Für ein  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m)$  wird

$$d(\Omega^*) := |\{i \in \{1, \dots, d\} : l_i(j) > 1 \text{ für ein } j \in \{1, \dots, m\}\}|$$

die **eigentliche Dimension** von  $\Omega^*$  genannt.

2. Für natürliche Zahlen  $1 \leq d_0 < d$  und  $i_1, \dots, i_{d_0} \in \{1, \dots, d\}$  bezeichne  $p_{(i_1, \dots, i_{d_0})}^{(d)} : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^{d-d_0}$  diejenige Abbildung, die jedem Vektor  $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{Z}^d$  den Vektor  $\tilde{z} = (z_1, \dots, z_{i_1-1}, z_{i_1+1}, \dots, z_{i_{d_0}-1}, z_{i_{d_0}+1}, \dots, z_d)$  zuordnet, der durch Streichen der Komponenten  $z_{i_1}, \dots, z_{i_{d_0}}$  von  $z$  gebildet wird.
3. Ist  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m)$  ein  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersystem mit  $d_0 := d - d(\Omega^*) > 0$  und sind  $i_1, \dots, i_{d_0} \in \{1, \dots, d\}$  die Koordinatenrichtungen mit  $l_{i_1}(j) = \dots = l_{i_{d_0}}(j) = 1 \forall j = 1, \dots, m$ , so wird  $\tilde{\Omega}^* := (\mathbb{Z}^{d(\Omega^*)}, \{\tilde{\underline{l}}(j)\}_{j=1}^m)$  mit  $\tilde{\underline{l}}(j) := p_{(i_1, \dots, i_{d_0})}^{(d)}(\underline{l}(j))$  ( $j = 1, \dots, m$ ) das zu  $\Omega^*$  gehörige Quadersystem der Dimension  $d(\Omega^*)$  genannt.

**Bemerkung 2.26** Ist die eigentliche Dimension  $d(\Omega^*)$  eines  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersystems  $\Omega^*$  echt kleiner als die Gitterdimension  $d$ , so gilt mit  $d_0(\Omega^*) := d - d(\Omega^*)$  gerade

$$\Omega^* = \bigotimes_{i=1}^{d_0(\Omega^*)} \bigotimes_{n_i \in \mathbb{Z}} \tilde{\Omega}^*,$$

wobei  $\tilde{\Omega}^*$  das zu  $\Omega^*$  gehörige Quadersystem der Dimension  $d(\Omega^*)$  ist. Folglich wird die „wesentliche Dynamik“ von  $(\Omega^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d})$  bereits durch  $(\tilde{\Omega}^*, \sigma^{\mathbb{Z}^{d(\Omega^*)}})$  beschrieben. Insbesondere ist die Zahl  $N(\mathcal{Z}(n), \Omega^*)$  der von dem zentrierten Würfel  $\mathcal{Z}(n) = \{z \in \mathbb{Z}^d : |z_i| \leq n, i = 1, \dots, d\}$  erzeugten Teilkettierungen in  $\Omega^*$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gleich  $N(\tilde{\mathcal{Z}}(n), \tilde{\Omega}^*) \cdot (2n+1)^{d_0(\Omega^*)}$ , wobei  $N(\tilde{\mathcal{Z}}(n), \tilde{\Omega}^*)$  die Zahl der von  $\tilde{\mathcal{Z}}(n) = \{z \in \mathbb{Z}^{d(\Omega^*)} : |z_i| \leq n, i = 1, \dots, d(\Omega^*)\}$  erzeugten Teilkettierungen in  $\tilde{\Omega}^*$  angibt. Aus diesem Zusammenhang erhält man unmittelbar den folgenden Satz über die topologische Entropie von Quadersystemen der eigentlichen Dimension  $d(\Omega^*) < d$ .

**Satz 2.27** Für jedes Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m)$  mit  $d(\Omega^*) < d$  ist die topologische Entropie der Shiftwirkung der Gruppe  $(\mathbb{Z}^d, +)$  auf  $\Omega^*$  gleich der topologischen Entropie der Shiftwirkung der Gruppe  $(\mathbb{Z}^{d(\Omega^*)}, +)$  auf dem zugehörigen Quadersystem  $\tilde{\Omega}^*$  der Dimension  $d(\Omega^*)$ .

**Bemerkung 2.28** Ist  $\Omega^*$  ein Quadersystem der eigentlichen Dimension  $d(\Omega^*) = 1$ , so ist die topologische Entropie der Shiftwirkung auf  $\Omega^*$  gleich  $\log \lambda$ , wobei  $\lambda$  Lösung maximalen Betrages der entsprechenden algebraischen Gleichung des zugehörigen ein-dimensionalen Quadersystems  $\tilde{\Omega}^*$  ist (siehe Abschnitt 2.2.1). In diesem Fall ist demnach die topologische Entropie des Quadersystems  $\Omega^*$  (hinreichend) genau bekannt.

### 2.2.2.1 $\mathbb{Z}^d$ -Quadersysteme der topologischen Entropie Null

In Analogie zur Gitterdimension  $d = 1$  ist auch für  $d > 1$  die Frage von Interesse, wann die topologische Entropie eines  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersystems verschwindet. Wir werden zeigen, daß in jeder Dimension  $d \geq 1$  die topologische Entropie genau dann verschwindet, wenn das Quadersystem nur einen einzigen Proto-Baustein besitzt.

Dieses Resultat wird zunächst für den Fall  $d = 2$  bewiesen. Dazu wird die folgende Periodizitätseigenschaft der Elemente eines zwei-dimensionalen Quadersystems mit nur einem Baustein verwendet, die eine besonders einfache Beschreibung solcher Quadersysteme erlaubt.

(Allgemein ist zu beachten, daß diese Quadersysteme für  $d > 1$  nicht mehr endlich wie im Fall  $d = 1$  sind, sondern aus unendlich vielen endlichen und unendlichen Orbits bestehen.)

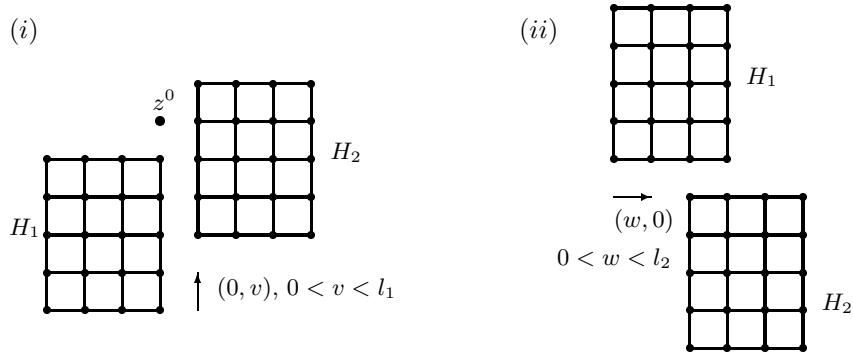
**Eigenschaft 2.29** *Gegeben sei ein  $\mathbb{Z}^2$ -Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{l\})$ . Dann besitzt jede Parkettierung  $\mathcal{P} \in \Omega^*$  wenigstens eine der Perioden  $a^{(i)} = l_i e_i$  ( $i = 1, 2$ ).*

**Beweis:** Jede Parkettierung

$$\mathcal{P} := \sigma^z \{ \sigma^{(k_1 l_1, k_2 l_2)} G \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \} \in \Omega^* \quad (2.9)$$

mit  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $0 \leq z_i < l_i$  ( $i = 1, 2$ ) besitzt die Perioden  $a^{(1)}$  und  $a^{(2)}$ .

Ist  $\mathcal{R} \in \Omega^*$  eine beliebige Parkettierung, die nicht die Darstellung (2.9) besitzt, so gibt es zwei benachbarte Bausteine  $H_1, H_2$  in  $\mathcal{R}$ , die auf eine der folgenden zwei Arten gegeneinander verschoben sind:



Im Fall (i) muß der Punkt  $z^0$  in der Parkettierung  $\mathcal{R}$  von einem Quader  $H_3$  der Ausdehnung  $\underline{l}$  belegt sein, dessen untere „Kante“ der oberen „Kante“ von  $H_1$  genau gegenüberliegt (andernfalls würden Überschneidungen von Bausteinen in der Parkettierung auftreten). Ebenso liegt die obere „Kante“ des unteren Nachbarbausteines  $H_4$  von  $H_2$  der unteren „Kante“ von  $H_2$  genau gegenüber. Induktive Anwendung dieses Gedankens führt auf das Vorhandensein von zwei unendlich langen vertikalen Baustein-Streifen der Breite  $l_1$  in der Parkettierung  $\mathcal{R}$ . Daraus folgt sofort, daß  $\mathcal{R}$  aus unendlich vielen parallelen vertikalen Streifen dieser Art zusammengesetzt ist. Da jeder solche Streifen die Periode  $a^{(2)} = l_2 e_2$  besitzt, hat auch die Parkettierung  $\mathcal{R}$  diese Periode.

Analog erhält man im Fall (ii), daß die Parkettierung  $\mathcal{R}$  aus unendlich vielen horizontalen Baustein-Streifen der Höhe  $l_2$  zusammengesetzt ist und folglich die Periode  $a^{(1)}$  besitzt. ■

**Folgerung 2.30** Sei ein zwei-dimensionales Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{l\})$  gegeben. Mit der Bezeichnung  $S_i := \{\sigma^{kl_ie_i} G \mid k \in \mathbb{Z}\}$  ( $i = 1, 2$ ) gilt  $\Omega^* = \Omega_{(1)}^* \cup \Omega_{(2)}^*$ , wobei

$$\Omega_{(1)}^* = \bigcup_{z_2 \in \{0, \dots, l_2 - 1\}} \bigcup_{\substack{y = (\dots y_{-1} y_0 y_1 \dots) \\ \in \{0, \dots, l_1 - 1\} \mathbb{Z}}} \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \sigma^{(y_i, il_2 - z_2)} S_1,$$

$$\Omega_{(2)}^* = \bigcup_{z_1 \in \{0, \dots, l_1 - 1\}} \bigcup_{\substack{x = (\dots x_{-1} x_0 x_1 \dots) \\ \in \{0, \dots, l_2 - 1\} \mathbb{Z}}} \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \sigma^{(il_1 - z_1, x_i)} S_2$$

jeweils alle diejenigen Parkettierungen in  $\Omega^*$  beinhalten, die die Periode  $l_1 e_1$  bzw.  $l_2 e_2$  besitzen. (Für jedes feste  $z_1 \in \{0, \dots, l_1 - 1\}$  und jede feste Folge  $x \in \{0, \dots, l_2 - 1\} \mathbb{Z}$  ist  $\mathcal{P} := \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \sigma^{(il_1 - z_1, x_i)} S_2$  eine Parkettierung mit der Periode  $l_2 e_2$ , siehe Abbildung 2.2.) Dabei gilt

$$\Omega_{(1)}^* \cap \Omega_{(2)}^* = \bigcup_{\substack{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ 0 \leq z_i < l_i}} \sigma^z \{ \sigma^{(k_1 l_1, k_2 l_2)} G \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \}.$$

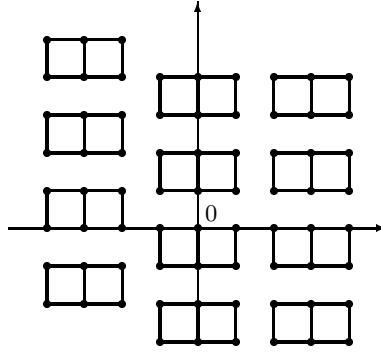


Abbildung 2.2: Ausschnitt einer Parkettierung  $\mathcal{P} \in \Omega_{(2)}^*$  für  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{(3, 2)\})$  mit  $z_1 = 1$ ,  $x_{-1} = 0$  und  $x_0 = x_1 = 1$ .

**Bemerkung 2.31** Für Quadersysteme  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \{l\})$  mit  $d \geq d(\Omega^*) > 2$  ist die Aussage

Jede Parkettierung  $\mathcal{P} \in \Omega^*$  besitzt wenigstens eine der Perioden  $a^{(i)} = l_i e_i$  ( $i = 1, \dots, d$ ).

nicht richtig.

Zur Veranschaulichung dieser Eigenschaft betrachten wir das drei-dimensionale Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^3, \{(2, 3, 4)\})$  und konstruieren eine Parkettierung  $\mathcal{P} \in \Omega^*$  wie folgt

(a) der Halbraum  $\{z \in \mathbb{Z}^3 \mid z_1 \geq 0\}$  wird durch unendliche Bausteinstreifen

$$S_3 := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \sigma^{nl_3 e_3} \{G\}$$

ausparkettiert, wobei die Streifen so in Richtung  $e_3$  gegeneinander verschoben werden, daß keine Periodizität in Richtung  $e_2$  auftritt: zum Beispiel hat

$$\mathcal{A}_1 := \bigcup_{\substack{n_2 \in \mathbb{Z} \\ n_2 \neq 1}} \bigcup_{\substack{n_1 \in \mathbb{Z} \\ n_1 \geq 0}} \sigma^{(2n_1, 3n_2, 0)} S_3 \cup \bigcup_{\substack{n_1 \in \mathbb{Z} \\ n_1 \geq 0}} \sigma^{(2n_1, 3, 1)} S_3$$

die gewünschte Eigenschaft (siehe Abbildung 2.3).

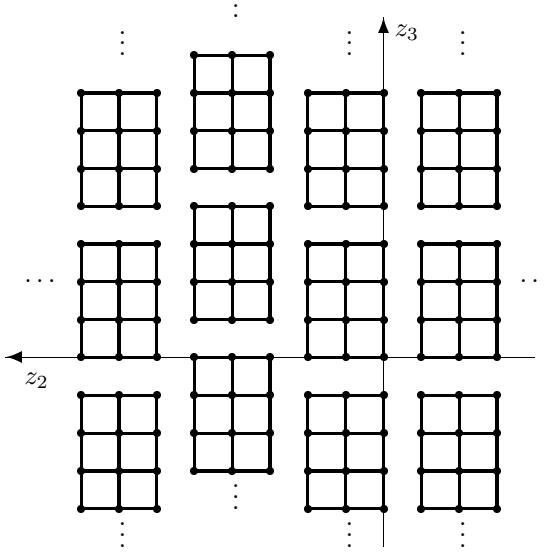


Abbildung 2.3: Die Schnitte der Bausteinanordnung  $\mathcal{A}_1$  mit den Hyperebenen  $\{z \in \mathbb{Z}^3 \mid z_1 = c_1\}$  ( $c_1 \in \mathbb{Z}, z_1 \geq 0$ ).

(b) der Halbraum  $\{z \in \mathbb{Z}^3 \mid z_1 < 0\}$  wird durch unendliche Bausteinstreifen

$$S_2 := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \sigma^{nl_2 e_2} \{G\}$$

ausparkettiert, wobei die Streifen so in Richtung  $e_2$  gegeneinander verschoben werden, daß keine Periodizität in Richtung  $e_3$  auftritt. Diese Eigenschaft hat beispielsweise die Anordnung

$$\mathcal{A}_2 := \bigcup_{\substack{n_3 \in \mathbb{Z} \\ n_3 \neq 1}} \bigcup_{\substack{n_1 \in \mathbb{Z} \\ n_1 < 0}} \sigma^{(2n_1, 0, 4n_3)} S_2 \cup \bigcup_{\substack{n_1 \in \mathbb{Z} \\ n_1 < 0}} \sigma^{(2n_1, 1, 4)} S_2.$$

Dann besitzt die auf diese Weise konstruierte Parkettierung  $\mathcal{P} \in \Omega^* := \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  keine der Perioden  $a^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Für Quadersysteme  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0)$  mit  $2 < d(\Omega^*) \leq d$  existiert somit keine Darstellung (wie in Folgerung 2.30 für  $d = 2$  angegeben) als Vereinigung von Teilaräumen, die aus Parkettierungen mit einer gemeinsamen Periode bestehen.

**Satz 2.32** Die topologische Entropie eines zwei-dimensionalen Quadersystems  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m)$  verschwindet genau dann, wenn die Zahl  $m$  der Proto-Bausteine gleich 1 ist.

**Beweis:**

1. Es gelte  $m = 1$ , und  $\underline{l} = (l_1, l_2)$  sei die Ausdehnung des einzigen Proto-Bausteins von  $\Omega^*$ .

Nach Folgerung 2.30 gilt  $\Omega^* = \Omega_{(1)}^* \cup \Omega_{(2)}^*$ . Mithin ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung

$$N(\mathcal{Z}(n), \Omega^*) \leq N(\mathcal{Z}(n), \Omega_{(1)}^*) + N(\mathcal{Z}(n), \Omega_{(2)}^*)$$

richtig.

Sind für zwei Parkettierungen  $\mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{P}^{(2)} \in \Omega_{(1)}^*$  die Teilparkettierungen  $\mathcal{P}^{(1)}|_{\mathcal{Z}(n)}$  und  $\mathcal{P}^{(2)}|_{\mathcal{Z}(n)}$

verschieden, so gilt für die zugehörigen Parameter  $z_2^{(i)} \in \{0, \dots, l_2 - 1\}$  und  $y^{(i)} \in \{0, \dots, l_1 - 1\}^{\mathbb{Z}}$  ( $i = 1, 2$ ) gerade:

$$z_1^{(1)} \neq z_1^{(2)} \quad \text{oder} \quad (y_{-k}^{(1)} \dots y_k^{(1)}) \neq (y_{-k}^{(2)} \dots y_k^{(2)}),$$

wobei  $2k + 1 = \begin{cases} \lceil \frac{2n}{l_2} \rceil + 1 & , \text{ falls } \lceil \frac{2n}{l_2} \rceil \text{ geradzahlig} \\ \lceil \frac{2n}{l_2} \rceil + 2 & , \text{ falls } \lceil \frac{2n}{l_2} \rceil \text{ ungerade} \end{cases}$  ist.

(Man beachte, daß  $\lceil \frac{2n}{l_2} \rceil + 1$  die Anzahl von horizontalen Streifen  $\sigma^z S_1$  angibt, die zur minimalen Überdeckung von  $\mathcal{Z}(n)$  höchstens benötigt wird.) Mithin gilt  $N(\mathcal{Z}(n), \Omega_{(1)}^*) \leq l_2 \cdot l_1^{\lceil \frac{2n}{l_1} \rceil + 2}$ . Analoge Überlegungen liefern die Abschätzung  $N(\mathcal{Z}(n), \Omega_{(2)}^*) \leq l_1 \cdot l_2^{\lceil \frac{2n}{l_2} \rceil + 2}$ .

Mit  $\bar{c} := \max(l_1, l_2)$  und  $\underline{c} := \min(l_1, l_2)$  gilt also

$$N(\mathcal{Z}(n), \Omega^*) \leq 2 \cdot \bar{c}^{\lceil \frac{2n}{\underline{c}} \rceil + 3}.$$

Gemäß Folgerung 2.8 1. erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\Omega^*}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\mathcal{Z}(n)|} \log N(\mathcal{Z}(n), \Omega^*) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \log (2 \cdot \bar{c}^{\lceil \frac{2n}{\underline{c}} \rceil + 3}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lceil \frac{2n}{\underline{c}} \rceil + 3}{(2n+1)^2} \log \bar{c} = 0. \end{aligned}$$

Wegen der Nichtnegativität der topologischen Entropie ist damit  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\Omega^*}) = 0$  für den Fall  $m = 1$  gezeigt.

2. Es sei  $\Omega^*$  ein  $\mathbb{Z}^2$ -Quadersystem mit  $m > 1$  Proto-Bausteinen.

- (a) Wir betrachten zunächst den Fall der Existenz zweier Proto-Bausteine  $G_{j_1} \neq G_{j_2}$ , deren Ausdehnung in die  $i$ -te Koordinatenrichtung ( $i \in \{1, 2\}$ ) gleich ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $i = 1$ , und es gelte  $l_1(j_1) = l_1(j_2) = c \in \mathbb{N}$ . Wegen  $G_{j_1} \neq G_{j_2}$  ist die Ausdehnung der beiden Bausteine in die zweite Koordinatenrichtung unterschiedlich groß. Wir können deshalb das ein-dimensionale Quadersystem  $\hat{\Omega}^* := (\mathbb{Z}^1, \{l_2(j_1), l_2(j_2)\})$  betrachten. Die topologische Entropie der Shift-Wirkung auf  $\hat{\Omega}^*$  ist nach Satz 2.18 positiv. Es gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [N(\hat{\mathcal{Z}}(n), \hat{\Omega}^*)]^{\frac{1}{2n+1}} = \hat{\lambda}$$

mit  $\hat{\lambda} > 1$ , wobei  $\hat{\mathcal{Z}}(n) := \{z \in \mathbb{Z}^1 \mid -n \leq z \leq n\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ist.

Weiter ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Anzahl aller minimalen Überdeckungen von  $\mathcal{Z}(n) = \{z \in \mathbb{Z}^2 \mid -n \leq z_i \leq n, i = 1, 2\}$  durch vertikale „Streifen“ von Quadern der Ausdehnung  $\underline{l}(j_1), \underline{l}(j_2)$  eine untere Schranke für  $N(\mathcal{Z}(n), \Omega^*)$  (vgl. auch Abbildung 2.4).

Zur minimalen Überdeckung von  $\mathcal{Z}(n)$  werden mindestens  $\lceil \frac{2n+1}{c} \rceil$  vertikale Streifen der Breite  $c = l_1(j_1) = l_1(j_2)$  benötigt. Für die Zusammensetzung jedes solchen Streifens gibt es  $N(\hat{\mathcal{Z}}(n), \hat{\Omega}^*)$  Möglichkeiten. Mithin ist folgende Abschätzung richtig:

$$N(\mathcal{Z}(n), \Omega^*) \geq [N(\hat{\mathcal{Z}}(n), \hat{\Omega}^*)]^{\lceil \frac{2n+1}{c} \rceil} \geq [N(\hat{\mathcal{Z}}(n), \hat{\Omega}^*)]^{\frac{2n+1}{c}}.$$

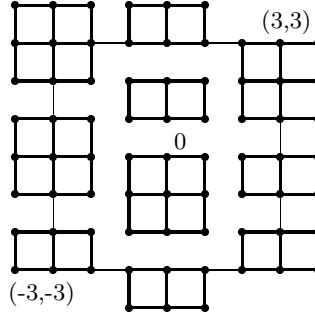


Abbildung 2.4: Eine Teilparkettierung aus vertikalen Streifen der Breite  $c = 3$ , die  $\mathcal{Z}(3)$  minimal überdeckt, für  $\underline{l}(j_1) = (3, 2)$  und  $\underline{l}(j_2) = (3, 3)$ .

Daraus folgt unmittelbar

$$h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\Omega^*}) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c} \log [N(\hat{\mathcal{Z}}(n), \hat{\Omega}^*)]^{\frac{1}{2n+1}} = \frac{1}{c} \log \hat{\lambda} > 0.$$

- (b) Die Ausdehnungen  $\underline{l}(j)$  ( $j = 1, \dots, m$ ) der Proto-Bausteine von  $\Omega^*$  mögen sich in allen Koordinatenrichtungen voneinander unterscheiden. Wir bezeichnen mit  $c$  das kleinste gemeinsame Vielfache der Ausdehnungen  $l_1(1)$  und  $l_1(2)$  der Proto-Bausteine  $G_1$  und  $G_2$  von  $\Omega^*$  in die erste Koordinatenrichtung und bilden die Teilparkettierungen

$$M_i := \bigcup_{k=0}^{\frac{c}{l_1(i)}-1} \{\sigma^{(kl_1(i), 0)} G_i\} \quad (i = 1, 2).$$

Dann ist die Anzahl aller minimalen Überdeckungen von  $\mathcal{Z}(n)$  durch vertikale Streifen der Breite  $c$  von Verschiebungen der Teilparkettierungen  $M_1, M_2$  wieder eine untere Schranke für  $N(\mathcal{Z}(n), \Omega^*)$ .

Bezeichnet  $\hat{\Omega}^* := (\mathbb{Z}^1, \{l_2(1), l_2(2)\})$  das entsprechende ein-dimensionale Quadersystem mit  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\hat{\Omega}^*}) = \log \hat{\lambda} > 0$ , so gilt offenbar

$$N(\mathcal{Z}(n), \Omega^*) \geq [N(\hat{\mathcal{Z}}(n), \hat{\Omega}^*)]^{\lceil \frac{2n+1}{c} \rceil}.$$

Daraus folgt  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\Omega^*}) \geq \frac{1}{c} \log \hat{\lambda} > 0$ .

Damit ist die Positivität der topologischen Entropie für alle zwei-dimensionalen Quadersysteme mit  $m > 1$  gezeigt. ■

**Bezeichnung 2.33** Für ein Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m)$  und einen beliebigen Vektor  $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$  bezeichnet  $\Omega_{\underline{\alpha}}^* := (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}^{(\underline{\alpha})}(j)\}_{j=1}^m)$  mit  $\underline{l}^{(\underline{\alpha})}(j) := (\alpha_1 l_1(j), \dots, \alpha_d l_d(j))$  das durch Streckung aller Quaderausdehnungen von  $\Omega^*$  um die Faktoren  $\alpha_i$  in die  $i$ -te Koordinatenrichtung ( $i = 1, \dots, d$ ) gebildete  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersystem.

**Satz 2.34** Gegeben seien ein Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m)$  und  $\underline{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ . Dann gilt für die topologische Entropie des Quadersystems  $\Omega_{\underline{\alpha}}^*$ :

$$h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega_{\underline{\alpha}}^*}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^d \alpha_i} h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega^*}). \quad (2.10)$$

**Beweis:**

1. Für beliebige natürliche Zahlen  $n_1, \dots, n_d$  bezeichne

$$\mathcal{Z}(n_1, \dots, n_d) := \{z \in \mathbb{Z}^d \mid -n_i \leq z_i \leq n_i, i = 1, \dots, d\}$$

den zentrierten Quader mit den Kantenlängen  $2n_i + 1$  ( $i = 1, \dots, d$ ) in  $\mathbb{Z}^d$ . Nach den Ausführungen im Anschluß an Eigenschaft 2.2 gilt für fest vorgegebene natürliche Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$  auch

$$h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega^*}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\mathcal{Z}(n\alpha_1, \dots, n\alpha_d)|} \log N(\mathcal{Z}(n\alpha_1, \dots, n\alpha_d), \Omega^*) \quad (2.11)$$

für jedes  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersystem  $\Omega^*$ .

Wir benutzen im folgenden das Symbol  $\mathcal{M}_0(\Omega^*, n\underline{\alpha})$  zur Bezeichnung der Menge aller von  $\mathcal{Z}(n\underline{\alpha}) := \mathcal{Z}(n\alpha_1, \dots, n\alpha_d)$  erzeugten Teilparkettierungen in  $\Omega^*$ .

(Es gilt gerade  $N(\mathcal{Z}(n\underline{\alpha}), \Omega^*) = |\mathcal{M}_0(\Omega^*, n\underline{\alpha})|$ .)

2. Seien ein Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m)$  und  $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$  gegeben. Weiter sei  $n$  eine feste natürliche Zahl.

Wir definieren eine Abbildung  $\varphi : \mathcal{M}_0(\Omega_{\underline{\alpha}}^*, n\underline{\alpha}) \rightarrow \mathcal{M}_0(\Omega^*, n)$  auf folgende Weise:

Es sei eine Teilparkettierung  $M \in \mathcal{M}_0(\Omega_{\underline{\alpha}}^*, n\underline{\alpha})$  mit den Bausteinen  $H_1, \dots, H_p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) gegeben, wobei

$$H_r = \sigma^{a(r)} G_{j_r}^{(\underline{\alpha})} \quad (r = 1, \dots, p) \quad \text{mit} \quad a(1) \prec \dots \prec a(p) \in \mathbb{Z}^d$$

gilt. Weiter existieren für jedes  $r \in \{1, \dots, p\}$  eindeutig bestimmte ganze Zahlen  $c_i(r), d_i(r)$  ( $i = 1, \dots, d$ ) mit

$$0 \leq d_i(r) < \alpha_i \quad \text{und} \quad a_i(r) = c_i(r)\alpha_i - d_i(r) \quad (i = 1, \dots, d). \quad (2.12)$$

Mit der Abbildung  $\psi : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d$ , die durch

$$\psi(a) := c = (c_1, \dots, c_d) \iff a_i = c_i\alpha_i - d_i \quad \text{mit} \quad 0 \leq d_i < \alpha_i \quad (c_i, d_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, d)$$

für jedes  $a \in \mathbb{Z}^d$  definiert ist, gilt also

$$0 \leq \frac{\alpha_i \psi(a)_i - a_i}{\alpha_i} \leq \frac{\alpha_i - 1}{\alpha_i} \quad (i = 1, \dots, d, a \in \mathbb{Z}^d). \quad (2.13)$$

Damit können wir als Bild  $\varphi(M)$  der Teilparkettierung  $M \in \mathcal{M}_0(\Omega_{\underline{\alpha}}^*, n\underline{\alpha})$  definieren:

$$\varphi(M) := \{\sigma^{\psi(a(r))} G_{j_r} \mid r = 1, \dots, p\}. \quad (2.14)$$

Offenbar ist  $\varphi(M)$  eine Teilparkettierung in  $\Omega^*$ .

Zu zeigen ist noch, daß  $\varphi(M)$  den zentrierten Würfel  $\mathcal{Z}(n)$  minimal überdeckt. Wir bemerken zunächst die Äquivalenz von  $M \in \mathcal{M}_0(\Omega_{\underline{\alpha}}^*, n\underline{\alpha})$  zu folgenden Eigenschaften:

- (a) Für jeden Gitterpunkt  $z \in \mathbb{Z}^d$  mit  $|z_i| \leq n\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, d$ ) existiert ein Baustein  $H_r \in M$  mit  $z \in H_r$ ; insbesondere gilt für diesen Baustein  $a_i(r) \leq z_i \leq a_i(r) + \alpha_i l_i(j_r)$  für jedes  $i = 1, \dots, d$ .
- (b) Es gilt

$$-n\alpha_i - \alpha_i l_i(j_r) \leq a_i(r) \leq n\alpha_i \quad (i = 1, \dots, d)$$

für jedes  $r = 1, \dots, p$ . (Das bedeutet gerade, daß jeder Baustein  $H_r$  wenigstens einen Punkt des Quaders  $\mathcal{Z}(n\alpha)$  überdeckt.)

Sei nun  $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_d) \in \mathcal{Z}(n)$  beliebig vorgegeben. Dann ist  $z := (\alpha_1 \tilde{z}_1, \dots, \alpha_d \tilde{z}_d)$  ein Element von  $\mathcal{Z}(n\alpha)$ . Nach Eigenschaft (a) von  $M \in \mathcal{M}_0(\Omega_{\alpha}^*, n\alpha)$  existiert ein  $r \in \{1, \dots, p\}$  mit

$$a_i(r) \leq z_i = \alpha_i \tilde{z}_i \leq a_i(r) + \alpha_i l_i(j_r) \quad (i = 1, \dots, d)$$

Daraus folgt mit Eigenschaft (2.13) der Abbildung  $\psi$  weiter:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_i &\leq \frac{a_i(r)}{\alpha_i} + l_i(j_r) = \psi(a(r))_i + l_i(j_r) - \underbrace{\frac{\alpha_i \psi(a(r))_i - a_i(r)}{\alpha_i}}_{\geq 0} \\ &\leq \psi(a(r))_i + l_i(j_r) \quad (i = 1, \dots, d). \end{aligned}$$

Analog erhält man für jedes  $i = 1, \dots, d$

$$\tilde{z}_i \geq \frac{a_i(r)}{\alpha_i} = \psi(a(r))_i - \underbrace{\frac{\alpha_i \psi(a(r))_i - a_i(r)}{\alpha_i}}_{\leq \frac{\alpha_i - 1}{\alpha_i}} > \psi(a(r))_i - 1.$$

Das heißt, der Gitterpunkt  $\tilde{z} \in \mathcal{Z}(n)$  wird von dem Baustein  $\sigma^{\psi(a(r))} G_{j_r} \in \varphi(M)$  überdeckt. Entsprechend zeigt man

$$-n - l_i(j_r) \leq \psi(a(r))_i < n + 1 \quad (i = 1, \dots, d)$$

für jedes  $r \in \{1, \dots, p\}$ , womit  $\varphi(M) \in \mathcal{M}_0(\Omega^*, n)$  bewiesen ist.

3. Im nächsten Schritt zeigen wir die Gültigkeit von

$$|\mathcal{M}_0(\Omega_{\alpha}^*, n\alpha)| \geq |\mathcal{M}_0(\Omega^*, n)| \cdot \prod_{i=1}^d \alpha_i \quad (2.15)$$

für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Sei dazu  $\hat{M} \in \mathcal{M}_0(\Omega^*, n)$  eine beliebige Teilparkettierung mit den Bausteinen  $\hat{H}_1, \dots, \hat{H}_q$  ( $q \in \mathbb{N}$ ), wobei  $\hat{H}_r = \sigma^{\hat{a}(r)} G_{j_r}$  ( $r = 1, \dots, q$ ) mit  $\hat{a}(1) \prec \dots \prec \hat{a}(q) \in \mathbb{Z}^d$  gilt.

Dann ist  $M := \{H_1, \dots, H_q\}$  mit

$$a(r) := (\alpha_1 \hat{a}_1(r), \dots, \alpha_d \hat{a}_d(r)) \quad \text{und} \quad H_r := \sigma^{a(r)} G_{j_r}^{(\alpha)} \quad (r = 1, \dots, q)$$

eine Teilparkettierung aus  $\mathcal{M}_0(\Omega_{\alpha}^*, n\alpha)$ , die durch  $\varphi$  auf  $\hat{M}$  abgebildet wird. (Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Abbildung in Teil 2. des Beweises.)

Weiter gilt für jedes  $v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{Z}^d$  mit  $0 \leq v_i < \alpha_i$  ( $i = 1, \dots, d$ ) nach Konstruktion von  $\varphi$  auch  $\varphi(\sigma^{-v} M) = \hat{M}$ . Mithin ist  $|\varphi^{-1}(\hat{M})| \geq \prod_{i=1}^d \alpha_i$  für alle  $\hat{M} \in \mathcal{M}_0(\Omega^*, n)$  richtig, woraus die Gültigkeit von (2.15) folgt.

4. Zu ermitteln bleibt noch eine Abschätzung von  $|\mathcal{M}_0(\Omega_{\underline{\alpha}}^*, n_{\underline{\alpha}})|$  nach oben.

Wir betrachten dazu eine Teilparkettierung  $M \in \mathcal{M}_0(\Omega_{\underline{\alpha}}^*, n_{\underline{\alpha}})$  mit  $M = \{H_r\}_{r=1}^p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) und  $H_r = \sigma^{a(r)} G_{j_r}^{(\underline{\alpha})}$ ,  $a(r) \in \mathbb{Z}^d$  ( $r = 1, \dots, p$ ). Dann ist für alle Bausteine  $H_r \in M$ , die einen „Geradenabschnitt“

$$\{z \in \mathcal{Z}(n_{\underline{\alpha}}) \mid z_{i_1} = c_1, \dots, z_{i_{d-1}} = c_{d-1}\}$$

mit fest vorgegebenen Koordinatenrichtungen  $i_1, \dots, i_{d-1} \in \{1, \dots, d\}$  und Konstanten  $-n\alpha_{i_k} \leq c_k \leq n\alpha_{i_k}$  ( $k = 1, \dots, d-1$ ) überdecken, die Verschiebung

$$\alpha_{i_d} \psi(a(r))_{i_d} - a_{i_d}(r) \quad (i_d \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i_1, \dots, i_{d-1}\})$$

eine Konstante zwischen 0 und  $\alpha_{i_d} - 1$ .

Insgesamt gibt es somit für jede feste „Gerade“ in Richtung  $e_{i_d}$  höchstens  $\alpha_{i_d}$  Verschiebungen der zugehörigen Bausteine in  $M$  derart, daß die entsprechende Teilparkettierung aus  $\mathcal{M}_0(\Omega_{\underline{\alpha}}^*, n_{\underline{\alpha}})$  auf die gleiche Bild-Teilparkettierung in  $\mathcal{M}_0(\Omega^*, n)$  abgebildet wird. (Siehe auch Abbildung 2.5 für die Dimension  $d = 2$ .)

Wir benutzen weiter, daß von den  $\prod_{k=1}^{d-1} (2n\alpha_{i_k} + 1)$  verschiedenen Geraden in die Koordinatenrichtung  $i_d \in \{1, \dots, d\} \setminus \{i_1, \dots, i_{d-1}\}$  im Quader  $\mathcal{Z}(n_{\underline{\alpha}})$  höchstens  $(2n+1)^{d-1}$  Geraden unabhängig voneinander hinsichtlich einer Verschiebung ihrer Bausteine sind. (Dies folgt aus der Tatsache, daß die Ausdehnung jedes Quaders von  $\Omega_{\underline{\alpha}}^*$  in Richtung  $i_k$  ( $k = 1, \dots, d-1$ ) nicht kleiner als  $\alpha_{i_k}$  ist, vgl. auch Abbildung 2.5.)

Mithin hat jede Teilparkettierung  $\hat{M} \in \mathcal{M}_0(\Omega^*, n)$  höchstens  $(\prod_{i=1}^d \alpha_i)^{(2n+1)^{d-1}}$  Urbilder unter der Abbildung  $\varphi$ . Folglich gilt

$$|\mathcal{M}_0(\Omega_{\underline{\alpha}}^*, n_{\underline{\alpha}})| \leq |\mathcal{M}_0(\Omega^*, n)| \cdot \left( \prod_{i=1}^d \alpha_i \right)^{(2n+1)^{d-1}}.$$

5. Nach Teil 3. des Beweises gilt:

$$\begin{aligned} h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega_{\underline{\alpha}}^*}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\mathcal{Z}(n_{\underline{\alpha}})|} \log |\mathcal{M}_0(\Omega_{\underline{\alpha}}^*, n_{\underline{\alpha}})| \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+1)^d} \cdot \frac{(2n+1)^d}{\prod_{i=1}^d (2n + \frac{1}{\alpha_i})} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^d \alpha_i} \log (|\mathcal{M}_0(\Omega^*, n)| \cdot \prod_{i=1}^d \alpha_i) \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^d \alpha_i} h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega^*}). \end{aligned}$$

Andererseits ist nach Beweisteil 4. auch

$$\begin{aligned} h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega_{\underline{\alpha}}^*}) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\prod_{i=1}^d (2n\alpha_i + 1)} \log \left( |\mathcal{M}_0(\Omega^*, n)| \cdot \left( \prod_{i=1}^d \alpha_i \right)^{(2n+1)^{d-1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\prod_{i=1}^d (2n\alpha_i + 1)} \log |\mathcal{M}_0(\Omega^*, n)| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^{d-1}}{\prod_{i=1}^d (2n\alpha_i + 1)} \log \prod_{i=1}^d \alpha_i \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^d \alpha_i} h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega^*}) \end{aligned}$$

richtig. Damit ist die Behauptung des Satzes bewiesen. ■

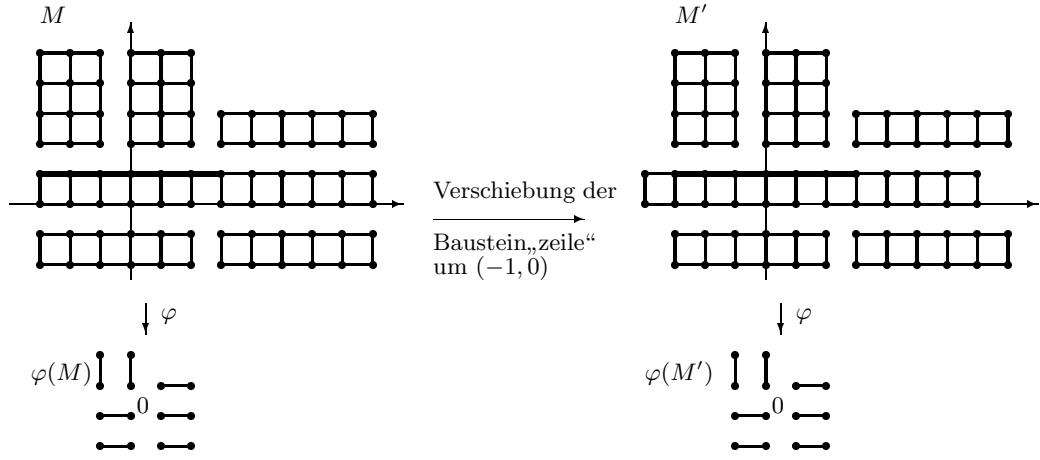


Abbildung 2.5: Für  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{(1, 2), (2, 1)\})$  und  $\underline{\alpha} = (3, 2)$  haben die Bausteine der „Zeile“  $\{z \in \mathcal{Z}(\underline{\alpha}) \mid z_2 = 1\}$  in der Teilparkettierung  $M \in \mathcal{M}_0(\Omega_{\underline{\alpha}}^*, \underline{\alpha})$  ( $n = 1$ ) die Verschiebung  $\alpha_1 \psi(a(r))_1 - a_1(r) = 0$ . Die durch Verschiebung aller Bausteine dieser Zeile um  $(-1, 0)$  gebildete Teilparkettierung  $M'$  hat das Bild  $\varphi(M') = \varphi(M)$ .

Man beachte, daß hier der Wert der Verschiebung  $\alpha_1 \psi(a(r))_1 - a_1(r)$  für die Bausteine der Zeile  $\{z \in \mathcal{Z}(\underline{\alpha}) \mid z_2 = 0\}$  stets gleich dem Wert der Verschiebung für die Bausteine der darüberliegenden Zeile ist.

**Bemerkung 2.35** 1. Die Aussage des Satzes 2.34 erlaubt die exakte Berechnung der topologischen Entropie  $d$ -dimensionaler Quadersysteme  $\Omega^*$ , deren Quaderausdehnungen in  $d - 1$  Koordinatenrichtungen jeweils nur einen möglichen Wert annehmen, durch die Bestimmung der topologischen Entropie eines ein-dimensionalen Quadersystems. Die Bausteinlängen dieses Systems sind gerade die Ausdehnungen der Quader von  $\Omega^*$  in die verbleibende „variable“ Koordinatenrichtung.

2. Für die Änderung der topologischen Entropie von  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersystemen mit konstanter Baustinausdehnung in  $d - 1$  Koordinaten bei Hinzunahme von Proto-Bausteinen (derselben Eigenschaft) bzw. bei Verkleinerung der Ausdehnung eines Proto-Bausteines in die entsprechend „variable“ Koordinatenrichtung gelten analoge Aussagen wie für ein-dimensionale Quadersysteme.

Ist beispielsweise  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m)$  ein Quadersystem mit  $l_i(j) = c_i \in \mathbb{N}$  ( $\forall j = 1, \dots, m$ ,  $i = 2, \dots, d$ ), so besitzt jedes Quadersystem  $\Omega_1^* := (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}(j)\}_{j=1}^{m+1})$  mit einer zusätzlichen Baustinausdehnung  $\underline{l}(m+1) = (l_1(m+1), c_2, \dots, c_d)$ , wobei  $l_1(m+1) \notin \{l_1(j) \mid j = 1, \dots, m\}$  gilt, echt größere topologische Entropie als  $\Omega^*$ .

Ebenso folgt für Quadersysteme  $\Omega_i^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}^{(i)}(j)\}_{j=1}^m)$  ( $i = 1, 2$ ) mit  $m > 1$  und  $l_k^{(1)}(j) = l_k^{(2)}(j) = c_k \in \mathbb{N}$  für alle  $j = 1, \dots, m$  und jedes  $k = 2, \dots, d$  aus der Eigenschaft

$$l_1^{(1)}(j) \geq l_1^{(2)}(j) \quad (\forall j = 1, \dots, m) \quad \text{und} \quad \exists j_0 \in \{1, \dots, m\} : l_1^{(1)}(j_0) > l_1^{(2)}(j_0)$$

die Gültigkeit von  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega_1^*}) < h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega_2^*})$ .

**Satz 2.36** Die topologische Entropie eines  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersystems  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m)$  verschwindet genau dann, wenn die Zahl  $m$  der Proto-Bausteine gleich 1 ist.

### Beweis:

1. Es gelte  $m = 1$  mit  $\underline{l} := \underline{l}(1)$ . Gemäß Satz 2.34 gilt dann

$$h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega^*}) = \frac{1}{\prod_{i=1}^d l_i} h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega_0^*}),$$

wobei  $\Omega_0^* = (\mathbb{Z}^d, \{(1, \dots, 1)\})$  das Quadersystem ist, dessen einziger Proto-Baustein  $G_0 := \{0\}$  nur aus dem Nullpunkt besteht.

Offenbar enthält  $\Omega_0^*$  nur eine einzige Parkettierung. Folglich ist  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega_0^*}) = 0$ , und damit verschwindet auch die topologische Entropie von  $\Omega^*$ .

2. Die Anzahl  $m$  der Bausteine von  $\Omega^*$  sei größer als 1.

Die Ausdehnungen  $\underline{l}(1), \underline{l}(2)$  der Proto-Bausteine  $G_1, G_2$  von  $\Omega^*$  unterscheiden sich in wenigstens einer Koordinate. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte  $l_d(1) \neq l_d(2)$ .

Weiter bezeichne  $c_i$  für jedes  $i = 1, \dots, d-1$  das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen  $l_i(1)$  und  $l_i(2)$ . Damit bilden wir die Teilparkettierungen

$$M_j := \bigcup_{k_1=0}^{\frac{c_1}{l_1(j)}-1} \dots \bigcup_{k_{d-1}=0}^{\frac{c_{d-1}}{l_{d-1}(j)}-1} \{ \sigma^{(k_1 l_1(j), \dots, k_{d-1} l_{d-1}(j), 0)} G_j \} \quad (j = 1, 2).$$

Dann ist die Anzahl aller minimalen Überdeckungen von  $\mathcal{Z}(n)$  durch „Streifen“ von Verschiebungen der Teilparkettierungen  $M_1$  und  $M_2$  in Richtung  $e_d$  eine untere Schranke für  $N(\mathcal{Z}(n), \Omega^*)$ .

Analog zum Beweis des Satzes 2.32 folgt unter Verwendung des ein-dimensionalen Quadersystems  $\hat{\Omega}^* = (\mathbb{Z}^1, \{l_d(1), l_d(2)\})$  echt positiver topologischer Entropie die Gültigkeit von  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega^*}) > 0$ . ■

#### 2.2.2.2 Zur Abschätzung der Entropie mehrdimensionaler Quadersysteme

Das Ziel der folgenden Untersuchungen ist die Ermittlung oberer und unterer Schranken für die topologische Entropie beliebiger  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersysteme der Gitterdimension  $d > 1$ . Dabei werden vor allem zwei Ansatzpunkte genauer untersucht:

1. Jedem  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersystem  $\Omega^*$  können durch geeignete Abbildungsverfahren (vgl. auch das Vorgehen im Beweis von Satz 2.34) gewisse ein-dimensionale Quadersysteme zugeordnet werden, deren (leicht berechenbare) Entropie zur Gewinnung oberer und unterer Schranken für  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega^*})$  verwendet werden kann.
2. Für jedes  $d$ -dimensionale Quadersystem  $\Omega^*$  bildet  $\{|\mathcal{Z}(n)|^{-1} \log N(\mathcal{Z}(n), \Omega^*)\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Folge, deren Grenzwert die topologische Entropie  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega^*})$  von  $\Omega^*$  ist (vgl. Abschnitt 2.1). Durch Bestimmung der Anzahl  $N(\mathcal{Z}(n), \Omega^*)$  aller von  $\mathcal{Z}(n)$  erzeugten Teilparkettierungen in  $\Omega^*$  für geeignet gewähltes  $n \in \mathbb{N}$  kann somit für jedes Quadersystem eine Abschätzung der topologischen Entropie nach oben ermittelt werden. Die Zahl  $N(\mathcal{Z}(n), \Omega^*)$  kann durch die wiederholte Abarbeitung eines Algorithmus zur Erzeugung überschneidungsfreier Überdeckungen endlicher Gebiete von einem Computer bestimmt werden.

Zur Vereinfachung der Bezeichnungen werden die folgenden Überlegungen zur Abschätzung der topologischen Entropie von Quadersystemen nur für die Dimension  $d = 2$  durchgeführt. Die prinzipielle Herangehensweise ist jedoch auch für höhere Dimensionen anwendbar.

**Satz 2.37** 1. Die topologische Entropie eines Quadersystems  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \mathcal{G}_0)$  ist nicht kleiner als die Entropie jedes seiner Teilsysteme  $\hat{\Omega}^* = (\mathbb{Z}^2, \hat{\mathcal{G}}_0)$  mit  $\emptyset \neq \hat{\mathcal{G}}_0 \subsetneq \mathcal{G}_0$ .

2. Es sei  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m)$  ein zwei-dimensionales Quadersystem.

Wir bezeichnen für jede Indexmenge  $\{j_1, \dots, j_n\} \subset \{1, \dots, m\}$  ( $1 \leq n \leq m$ ) mit dem Symbol  $\lambda^{(i)}(j_1, \dots, j_n)$  ( $i = 1, 2$ ) die positive Wurzel maximalen Betrages des charakteristischen Polynoms des ein-dimensionalen Quadersystems mit den Bausteinlängen  $\{l_i(j_s)\}_{s=1}^n$ , wobei mehrfach auftretende Längen durch Einführung zusätzliche Bausteinfärbungen berücksichtigt werden.

Dann gilt

$$h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\Omega^*}) \geq \max_{n=1, \dots, m} \max_{\{j_1, \dots, j_n\} \subset \{1, \dots, m\}} \frac{\log \lambda^{(i)}(j_1, \dots, j_n)}{\text{kgV}(l_k(j_1), \dots, l_k(j_n))} \quad (k \in \{1, 2\} \setminus \{i\}, i = 1, 2),$$

wobei  $\text{kgV}(n_1, \dots, n_r)$  das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen  $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$  bezeichnet.

**Beweis:**

1. Ist  $\hat{\mathcal{G}}_0 \neq \emptyset$  eine echte Teilmenge von  $\mathcal{G}_0$ , so gilt für  $\hat{\Omega}^* := (\mathbb{Z}^2, \hat{\mathcal{G}}_0)$  offenbar  $\hat{\Omega}^* \subsetneq \Omega^*$ . Mithin ist für jede natürliche Zahl  $n$  auch  $N(\mathcal{Z}(n), \hat{\Omega}^*) < N(\mathcal{Z}(n), \Omega^*)$ , woraus gemäß (2.1) die Behauptung  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\hat{\Omega}^*}) \leq h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\Omega^*})$  folgt.
2. Die behauptete Ungleichung folgt unmittelbar durch Anwendung der im Beweisteil 2. (b) von Satz 2.32 entwickelten „Streifenkonstruktion“ für  $1 \leq n \leq m$  Bausteine der Ausdehnungen  $\underline{l}(j_1), \dots, \underline{l}(j_n)$  in jede der zwei Koordinatenrichtungen  $i \in \{1, 2\}$ , wobei eventuell mehrfach auftretende Ausdehnungen  $l_i(j_s)$  unterschiedliche Einfärbungen der Bausteine des entsprechenden ein-dimensionalen Quadersystems nach sich ziehen. ■

**Beispiel 2.38** 1. Wir betrachten das Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2)\})$ . Die topologische Entropie von  $\Omega^*$  ist gemäß Teil 1. des Satzes 2.37 nicht kleiner als die des Teilsystems  $\hat{\Omega}^* := (\mathbb{Z}^2, \{(1, 2), (1, 3)\})$  der eigentlichen Dimension  $d(\hat{\Omega}^*) = 1$ . Daraus ergibt sich die untere Schranke  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\hat{\Omega}^*}) = \log 1.3247$  für die Entropie von  $\Omega^*$ .

Anwendung von Teil 2. des Satzes 2.37 liefert die besseren unteren Schranken

$$\begin{aligned} h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\Omega^*}) &\geq \max \left( \frac{1}{2} \log \lambda^{(1)}(1, 3, 4), \frac{1}{2} \log \lambda^{(2)}(1, 2, 3, 4) \right) \\ &= \max(\log \sqrt{2}, \log \sqrt{2.14789}) = \log 1.4655. \end{aligned}$$

(Dabei sind  $\log \lambda^{(1)}(1, 3, 4) = \log 2$  und  $\log \lambda^{(2)}(1, 2, 3, 4) = \log 2.14789$  die Entropien der ein-dimensionalen Quadersysteme  $(\mathbb{Z}^1, \{1, 2\}, \{1, 2\})$  und  $(\mathbb{Z}^1, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 1\})$ .)

2. Wir fügen zu dem in Teil 1. betrachteten Quadersystem noch zwei Bausteine hinzu und erhalten das System  $\Omega_2^* := (\mathbb{Z}^2, \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (6, 1), (6, 2)\})$  mit je 3 verschiedenen Bausteinbreiten und -höhen. Die unter 1. ermittelte untere Schranke für die topologische Entropie des Teilsystems  $\Omega^*$  ist auch eine untere Schranke für  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\Omega_2^*})$ . Diese untere Schranke wird auch durch Anwendung von Teil 2. des Satzes 2.37 nicht mehr verbessert, man erhält nämlich:

$$\begin{aligned} h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\Omega^*}) &\geq \max \left( \frac{1}{2} \log \lambda^{(1)}(1, 3, 4, 5, 6), \frac{1}{2} \log \lambda^{(2)}(1, 2, 3, 4) \right) \\ &= \max (\log \sqrt{2.0381}, \log \sqrt{2.14789}) = \log 1.4655. \end{aligned}$$

Dieses Resultat ist in der relativ großen Ausdehung der hinzugefügten Bausteine in eine Koordinatenrichtung begründet. Hieran wird ein Nachteil der „Streifenmethode“, die der Aussage 2. von Satz 2.37 zugrundeliegt, deutlich.

Wir wenden uns nun der Ermittlung oberer Schranken für die topologische Entropie zweidimensionaler Quadersysteme zu.

**Bezeichnung 2.39** Es sei  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m)$  ein  $\mathbb{Z}^2$ -Quadersystem mit  $\{l_i(j)\}_{j=1}^m = \{k_1, \dots, k_r\}$  ( $r > 1$ ) für ein festes  $i \in \{1, 2\}$ , wobei  $k_1 < k_2 < \dots < k_r \in \mathbb{N}$  gilt. Weiter bezeichne  $\bar{m}_k$  für  $k := 3-i$  die Anzahl der verschiedenen Längen  $l_k(j)$  ( $j = 1, \dots, m$ ), und es gelte  $l_k(j_1) < \dots < l_k(j_{\bar{m}_k})$  mit den Vielfachheiten  $n^{(k)}(s) := |\{j : l_k(j) = l_k(j_s)\}|$  ( $s = 1, \dots, \bar{m}_k$ ).

Damit ist  $\bar{\Omega}_{(i)}^* := (\mathbb{Z}^2, \{\bar{l}^{(i)}(s)\}_{s=1}^{\bar{m}_k}, \{n^{(i)}(s)\}_{s=1}^{\bar{m}_k})$  das zugehörige Quadersystem mit den Ausdehnungen  $\bar{l}_\kappa^{(i)}(s) := \begin{cases} 1 & : \kappa = i \\ l_k(j_s) & : \kappa = k \neq i \end{cases}$  ( $\kappa \in \{1, 2\}$ ,  $s = 1, \dots, \bar{m}_k$ ).

Mit  $\underline{\Omega}_{(i)}^* := (\mathbb{Z}^2, \{\underline{l}(j) \mid l_i(j) = k_1\})$  wird das Teilsystem von  $\Omega^*$  bezeichnet, welches alle Quaderbausteine umfaßt, deren Ausdehnung in Richtung  $e_i$  gleich  $k_1$  ist.

Im folgenden werden zunächst solche Systeme betrachtet, deren Baustinausdehnungen in einer der beiden Koordinatenrichtungen nur die zwei Werte  $1 = k_1 < k_2 \in \mathbb{N}$  annehmen können.

**Satz 2.40** Ist  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m)$  ein Quadersystem mit den zwei Baustinausdehnungen  $1 =: k_1 < k_2 \in \mathbb{N}$  in Richtung  $e_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ), so gilt

$$h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\Omega^*}) \leq \frac{1}{k_2} (h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\bar{\Omega}_{(i)}^*}) + (k_2 - 1) h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\underline{\Omega}_{(i)}^*}) + \log C_i(\Omega^*)), \quad (2.16)$$

mit

$$C_i(\Omega^*) = \begin{cases} \binom{k_2+1}{2}^{\frac{1}{3l_0(i)}} & : 2 \leq k_2 \leq 7 \\ \binom{k_2+2}{3}^{\frac{1}{4l_0(i)}} & : 8 \leq k_2 \leq 32 \\ \binom{k_2+3}{4}^{\frac{1}{5l_0(i)}} & : 33 \leq k_2 \leq 115 \\ k_2^{\frac{1}{l_0(i)}} & : k_2 > 115 \end{cases} \quad (2.17)$$

und  $l_0(i) := \min (l_{3-i}(j) \mid j \in \{1, \dots, m\} : l_i(j) > k_1)$ .

**Beweis:** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $i = 1$ .

1. Wir konstruieren für jede Zahl  $n \in \mathbb{N}$  eine Abbildung  $\varphi : \mathcal{M}_0(\Omega^*, (nk_2, n)) \rightarrow \mathcal{M}_0(\bar{\Omega}_{(1)}^*, n)$  auf folgende Weise (man beachte dabei, daß  $\bar{\Omega}_{(1)}^*$  ein Quadersystem mit zusätzlichen Bausteinfärbungen ist, d. h. ein Element von  $\mathcal{M}_0(\bar{\Omega}_{(1)}^*, n)$  ist charakterisiert durch eine von  $\mathcal{Z}(n)$  erzeugte Teilparkettierung  $\mathcal{A}$  in  $\pi(\bar{\mathcal{G}}_0^{(1)})$  und einer Einfärbung der Bausteine  $H \in \mathcal{A}$  mit Elementen aus  $\Omega_H$ ):

Die Abbildung  $\psi : \mathcal{G}_0 \rightarrow \bar{\mathcal{G}}_0^{(1)} \otimes (\Omega_{\bar{G}^{(1)}})_{\bar{G}^{(1)} \in \bar{\mathcal{G}}_0^{(1)}} := \{(\bar{G}^{(1)}, \omega) \mid \bar{G}^{(1)} \in \bar{\mathcal{G}}_0^{(1)}, \omega \in \Omega_{\bar{G}^{(1)}}\}$ , die durch

$$\psi(G_j) := \left\{ \begin{array}{lcl} (\bar{G}_s^{(1)}, 1) & : & l_2(j) = l_2(j_s) \wedge \nexists G_k \in \mathcal{G}_0 \text{ mit } l_2(k) = l_2(j_s) \text{ und } l_1(k) < l_1(j) \\ (\bar{G}_s^{(1)}, 2) & : & l_2(j) = l_2(j_s) \wedge \exists G_k \in \mathcal{G}_0 \text{ mit } l_2(k) = l_2(j_s) \text{ und } l_1(k) < l_1(j) \end{array} \right\}$$

definiert ist, ordnet jedem Proto-Baustein  $G_j$  von  $\Omega^*$  ein senkreiches „Stäbchen“ derselben Höhe und die „Nummer“ von  $G_j$  in der (nach Voraussetzung höchstens zwei-elementigen) Menge aller Proto-Bausteine mit der Höhe  $l_2(j)$  in  $\mathcal{G}_0$  zu.

Sei  $M$  eine Teilparkettierung aus  $\mathcal{M}_0(\Omega^*, (nk_2, n))$ , so wird dem Baustein  $M_z$  in  $M$ , welcher den Punkt  $z \in \mathcal{Z}(nk_2, n) \cap (k_2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$  bedeckt, ein Stäbchen derselben Höhe am Punkt  $(\frac{z_1}{k_2}, z_2)$  in der Bildteilparkettierung  $\mathcal{A}$  zugeordnet. Unter Verwendung der Abbildung  $\psi$  heißt das gerade,

$$\mathcal{A}(M) := \bigcup_{z \in \mathcal{Z}(nk_2, n) \cap (k_2 \mathbb{Z} \times \mathbb{Z})} \left\{ \sigma^{\left(\frac{z_1}{k_2}, z_2\right)} \left[ \psi(\sigma^{-z} M_z) \right]_1 \right\} \quad (2.18)$$

ist eine von  $\mathcal{Z}(n)$  erzeugte Teilparkettierung in  $\pi(\bar{\mathcal{G}}_0)$ .

Wir definieren damit  $\varphi(M) := \bar{\eta}^* = (\bar{\eta}_H^*)_{H \in \mathcal{A}(M)}$  ( $M \in \mathcal{M}_0(\Omega^*, (nk_2, n))$ ) mit

$$\bar{\eta}_H^* := \left[ \psi(\sigma^{-z} M_z) \right]_2 \iff H = \sigma^{\left(\frac{z_1}{k_2}, z_2\right)} \left[ \psi(\sigma^{-z} M_z) \right]_1 \quad (z \in \mathcal{Z}(nk_2, n) \cap (k_2 \mathbb{Z} \times \mathbb{Z})) \quad (2.19)$$

(vgl. Abbildung 2.6).

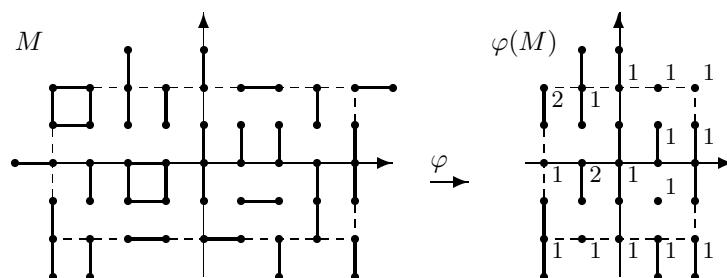


Abbildung 2.6: Zur Konstruktion der Abbildung  $\varphi : \mathcal{M}_0(\Omega^*, (nk_2, n)) \rightarrow \mathcal{M}_0(\bar{\Omega}_{(1)}^*, n)$  für  $n = 2$  am Beispiel  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2)\})$ . (Dabei gilt  $k_2 = 2$  und  $\bar{\Omega}^* = (\mathbb{Z}^2, \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}, \{1, 2, 1\})$ .)

2. Wir untersuchen nun die Anzahl  $|\varphi^{-1}(\bar{\eta}^*)|$  der Urbilder einer Teilkonfiguration  $\bar{\eta}^* = (\bar{\eta}_H^*)_{H \in \bar{\mathcal{A}}}$  in  $\mathcal{M}_0(\bar{\Omega}^*, n)$  für festes  $n \in \mathbb{N}$ . Dazu sind folgende Fälle zu unterscheiden:

- (a) Die Urbildbausteine der Paare  $(H, \bar{\eta}_H^*)$  ( $H \in \bar{\mathcal{A}}$ ) unter  $\psi$  besitzen sämtlich die Breite 1.

Dann ist

$$\bigcup_{z \in \mathcal{Z}(n)} \{ \sigma^{(k_2 z_1, z_2)} \psi^{-1}(\sigma^{-z} \bar{\mathcal{A}}_z, \bar{\eta}_{\bar{\mathcal{A}}_z}^*) \}$$

eine Teilparkettierung in  $\Omega^*$ , die aus  $2n+1$  „Spalten“ von Quadern der Breite 1 besteht, die jeweils durch  $k_2 - 1$  „freie Spalten“ voneinander getrennt sind (siehe Abbildung 2.7).

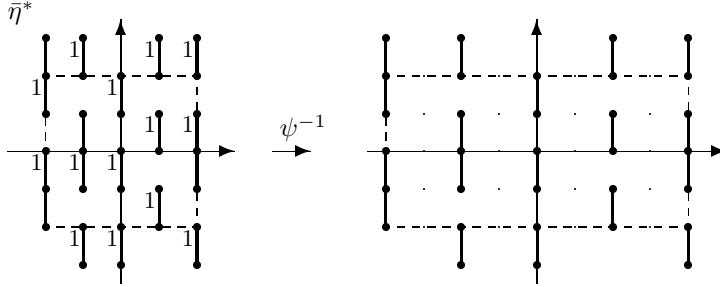


Abbildung 2.7: Zur Konstruktion der Urbilder einer Teilkonfiguration  $\bar{\eta}^* \in \mathcal{M}_0(\bar{\Omega}^*, n)$  des Falles (a) für  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2)\})$  ( $k_2 = 2$ ) und  $n = 2$ .

Bei der Vervollständigung dieser Bausteinanordnung zu einem Element von  $\mathcal{M}_0(\Omega^*, (nk_2, n))$  werden diese insgesamt  $2n(k_2 - 1)$  freien Spalten durch Bausteine des Quadersystems  $\underline{\Omega}_{(1)}^*$  aufgefüllt. (Quader der Breite  $k_2$  können dazu nicht verwendet werden, da nur je  $k_2 - 1$  nebeneinanderliegende Spalten unbelegt sind.)

Mithin gilt

$$|\varphi^{-1}(\bar{\eta}^*)| = |\mathcal{M}_0(\underline{\Omega}_{(1)}^*, n)|^{\frac{2n(k_2 - 1)}{2n+1}}$$

für jedes  $\bar{\eta}^* \in \mathcal{M}_0(\bar{\Omega}_{(1)}^*, n)$  mit dieser Eigenschaft.

- (b) Es existiert wenigstens ein Baustein  $H \in \bar{\mathcal{A}}$  derart, daß das Urbild  $\psi^{-1}(H, \bar{\eta}_H^*)$  die Breite  $k_2 > 1$  besitzt.

Bezeichnet  $l_0(1) = \min(l_2(j) \mid j \in \{1, \dots, m\}$  mit  $l_1(j) > k_1$ ) die kleinste Höhe aller Quadern in  $\Omega^*$ , deren Breite größer als  $k_1$  ist, so gibt es in  $\bar{\eta}^*$  höchstens  $(2n+1)(\lfloor \frac{2n}{l_0(1)} \rfloor + 1)$  Paare  $(H, \bar{\eta}_H^*)$ , deren Urbildbausteine die Breite  $k_2$  besitzen. Für jeden dieser Urbildbausteine gibt es prinzipiell  $k_2$  horizontale Anordnungsmöglichkeiten. Dabei entstehen zwischen je zwei waagerecht benachbarten solchen Quadern der gleichen Zeile höchstens  $k_2 - 1$  nicht belegte Gitterpunkte. Besitzen zwei waagerecht benachbarte Urbildbausteine einer Zeile die Breite 1, so sind zwischen diesen stets  $k_2 - 1$  Gitterpunkte nicht belegt (siehe Abbildung 2.8).

Insgesamt gilt also

$$|\varphi^{-1}(\bar{\eta}^*)| \leq k_2^{(2n+1)(\lfloor \frac{2n}{l_0(1)} \rfloor + 1)} \cdot |\mathcal{M}_0(\underline{\Omega}_{(1)}^*, n)|^{\frac{2n(k_2 - 1)}{2n+1}} \quad (2.20)$$

für jede Teilkonfiguration  $\bar{\eta}^* \in \mathcal{M}_0(\bar{\Omega}_{(1)}^*, n)$  dieses Falles.

Die Abschätzung (2.20) ist jedoch sehr grob, da die bei „unabhängiger“ Anordnung benachbarter Urbildbausteine der Breite  $k_2$  auftretenden Überlappungen nicht berücksichtigt werden.

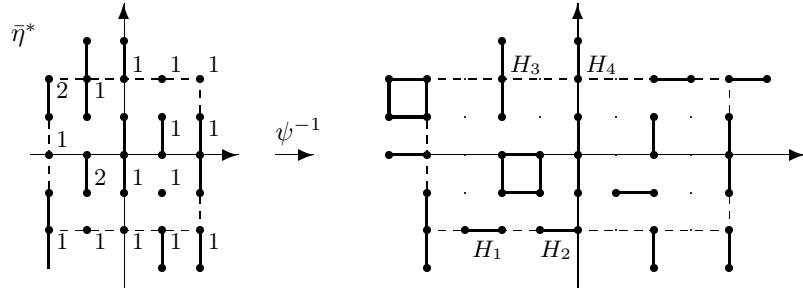


Abbildung 2.8: Zur Konstruktion möglicher Urbilder einer Teilkonfiguration  $\bar{\eta}^*$ . Die Urbildbausteine  $H_1$  und  $H_2$  der Breite  $k_2 = 2$  sind so angeordnet, daß kein unbelegter Gitterpunkt zwischen diesen auftritt, dagegen bleibt zwischen den Bausteinen  $H_3, H_4$  der Breite 1 stets ein Punkt unbelegt.

Die Vervollständigung durch Bausteine der Ausdehnungen (1, 2) und (1, 3) liefert ein Urbild von  $\bar{\eta}^*$ , welches sich von der in Abbildung 2.6 dargestellten Teilparkettierung  $M$  mit  $\varphi(M) = \bar{\eta}^*$  unterscheidet.

tigt werden und andererseits auch deutlich weniger als  $(2n + 1)(\lfloor \frac{2n}{l_0(1)} \rfloor + 1)$  Bausteine mit Urbildern der Breite  $k_2$  in  $\bar{\eta}^* \in \mathcal{M}_0(\bar{\Omega}_{(1)}^*, n)$  auftreten können.

3. Mit dem Ziel einer Verbesserung der Abschätzung (2.20) von  $|\varphi^{-1}(\bar{\eta}^*)|$  für alle Teilkonfigurationen  $\bar{\eta}^* \in \mathcal{M}_0(\bar{\Omega}_{(1)}^*, n)$ , die sich in den Fall (b) einordnen lassen, betrachten wir im folgenden eine feste, beliebig ausgewählte Zeile  $\{z \in \mathcal{Z}(n) \mid z_2 = c_2\}$  ( $-n \leq c_2 \leq n$ ) und die von ihr erzeugte Teilkonfiguration in  $\bar{\eta}^*$ .

Nach Voraussetzung enthält diese höchstens  $2n + 1$  Paare  $(H, \bar{\eta}_H^*)$ , deren Urbildquader die Breite  $k_2$  besitzen.

Bezeichne für  $n \in \mathbb{N}$  und  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 1$  das Symbol  $A(n, k)$  die Anzahl der Möglichkeiten, die  $n$  Gitterpunkte  $0, k, \dots, (n-1)k \in \mathbb{Z}$  durch  $n$  ein-dimensionale Quaderbausteine der Länge  $k$  ohne Überlappungen zu überdecken. Dann gilt

$$A(n, k) = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}. \quad (2.21)$$

Der Beweis dieser Eigenschaft erfolgt durch vollständige Induktion nach  $n \in \mathbb{N}$ :

Für  $n = 1$  gilt offenbar  $A(1, k) = k$ , und wegen  $\binom{k}{1} = \binom{k}{k-1} = k$  ist die Behauptung für dieses  $n$  richtig.

Angenommen, die Behauptung ist gültig für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ . Wir benutzen weiter die Darstellung

$$A(n+1, k) = \sum_{i_1=0}^{k-1} \sum_{i_2=i_1}^{k-1} \cdots \sum_{i_{n+1}=i_n}^{k-1} 1.$$

(Ist nämlich eine zulässige Anordnung von  $n+1$  Bausteinen der Länge  $k$  gegeben, so wird jeder Punkt  $rk$  ( $r = 0, \dots, n$ ) von genau einem Baustein überdeckt. Bezeichnet  $i_{r+1}$  die relative Lage des rechten Endpunktes des  $(r+1)$ -ten Bausteines gegenüber dem Punkt  $rk$ , so muß für alle  $r \geq 1$  die Ungleichung  $i_{r+1} \geq i_r$  gelten. Andernfalls tritt eine Überlappung benachbarter Bausteine auf, vgl. auch Abbildung 2.9.)

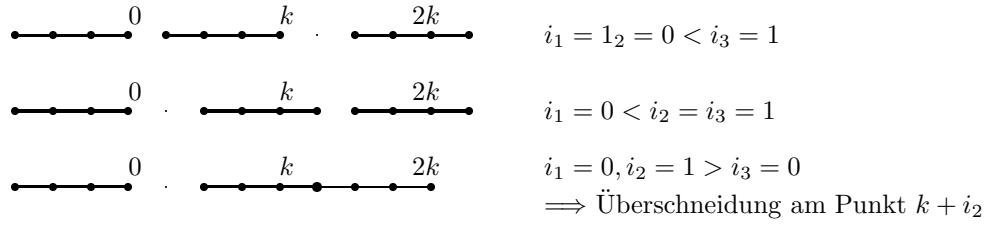


Abbildung 2.9: Zur Summendarstellung für  $A(n, k)$  am Beispiel  $n = 2, k = 4$ .

Damit folgt

$$\begin{aligned}
 A(n+1, k) &= \sum_{i_2=0}^{k-1} \cdots \sum_{i_{n+1}=i_n}^{k-1} 1 + \sum_{i_1=1}^{k-1} \cdots \sum_{i_{n+1}=i_n}^{k-1} 1 \\
 &= A(n, k) + \sum_{i_1=0}^{k-2} \sum_{i_2=i_1}^{k-2} \cdots \sum_{i_{n+1}=i_n}^{k-2} 1 && \text{(durch Indexverschiebung)} \\
 &= A(n, k) + A(n, k-1) + \sum_{i_1=1}^{k-2} \cdots \sum_{i_{n+1}=i_n}^{k-2} 1 \\
 &= \sum_{l=0}^{k-1} A(n, k-l) \\
 &= \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n+k-1-l}{k-1-l} && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\
 &= \binom{n+k}{k-1} = \binom{n+k}{n+1},
 \end{aligned}$$

womit die Gültigkeit von (2.21) für alle  $n \in \mathbb{N}$  gezeigt ist.

In einer festen Zeile der Länge  $2n+1$  treten in einer Teilkonfiguration  $\bar{\eta}^*$  je  $n_1, \dots, n_l \geq 1$  aufeinanderfolgende Paare  $(H, \bar{\eta}_H^*)$  mit Urbildbausteinen der Breite  $k_2$  auf, die durch wenigstens ein Paar mit einem Urbildbaustein der Breite 1 getrennt sind. Dabei gilt

$$\sum_{i=1}^l n_i \leq 2(n+1) - l. \tag{2.22}$$

Die Zahl der überschneidungsfreien Anordnungen der zugehörigen Urbildbausteine ist dann gerade

$$J(\{n_1, \dots, n_l\}, n, k_2) := \prod_{i=1}^l A(n_i, k_2) = \prod_{i=1}^l \binom{n_i + k_2 - 1}{n_i}.$$

Gesucht ist eine von  $n$  und  $k_2$  abhängige globale obere Schranke für den Wert des Funktional  $J$  unter der Nebenbedingung (2.22). Offenbar erreicht  $J$  nur dann einen großen Wert, wenn das Gleichheitszeichen in (2.22) angenommen wird, d. h., wenn je 2 Folgen von  $(H, \bar{\eta}_H^*)$  mit Urbildern der Breite  $k_2$  nur durch einen einzigen gefärbten Baustein mit einem Urbild der Breite 1 getrennt werden.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß alle diese Folgen dieselbe Länge  $n_i := N$  ( $i = 1, \dots, l$ )

besitzen. Aus (2.22) folgt dann  $l \leq 2(n+1)/(N+1)$ . Damit ist die Funktion

$$J(x, n, k_2) := \left[ \binom{x+k_2-1}{x} \right]^{\frac{2(n+1)}{x+1}} = \left( \frac{\Gamma(x+k_2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(k_2)} \right)^{\frac{2(n+1)}{x+1}} \quad (x \in \mathbb{R}, x \geq 0)$$

für feste natürliche Zahlen  $n$  und  $k_2 > 1$  auf das Vorliegen eines Maximums zu untersuchen (die Darstellung des Binomialkoeffizienten mit Hilfe der Gammafunktion ist wegen der Ganzheitlichkeit von  $k_2$  möglich). Differentiation von  $J$  nach der Variablen  $x$  ergibt den Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dx}(x, n, k_2) = \frac{2(n+1)}{x+1} J(x, n, k_2) \cdot \left[ \frac{1}{\Gamma(x+k_2)} \frac{d\Gamma}{dx}(x+k_2) - \frac{1}{\Gamma(x+1)} \frac{d\Gamma}{dx}(x+1) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{x+1} \ln \frac{\Gamma(x+k_2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(k_2)} \right] \right], \end{aligned}$$

dessen Nullstellen nicht von dem Parameter  $n$  abhängen.

Die notwendige Extremwertbedingung  $\frac{dJ(x, n, k_2)}{dx} = 0$  ist nicht geschlossen lösbar. Unter Verwendung geeigneter Computerprogramme (wie z. B. MAPLE oder MATHEMATICA) kann für beliebige Parameterwerte  $k_2 > 1$  die eindeutig bestimmte Nullstelle  $x^*(k_2)$  der Ableitung  $\frac{dJ(x, n, k_2)}{dx}$  näherungsweise bestimmt und gleichzeitig das Vorhandensein eines globalen Maximums von  $J(x, n, k_2)$  an dieser Stelle bestätigt werden. (Tabelle 2.1 enthält die mit MAPLE berechneten Näherungswerte von  $x^*(k_2)$  für einige ausgewählte natürliche Zahlen  $k_2 > 1$ .)

Tabelle 2.1: Die Nullstellen  $x^*(k_2)$  von  $\frac{dJ(x, n, k_2)}{dx}$  für ausgewählte Parameterwerte  $k_2 > 1$ .

$k_2$	$x^*(k_2)$	$k_2$	$x^*(k_2)$
2	1.71828	8	2.48138
3	1.92069	9	2.55551
4	2.07463	10	2.62303
5	2.20000	20	3.09472
6	2.30641	50	3.78433
7	2.39909	100	4.34697

Wenden wir diese Ergebnisse auf die Situation von Bausteinfolgen ganzzahliger Länge  $N$  an, so nimmt die Funktion  $J(N, n, k_2)$  über  $N \in \mathbb{N}$  ihr Maximum für  $N \in \{\lfloor x^*(k_2) \rfloor, \lceil x^*(k_2) \rceil\}$  an. Mit Hilfe des Computers überprüft man die Gültigkeit von

$$\max_{N \in \mathbb{N}} J(N, n, k_2) = \left\{ \begin{array}{ll} J(2, n, k_2) = \left[ \binom{k_2+1}{2} \right]^{\frac{2(n+1)}{3}} & \text{für } 2 \leq k_2 \leq 7 \\ J(3, n, k_2) = \left[ \binom{k_2+2}{3} \right]^{\frac{2(n+1)}{4}} & \text{für } 8 \leq k_2 \leq 32 \\ J(4, n, k_2) = \left[ \binom{k_2+3}{4} \right]^{\frac{2(n+1)}{5}} & \text{für } 33 \leq k_2 \leq 115 \end{array} \right\}. \quad (2.23)$$

Zu bemerken ist noch, daß bei nichtganzzahligem Wert von  $\frac{2(n+1)}{N+1}$  die Länge einer Bausteinfolge kleiner als  $N$  ist. Man rechnet nach, daß der entsprechend auftretende Faktor dieser verkürzten Bausteinfolge stets kleiner als der zugehörige Faktor der oberen Schranke

$\max_{N \in \mathbb{N}} J(N, n, k_2)$  ist.

Weiter zeigt man, daß beim Übergang von zwei benachbarten Folgen der Länge  $N \geq 1$  zu Folgen der Längen  $N + 1$  und  $N - 1$  durch Vertauschung von Bausteinen eine insgesamt geringere Anzahl zulässiger Anordnungen der Urbildbausteine entsteht unabhängig vom Wert  $k_2 > 1$ . Folglich stellt die Voraussetzung der Gleichheit aller Folgenlängen  $n_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ) keine Einschränkung hinsichtlich der Ermittlung einer oberen Schranke für das Funktional  $J(\{n_1, \dots, n_l\}, n, k_2)$  dar.

Somit ist (2.23) eine globale obere Schranke für die Anzahl der zulässigen Anordnungen der Urbildbausteine für eine Zeile der Länge  $2n + 1$  in  $\bar{\eta}^* \in \mathcal{M}_0(\bar{\Omega}_{(1)}^*, n)$  für die Parameterwerte  $k_2$  mit  $2 \leq k_2 \leq 115$ . Für alle  $k_2 > 115$  wird  $k_2^{2n+1}$  als obere Schranke beibehalten.

Insgesamt erhalten wir damit für die Anzahl der Urbilder einer beliebigen Teilkonfiguration  $\bar{\eta}^* \in \mathcal{M}_0(\bar{\Omega}_{(1)}^*, n)$  die Abschätzung

$$|\varphi^{-1}(\bar{\eta}^*)| \leq C_1(n, \Omega^*) \cdot |\mathcal{M}_0(\underline{\Omega}_{(1)}^*, n)|^{\frac{2n(k_2-1)}{2n+1}},$$

wobei

$$C_1(n, \Omega^*) := \begin{cases} \binom{k_2+1}{2}^{\frac{2(n+1)}{3}(\lfloor \frac{2n}{l_0(1)} \rfloor + 1)} & : 2 \leq k_2 \leq 7 \\ \binom{k_2+2}{3}^{\frac{2(n+1)}{4}(\lfloor \frac{2n}{l_0(1)} \rfloor + 1)} & : 8 \leq k_2 \leq 32 \\ \binom{k_2+3}{4}^{\frac{2(n+1)}{5}(\lfloor \frac{2n}{l_0(1)} \rfloor + 1)} & : 33 \leq k_2 \leq 115 \\ k_2^{(2n+1)(\lfloor \frac{2n}{l_0(1)} \rfloor + 1)} & : k_2 > 115 \end{cases}.$$

Mithin gilt

$$|\mathcal{M}_0(\Omega^*, (nk_2, n))| \leq |\mathcal{M}_0(\bar{\Omega}_{(1)}^*, n)| \cdot C_1(n, \Omega^*) \cdot |\mathcal{M}_0(\underline{\Omega}_{(1)}^*, n)|^{\frac{2n(k_2-1)}{2n+1}}.$$

Mit  $C_1(\Omega^*) := \lim_{n \rightarrow \infty} C_1(n, \Omega^*)^{\frac{1}{(2nk_2+1)(2n+1)}}$  folgt die Gültigkeit der Behauptung.  $\blacksquare$

**Bemerkung 2.41** Für die in Satz 2.40 angegebene obere Schranke gilt

$$\lim_{k_2 \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{k_2} h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2} |_{\bar{\Omega}_{(i)}^*}) + \frac{(k_2 - 1)}{k_2} h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2} |_{\underline{\Omega}_{(i)}^*}) + \frac{1}{k_2} \log C_i(\Omega^*) \right] = h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2} |_{\underline{\Omega}_{(i)}^*}).$$

Diese Eigenschaft entspricht der anschaulichen Vorstellung, daß für große Ausdehnung  $k_2$  der zum System  $\underline{\Omega}_{(i)}^*$  hinzugefügten Bausteine in Richtung  $e_i$  die Entropie von  $\Omega^*$  nicht wesentlich größer als die des Teilsystems  $\underline{\Omega}_{(i)}^*$  ist.

Man bemerke auch, daß die Abschätzung (2.16) stets eine obere Schranke für die Entropie von  $\Omega^*$  liefert, die echt größer als die nach Satz 2.37 bekannte untere Schranke  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2} |_{\underline{\Omega}_{(i)}^*})$  ist.

**Beispiel 2.42** Wir betrachten noch einmal das bereits in Beispiel 2.38 untersuchte Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2)\})$ .

Für  $i = 1$  gilt  $\underline{\Omega}_{(1)}^* = (\mathbb{Z}^2, \{(1, 2), (1, 3)\})$  und  $\bar{\Omega}_{(1)}^* = (\mathbb{Z}^2, \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}, \{1, 2, 1\})$  mit  $k_2 = 2$  und  $l_0(1) = 1$ .

Mit  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2} |_{\bar{\Omega}_{(1)}^*}) = \log 2.1478$  erhält man gemäß Satz 2.40 die Abschätzung

$$h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2} |_{\Omega^*}) \leq \log 2.02576.$$

Folglich liegt die Entropie von  $\Omega^*$  im Intervall  $[\log 1.4655, \log 2.02576]$ .

**Bemerkung 2.43** Besitzt ein Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m)$  die  $r > 2$  Bausteinbreiten  $1 = k_1 < k_2 \dots < k_r \in \mathbb{N}$ , so kann analog zum Vorgehen in Teil 1. des Beweises von Satz 2.40 eine Abbildung  $\varphi : \mathcal{M}_0(\Omega^*, (nk_2, n)) \rightarrow \mathcal{M}_0(\bar{\Omega}_{(1)}^*, n)$  definiert werden. (Diese Abbildung ist im Unterschied zum Fall  $r = 2$  im allgemeinen nicht mehr surjektiv. Für die Ermittlung einer oberen Schranke für die Anzahl der Urbilder einer Teilkonfiguration  $\bar{\eta}^* \in \mathcal{M}_0(\bar{\Omega}_{(1)}^*, n)$  ist diese Eigenschaft jedoch nicht von Bedeutung.)

Weiter ist zu beachten, daß ein Quader der Breite  $k_j = pk_2 + q$  ( $p \in \mathbb{N}, 0 \leq q < k_2$ ) in einer Teilpartkettierung  $M \in \mathcal{M}_0(\Omega^*, nk_2, n)$ , der wenigstens  $pk_2$  „Spalten“ von  $\mathcal{Z}(nk_2, n)$  überdeckt, durch  $\varphi$  auf  $p$  nebeneinander angeordnete Stäbchenbausteine der gleichen Höhe und der gleichen Farbe abgebildet wird. Das bedeutet aber umgekehrt, daß ein Urbildbaustein der Breite  $k_j$  ( $j = 2, \dots, r$ ) eines Paares  $(H, \bar{\eta}_H^*)$  unabhängig von seiner konkreten Breite höchstens  $k_2$  horizontale Anordnungsmöglichkeiten besitzt.

Jedes Element  $\bar{\eta}^*$  von  $\mathcal{M}_0(\bar{\Omega}_{(1)}^*, n)$  enthält in einer festen Zeile von  $\mathcal{Z}(n)$  höchstens  $(2n+1)$  Paare  $(H, \bar{\eta}_H^*)$ , deren Urbildbausteine eine größere Breite als  $k_1$  besitzen. Berücksichtigt man, daß für Urbildbreiten  $k_j > k_2$  mehrere benachbarte Paare  $(H, \bar{\eta}_H^*)$  einer Zeile auf den gleichen Urbildbaustein abgebildet werden, so folgt unmittelbar, daß die in (2.23) angegebene obere Schranke für die Anzahl der zulässigen Anordnungsmöglichkeiten auch in diesem Fall gültig bleibt.

Auch auf die Voraussetzung  $k_1 = 1$  kann verzichtet werden, wenn man beachtet, daß die bei der Urbildbildung maximal entstehenden  $2n(k_2 - 1)$  freien Spalten nun durch die Bausteine der Breite  $k_1 > 1$  des Teilsystems  $\underline{\Omega}_{(1)}^*$  aufzufüllen sind. Also bleibt  $|\mathcal{M}_0(\underline{\Omega}_{(1)}^*, n)|^{\frac{2n(k_2-1)}{2n+1}}$  obere Schranke für die Zahl möglicher Auffüllungen der freien Spalten. (Im allgemeinen ist diese Schranke sehr grob, da in vielen Fällen überhaupt keine Vervollständigung der unbelegten Gitterpunkte durch Bausteine der Breite  $k_1$  möglich ist.)

Damit ist der folgende Satz zur Bestimmung einer oberen Schranke für die topologische Entropie eines beliebigen zwei-dimensionalen Quadersystems richtig.

**Satz 2.44** Es sei  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m)$  ein zwei-dimensionales Quadersystem mit den Ausdehnungen  $k_1 < k_2 < \dots < k_r \in \mathbb{N}$  ( $r \geq 2$ ) in Richtung  $e_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ).

Dann gilt für die topologische Entropie von  $\Omega^*$  die Ungleichung

$$h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\Omega^*}) \leq \frac{1}{k_2} (h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\bar{\Omega}_{(1)}^*}) + (k_2 - 1) h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\underline{\Omega}_{(1)}^*}) + \log C_i(\Omega^*)), \quad (2.24)$$

wobei  $C_i(\Omega^*)$  durch (2.17) definiert ist.

**Beispiel 2.45** 1. Das in Beispiel 2.42 betrachtete zwei-dimensionale Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2)\})$  besitzt in Richtung  $e_2$  die Ausdehnungen  $k_1 = 1, k_2 = 2$  und  $k_3 = 3$ . Dabei gilt  $\bar{\Omega}_{(2)}^* = (\mathbb{Z}^2, \{(1, 1), (2, 1)\}, \{2, 2\})$  mit  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\bar{\Omega}_{(2)}^*}) = \log 2.73205$ . Weiter besitzt das Teilsystem  $\underline{\Omega}_{(2)}^* = (\mathbb{Z}^2, \{(2, 1)\})$  die topologische Entropie 0. Satz 2.44 liefert dann die Abschätzung

$$h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\Omega^*}) \leq \frac{1}{2} (\log 2.73205 + 0 + \log \sqrt[3]{3}) = \log 1.9843.$$

Die topologische Entropie von  $\Omega^*$  liegt also im Intervall  $[\log 1.4655, \log 1.9843]$ . Insbesondere ist die Entropie dieses  $\mathbb{Z}^2$ -Quadersystems mit  $d(\Omega^*) = 2$  nicht größer als die obere Schranke  $\log 2$  für die topologische Entropie ein-dimensionaler Quadersysteme.

2. In Beispiel 2.38 wurde für die Entropie des zwei-dimensionalen Quadersystems  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (6, 1), (6, 2)\})$  die untere Schranke  $\log 1.4655$  ermittelt.

In Richtung  $e_1$  besitzt  $\Omega^*$  die drei Ausdehnungen  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$  und  $k_3 = 6$ . Es gilt  $\bar{\Omega}_{(1)}^* = (\mathbb{Z}^2, \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}, \{2, 3, 1\})$  mit  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\bar{\Omega}_{(1)}^*}) = \log 3.07959$ . Mit dem Teilsystem  $\underline{\Omega}_{(1)}^* = (\mathbb{Z}^2, \{(1, 2), (1, 3)\})$  erhalten wir nach Satz 2.44 die obere Schranke  $\log 2.42565$  für die Entropie von  $\Omega^*$ .

Die entsprechende Untersuchung der Systeme  $\bar{\Omega}_{(2)}^*$  und  $\underline{\Omega}_{(2)}^*$  führt auf die kleinere obere Schranke  $\log 2.2182$  für  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\Omega^*})$ .

3. Wir betrachten das Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{(2, 4), (3, 2)\})$ . Die Untersuchung des Systems  $\bar{\Omega}_{(2)}^* = (\mathbb{Z}^2, \{(2, 1), (3, 1)\})$  führt auf die obere Schranke  $\log 1.18086$  für die topologische Entropie von  $\Omega^*$ . Aussage 2. des Satzes 2.37 liefert die untere Schranke  $\log 1.07283$  für  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\Omega^*})$ . Damit liegt die Entropie von  $\Omega^*$  im Intervall  $[\log 1.07283, \log 1.18086]$ , welches eine relativ gute Näherung darstellt.

**Bemerkung 2.46** Die in Beispiel 2.45 betrachteten Quadersysteme zeigen, daß die in den Sätzen 2.37 und 2.44 bereitgestellten Schranken für die topologische Entropie vor allem für Quadersysteme relativ kleiner Entropie gute Näherungen liefern. Solche Systeme besitzen nur wenige Bausteine mit relativ großen Ausdehnungen.

Dagegen sind die Näherungen für Quadersysteme mit vielen Bausteinen, insbesondere mit mehr als zwei verschiedenen Ausdehnungen in jede Koordinatenrichtung, ungenauer, da die Abschätzung (2.24) nur die beiden kleinsten Ausdehnungen in die feste Richtung  $e_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) berücksichtigt.

Insbesondere in Hinblick auf eine bessere Einschätzbarkeit der durch die Sätze 2.37 und 2.44 zur Verfügung gestellten Schranken erscheint die Erarbeitung eines Algorithmus zur Bestimmung aller minimalen Überdeckungen eines gegebenen Gebietes für jede vorgegebene Menge von Quaderbausteinen wünschenswert.

**Bezeichnung 2.47** Für beliebige natürliche Zahlen  $n_1, n_2 > 1$  bezeichnet  $Q(n_1, n_2) := \{z \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq z_i < n_i, i = 1, 2\}$  das Rechteck der Kantenlängen  $n_1$  und  $n_2$  in  $\mathbb{Z}^2$  mit dem Nullpunkt als linken unteren Eckpunkt. Weiter bezeichne  $R(n_1, n_2) := \{(0, z_2) \mid 0 \leq z_2 < n_2\} \cup \{(z_1, 0) \mid 0 \leq z_1 < n_1\}$  die Menge der linken und unteren Randpunkte von  $Q(n_1, n_2)$ .

**Algorithmus 2.48** Gegeben seien natürliche Zahlen  $n_1, n_2$  und die Menge  $\mathcal{G}_0$  der Proto-Bausteine als Menge der Quaderausdehnungen  $\{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m$ . Die Zahl der minimalen überschneidungsfreien Überdeckungen des Rechtecks  $Q(n_1, n_2)$  mit Bausteinen aus  $\mathcal{G}_0$  wird durch folgenden Algorithmus ermittelt:

## Schritt 0 Initialisierung

- 0.1 Setzen den Zähler  $N$  der Anzahl der ermittelten Überdeckungen gleich Null und die Menge  $M(0)$  der zur Belegung des Nullpunktes verfügbaren Bausteine gleich  $\mathcal{G}_0^- := \{G \in \sigma^{\mathbb{Z}^2} \mathcal{G}_0 \mid 0 \in G\}$ .
- 0.2 Auswahl eines Elementes  $H_0 \in M(0)$ , anschließend wird  $H_0$  aus  $M(0)$  gestrichen. Ist die Menge  $M(0)$  leer, so endet die Abarbeitung des Algorithmus. Der Wert von  $N$  wird ausgegeben, er gibt die Zahl aller minimalen überschneidungsfreien Überdeckungen von  $Q(n_1, n_2)$  mit Bausteinen aus  $\mathcal{G}_0$  an.

## Schritt 1 Erzeugung einer zulässigen Überdeckung des Randes $R(n_1, n_2)$

- 1.1 Bildung eines bisher noch nicht verwendeten Paares  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$  von minimalen Überdeckungen  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  der Mengen  $\{(z_1, 0) \mid 0 \leq z_1 < n_1\}$  und  $\{(0, z_2) \mid 0 \leq z_2 < n_2\}$  mit  $H_0 \in \mathcal{A}_i$  ( $i = 1, 2$ ) durch Verschiebungen der gegebenen Bausteine. Das Paar  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$  wird als schon verwendet gekennzeichnet. Gibt es kein Paar  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$  solcher Überdeckungen, welches noch nicht verwendet wurde, so wird mit **0.2** fortgesetzt.
- 1.2 Ist die Zusammensetzung  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  der beiden Überdeckungen eine überschneidungsfreie Überdeckung des Randes  $R(n_1, n_2)$ , so wird zum Schritt 2 übergegangen. Andernfalls wird **1.1** nochmals ausgeführt.

## Schritt 2 Fortsetzung der Randüberdeckung zu einer minimalen Überdeckung des gesamten Rechtecks $Q(n_1, n_2)$ ohne Bausteinüberlappungen

- 2.1 Setzen  $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  und  $M(z) := \mathcal{G}_0$  für alle Punkte  $z$  in  $Q(n_1, n_2)$ , die nicht von einem Baustein aus  $\mathcal{A}$  belegt sind.
- 2.2 Bestimmung des bezüglich der lexikographischen Ordnung auf  $\mathbb{Z}^2$  kleinsten Punktes  $z$  in  $Q(n_1, n_2)$ , der nicht von einem Baustein in  $\mathcal{A}$  belegt ist.  
Sind alle Gitterpunkte von  $Q(n_1, n_2)$  belegt, so wird der Zähler  $N$  um 1 erhöht und der zuletzt hinzugefügte Baustein  $\sigma^z \hat{H}$  aus  $\mathcal{A}$  entfernt. **2.3** wird für die Überdeckung  $\mathcal{A} \setminus \{\sigma^z \hat{H}\}$  und den Punkt  $\hat{z}$  wiederholt.
- 2.3 Auswahl eines Elementes  $H$  der Menge  $M(z)$  der bisher noch nicht zur Belegung von  $z$  benutzten Bausteine.  $H$  wird aus  $M(z)$  entfernt und **2.4** ausgeführt.  
Ist die Menge  $M(z)$  leer, so wird der zuletzt hinzugefügte Baustein  $\sigma^z \hat{H}$  aus  $\mathcal{A}$  entfernt und **2.3** für  $\hat{z}$  wiederholt. Falls  $z$  schon der kleinste nicht von  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  überdeckte Punkt ist, so wird mit Schritt 1 fortgesetzt.
- 2.4 Ist  $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A} \cup \{\sigma^z H\}$  eine überschneidungsfreie Bausteinanordnung, so wird  $(z, \sigma^z H)$  als Paar des zuletzt belegten Gitterpunktes und des zuletzt plazierten Bausteines gespeichert und **2.2** mit  $\mathcal{A} := \mathcal{A}_0$  erneut ausgeführt.

**Bemerkung 2.49** 1. Der angegebene Algorithmus benutzt die besonders einfache Struktur rechteckiger Bausteine nur im Schritt **1.1**: die Erzeugung einer Überdeckung  $\mathcal{A}_1$  der Menge  $\{(z_1, 0) \mid$

$0 \leq z_1 < n_1\}$  erfolgt durch Überdeckung von  $[0, n_1 - 1] \cap \mathbb{Z}$  mit Intervallen der Längen  $l_1(j)$  ( $j \in \{1, \dots, m\}$ ) und Konstruktion aller Kombinationen vertikaler Verschiebungen der entsprechenden Bausteine gegenüber der horizontalen Achse; analog wird  $\mathcal{A}_2$  erzeugt.

2. Die vom Algorithmus bestimmte Zahl  $N$  aller minimalen überschneidungsfreien Bausteinüberdeckungen des Gebietes  $Q(n_1, n_2)$  stimmt mit der Zahl  $N(Q(n_1, n_2), \Omega^*)$  aller von  $Q(n_1, n_2)$  erzeugten Teilparkettierungen in  $\Omega^*$  überein, da eine zusammenhängende überschneidungsfreie Anordnung von Quaderbausteinen stets zu einer Parkettierung des gesamten Gitters vervollständigt werden kann.

Die Umsetzung von Algorithmus 2.48 in ein Computerprogramm erlaubt die Bestimmung der Anzahl  $N(Q(n_1, n_2), \Omega^*)$  aller von  $Q(n_1, n_2)$  erzeugten Teilparkettierungen für prinzipiell jedes Paar  $(n_1, n_2)$  natürlicher Zahlen und jede vorgegebene Menge  $\{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m$  von Quaderausdehnungen. (Um den Speicheraufwand in einem vernünftigen Rahmen zu halten, ist es sinnvoll, die Zahlen  $n_1, n_2$  nicht größer als 50 zu wählen und die Bausteinanzahl mit 5 zu begrenzen.) Wegen des exponentiellen Wachstums von  $N(Q(n_1, n_2), \Omega^*)$  mit steigenden Parameterwerten  $n_1, n_2$  für alle  $\Omega^*$  mit mehr als einem Proto-Baustein ist insbesondere für Bausteinanzahlen  $m > 2$  mit einer extremen Zunahme der Programmlaufzeit zu rechnen. Berücksichtigt man weiter, daß zur Ermittlung einer aussagekräftigen Entropieschranke die Ausdehnungen  $n_1, n_2$  des zu überdeckenden Gebietes wenigstens doppelt so groß wie die entsprechende maximale Baustinausdehnung zu wählen sind, so ist einzuschätzen, daß dieses Verfahren für Quadersysteme mit mehr als zwei Proto-Bausteinen nur bedingt zur Entropieabschätzung geeignet ist.

**Bemerkung 2.50** Für ein-dimensionale Quadersysteme ist bekannt, daß durch Vergrößerung der Bausteinlängen eines Systems dessen topologische Entropie verringert wird (vgl. Satz 2.19). Eine entsprechende Aussage ist auch für zwei-dimensionale Quadersysteme gültig, deren Baustinausdehnungen in einer festen Koordinate konstant sind (vgl. Bemerkung 2.35). Allgemein ist zu vermuten, daß durch Vergrößerung der Ausdehnung eines Bausteines  $G_j$  derart, daß der entstehende Baustein  $\hat{G}_j$  als Vereinigung von  $G_j$  mit weiteren Bausteinen des Quadersystems  $\Omega^*$  darstellbar ist, eine Verkleinerung der topologischen Entropie auftritt.

Der Beweis dieser Eigenschaft konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht geführt werden. Die Schwierigkeit liegt dabei vor allem darin, die Existenz eines  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c < 1$  mit

$$|\mathcal{M}_0(\hat{\Omega}^*, n)| < |\mathcal{M}_0(\Omega^*, n)| \cdot c^{(2n+1)^2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

nachzuweisen.

Die Untersuchung geeigneter Beispiele mit Hilfe des Computerprogrammes auf der Grundlage von Algorithmus 2.48 liefert wenigstens für Quadersysteme mit zwei Proto-Bausteinen Hinweise für die Gültigkeit der vermuteten Eigenschaft.

**Beispiel 2.51** 1. Betrachtet werden die Quadersysteme  $\Omega_i^* = (\mathbb{Z}^2, \mathcal{G}_0^{(i)})$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) mit dem gemeinsamen Baustein  $G$  der Ausdehnung  $(3, 2)$  und je einem weiteren Baustein  $G^{(i)}$

$(i = 1, \dots, 4)$ , deren Ausdehnungen sämtlich verschieden sind (siehe Tabelle 2.2).

Der Baustein  $G^{(2)}$  der Ausdehnung  $(2, 3)$  ist darstellbar als Vereinigung  $G^{(1)} \cup \sigma^{(1,0)}G^{(1)}$  des Proto-Bausteins  $G^{(1)}$  der Ausdehnung  $(1, 3)$ . Analog ist  $G^{(4)}$  darstellbar als Vereinigung  $G^{(2)} \cup \sigma^{(2,0)}G^{(2)} = \bigcup_{k=0}^3 \sigma^{(k,0)}G^{(1)}$ . Man vermutet also die Gültigkeit folgender Ungleichungskette

$$h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\Omega_1^*}) > h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\Omega_2^*}) > h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\Omega_4^*}). \quad (2.25)$$

Der Baustein  $G^{(3)}$  hat eine größere Ausdehnung als  $G^{(2)}$ , erlaubt jedoch keine Zerlegung in Bausteine aus  $\Omega_2^*$ . Da die Ausdehnung  $l^{(3)} = (2, 4)$  wenig größer als  $l^{(2)} = (2, 3)$  ist, erwartet man auch nur eine kleine Verringerung der Entropie von  $\Omega_3^*$  gegenüber  $\Omega_2^*$ .

Die Untersuchungen mit Hilfe des Computers ergeben für ungerade Zahlen  $n$  eine größere obere Schranke für die Entropie von  $\Omega_2^*$  als für die Entropie von  $\Omega_3^*$  (siehe Tabelle 2.2).

Dagegen gilt für gerade Zahlen  $n$  die umgekehrte Ordnungsrelation zwischen den ermittelten Entropieschranken. (Die Bestimmung von  $N(Q(n, n), \Omega_3^*)$  für  $n = 10$  erforderte eine Laufzeit von etwa 14 Tagen. Da bei Vergrößerung des Wertes  $n$  um 1 mit einer Vergrößerung von  $N(Q(n, n), \Omega_3^*)$  um mindestens eine Zehnerpotenz zu rechnen ist, ist die Ermittlung von  $N(Q(n, n), \Omega_i^*)$  ( $i = 2, 3$ ) für Zahlen  $n \geq 11$  innerhalb eines akzeptablen Zeitraumes selbst unter Verwendung moderner Rechentechnik nicht zu realisieren.)

Die mit Hilfe der Sätze 2.37 und 2.44 berechneten abgeschlossenen Intervalle für die Entropiewerte der uns interessierenden Quadersysteme (siehe Tabelle 2.2) überlappen sich, so daß keine Aussage über die Richtigkeit von (2.25) getroffen werden kann. (Die Differenzen zwischen den unteren bzw. den oberen Intervallgrenzen weisen für  $\Omega_1^*$  und  $\Omega_4^*$  durchaus auf die Richtigkeit der Vermutung hin. Dagegen sind die oberen Intervallendpunkte für die Entropie von  $\Omega_1^*$  und  $\Omega_2^*$  gleich; dies ist im Verschwinden der Entropie der zur Berechnung dieser Schranken verwendeten Teilsysteme  $\underline{\Omega}_{1(1)}^*$  und  $\underline{\Omega}_{2(1)}^*$  begründet.)

Die Bestimmung der Anzahl  $N(Q(n, n), \Omega_i^*)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) aller minimalen Bausteinüberdeckungen des Quadrats  $Q(n, n)$  für die Zahlen  $n = 5$  bis  $n = 10$  (für  $\Omega_1^*$  wurden die Berechnungen aus Laufzeitgründen nur bis  $n = 8$  durchgeführt) scheint die vermutete Ungleichung zu bestätigen. Dafür spricht insbesondere das Verhalten der relativen Verminderung der Zahlen  $\sqrt[n^2]{N(Q(n, n), \Omega_i^*)}$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) für steigende Parameterwerte  $n$ .

Zu bemerken ist jedoch, daß die aus den Zahlen  $N(Q(n, n), \Omega_i^*)$  bestimmten oberen Schranken für die topologische Entropie in keinem Fall eine Verbesserung der mit Satz 2.44 berechneten Schranken darstellen, sondern insbesondere für  $\Omega_1^*$  erheblich größer als diese sind. Aufgrund der bereits angesprochenen Laufzeitprobleme sind die ermittelten Schranken durch Bestimmung von  $N(Q(n, n), \Omega_i^*)$  für größere Werte von  $n$  kaum zu verbessern.

2. Die Entropie des Quadersystems  $\Omega_5^*$  ist aus Symmetriegründen (vgl. die Definition der topologischen Entropie in Abschnitt 2.1) gleich der des Quadersystems  $\hat{\Omega}_5^* := (\mathbb{Z}^2, \{(1, 3), (4, 2)\})$ , welches durch „Drehung“ der Proto-Bausteine von  $\Omega_5^*$  um  $90^\circ$  um den Nullpunkt entsteht.  $\hat{\Omega}_5^*$  unterscheidet sich von  $\Omega_1^*$  nur durch eine Vergrößerung des zweiten Bausteines. Die mit dem

Tabelle 2.2: Die mit dem Computer ermittelten oberen Schranken für die topologische Entropie der 5 Beispiel-Quadersysteme. Zum Vergleich werden die mit den Sätzen 2.37 und 2.44 ermittelten Entropieintervalle angegeben.

Nr.	$\{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m$	Intervalle nach 2.37, 2.44	$n$	$N(Q(n, n), \Omega^*)$	$\sqrt[n^2]{N(Q(n, n), \Omega^*)}$
1	$\{(1, 3), (3, 2)\}$	$[\log 1.09827, \log 1.21322]$	5	40 105	1.52802
			6	544 700	1.44324
			7	8 160 926	1.38374
			8	160 790 706	1.34345
2	$\{(2, 3), (3, 2)\}$	$[\log 1.04798, \log 1.21322]$	5	8 278	1.43455
			6	55 180	1.35430
			7	403 130	1.30136
			8	3 219 902	1.26382
			9	33 506 084	1.23852
3	$\{(2, 4), (3, 2)\}$	$[\log 1.07283, \log 1.18086]$	5	7 386	1.42803
			6	61 236	1.35823
			7	299 169	1.29346
			8	3 557 826	1.26579
			9	21 403 905	1.23169
			10	274 610 793	1.21447
4	$\{(3, 2), (4, 3)\}$	$[\log 1.0338, \log 1.12328]$	5	5 842	1.41469
			6	29 716	1.33122
			7	150 343	1.27542
			8	707 647	1.23425
			9	5 383 849	1.21088
			10	28 184 275	1.18713
5	$\{(2, 4), (3, 1)\}$	$[\log 1.07283, \log 1.18086]$	7	8 333 057	1.38433
			8	155 908 054	1.34281

Computer ermittelten oberen Entropieschranken für  $\Omega_1^*$  und  $\Omega_5^*$  verhalten sich hinsichtlich ihrer Ordnungsrelation für ungerade bzw. gerade Parameter  $n \in \mathbb{N}$  ähnlich den für  $\Omega_2^*$  und  $\Omega_3^*$  berechneten. Der Betrag der Differenzen dieser Schranken gibt in diesem Fall jedoch keinen Hinweis darauf, welches der beiden Quadersysteme die größere Entropie besitzt.

Die in Beispiel 2.51 betrachteten Quadersysteme sind hinsichtlich der Verschiedenheit ihrer Bausteinn Mengen typisch für die mit Hilfe des Computers mögliche Untersuchung des qualitativen Verhaltens der Entropie bei Änderung der Baustein ausdehnungen. (Eine große Ausdehnung eines Bausteines erfordert die Betrachtung großer Kantenlängen des zu überdeckenden Gebietes; in Verbindung mit einer kleinen Ausdehnung des zweiten Bausteines führt dies zu nicht mehr vertretbaren Laufzeiten des Programmes.) Die Ergebnisse der untersuchten Systeme weisen darauf hin, daß bei Vergrößerung der Ausdehnung eines Proto-Bausteines  $G$  derart, daß der entstehende Baustein we-

nigstens die Vereinigung von  $G$  mit einem weiteren Baustein überdeckt, die topologische Entropie des Quadersystems abnimmt.

Die mit dem Computer untersuchten Beispielsysteme zeigen auch, daß die Folge  $\{|\mathcal{Z}(n)|^{-1} \log N(\mathcal{Z}(n), \Omega^*)\}_{n \in \mathbb{N}}$  für Quadersysteme mit mehr als einem Proto-Baustein (das heißt: für Quadersysteme positiver Entropie) nur sehr langsam gegen den Grenzwert  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^2}|_{\Omega^*})$  konvergiert und folglich nur eingeschränkt zur Abschätzung der Entropie zwei-dimensionaler Quadersysteme geeignet ist. Diese Aussage läßt die in den Sätzen 2.37 und 2.44 angegebenen Abschätzungen für die Entropie *beliebiger* zwei-dimensionaler Quadersysteme in einem neuen Licht erscheinen. Ihre Bedeutung besteht vor allem darin, obere und untere Schranken bereitzustellen, die zudem leicht zu berechnen sind.

## Kapitel 3

# Untersuchungen zum Faktorbegriff für $d$ -dimensionale Parkettsysteme ( $d \geq 1$ )

Im Mittelpunkt der Überlegungen dieses Kapitels stehen Aussagen zum topologischen Faktorbegriff für  $d$ -dimensionale Parkettsysteme. Vermöge der durch diesen Begriff eingeführten Halbordnung entsteht eine hierarchische Struktur auf dem Raum aller Parkettsysteme der Gitterdimension  $d \in \mathbb{N}$ .

In Abschnitt 3.1 werden einige grundlegende Aussagen zur Charakterisierung von Faktorbeziehungen zwischen Parkettsystemen bereitgestellt. Für die weiteren Untersuchungen zum Faktorbegriff ist vor allem ein Satz zur Darstellbarkeit von Faktorabbildungen als endliche „Blockabbildung“ von Bedeutung. Dieser Satz 3.2 ist eine Verallgemeinerung des aus der Theorie ein-dimensionaler Subshifts bekannten Theorems von Hedlund ([28]).

Der zweite Abschnitt dieses Kapitels widmet sich der Charakterisierung von Faktorbeziehungen zwischen ein-dimensionalen Quadersystemen durch Eigenschaften der Bausteine dieser Parkettsysteme. Dabei finden zwei grundlegende Resultate (die Sätze 3.7 und 3.11) zum Zusammenhang von Faktorbegriff, Periodizität und topologischer Entropie ein-dimensionaler Subshifts Anwendung. Die in Satz 3.6 zusammengefaßten Periodizitätseigenschaften erlauben die Angabe notwendiger und hinreichender Bedingungen für Faktorbeziehungen ein-dimensionaler Quadersysteme. Der Beweis von Satz 3.14 zu Faktoren gleicher topologischer Entropie erfolgt konstruktiv. Dagegen erlaubt die in Folgerung 3.9 auf der Grundlage von Satz 3.7 angegebene Charakterisierung des Faktorbegriffs für Quadersysteme unterschiedlicher Entropie nicht die explizite Angabe der zugehörigen Faktorabbildung. (Die Gründe dafür liegen im Beweis von Satz 3.7.)

Abschnitt 3.3 beschäftigt sich mit der Herausarbeitung qualitativer Unterschiede zwischen ein- und mehrdimensionalen Quadersystemen hinsichtlich ihrer Faktorstruktur. Unter diesem Gesichtspunkt werden notwendige und hinreichende Bedingungen für das Vorliegen (nichttrivialer) Faktorquadersysteme verschwindender topologischer Entropie ermittelt. (Diese Resultate sind Inhalt der Sätze 3.18, 3.28 und 3.32.) Für Quadersysteme der Dimension  $d > 1$  werden diese notwendigen Bedingungen durch Anwendung eines Projektionsverfahrens zur Reduzierung der Gitterdimension erarbeitet. Eine wichtige Folgerung aus den Sätzen 3.28 und 3.32 ist die Eigenschaft, daß „echt“

mehrdimensionale Quadersysteme der topologischen Entropie 0 im Unterschied zu Quadersystemen der Dimension  $d = 1$  keine nichttrivialen Faktorquadersysteme besitzen.

Der letzte Abschnitt dieses Kapitels liefert hinreichende Bedingungen für das Bestehen von Faktorbeziehungen zwischen Quadersystemen beliebiger Dimensionen  $d \geq 1$ . Ausgehend von Überlegungen zur Konstruktion ein-dimensionaler Quadersysteme, deren Faktorabbildung explizit angebbar ist, wird eine für beliebige Gitterdimension anwendbare Codierungsidee entwickelt. Dieser Codierungsgedanke führt auf die in Satz 3.39 angegebenen hinreichenden Bedingungen für Faktorbeziehungen zwischen  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersystemen. Abschließend werden einige Aussagen über die im Beweis von Satz 3.39 konstruierte Faktorabbildung abgeleitet.

### 3.1 Beschreibungsmöglichkeiten für die Faktorbeziehung zwischen $d$ -dimensionalen Parkettsystemen

**Bemerkung 3.1** *Stetige shift-vertauschende Abbildungen zwischen ein-dimensionalen Punktkonfigurationenräumen (Subshifts endlichen Typs) sind als **endliche** Block-Abbildungen darstellbar (vgl. [28]). Wegen der topologischen Konjugiertheit von  $\mathbb{Z}^1$ -Punktkonfigurationenräumen und  $\mathbb{Z}^1$ -Parkettsystemen lässt sich eine entsprechende Aussage auch für ein-dimensionale Parkettsysteme beweisen, wobei endliche Blöcke durch (endliche) Teilparkettierungen zu ersetzen sind.*

*Im Zusammenhang mit der Beschreibung von Faktorbeziehungen zwischen  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystemen ist eine Modifizierung des entsprechenden Satzes in folgenden Punkten von Interesse:*

- (a) *Berücksichtigung von  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystemen der Gitterdimension  $d > 1$  unter Beachtung der Frage der Fortsetzbarkeit endlicher Bausteinanordnungen zu Parkettierungen des gesamten Gitters im Unterschied zur Dimension  $d = 1$*
- (b) *Einbeziehung der Forderung der Surjektivität an stetige shift-vertauschende Abbildungen zwischen Parkettsystemen.*

**Satz 3.2 (Theorem von Hedlund für  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsysteme)** *Gegeben seien zwei  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsysteme  $\Omega_i^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0^{(i)})$  ( $i = 1, 2$ ). Es gilt  $(\Omega_1^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega_1^*}) \geq (\Omega_2^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega_2^*})$  genau dann, wenn eine Zahl  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  und eine Surjektion  $F : \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, k) \rightarrow \mathcal{G}_0^{(2)-}$  derart existieren, daß folgende Bedingungen für jedes  $t \in \mathbb{N}$  erfüllt sind:*

- (i) 
$$\begin{aligned} & [M_1, \dots, M_t \in \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, k) \quad \text{mit} \quad \sigma^{a(i)} M_i \subset \mathcal{P}^{(1)} \in \Omega_1^*, \forall i = 1, \dots, t] \\ & \implies [\exists \mathcal{P}^{(2)} \in \Omega_2^* : \sigma^{a(i)} F(M_i) \in \mathcal{P}^{(2)}, \forall i = 1, \dots, t] \end{aligned}$$
- (ii) 
$$\begin{aligned} & [H_1, \dots, H_t \in \mathcal{G}_0^{(2)-} \quad \text{mit} \quad \sigma^{a(i)} H_i \in \mathcal{P}^{(2)} \in \Omega_2^*, \forall i = 1, \dots, t] \\ & \implies [\exists M_i \in F^{-1}(H_i) (i = 1, \dots, t) \quad \exists \mathcal{P}^{(1)} \in \Omega_1^* : \sigma^{a(i)} M_i \subset \mathcal{P}^{(1)}, \forall i = 1, \dots, t]. \end{aligned}$$

**Bemerkung 3.3** *Sind zwei Parkettsysteme  $\Omega_i^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0^{(i)})$  ( $i = 1, 2$ ) gegeben, für die eine Zahl  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  und eine Surjektion  $F : \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, k) \rightarrow \mathcal{G}_0^{(2)-}$  existieren, so daß die Forderungen (i) und (ii) in Satz 3.2 für jedes  $t \in \mathbb{N}$  erfüllt sind, so kann eine Faktorabbildung  $\varphi : \Omega_1^* \rightarrow \Omega_2^*$  als*

„sliding-block-code“  $\varphi = F_\infty$  definiert werden. Die Abbildung  $F_\infty$  wird aus  $F$  vermöge der Festlegung  $F_\infty(\mathcal{P}) := \{(F_\infty(\mathcal{P}))_z \mid z \in \mathbb{Z}^d\}$  ( $\mathcal{P} \in \Omega_1^*$ ) mit

$$(F_\infty(\mathcal{P}))_z := \sigma^z F((\sigma^{-z}\mathcal{P})_{|\mathcal{Z}(k)}) \quad (z \in \mathbb{Z}^d)$$

gebildet.

Bedingung (i) in Satz 3.2 sichert  $F_\infty(\mathcal{P}) \in \Omega_1^*$  für jede Parkettierung  $\mathcal{P} \in \Omega_1^*$ . Dagegen gewährleistet Bedingung (ii) die Existenz eines Urbildes unter  $\varphi$  für jede Parkettierung  $\mathcal{R} \in \Omega_2^*$ , d. h., die Surjektivität von  $\varphi = F_\infty$ .

### Beweis von Satz 3.2:

1. Es gelte  $(\Omega_1^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega_1^*}) \geq (\Omega_2^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega_2^*})$  mit der Faktorabbildung  $\varphi : \Omega_1^* \rightarrow \Omega_2^*$ .

(a) Wir definieren für jedes  $G \in \mathcal{G}_0^{(2)-}$  die Menge  $U_G := \{\mathcal{P}^{(2)} \in \Omega_2^* \mid G \in \mathcal{P}^{(2)}\}$  aller Parkettierungen aus  $\Omega_2^*$ , die den Baustein  $G$  enthalten.

Dann ist  $(U_G)_{G \in \mathcal{G}_0^{(2)-}}$  eine Familie nichtleerer offener und abgeschlossener Mengen in  $\Omega_2^*$ , die paarweise disjunkt sind. Setzt man  $V_G := \varphi^{-1}(U_G) = \{\mathcal{P}^{(1)} \in \Omega_1^* \mid G \in \varphi(\mathcal{P}^{(1)})\}$  ( $G \in \mathcal{G}_0^{(2)-}$ ), so folgt aus der Stetigkeit und Surjektivität der Abbildung  $\varphi$ , daß  $(V_G)_{G \in \mathcal{G}_0^{(2)-}}$  eine Familie disjunkter nichtleerer offener und abgeschlossener Mengen in  $\Omega_1^*$  bildet.

Wegen  $\Omega_2^* = \bigcup_{G \in \mathcal{G}_0^{(2)-}} U_G$  gilt auch  $\Omega_1^* = \bigcup_{G \in \mathcal{G}_0^{(2)-}} V_G$ .

(b) Wir zeigen nun die Existenz einer Zahl  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  derart, daß für beliebige zwei Bausteine  $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_0^{(2)-}$  und beliebige Parkettierungen  $\mathcal{P}_1 \in V_{G_1}, \mathcal{P}_2 \in V_{G_2}$  gilt

$$[G_1 \neq G_2] \implies [\mathcal{P}_{1|\mathcal{Z}(k)} \neq \mathcal{P}_{2|\mathcal{Z}(k)}]. \quad (3.1)$$

Die Familie  $(C(\mathcal{A}))_{\mathcal{A} \in \mathcal{M}_0(\Omega_1^*)}$  (mit  $\mathcal{M}_0(\Omega_1^*) := \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, n)$ ) der zentrierten Zylinder in  $\Omega_1^*$  bildet eine Umgebungsbasis der Topologie auf  $\Omega_1^*$ . Folglich besitzen die offenen und abgeschlossenen Mengen  $V_{G_i} \subset \Omega_1^*$  ( $i = 1, 2$ ) Darstellungen als

$$V_{G_i} = \bigcup_{j \in J(G_i)} C(\mathcal{A}_j(G_i)) \quad \text{mit} \quad \mathcal{A}_j(G_i) \in \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, k_j(G_i))$$

$(k_j(G_i) \in \mathbb{N}, j \in J(G_i), i = 1, 2)$ , wobei  $|J(G_i)| < \infty$  ( $i = 1, 2$ ).

Wir definieren  $k(G_i) := \max_{j \in J(G_i)} k_j(G_i)$  ( $i = 1, 2$ ). Sind  $\mathcal{P}_1 \in V_{G_1}$  und  $\mathcal{P}_2 \in V_{G_2}$  beliebige Parkettierungen, so folgt für  $G_1 \neq G_2$  aus  $V_{G_1} \cap V_{G_2} = \emptyset$  auch

$$C(\mathcal{P}_{1|\mathcal{Z}(k(G_1))}) \cap C(\mathcal{P}_{2|\mathcal{Z}(k(G_2))}) = \emptyset.$$

Das heißt aber  $\mathcal{P}_{1|\mathcal{Z}(k(G_i))} \neq \mathcal{P}_{2|\mathcal{Z}(k(G_i))}$  ( $i = 1, 2$ ).

Mit  $k := \max(\min(k(G_1), k(G_2)) \mid G_1, G_2 \in \mathcal{G}_0^{(2)-})$  ist (3.1) somit für beliebige Bausteine  $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_0^{(2)-}$  und beliebige Parkettierungen  $\mathcal{P}_1 \in V_{G_1}, \mathcal{P}_2 \in V_{G_2}$  bewiesen.

(c) Setzt man

$$\mathcal{B}_G := \{\mathcal{P}_{|\mathcal{Z}(k)} \mid \mathcal{P} \in V_G \subset \Omega_1^*\} \quad (G \in \mathcal{G}_0^{(2)-}),$$

so gilt gemäß Beweisteil 1.(b)  $\mathcal{B}_{G_1} \cap \mathcal{B}_{G_2} = \emptyset$  für beliebige Bausteine  $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_0^{(2)-}$  mit  $G_1 \neq G_2$ . Außerdem ist

$$\mathcal{M}_0(\Omega_1^*, k) = \bigcup_{G \in \mathcal{G}_0^{(2)-}} \mathcal{B}_G$$

richtig.

Die stetige Surjektion  $\varphi$  induziert mithin eine Surjektion  $F : \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, k) \rightarrow \mathcal{G}_0^{(2)-}$  vermöge

$$F(\mathcal{A}) := G \iff \mathcal{A} \in \mathcal{B}_G \quad (\mathcal{A} \in \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, k)). \quad (3.2)$$

Umgekehrt definiert  $F$  durch  $F_\infty(\mathcal{P}) := \{(F_\infty(\mathcal{P}))_z \mid z \in \mathbb{Z}^d\}$  ( $\mathcal{P} \in \Omega_1^*$ ) mit der Festlegung

$$(F_\infty(\mathcal{P}))_z := \sigma^z F((\sigma^{-z}\mathcal{P})_{|\mathcal{Z}(k)}) \quad (z \in \mathbb{Z}^d) \quad (3.3)$$

eine Abbildung  $F_\infty : \Omega_1^* \rightarrow \Omega_2^*$ . Es gilt  $(\varphi(\mathcal{P}))_z = (F_\infty(\mathcal{P}))_z$  ( $\forall z \in \mathbb{Z}^d, \forall \mathcal{P} \in \Omega_1^*$ ): nach Definition der Mengen  $V_G$  ( $G \in \mathcal{G}_0^{(2)-}$ ) ist  $(\varphi(\mathcal{P}))_0 = H$  genau dann richtig, wenn  $\mathcal{P} \in V_H$ . Andererseits folgt aus  $\mathcal{P} \in V_H$  weiter  $\mathcal{P}_{|\mathcal{Z}(k)} \in \mathcal{B}_H$ . Das heißt aber nach (3.2) gerade  $(F_\infty(\mathcal{P}))_0 = F(\mathcal{P}_{|\mathcal{Z}(k)}) = H$ .

Für  $z \in \mathbb{Z}^d, z \neq 0$  ist wegen der Shift-Kommutativität der Faktorabbildung  $\varphi$  folgende Gleichungskette gültig:

$$\begin{aligned} (\varphi(\mathcal{P}))_z &= \sigma^z (\sigma^{-z} \varphi(\mathcal{P}))_0 = \sigma^z (\varphi(\sigma^{-z}\mathcal{P}))_0 \\ &= \sigma^z (F_\infty(\sigma^{-z}\mathcal{P}))_0 = \sigma^z F((\sigma^{-z}\mathcal{P})_{|\mathcal{Z}(k)}) \\ &= (F_\infty(\mathcal{P}))_z \quad (\text{gemäß (3.3)}). \end{aligned}$$

(d) Es seien Teilparkettierungen  $M_1, \dots, M_t \in \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, k)$  ( $t \in \mathbb{N}$ ) beliebig vorgegeben, so daß  $\sigma^{a(i)} \subset \mathcal{P}^{(1)}$  ( $\forall i = 1, \dots, t$ ) für gewisse Vektoren  $a(i) \in \mathbb{Z}^d$  ( $i = 1, \dots, t$ ) und eine gewisse Parkettierung  $\mathcal{P}^{(1)} \in \Omega_1^*$  richtig ist.

Dann gilt für  $\mathcal{P}^{(2)} = \varphi(\mathcal{P}^{(1)}) \in \Omega_2^*$  gemäß Definition von  $F : \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, k) \rightarrow \mathcal{G}_0^{(2)-}$  gerade

$$\sigma^{a(i)} F(M_i) \in \mathcal{P}^{(2)} \quad (\forall i = 1, \dots, t).$$

D. h., Bedingung (i) ist für jede natürliche Zahl  $t$  erfüllt.

Sind andererseits Bausteine  $H_1, \dots, H_t \in \mathcal{G}_0^{(2)-}$  ( $t \in \mathbb{N}$ ) und Vektoren  $a(1), \dots, a(t) \in \mathbb{Z}^d$  beliebig vorgegeben, und ist  $\mathcal{P}^{(2)} \in \Omega_2^*$  eine Parkettierung mit  $\sigma^{a(i)} H_i \in \mathcal{P}^{(2)}$  ( $i = 1, \dots, t$ ), so existiert wegen der Surjektivität von  $\varphi$  eine Parkettierung  $\mathcal{P}^{(1)} \in \Omega_1^*$  mit  $\varphi(\mathcal{P}^{(1)}) = \mathcal{P}^{(2)}$ . Für die Teilparkettierungen  $M_i := (\sigma^{-a(i)} \mathcal{P}^{(1)})_{|\mathcal{Z}(k)} \in \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, k)$  ( $i = 1, \dots, t$ ) gilt dann  $\sigma^{a(i)} M_i \subset \mathcal{P}^{(1)}$  und  $F(M_i) = H_i$  ( $\forall i = 1, \dots, t$ ).

Damit ist auch die Gültigkeit von (ii) für jedes  $t \in \mathbb{N}$  gezeigt.

2. Es mögen ein  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  und eine Surjektion  $F : \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, k) \rightarrow \mathcal{G}_0^{(2)-}$  existieren, so daß die Bedingungen (i) und (ii) für jedes  $t \in \mathbb{N}$  erfüllt sind.

- (a) Wir definieren eine Abbildung  $\varphi : \Omega_1^* \rightarrow \Omega_2^*$  durch  $\varphi(\mathcal{P}) := \{(\varphi(\mathcal{P}))_z \mid z \in \mathbb{Z}^d\}$  mit

$$(\varphi(\mathcal{P}))_z := \sigma^z F((\sigma^{-z} \mathcal{P})_{|\mathcal{Z}(k)}) \quad (z \in \mathbb{Z}^d, \mathcal{P} \in \Omega_1^*). \quad (3.4)$$

Man beachte dabei, daß wegen der Gültigkeit von (i) für jedes  $t \in \mathbb{N}$  das Bild  $\varphi(\mathcal{P})$  für jede Parkettierung  $\mathcal{P} \in \Omega_1^*$  ein Element von  $\Omega_2^*$  ist. Für beliebige Vektoren  $a, z \in \mathbb{Z}^d$  und beliebige Parkettierung  $\mathcal{P} \in \Omega_1^*$  gilt weiter

$$\begin{aligned} ((\varphi \circ \sigma^a)(\mathcal{P}))_z &= (\varphi(\sigma^a \mathcal{P}))_z = \sigma^z F((\sigma^{-z+a} \mathcal{P})_{|\mathcal{Z}(k)}) \\ &= \sigma^a \sigma^{z-a} F((\sigma^{a-z} \mathcal{P})_{|\mathcal{Z}(k)}) = \sigma^a (\varphi(\mathcal{P}))_{z-a} \quad (\text{nach (3.4)}) \\ &= (\sigma^a (\varphi(\mathcal{P})))_z = ((\sigma^a \circ \varphi)(\mathcal{P}))_z \end{aligned}$$

- (b) Wir betrachten weiter das Urbild  $\varphi^{-1}({}_a[H])$  einer Subbasismenge  ${}_a[H] := \{ \mathcal{P}^{(2)} \in \Omega_2^* \mid \sigma^a H \in \mathcal{P}^{(2)} \} (H \in \mathcal{G}_0^{(2)-}, a \in \mathbb{Z}^d)$ . Aus der Gültigkeit von (ii) für  $t = 1$  folgt insbesondere, daß  $\varphi^{-1}({}_a[H])$  nichtleer ist und die Darstellung

$$\varphi^{-1}({}_a[H]) = \bigcup_{M \in F^{-1}(H)} C(\sigma^a M)$$

als Vereinigung offener Mengen in  $\Omega_1^*$  besitzt. Mithin ist  $\varphi$  eine stetige Abbildung.

- (c) Angenommen, es existiert eine Parkettierung  $\mathcal{P}^{(2)} \in \Omega_2^*$  mit  $\varphi^{-1}(\mathcal{P}^{(2)}) = \emptyset$ .

Gemäß (ii) sind die Urbilder  $\varphi^{-1}(C(\mathcal{P}^{(2)}_{|\mathcal{Z}(l)})) (l = 0, 1, \dots)$  sämtlich nichtleer. Wir wählen für jedes  $l \in \{0, 1, \dots\}$  eine Parkettierung  $\mathcal{P}_l \in \varphi^{-1}(C(\mathcal{P}^{(2)}_{|\mathcal{Z}(l)}))$  aus und erhalten so eine Folge  $\{\mathcal{P}_l\}_{l \geq 0} \subset \Omega_1^*$ . Diese Folge enthält wegen der Kompaktheit von  $\Omega_1^*$  eine in  $\Omega_1^*$  konvergente Teilfolge  $\{\mathcal{P}_{l_n}\}_{n \geq 0}$  mit dem Grenzelement  $\mathcal{P}^{(1)} \in \Omega_1^*$ .

Da  $\varphi$  eine stetige Abbildung ist, existiert der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\mathcal{P}_{l_n})$  und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\mathcal{P}_{l_n}) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{l_n}\right) = \varphi(\mathcal{P}^{(1)}).$$

Andererseits ist  $(C(\mathcal{P}^{(2)}_{|\mathcal{Z}(l_n)}))_{n \geq 0}$  eine monoton fallende Mengenfolge mit

$$\bigcap_{n \geq 0} C(\mathcal{P}^{(2)}_{|\mathcal{Z}(l_n)}) = \{\mathcal{P}^{(2)}\}.$$

Wegen  $\varphi(\mathcal{P}_{l_n}) \in C(\mathcal{P}^{(2)}_{|\mathcal{Z}(l_n)}) (\forall n \geq 0)$  gilt letztlich

$$\varphi(\mathcal{P}^{(1)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\mathcal{P}_{l_n}) \in \bigcap_{n \geq 0} C(\mathcal{P}^{(2)}_{|\mathcal{Z}(l_n)}) = \{\mathcal{P}^{(2)}\},$$

d. h.  $\varphi(\mathcal{P}^{(1)}) = \mathcal{P}^{(2)}$  im Widerspruch zur Annahme.

Die Abbildung  $\varphi : \Omega_1^* \rightarrow \Omega_2^*$  ist somit stetig, shift-vertauschend und surjektiv, d. h., Faktorabbildung. ■

**Bemerkung 3.4** 1. Ist ein Parkettsystem  $\Omega_2^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0^{(2)})$  topologischer Faktor des Parkettsystems  $\Omega_1^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0^{(2)})$  vermöge der Abbildung  $\varphi : \Omega_1^* \rightarrow \Omega_2^*$ , so bildet  $\varphi$  wegen ihrer Shiftkommutativität jede Parkettierung  $\mathcal{P}^{(1)} \in \Omega_1^*$  mit einer Periode  $a \in \mathbb{Z}^d$  auf eine Parkettierung

$\mathcal{P}^{(2)} = \varphi(\mathcal{P}^{(1)})$  in  $\Omega_2^*$  ab, die dieselbe Periode  $a \in \mathbb{Z}^d$  besitzt.

Diese Eigenschaft liefert ein relativ einfaches notwendiges Kriterium für Faktorbeziehungen zwischen Parkettsystemen. (Aus  $\Omega_1^* \geq \Omega_2^*$  folgt jedoch nicht, daß die Anzahl der Parkettierungen einer festen Periode  $a \in \mathbb{Z}^d$  in  $\Omega_1^*$  stets größer oder gleich der Anzahl der Parkettierungen mit der Periode  $a \in \mathbb{Z}^d$  in  $\Omega_2^*$  ist!)

2. Für Parkettsysteme über dem Gitter  $\mathbb{Z}^1$  kann unter Verwendung von Satz 3.2 gezeigt werden, daß jede periodische Parkettierung eines Faktorsystems ein periodisches Urbild besitzt (zum Beweis siehe z. B. [64]). Diese Aussage ist für  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsysteme der Gitterdimension  $d > 1$  nicht richtig, da für diese Dimensionen Baustein-Mengen existieren, die ausschließlich nicht-periodische Parkettierungen erlauben (siehe insbesondere [54] zur Konstruktion solcher Baustein-Mengen).

## 3.2 Faktoruntersuchung für 1-dimensionale Quadersysteme – vollständige Charakterisierung

Wir suchen nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen einer Faktorbeziehung zwischen ein-dimensionalen Parkettsystemen. Aus der Shiftkommutativität von Faktorabbildungen zwischen  $\mathbb{Z}^1$ -Parkettsystemen ergibt sich unmittelbar die folgende **notwendige** Bedingung.

**Eigenschaft 3.5** *Sind  $\Omega_i^* = (\mathbb{Z}^1, \mathcal{G}_0^{(i)})$  ( $i = 1, 2$ ) ein-dimensionale Parkettsysteme mit  $\Omega_1^* \geq \Omega_2^*$ , so gilt*

$$[\text{Per}_p(\Omega_1^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_1^*}) > 0 \ (p \in \mathbb{N})] \implies [\text{Per}_p(\Omega_2^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_2^*}) > 0]. \quad (3.5)$$

**Satz 3.6** *Ist  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^1, \{l(j)\}_{j=1}^m)$  ein ein-dimensionales Quadersystem, so sind folgende Aussagen richtig:*

1. *Für jede natürliche Zahl  $n$  existiert genau dann eine Parkettierung  $\mathcal{P} \in \Omega^*$  mit der Periode  $n$ , wenn  $n$  eine Linearkombination der Bausteinlängen  $l(j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , ist.*
2. *Für jedes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > l(m)$ , gilt*

$$\text{Per}_n(\Omega^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega^*}) = \sum_{j=1}^m \text{Per}_{n-l(j)}(\Omega^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega^*}). \quad (3.6)$$

**Beweis:**

1. a) Die natürliche Zahl  $n$  besitze folgende Darstellung als Linearkombination der Bausteinlängen  $l(j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ :

$$n = \sum_{j=1}^m a_j \cdot l(j)$$

mit nichtnegativen ganzen Zahlen  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Wir bilden mit  $a_0 := 0$  und  $l(0) := 0$  die Teilparkettierung

$$\mathcal{A} := \bigcup_{\substack{j=1 \\ a_j > 0}}^m \sigma^{\sum_{t=0}^{j-1} a_t l(t)} \{\sigma^{(k-1)l(j)} G_j \mid k = 1, \dots, a_j\},$$

die das Intervall  $[0, n - 1] \cap \mathbb{Z}^1$  lückenlos ausfüllt. (Siehe auch Abbildung 3.1.)

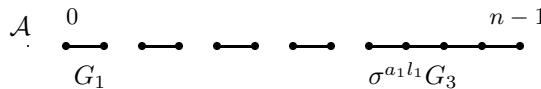


Abbildung 3.1: Die für  $\{l(j)\}_{j=1}^m = \{2, 3, 5\}$  und  $n = 13$  zu  $a_1 = 4, a_2 = 0, a_3 = 1$  konstruierte Teilparkettierung  $\mathcal{A}$ .

Folglich ist  $\mathcal{P} := \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \sigma^{i \cdot n} \mathcal{A}$  eine Parkettierung in  $\Omega^*$  mit der Periode  $n$ .

1. b) Es sei  $\mathcal{P}$  eine Parkettierung in  $\Omega^*$  mit der Periode  $n \in \mathbb{N}$ . Betrachtet wird die Teilparkettierung  $\mathcal{A} := \mathcal{P}|_{[0,n] \cap \mathbb{Z}^1}$ . Diese besitze die Darstellung  $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_t\}$  ( $t \in \mathbb{N}$ ) mit den Bausteinen  $H_i = \sigma^{z_i} G_{j(i)}$  ( $z_i \in \mathbb{Z}^1, G_{j(i)} \in \mathcal{G}_0, i = 1, \dots, t$ ), wobei  $z_1 < \dots < z_t$  gelten möge.

Dann überdeckt  $H_1$  den Nullpunkt  $0 \in \mathbb{Z}^1$  sowie  $H_t$  den Punkt  $n \in \mathbb{Z}^1$ . Da nach Voraussetzung  $\sigma^n \mathcal{P} = \mathcal{P}$  gilt, folgt aus der Definition von  $\mathcal{A}$ , daß  $\sigma^n H_1 = H_t$  ist. Daraus folgt sofort  $t > 1$ . Weiter erhält man, daß die Teilparkettierung  $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \setminus \{H_t\} = \{H_1, \dots, H_{t-1}\}$  ein Intervall der Länge  $n$  lückenlos ausfüllt. Das heißt aber gerade, es gilt

$$n = \sum_{i=1}^{t-1} l(j(i)).$$

Die Periode  $n \in \mathbb{N}$  ist somit eine Linearkombination der Bausteinlängen  $l(j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

2. a) Nach Teil 1. des Satzes gilt für  $n \in \mathbb{N}$  genau dann  $\text{Per}_n(\Omega^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega^*}) > 0$ , wenn nichtnegative ganze Zahlen  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , mit der Eigenschaft  $n = \sum_{j=1}^m a_j l(j)$  existieren. Wir identifizieren jede solche Linearkombination mit dem Vektor  $a := (a_1, \dots, a_m)$  ihrer Koeffizienten  $a_j$  und betrachten die Menge

$$Z(n, \Omega^*) := \{a = (a_1, \dots, a_m) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^m \mid n = \sum_{j=1}^m a_j l(j)\}.$$

Zur Bestimmung von  $\text{Per}_n(\Omega^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega^*})$  sind zu jedem  $a \in Z(n, \Omega^*)$  sämtliche Teilparkettierungen aus je  $a_j$  Bausteinen der Länge  $l(j)$  ( $j = 1, \dots, m$ ) zu untersuchen, die das Intervall  $[0, n-1] \cap \mathbb{Z}^1$  lückenlos ausfüllen.

Dabei gibt es für die Anordnung der insgesamt  $L(a) := \sum_{j=1}^m a_j \geq 1$  Bausteine in einer solchen Teilparkettierung genau

$$f(a) := \frac{L(a)!}{\prod_{j=1}^m (a_j!)}$$

Möglichkeiten.

Ist  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(a)$  eine der  $f(a)$  möglichen Anordnungen von je  $a_j$  Bausteinen der Länge  $l(j)$  ( $j = 1, \dots, m$ ) derart, daß  $[0, n-1] \cap \mathbb{Z}^1$  ausgefüllt ist, so bildet

$$\mathcal{P}_k(\mathcal{A}) := \sigma^k \bigcup_{t \in \mathbb{Z}} \sigma^{t \cdot n} \mathcal{A}$$

für jedes  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  eine Parkettierung in  $\Omega^*$  mit der Periode  $n$ . Dabei gilt bei fester Teilparkettierung  $\mathcal{A}$  für  $k_1, k_2 \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $k_1 \neq k_2$  auch  $\mathcal{P}_{k_1}(\mathcal{A}) \neq \mathcal{P}_{k_2}(\mathcal{A})$ .

Sind dagegen  $\mathcal{A}_1 = \{H_1^{(1)}, \dots, H_{L(a)}^{(1)}\}$  und  $\mathcal{A}_2 = \{H_1^{(2)}, \dots, H_{L(a)}^{(2)}\}$  zwei zu  $a \in Z(n, \Omega^*)$  gehörige Teilparkettierungen mit der Eigenschaft

$$H_1^{(2)} = \sigma^{v-n} H_{L(a)}^{(1)} \quad \text{und} \quad H_r^{(2)} = \sigma^v H_{r-1}^{(1)} \quad (r = 2, \dots, L(a)), \quad (3.7)$$

wobei  $v \in \mathbb{N}$  die Länge des Bausteines  $H_{L(a)}^{(1)}$  bezeichnet, so gilt

$$\{\mathcal{P}_k(\mathcal{A}_1) \mid k = 0, \dots, n-1\} = \{\mathcal{P}_k(\mathcal{A}_2) \mid k = 0, \dots, n-1\}.$$

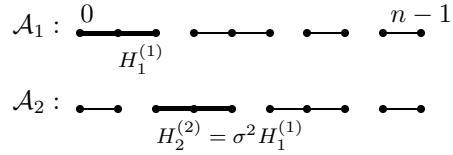


Abbildung 3.2: Zwei Teilparkettierungen  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  mit der Eigenschaft (3.7).

(Anschaulich bedeutet (3.7) gerade, daß die beiden Teilparkettierungen  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  durch zyklische Vertauschung ihrer Elemente ineinander überführt werden können. Man vergleiche dazu auch Abbildung 3.2.)

Zu jeder der  $f(a)$  möglichen Anordnungen  $\mathcal{A}$  von je  $a_j$  Bausteinen der Länge  $l(j)$  ( $j = 1, \dots, m$ ) derart, daß  $[0, n-1] \cap \mathbb{Z}^1$  ausgefüllt ist, existieren genau  $L(a) - 1$  weitere (zyklisch vertauschte) Bausteinanordnungen  $\mathcal{A}'$ , die die gleiche Menge periodischer Parkettierungen  $\{\mathcal{P}_k(\mathcal{A}) \mid k = 0, \dots, n-1\}$  erzeugen. Mithin gilt

$$\text{Per}_n(\Omega^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1} \mid_{\Omega^*}) = \sum_{a \in Z(n, \Omega^*)} n \cdot \frac{f(a)}{L(a)}. \quad (3.8)$$

2. b) Sei eine natürliche Zahl  $n > l(m)$  gegeben und  $j \in \{1, \dots, m\}$  fest gewählt.

Dann gilt für jedes  $a \in Z(n - l(j), \Omega^*)$ , daß  $a + e_j$  ein Element von  $Z(n, \Omega^*)$  ist. Weiter folgt

$$L(a + e_j) = L(a) + 1 \quad \text{und} \quad f(a + e_j) = f(a) \cdot \frac{L(a) + 1}{a_j + 1}.$$

Unter Verwendung von (3.8) erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \text{Per}_{n-l(j)}(\Omega^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1} \mid_{\Omega^*}) &= \sum_{j=1}^m \sum_{a \in Z(n-l(j), \Omega^*)} (n - l(j)) \cdot \frac{f(a)}{L(a)} \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{\hat{a} \in Z(n, \Omega^*): \\ \hat{a} - e_j \in Z(n-l(j), \Omega^*)}} (n - l(j)) \cdot \frac{f(\hat{a})}{L(\hat{a})} \cdot \frac{\hat{a}_j}{L(\hat{a}) - 1}. \end{aligned}$$

Man beachtet, daß für festes  $j \in \{1, \dots, m\}$  ein  $\hat{a} \in Z(n, \Omega^*)$  nur dann in der zweiten Summe auftritt, wenn  $\hat{a}_j > 0$  gilt. Da aber  $\hat{a}_j$  als Faktor in jedem Summanden vorkommt, kann auf die Einschränkung  $\hat{a} - e_j \in Z(n-l(j), \Omega^*)$  verzichtet werden. Die Endlichkeit der Summationsbereiche beider Summen sichert ihre Vertauschbarkeit, und man erhält

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \text{Per}_{n-l(j)}(\Omega^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1} \mid_{\Omega^*}) &= \sum_{\hat{a} \in Z(n, \Omega^*)} \frac{f(\hat{a})}{L(\hat{a}) \cdot (L(\hat{a}) - 1)} \sum_{j=1}^m (n - l(j)) \cdot \hat{a}_j \\ &= \sum_{\hat{a} \in Z(n, \Omega^*)} \frac{f(\hat{a})}{L(\hat{a}) \cdot (L(\hat{a}) - 1)} \cdot (nL(\hat{a}) - n) \\ &= \sum_{\hat{a} \in Z(n, \Omega^*)} n \cdot \frac{f(\hat{a})}{L(\hat{a})} = \text{Per}_n(\Omega^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1} \mid_{\Omega^*}). \end{aligned}$$

■

In Hinblick auf Eigenschaft 3.5 stellt sich die Frage, welche Bedingungen zusammen mit (3.5) **hinreichend** für das Bestehen einer Faktorbeziehung zwischen ein-dimensionalen Parkettsystemen sind. Die Antwort auf diese Frage liefert ein Resultat aus der Theorie der (ein-dimensionalen) Subshifts endlichen Typs.

**Satz 3.7 (M. Boyle, [10])** *Gegeben seien zwei ein-dimensionale Punktkonfigurationenräume  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2$ ) mit  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_1}) > h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_2})$ . Weiter sei jede Periode einer Konfiguration in  $\Omega_1$  auch Periode eines Elementes von  $\Omega_2$ . Dann gilt  $(\Omega_1, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_1}) \geq (\Omega_2, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_2})$ .*

**Bemerkung 3.8** *Der Beweis dieses Satzes benutzt insbesondere folgenden Einbettungssatz von W. Krieger ([37]):*

*Sei  $(\Omega, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega})$  ein topologisch mischender  $\mathbb{Z}^1$ -Punktkonfigurationenraum. Ist  $(\bar{\Omega}, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\bar{\Omega}})$  ein beliebiger  $\mathbb{Z}^1$ -Punktkonfigurationenraum mit  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\bar{\Omega}}) < h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega})$  und der Eigenschaft, daß für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Punkte in  $\bar{\Omega}$  mit der kleinsten Periode  $n$  nicht größer als die Anzahl der Punkte in  $\Omega$  mit minimaler Periode  $n$  ist, so ist  $(\bar{\Omega}, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\bar{\Omega}})$  zu einem Subshift von  $\Omega$  topologisch konjugiert.*

*Durch Streichen und Hinzufügen geeigneter Blöcke kann zu einem beliebigen Punktkonfigurationenraum  $\Omega_2$ , der die Voraussetzungen von Satz 3.7 erfüllt, ein anderer Subshift gleicher Entropie konstruiert werden, so daß dieser den Periodizitätsforderungen des obigen Einbettungssatzes genügt. Weiter wird die bekannte Zerlegung beliebiger ein-dimensionaler Punktkonfigurationenräume in mischende Bestandteile verwendet (vgl. dazu [16]).*

*Zu beachten ist jedoch, daß die bei der Beweisführung konstruierten Punktkonfigurationenräume bzw. Subshifts im allgemeinen keine Interpretation als ein-dimensionale Parkettsysteme zulassen, auch dann nicht, wenn die Punktkonfigurationenräume  $\Omega_1, \Omega_2$  des Satzes topologisch konjugiert zu Parkettsystemen sind.*

**Folgerung 3.9** *Es seien zwei ein-dimensionale Quadersysteme  $\Omega_i^* = (\mathbb{Z}^1, \mathcal{G}_0^{(i)}) = (\mathbb{Z}^1, \{l^{(i)}(j)\}_{j=1}^{m_i})$  ( $i = 1, 2$ ) mit  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_1^*}) > h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_2^*})$  gegeben. Dann gilt  $(\Omega_1^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_1^*}) \geq (\Omega_2^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_2^*})$  genau dann, wenn:*

$$\forall G \in \mathcal{G}_0^{(1)} \exists \text{ Teilparkettierung } \mathcal{A}(G) \text{ in } \Omega_2^* : G = \bigcup_{H \in \mathcal{A}(G)} H. \quad (3.9)$$

**Beweis:**

1. Angenommen, es gilt  $(\Omega_1^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_1^*}) \geq (\Omega_2^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_2^*})$  für die eindimensionalen Quadersysteme  $\Omega_i^* = (\mathbb{Z}^1, \mathcal{G}_0^{(i)})$  ( $i = 1, 2$ ) mit  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_1^*}) > h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_2^*})$ .

Nach Aussage des Satzes 3.6 ist jede Länge  $l^{(1)}(j)$  ( $j = 1, \dots, m_1$ ) eines Bausteines von  $\Omega_1^*$  Periode einer Parkettierung in  $\Omega_1^*$ . Aus dem Bestehen einer Faktorbeziehung  $(\Omega_1^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_1^*}) \geq (\Omega_2^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_2^*})$  folgt gemäß Eigenschaft 3.5 auch  $\text{Per}_{l^{(1)}(j)}(\Omega_2^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_2^*}) > 0$  für jedes  $j \in \{1, \dots, m_1\}$ .

Wie im Beweis von Satz 3.6 gezeigt wurde, ist diese Eigenschaft äquivalent dazu, daß jeder

Baustein  $G_j^{(1)} = [0, l^{(1)}(j) - 1] \cap \mathbb{Z}^1$  durch eine Teilparkettierung  $\mathcal{A}(G_j^{(1)})$  ( $j = 1, \dots, m_1$ ) in  $\Omega_2^*$  ausgefüllt werden kann. D. h., es gilt  $G_j^{(1)} = \bigcup_{H \in \mathcal{A}(G_j^{(1)})} H$ .

2. Es möge für jeden Baustein  $G \in \mathcal{G}_0^{(1)}$  eine Teilparkettierung  $\mathcal{A}(G)$  in  $\Omega_2^*$  derart existieren, daß  $G = \bigcup_{H \in \mathcal{A}(G)} H$  gilt.

Dann ist jede Länge  $l^{(1)}(j)$ ,  $j = 1, \dots, m_1$ , als Linearkombination der Bausteinlängen  $l^{(2)}(k)$ ,  $k = 1, \dots, m_2$ , in  $\Omega_2^*$  darstellbar. Unter Verwendung von Aussage 1 des Satzes 3.6 folgt daraus, daß jede Periode einer Parkettierung aus  $\Omega_1^*$  auch Periode einer Parkettierung in  $\Omega_2^*$  ist.

Mit Satz 1.33 folgt die Gültigkeit von  $(\Omega_1^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_1^*}) \geq (\Omega_2^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_2^*})$  unmittelbar aus Satz 3.7. ■

**Bemerkung 3.10** 1. Man vergleiche Satz 2.19 zu hinreichenden Bedingungen für die Ordnungsbeziehung  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_1^*}) > h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_2^*})$  der Entropien gegebener ein-dimensionaler Quadersysteme  $\Omega_1^*, \Omega_2^*$ . Allgemein kann für beliebige zwei ein-dimensionale Quadersysteme  $\Omega_1^*$  und  $\Omega_2^*$  durch Bestimmung der einfachen reellen Wurzel maximalen Betrages des in Abschnitt 2.2.1 angegebenen Polynoms (2.5) entschieden werden, welches System die größere topologische Entropie besitzt.

Die Existenz einer „zerlegenden“ Teilparkettierung  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}(G)$  ist für jeden Baustein  $G \in \mathcal{G}_0^{(1)}$  nachprüfbar, da die Menge  $\mathcal{G}_0^{(2)}$  der Proto-Bausteine von  $\Omega_2^*$  endlich ist. Man beachte außerdem, daß die Existenz einer Teilparkettierung  $\mathcal{A}(G)$  in  $\Omega_2^*$  mit  $G = \bigcup_{H \in \mathcal{A}(G)} H$  für die Gitterdimension  $d = 1$  gleichbedeutend zur Darstellbarkeit der Länge des Bausteines  $G$  als Linearkombination der Bausteinlängen des Quadersystems  $\Omega_2^*$  ist.

2. Für beliebige ein-dimensionale Parkettsysteme ist die Bedingung (3.5) nicht äquivalent zur Existenz einer Teilparkettierung  $\mathcal{A}(G)$  mit  $G = \bigcup_{H \in \mathcal{A}(G)} H$  für jedes  $G \in \mathcal{G}_0^{(1)}$ . Ist beispielsweise  $\Omega_1^* = (\mathbb{Z}^1, \{G^{(1)}\})$  mit dem Proto-Baustein  $G^{(1)} = \{0, 2\}$ , so gilt  $\text{Per}_p(\Omega_1^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_1^*}) > 0$  für alle Zahlen  $p = 4n$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Folglich erfüllt das Quadersystem  $\Omega_2^* = (\mathbb{Z}^1, \{l\})$  mit  $l = 2$  die Bedingung (3.5). Dagegen existiert offenbar keine Teilparkettierung  $\mathcal{A}(G^{(1)})$  in  $\Omega_2^*$  mit  $G^{(1)} = \{0, 2\} = \bigcup_{H \in \mathcal{A}(G^{(1)})} H$ .
3. Es lassen sich leicht Beispiele von ein-dimensionalen Quadersystemen  $\Omega_1^*, \Omega_2^*$  mit  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_1^*}) > h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_2^*})$  finden, die die „Zerlegungsbedingung“ (3.9) nicht erfüllen. Ebenso existieren Quadersysteme  $\Omega_1^*, \Omega_2^*$  mit  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_1^*}) < h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_2^*})$ , die der Bedingung (3.9) genügen.

Zu untersuchen bleibt das Bestehen von Faktorbeziehungen zwischen ein-dimensionalen Quadersystemen gleicher Entropie. (Man vergleiche in diesem Zusammenhang die Aussagen zur Gleichheit der topologischen Entropie ein-dimensionaler Quadersysteme in Abschnitt 2.2.1, insbesondere in Satz 2.23.) Dazu ist der folgende Satz von B. Kitchens ([36]) hilfreich, der eine notwendige Bedingung für eine Faktorbeziehung zwischen topologisch transitiven  $\mathbb{Z}^1$ -Punktkonfigurationenräumen gleicher Entropie angibt.

**Satz 3.11 (B. Kitchens, [36])** Sind  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  topologisch transitive  $\mathbb{Z}^1$ -Punktkonfigurationenräume mit  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_1}) = h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_2})$ , so folgt aus dem Bestehen einer Faktorbeziehung  $\Omega_1 \geq \Omega_2$ , daß das charakteristische Polynom  $\Delta_0(\Omega_2)(x)$  von  $\Omega_2$  modulo  $x$  das charakteristische Polynom  $\Delta_0(\Omega_1)(x)$  von  $\Omega_1$  modulo  $x$  teilt.

**Bemerkung 3.12** Nach Satz 2.23 besitzen zwei ein-dimensionale Quadersysteme  $\Omega_i^* = (\mathbb{Z}^1, \{l^{(i)}(j)\}_{j=1}^{m_i})$  ( $i = 1, 2$ ) mit  $l^{(1)}(m_1) \geq l^{(2)}(m_2)$  genau dann die gleiche topologische Entropie, wenn ein Polynom  $p(x) = \sum_{i=1}^n x^{a_i}$  mit Parametern  $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_n \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  derart existiert, daß  $\Delta_0(\Omega_1^*)(x) = p(x) \cdot \Delta_0(\Omega_2^*)(x)$ .

Existiert ein solches Polynom  $p(x)$ , so kann für  $n > 0$  die Menge  $\{l^{(1)}(j)\}_{j=1}^{m_1}$  der Bausteinlängen von  $\Omega_1^*$  dargestellt werden als

$$\{l^{(1)}(j)\}_{j=1}^{m_1} = [\bigcup_{q=0}^n \{a_n - a_{n-q} + l^{(2)}(k) \mid k = 1, \dots, m_2\}] \setminus \{a_n - a_p \mid p = 0, \dots, n-1\}.$$

Weiter gilt  $m_1 = (n+1)(m_2 - 1) + 1$ .

**Beispiel 3.13** 1. Gegeben sei ein ein-dimensionales Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^1, \{l(j)\}_{j=1}^m)$  mit  $m > 1$  Proto-Baustein. Wir wählen ein  $j_0 \in \{1, \dots, m\}$  derart, daß die Vereinigung

$$\{\tilde{l}(j)\}_{j=1}^{\tilde{m}} := \{l(k) \mid k = 1, \dots, m, k \neq j_0\} \cup \{l(j_0) + l(k) \mid k = 1, \dots, m\}$$

disjunkt ist. (Dies ist insbesondere für  $j_0 = m$  erfüllt.)

Für das charakteristische Polynom modulo  $x$  des Quadersystems  $\tilde{\Omega}^* := (\mathbb{Z}^1, \{\tilde{l}(j)\}_{j=1}^{\tilde{m}})$  gilt  $\Delta_0(\tilde{\Omega}^*)(x) = (x^{l(j_0)} + 1)\Delta_0(\Omega^*)(x)$ . Mithin sind die topologischen Entropien von  $\Omega^*$  und  $\tilde{\Omega}^*$  gleich, außerdem ist die notwendige Bedingung für eine Faktorbeziehung zwischen transitiven ein-dimensionalen Parkettsystemen aus Satz 3.11 erfüllt.

Wir zeigen  $\tilde{\Omega}^* \geq \Omega^*$  durch Konstruktion einer stetigen, shiftvertauschenden Surjektion  $\varphi : \tilde{\Omega}^* \rightarrow \Omega^*$ :

Mit der Festlegung  $a_1 := l(j_0)$  und  $a_0 := 0$  besitzt jede Bausteinlänge  $\tilde{l}(j)$  ( $j = 1, \dots, \tilde{m}$ ) von  $\tilde{\Omega}^*$  eine Darstellung als Summe  $\tilde{l}(j) = a_1 - a_q + l(k)$ , wobei  $q \in \{0, 1\}$  und  $k \in \{1, \dots, m\}$  nach Voraussetzung an  $j_0$  eindeutig bestimmt sind.

Damit definieren wir eine Abbildung  $\varphi : \tilde{\Omega}^* \rightarrow \Omega^*$  wie folgt als „stückweise“ Zerlegung der Bausteine jeder Parkettierung  $\mathcal{P} \in \tilde{\Omega}^*$ : ist  $H \in \mathcal{P}$  ein Baustein der Länge  $\tilde{l}(j) = a_1 - a_1 + l(k) = l(k)$  mit  $k \in \{1, \dots, m\}$ ,  $k \neq j_0$ , so wird dieser durch  $\varphi$  auf sich abgebildet; besitzt dagegen  $H \in \mathcal{P}$  die Länge  $\tilde{l}(j) = a_1 - a_0 + l(k) = l(j_0) + l(k)$  ( $k \in \{1, \dots, m\}$ ), so wird dieser Baustein in die hintereinander angeordneten Bausteine der Längen  $l(j_0)$  und  $l(k)$  „zerlegt“ (siehe Abbildung 3.3).

Die vermöge  $\varphi(\mathcal{P}) := \bigcup_{H \in \mathcal{P}} \varphi(H)$  ( $\mathcal{P} \in \tilde{\Omega}^*$ ) definierte Abbildung  $\varphi : \tilde{\Omega}^* \rightarrow \Omega^*$  ist offenbar shiftvertauschend und stetig.

Zum Beweis der Surjektivität von  $\varphi$  beachte man, daß durch  $\varphi$  jede Teilparkettierung  $\mathcal{A} = \sigma^z\{G_{j_0}, \sigma^{l(j_0)}G_k\}$  ( $k \in \{1, \dots, m\}$ ,  $z \in \mathbb{Z}^1$ ) in  $\Omega^*$  als Bild eines Bausteines  $\sigma^z\tilde{G}_j$  mit

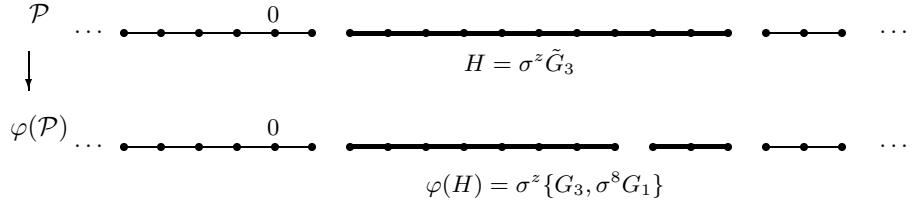


Abbildung 3.3: Zur Definition der Abbildung  $\varphi$  als „Zerlegung“ von Bausteinen am Beispiel von  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^1, \{3, 6, 8\})$  und  $\tilde{\Omega}^* = (\mathbb{Z}^1, \{3, 6, 11, 14, 16\})$  ( $j_0 = 3$ ).

$\tilde{l}(j) = l(j_0) + l(k)$  auftritt. Zusammen mit  $\varphi(H) = \{H\}$  für alle Bausteine  $H \in \mathcal{P} \in \tilde{\Omega}^*$  der Länge  $\tilde{l}(j) \in \{l(k) \mid k = 1, \dots, m, k \neq j_0\}$  folgt daraus die Surjektivität von  $\varphi$ .

2. Wählt man für ein gegebenes ein-dimensionales Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^1, \{l(j)\}_{j=1}^m)$  mit  $m > 1$  zwei Zahlen  $j_0, j_1 \in \{1, \dots, m\}$  derart, daß die Vereinigung

$$\{\tilde{l}(j)\}_{j=1}^{\tilde{m}} := \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq j_0}}^m \{l(k)\} \cup \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq j_1}}^m \{l(j_0) + l(k)\} \cup \bigcup_{k=1}^m \{l(j_0) + l(j_1) + l(k)\}$$

aus 3 disjunkten Teilmengen besteht, so besitzt das ein-dimensionale Quadersystem  $\tilde{\Omega}^* = (\mathbb{Z}^1, \{\tilde{l}(j)\}_{j=1}^{\tilde{m}})$  die gleiche topologische Entropie wie  $\Omega^*$ , und es gilt

$$\Delta_0(\tilde{\Omega}^*)(x) = (x^{a_2} + x^{a_1} + x^{a_0}) \cdot \Delta_0(\Omega^*)(x)$$

mit  $a_0 = 0, a_1 = l(j_1), a_2 = l(j_0) + l(j_1)$ .

Das in Teil 1 vorgestellte Verfahren zur Konstruktion einer Faktorabbildung  $\varphi : \tilde{\Omega}^* \rightarrow \Omega^*$  läßt sich entsprechend fortsetzen.

**Satz 3.14** Für zwei ein-dimensionale Quadersysteme  $\Omega_i^* = (\mathbb{Z}^1, \{l^{(i)}(j)\}_{j=1}^{m_i})$  ( $i = 1, 2$ ) mit  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_1^*}) = h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_2^*})$  gilt  $\Omega_1^* \geq \Omega_2^*$  genau dann, wenn das charakteristische Polynom  $\Delta_0(\Omega_2^*)$  von  $\Omega_2^*$  modulo  $x$  das charakteristische Polynom  $\Delta_0(\Omega_1^*)$  von  $\Omega_1^*$  modulo  $x$  teilt.

**Beweis:**

- Angenommen, es gilt  $\Omega_1^* \geq \Omega_2^*$  und  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_1^*}) = h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_2^*})$ . Dann folgt aus Satz 3.11 unter Beachtung von Satz 1.33 und der topologischen Transitivität ein-dimensionaler Quadersysteme (vgl. Bemerkung 2.11 2.) die Existenz eines Polynoms  $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$  derart, daß gilt  $\Delta_0(\Omega_1^*)(x) = p(x) \cdot \Delta_0(\Omega_2^*)(x)$ .
- Wir nehmen an, die ein-dimensionalen Quadersysteme  $\Omega_i^* = (\mathbb{Z}^1, \{l^{(i)}(j)\}_{j=1}^{m_i})$  ( $i = 1, 2$ ) besitzen die gleiche topologische Entropie und es gilt  $\Delta_0(\Omega_1^*)(x) = p(x) \cdot \Delta_0(\Omega_2^*)(x)$  mit einem Polynom  $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ .

Aus der Gleichheit der Entropien beider Quadersysteme folgt, daß das Polynom  $p(x)$  die Struktur  $p(x) = \sum_{i=1}^n x^{a_i}$  mit Parametern  $0 =: a_0 < a_1 < \dots < a_n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  derart

besitzt, daß die Bedingungen 1. und 2. des Satzes 2.23 erfüllt sind. Für  $n = 0$  ist  $p(x) \equiv 1$ , und die beiden Quadersysteme  $\Omega_1^*$  und  $\Omega_2^*$  sind identisch. Dann gilt insbesondere auch  $\Omega_1^* \geq \Omega_2^*$ . Im folgenden werde  $n > 0$  vorausgesetzt. Bezeichnen für jedes  $q \in \{0, \dots, n-1\}$  mit  $p(q) \in \{q+1, \dots, n\}$  den kleinsten Index  $p$  derart, daß  $a_p - a_q \in \{l^{(2)}(j) \mid j = 1, \dots, m_2\}$  gilt. (Ein solcher Index  $p$  existiert gemäß Bedingung 1. in Satz 2.23 stets.) Speziell gilt  $p(n-1) = n$ . Wir definieren eine Abbildung  $g : \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$  vermöge

$$g(y) := \begin{cases} p(y) & : y \in \{0, \dots, n-1\} \\ n & : y = n \end{cases} \quad (y \in \{0, \dots, n\}).$$

Dann existiert für jedes  $q \in \{0, \dots, n-1\}$  eine kleinste natürliche Zahl  $i \equiv i(q)$  mit  $g^{i(q)}(q) = n$ , wobei  $g^k(\cdot)$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  die  $k$ -te Iterierte von  $g$  bezeichnet. (Wir vereinbaren außerdem  $g^0(y) := y$  ( $\forall y \in \{0, \dots, n\}$ )). Insbesondere gilt dann  $i(q) \leq n - q$  für jedes  $q \in \{0, \dots, n-1\}$ .

Damit läßt sich jede Differenz  $a_n - a_q$  ( $q = 0, \dots, n-1$ ) als Summe

$$a_n - a_q = \sum_{h=1}^{i(q)} (a_{g^h(q)} - a_{g^{h-1}(q)}) \quad (3.10)$$

schreiben.

Nach Satz 2.23 gilt

$$\{l^{(1)}(j)\}_{j=1}^{m_1} = [\bigcup_{q=0}^n \{a_n - a_q + l^{(2)}(k) \mid k = 1, \dots, m_2\}] \setminus \{a_n - a_p \mid p = 0, \dots, n-1\}. \quad (3.11)$$

Folglich existieren für jede Quaderlänge  $l^{(1)}(j)$  ( $j = 1, \dots, m_1$ ) Zahlen  $q \in \{0, \dots, n\}$  und  $k \in \{1, \dots, m_2\}$ , so daß gilt  $l^{(1)}(j) = a_n - a_q + l^{(2)}(k)$ . Mit der Festlegung  $i(n) := 1$  kann man somit gemäß (3.10) schreiben

$$l^{(1)}(j) = \sum_{h=1}^{i(q)} (a_{g^h(q)} - a_{g^{h-1}(q)}) + l^{(2)}(k).$$

Für  $q < n$  ist nach Definition der Abbildung  $g$  jeder Summand  $a_{g^h(q)} - a_{g^{h-1}(q)}$  gleich einer Quaderlänge  $l^{(2)}(j(h))$ ,  $j(h) \in \{1, \dots, m_2\}$ , von  $\Omega_2^*$ . Wir benutzen die Darstellung

$$l^{(1)}(j) = l^{(2)}(j(i(q))) + \dots + l^{(2)}(j(1)) + l^{(2)}(k) \quad (q < n) \quad (3.12)$$

zur Konstruktion einer Faktorabbildung  $\varphi : \Omega_1^* \rightarrow \Omega_2^*$  als „stückweise Zerlegung“ von Bausteinen. Dabei ist in Hinblick auf die Surjektivität dieser Abbildung noch die Möglichkeit der Nicht-Eindeutigkeit der Darstellung (3.10) (und damit auch der Nicht-Eindeutigkeit von (3.12)) zu untersuchen. Aus (3.11) folgt unmittelbar, daß eine Bausteinlänge  $l^{(1)}(j)$  ( $j \in \{1, \dots, m_1\}$ ) genau dann zwei Darstellungen

$$l^{(1)}(j) = a_n - a_{q_i} + l^{(2)}(k_i) \quad (i = 1, 2)$$

mit  $q_1 < q_2 \in \{1, \dots, n\}$ ,  $k_1 \neq k_2 \in \{1, \dots, m_2\}$  besitzt, wenn ein  $r \in \{0, \dots, n-1\}$  existiert, so daß  $l^{(1)}(j) = a_n - a_r$  richtig ist. In diesem Fall gilt  $a_{q_i} - a_r = l^{(2)}(k_i)$  ( $i = 1, 2$ ). Wegen  $g(r) = q_1$ , wählen wir die Darstellung

$$l^{(1)}(j) = a_n - a_{q_2} + l^{(2)}(k_2) = \sum_{h=1}^{i(q_2)} (a_{g^h(q_2)} - a_{g^{h-1}(q_2)}) + l^{(2)}(k_2)$$

für die Konstruktion von  $\varphi$ .

Ist  $H \in \mathcal{G}^{(1)}$  ein Baustein der Gestalt  $H = \sigma^z G_j^{(1)}$  mit  $z \in \mathbb{Z}^1$ ,  $G_j^{(1)} \in \mathcal{G}_0^{(1)}$ , so definieren wir

$$\varphi(H) := \begin{cases} \sigma^z \{G_k^{(2)}\} = \{H\} & : l^{(1)}(j) = a_n - a_q + l^{(2)}(k) \text{ mit } q = n \\ \sigma^z \{G_{j(i(q))}^{(2)}, \dots, \sigma^{a_n - a_q} G_k^{(2)}\} & : l^{(1)}(j) = a_n - a_q + l^{(2)}(k) \text{ mit } q < n \end{cases}$$

(vgl. auch Abbildung 3.4).

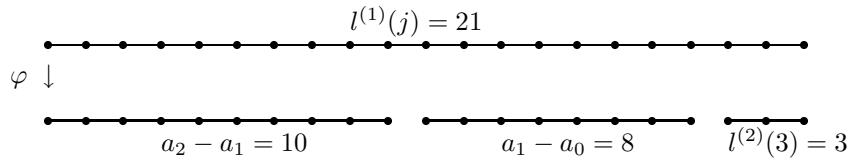


Abbildung 3.4: Die Definition von  $\varphi$  als stückweise Zerlegung von Bausteinen für  $\Omega_2^* = (\mathbb{Z}^1, \{3, 5, 8, 10\})$  und  $p(x) = x^{18} + x^8 + 1$  am Beispiel von  $l^{(1)}(j) = 21 = a_2 - a_0 + l^{(2)}(3)$ .

(Dabei wird entsprechend der oben gemachten Bemerkung für die Darstellung  $l^{(1)}(j) = a_n - a_q + l^{(2)}(k)$  mit  $q < n$  stets das größte mögliche  $q$  gewählt.)

Die vermöge  $\varphi(\mathcal{P}) := \bigcup_{H \in \mathcal{P}} \varphi(H)$  ( $\mathcal{P} \in \Omega_1^*$ ) induzierte Abbildung  $\varphi : \Omega_1^* \rightarrow \Omega_2^*$  ist offenbar stetig und shift-kommutierend. Zum Beweis der Surjektivität beachte man zunächst die Gültigkeit von

$$\{l^{(2)}(k), k = 1, \dots, m_2\} \setminus \{a_n - a_r \mid g(r) = n\} \subsetneq \{l^{(1)}(j) \mid j = 1, \dots, m_1\}.$$

Da jede endliche Teilparkettierung in  $\Omega_2^*$ , deren erster Baustein eine Länge  $a_n - a_r$  mit  $r \in \{0, \dots, n-1 \mid g(r) = n\}$  besitzt, als Ausschnitt des Bildes einer gewissen Teilparkettierung in  $\Omega_1^*$  unter  $\varphi$  auftritt, ist die Abbildung  $\varphi$  auch surjektiv. ■

**Folgerung 3.15** Zwei ein-dimensionale Quadersysteme  $\Omega_i^* = (\mathbb{Z}^1, \{l^{(i)}(j)\}_{j=1}^{m_i})$  ( $i = 1, 2$ ) sind genau dann schwach konjugiert, wenn ihre Proto-Baustein-Mengen identisch sind, d. h., wenn  $\{l^{(1)}(j)\}_{j=1}^{m_1} = \{l^{(2)}(j)\}_{j=1}^{m_2}$  gilt.

**Folgerung 3.16** 1. Jedes ein-dimensionale Quadersystem  $\Omega^*$  ist nichttrivialer Faktor von unendlich vielen ein-dimensionalen Quadersystemen der gleichen Entropie.

2. Jedes ein-dimensionale Quadersystem  $\Omega^*$  besitzt höchstens endlich viele Faktor-Quadersysteme gleicher Entropie.

**Bemerkung 3.17** 1. Man beachte, daß aus der Teilbarkeit des charakteristischen Polynoms  $\Delta_0(\Omega_1^*)(x)$  von  $\Omega_1^*$  modulo  $x$  durch das Polynom  $\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$  bereits die Gültigkeit von (3.5) folgt.

2. Bedingung (3.5) ist für eine Faktorbeziehung ein-dimensionaler Quadersysteme **gleicher Entropie** notwendig, aber nicht hinreichend.

Beispielsweise haben die Quadersysteme  $\Omega_1^* = (\mathbb{Z}^1, \{3, 5, 8\})$  und  $\Omega_2^* = (\mathbb{Z}^1, \{3, 5, 11, 13, 16\})$  die gleiche Entropie und erfüllen Bedingung (3.5). Es gilt aber  $\Omega_1^* \not\geq \Omega_2^*$ , da die in Satz 3.14 angebene notwendige Bedingung an die charakteristischen Polynome  $\Delta_0(\Omega_1^*)(x)$  und  $\Delta_0(\Omega_2^*)(x)$  von  $\Omega_1^*$  und  $\Omega_2^*$  modulo  $x$  nicht erfüllt ist.

### 3.3 Faktoreigenschaften von ein- und mehrdimensionalen Quadersystemen – qualitative Unterschiede

Im vorangegangenen Abschnitt 3.2 ist es gelungen, eine vollständige Charakterisierung für Faktorbeziehungen zwischen ein-dimensionalen Quadersystemen anzugeben. Für zwei- und höherdimensionale Quadersysteme ist ein solches Resultat aus verschiedenen Gründen nicht zu erwarten. Zum einen wird im Beweis von Satz 3.7 entscheidend von der ein-dimensionalen linear geordneten Struktur der Elemente ein-dimensionaler Konfigurationenräume und der damit verbundenen einfachen Charakterisierung topologischer Mischung Gebrauch gemacht. Zweitens ist für Gitterdimensionen  $d > 1$  die topologische Entropie erheblich schwerer zu bestimmen als im Fall  $d = 1$  (vgl. insbesondere die Untersuchungen in Abschnitt 2.2.2).

Ausgehend von der Beschreibung  $d$ -dimensionaler Quadersysteme verschwindender topologischer Entropie in Satz 2.36, wenden wir uns im folgenden der Untersuchung von Quadersystemen zu, die ein Faktor-Quadersystem der topologischen Entropie 0 besitzen. Bereits für diese spezielle Fragestellung werden wesentliche qualitative Unterschiede zwischen ein- und mehrdimensionalen Quadersystemen aufgezeigt.

**Satz 3.18** Ein ein-dimensionales Quadersystem  $\Omega_2^* = (\mathbb{Z}^1, \{l^{(2)}\})$  der Entropie  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_2^*}) = 0$  ist genau dann topologischer Faktor des ein-dimensionalen Quadersystems  $\Omega_1^* = (\mathbb{Z}^1, \{l^{(1)}(j)\}_{j=1}^{m_1})$ , wenn die Länge  $l^{(2)}$  des einzigen Bausteins in  $\Omega_2^*$  jede Bausteinlänge  $l^{(1)}(j)$  ( $j = 1, \dots, m_1$ ) von  $\Omega_1^*$  teilt.

**Beweis:**

1. Es gelte  $\Omega_1^* \geq \Omega_2^*$ . Dann gilt gemäß Eigenschaft 3.5 für jedes  $p \in \mathbb{N}$  mit  $\text{Per}_p(\Omega_1^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_1^*}) > 0$  auch  $\text{Per}_p(\Omega_2^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_2^*}) > 0$ . Nach Satz 3.6 ist  $\text{Per}_p(\Omega_1^*, \sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_1^*})$  für festes  $p \in \mathbb{N}$  genau dann positiv, wenn nichtnegative ganze Zahlen  $a_j$ , ( $j = 1, \dots, m_1$ ) existieren, so daß  $p = \sum_{j=1}^{m_1} a_j \cdot l^{(1)}(j)$  ist.

Andererseits ist  $p \in \mathbb{N}$  genau dann Periode einer Parkettierung in  $\Omega_2^*$ , wenn sie ein Vielfaches der einzigen Bausteinlänge  $l^{(2)}$  ist, d. h., wenn  $p = a \cdot l^{(2)}$  für geeignetes  $a \in \mathbb{N}$  gilt. Mithin ist

die in 3.5 angegebene notwendige Bedingung für eine Faktorbeziehung  $\Omega_1^* \geq \Omega_2^*$  genau dann erfüllt, wenn  $l^{(2)}$  ein Teiler jeder Länge  $l^{(1)}(j)$ ,  $j = 1, \dots, m_1$ , ist.

2. Angenommen,  $l^{(2)}$  ist ein Teiler von  $l^{(1)}(j)$ ,  $\forall j = 1, \dots, m_1$ . Dann gilt  $\alpha_j := l^{(1)}(j)/l^{(2)} \in \mathbb{N}$  für jedes  $j = 1, \dots, m_1$ .

Wir definieren eine Abbildung  $\varphi : \Omega_1^* \rightarrow \Omega_2^*$  durch die Festlegung  $\varphi(\mathcal{P}) := \bigcup_{H \in \mathcal{P}} \varphi(H)$  ( $\mathcal{P} \in \Omega_1^*$ ) mit

$$\varphi(H) := \sigma^z \{ \sigma^{kl^{(2)}} G_j^{(2)} \mid k = 0, \dots, \alpha_j - 1 \} \iff H = \sigma^z G_j^{(1)} \quad (z \in \mathbb{Z}, G_j^{(1)} \in \mathcal{G}_0^{(1)}) \quad (3.13)$$

(Vgl. Abbildung 3.5.)

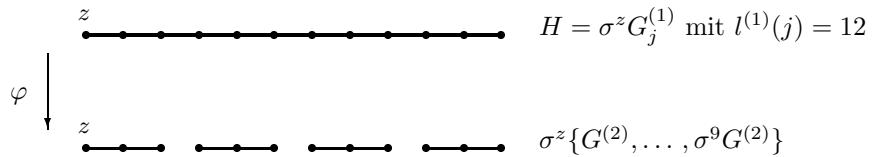


Abbildung 3.5: Zur Definition der Abbildung  $\varphi : \Omega_1^* \rightarrow \Omega_2^*$  für  $\Omega_2^* = (\mathbb{Z}^1, \{l^{(2)}\})$  mit  $l^{(2)} = 3$ .

Die so definierte Abbildung  $\varphi$  ist offenbar shift-vertauschend und surjektiv. Die Urbilder von Subbasismengen in  $\Omega_2^*$  sind als Vereinigung von Subbasismengen in  $\Omega_1^*$  offene Mengen. Mithin ist  $\varphi$  stetig und somit Faktorabbildung von  $\Omega_1^*$  auf  $\Omega_2^*$ . ■

**Bemerkung 3.19** Die im Beweis von Satz 3.18 angegebene Faktorabbildung  $\varphi$  kann als „sliding-block-code“  $F_\infty$  mit einer Blockabbildung  $F : \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, 0) \rightarrow \mathcal{G}_0^{(2)-}$  aufgefaßt werden. Dies läßt sich wegen  $\mathcal{M}_0(\Omega_1^*, 0) = \{\{H\} \mid H \in \mathcal{G}_0^{(1)-}\}$  so interpretieren, daß jedem Baustein einer Parkettierung in  $\Omega_1^*$  unabhängig von der Länge seiner Nachbarbausteine ein Baustein in  $\mathcal{G}^{(2)}$  zugeordnet wird.

Wir wenden uns nun der Frage nach Faktor-Quadersystemen verschwindender topologischer Entropie für Quadersysteme über dem Gitter der Dimension  $d \geq 2$  zu. Dabei ist zu beachten, daß  $d$ -dimensionale Quadersysteme der Entropie 0 für  $d > 1$  im Gegensatz zu  $d = 1$  nicht endlich sind, sondern aus unendlich vielen Orbits endlicher und unendlicher Größe bestehen (vgl. auch Abschnitt 2.2.2.1).

**Bemerkung 3.20** Zur Untersuchung von  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystemen mit  $d \geq 2$  hinsichtlich des Faktorbegriffs (aber auch in Hinblick auf Eigenschaften wie Transitivität oder Mischung) bietet sich eine Reduzierung der Gitterdimension des zu betrachtenden Parkettsystems an. Dazu kann die im folgenden Lemma beschriebene Projektionsabbildung verwendet werden.

**Lemma 3.21 (K. Hässler,[27])** Seien  $j \in \{1, \dots, d\}$  und ein Vektor  $v = (v_1, \dots, v_d)$  mit  $v_i = 1, \forall i = 1, \dots, d, i \neq j$ , und  $v_j = b_j > 1$ ,  $b_j \in \mathbb{N}$  vorgegeben. Dann wird durch

$$\begin{aligned} p^{(j)}(b_j)(x) &:= (b_j y_1, \dots, b_j y_{j-1}, b_j y_{j+1}, \dots, b_j y_d) \iff \\ x &= y + k \cdot v \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}, y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d, \text{ wobei } y_j = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

eine Abbildung  $p^{(j)}(b_j) : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^{d-1}$  definiert.

**Lemma 3.22 ([27])** Ist  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0)$  ( $d \geq 2$ ) ein Parkettsystem der Ordnung  $(o_1, \dots, o_d)$ , so sind für jedes  $j \in \{1, \dots, d\}$  und jede natürliche Zahl  $b_j > \max(o_i \mid i = 1, \dots, d)$  folgende Aussagen richtig:

1. für jeden Baustein  $G \in \mathcal{G}_0$  und jede Gerade  $h(t) = y + t \cdot v$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) gilt  $|G \cap h| \leq 1$ .
2.  $|G| = |p^{(j)}(b_j)(G)|$ ,  $\forall G \in \mathcal{G}_0$ .
3. für beliebige zwei Bausteine  $G, H \in \mathcal{G}_0$ ,  $G \neq H$  gilt  $p^{(j)}(b_j)(G) \neq p^{(j)}(b_j)(H)$ .

**Bemerkung 3.23** Man beachte, daß das Bild  $p^{(j)}(b_j)(G)$  eines Bausteines  $G \subset \mathbb{Z}^d$  im allgemeinen eine nicht-zusammenhängende Teilmenge des Gitters  $\mathbb{Z}^{d-1}$  bildet. Weiter überzeugt man sich, beispielsweise durch Untersuchung von Verschiebungen in Richtung  $e_j$ , davon, daß die Projektion  $p^{(j)}(b_j)$  nicht mit dem Shift vertauscht.

**Definition 3.24** Es sei  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0)$  ein  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsystem der Ordnung  $(o_1, \dots, o_d)$ . Dann wird für  $j \in \{1, \dots, d\}$  und  $b_j > \max(o_i \mid i = 1, \dots, d)$ ,  $b_j \in \mathbb{N}$ , das Parkettsystem

$$p^{(j)}(b_j)(\Omega^*) := (\mathbb{Z}^{d-1}, \{p^{(j)}(b_j)(G) \mid G \in \mathcal{G}_0\})$$

die **Projektion** von  $\Omega^*$  auf das Gitter  $\mathbb{Z}^{d-1}$  genannt.

**Bemerkung 3.25** Man beachte, daß die Definition 3.24 den Fall  $p^{(j)}(b_j)(\Omega^*) = \emptyset$  nicht ausschließt. In der Tat ist beispielsweise für das zwei-dimensionale Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{l\})$  mit  $l = (2, 3)$  die Projektion  $p^{(2)}(4)(\Omega^*)$  leer, da der Bildbaustein  $p^{(2)}(4)(G) = \{-2, -1, 0, 2, 3, 4\}$  keine Parkettierung des  $\mathbb{Z}^1$  erlaubt (siehe Abbildung 3.6).

Weiter ist der Nullpunkt  $0 \in \mathbb{Z}^{d-1}$  in den projizierten Bausteinen  $p^{(j)}(b_j)(G)$  ( $G \in \mathcal{G}_0$ ) im allgemeinen nicht an lexikographisch erster Stelle enthalten. Man beachte in diesem Zusammenhang Bemerkung 1.26 2. zu einer alternativen Definition des Begriffes Parkettsystem.

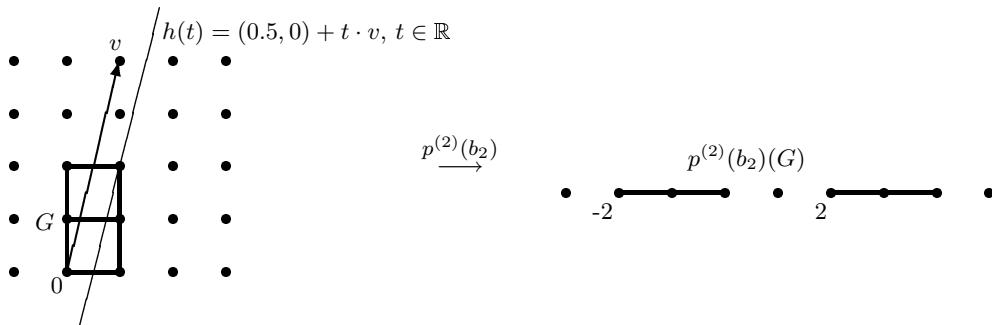


Abbildung 3.6: Die Wirkung der Projektion  $p^{(2)}(b_2) : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^{d-1}$  für  $b_2 = 4$  auf den Quaderbaustein  $G$ . Das projizierte Parkettsystem  $\tilde{\Omega}^* := (\mathbb{Z}^1, \{p^{(2)}(b_2)(G)\})$  ist leer.

**Beispiel 3.26** Wir betrachten ein zwei-dimensionales Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m)$ . Dann gilt für beliebige natürliche Zahlen  $b_k > \max(l_i(j) - 1 \mid i = 1, 2, j = 1, \dots, m)$  ( $k = 1, 2$ ) gerade

$$p^{(1)}(b_1)(G_j) = \bigcup_{k=0}^{l_2(j)-1} \{ kb_1 - l_1(j) + n \mid n = 1, \dots, l_1(j) \} \quad (3.15)$$

$$p^{(2)}(b_2)(G_j) = \bigcup_{k=0}^{l_1(j)-1} \{ kb_2 - l_2(j) + n \mid n = 1, \dots, l_2(j) \} \quad (3.16)$$

Das heißt, ein Quader der Ausdehnung  $\underline{l}(j) = (l_1(j), l_2(j))$  wird durch die Projektion  $p^{(1)}(b_1)$  abgebildet auf eine aus  $l_2(j)$  „Segmenten“ (das sind Intervalle in  $\mathbb{Z}^1$ ) der Länge  $l_1(j)$  bestehende Teilmenge von  $\mathbb{Z}^1$ , wobei zwei aufeinanderfolgende Intervalle durch eine „Lücke“ der Größe  $b_1 - l_1(j)$  voneinander getrennt sind. Analog besteht das Bild  $p^{(2)}(b_2)(G_j)$  aus  $l_1(j)$  Segmenten der Länge  $l_2(j)$ , die durch Lücken der Ausdehnung  $b_2 - l_2(j)$  getrennt sind. (Vgl. auch Abbildung 3.6.)

**Satz 3.27 ([52])** Für beliebige zwei  $\mathbb{Z}^d$ -Parkettsysteme  $\Omega_1^*$  und  $\Omega_2^*$  sind folgende Aussagen richtig

1.  $[\Omega_1^* \geq \Omega_2^*] \implies [p^{(j)}(b_j)(\Omega_1^*) \neq \emptyset \iff p^{(j)}(b_j)(\Omega_2^*) \neq \emptyset, \forall j]$
2.  $[p^{(j)}(b_j)(\Omega_i^*) \neq \emptyset, i = 1, 2] \implies [\Omega_1^* \geq \Omega_2^* \implies p^{(j)}(b_j)(\Omega_1^*) \geq p^{(j)}(b_j)(\Omega_2^*)]$ .

**Satz 3.28** Ist das zwei-dimensionale Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{\underline{l}\})$  nichttrivialer Faktor eines Quadersystems  $\Omega_1^* = (\mathbb{Z}^2, \{\underline{l}^{(1)}(j)\}_{j=1}^{m_1})$ , so sind folgende Bedingungen erfüllt:

- (1.) Für jeden Baustein  $G_j^{(1)} \in \mathcal{G}_0^{(1)}$  existiert eine Teilstückspackierung  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G_j^{(1)})$  in  $\Omega^*$  mit  $G_j^{(1)} = \bigcup_{H \in \mathcal{A}(G_j^{(1)})} H$ .
- (2.)  $d(\Omega^*) \geq 1$  und  $[d(\Omega^*) > 1 \implies m_1 > 1]$ .
- (3.) Existiert eine Koordinatenrichtung  $i \in \{1, \dots, d\} (= \{1, 2\})$  mit  $l_i = 1$ , so gibt es einen Baustein  $G_{j(i)}^{(1)} \in \mathcal{G}_0^{(1)}$ , dessen Ausdehnung  $\underline{l}_i^{(1)}(j(i))$  in die  $i$ -te Koordinatenrichtung ebenfalls gleich 1 ist. Im Fall  $m_1 = 1$  gilt außerdem  $\underline{l}^{(1)}(j(i)) \neq \underline{l}$ .

**Beweis:** Es sei  $\Omega^*$  ein nichttrivialer Faktor von  $\Omega_1^*$  vermöge der Faktorabbildung  $\varphi : \Omega_1^* \rightarrow \Omega^*$ . Die Nichttrivialität der Faktorbeziehung ist gleichbedeutend mit  $\Omega^* \neq \Omega_1^*$  und  $\Omega^* \neq \Omega_0^*$ , wobei  $\Omega_0^* = (\mathbb{Z}^d, \{\{0\}\})$  das triviale  $d$ -dimensionale Parkettssystem bezeichnet. Die letzte Bedingung ist äquivalent zur Forderung  $d(\Omega^*) \geq 1$ .

1. Aus der Shiftkommutativität von  $\varphi$  folgt für jedes  $j = 1, \dots, m_1$  die Existenz einer Parkettierung  $\mathcal{R}_j \in \Omega^*$  mit den beiden Perioden  $a^{(i)}(j) := \underline{l}_i^{(1)}(j)e_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Andererseits existiert nach Folgerung 2.30 genau dann eine Parkettierung  $\mathcal{R} \in \Omega^*$  mit den Perioden  $b^{(i)} = b_i e_i$  ( $b_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2$ ), wenn für jedes  $i \in \{1, 2\}$  die Zahl  $b_i$  ein Vielfaches der Ausdehnung  $l_i$  ist. Mithin existieren für jedes  $j = 1, \dots, m$  natürliche Zahlen  $\alpha_i(j)$ ,  $i = 1, 2$ , derart, daß  $\underline{l}_i^{(1)}(j) = \alpha_i(j)l_i$  ( $i = 1, 2$ ) gilt.

Die aus  $\alpha_1(j)\alpha_2(j)$  achsenparallel verschobenen Quadern der Ausdehnung  $\underline{l}$  gebildete Teilstückspackierung

$$\mathcal{A}(G_j^{(1)}) := \{\sigma^{(k_1 l_1, k_2 l_2)} G \mid k_i = 0, \dots, \alpha_i(j) - 1, i = 1, 2\}$$

erfüllt die Bedingung  $G_j^{(1)} = \bigcup_{H \in \mathcal{A}(G_j^{(1)})} H$ . (Vgl. auch untenstehende Abbildung 3.7.) Damit

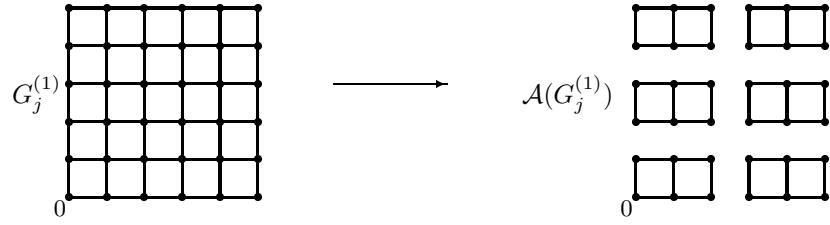


Abbildung 3.7: Zur Konstruktion der Teilparkettierung  $\mathcal{A}(G_j^{(1)})$  für  $\underline{l}^{(1)}(j) = (6, 6)$  und  $\underline{l} = (3, 2)$ .

ist die Gültigkeit von (1.) gezeigt.

2. Zum Beweis von Bedingung (2.) ist nur noch der Fall  $d(\Omega^*) = 2$  zu untersuchen.

Angenommen, es ist  $m_1 = 1$ . Nach Beweisteil 1. existieren natürliche Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2$  derart, daß  $\underline{l}^{(1)}(1) = (\alpha_1 l_1, \alpha_2 l_2)$  gilt. Wegen  $\Omega_1^* \neq \Omega^*$  ist dabei  $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (1, 1)$ .

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte  $\alpha_2 l_2 = \max(\alpha_1 l_1, \alpha_2 l_2)$ . Wir betrachten mit  $b_2 = \alpha_2 l_2 + l_2$  die Projektionen  $p^{(2)}(b_2)(\Omega_1^*)$  und  $p^{(2)}(b_2)(\Omega^*)$  der Quadersysteme  $\Omega_1^*$  und  $\Omega^*$  auf das Gitter  $\mathbb{Z}^1$ .

Gemäß Beispiel 3.26 setzt sich der Baustein  $p^{(2)}(b_2)(G)$  aus  $l_1$  Segmenten der Länge  $l_2$  zusammen, die jeweils durch Lücken der Größe  $b_2 - l_2 = \alpha_2 l_2 > 0$  voneinander getrennt sind. Mithin bilden  $\alpha_2 + 1$  hintereinander angeordnete Bausteine vom Typ  $p^{(2)}(b_2)(G)$  eine zusammenhängende Bausteinanordnung  $\mathcal{A}$  der Länge  $(\alpha_2 + 1)l_2 l_1 = b_2 l_1$ . (Vgl. auch Abbildung 3.8.) Offenbar bildet  $\mathcal{P} := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \sigma^{k \cdot b_2 l_1} \mathcal{A}$  eine Parkettierung des  $\mathbb{Z}^1$ , d. h., es gilt  $p^{(2)}(b_2)(\Omega^*) \neq \emptyset$ . Der Baustein  $p^{(2)}(b_2)(G_1^{(1)})$  besteht dagegen aus  $\alpha_1 l_1 > 1$  Segmenten der Länge  $\alpha_2 l_2$ , die

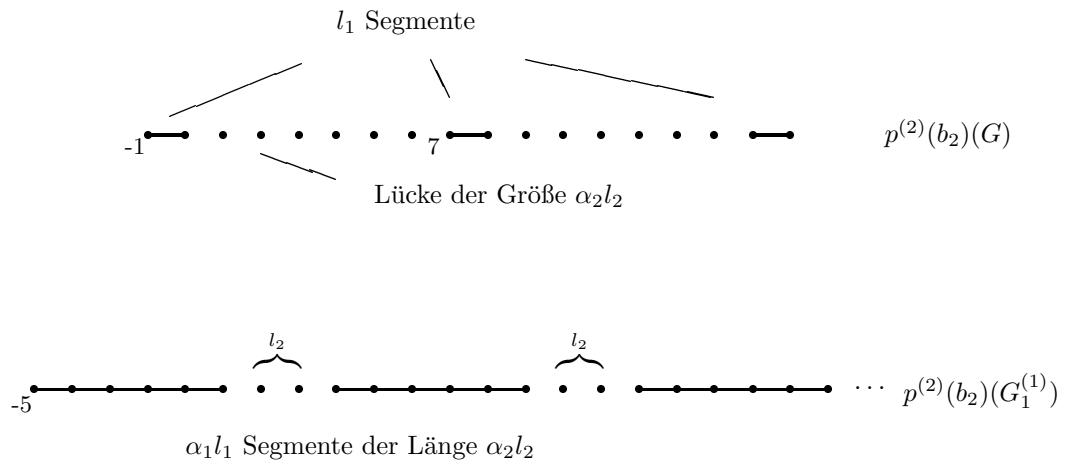


Abbildung 3.8: Die Bilder  $p^{(2)}(b_2)(G)$  und  $p^{(2)}(b_2)(G_1^{(1)})$  für  $\underline{l} = (3, 2)$ ,  $\underline{l}^{(1)}(1) = (6, 6)$  und  $b_2 = \alpha_2 l_2 + l_2 = 8$ .

jeweils durch Lücken der Größe  $b_2 - \alpha_2 l_2 = l_2 > 0$  voneinander getrennt sind. Damit ist

$p^{(2)}(b_2)(\Omega_1^*)$  genau dann nichtleer, wenn die Lücken zwischen aufeinanderfolgenden Segmenten durch endlich viele Segmente auffüllbar sind. Dies ist genau dann möglich, wenn die Lückengröße  $l_2$  durch die Segmentlänge  $\alpha_2 l_2$  teilbar ist. Mithin gilt  $p^{(2)}(b_2)(\Omega_1^*) \neq \emptyset$  genau dann, wenn  $\alpha_2 = 1$  ist.

Wegen  $p^{(2)}(b_2)(\Omega^*) \neq \emptyset$  folgt gemäß Satz 3.27 aus dem Bestehen einer Faktorbeziehung  $\Omega_1^* \geq \Omega^*$ , daß  $\alpha_2 = 1$  gelten muß.

Wir betrachten im folgenden die Projektion  $p^{(1)}(b_1)$  für geeignetes  $b_1 \in \mathbb{N}$  und zeigen  $\alpha_1 = 1$  im Widerspruch zur Voraussetzung  $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (1, 1)$ .

Sei  $b_1 := C \cdot \alpha_1 l_1 + l_1$ , wobei die Konstante  $C \in \mathbb{N}$  so gewählt wird, daß  $C \cdot \alpha_1 l_1 > l_2 - 1$  gilt.

Man überprüft analog zur Projektion  $p^{(2)}(b_2)$  die Existenz einer Parkettierung in  $p^{(1)}(b_1)(\Omega^*)$ .

Weiter ist  $p^{(1)}(b_1)(\Omega_1^*)$  genau dann nichtleer, wenn die Länge  $\alpha_1 l_1$  der Segmente des Bildbausteines  $p^{(1)}(b_1)(G_1^{(1)})$  ein Teiler der Größe  $((C - 1)\alpha_1 + 1)l_1$  der Lücke zwischen aufeinanderfolgenden Segmenten ist, d. h., wenn  $\alpha_1 = 1$  gilt.

Nach Satz 3.27 folgt aus  $\Omega_1^* \geq \Omega^*$  auch  $\alpha_1 = 1$  im Widerspruch zur Voraussetzung  $\Omega_1^* \neq \Omega^*$ .

Mithin ist die Annahme  $m_1 = 1$  falsch, womit die Gültigkeit von  $[d(\Omega^*) > 1 \implies m_1 > 1]$  gezeigt ist.

3. Es gelte  $d(\Omega^*) = 1$ . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird  $l_1 = 1$  angenommen.

Dann liefert gemäß Beispiel 3.26 die Projektion  $p^{(2)}(b_2)$  für jedes hinreichend große  $b_2 \in \mathbb{N}$  das Bild

$$p^{(2)}(b_2)(G) = \{ -l_2 + 1, -l_2 + 2, \dots, 0 \},$$

das heißt, einen zusammenhängenden Baustein der Länge  $l_2$ . Mithin gilt  $p^{(2)}(b_2)(\Omega^*) \neq \emptyset$  unabhängig von der speziellen Wahl von  $b_2$ .

Sei nun speziell

$$b_2 = 1 + C \cdot \max_{k=1, \dots, m_1} l_2^{(1)}(k)$$

wobei  $C \in \mathbb{N}$  so gewählt wird, daß  $b_2 > \max(l_i^{(1)}(j) \mid j = 1, \dots, m_1, i = 1, 2)$  gilt. Nach Teil 1. des Beweises existieren für jedes  $j = 1, \dots, m_1$  natürliche Zahlen  $\alpha_1(j), \alpha_2(j)$  derart, daß  $\underline{l}^{(1)}(j) = (\alpha_1(j)l_1, \alpha_2(j)l_2)$  ist.

Gemäß Beispiel 3.26 besteht dann das Bild  $p^{(2)}(b_2)(G_j^{(1)})$  des Proto-Bausteines mit der Ausdehnung  $\underline{l}^{(1)}(j)$  aus  $\alpha_1(j)l_1 = \alpha_1(j)$  Segmenten der Länge  $\alpha_2(j)l_2$ , die jeweils durch Lücken der Größe

$$b_2 - \alpha_2 l_2 = l_2 \cdot (C \cdot \max_{k=1, \dots, m_1} \alpha_2(k) - \alpha_2(j)) + 1$$

voneinander getrennt sind.

Da jede Segmentlänge  $\underline{l}_2^{(1)}(j)$  ein Vielfaches der Zahl  $l_2 > 1$  ist, kann keine dieser Lücken durch Kombination von Segmenten der Längen  $\alpha_2(k)l_2$ ,  $k = 1, \dots, m_1$ , ausgefüllt werden. Mithin ist die Projektion  $p^{(2)}(b_2)(\Omega_1^*)$  genau dann nichtleer, wenn ein  $j(1) \in \{1, \dots, m_1\}$  derart existiert, daß der Bildbaustein  $p^{(2)}(b_2)(G_{j(1)}^{(1)})$  zusammenhängend ist. Das ist gleichbedeutend damit, daß die Zahl  $\alpha_1(j(1))$  der Segmente von  $p^{(2)}(b_2)(G_{j(1)}^{(1)})$  gleich 1 ist.

Somit folgt gemäß Satz 3.27 aus  $\Omega_1^* \geq \Omega^*$  und  $l_1 = 1$  die Existenz eines Bausteines  $G_{j(1)}^{(1)}$  in  $\mathcal{G}_0^{(1)}$  mit  $l_1^{(1)}(j(1)) = 1$ . Ist  $m_1 = 1$ , so muß wegen der vorausgesetzten Nichttrivialität der Faktorbeziehung  $\underline{l}^{(1)}(j(1)) \neq l$  gelten. ■

**Bemerkung 3.29** 1. Für dreidimensionale Quadersysteme  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^3, \{\underline{l}\})$  mit  $d(\Omega^*) > 1$  sind die Bedingungen (1.) – (3.) in Satz 3.28 für das Bestehen einer nichttrivialen Faktorbeziehung  $\Omega_1^* \geq \Omega^*$  mit  $\Omega_1^* = (\mathbb{Z}^3, \{\underline{l}^{(1)}(j)\}_{j=1}^{m_1})$  ebenfalls notwendig.

Der Beweis der Notwendigkeit der drei Bedingungen wird analog zum Fall der Dimension  $d = 2$  geführt, für Bedingung (2.) ist jedoch die zweimalige Anwendung einer geeigneten Projektionsabbildung zu betrachten:

Der Beweis von (2.) erfolgt indirekt. Angenommen, es ist  $m_1 = 1$  richtig. Gemäß (1.) existieren natürliche Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  mit  $\underline{l}^{(1)}(1) = (\alpha_1 l_1, \alpha_2 l_2, \alpha_3 l_3)$ , wobei wegen der Nichttrivialität der Faktorbeziehung  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (1, 1, 1)$  gelten muß.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $\alpha_1 l_1 = \max(\alpha_i l_i \mid i = 1, 2, 3)$ .

Setzt man  $b_1 := \alpha_1 l_1 + l_1$ , so liefert die Projektion  $p^{(1)}(b_1)$  die Bildbausteine:

$$p^{(1)}(b_1)(G_1^{(1)}) = \bigcup_{k_2=0}^{\alpha_2 l_2 - 1} \bigcup_{k_3=0}^{\alpha_3 l_3 - 1} \{(b_1 k_2 - \alpha_1 l_1 + 1, b_1 k_3 - \alpha_1 l_1 + 1), \dots, (b_1 k_2, b_1 k_3)\}$$

$$p^{(1)}(b_1)(G) = \bigcup_{k_2=0}^{l_2 - 1} \bigcup_{k_3=0}^{l_3 - 1} \{(b_1 k_2 - l_1 + 1, b_1 k_3 - l_1 + 1), \dots, (b_1 k_2, b_1 k_3)\}.$$

Das heißt,  $p^{(1)}(b_1)(G_1^{(1)})$  besteht aus  $\alpha_3 l_3$  „Zeilen“ von je  $\alpha_2 l_2$  diagonalen Segmenten

$$\{(-\alpha_1 l_1 + 1, -\alpha_1 l_1 + 1), (-\alpha_1 l_1 + 2, -\alpha_1 l_1 + 2), \dots, (0, 0)\},$$

die jeweils um  $(b_1, 0) = (\alpha_1 l_1 + l_1, 0)$  gegeneinander verschoben sind. Analog setzt sich  $p^{(1)}(b_1)(G)$  aus  $l_3$  „Zeilen“ von je  $l_2$  diagonalen Segmenten  $\{(-l_1 + 1, -l_1 + 1), \dots, (0, 0)\}$  zusammen, die um  $(b_1, 0) = (\alpha_1 l_1 + l_1, 0)$  verschoben sind. (Vgl. auch Abbildung 3.9.)

Offenbar bildet

$$\bigcup_{n_2=0}^{\alpha_1 - 1} \sigma^{(0, n_2 l_1)} \bigcup_{n_1=0}^{b_1 - 1} \sigma^{(n_1, 0)} \{p^{(1)}(b_1)(G)\}$$

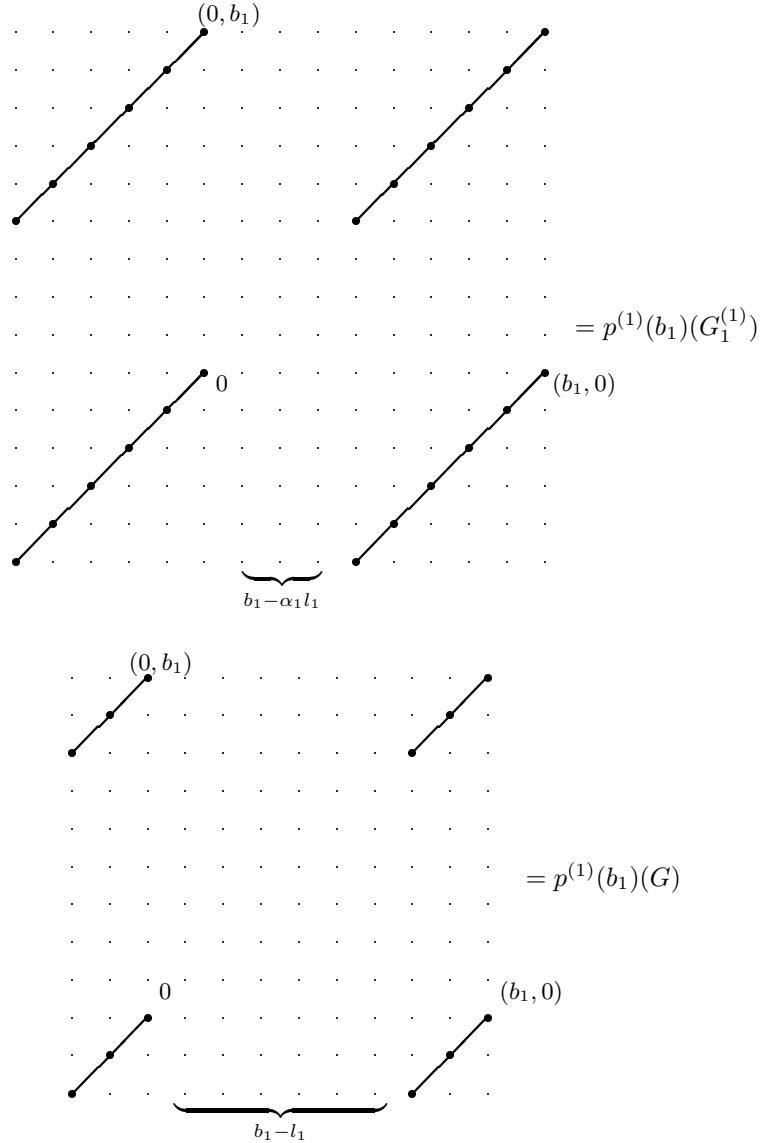
eine zusammenhängende Bausteinanordnung, die durch achsenparallele Verschiebung eine Parkettierung des  $\mathbb{Z}^2$  erzeugt.

Dagegen erlaubt  $p^{(1)}(b_1)(G_1^{(1)})$  nur dann eine Parkettierung, wenn entweder die Zahl  $\alpha_2 l_2$  der „Spalten“ bzw. die Zahl  $\alpha_3 l_3$  der „Zeilen“ gleich 1 ist oder der Abstand  $b_1$  zwischen aufeinanderfolgenden Segmenten der gleichen Zeile oder Spalte durch deren koordinatenweise Ausdehnung  $\alpha_1 l_1$  teilbar ist. (Siehe Abbildung 3.9.) Wegen  $b_1 = \alpha_1 l_1 + l_1$  ist letzteres nur für  $\alpha_1 = 1$  richtig.

Ist folglich die eigentliche Dimension  $d(\Omega^*) = 3$ , so zieht  $\Omega_1^* \geq \Omega^*$  gemäß Satz 3.27 die Gleichheit  $l_1^{(1)}(1) \equiv \alpha_1 l_1 = l_1$  nach sich.

Analog zeigt man durch Betrachtung der Projektionen  $p^{(2)}(b_2)$  und  $p^{(3)}(b_3)$  für Parameter

Abbildung 3.9: Die Bilder  $p^{(1)}(b_1)(G_1^{(1)})$  und  $p^{(1)}(b_1)(G)$  der Quader  $G_1^{(1)}$  und  $G$  mit den Ausdehnungen  $\underline{l}^{(1)}(1) = (6, 2, 2)$  und  $\underline{l} = (3, 2, 2)$  für  $b_1 = 9$ .



$b_i = C_i \alpha_i l_i + l_i$  ( $i = 2, 3$ ) (mit hinreichend großen  $C_2, C_3 \in \mathbb{N}$ ) die Notwendigkeit von  $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$  für  $\Omega_1^* \geq \Omega^*$ . Da  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 1, 1)$  der Voraussetzung  $\Omega_1^* \neq \Omega^*$  widerspricht, ist die Annahme  $m_1 = 1$  falsch.

Zu betrachten bleibt noch der Fall  $d(\Omega^*) = 2$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $l_3 = 1$ . Die Untersuchung der Projektion  $p^{(1)}(b_1)$  für  $b_1 = \alpha_1 l_1 + 1$  zeigt die Notwendigkeit von  $\alpha_3 = 1$  für  $\Omega_1^* \geq \Omega^*$ . Für die nichtleeren Parkettsysteme  $p^{(1)}(b_1)(\Omega_1^*)$  und  $p^{(1)}(b_1)(\Omega^*)$  folgt gemäß Satz 3.27 aus  $\Omega_1^* \geq \Omega^*$  auch das Bestehen einer Faktorbeziehung  $p^{(1)}(b_1)(\Omega_1^*) \geq p^{(1)}(b_1)(\Omega^*)$ . Wir wenden nun die Projektion  $p^{(1)}(\tilde{b}_1)$  mit  $\tilde{b}_1 = C b_1 + 1$  auf diese Bild-Parkettsysteme an, wobei  $C \in \mathbb{N}$  hinreichend groß zu wählen ist (z. B.  $C \geq \alpha_2 l_2$ ).

Man erhält

$$p^{(1)}(\tilde{b}_1)(p^{(1)}(b_1)(G_1^{(1)})) = \bigcup_{k_2=0}^{\alpha_2 l_2 - 1} \bigcup_{k_1=0}^{\alpha_1 l_1 - 1} \{-b_1 k_2 - C b_1 k_1\}$$

$$p^{(1)}(\tilde{b}_1)(p^{(1)}(b_1)(G)) = \bigcup_{k_2=0}^{l_2 - 1} \bigcup_{k_1=0}^{l_1 - 1} \{-b_1 k_2 - C b_1 k_1\}.$$

Das Bild  $p^{(1)}(\tilde{b}_1)(p^{(1)}(b_1)(G))$  besteht also aus  $l_1$  Teilen der Form

$$\{-C b_1 k_1 - b_1(l_2 - 1), -C b_1 k_1 - b_1(l_2 - 2), \dots, -C b_1 k_1\} \quad (k_1 \in \{0, \dots, l_1 - 1\}).$$

Jeder Teilabschnitt setzt sich aus  $l_2$  Punkten, die durch Lücken der Größe  $b_1 - 1$  getrennt sind, zusammen. Somit füllt die Bausteinanordnung

$$\mathcal{A} := \bigcup_{n=0}^{b_1 - 1} \sigma^{(n,0)} \{p^{(1)}(\tilde{b}_1)(p^{(1)}(b_1)(G))\}$$

die Teilmenge  $I := \bigcup_{k_1=0}^{l_1 - 1} \{-C b_1 k_1 - b_1(l_2 - 1), -C b_1 k_1 - b_1(l_2 - 1) + 1, \dots, -C b_1 k_1 + b_1 - 1\}$  von  $\mathbb{Z}$  aus. Dabei besteht  $I$  aus  $l_1$  Teilintervallen der Länge  $b_1 l_2$ , die durch Lücken der Größe  $b_1(C - l_2)$  voneinander getrennt sind. Folglich erzeugt  $\mathcal{A}$  genau dann eine Parkettierung des  $\mathbb{Z}^1$ , wenn die Segmentlänge  $b_1 l_2$  die Lückengröße  $(C - l_2) b_1$  teilt, das heißt, wenn  $C$  ein Vielfaches von  $l_2$  ist.

Analog überlegt man sich, daß  $p^{(1)}(\tilde{b}_1)(p^{(1)}(b_1)(G_1^{(1)}))$  genau dann eine Parkettierung von  $\mathbb{Z}^1$  erlaubt, wenn  $C$  ein Vielfaches von  $\alpha_2 l_2$  ist. Wählt man  $C = \alpha_2 l_2 + l_2$ , so folgt aus  $p^{(1)}(b_1)(\Omega_1^*) \geq p^{(1)}(b_1)(\Omega^*)$  gemäß Satz 3.27, daß  $\alpha_2 = 1$  gilt.

Entsprechend zeigt man durch Betrachtung der Projektionen  $p^{(2)}(b_2)$  und  $p^{(2)}(\tilde{b}_2)(p^{(2)}(b_2))$  für geeignete Parameter  $b_2, \tilde{b}_2 \in \mathbb{N}$  die Notwendigkeit von  $\alpha_1 = 1$  für  $\Omega_1^* \geq \Omega^*$  mit  $m_1 = 1$ . Das steht im Widerspruch zur Nichttrivialität der Faktorbeziehung. Folglich ist die Annahme  $m_1 = 1$  falsch.

Damit ist Bedingung (2.) für alle Quadersysteme  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^3, \{\underline{l}\})$  mit  $d(\Omega^*) > 1$  bewiesen.

2. Allgemein zeigt man für  $d$ -dimensionale Quadersysteme  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}\})$  mit  $d(\Omega^*) = d$ , daß aus dem Bestehen einer nichttrivialen Faktorbeziehung  $\Omega_1^* \geq \Omega^*$  für  $\Omega_1^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}^{(1)}(j)\}_{j=1}^{m_1})$  die Gültigkeit der Bedingungen (1.) – (3.) in Satz 3.28 folgt. (Dazu reicht es aus, die Wirkung aller Projektionen  $p^{(j)}(b_j)$  ( $j = 1, \dots, d$ ) auf  $\Omega_1^*$  und  $\Omega^*$  für geeignete Parameter  $b_j \in \mathbb{N}$  ( $j = 1, \dots, d$ ) zu untersuchen.)

Im Fall  $d(\Omega^*) < d$  sind zum Beweis der Notwendigkeit von (2.) mehrmalige Anwendungen von Projektionen  $p^{(j)}(b_j)$  auf  $\Omega_1^*$  und  $\Omega^*$  heranzuziehen. Die bei jeder weiteren Projektion entstehenden zusätzlichen „Lücken“ in den Bildbausteinen erhöhen die Schwierigkeit eines allgemeinen Beweises der Gültigkeit von (2.). Prinzipiell kann aber mit Hilfe des Projektionsverfahrens für zwei gegebene Quadersysteme  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}\})$  und  $\Omega_1^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}^{(1)}(j)\}_{j=1}^{m_1})$  die Notwendigkeit von Bedingung (2.) für das Bestehen einer nichttrivialen Faktorbeziehung nachgewiesen werden.

**Folgerung 3.30** *Besitzt ein  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersystem  $\Omega_1^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}^{(1)}(j)\}_{j=1}^{m_1})$  mit  $d(\Omega_1^*) \geq 1$  ein nichttriviales Faktorquadersystem  $\Omega^*$  der Entropie Null, so ist die Shiftwirkung  $\sigma^{\mathbb{Z}^d}$  auf  $\Omega_1^*$  nicht topologische mischend.*

**Beweis:** Aus dem Verschwinden der Entropie des Faktors  $\Omega^*$  und dessen Nichttrivialität folgt  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}\})$  mit  $l_i > 1$  für wenigstens ein  $i \in \{1, \dots, d\}$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte  $l_1 > 1$ .

Nach Bedingung (1.) in Satz 3.28 sind alle Ausdehnungen  $l_1^{(1)}(j)$  der Bausteine von  $\Omega_1^*$  in Richtung  $e_1$  Vielfache von  $l_1$ , d. h. es gilt  $l_1^{(1)}(j) = \alpha_1(j)l_1$  mit  $\alpha_1(j) \in \mathbb{N}$  ( $j = 1, \dots, m_1$ ).

Wir betrachten nun die nichtleere offene Menge  $C(\{G_1^{(1)}\}) := \{\mathcal{P} \in \Omega_1^* \mid G_1^{(1)} \in \mathcal{P}\}$  in  $\Omega_1^*$ . Offenbar gilt für alle Vektoren  $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$  mit  $a_1 \in \alpha_1(1)l_1\mathbb{N} + 1$  und  $a_k = 0$  ( $k \in \{2, \dots, d\}$ ) aber

$$C(\{G_1^{(1)}\}) \cap \sigma^a C(\{G_1^{(1)}\}) = \emptyset,$$

da die „Lücke“ zwischen den Bausteinen  $G_1^{(1)}$  und  $\sigma^a G_1^{(1)}$  die Breite  $n\alpha_1(1)l_1 + 1$  mit  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  besitzt und folglich nicht durch Bausteine, deren Ausdehnungen in Richtung  $e_1$  sämtlich Vielfache von  $l_1$  sind, aufgefüllt werden kann.

Gemäß Definition 1.12 ist die Wirkung des Shifts  $\sigma^{\mathbb{Z}^d}$  auf  $\Omega_1^*$  nicht topologisch mischend. ■

**Bemerkung 3.31** *Besitzt das Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}\})$  die eigentliche Dimension  $d(\Omega^*) = 1$ , so sind die in Satz 3.28 angegebenen notwendigen Bedingungen auch hinreichend für das Bestehen einer nichttrivialen Faktorbeziehung  $\Omega_1^* \geq \Omega^*$ .*

Der folgende Satz gibt eine Antwort auf die Frage, welche zusätzlichen Bedingungen an  $\Omega_1^*$  das Bestehen einer nichttrivialen Faktorbeziehung  $\Omega_1^* \geq \Omega^*$  absichern.

**Satz 3.32** *Es sei  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{\underline{l}\})$  ein Quadersystem mit  $d(\Omega^*) \geq 1$ . Erfüllt das Quadersystem  $\Omega_1^* = (\mathbb{Z}^2, \{\underline{l}^{(1)}(j)\}_{j=1}^{m_1})$  neben den Bedingungen (1.) – (3.) aus Satz 3.28 eine der folgenden Bedingungen*

$$(4a) \quad \underline{l} \in \{\underline{l}^{(1)}(j)\}_{j=1}^{m_1},$$

*(4b) für jede Koordinatenrichtung  $i \in \{1, 2\}$  mit  $l_i > 1$  existiert ein Baustein der Ausdehnung  $\underline{l}^{(1)}(n(i))$  ( $n(i) \in \{1, \dots, m_1\}$ ) mit*

$$l_i^{(1)}(n(i)) > l_i \quad \text{und} \quad l_k^{(1)}(n_i) = l_k \quad (k \in \{1, 2\} \setminus \{i\}),$$

*so ist  $\Omega^*$  nichttrivialer Faktor von  $\Omega_1^*$ .*

**Beweis:** Wir definieren eine Abbildung  $\varphi : \Omega_1^* \rightarrow \Omega^*$  als Zerlegung jedes Bausteines  $H$  in einer Parkettierung  $\mathcal{P}^{(1)} \in \Omega_1^*$  in die gemäß Bedingung (1.) existierenden Teilparkettierung  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}(H)$ : für jedes  $\mathcal{P}^{(1)} \in \Omega_1^*$  ist dann  $\varphi(\mathcal{P}^{(1)}) := \bigcup_{H \in \mathcal{P}^{(1)}} \varphi(H)$  mit

$$\varphi(H) := \sigma^z \mathcal{A}(G_j^{(1)}) \iff H = \sigma^z G_j^{(1)} \quad (z \in \mathbb{Z}^2, G_j^{(1)} \in \mathcal{G}_0^{(1)}).$$

Dann kommutiert  $\varphi$  mit dem Shift  $\sigma^a$  für alle  $a \in \mathbb{Z}^2$ . Falls  $\Omega_1^*$  die Bedingung (4a) erfüllt, so ist  $\varphi$  wegen  $\mathcal{A}(G) = \{G\}$  offenbar surjektiv.

Ist andererseits für  $d(\Omega^*) = 2$  die Bedingung (4b) erfüllt, so existieren zwei Bausteine  $G_{j_1}^{(1)} \neq G_{j_2}^{(1)}$  in  $\mathcal{G}_0^{(1)}$  mit den Ausdehnungen

$$\underline{l}^{(1)}(j_1) = (\alpha_1(j_1)l_1, l_2), \quad \underline{l}^{(1)}(j_2) = (l_1, \alpha_2(j_2)l_2)$$

mit natürlichen Zahlen  $\alpha_i(j_i) > 1$  ( $i = 1, 2$ ).

Gemäß Definition von  $\varphi$  ist der Anteil  $\Omega_{(1)}^* \subset \Omega^*$  aller Parkettierungen von  $\Omega^*$  mit der Periode  $l_1 e_1$  das Bild der Menge aller Parkettierungen  $\mathcal{P}^{(1)} \in \Omega_1^*$ , die aus horizontalen Streifen

$$S_1^{(1)} := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \sigma^{n(\alpha_1(j_1)l_1, 0)} G_{j_1}^{(1)}$$

bestehen. Analog ist  $\Omega_{(2)}^* \subset \Omega^*$  das Bild der Menge aller Parkettierungen  $\mathcal{P}^{(1)} \in \Omega_1^*$ , die aus vertikalen Streifen

$$S_2^{(1)} := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \sigma^{n(0, \alpha_2(j_2)l_2)} G_{j_2}^{(1)}$$

zusammengesetzt sind. (Vgl. auch Abbildung 3.10.)

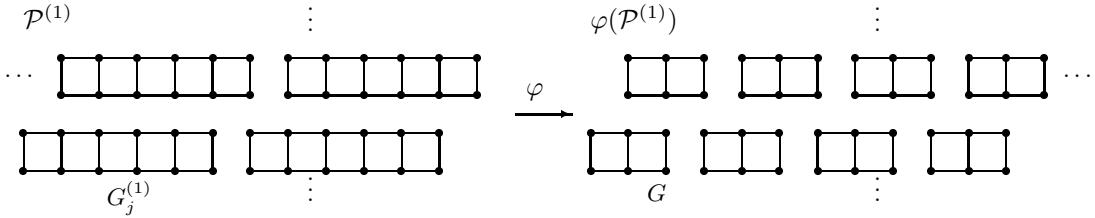


Abbildung 3.10: Die Abbildung  $\varphi$  als Zerlegung waagerechter Baustein-Streifen  $S_1^{(1)}$  in  $\Omega_1^*$  für  $\underline{l} = (3, 2)$  und  $\underline{l}^{(1)}(j_1) = (6, 2)$ .

Mithin ist  $\varphi$  wegen  $\Omega^* = \Omega_{(1)}^* \cup \Omega_{(2)}^*$  eine surjektive Abbildung. Für  $d(\Omega^*) = 1$  gilt  $\Omega^* = \Omega_{(1)}^*$  oder  $\Omega^* = \Omega_{(2)}^*$ , und auf analoge Weise wie für  $d(\Omega^*) = 2$  folgt aus (4b) die Surjektivität von  $\varphi$ .

Die Betrachtung der Urbilder von Subbasismengen in  $\Omega^*$  unter  $\varphi$  liefert die Stetigkeit der Abbildung  $\varphi$ . Somit definiert  $\varphi$  tatsächlich eine Faktorbeziehung  $\Omega_1^* \geq \Omega^*$ , die wegen der Voraussetzungen (2.) und (3.) nichttrivial ist. ■

**Bemerkung 3.33** Ist  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \{l\})$  ein Quadersystem mit  $d \geq d(\Omega^*) > 2$ , so kann für ein Quadersystem  $\Omega_1^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}^{(1)}(j)\}_{j=1}^{m_1})$ , das die Bedingungen (1.) – (3.) und eine der Bedingungen (4a), (4b) erfüllt, analog zum Beweis von Satz 3.32 eine stetige und shiftkommunizierende Abbildung  $\varphi : \Omega_1^* \rightarrow \Omega^*$  definiert werden.

Für den Nachweis der Surjektivität dieser Abbildung ist zu beachten, daß die Parkettierungen von  $\Omega^*$  im Fall  $d(\Omega^*) > 2$  nicht ebenso einfach strukturiert sind wie für die  $d(\Omega^*) = 2$ . (Insbesondere ist nicht jedes Element von  $\Omega^*$  periodisch, vgl. auch Bemerkung 2.31.) Für die Surjektivität von  $\varphi$  ist es jedoch ausreichend, wenn jeder Baustein  $H$  einer beliebigen Parkettierung  $\mathcal{P} \in \Omega^*$  Element eines „Halbstreifens“  $\sigma^z S_{i,+}$  oder  $\sigma^z S_{i,-}$  ( $i \in \{1, \dots, d\}$ ,  $z \in \mathbb{Z}^d$ ) ist, wobei

$$S_{i,+} := \bigcup_{n_i \in \mathbb{N}} \{\sigma^{n_i l_i e_i} G\}, \quad S_{i,-} := \bigcup_{\substack{n_i \in \mathbb{Z} \\ n_i \leq 0}} \{\sigma^{n_i l_i e_i} G\} \quad (i = 1, \dots, d)$$

gilt. Der Nachweis der Gültigkeit dieser Eigenschaft für beliebige Dimension  $d > 2$  ist ein offenes Problem. Die Betrachtung drei-dimensionaler Beispielsysteme weist auf die Richtigkeit der „Streifeneigenschaft“ wenigstens für diese Gitterdimension hin.

**Bemerkung 3.34** Für ein Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \{l\})$  mit  $d(\Omega^*) = 1$  sind die Bedingungen (4a), (4b) äquivalent zur Bedingung (3.). (Vergleiche auch Bemerkung 3.31.)

**Folgerung 3.35** Ein  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersystem  $\Omega^*$  der Entropie  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^d}|_{\Omega^*}) = 0$  mit  $d(\Omega^*) = d > 1$  besitzt kein nichttriviales Faktor-Quadersystem.

Das bedeutet insbesondere auch, daß zwei  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersysteme  $\Omega_i^*$  ( $i = 1, 2$ ) mit  $d(\Omega_i^*) = d > 1$  ( $i = 1, 2$ ), deren topologische Entropie verschwindet, teilerfremd sind, d. h., keine gemeinsamen nichttrivialen Faktor-Quadersysteme besitzen.

**Bemerkung 3.36** Für Gitterdimensionen  $d > 1$  existieren im Unterschied zu  $d = 1$  Quadersysteme, die keine nichttrivialen Faktoren von Quadersystemen der gleichen Entropie sind (vgl. Folgerung 3.16).

### 3.4 Faktoruntersuchungen für mehrdimensionale Quadersysteme – hinreichende Bedingungen

Nach der Erarbeitung notwendiger und hinreichender Bedingungen für das Vorhandensein nichttrivialer Faktor-Quadersysteme der topologischen Entropie Null im vorangegangenen Abschnitt steht nun die Suche nach *hinreichenden* Bedingungen für Faktorbeziehungen zwischen Quadersystemen beliebiger Entropie im Mittelpunkt unserer Überlegungen. Die wesentliche Bedeutung dieser hinreichenden Bedingungen liegt in der Möglichkeit der expliziten Konstruktion der zugehörigen Faktorabbildung.

**Beispiel 3.37** Wir betrachten zwei ein-dimensionale Quadersysteme  $\Omega_i^* = (\mathbb{Z}^1, \{l^{(i)}(j)\}_{j=1}^{m_i})$  ( $i = 1, 2$ ) gleicher topologischer Entropie derart, daß  $\Delta_0(\Omega_1^*)$  das Polynom  $\Delta_0(\Omega_2^*)$  teilt. Gemäß Satz 3.14 gilt also  $\Omega_2^* \geq \Omega_1^*$ .

Entfernt man einen oder mehrere Proto-Bausteine aus  $\Omega_2^*$  so, daß jede Periode einer Parkettierung in  $\Omega_1^*$  auch Periode einer Parkettierung im entstehenden Quadersystem  $\tilde{\Omega}_2^*$  ist, so ist  $\tilde{\Omega}_2^*$  nach Folgerung 3.9 ein Faktor von  $\Omega_1^*$ .

Aus der Eigenschaft der Teilbarkeit von  $\Delta_0(\Omega_2^*)$  durch das Polynom  $\Delta_0(\Omega_1^*)$  können jedoch Aussagen über die Struktur der Bausteinlängen  $\{l^{(2)}(j)\}_{j=1}^{m_2}$  gewonnen werden (vgl. beispielsweise Satz 2.23), die die Konstruktion der Faktorabbildung  $\varphi : \Omega_1^* \rightarrow \tilde{\Omega}_2^*$  ermöglichen.

Sind zum Beispiel die  $\mathbb{Z}^1$ -Quadersysteme  $\Omega_1^* = (\mathbb{Z}^1, \{3, 5, 8, 10\})$  und  $\Omega_2^* = (\mathbb{Z}^1, \{3, 5, 10, 11, 13, 16, 18\})$  gegeben, so gilt

$$p(x) := \frac{\Delta_0(\Omega_2^*)(x)}{\Delta_0(\Omega_1^*)(x)} = x^8 + 1,$$

das heißt die topologische Entropie der beiden Systeme ist identisch und  $\Omega_1^*$  ist topologischer Faktor von  $\Omega_2^*$ . Das durch Entfernen der Bausteinlänge  $l^{(2)}(3) = 10$  aus  $\Omega_2^*$  gebildete Quadersystem

$\tilde{\Omega}_2^* := (\mathbb{Z}^1, \{3, 5, 11, 13, 16, 18\})$  hat echt kleinere topologische Entropie als  $\Omega_1^*$  und erfüllt offenbar die Bedingung, daß jede Periode einer Parkettierung in  $\Omega_1^*$  auch Periode einer Parkettierung in  $\tilde{\Omega}_2^*$  ist.

Zur Definition der Faktorabbildung  $\varphi : \Omega_1^* \rightarrow \tilde{\Omega}_2^*$  benutzen wir die Zerlegung der Bausteine der Längen  $l^{(1)}(3) = 8$  und  $l^{(1)}(4) = 10$  in aufeinanderfolgende Bausteine der Längen  $\tilde{l}^{(2)}(2) = 5$  und  $\tilde{l}^{(2)}(1) = 3$  bzw.  $\tilde{l}^{(2)}(2)$  und  $\tilde{l}^{(2)}(2)$  in  $\tilde{\Omega}_2^*$ . Weiter werden die Bausteine der Längen  $\tilde{l}^{(2)}(j)$ ,  $j = 3, \dots, 6$ , als Vereinigung aufeinanderfolgender Bausteine in  $\Omega_1^*$  gemäß der Summen

$$11 = 8 + 3, \quad 13 = 10 + 3, \quad 16 = 8 + 5 + 3, \quad 18 = 10 + 5 + 3 \quad (3.17)$$

dargestellt. Damit läßt sich eine Blockabbildung  $F : \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, k) \rightarrow \mathcal{G}_0^{(2)-}$  für  $k = \tilde{l}^{(2)}(6) = 18$  definieren, die die Bedingungen (i) und (ii) des Satzes 3.2 für alle  $t \in \mathbb{N}$  erfüllt. Dafür ist insbesondere die „Präfixfreiheit“ der durch 3.17 definierten „Codierung“ der Bausteinlängen  $\tilde{l}^{(2)}(j)$  ( $j = 3, \dots, 6$ ) wichtig. („Präfixfreiheit“ bedeutet hier, daß keine „codierende“ Teilparkettierung eines Bausteines in  $\tilde{\Omega}_2^*$  die entsprechende Teilparkettierung eines anderen Bausteines in  $\tilde{\Omega}_2^*$  fortsetzt.)

Das Ziel der folgenden Überlegungen ist die Anwendung des in Beispiel 3.37 vorgestellten Codierungsgedankens auf beliebige Gitterdimensionen  $d \geq 1$ . Damit lassen sich hinreichende Bedingungen für das Bestehen von Faktorbeziehungen zwischen  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersystemen gewinnen, die insbesondere die explizite Angabe der Faktorabbildung gestatten.

Das folgende Beispiel dient zur Veranschaulichung der Konstruktion der Faktorabbildung für zweidimensionale Quadersysteme.

**Beispiel 3.38** Wir betrachten die Quadersysteme  $\Omega_1^* = (\mathbb{Z}^2, \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4)\})$  und  $\Omega_2^* = (\mathbb{Z}^2, \{(1, 2), (2, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\})$  mit den Proto-Baustein-Mengen

$$\mathcal{G}_0^{(1)} = \left\{ \begin{smallmatrix} \uparrow \\ 0 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \longrightarrow \\ 0 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square \\ 0 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{G}_0^{(2)} = \left\{ \begin{smallmatrix} \uparrow \\ 0 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \longrightarrow \\ 0 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square \square \\ 0 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square \square \square \\ 0 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square \square \square \square \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}.$$

Für  $k = 2 \max(l_i^{(2)}(j) - 1 \mid i = 1, 2, j = 1, \dots, m_2) = 6$  definieren wir eine Blockabbildung  $F : \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, k) \rightarrow \mathcal{G}_0^{(2)-}$ , die die Bedingungen (i) und (ii) des Satzes 3.2 für alle  $t \in \mathbb{N}$  erfüllt: in Abhängigkeit von den anderen Elementen einer Teilparkettierung  $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, k)$  wird der den Nullpunkt bedeckende Baustein in  $\mathcal{A}$  entweder in kleinere Bausteine „zerlegt“ oder zu einem größeren Baustein „zusammengesetzt“. Dazu benutzen wir die Zerlegungen der Bausteine  $G_3^{(1)}$  und  $G_4^{(1)}$  in Teilparkettierungen aus Bausteinen der Typen  $G_1^{(2)}$ ,  $G_2^{(2)}$  in  $\Omega_2^*$ :

$$\mathcal{A}_3^{(2)} = \{G_1^{(2)}, \sigma^{(1,0)}G_1^{(2)}\} = \left\{ \begin{smallmatrix} \square \\ 0 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \square \\ \uparrow \end{smallmatrix} \right\}, \quad \mathcal{A}_4^{(2)} = \{G_2^{(2)}, \sigma^{(0,1)}G_2^{(2)}, \sigma^{(0,2)}G_2^{(2)}, \sigma^{(0,3)}G_2^{(2)}\} = \left\{ \begin{smallmatrix} \square \square \\ 0 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \square \square \square \\ \uparrow \end{smallmatrix} \right\}.$$

Weiter werden die „zerlegenden“ Teilparkettierungen

$$\mathcal{A}_3^{(1)} = \{G_3^{(1)}, \sigma^{(2,0)}G_1^{(1)}\} = \left\{ \begin{smallmatrix} \square \square \\ 0 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \square \\ \uparrow \end{smallmatrix} \right\}, \quad \mathcal{A}_4^{(1)} = \{G_3^{(1)}, \sigma^{(2,0)}G_2^{(1)}, \sigma^{(2,1)}G_2^{(1)}\} = \left\{ \begin{smallmatrix} \square \square \\ 0 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \square \square \\ \square \end{smallmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{A}_5^{(1)} = \{G_3^{(1)}, \sigma^{(0,2)}G_2^{(1)}, \sigma^{(2,0)}G_2^{(1)}, \sigma^{(2,1)}G_1^{(1)}, \sigma^{(3,1)}G_1^{(1)}\} = \left\{ \begin{smallmatrix} \square \square \\ 0 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \square \square \\ \square \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \square \\ \uparrow \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} \square \\ \uparrow \end{smallmatrix} \right\}$$

verwendet, um Urbild-Teilparkettierungen für die Bausteine  $G_j^{(2)}$ ,  $j = 3, 4, 5$ , zu definieren.

Bezeichnen für eine beliebige Teilparkettierung  $M \in \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, k)$  mit  $G_0 = \sigma^{a(0)} G_{j_0}^{(1)}$  ( $a(0) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $j_0 \in \{1, \dots, m_1\}$ ), denjenigen Baustein in  $M$ , der den Nullpunkt  $0 \in \mathbb{Z}^2$  bedeckt.

Für jede in  $M$  auftretende „codierende“ Teilparkettierung  $\sigma^a \mathcal{A}_j^{(1)}$  ( $j \in \{3, 4, 5\}$ ), die  $0 \in \mathbb{Z}^2$  überdeckt, d. h.

$$G_0 \in \sigma^a \mathcal{A}_j^{(1)} \subset M \quad (3.18)$$

erfüllt, ist die Gültigkeit von

$$\exists j' \in \{3, 4, 5\} : \exists a' \prec a \in \mathbb{Z}^2 \quad \text{mit} \quad G_0 \notin \sigma^{a'} \mathcal{A}_{j'}^{(1)} \subset M \quad \text{und} \quad \sigma^{a'} \mathcal{A}_{j'}^{(1)} \cap \sigma^a \mathcal{A}_j^{(1)} \neq \emptyset. \quad (3.19)$$

zu überprüfen. (Man beachte, daß der Durchschnitt zweier Teilparkettierungen genau dann nicht leer ist, wenn ein Baustein existiert, der zu beiden Teilparkettierungen gehört.) Ist die Bedingung

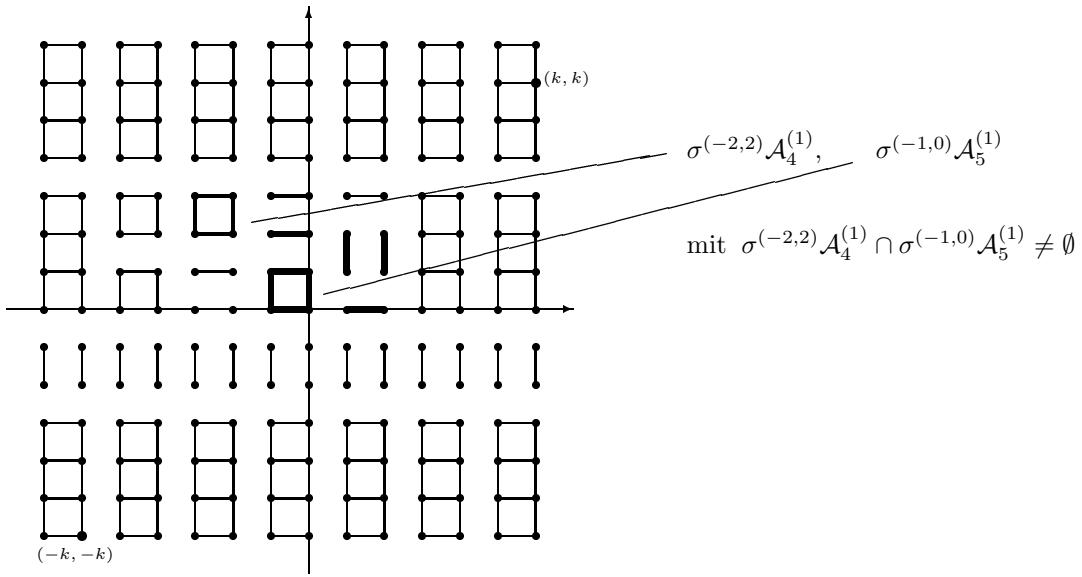


Abbildung 3.11: Eine Teilparkettierung  $M \in \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, k)$  mit (3.18) derart, daß (3.19) nicht erfüllt ist.

(3.19) nicht erfüllt (vgl. Abbildung 3.11), so wird ein Ausschnitt der „codierenden“ Teilparkettierung  $\sigma^a \mathcal{A}_j^{(1)}$  bereits zur Formierung des Bildes einer anderen Teilparkettierung  $M'$  benutzt, die an einem kleineren Punkt  $a' \in \mathbb{Z}^2$  in der Parkettierung vorkommt. (Die Wahl von  $k = 6$  sichert die Überprüfbarkeit dieser Eigenschaft.) Somit wird in diesem Fall das Bild  $F(M)$  **nicht** als zusammengesetzter Baustein  $\sigma^a G_j^{(2)}$  definiert.

Enthält  $M$  keine Teilparkettierung  $\sigma^a \mathcal{A}_j^{(1)}$  mit den Eigenschaften (3.18) und (3.19), so wird  $F(M)$  wie folgt festgelegt: hat  $G_0 \in M$  die Ausdehnung  $l^{(1)}(j_0)$  mit  $j_0 \in \{3, 4\}$ , so wird der Baustein in die Teilparkettierung  $\sigma^{a(0)} \mathcal{A}_{j_0}^{(2)}$  „zerlegt“ und  $M$  auf denjenigen Baustein abgebildet, der die Null überdeckt. (Dieser wird mit  $(\sigma^{a(0)} \mathcal{A}_{j_0}^{(2)})_0$  bezeichnet). Andernfalls wird  $M$  auf den Baustein  $G_0 \in M$  abgebildet.

Sei  $\sigma^{\tilde{a}} \mathcal{A}_j^{(1)}$  die Teilparkettierung mit dem kleinsten Punkt  $\tilde{a} \in \mathbb{Z}^2$  in  $M$ , so daß (3.18) und (3.19)

erfüllt sind. (Man beachte, daß die Teilparkettierungen  $\mathcal{A}_j^{(1)}$  ( $j = 3, 4, 5$ ) nicht am gleichen Punkt der gleichen Parkettierung  $\mathcal{P}^{(1)} \in \Omega_1^*$  auftreten können, d. h.  $\sigma^{\tilde{a}} \mathcal{A}_j^{(1)}$  ist eindeutig bestimmt.) Wir setzen dann  $F(M) := \sigma^{\tilde{a}} G_{\tilde{j}}^{(2)}$ .

Damit ist die Abbildung  $F : \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, k) \rightarrow \mathcal{G}_0^{(2)-}$  wohldefiniert. Man überlegt sich leicht die Surjektivität von  $F$  sowie die Gültigkeit der Bedingungen (i) und (ii) des Satzes 3.2 für jedes  $t \in \mathbb{N}$ .

**Satz 3.39** Gegeben seien  $d$ -dimensionale Quadersysteme  $\Omega_i^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0^{(i)})$  ( $i = 1, 2$ ) mit folgenden Eigenschaften:

1.  $\mathcal{G}_0^{(1,2)} := \mathcal{G}_0^{(1)} \cap \mathcal{G}_0^{(2)} \neq \emptyset$  (definieren  $\Omega_{1,2}^* := (\mathbb{Z}^1, \mathcal{G}_0^{(1,2)})$ ).
2. Für jeden Baustein  $G_j^{(1)} \in \mathcal{G}_0^{(1)} \setminus \mathcal{G}_0^{(1,2)}$  existiert eine Teilparkettierung  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_j^{(2)}$  in  $\Omega_2^*$  so, daß  $G_j^{(1)} = \bigcup_{H \in \mathcal{A}_j^{(2)}} H$ .
3. Für jeden Baustein  $G_k^{(2)} \in \mathcal{G}_0^{(2)} \setminus \mathcal{G}_0^{(1,2)}$  gibt es eine Teilparkettierung  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_k^{(1)}$  in  $\Omega_1^* \setminus \Omega_{1,2}^*$  mit  $G_k^{(2)} = \bigcup_{H \in \mathcal{A}_k^{(1)}} H$  derart, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
  - (3a)  $\mathcal{A}_k^{(1)}$  enthält mindestens einen Baustein aus  $\mathcal{G}^{(1,2)}$ .
  - (3b) Jede Teilparkettierung  $\mathcal{A}_k^{(1)} = \{H_{1,k}, \dots, H_{t(k),k}\}$  besitzt einen Index  $i_0(k) < t(k)$ , so daß
$$H_{i,k} \in \begin{cases} \mathcal{G}^{(1)} \setminus \mathcal{G}^{(1,2)} & : i \leq i_0(k) \\ \mathcal{G}^{(1,2)} & : i > i_0(k). \end{cases}$$
- (3c) Für beliebige zwei Bausteine  $G_{k_1}^{(2)} \neq G_{k_2}^{(2)} \in \mathcal{G}_0^{(2)} \setminus \mathcal{G}_0^{(1,2)}$  existiert keine Parkettierung  $\mathcal{P} \in \Omega_1^*$  mit  $\mathcal{A}_{k_i}^{(1)} \subset \mathcal{P}$  ( $i = 1, 2$ ).

Dann gilt  $\Omega_1^* \geq \Omega_2^*$ .

**Bemerkung 3.40** 1. Forderung 2. in Satz 3.39 ist hinreichend dafür, daß jede Periode einer Parkettierung in  $\Omega_1^*$  auch Periode eines Elementes in  $\Omega_2^*$  ist. (Für Quadersysteme  $\Omega_i^*$  ( $i = 1, 2$ ) der Dimension  $d = 1$  mit  $\mathcal{G}_0^{(2)} \subsetneq \mathcal{G}_0^{(1)}$  ist das Erfülltsein von Bedingung 2. auch notwendig für diese Periodizitätseigenschaft und folglich auch notwendig für das Bestehen einer Faktorbeziehung  $\Omega_1^* \geq \Omega_2^*$ , vgl. Satz 3.6 und Folgerung 3.9.)

2. Die Forderungen (3b) und (3c) in Satz 3.39 hinsichtlich der Anordnung der Bausteine in den „zerlegenden“ Teilparkettierungen  $\mathcal{A}_k^{(1)}$  sind eine für den Übergang zu Dimensionen  $d > 1$  notwendige Verschärfung der in Beispiel 3.37 verwendeten Forderung nach „Präfixfreiheit“ der (ein-dimensionalen) codierenden Teilparkettierungen. Bedingung (3b) stellt für den Fall  $d = 1$  keine wesentliche Einschränkung dar, da die Bausteine einer zusammenhängenden Teilparkettierung in dieser Dimension einfach miteinander vertauscht werden können.

**Beweis von Satz 3.39:** Wir benutzen Satz 3.2 und definieren eine Blockabbildung  $F : \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, n) \rightarrow \mathcal{G}_0^{(2)-}$  mit den gewünschten Eigenschaften.

1. *Definition der Blockabbildung F*

Wir setzen  $n := 2 \cdot \max(l_i^{(2)}(j) - 1 \mid i = 1, \dots, d; j = 1, \dots, m_2)$ . Man beachte, daß damit jede „codierende“ Teilparkettierung  $\sigma^a \mathcal{A}_k^{(1)}$  eines Bausteines  $\sigma^a G_k^{(2)} \in \mathcal{G}_0^{(2)-} \setminus \mathcal{G}_0^{(1,2)-}$  zu einem Element von  $\mathcal{M}_0(\Omega_1^*, n)$  vervollständigt werden kann.

Sei eine beliebige Teilparkettierung  $M = \{G_1, \dots, G_r\} \in \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, n)$  ( $r \in \mathbb{N}$ ) gegeben. Speziell bezeichne  $G_q = \sigma^{a(q)} G_{j(q)}^{(1)}$  mit  $G_{j(q)}^{(1)} \in \mathcal{G}_0^{(1)}$ ,  $a(q) \in \mathbb{Z}^d$  denjenigen Baustein in  $M$ , der den Nullpunkt belegt.

Zur Definition des Bildes  $F(M)$  sind folgende Fälle zu unterscheiden:

(A) Der Baustein  $G_{j(q)}^{(1)}$  tritt in keiner codierenden Teilparkettierung  $\mathcal{A}_k^{(1)}$  eines Bausteins  $G_k^{(2)} \in \mathcal{G}_0^{(2)} \setminus \mathcal{G}_0^{(1,2)}$  auf.

Ist  $G_{j(q)}^{(1)}$  außerdem kein Element der Menge  $\mathcal{G}_0^{(1,2)}$  der gemeinsamen Proto-Bausteine, so wird  $G_q$  gemäß seiner Teilparkettierung  $\mathcal{A}_{j(q)}^{(2)}$  „zerlegt“, und  $M$  wird auf den Baustein in  $\sigma^{a(q)} \mathcal{A}_{j(q)}^{(2)}$  abgebildet, der den Nullpunkt belegt. Andernfalls wird  $M$  auf den Baustein  $G_q$  abgebildet:

$$F(M) = \begin{cases} G_q & : G_q \in \mathcal{G}^{(1,2)} \\ \left(\sigma^{a(q)} \mathcal{A}_{j(q)}^{(2)}\right)_0 & : G_q \in \mathcal{G}^{(1)} \setminus \mathcal{G}^{(1,2)} \end{cases} \quad (3.20)$$

(B) Es gibt einen Proto-Baustein  $G_k^{(2)} \in \mathcal{G}_0^{(2)} \setminus \mathcal{G}_0^{(1,2)}$  derart, daß  $G_{j(q)}^{(1)}$  in der Teilparkettierung  $\mathcal{A}_k^{(1)}$  vorkommt.

Die Codierungsidee ist die folgende: wir suchen nach allen Teilparkettierungen  $\mathcal{A}_k^{(1)}$ , die an einem gewissen Punkt  $a \in \mathbb{Z}^d$  in  $M$  enthalten sind und den Nullpunkt überdecken, d. h.

$$G_q \in \sigma^a \mathcal{A}_k^{(1)} \subset M. \quad (3.21)$$

Weiter ist zu fordern (vgl. auch Beispiel 3.38), daß diese Teilparkettierungen die Bedingung

$$\nexists G_{k'}^{(2)} \in \mathcal{G}_0^{(2)} \setminus \mathcal{G}_0^{(1,2)} : \exists b \in \mathbb{Z}^d, b \prec a \quad \text{mit} \quad [G_q \notin \sigma^b \mathcal{A}_{k'}^{(1)} \subset M] \wedge [\sigma^b \mathcal{A}_{k'}^{(1)} \cap \sigma^a \mathcal{A}_k^{(1)} \neq \emptyset] \quad (3.22)$$

erfüllen. Dann sind folgende zwei Fälle möglich:

(B1) Es existiert keine Teilparkettierung  $\sigma^a \mathcal{A}_k^{(1)} \subset M$ , die den Bedingungen (3.21) und (3.22) genügt.

Das Bild  $F(M)$  wird dann durch (3.20) bestimmt.

(B2) Es existiert wenigstens eine Teilparkettierung  $\sigma^a \mathcal{A}_k^{(1)} \subset M$  mit den gewünschten Eigenschaften.

Man beachte, daß nach Voraussetzung (3c) für festen Punkt  $a \in \mathbb{Z}^d$  höchstens eine Teilparkettierung  $\mathcal{A}_k^{(1)}$  mit  $\sigma^a \mathcal{A}_k^{(1)} \subset M$  existiert. Bezeichnet  $\tilde{a} \in \mathbb{Z}^d$  den bezüglich der

lexikographischen Ordnung  $\prec$  kleinsten Punkt  $a \in \mathbb{Z}^d$ , für den es ein  $\mathcal{A}_k^{(1)}$  mit den Eigenschaften (3.21) und (3.22) gibt, und ist  $\mathcal{A}_{\tilde{k}}^{(1)}$  die zugehörige Teilparkettierung, dann definieren wir

$$F(M) := \sigma^{\tilde{a}} G_{\tilde{k}}^{(2)}.$$

Dieses Vorgehen sichert, daß für Teilparkettierungen  $M_i \in \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, n)$  mit  $\sigma^{a(i)} M_i \in \mathcal{P}^{(1)} \in \Omega_1^*$  ( $i = 1, \dots, t$ ) tatsächlich eine gemeinsame Parkettierung  $\mathcal{P}^{(2)} \in \Omega_2^*$  für ihre Bilder  $\sigma^{a(i)} F(M_i)$  konstruiert werden kann.

Dabei wird von der Wahl  $n := 2 \cdot \max(l_i^{(2)}(j) - 1 \mid i = 1, \dots, d; j = 1, \dots, m_2)$  Gebrauch gemacht. Für kleinere  $n \in \mathbb{N}$  würden „frühere“ Zuordnungen (d. h. Zuordnungen an kleineren Gitterpunkten) durch den Code  $F$  nicht berücksichtigt. Tatsächlich werden für die bloße Formierung des Bausteines  $F(M)$  durch „Zerlegung“ bzw. „Zusammensetzung“ von Bausteinen nur Bausteine innerhalb des Würfels  $\mathcal{Z}(n/2)$  verwendet. Die restlichen Bausteine in  $M$  dienen als „Testsymbole“.

### 2. $F$ ist eine surjektive Abbildung

Zu zeigen ist  $F(\mathcal{M}_0(\Omega_1^*, n)) = \mathcal{G}_0^{(2)-}$ .

Wir stellen zunächst fest, daß jedes Element  $M \in \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, n)$ , welches nur aus Bausteinen derselben Ausdehnung aus  $\mathcal{G}_0^{(1,2)}$  besteht, auf den Baustein in  $M$  abgebildet wird, der den Nullpunkt belegt. (Dies folgt unmittelbar aus den Voraussetzungen an die „codierenden“ Teilparkettierungen  $\mathcal{A}_k^{(1)}$  und aus der Definition der Blockabbildung  $F$  im vorhergehenden Abschnitt.) Mithin ist  $\mathcal{G}_0^{(1,2)-} \subset F(\mathcal{M}_0(\Omega_1^*, n))$  richtig.

Sei nun ein beliebiger Baustein  $\sigma^c G_k^{(2)} \in \mathcal{G}_0^{(2)-} \setminus \mathcal{G}_0^{(1,2)-}$  gegeben. Die Teilparkettierung  $\sigma^c \mathcal{A}_k^{(1)}$  kann dann zu einem Element  $M$  von  $\mathcal{M}_0(\Omega_1^*, n)$  fortgesetzt werden. Gemäß Voraussetzung 2. des Satzes reicht es aus, Bausteine der gemeinsamen Proto-Baustein-Menge  $\mathcal{G}_0^{(1,2)}$  dafür zu verwenden. Wegen Forderung (3b) an die Anordnung der Bausteine in den codierenden Teilparkettierungen sichert dieses Vorgehen gerade  $F(M) = \sigma^c G_k^{(2)}$ . Somit gilt auch  $\mathcal{G}_0^{(2)-} \setminus \mathcal{G}_0^{(1,2)-} \subset F(\mathcal{M}_0(\Omega_1^*, n))$ , das heißt,  $F$  ist eine surjektive Abbildung.

### 3. $F$ erfüllt Bedingung (i) in Satz 3.2 für jedes $t \in \mathbb{N}$ .

Zunächst wird der Fall  $t = 2$  betrachtet: gegeben seien zwei Teilparkettierungen  $M_1, M_2$  in  $\mathcal{M}_0(\Omega_1^*, n)$  und zwei Punkte  $a(1) \prec a(2) \in \mathbb{Z}^d$  derart, daß eine Parkettierung  $\mathcal{P}^{(1)} \in \Omega_1^*$  existiert mit  $\sigma^{a(i)} M_i \subset \mathcal{P}^{(1)}$  ( $i = 1, 2$ ).

Gilt  $\sigma^{a(1)} F(M_1) = \sigma^{a(2)} F(M_2)$ , so folgt die Existenz einer Parkettierung  $\mathcal{P}^{(2)} \in \Omega_2^*$ , die den Baustein  $\sigma^{a(1)} F(M_1) = \sigma^{a(2)} F(M_2)$  enthält, aus der Definition des Begriffes Parkettsystem.

Angenommen es gilt  $\sigma^{a(1)} F(M_1) \neq \sigma^{a(2)} F(M_2)$ . Sei  $\mathcal{P}^{(1)} \in \Omega_1^*$  eine beliebige Parkettierung, die die Teilparkettierungen  $\sigma^{a(i)} M_i$  ( $i = 1, 2$ ) enthält. Man beachte, daß gemäß Definition von  $F$  in Abschnitt 1 die Bausteine  $\sigma^{a(i)} F(M_i)$  entweder durch „Zusammensetzung“ der Elemente einer gewissen Teilparkettierung  $\mathcal{A} \subset \sigma^{a(i)} M_i$  oder durch „Zerlegung“ des Bausteines  $(\sigma^{a(i)} M_i)_{a(i)}$  gebildet werden. (Dabei wird die Abbildung eines Bausteines aus  $\mathcal{G}_0^{(1,2)}$  auf sich selbst als triviale „Zerlegung“ verstanden.) Werden nun alle Bausteine  $H \in \mathcal{P}^{(1)}$ , die nicht zur Bildung von  $\sigma^{a(i)} F(M_i)$  ( $i = 1, 2$ )

benutzt werden, sich selbst (im Fall  $H \in \mathcal{G}^{(1,2)}$ ) oder ihren „zerlegenden“ Teilparkettierungen (im Fall  $H \in \mathcal{G}^{(2)} \setminus \mathcal{G}^{(1,2)}$ ) zugeordnet, dann entsteht zusammen mit den Bildern  $\sigma^{a(i)} F(M_i)$  ( $i = 1, 2$ ) (und möglicherweise weiteren bei der Zerlegung von  $(\sigma^{a(i)} M_i)_{a(i)}$  entstehenden Bausteinen) eine Parkettierung  $\mathcal{P}^{(2)} \in \Omega_2^*$ . (Vergleiche insbesondere Abbildung 3.12.)

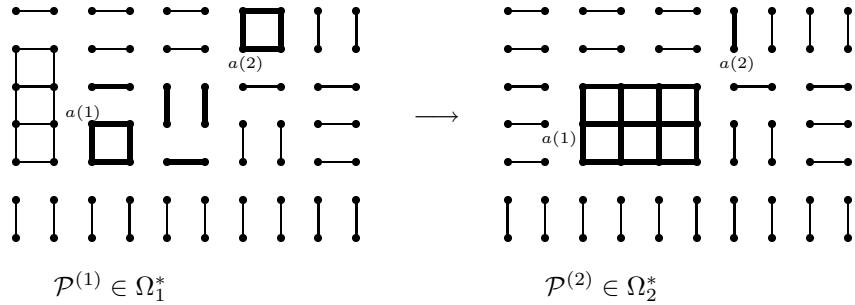


Abbildung 3.12: Der Übergang von einer Parkettierung  $\mathcal{P}^{(1)} \in \Omega_1^*$  mit  $\sigma^{a(i)} M_i \subset \mathcal{P}^{(1)}$  ( $i = 1, 2$ ) zu einer Parkettierung  $\mathcal{P}^{(2)} \in \Omega_2^*$  mit  $\sigma^{a(i)} F(M_i) \in \mathcal{P}^{(2)}$  ( $i = 1, 2$ ) für Beispiel 3.38. (Die Bausteine  $\sigma^{a(i)} F(M_i)$  ( $i = 1, 2$ ) sowie die zu ihrer Formierung benutzten Bausteine in  $\mathcal{P}^{(1)}$  sind durch dicke Linien gekennzeichnet.)

Offenbar gilt  $\sigma^{a(i)} F(M_i) \in \mathcal{P}^{(2)}$ .

Für  $t > 2$  folgt die Gültigkeit von Bedingung (i) in Satz 3.2 durch Induktion.

4.  $F$  erfüllt Bedingung (ii) in Satz 3.2 für jedes  $t \in \mathbb{N}$ .

Wir betrachten zunächst wieder den Fall  $t = 2$ : seien zwei Bausteine  $H_1, H_2 \in \mathcal{G}_0^{(2)-}$  und Punkte  $a(1) \prec a(2) \in \mathbb{Z}^d$  derart gegeben, daß eine Parkettierung  $\mathcal{P}^{(2)} \in \Omega_2^*$  mit  $\sigma^{a(i)} H_i \in \mathcal{P}^{(2)}$  ( $i = 1, 2$ ) existiert. Zu zeigen ist die Existenz von Teilparkettierungen  $M_i \in F^{-1}(H_i)$  ( $i = 1, 2$ ) und einer Parkettierung  $\mathcal{P}^{(1)} \in \Omega_1^*$  mit  $\sigma^{a(i)} M_i \subset \mathcal{P}^{(1)}$  ( $i = 1, 2$ ).

Falls  $\sigma^{a(1)} H_1 = \sigma^{a(2)} H_2$  gilt, so reicht die Auswahl einer Teilparkettierung  $M_1 \in F^{-1}(H_1)$  sowie einer Parkettierung  $\mathcal{P}^{(1)} \in \Omega_1^*$  mit  $\sigma^{a(1)} M_1 \subset \mathcal{P}^{(1)}$  zum Nachweis der gewünschten Eigenschaft aus. Nach Definition von  $F$  erfüllt die eindeutig bestimmte Teilparkettierung  $M_2 \in \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, n)$  mit  $\sigma^{a(2)} M_2 \subset \mathcal{P}^{(1)}$  dann die Bedingung  $F(M_2) = H_2$ .

Es bleibt der Fall  $\sigma^{a(1)} H_1 \neq \sigma^{a(2)} H_2$  zu betrachten. Sei  $\mathcal{P}^{(2)} \in \Omega_2^*$  eine beliebige Parkettierung, die sowohl  $\sigma^{a(1)} H_1$  als auch  $\sigma^{a(2)} H_2$  enthält. Wegen der Voraussetzungen (3.) und (2.) des Satzes können wir annehmen, daß alle Bausteine mit Ausnahme von  $\sigma^{a(i)} H_i$  ( $i = 1, 2$ ) in  $\mathcal{P}^{(2)}$  zur Menge  $\mathcal{G}_0^{(1,2)}$  der gemeinsamen Proto-Bausteine gehören. Aus dieser Parkettierung in  $\Omega_2^*$  entsteht eine Parkettierung in  $\Omega_1^*$ , indem Bausteine  $H_i$ , die *nicht* zu  $\mathcal{G}_0^{(1,2)}$  gehören, durch ihre zugehörige codierende Teilparkettierung ersetzt werden (siehe Abbildung 3.13).

Die eindeutig bestimmten Teilparkettierungen  $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, n)$  mit  $\sigma^{a(i)} M_i \subset \mathcal{P}^{(1)}$  ( $i = 1, 2$ ) erfüllen  $F(M_i) = H_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Induktive Anwendung dieser Beweisgedanken liefert die gewünschte Eigenschaft für  $t > 2$ .

Wir haben hiermit gezeigt, daß die in Abschnitt 1 des Beweises definierte Blockabbildung

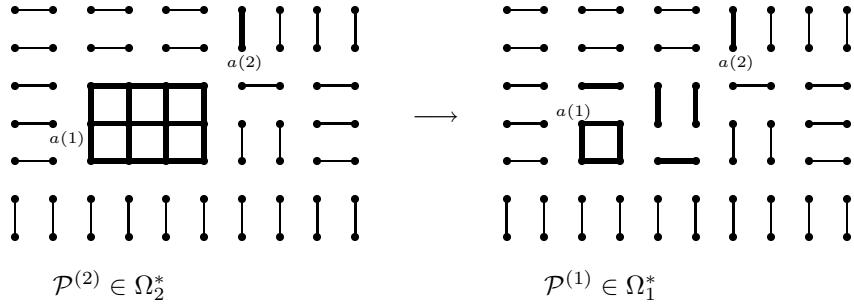


Abbildung 3.13: Der Übergang von  $\mathcal{P}^{(2)} \in \Omega_2^*$  zu  $\mathcal{P}^{(1)} \in \Omega_1^*$  für Beispiel 3.38.

$F : \mathcal{M}_0(\Omega_1^*, n) \rightarrow \mathcal{G}_0^{(2)-}$  die Bedingungen (i) und (ii) des Satzes 3.2 für alle  $t \in \mathbb{N}$  erfüllt. Also ist  $\Omega_2^*$  topologischer Faktor von  $\Omega_1^*$ .  $\blacksquare$

**Bemerkung 3.41** Die in Satz 3.39 angegebenen hinreichenden Bedingungen sind nicht notwendig für das Bestehen einer Faktorbeziehung  $\Omega_1^* \geq \Omega_2^*$  zwischen zwei  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersystemen.

Beispielsweise ist das zwei-dimensionale Quadersystem  $\Omega_2^* = (\mathbb{Z}^2, \{(3, 2)\})$  topologischer Faktor des Quadersystems  $\Omega_1^* = (\mathbb{Z}^2, \{(3, 4), (6, 2)\})$  (vgl. dazu die Überlegungen in Abschnitt 3.3). Wegen  $\mathcal{G}_0^{(1)} \cap \mathcal{G}_0^{(2)} = \emptyset$  sind die Bedingungen von Satz 3.39 jedoch nicht erfüllt.

Die Bedeutung von Satz 3.39 liegt vor allem in der Möglichkeit, die Faktorabbildung zwischen den zwei Quadersystemen direkt anzugeben. Damit ist es möglich, nach Eigenschaften dieser Faktorabbildungen zu fragen.

**Folgerung 3.42** Gegeben seien zwei Quadersysteme  $\Omega_i^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0^{(i)})$  ( $i = 1, 2$ ), die die Bedingungen des Satzes 3.39 erfüllen. Dann ist die Faktorabbildung  $\varphi : \Omega_1^* \rightarrow \Omega_2^*$  nicht endlich-zu-1, d. h., es existiert eine Parkettierung  $\mathcal{P} \in \Omega_2^*$  mit  $|\varphi^{-1}(\mathcal{P})| = \infty$ .

**Beweis:** Zur Vereinfachung der Bezeichnungen wird der Beweis nur für die Dimension  $d = 2$  geführt.

Sei  $G_{j_2}^{(2)}$  derjenige Baustein in  $\mathcal{G}_0^{(2)} \setminus \mathcal{G}_0^{(1,2)}$ , dessen codierende Teilparkettierung den größten Anteil von Bausteinen aus  $\mathcal{G}_0^{(1)} \setminus \mathcal{G}_0^{(1,2)}$  enthält. (Falls mehr als ein solcher Baustein existiert, so wird der Baustein mit der kleinsten Ausdehnung bezüglich der lexikographischen Ordnung gewählt.) Weiter bezeichne  $G_{j_1}^{(1)}$  den Baustein mit der größten Ausdehnung in  $\mathcal{G}_0^{(1)} \setminus \mathcal{G}_0^{(1,2)}$ .

Wir setzen  $L := l_1^{(1)}(j_1) \cdot l_1^{(2)}(j_2)$  und bilden die Teilparkettierungen

$$\begin{aligned} M_i &:= \{ \sigma^{(kl_1^{(i)}(j_i), 0)} G_{j_i}^{(i)} \mid k = 0, \dots, \frac{L}{l_1^{(i)}(j_i)} - 1 \} \quad (i = 1, 2) \\ \mathcal{A}(M_1) &:= \{ \sigma^{(kl_1^{(1)}(j_1), 0)} \mathcal{A}_{j_1}^{(2)} \mid k = 0, \dots, \frac{L}{l_1^{(1)}(j_1)} - 1 \} \text{ und} \\ \mathcal{A}(M_2) &:= \{ \sigma^{(kl_1^{(2)}(j_2), 0)} \mathcal{A}_{j_2}^{(1)} \mid k = 0, \dots, \frac{L}{l_1^{(2)}(j_2)} - 1 \}. \end{aligned}$$

Dann besitzt die periodische Parkettierung

$$\mathcal{P}^{(2)} := \bigcup_{(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2} \sigma^{(a_1 z_1, a_2 z_2)} (M_2 \cup \sigma^b \mathcal{A}(M_1))$$

mit  $(a_1, a_2) = (L, l_2^{(1)}(j_1) + l_2^{(2)}(j_2))$  und  $b = (0, l_2^{(2)}(j_2))$  unendlich viele Urbilder unter der Faktorabbildung  $\varphi$ .

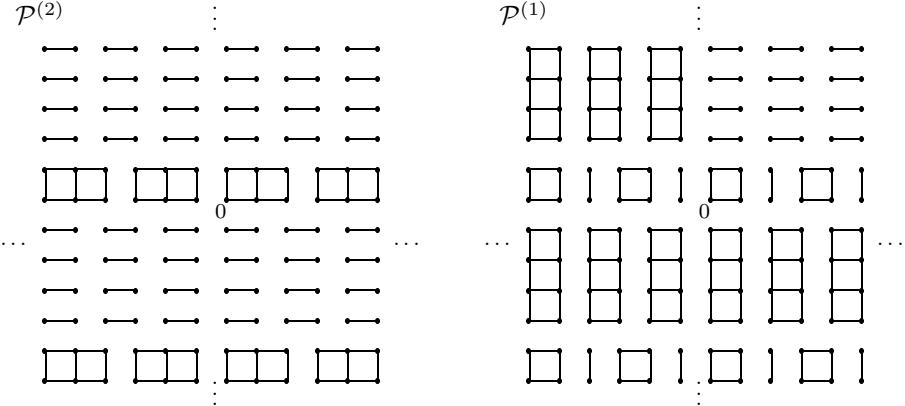


Abbildung 3.14: Die Parkettierungen  $\mathcal{P}^{(2)}$  und  $\mathcal{P}^{(1)} \in \varphi^{-1}(\mathcal{P}^{(2)})$  für die Quadersysteme  $\Omega_1^*, \Omega_2^*$  in Beispiel 3.38, wobei  $\underline{l}_{j_1}^{(1)} = (2, 4)$  und  $\underline{l}_{j_2}^{(2)} = (3, 2)$  gilt.

Speziell gilt für die nicht-periodische Parkettierung (vgl. Abbildung 3.14)

$$\mathcal{P}^{(1)} := \bigcup_{\substack{z=(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ z \prec 0}} \sigma^{(z_1 a_1, z_2 a_2)} (\mathcal{A}(M_2) \cup \sigma^b M_1) \cup \bigcup_{\substack{z=(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ z \succeq 0}} \sigma^{(z_1 a_1, z_2 a_2)} (\mathcal{A}(M_2) \cup \sigma^b \mathcal{A}(M_1))$$

gerade  $\varphi(\sigma^{(z_1 a_1, z_2 a_2)} \mathcal{P}^{(1)}) = \mathcal{P}^{(2)}$  für alle  $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ . Mithin ist die Faktorabbildung  $\varphi$  nicht endlich-zu-1. ■

**Bemerkung 3.43** Für ein-dimensionale Quadersysteme ist die Aussage von Folgerung 3.42 nach einem bekannten Resultat aus der Theorie ein-dimensionaler Punktkonfigurationenräume (siehe [13]) äquivalent zu  $h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_1^*}) > h_t(\sigma^{\mathbb{Z}^1}|_{\Omega_2^*})$ . Man erinnere sich in diesem Zusammenhang an die in Beispiel 3.37 dargestellte Konstruktion von zwei in einer Faktorbeziehung stehenden Quadersystemen unterschiedlicher Entropie aus gegebenen Quadersystemen gleicher Entropie.

**Folgerung 3.44** Gegeben sei ein Quadersystem  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0)$ , welches eine Teilmenge  $\emptyset \neq \tilde{\mathcal{G}}_0 \subsetneq \mathcal{G}_0$  derart besitzt, daß für jeden Baustein  $G_j \in \mathcal{G}_0 \setminus \tilde{\mathcal{G}}_0$  eine Teilparkettierung  $\mathcal{A}_j$  in  $\tilde{\Omega}^* := (\mathbb{Z}^d, \tilde{\mathcal{G}}_0)$  mit  $G_j = \bigcup_{H \in \mathcal{A}_j} H$  existiert. Dann hat  $\Omega^*$  unendlich viele Faktor-Quadersysteme  $\Omega_2^*$  mit  $m_2 > \tilde{m} := |\tilde{\mathcal{G}}_0|$  Proto-Bausteinen.

**Beweis:** Bezeichne  $G_{j_1}$  den Quader maximaler Ausdehnung in  $\mathcal{G}_0 \setminus \tilde{\mathcal{G}}_0$ . Für jeden Vektor  $v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{N}^d$ ,  $v \neq (1, \dots, 1)$ , sei  $G_v^{(2)}$  der Proto-Baustein der Ausdehnung  $\underline{l}^{(2)}(v) := (v_1 l_1(j_1), \dots, v_d l_d(j_1))$ .

Dann erfüllt für jede endliche Menge von Parametervektoren  $\{v(1), \dots, v(r)\} \subset \mathbb{N}^d \setminus \{(1, \dots, 1)\}$

mit  $v_j(1) \leq \dots \leq v_j(r)$  ( $j = 1, \dots, d$ ) das Quadersystem  $\Omega_2^* := (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0^{(2)})$  mit  $\mathcal{G}_0^{(2)} := \tilde{\mathcal{G}}_0 \cup \{G_{v(i)}^{(2)}\}_{i=1}^r$  die Bedingungen des Satzes 3.39:

es gilt  $\mathcal{G}_0 \cap \mathcal{G}_0^{(2)} = \tilde{\mathcal{G}}_0 \neq \emptyset$ , und nach Voraussetzung besitzt jeder Baustein  $G \in \mathcal{G}_0 \setminus \tilde{\mathcal{G}}_0$  eine „zerlegende“ Teilparkettierung in  $\tilde{\Omega}^*$ . Mit den Matrizen  $A(z) := \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_d \end{pmatrix}$  und  $B(z) := A(z) - I_d$  ( $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{Z}^d$ ), wobei  $I_d$  die  $d$ -dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet, werden für  $i = 1, \dots, r$  die Teilparkettierungen

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{v(i)} := & \{ \sigma^{l(j_1) \cdot A(z)} G_{j_1} \mid z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{Z}^d, z \neq (v_1(i) - 1, \dots, v_d(i) - 1), 0 \leq z_j < v_j(i), \forall j \} \\ & \cup \sigma^{l(j_1) \cdot B(v(i))} \mathcal{A}_{j_1} \end{aligned}$$

gebildet. Diese sind „codierende“ Teilparkettierungen für die Bausteine  $G_{v(i)}^{(2)} \in \mathcal{G}_0^{(2)} \setminus \tilde{\mathcal{G}}_0$ , welche die Bedingungen (3a)-(3c) von Satz 3.39 erfüllen.

Mithin ist jedes dieser Quadersysteme  $\Omega_2^*$  mit  $m_2 = \tilde{m} + r$  Proto-Baustein ein topologischer Faktor von  $\Omega^*$ . Da für jedes  $r > 0$  unendlich viele verschiedene Mengen  $\{v(1), \dots, v(r)\}$  von Parametern existieren, besitzt jedes solche Quadersystem  $\Omega^*$  tatsächlich unendlich viele Faktor-Quadersysteme mit  $m_2 > \tilde{m}$  Proto-Baustein. ■

## Kapitel 4

# Selbstaffine Parkettierungen des $\mathbb{Z}^d$ und erzeugte Parkettsysteme

Ein anderer Ansatzpunkt zur Einbeziehung der geometrischen Struktur der Elemente eines Parkettsystems in Untersuchungen zur Dynamik ist die Betrachtung der von Parkettierungen mit speziellen Eigenschaften erzeugten Teilsysteme. Eine solche Struktureigenschaft ist beispielsweise die Selbstähnlichkeit von Parkettierungen. (In Zusammenhang mit der Modellierung von „Quasikristallen“ in der Physik haben vor allem nichtperiodische selbstähnliche Parkettierungen Aufmerksamkeit erlangt, vgl. z. B. [57].)

B. Solomyak betrachtet in [61] das von einer fast-periodischen selbstähnlichen Parkettierung  $\mathcal{T}$  des  $\mathbb{R}^d$  erzeugte dynamische System  $(X_{\mathcal{T}}, \mathbb{R}^d)$ , wobei  $X_{\mathcal{T}}$  der Abschluß der Menge  $\{\mathcal{T} - g \mid g \in \mathbb{R}^d\}$  aller Verschiebungen von  $\mathcal{T}$  ist, und zeigt die Existenz eines eindeutig bestimmten invarianten Maßes  $\mu$  auf  $X_{\mathcal{T}}$ . Das zugehörige maßtheoretische dynamische System  $(X_{\mathcal{T}}, \mu, \mathbb{R}^d)$  ist nicht stark mischend, aber es existieren selbstähnliche Parkettierungen  $\mathcal{T}$  derart, daß  $(X_{\mathcal{T}}, \mu, \mathbb{R}^d)$  schwach mischend ist.

Das vielfältige Mischungsverhalten der von selbstähnlichen Parkettierungen des  $\mathbb{R}^d$  erzeugten dynamischen Systeme läßt die Untersuchung ähnlicher Fragestellungen auch für Parkettierungen auf diskretem Träger sinnvoll erscheinen.

Im Mittelpunkt des ersten Abschnittes dieses Kapitels steht die Erarbeitung einer geeigneten Definition der Eigenschaft der Selbstaffinität für Parkettierungen des Gitters  $\mathbb{Z}^d$ . Des Weiteren wird die Unterteilungsmatrix als wichtiges Beschreibungsmittel einer selbstaffinen Parkettierung eingeführt und ein Zusammenhang zwischen Eigenschaften dieser Matrix und der globalen Struktur der Parkettierung hergestellt. Der aus der Theorie der Parkettierungen des kontinuierlichen Raumes bekannte Begriff des replizierenden Bausteines (siehe z. B. F.M.Dekking [14], C.Bandt [2]) wird als ein wesentliches Mittel zur Konstruktion selbstaffiner Parkettierungen auf die Situation des Gitters  $\mathbb{Z}^d$  übertragen.

In Abschnitt 4.2 werden Eigenschaften des von einer selbstaffinen fast-periodischen Parkettierung des  $\mathbb{Z}^d$  erzeugten dynamischen Systems untersucht. Der Beweis der eindeutigen Ergodizität eines solchen Systems folgt dem aus der Untersuchung sogenannter Substitutionssysteme (siehe z. B. [42],[49]) bekannten Vorgehen und macht wesentlich von der Eigenschaft selbstaffiner fast-

periodischer Parkettierungen Gebrauch, daß jede ihrer Teilparkettierungen mit einer gleichmäßigen „Frequenz“ in ihr auftritt. Die Untersuchung von Mischungseigenschaften des von einer selbstaffinen fast-periodischen Parkettierung des  $\mathbb{Z}^d$  erzeugten maßtheoretischen dynamischen Systems schließt dieses Kapitel ab.

## 4.1 Selbstaffinität von Parkettierungen des Gitters $\mathbb{Z}^d$

**Definition 4.1** (vgl. auch 10.1 in [25] für Parkettierungen des  $\mathbb{R}^d$ ) Eine Parkettierung  $\mathcal{P}_2$  (von  $\mathbb{Z}^d$ ) heißt **Vergrößerung** der Parkettierung  $\mathcal{P}_1$  (von  $\mathbb{Z}^d$ ), wenn jeder Baustein  $H \in \mathcal{P}_2$  eine Vereinigung von Bausteinen der Parkettierung  $\mathcal{P}_1$  ist.

**Beispiel 4.2** Gegeben sei die Proto-Baustein-Menge  $\mathcal{G}_0^{(1)} = \{G_1^{(1)}, G_2^{(1)}, G_3^{(1)}, G_4^{(1)}\}$  mit

$$G_1^{(1)} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 0 \end{array}, \quad G_2^{(1)} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 0 \end{array}, \quad G_3^{(1)} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 0 \end{array}, \quad G_4^{(1)} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 0 \end{array}$$

Wir betrachten die in Abbildung 4.1 dargestellte Parkettierung  $\mathcal{P}_1 \in \Omega_1^* = (\mathbb{Z}^2, \mathcal{G}_0^{(1)})$ .

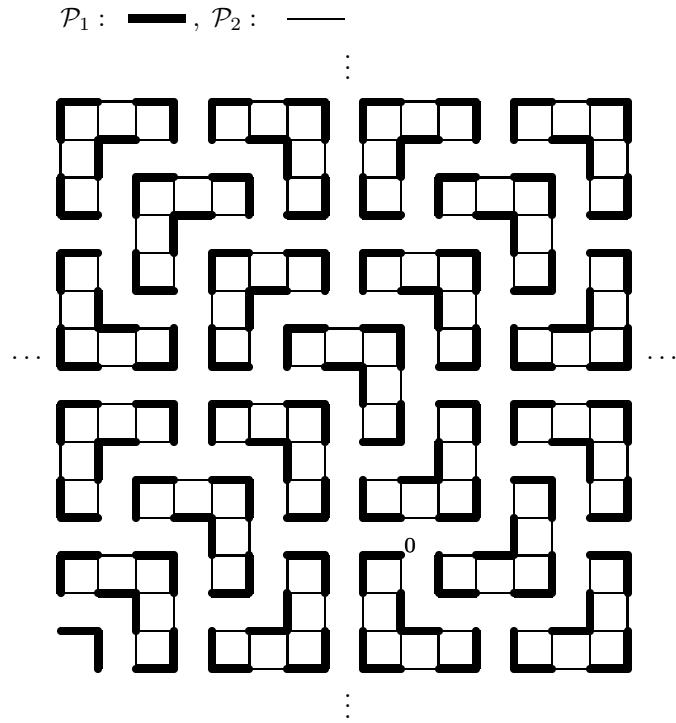


Abbildung 4.1: Die Parkettierung  $\mathcal{P}_1 \in \Omega_1^*$  und eine Vergrößerung  $\mathcal{P}_2 \in \Omega_2^*$  von  $\mathcal{P}_1$ .

Die (mit dünnen Linien gezeichnete) Parkettierung  $\mathcal{P}_2$  (mit der Proto-Baustein-Menge  $\mathcal{G}_0^{(2)} = \{G_1^{(2)}, G_2^{(2)}, G_3^{(2)}, G_4^{(2)}\}$  bestehend aus den Elementen

$$G_1^{(2)} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ | \\ | \\ 0 \end{array}, \quad G_2^{(2)} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ | \\ | \\ 0 \end{array}, \quad G_3^{(2)} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ | \\ | \\ 0 \end{array}, \quad G_4^{(2)} = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ | \\ | \\ 0 \end{array}$$

ist eine Vergrößerung von  $\mathcal{P}_1$ .

Die Vergrößerung  $\mathcal{P}_2$  besitzt bis auf Drehung eine ähnliche Struktur wie die Ausgangsparkettierung  $\mathcal{P}_1$ .

In [25] (Abschnitt 10.1) werden Parkettierungen (des  $\mathbb{R}^d$ ), die einer Vergrößerung von sich selbst ähnlich sind, Ähnlichkeitsparkettierungen genannt. Zur Übertragung dieser Begriffsbildung auf die Situation von Parkettierungen des Gitters  $\mathbb{Z}^d$  benötigen wir eine Verallgemeinerung des Konzeptes der expandierenden affinen Abbildung (definiert auf  $\mathbb{R}^d$ ), da das Bild  $g(\mathbb{Z}^d)$  des Gitters unter einer „gewöhnlichen“ expandierenden affinen Abbildung  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine echte Teilmenge von  $\mathbb{Z}^d$  ist.

**Definition 4.3** Gegeben sei eine expandierende lineare affine Abbildung  $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  (d. h. alle Eigenwerte sind betragsmäßig größer als 1), die das Gitter  $\mathbb{Z}^d$  in  $\mathbb{Z}^d$  abbildet.

Ist  $\{a_1, \dots, a_k\} \subset \mathbb{Z}^d$  ein vollständiges Nebenklassenrepräsentantensystem der Untergruppe  $\tilde{\varphi}(\mathbb{Z}^d)$ , so heißt die durch

$$\varphi(z) := \bigcup_{i=1}^k \{\tilde{\varphi}(z) + a_i\} \quad (z \in \mathbb{Z}^d) \quad (4.1)$$

definierte Abbildung  $\varphi : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d$  eine **verallgemeinerte expandierende affine Abbildung des  $\mathbb{Z}^d$  auf sich**. Ist  $\tilde{\varphi}$  eine Ähnlichkeitsabbildung der Ebene  $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ , so kann diese Abbildung als Multiplikation mit einer komplexen Zahl  $\lambda$  aufgefaßt werden. Die Zahl  $\lambda$  wird auch die **Expansionskonstante** von  $\varphi$  genannt.

**Bemerkung 4.4** 1. Die einer verallgemeinerten expandierenden affinen Abbildung zugrundeliegende lineare Abbildung  $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  ist darstellbar als  $\tilde{\varphi}(x) = Ax$  ( $x \in \mathbb{Z}^d$ ) mit einer ganzzahligen  $d \times d$ -Matrix  $A$ , deren Eigenwerte sämtlich größer als 1 sind.

2. Eine verallgemeinerte expandierende affine Abbildung  $\varphi$  ist durch die expandierende lineare affine Abbildung  $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  und ein vollständiges Nebenklassenrepräsentantensystem  $\{a_1, \dots, a_k\}$  der Untergruppe  $\tilde{\varphi}(\mathbb{Z}^d)$  charakterisiert. Dabei gilt  $k = |\det \tilde{\varphi}|$ .  
Abkürzend wird die Schreibweise  $\varphi = (\tilde{\varphi}, \{a_1, \dots, a_k\})$  für eine verallgemeinerte expandierende affine Abbildung des  $\mathbb{Z}^d$  verwendet.

**Definition 4.5** Eine Parkettierung  $\mathcal{P} = (H_j)_{j \in I} \in \Omega^*$  heißt **selbstaffin**, wenn es eine verallgemeinerte expandierende affine Abbildung  $\varphi : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d$  gibt, so daß gilt

1.  $\varphi(\mathcal{P}) := (\varphi(H_j))_{j \in I}$  ist eine Vergrößerung von  $\mathcal{P}$ .
2. Für zwei Bausteine  $H, H' \in \mathcal{P}$  mit  $H' = H + x$  für gewisses  $x \in \mathbb{Z}^d$  existiert ein  $x' \in \mathbb{Z}^d$  derart, daß

$$\mathcal{P}_{|\varphi(H')} = \sigma^{x'}(\mathcal{P}_{|\varphi(H)}) \quad (4.2)$$

gilt. Das heißt, die zu  $\varphi(H')$  und  $\varphi(H)$  gehörenden zerlegenden Teilparkettierungen in  $\mathcal{P}$  können durch Verschiebung auf dem Gitter  $\mathbb{Z}^d$  ineinander überführt werden.

Ist die Abbildung  $\varphi$  eine verallgemeinerte expandierende Ähnlichkeitsabbildung, so wird die Parkettierung  $\mathcal{P}$  **selbstähnlich** genannt.

**Bemerkung 4.6** 1. Selbstaffine Parkettierungen des kontinuierlichen Raumes  $\mathbb{R}^d$  werden in einer Reihe von Arbeiten unter verschiedenen Gesichtspunkten untersucht. (Dabei werden auch unterschiedliche Begriffe, wie z.B. „Parkettierungen mit Inflation“, „Substitutionsparkettierungen“ oder „selbstähnliche Parkettierungen“, verwendet.)

In Zusammenhang mit der Modellierung quasikristalliner Strukturen in der Physik sind vor allem nichtperiodische selbstähnliche Parkettierungen mit polygonalen Bausteinen von Interesse (siehe z.B. [38], [5], [57]; ein bekanntes Beispiel ist die Penrose-Parkettierung). Andere Autoren untersuchen selbstähnliche Parkettierungen mit fraktalen Bausteinen (siehe z.B. [14]). (Diese sind u.a. in Verbindung mit Markov-Zerlegungen für hyperbolische Automorphismen des Torus von Interesse.) Periodische Parkettierungen mit einem Bausteintyp wurden in [3] klassifiziert.

2. Ist  $\mathcal{P}$  eine selbstaffine Parkettierung mit der verallgemeinerten expandierenden affinen Abbildung  $\varphi$ , so liefert iterative Anwendung von  $\varphi$  eine Folge von Parkettierungen  $\varphi(\mathcal{P}), \varphi^2(\mathcal{P}), \dots, \varphi^n(\mathcal{P}), \dots$ , die sämtlich Vergrößerungen von  $\mathcal{P}$  sind. Daraus folgt insbesondere, daß die verallgemeinerte expandierende affine Abbildung einer selbstaffinen Parkettierung nicht eindeutig bestimmt ist.
3. Die Definition verallgemeinerter expandierender affiner Abbildungen auf der Grundlage linearer affiner Abbildungen stellt keine Einschränkung dar. Ist nämlich  $\mathcal{P}$  eine selbstaffine Parkettierung mit der verallgemeinerten expandierenden Abbildung  $\varphi = (\tilde{\varphi}, \{a_1, \dots, a_k\})$ , wobei  $\tilde{\varphi}$  linear ist, so erfüllt  $\mathcal{P}$  die Bedingungen 1. und 2. in Definition 4.5 auch mit der verallgemeinerten Abbildung  $\varphi' = (\tilde{\varphi} + b, \{a_1 - b, \dots, a_k - b\})$  für jeden Vektor  $b \in \mathbb{Z}^d$ .

**Beispiel 4.7** Wir untersuchen die Anwendbarkeit des Begriffes der Selbstähnlichkeit auf die in Beispiel 4.2 betrachteten Parkettierungen.

Wir betrachten die expandierende lineare Ähnlichkeitsabbildung  $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die durch

$$\tilde{\varphi}(x) := 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x \quad (x \in \mathbb{R}^2)$$

definiert wird. Diese Abbildung setzt sich aus einer Drehung um den Winkel  $\frac{\pi}{2}$  und einer Streckung mit dem Faktor 2 zusammen. (Die Expansionskonstante von  $\tilde{\varphi}$  ist  $\lambda = 2i$ .) Als Nebenklassenrepräsentantensystem wählen wir  $\{0, -e_1, -e_2, -e_1 - e_2\}$ .

Zur Konstruktion der Parkettierung  $\mathcal{P}_1$  wurde auf folgende Weise vorgegangen:

**Schritt 1** Auf den Baustein  $H \equiv H_1 = G_1^{(1)} + (-1, -1)$  (siehe Abbildung 4.2) wird die verallgemeinerte expandierende Ähnlichkeitsabbildung  $\varphi$  angewendet: das Bild  $\varphi(H)$  wird gemäß Abbildung 4.2 in Bausteine zur Proto-Baustein-Menge  $G_0^{(1)}$  zerlegt; man erhält eine endliche Bausteinanordnung  $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ ;

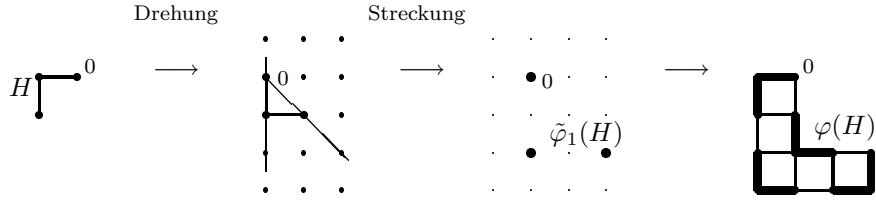


Abbildung 4.2: Die Wirkung der verallgemeinerten expandierenden Ähnlichkeitsabbildung  $\varphi$  auf einen Baustein  $H \in \mathcal{P}_1$ .

**Schritt 2** Die Abbildung  $\varphi$  wird auf jeden Baustein  $H_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) angewendet und das Bild  $\varphi(H_i)$  „analog“ in Bausteine aus  $\mathcal{G}_0^{(1)}$  zerlegt; wir erhalten insgesamt die endliche Bausteinanordnung  $\{H_1, \dots, H_{16}\}$  (siehe auch Abbildung 4.3);

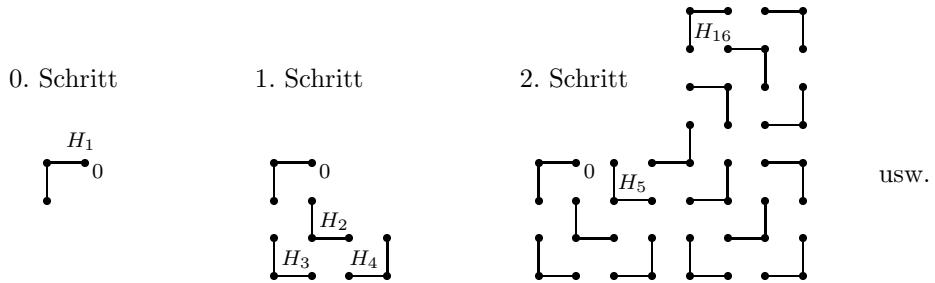


Abbildung 4.3: Die iterative Konstruktion der selbstähnlichen Parkettierung  $\mathcal{P}_1$  aus dem „erzeugenden“ Baustein  $H_1$ .

...

Die sukzessive Wiederholung des Verfahrens führt auf immer größer werdende Bausteinanordnungen  $\{H_1, \dots, H_{4^k}\}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), die im Limes  $k \rightarrow \infty$  eine Parkettierung von  $\mathbb{Z}^2$  liefern.

Nach Konstruktion von  $\mathcal{P}_1$  ist diese Parkettierung selbstähnlich mit der expandierenden Ähnlichkeitsabbildung  $\varphi$ , und es gilt  $\varphi(\mathcal{P}_1) = \mathcal{P}_2$ .

Selbstaffinität kann als Verkleinerung der Skala, bezüglich der die Parkettierung betrachtet wird („Mikroskop“), interpretiert werden: jeder Baustein besteht (nach Anwendung einer expandierenden affinen Abbildung) aus einer gewissen Anzahl kleinerer Kopien der Bausteine dieser Parkettierung. (In diesem Sinne kann man von einer „Substruktur“ der Parkettierung sprechen.)

**Bemerkung 4.8** Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen selbstaffinen Parkettierungen und den sogenannten Substitutionen. (In vielen Arbeiten zur Thematik selbstaffiner Parkettierungen (siehe z.B. [50],[57]) dienen Substitutionen als Ausgangspunkt der Überlegungen.)

Es sei  $S$  ein endliches Alphabet,  $S^* = \bigcup_{n \geq 1} S^n$  die Menge der endlichen Wörter und  $S^{\mathbb{N}}$  die Menge der unendlichen Wörter mit Buchstaben in  $S$ . Eine **Substitution** ist eine Abbildung  $\zeta : S \rightarrow S^*$ . (Durch „Aneinanderreihung“ wird  $\zeta$  zu einer Abbildung auf  $S^{\mathbb{N}}$  fortgesetzt.) Bezeichnet  $|w|$  die Länge eines Wortes  $w \in S^*$ , so folgt aus  $|\zeta^n(\alpha)| \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ , für ein  $\alpha \in S$  die Existenz von  $k \geq 1$  und  $u = u_1 u_2 \dots \in S^{\mathbb{N}}$  so, daß  $\zeta^k(u) = u$  gilt (vgl. [49]). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann die Gültigkeit von  $\zeta(u) = u$  angenommen werden.

Die Anzahl der Buchstaben  $i \in S$ , die in dem Wort  $\zeta(j)$  ( $j \in S$ ) auftreten, bildet den Eintrag der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte in einer Matrix (die Substitutionsmatrix), mit deren Hilfe Aussagen über die Struktur des Fixpunktes  $u$  der Substitution  $\zeta$  getroffen werden können.

Eine selbstaffine Parkettierung  $\mathcal{P}$  des  $\mathbb{Z}^d$  mit der verallgemeinerten expandierenden affinen Abbildung  $\varphi$  kann als Analogon zum Fixpunkt  $u$  der Substitution  $\zeta$  aufgefaßt werden. Die nach Definition 4.5 existierende Zerlegung des Bildes  $\varphi(H)$  (für jedes  $H \in \mathcal{P}$ ) in Bausteine der Parkettierung  $\mathcal{P}$  definiert auch für jede Verschiebung  $\sigma^z H$  ( $z \in \mathbb{Z}^d$ ) eines Bausteins  $H \in \mathcal{P}$  eine „Zerlegungsvorschrift“, die die Rolle der Substitution  $\zeta$  übernimmt.

**Definition 4.9** Sei  $\mathcal{P} \in \Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0)$  eine selbstaffine Parkettierung mit den Proto-Bausteinen  $G_{i_1}, \dots, G_{i_m} \in \mathcal{G}_0$  und der verallgemeinerten expandierenden affinen Abbildung  $\varphi$ . Die  $m \times m$ -Matrix  $M_{\mathcal{P}} \equiv M = (M_{rs})$ , deren Eintrag  $M_{rs}$  gleich der Anzahl der Bausteine vom Typ  $G_{i_r}$  in der zerlegenden Teilparkettierung  $\mathcal{P}_{|\varphi(H)}$  eines Bausteins  $H \in \mathcal{P}$  vom Typ  $G_{i_s}$  ist ( $r, s \in \{1, \dots, m\}$ ), heißt die **Unterteilungsmatrix** von  $\mathcal{P}$ .

**Beispiel 4.10** Die in Beispiel 4.7 betrachtete selbstähnliche Parkettierung  $\mathcal{P}_1$  mit den Proto-Bausteinen  $G_1^{(1)}, \dots, G_4^{(1)}$  besitzt die Unterteilungsmatrix  $M = M_{\mathcal{P}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Die Einträge der Matrix  $M^2$  sind sämtlich positiv. Diese Matrixeigenschaft korrespondiert zu der Eigenschaft der Parkettierung  $\mathcal{P}_1$ , daß die Teilparkettierung  $\mathcal{P}_{1|\varphi^2(H)}$  für jeden Baustein  $H \in \mathcal{P}_1$  jeden der 4 Baustintypen wenigstens einmal enthält.

**Bemerkung 4.11** Nach Definition 4.5 enthält die Unterteilungsmatrix  $M_{\mathcal{P}}$  einer selbstaffinen Parkettierung keine Zeile oder Spalte, deren Einträge sämtlich gleich 0 sind.

Mit Hilfe von Eigenschaften der Unterteilungsmatrix einer selbstaffinen Parkettierung lassen sich Aussagen über die globale Struktur der Parkettierung treffen (vgl. auch Beispiel 4.10). Eine solche globale Struktureigenschaft ist neben der Periodizität auch die Fast-Periodizität.

**Definition 4.12** Eine Parkettierung  $\mathcal{P}$  des  $\mathbb{Z}^d$  heißt **fast-periodisch**, wenn für jede Teilparkettierung  $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$  eine reelle Zahl  $R = R(\mathcal{M}) > 0$  existiert, so daß jede Kugel  $B(R, y) := \{z \in \mathbb{Z}^d : \|z - y\| \leq R\}$  ( $y \in \mathbb{Z}^d$ ) eine Verschiebung der Teilparkettierung  $\mathcal{M}$  enthält.

**Bemerkung 4.13** Der Begriff Fast-Periodizität von Parkettierungen wird in [53] benutzt. Des Weiteren werden auch andere Bezeichnungen verwendet: Parkettierungen mit **lokaler Isomorphie** (vgl. [60], [25], [51]), **rekurrente** Parkettierung (in [5]) oder **repetitive** Parkettierung (in [57]).

**Satz 4.14** Eine selbstaffine Parkettierung  $\mathcal{P}$  mit der verallgemeinerten expandierenden affinen Abbildung  $\varphi$  und den Proto-Bausteinen  $G_{i_1}, \dots, G_{i_m}$  ist genau dann fast-periodisch, wenn ihre Unterteilungsmatrix  $M = M_{\mathcal{P}}$  primitiv ist.

**Beweis:** 1. Sei  $M$  eine primitive Matrix, d. h. es existiert eine natürliche Zahl  $n$  derart, daß alle Einträge in  $M^n$  positiv sind.

Für eine gegebene Teilparkettierung  $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$  gibt es eine natürliche Zahl  $k = k(\mathcal{M})$  (deren Mindestgröße hängt von der „Ausdehnung“ der Teilparkettierung  $\mathcal{M}$  ab) und einen Baustein  $\tilde{H} = G_j + z \in \mathcal{P}$  derart, daß  $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}_{|\varphi^k(\tilde{H})}$ .

Wegen  $M^n > 0$  enthält die Teilparkettierung  $\mathcal{P}_{|\varphi^{k+n}(H)}$  für jeden Baustein  $H \in \mathcal{P}$  eine Verschiebung von  $\mathcal{M}$ .

Aus der Endlichkeit der Proto-Baustein-Menge folgt die gleichmäßige Beschränktheit der Ausdehnung der Bausteine in  $\mathcal{P}$ . Folglich existiert eine reelle Zahl  $R$  derart, daß jede Teilparkettierung  $\mathcal{P}_{|\varphi^{k+n}(H)}$  in einer Kugel mit dem Radius  $R$  enthalten ist. Da jeder Punkt  $y \in \mathbb{Z}^d$  von einer solchen Teilparkettierung überdeckt wird ( $\varphi^{k+n}\mathcal{P}$  ist eine Vergrößerung von  $\mathcal{P}$ ), enthält jede Kugel  $B(2R, y)$  in  $\mathcal{P}$  eine Verschiebung von  $\mathcal{M}$ . Mithin ist  $\mathcal{P}$  fast-periodisch.

2. Sei  $\mathcal{P}$  fast-periodisch. Wir nehmen an, daß  $M$  *nicht* primitiv ist.

Aus der Endlichkeit der Proto-Baustein-Menge folgt die Existenz einer (endlichen) Teilparkettierung  $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$ , die alle Bausteintypen enthält. Sei  $R > 0$  eine fest gewählte Zahl, für die jede Kugel  $B(R, y)$  ( $y \in \mathbb{Z}^d$ ) eine Verschiebung von  $\mathcal{M}$  enthält. Da  $\varphi$  expansiv ist, gibt es eine Zahl  $n_0 \in \mathbb{N}$  derart, daß  $\varphi^n(H)$  für jedes  $H \in \mathcal{P}$  und jedes  $n \geq n_0$  eine Kugel  $B(R, y)$  ( $y \in \mathbb{Z}^2$ ) enthält.

Nach obiger Annahme gibt es für jedes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$  Indizes  $r, s \in \{1, \dots, m\}$  so, daß  $M_{rs}^n = 0$  ist. D. h. für jeden Baustein  $H_s = \sigma^z G_{js} \in \mathcal{P}$  enthält die Teilparkettierung  $\mathcal{P}_{|\varphi^n(H_s)}$  keinen Baustein vom Typ  $G_{jr}$ . Das bedeutet aber insbesondere, daß in der Kugel  $B(R, y) \subset \varphi^n(H_s)$  keine Verschiebung von  $\mathcal{M}$  vorkommt, im Widerspruch zur Fastperiodizität von  $\mathcal{P}$ . Mithin ist  $M = M_{\mathcal{P}}$  eine primitive Matrix. ■

**Bemerkung 4.15** 1. Es existieren selbstaffine Parkettierungen  $\mathcal{P}$ , deren Unterteilungsmatrix  $M_{\mathcal{P}}$  nicht primitiv ist. Ein Beispiel ist die in Abbildung 4.4 dargestellte Parkettierung  $\mathcal{P}$  zur Proto-Baustein-Menge  $\mathcal{G}_0 = \{\{0, e_1\}, \{0, e_2\}\}$ . Die zugrundeliegende gewöhnliche expandierende Ähnlichkeitsabbildung  $\tilde{\varphi}$  ist zusammengesetzt aus einer Drehung um den Winkel  $(-\frac{\pi}{2})$  um den Nullpunkt und einer Streckung mit dem Faktor  $\lambda = 2$ . Als Nebenklassenrepräsentanten- system wird  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = e_1$ ,  $a_3 = e_2$  und  $a_4 = e_1 + e_2$  verwendet. Die Unterteilungsmatrix von  $\mathcal{P}$  ist  $M_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

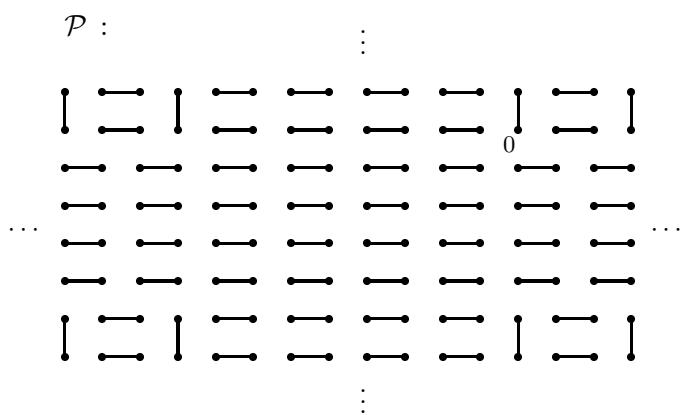


Abbildung 4.4: Eine selbstaffine Parkettierung, die *nicht* fast-periodisch ist.

2. In der Literatur zu Parkettierungen des kontinuierlichen Raumes  $\mathbb{R}^d$  (vgl. zum Beispiel [60]) wird von einigen Autoren die Eigenschaft der Fast-Periodizität bereits bei der Definition der Selbstaffinität gefordert.

**Bemerkung 4.16** Die Anwendung des Theorems von Perron-Frobenius (vgl. z. B. [21]) auf eine primitive Matrix  $M$  liefert die Existenz eines eindeutig bestimmten positiven Eigenwertes  $\theta$  maximalen Betrages, welcher auch Perron-Eigenwert von  $M$  genannt wird. Weiter existieren strikt positive rechte und linke Eigenvektoren zu  $\theta$ , die mit  $u = (u_i)_{i=1}^m$  und  $v = (v_i)_{i=1}^m$  bezeichnet werden, so daß gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta^{-n} M^n = u \cdot v \quad \text{und} \quad v \cdot u = 1.$$

(Die Vektoren  $u, v$  werden rechter bzw. linker Perron-Eigenvektor von  $M$  genannt.)

Die spezielle Struktur der Unterteilungsmatrix einer selbstaffinen Parkettierung erlaubt die folgende Aussage über den Zusammenhang zwischen den Perron-Eigenvektoren und den Kardinalitäten der auftretenden Bausteine. Dieses Resultat bildet die Grundlage für die Eigenschaft fast-periodischer selbstaffiner Parkettierungen, jede ihrer Teilkettierungen mit einer gleichmäßigen positiven „Frequenz“ zu enthalten (siehe Satz 4.30).

**Folgerung 4.17** Es sei  $\mathcal{P} \in \Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0)$  eine fast-periodische selbstaffine Parkettierung mit der verallgemeinerten expandierenden affinen Abbildung  $\varphi = (\tilde{\varphi}, \{a_1, \dots, a_k\})$ . Dann ist  $|\det \tilde{\varphi}|$  der Perron-Eigenwert der Unterteilungsmatrix  $M \equiv M_{\mathcal{P}}$  von  $\mathcal{P}$ . Als linken Perron-Eigenvektor kann man  $v = (|G_{i_r}|)_{r=1}^m$  wählen. Es existieren reelle Zahlen  $u_r$  ( $r = 1, \dots, m$ ) derart, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\det \tilde{\varphi}|^{-n} (M^n)_{pq} = u_q |G_{j_p}| \quad (p, q \in \{1, \dots, m\}) \quad (4.3)$$

$$\sum_{r=1}^m u_r |G_{j_r}| = 1. \quad (4.4)$$

Zum Abschluß dieses in die Problematik selbstaffiner Parkettierungen auf dem Gitter  $\mathbb{Z}^d$  einführenden Abschnittes folgen einige Überlegungen zur Konstruktion solcher Parkettierungen. In der Theorie der Parkettierungen des kontinuierlichen Raumes  $\mathbb{R}^d$  haben sich die sogenannten replizierenden Bausteine als ein wichtiges Mittel zur Konstruktion selbstaffiner Parkettierungen erwiesen.

**Definition 4.18** (siehe [22],[14],[2] für replizierende Bausteine des  $\mathbb{R}^d$ ) Eine endliche Teilmenge  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z}^d$  heißt  **$k$ -replizierender Baustein** (auf dem Gitter  $\mathbb{Z}^d$ ), falls zu  $A$  kongruente disjunkte Teilmengen  $A_1 = A, A_2, \dots, A_k \subset \mathbb{Z}^d$  derart existieren, daß  $\varphi(A) = A_1 \cup \dots \cup A_k$  gilt, wobei  $\varphi = (\tilde{\varphi}, \{a_1, \dots, a_k\})$  eine verallgemeinerte expandierende affine Abbildung des  $\mathbb{Z}^d$  auf sich ist.

**Bemerkung 4.19** Ausgehend von einem  $k$ -replizierenden Baustein  $A$  erhält man eine Parkettierung durch fortgesetzte Zerlegung der Mengen  $\varphi(A), \varphi^2(A), \dots, \varphi^n(A), \dots$  in kongruente Mengen zu  $A$ . (Die Forderungen an die Abbildung  $\varphi$  sichern gerade  $\varphi^n(A) \uparrow \mathbb{Z}^d$ .) Nach Konstruktion ist die entstehende Parkettierung selbstaffin und besitzt eine primitive Unterteilungsmatrix.

**Beispiel 4.20** Die in Beispiel 4.7 betrachtete selbstähnliche Parkettierung  $\mathcal{P}_1$  wird durch den 4-replizierenden Baustein  $A := \sigma^{(-1,-1)}G_1^{(1)}$  erzeugt. Es gilt nämlich  $\varphi(A) = \bigcup_{i=1}^4 A_i$ , wobei die Mengen  $A_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ) durch Drehungen um geeignete Vielfache von  $\pi/2$  und zusätzliche Verschiebungen aus  $A$  gebildet werden.

**Eigenschaft 4.21** Für jede natürliche Zahl  $k > 1$  existiert ein  $k$ -replizierender Baustein auf  $\mathbb{Z}^d$ .

**Beweis:** Es sei  $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine lineare expandierende affine Abbildung mit  $|\det \tilde{\varphi}| = k$ , die das Gitter  $\mathbb{Z}^d$  in sich abbildet.

Sei weiter  $\{a_1, \dots, a_k\} \subset \mathbb{Z}^d$  mit  $a_1 = 0$  ein vollständiges Nebenklassenrepräsentantensystem der Untergruppe  $\tilde{\varphi}(\mathbb{Z}^d)$  in  $\mathbb{Z}^d$ . Für die Menge  $A_1 := \{a_1, \dots, a_k\}$  und die verallgemeinerte expandierende affine Abbildung  $\varphi := (\tilde{\varphi}, \{a_1, \dots, a_k\})$  ist offenbar

$$\varphi(A_1) = \bigcup_{i=1}^k A_i$$

mit  $A_i := \sigma^{\tilde{\varphi}(a_i)} A$  ( $i = 1, \dots, k$ ) richtig.

Da  $\{a_1, \dots, a_k\}$  ein Nebenklassenrepräsentantensystem von  $\tilde{\varphi}(\mathbb{Z}^d)$  ist, sind die zu  $A$  kongruenten Mengen  $A_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) paarweise disjunkt. Mithin ist  $A$  ein  $k$ -replizierender Baustein auf dem Gitter  $\mathbb{Z}^d$ .  $\blacksquare$

**Bemerkung 4.22** 1. Ist  $\varphi = (\tilde{\varphi}, \{a_1, \dots, a_k\})$  mit  $a_1 = 0$  eine verallgemeinerte expandierende affine Abbildung des  $\mathbb{Z}^d$  auf sich, so ist  $A := \{a_1, \dots, a_k\}$  der eindeutig bestimmte  $k$ -replizierende Baustein derart, daß

$$\varphi(A) = \bigcup_{i=1}^k A_i \quad \text{mit} \quad A_i = \sigma^{\tilde{\varphi}(a_i)} A$$

gilt. Ausgehend von dieser Eigenschaft kann eine Vielzahl (periodischer) selbstaffiner Parkettierungen konstruiert werden, die sich als diskrete Entsprechungen bekannter Parkettierungen des  $\mathbb{R}^d$  interpretieren lassen. Dabei kann der Baustein  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  stets als zusammenhängende Menge des Gitters gewählt werden.

2. Jeder von dem Ein-Punkt-Baustein  $G_0 := \{0\}$  verschiedene Proto-Baustein  $G_j$  eines  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersystems  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m)$  ist replizierender Baustein mit einer geeignet gewählten verallgemeinerten expandierenden affinen Abbildung  $\varphi = (\tilde{\varphi}, \{a_1, \dots, a_k\})$ : besitzt  $G_j$  die Ausdehnung  $\underline{l}(j) = (l_1(j), \dots, l_d(j)) \neq (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$ , so gilt mit

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} l_1(j) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & l_d(j) \end{pmatrix} x \quad (x \in \mathbb{R}^d)$$

und  $\{a_1, \dots, a_k\} := G_j \subset \mathbb{Z}^d$  gerade  $\varphi(G_j) = \bigcup_{i=1}^L \sigma^{a_i} G_j$  mit  $L := \prod_{i=1}^d l_i(j)$ .

Mithin enthält jedes nichttriviale  $\mathbb{Z}^d$ -Quadersystem  $\Omega^*$  selbstaffine Parkettierungen.

3. Wie die Überlegungen in Beispiel 4.20 zeigen, können replizierende Bausteine auch zur Konstruktion nichtperiodischer selbstaffiner Parkettierungen verwendet werden. Für zwei-dimensionale Quadersysteme ist folgende Aussage richtig (siehe auch Abbildung 4.5):

Besitzt  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \{\underline{l}(j)\}_{j=1}^m)$  einen Proto-Baustein  $G_j$  der Ausdehnung  $\underline{l}(j) = (l_1(j), l_2(j))$  mit  $l_2(j)/l_1(j) \in \mathbb{N}$  und ist  $\underline{l}'(j) := (l_2(j), l_1(j))$  die Ausdehnung eines Proto-Bausteins  $G'_j \neq G_j$ , so enthält  $\Omega^*$  nichtperiodische selbstaffine Parkettierungen.

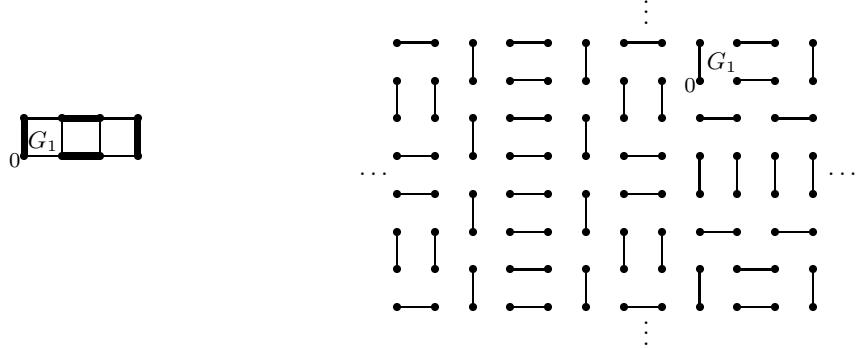


Abbildung 4.5: Der Baustein  $G_1$  des Quadersystems  $\Omega^* = (\mathbb{Z}^2, \{(1, 2), (2, 1)\})$  ist 4-replizierender Baustein mit der expandierenden Ähnlichkeitsabbildung  $\tilde{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}x$  ( $x \in \mathbb{R}^2$ ) und  $\{a_1, \dots, a_4\} = \{0, e_1, e_2, e_1 + e_2\}$ . Dargestellt sind die Zerlegung von  $\varphi(G_1)$  in zu  $G_1$  kongruente Mengen, die Verschiebungen der zwei Proto-Bausteine von  $\Omega^*$  sind, und ein Ausschnitt der von  $\varphi^n(G_1)$  ( $n \rightarrow \infty$ ) erzeugten selbstähnlichen Parkettierung.

## 4.2 Zur Dynamik des von einer fast-periodischen selbstaffinen Parkettierung erzeugten Parkettsystems

**Definition 4.23** Es sei  $\mathcal{P} \in \Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0)$  eine selbstaffine Parkettierung mit der verallgemeinerten expandierenden affinen Abbildung  $\varphi$ . Die Familie

$$\Omega_{\mathcal{P}}^* := \overline{\{\sigma^z \mathcal{P} \mid z \in \mathbb{Z}^d\}} \quad (4.5)$$

aller Parkettierungen  $\mathcal{R}$  des  $\mathbb{Z}^d$  mit der Eigenschaft, daß jede Teilparkettierung von  $\mathcal{R}$  Verschiebung einer Teilparkettierung von  $\mathcal{P}$  ist, heißt **das von  $\mathcal{P}$  erzeugte Parkettsystem in  $\Omega^*$** .

**Bemerkung 4.24** Das Parkettsystem  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$  ist kompakt in der Spurtopologie und invariant unter der Wirkung der Gruppe  $(\mathbb{Z}^d, +)$  vermöge des Shifts  $(\sigma^a)_{a \in \mathbb{Z}^d}$ . Das heißt,  $(\Omega_{\mathcal{P}}^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d})$  ist ein topologisches dynamisches System.

Als Metrik auf  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$  wird die in Teil 3 der Bemerkung 1.36 eingeführte Quader-Metrik  $d_{Q^0}(\cdot, \cdot)$  mit beliebigem, aber fest vorgegebenem Quader  $Q^0 \subset \mathbb{Z}^d$  verwendet.

**Bemerkung 4.25** Die Untersuchung der von Parkettierungen des  $\mathbb{R}^d$  erzeugten dynamischen Systeme als Wirkungen verschiedener Bewegungsgruppen wurde von C.Radin ([51], [50]) und E.A.Robinson, Jr. ([53]) initiiert.

**Satz 4.26** Das von einer Parkettierung  $\mathcal{P} \in \Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0)$  erzeugte Parkettsystem  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$  ist genau dann minimal, wenn  $\mathcal{P}$  fast-periodisch ist.

**Beweis:**

1. Zunächst wird gezeigt, daß aus der Annahme,  $\mathcal{P}$  sei eine fast-periodische Parkettierung, die Minimalität von  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$  folgt. Man beachte, daß  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$  genau dann minimal ist, wenn jeder Orbit  $\text{Orb}_{\sigma}(\mathcal{R})$  einer Parkettierung  $\mathcal{R} \in \Omega_{\mathcal{P}}^*$  dicht in  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$  ist.

Es seien zwei Parkettierungen  $\mathcal{R}, \mathcal{S} \in \Omega_{\mathcal{P}}^*$  sowie eine reelle Zahl  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben.

Gemäß Definition der Metrik  $d_{Q^0}$  auf  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$  läßt sich eine reelle Zahl  $R(\varepsilon)$  derart finden, daß für die von der Kugel  $B(R(\varepsilon), 0)$  erzeugte Teilparkettierung  $\mathcal{A}_1$  in  $\mathcal{S}$  gilt

$$\text{diam}(C(\mathcal{A}_1) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*) := \inf (d_{Q^0}(\mathcal{S}', \mathcal{R}') \mid \mathcal{R}', \mathcal{S}' \in C(\mathcal{A}_1) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*) < \varepsilon.$$

Nach (4.5) gibt es ein  $x \in \mathbb{Z}^d$  so, daß  $\sigma^x \mathcal{A}_1$  eine Teilparkettierung in  $\mathcal{P}$  ist. Aus der Fast-Periodizität von  $\mathcal{P}$  folgt die Existenz einer Zahl  $R(\mathcal{A}_1)$  derart, daß jede Kugel  $B(R(\mathcal{A}_1), y)$  ( $y \in \mathbb{Z}^d$ ) in  $\mathcal{P}$  eine Verschiebung von  $\mathcal{A}_1$  enthält.

Das heißt nach Definition von  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$  als Abschluß des Orbits von  $\mathcal{P}$  unter der Shiftwirkung gerade, daß speziell die Kugel  $B(R(\mathcal{A}_1), 0)$  mit dem Radius  $R(\mathcal{A}_1)$  um den Nullpunkt in  $\mathcal{R}$  eine Verschiebung von  $\mathcal{A}_1$  enthält:  $\sigma^{x'} \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{R}$  für ein  $x' \in \mathbb{Z}^d$ . Folglich gilt  $\sigma^{-x'} \mathcal{R} \in C(\mathcal{A}_1) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*$ , also nach Konstruktion von  $\mathcal{A}_1$  auch  $d_{Q^0}(\mathcal{S}, \sigma^{-x'} \mathcal{R}) < \varepsilon$ . Das heißt,  $\text{Orb}_{\sigma}(\mathcal{R})$  kommt der Parkettierung  $\mathcal{S}$  beliebig nahe.

2. Das Parkettsystem  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$  sei minimal.

Für jede beliebige Teilparkettierung  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{P}$  existiert eine Kugel  $B$  in  $\mathbb{Z}^d$  so, daß  $\mathcal{A}$  in dieser enthalten ist. Wir betrachten die offene Umgebung

$$U := \{\mathcal{R} \in \Omega_{\mathcal{P}}^* \mid \mathcal{R} \text{ enthält in } B \text{ eine Verschiebung } \sigma^x \mathcal{A} (x \in \mathbb{Z}^d)\}$$

von  $\mathcal{P}$ .

Ist  $\mathcal{S} \in \Omega_{\mathcal{P}}^*$  eine beliebige Parkettierung, so ist  $\text{Orb}_{\sigma}(\mathcal{S})$  wegen der vorausgesetzten Minimalität von  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$  dicht in  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$ . Insbesondere gilt also  $\sigma^{-x} \mathcal{S} \in U$  für gewisses  $x \in \mathbb{Z}^d$ . Folglich besitzt  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$  die Eigenschaft

$$\Omega_{\mathcal{P}}^* \subset \bigcup_{a \in \mathbb{Z}^2} \sigma^{-a} U.$$

Wegen der Kompaktheit von  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$  kann eine endliche Teilüberdeckung  $\{\sigma^{-a_i} U\}_{i \in I}$  ( $|I| < \infty$ ) ausgewählt werden. Alle Elemente der Menge  $\sigma^{-a_i} U$  ( $i \in I$ ) enthalten innerhalb von  $B - a_i$  eine Verschiebung von  $\mathcal{A}$ .

Ist  $B'$  eine Kugel in  $\mathbb{Z}^d$ , die die Menge  $\bigcup_{i \in I} (B - a_i)$  enthält, so gilt für deren Radius  $R(B')$ : jede Kugel  $B(R(B'), y)$  ( $y \in \mathbb{Z}^d$ ) enthält in  $\mathcal{P} \in \Omega_{\mathcal{P}}^*$  eine Verschiebung der Teilparkettierung  $\mathcal{A}$ . Damit ist die Fast-Periodizität von  $\mathcal{P}$  gezeigt.  $\blacksquare$

**Lemma 4.27** Es sei eine Parkettierung  $\mathcal{P} \in \Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0)$  gegeben. Dann existiert für jedes  $\varepsilon > 0$  eine endliche Familie disjunkter Basismengen  $C(\mathcal{A}_1) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*, \dots, C(\mathcal{A}_k) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*$ , deren Durchmesser kleiner als  $\varepsilon$  ist, mit der Eigenschaft

$$\Omega_{\mathcal{P}}^* = \bigcup_{l=1}^k (C(\mathcal{A}_l) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*). \quad (4.6)$$

Der **Beweis** des Lemmas benutzt die Endlichkeit der Menge der von einer endlichen Teilmenge des Gitters erzeugten Teilparkettierungen in  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$ .

**Bezeichnung 4.28** 1. Ist  $A \subset \mathbb{Z}^d$  eine nichtleere endliche Menge, so bezeichnet

$$\partial A := \{z \in A \mid \exists y \in \{z + e_i, z - e_i \mid i = 1, \dots, d\} \text{ mit } y \notin A\}$$

den **Rand** von  $A$ .

2. Für jede nichtleere endliche Teilmenge  $A \subset \mathbb{Z}^d$  und jede beliebige natürliche Zahl  $r \in \mathbb{N}$  sei

$$A^{+r} := \{x \in \mathbb{Z}^2 \mid \text{dist}(x, A) \leq r\}, \quad A^{-r} := \{x \in A \mid \text{dist}(x, \partial A) \geq r\},$$

wobei  $\text{dist}(x, A) := \min_{y \in A} \|x - y\|$  den Abstand eines Punktes  $x \in \mathbb{Z}^d$  zur endlichen Menge  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z}^d$  bezeichnet.

3. Sei  $A \subset \mathbb{Z}^d$  eine nichtleere Teilmenge des Gitters sowie  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$  eine beliebige Teilparkettierung von  $\mathcal{P} \in \Omega^*$ . Das Symbol  $L_{\mathcal{A}}(A)$  bezeichnet die Anzahl der Teilparkettierungen  $\sigma^z \mathcal{A}$  ( $z \in \mathbb{Z}^d$ ) in  $\mathcal{P}$ , die in  $A$  enthalten sind (siehe Abbildung 4.6).

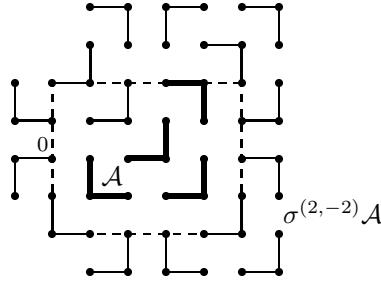


Abbildung 4.6: Für die Menge  $A := \{x \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 5, -2 \leq x_2 \leq 2\}$  und die Teilparkettierung  $\mathcal{A} := \mathcal{P}_{1|\varphi(H)}$  mit  $H := \sigma^{(0, -2)} G_2^{(1)}$  der in Abbildung 4.1 dargestellten Parkettierung  $\mathcal{P}_1$  gilt  $L_{\mathcal{A}}(A) = 1$ . Die Verschiebung  $\sigma^{(2, -2)} \mathcal{A}$  schneidet die Menge  $A$ , ist aber nicht in ihr enthalten.

**Eigenschaft 4.29** Für jede endliche Menge  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z}^d$  und jede Teilparkettierung  $\mathcal{A}$  einer Parkettierung  $\mathcal{P}$  ist  $L_{\mathcal{A}}(A)$  offenbar durch die Anzahl der in  $A$  enthaltenen Bausteine in  $\mathcal{P}$  nach oben beschränkt. Bezeichnet  $V_{\min} := \min\{|G| : G \in \mathcal{P}\}$  die kleinste Kardinalität aller Bausteine in  $\mathcal{P}$ , so gilt mithin

$$L_{\mathcal{A}}(A) \leq V_{\min}^{-1} \cdot |A|. \quad (4.7)$$

**Satz 4.30** Es sei  $\mathcal{P}$  eine fast-periodische selbstaffine Parkettierung des Gitters  $\mathbb{Z}^d$ . Dann existiert für jede Teilparkettierung  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$  eine Zahl  $c_{\mathcal{A}} > 0$  derart, daß für jede Folge  $\{A_n\}$  nichtleerer endlicher Mengen  $A_n \subset \mathbb{Z}^d$  mit  $|A_n| < |A_{n+1}|$  und der Eigenschaft

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(\partial A_n)^{+r}|}{|A_n|} = 0 \quad (4.8)$$

für jede fest vorgegebene Zahl  $r \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{\mathcal{A}}(A_n)}{|A_n|} = c_{\mathcal{A}}$$

gilt.

**Bemerkung 4.31** 1. Die in Satz 4.30 geforderten Eigenschaften der Mengenfolge  $\{A_n\}$  sind gleichbedeutend mit der Konvergenz der Folge nach unendlich im Sinne von vanHove (siehe [63], [55] und Seite 34 dieser Arbeit). Eine solche Folge  $\{A_n\}$  wird deshalb im folgenden auch als vanHove-Folge bezeichnet.

Speziell ist jede Folge  $\{Q_n\}$  von Würfeln  $Q_n \subset \mathbb{Z}^d$ , deren Kantenlängen nach unendlich streben, eine vanHove-Folge. Darüber hinaus erfüllt für jeden Baustein  $H \in \mathcal{P}$  einer selbstaffinen Parkettierung  $\mathcal{P}$  mit der verallgemeinerten expandierenden affinen Abbildung  $\varphi$  die Folge  $\{\varphi^n H\}$  die Bedingung (4.8).

2. Der Beweis von Satz 4.30 nutzt wesentlich die Primitivität der Unterteilungsmatrix  $M_{\mathcal{P}}$  der fast-periodischen Parkettierung  $\mathcal{P}$  und die durch Anwendung des Theorems von Perron-Frobenius gewonnenen Aussagen in Folgerung 4.17. Die dem Beweis der Existenz gleichmäßiger Frequenzen für Teilparkettierungen in Würfeln in [38] zugrundeliegende Idee überträgt sich unmittelbar auf die hier betrachtete Situation.

**Satz 4.32** Sei  $\mathcal{P} \in \Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0)$  eine fast-periodische selbstaffine Parkettierung mit der verallgemeinerten expandierenden affinen Abbildung  $\varphi$  des  $\mathbb{Z}^d$  auf sich. Dann ist das dynamische System  $(\Omega_{\mathcal{P}}^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d})$  eindeutig ergodisch, d. h., es existiert ein eindeutig bestimmtes shift-invariantes Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$ .

**Beweis:**

- Für das Vorliegen eindeutiger Ergodizität von  $(\Omega_{\mathcal{P}}^*, \sigma^{\mathbb{Z}^d})$  reicht es aus, für jede stetige Funktion  $f$  auf  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$  die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I_{A_n} f)(\mathcal{R}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|A_n|} \sum_{z \in A_n} f(\sigma^{-z} \mathcal{R}) = \text{const.} \quad (4.9)$$

für jede vanHove-Folge  $\{A_n\}$  gleichmäßig in  $\mathcal{R} \in \Omega_{\mathcal{P}}^*$  zu zeigen (vgl. [16] für Wirkungen der Gruppe  $(\mathbb{Z}, +)$ ). Da der Orbit  $\{\sigma^x \mathcal{P} \mid x \in \mathbb{Z}^d\}$  dicht in  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$  ist, genügt es, die Gültigkeit von (4.9) für  $\mathcal{R} = \sigma^x \mathcal{P}$  gleichmäßig in  $x \in \mathbb{Z}^d$  zu zeigen. Wegen  $(I_{A_n} f)(\sigma^x \mathcal{P}) = (I_{A_n - x} f)(\mathcal{P})$  und der Eigenschaft, daß mit  $\{A_n\}$  auch  $\{A_n - x\}$  eine vanHove-Folge bildet, ist nur die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (I_{A_n} f)(\mathcal{P}) \quad (4.10)$$

zu überprüfen.

Die stetige Funktion  $f$  in (4.10) kann durch eine Treppenfunktion approximiert werden. Dazu wird die in Lemma 4.27 beschriebene disjunkte Zerlegung (4.6) in Basismengen  $C(\mathcal{A}_l) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*$ , deren Durchmesser nicht größer als  $\varepsilon$  ist, benutzt. Wir wählen für jedes  $l \in \{1, \dots, k\}$  eine beliebige Parkettierung  $\mathcal{R}_l \in C(\mathcal{A}_l) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*$  aus und definieren die Treppenfunktion

$$f_{\varepsilon}(\mathcal{R}) := \sum_{l=1}^k f(\mathcal{R}_l) \chi_{C(\mathcal{A}_l) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*}(\mathcal{R}) \quad (\mathcal{R} \in \Omega_{\mathcal{P}}^*)$$

auf  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$ , wobei  $\chi_{C(\mathcal{A}_l) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*}$  die charakteristische Funktion zur Menge  $C(\mathcal{A}_l) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*$  bezeichnet. Dann gilt  $f_{\varepsilon} \rightarrow f$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gleichmäßig auf  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$ . Folglich ist es ausreichend, (4.10) für eine charakteristische Funktion einer Basismenge  $C(\mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*$  zu untersuchen.

2. Betrachtet wird das Funktional  $J_n(f) := \sum_{z \in A_n} f(\sigma^{-z} \mathcal{P}) = |A_n| \cdot (I_{A_n} f)(\mathcal{P})$  für die charakteristische Funktion  $f = \chi_{C(\mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*}$ . Nach Definition des Zylinders  $C(\mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*$  gilt

$$J_n(f) = |\{z \in A_n \mid \sigma^z \mathcal{A} \text{ ist eine Teilparkettierung in } \mathcal{P}\}|.$$

Wir bezeichnen alle Teilparkettierungen in  $\mathcal{P}$ , die Verschiebungen von  $\mathcal{A}$  sind, mit  $\mathcal{A}_{\nu} = \sigma^{z_{\nu}} \mathcal{A}$  ( $z_{\nu} \in \mathbb{Z}^d, \nu = 1, 2, \dots$ ). Dann folgt

$$J_n(f) = \left| \bigcup_{\nu} [A_n \cap \{z_{\nu}\}] \right| = \sum_{\nu} |A_n \cap \{z_{\nu}\}|.$$

Mit  $r := \max\{ \|y\| : y \in \bigcup_{G \in \mathcal{A}} G \}$  gilt für jede Teilparkettierung  $\mathcal{A}_{\nu} = \sigma^{z_{\nu}} \mathcal{A} \subset A_n^{-r}$ , daß der Verschiebungsvektor  $z_{\nu}$  zu  $A_n$  gehört. Umgekehrt ist für  $\mathcal{A}_{\nu} = \sigma^{z_{\nu}} \mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^d \setminus A_n^{+r}$  der Vektor  $z_{\nu}$  kein Element von  $A_n$ . Daraus folgt unmittelbar

$$L_{\mathcal{A}}(A_n^{+r}) \geq J_n(f) \geq L_{\mathcal{A}}(A_n^{-r}).$$

Man beachte weiter, daß für jede vanHove-Folge  $\{A_n\}$  die Aussage  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n^{+r}|}{|A_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n^{-r}|}{|A_n|} = 1$  richtig ist und wegen (4.7) auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{\mathcal{A}}(A_n^{+r})}{L_{\mathcal{A}}(A_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{\mathcal{A}}(A_n^{-r})}{L_{\mathcal{A}}(A_n)} = 1$  gilt. Daraus folgt mit  $(I_{A_n} f)(\mathcal{P}) = J_n(f)/|A_n|$  die Existenz des Grenzwertes in (4.10) und damit die Behauptung. ■

**Bemerkung 4.33** Der Beweis der eindeutigen Ergodizität des von einer fast-periodischen selbstaffinen Parkettierung  $\mathcal{T}$  des  $\mathbb{R}^d$  erzeugten Parkettsystems  $\Omega_{\mathcal{T}}^*$  erfolgt analog zu dem für den diskreten Fall vorgestellten. Zu bemerken ist, daß Zylindermengen in  $\Omega_{\mathcal{T}}^*$  durch Angabe einer Teilparkettierung  $\mathcal{A}$  und einer meßbaren Menge  $U \subset \mathbb{R}^d$  charakterisiert sind. (Dabei gibt  $U$  die Menge aller Verschiebungen an, mit denen die Teilparkettierung  $\mathcal{A}$  in Elementen des Zylinders auftritt.) Die Auswertung des Funktionalen  $J_n(f)$  im Beweis macht davon Gebrauch, daß die zugehörige Verschiebungsmenge  $U$  eines Zylinders mit kleinem Durchmesser so gewählt werden kann, daß sie in jeden Baustein der Parkettierung „hineinpaßt“. Eine Charakterisierung des Maßes eines Zylinders als Produkt der „Frequenz“, mit der die Teilparkettierung in  $\mathcal{T}$  auftritt, und des Volumens der Menge  $U$  der Verschiebungen (analog zur Aussage in Folgerung 4.34) ist damit nur für Mengen  $U$  mit dieser Eigenschaft richtig.

**Folgerung 4.34** Bezeichnet  $\mu$  das eindeutig bestimmte shift-invariante Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$ , so ist die Konstante in (4.9) gleich dem Integral der Funktion  $f$  bezüglich  $\mu$ . Unter Beachtung von Bemerkung 4.31 ergibt sich sofort das Maß eines Zylinders  $C(\mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*$ :

$$\mu(C(\mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*) = \lim_{|Q| \rightarrow \infty} \frac{L_{\mathcal{A}}(Q)}{|Q|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{\mathcal{A}}(\varphi^n G)}{|\varphi^n G|}, \quad (4.11)$$

wobei  $Q$  einen  $d$ -dimensionalen Würfel bezeichnet und  $G \in \mathcal{P}$  ein beliebiger Baustein ist.

**Folgerung 4.35** Sei  $\mathcal{P} \in \Omega^*$  eine nichttriviale fast-periodische selbstaffine Parkettierung mit den Proto-Bausteinen  $G_{j_1}, \dots, G_{j_m}$ . Dann sind folgende Aussagen richtig:

1. Es gilt  $0 < c_{\{G_{j_r}\}} \leq |G_{j_r}|^{-1}$  für jedes  $r = 1, \dots, m$ .
2. Für jede reelle Zahl  $\delta > 0$  existiert eine Teilparkettierung  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$  mit der Eigenschaft  $\mu(C(\mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*) < \delta$ .

**Beweis:** 1. Wir betrachten einen beliebigen Baustein  $H \in \mathcal{P}$ . Dieser sei eine Verschiebung des Proto-Bausteines  $G_{j_s}$  ( $s \in \{1, \dots, m\}$ ). Nach Satz 4.30 gilt für jedes  $r \in \{1, \dots, m\}$

$$c_{\{G_{j_r}\}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{\{G_{j_r}\}}(\varphi^n H)}{|\det \tilde{\varphi}|^n \cdot |H|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(M^n)_{rs}}{|\det \tilde{\varphi}|^n \cdot |G_{j_s}|},$$

wobei  $M$  die Unterteilungsmatrix von  $\mathcal{P}$  ist. Mit Folgerung 4.17 erhält man  $c_{\{G_{j_r}\}} = u_r$ . Dabei ist  $u = (u_i)_{i=1}^m$  rechter Perron-Eigenvektor der Matrix  $M$  mit der Normierung  $\sum_{p=1}^m u_p |G_{j_p}| = 1$ . Aus der Normierung von  $u$  folgt unter Berücksichtigung der Positivität aller Komponenten des Vektors die Abschätzung  $u_r \leq |G_{j_r}|^{-1}$ . Man beachte, daß das Gleichheitszeichen genau dann angenommen wird, wenn in der Parkettierung  $\mathcal{P}$  nur ein einziger Proto-Baustein  $G_{j_1}$  auftritt.

2. Nach Aussage 1 des Satzes gilt für jeden Proto-Baustein  $G_{j_r}$ , der in  $\mathcal{P}$  auftritt, die Beziehung

$$0 < \mu(C(\{G_{j_r}\}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*) \leq |G_{j_r}|^{-1}.$$

Aus der Nichttrivialität von  $\mathcal{P}$  folgt insbesondere, daß das Maß jeder Menge  $C(\{G_{j_r}\}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*$  echt kleiner als 1 ist. Mithin ist auch

$$\bar{\mu} := \max_{r=1, \dots, m} \mu(C(\{G_{j_r}\}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*) < 1.$$

Weiter kann man für eine beliebige Teilparkettierung  $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_t\}$  in  $\mathcal{P}$ , wobei  $H_r = \sigma^{z^{(r)}} G_{j_{p(r)}}$  ( $z^{(r)} \in \mathbb{Z}^d$ ,  $p(r) \in \{1, \dots, m\}$ ,  $r = 1, \dots, t$ ) ist, das Maß des Zylinders  $C(\mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*$  gemäß

$$\mu(C(\mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*) \leq \prod_{r=1}^t \mu(C(\{G_{j_{p(r)}}\}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*) \leq \bar{\mu}^t$$

abschätzen.

Ist  $\delta > 0$  gegeben, so gilt für hinreichend großes  $\tilde{t} \in \mathbb{N}$  die Ungleichung  $\bar{\mu}^{\tilde{t}} < \delta$ . Das heißt aber, für jede Teilparkettierung  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{P}$  mit wenigstens  $\tilde{t}$  Bausteinen gilt  $\mu(C(\mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*) < \delta$ . ■

**Beispiel 4.36** Die in Beispiel 4.7 betrachtete selbstähnliche Parkettierung  $\mathcal{P}_1$  besitzt die Unterteilungsmatrix  $M \equiv M_{\mathcal{P}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  mit dem Perron-Eigenwert  $|\det \tilde{\varphi}| = 4$ .

Wählt man  $v = (|G_r^{(1)}|)_{r=1}^4 = (3, 3, 3, 3)$  als linken Perron-Eigenvektor, so erhält man aus der Normierung (4.4) den rechten Perron-Eigenvektor  $u = (u_r)_{r=1}^4 = (\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12})^T$ .

Nach den im Beweis von Folgerung 4.35 gezeigten Zusammenhängen gilt  $c_{\{G_r^{(1)}\}} = u_r$ , das heißt, jeder der 4 Winkelbausteine  $G_r^{(1)}$  ( $r = 1, \dots, 4$ ) tritt in  $\mathcal{P}_1$  mit der Frequenz  $\frac{1}{12}$  auf.

Daraus leitet sich unmittelbar das Maß der Subbasismengen  $C(\{G_i^{(1)}\}) \cap \Omega_{\mathcal{P}_1}^*$  ab:

$$\mu(C(\{G_i^{(1)}\}) \cap \Omega_{\mathcal{P}_1}^*) = \frac{1}{12} \quad (\forall i = 1, \dots, 4).$$

Man beachte in diesem Zusammenhang, daß

$$\bigcup_{i=1}^4 \bigcup_{\substack{G=\sigma^z G_i^{(1)} \\ 0 \in G}} (C(\{G\}) \cap \Omega_{\mathcal{P}_1}^*)$$

eine Zerlegung von  $\Omega_{\mathcal{P}_1}^*$  in 12 disjunkte Zylinder bildet, die sämtlich das Maß  $\frac{1}{12}$  besitzen.

Mischungseigenschaften (maßtheoretischer) dynamischer Systeme besitzen als Invarianten bezüglich maßtheoretischer Isomorphie große Bedeutung für die Klassifizierung dynamischer Systeme. Die Frage nach der Existenz schwach mischender Systeme, die nicht stark mischend sind, ist ein wichtiges Problem der Ergodentheorie, welches lange Zeit ungelöst war. (Siehe z.B. [32] zur Konstruktion maßtheoretischer dynamischer Systeme, die schwach mischend, aber nicht stark mischend sind.)

**Definition 4.37** Die Shift-Wirkung  $\sigma^{\mathbb{Z}^d}$  heißt auf  $(\Omega_{\mathcal{P}}^*, \mu)$  **stark mischend**, wenn für jede Folge  $\{x_n\} \subset \mathbb{Z}^2$  mit  $\|x_n\| \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  und beliebige zwei nichtleere offene Mengen  $U, V$  in  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(U \cap \sigma^{x_n} V) = \mu(U) \cdot \mu(V).$$

**Definition 4.38** (vgl. [65] für Wirkungen der Gruppe  $(\mathbb{Z}, +)$ ) 1. Die  $\mathbb{Z}^d$ -Wirkung des Shifts auf  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$  definiert eine Gruppe unitärer Operatoren  $U_z$  ( $z \in \mathbb{Z}^d$ ) auf dem Raum  $L^2(\Omega_{\mathcal{P}}^*, \mu)$  vermöge der Festlegung  $U_z(f) := f \circ \sigma^{-z}$  ( $f \in L^2(\Omega_{\mathcal{P}}^*, \mu)$ ,  $z \in \mathbb{Z}^d$ ). Ein Vektor  $\alpha \in \mathbb{R}^d$  wird ein **Eigenwert** der  $\mathbb{Z}^d$ -Wirkung  $\sigma$  genannt, wenn eine **Eigenfunktion**  $f \in L^2(\Omega_{\mathcal{P}}^*, \mu)$ ,  $f \not\equiv 0$ , d. h., eine Funktion mit der Eigenschaft

$$U_z f(\mathcal{R}) = \exp(2\pi i \langle z, \alpha \rangle) f(\mathcal{R}) \quad (\forall z \in \mathbb{Z}^d, \forall \mathcal{R} \in \Omega_{\mathcal{P}}^*), \quad (4.12)$$

existiert. (Dabei bezeichnet  $\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^m u_i v_i$  für  $u, v \in \mathbb{R}^d$  das Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^d$ .)

2. Das dynamische System heißt **schwach mischend**, wenn es keine nichtkonstanten Eigenfunktionen besitzt. Äquivalent dazu ist die Eigenschaft, daß jeder Eigenwert  $\alpha \in \mathbb{R}^d$  von  $(\Omega_{\mathcal{P}}^*, \mu, \sigma^{\mathbb{Z}^d})$  ein Element von  $\mathbb{Z}^d$  ist.

**Bezeichnung 4.39** Wir bezeichnen mit

$$\Xi(\mathcal{P}) := \{ z \in \mathbb{Z}^2 : \exists H, H' \in \mathcal{P} \text{ mit } H' = \sigma^z H \} \quad (4.13)$$

die Menge aller Verschiebungsvektoren zwischen Bausteinen des gleichen Typs in  $\mathcal{P}$ .

**Lemma 4.40** Es sei  $\mathcal{A}$  eine beliebige Teilparkettierung der fast-periodischen selbstaffinen Parkettierung  $\mathcal{P} \in \Omega^*$  mit der verallgemeinerten expandierenden affinen Abbildung  $\varphi = (\tilde{\varphi}, \{a_1, \dots, a_k\})$ . Dann existiert für jeden Vektor  $z \in \Xi(\mathcal{P}) \setminus \{0\}$  eine von  $\mathcal{A}$  unabhängige Konstante  $\delta = \delta(z) > 0$  derart, daß für alle natürlichen Zahlen  $n > n(\mathcal{A})$  gilt

$$\mu(C(\mathcal{A}) \cap \sigma^{\tilde{\varphi}^n(z)} C(\mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*) > \delta \mu(C(\mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*). \quad (4.14)$$

**Beweis:** Für jeden Vektor  $z \in \Xi(\mathcal{P}) \setminus \{0\}$  existieren zwei Bausteine  $H_j, H'_j \in \mathcal{P}$  mit  $H'_j = \sigma^z H_j$ . Diese Bausteine mögen Verschiebungen des Proto-Bausteines  $G_j$  sein.

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  so gewählt, daß die von den Teilparkettierungen  $\mathcal{A}$  und  $\sigma^{\tilde{\varphi}^n(z)} \mathcal{A}$  überdeckten Teilmen gen des Gitters  $\mathbb{Z}^d$  disjunkt sind. Dann gilt  $C(\mathcal{A}) \cap \sigma^{\tilde{\varphi}^n(z)} C(\mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^* = C(\mathcal{A} \cup \sigma^{\tilde{\varphi}^n(z)} \mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*$ .

Nach (4.11) ist für jeden Baustein  $G \in \mathcal{P}$

$$\mu(C(\mathcal{A} \cup \sigma^{\tilde{\varphi}^n(z)} \mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{L_{\mathcal{A} \cup \sigma^{\tilde{\varphi}^n(z)} \mathcal{A}}(\varphi^N G)}{|\varphi^N G|}$$

richtig. Gesucht ist eine Abschätzung von  $L_{\mathcal{A} \cup \sigma^{\tilde{\varphi}^n(z)} \mathcal{A}}(\varphi^N G)$  nach unten.

Aus der Selbstaffinität der Parkettierung  $\mathcal{P}$  folgt die Existenz eines Bausteines  $H_i$  vom Typ  $G_i$  in  $\mathcal{P}$  und einer natürlichen Zahl  $k_0$  mit der Eigenschaft, daß  $\mathcal{P}_{|\varphi^{k_0} H_i}$  sowohl den Baustein  $H_j$  als auch den Baustein  $H'_j = \sigma^z H_j$  enthält. Dann sind in  $\mathcal{P}_{|\varphi^{n+k_0} H_i}$  die Teilparkettierungen  $\mathcal{P}_{|\varphi^n H_j}$  und  $\mathcal{P}_{|\varphi^n H'_j} = \sigma^{\tilde{\varphi}^n(z)} \mathcal{P}_{|\varphi^n H_j}$  enthalten (siehe Abbildung 4.7). Das heißt: für jede in  $\mathcal{P}_{|\varphi^n H_j}$  enthaltene Verschiebung  $\mathcal{A}_\nu$  von  $\mathcal{A}$  ist auch  $\sigma^{\tilde{\varphi}^n(z)} \mathcal{A}_\nu$  in  $\mathcal{P}_{|\varphi^{n+k_0} H_i}$  enthalten. Folglich ist  $\mathcal{A}_\nu \cup \sigma^{\tilde{\varphi}^n(z)} \mathcal{A}_\nu \subset \mathcal{P}_{|\varphi^{n+k_0} H_i}$  richtig.

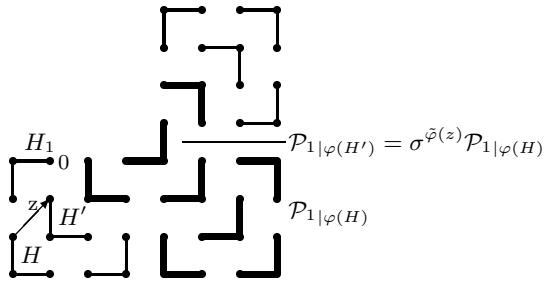


Abbildung 4.7: Die Teilparkettierung  $\mathcal{P}_{1|\varphi(H_1)}$  enthält die Bausteine  $H, H' = \sigma^z H$ . Mithin sind die Teilparkettierungen  $\mathcal{P}_{1|\varphi(H)}$  und  $\mathcal{P}_{1|\varphi(H')}$  auch in  $\mathcal{P}_{1|\varphi^2(H_1)}$  enthalten.

Mithin ist die Anzahl der Verschiebungen der Teilparkettierung  $\mathcal{A} \cup \sigma^{\tilde{\varphi}^n(z)} \mathcal{A}$ , die in  $\mathcal{P}_{|\varphi^{n+k_0} H_i}$  auftreten, mindestens gleich  $L_{\mathcal{A}}(\varphi^n H_j)$ .

Wir betrachten weiter für jeden Baustein  $G \in \mathcal{P}$  vom Typ  $G_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) und jede natürliche Zahl  $N > n + k_0$  die Zerlegung von  $\varphi^N G$  in Bausteine der Vegrößerung  $\varphi^{n+k_0} \mathcal{P}$ . Man beachte, daß die Zahl der Verschiebungen des Bausteines  $\varphi^{n+k_0} H_i$ , die in der Parkettierung  $\varphi^{n+k_0} \mathcal{P}$  innerhalb von  $\varphi^N G$  liegen, gleich

$$L_{\{H_i\}}(\varphi^{N-n-k_0} G) = (M^{N-n-k_0})_{ik} \quad \text{für } G = \sigma^x G_k \quad (k \in \{1, \dots, m\}, x \in \mathbb{Z}^d)$$

ist. Daraus folgt unmittelbar

$$L_{\mathcal{A} \cup \sigma^{\tilde{\varphi}^n(z)} \mathcal{A}}(\varphi^N G) \geq L_{\mathcal{A}}(\varphi^n H_j) \cdot (M^{N-n-k_0})_{ik} \quad (G = \sigma^x G_k, k \in \{1, \dots, m\}, x \in \mathbb{Z}^d).$$

Daraus ergibt sich für das Maß des Zylinders  $C(\mathcal{A} \cup \sigma^{\tilde{\varphi}^n(z)} \mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*$  die Abschätzung:

$$\mu(C(\mathcal{A} \cup \sigma^{\tilde{\varphi}^n(z)} \mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(M^{N-n-k_0})_{ik} L_{\mathcal{A}}(\varphi^n H_j)}{|\det \tilde{\varphi}|^N \cdot |G|} = |\det \tilde{\varphi}|^{-n-k_0} \cdot u_i L_{\mathcal{A}}(\varphi^n H_j),$$

wobei  $u = (u_r)_{r=1}^m$  rechter Perron-Eigenvektor der Unterteilungsmatrix  $M$  von  $\mathcal{P}$  mit der Normierung  $\sum_{r=1}^m |G_r| u_r = 1$  ist. Andererseits ist gemäß (4.11) speziell

$$\mu(C(\mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{\mathcal{A}}(\varphi^n H_j)}{|\det \tilde{\varphi}|^n |H_j|}$$

richtig, woraus sofort

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(C(\mathcal{A} \cup \sigma^{\tilde{\varphi}^n(z)} \mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*)}{\mu(C(\mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*)} \geq u_i \cdot |\det \tilde{\varphi}|^{-k_0} |H_j|$$

folgt. Mit der von  $\mathcal{A}$  unabhängigen reellen Zahl  $\delta := \frac{1}{2} u_i |\det \tilde{\varphi}|^{-k_0} |H_j|$  ist (4.14) für jedes hinreichend große  $n$  gezeigt.  $\blacksquare$

**Beispiel 4.41** Für die in Beispiel 4.7 betrachtete selbstähnliche Parkettierung  $\mathcal{P}_1$  ist  $z = (1, 1)$  ein Element von  $\Xi(\mathcal{P}_1)$ , da für die Bausteine  $H = \sigma^{(-1, -3)} G_2^{(1)}$ ,  $H' = \sigma^{(0, -2)} G_2^{(1)}$  in  $\mathcal{P}_1$  gerade  $H' = \sigma^z H$  gilt. Für den Baustein  $H_1 := \sigma^{(-1, -1)} G_1^{(1)} \in \mathcal{P}_1$  und  $k_0 = 1$  enthält  $\mathcal{P}_{1|_{\varphi^{k_0}(H_1)}}$  die Bausteine  $H, H'$  (siehe auch Abbildung 4.7).

Der Beweis von Lemma 4.40 liefert die Gültigkeit von (4.14) für  $\delta(z) = \frac{1}{2} u_1 |\det \tilde{\varphi}|^{-1} |G_2^{(1)}| = \frac{1}{32}$ . Unter Beachtung der Überlegungen in Beispiel 4.36 und im Beweis von Folgerung 4.35 erhält man die Aussage, daß für jede Teilparkettierung  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{P}_1$ , die aus wenigstens zwei Bausteinen besteht, die Ungleichung  $\mu(C(\mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}_1}^*) < \delta(z)$  gilt.

**Satz 4.42** Ist  $\mathcal{P}$  eine nichttriviale fast-periodische selbstaffine Parkettierung des  $\mathbb{Z}^d$  mit der verallgemeinerten expandierenden affinen Abbildung  $\varphi = (\tilde{\varphi}, \{a_1, \dots, a_k\})$ , so ist die Shift-Wirkung der Gruppe  $(\mathbb{Z}^d, +)$  auf  $(\Omega_{\mathcal{P}}^*, \mu)$  nicht stark mischend.

**Bemerkung 4.43** Die Aussage von Satz 4.42 ist analog zu der für Substitutionssysteme geltenden (vgl. [15]). Die Existenz von Parkettierungen derart, daß das erzeugte Parkettsystem stark mischend ist, stellt auch für die Situation des kontinuierlichen Raumes  $\mathbb{R}^d$  ein offenes Problem dar.

**Beweis von Satz 4.42:** Angenommen, die Shift-Wirkung auf  $(\Omega_{\mathcal{P}}^*, \mu)$  ist stark mischend. Dann gilt für jede Teilparkettierung  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{P}$  und jeden Verschiebungsvektor  $z \in \Xi(\mathcal{P}) \setminus \{0\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C(\mathcal{A}) \cap \sigma^{\tilde{\varphi}^n(z)} C(\mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*) = [\mu(C(\mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*)]^2. \quad (4.15)$$

Nach Lemma 4.40 existiert eine positive Konstante  $\delta = \delta(z)$  derart, daß jede Teilparkettierung  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$  die Ungleichung (4.14) für  $n > n(\mathcal{A})$  erfüllt.

Weiter kann gemäß Folgerung 4.35 eine Teilparkettierung  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{P}$  so konstruiert werden, daß

$0 < \mu(C(\mathcal{A}) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*) < \delta$  gilt. Mithin steht Ungleichung (4.14) für ein solches  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$  im Widerspruch zur Gültigkeit von (4.15). Folglich ist die Annahme, die Shift-Wirkung auf  $(\Omega_{\mathcal{P}}^*, \mu)$  sei stark mischend, falsch.  $\blacksquare$

Unter Verwendung von Lemma 4.40 lassen sich auch Bedingungen für das Vorliegen schwacher Mischung des von einer selbstaffinen Parkettierung erzeugten dynamischen Systems gewinnen. Der folgende Satz liefert eine charakteristische Eigenschaft eines Eigenwertes der Shift-Wirkung auf  $(\Omega_{\mathcal{P}}^*, \mu)$ . Eine analoge Aussage gilt für Substitutionsysteme (vgl. [30]).

**Satz 4.44** *Es sei  $\mathcal{P} \in \Omega^* = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_0)$  eine fast-periodische selbstaffine Parkettierung mit der verallgemeinerten expandierenden affinen Abbildung  $\varphi = (\tilde{\varphi}, \{a_1, \dots, a_k\})$ . Ist  $\alpha \in \mathbb{R}^d$  ein Eigenwert für  $(\Omega_{\mathcal{P}}^*, \mu, \sigma^{\mathbb{Z}^d})$ , so gilt für jeden Vektor  $z \in \Xi(\mathcal{P})$ :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(2\pi i \langle \tilde{\varphi}^n(z), \alpha \rangle) = 1. \quad (4.16)$$

**Beweis:**

1. Es sei  $f \in L^2(\Omega_{\mathcal{P}}^*, \mu)$  Eigenfunktion zum Eigenwert  $\alpha \in \mathbb{R}^d$ . Wegen der Ergodizität des Maßes  $\mu$  ist  $|f|$  konstant, so daß die Gültigkeit von  $|f| = 1$   $\mu$ -fast sicher angenommen werden kann. Die Funktion  $f$  wird durch eine Treppenfunktion in der Norm  $\|\cdot\|_1$  des Raumes  $L^1(\Omega_{\mathcal{P}}^*, \mu)$  approximiert: für beliebig vorgegebene reelle Zahl  $\varepsilon > 0$  kann eine stetige Funktion  $\tilde{f}$  auf  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$  so gewählt werden, daß  $\|f - \tilde{f}\|_1 < \varepsilon/2$  gilt. Weiter existiert gemäß Lemma 4.27 eine disjunkte Zerlegung  $\Omega_{\mathcal{P}}^* = \bigcup_l (C(\mathcal{A}_l) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*)$  von  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$  in endlich viele Zylinder derart, daß

$$\|\tilde{f} - \sum_l c_l \chi_l\|_{\infty} := \sup_{\mathcal{R} \in \Omega_{\mathcal{P}}^*} |\tilde{f}(\mathcal{R}) - \sum_l c_l \chi_l(\mathcal{R})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

mit geeigneten Konstanten  $c_l \in \mathbb{R}$  gilt, wobei  $\chi_l := \chi_{C(\mathcal{A}_l) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*}$  die charakteristische Funktion auf  $\Omega_{\mathcal{P}}^*$  zum Zylinder  $C(\mathcal{A}_l) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*$  bezeichnet. Mithin erfüllt die Funktion  $g = \sum_l c_l \chi_l$  die Bedingung  $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ .

2. Wir setzen  $A_{n,\varepsilon} := \bigcup_l Y_l$ , wobei die Mengen  $Y_l := C(\mathcal{A}_l) \cap C(\sigma^{\tilde{\varphi}^n(z)} \mathcal{A}_l) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*$  paarweise disjunkt sind. Nach Lemma 4.40 existiert eine von den Teilparkettierungen  $\mathcal{A}_l$  unabhängige Zahl  $\delta = \delta(z)$  derart, daß

$$\mu(A_{n,\varepsilon}) = \sum_l \mu(Y_l) \geq \sum_l \delta \mu(C(\mathcal{A}_l) \cap \Omega_{\mathcal{P}}^*) = \delta \mu(\Omega_{\mathcal{P}}^*) = \delta > 0$$

für alle hinreichend großen natürlichen Zahlen  $n$  gilt.

Wir betrachten das Integral  $I := \int_{A_{n,\varepsilon}} |f(\sigma^{-\tilde{\varphi}^n(z)} \mathcal{R}) - f(\mathcal{R})| d\mu$ . Da  $\alpha$  nach Voraussetzung Eigenwert mit der Eigenfunktion  $f$  ist, folgt

$$\begin{aligned} I &= \int_{A_{n,\varepsilon}} |\exp(2\pi i \langle \tilde{\varphi}^n(z), \alpha \rangle) f(\mathcal{R}) - f(\mathcal{R})| d\mu \\ &= \mu(A_{n,\varepsilon}) |\exp(2\pi i \langle \tilde{\varphi}^n(z), \alpha \rangle) - 1| \geq \delta |\exp(2\pi i \langle \tilde{\varphi}^n(z), \alpha \rangle) - 1|. \end{aligned}$$

Andererseits gilt wegen der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} I &\leq \int_{A_{n,\varepsilon}} |f(\sigma^{-\tilde{\varphi}^n(z)} \mathcal{R}) - g(\sigma^{-\tilde{\varphi}^n(z)} \mathcal{R})| d\mu + \int_{A_{n,\varepsilon}} |g(\sigma^{-\tilde{\varphi}^n(z)} \mathcal{R}) - g(\mathcal{R})| d\mu \\ &\quad + \int_{A_{n,\varepsilon}} |g(\mathcal{R}) - f(\mathcal{R})| d\mu. \end{aligned}$$

Das erste und das dritte Integral ist jeweils durch  $\|f - g\|_1 < \varepsilon$  nach oben beschränkt. Das zweite Integral ist nach Definition der Menge  $A_{n,\varepsilon}$  gleich

$$\sum_l \int_{Y_l} |g(\sigma^{-\tilde{\varphi}^n(z)}\mathcal{R}) - g(\mathcal{R})|d\mu$$

und verschwindet nach Definition der Mengen  $Y_l$ . Insgesamt ist also  $I \leq 2\varepsilon$  und folglich

$$|\exp(2\pi i \langle \tilde{\varphi}^n(z), \alpha \rangle) - 1| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta}.$$

Da  $\delta$  eine nur von  $z \in \Xi(\mathcal{P})$  abhängige Konstante ist, ist mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  die Behauptung gezeigt. ■

**Bemerkung 4.45** Die Bedingung (4.16) charakterisiert die möglichen Eigenwerte von  $(\Omega_{\mathcal{P}}^*, \mu, \sigma^{\mathbb{Z}^d})$  nur indirekt. Im allgemeinen ist ihre Gültigkeit für jeden Verschiebungsvektor  $z \in \Xi(\mathcal{P})$  zwischen Bausteinen in  $\mathcal{P}$  nur schwer nachzuweisen. Aus  $\Xi(\mathcal{P}) \subset \mathbb{Z}^d$  und den Voraussetzungen an die gewöhnliche expandierende affine Abbildung  $\tilde{\varphi}$  einer selbstaffinen Parkettierung des Gitters  $\mathbb{Z}^d$  kann sich eine Vereinfachung der Betrachtungen gegenüber der Situation kontinuierlicher Parkettierungen ergeben.

**Beispiel 4.46** Für die in Beispiel 4.7 betrachtete selbstähnliche Parkettierung  $\mathcal{P}_1$  des Gitters  $\mathbb{Z}^2$  mit der verallgemeinerten expandierenden Ähnlichkeitsabbildung  $\varphi = (\tilde{\varphi}, \{a_1, \dots, a_4\})$  gilt

$$\tilde{\varphi}^n(x) = 2^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot x \quad (x \in \mathbb{R}^2).$$

Offenbar ist die Menge aller  $\alpha \in \mathbb{R}^2$ , die die Bedingung (4.16) an einen Eigenwert von  $(\Omega_{\mathcal{P}_1}^*, \mu, \sigma^{\mathbb{Z}^2})$  erfüllen, gleich  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , wobei  $\mathbb{Z}_2 := \{p/2^m \mid p \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$  die Gruppe der diadiischen rationalen Zahlen bezeichnet. (Man beachte dabei, daß in diesem Fall für den Nachweis von (4.16) kein Gebrauch von der Struktur der Menge  $\Xi(\mathcal{P}_1) \subset \mathbb{Z}^2$  gemacht wird.)

**Bemerkung 4.47** 1. Für selbstaffine Parkettierungen des kontinuierlichen Raumes  $\mathbb{R}^d$  kann gezeigt werden, daß die Gültigkeit von (4.16) unter der Voraussetzung, daß die Parkettierung „eindeutig zusammensetbar“ ist, auch hinreichend dafür ist, daß  $\alpha \in \mathbb{R}^d$  Eigenwert für das entsprechende dynamische System ist ([60]). („Eindeutig zusammensetbar“ sind insbesondere alle nichtperiodischen selbstaffinen Parkettierungen des  $\mathbb{R}^d$ , vgl. [61].)

Zur Konstruktion der Eigenfunktionen im Beweis dieses Satzes wird die Methode der „Kontrollpunkte“ (siehe [62], [60]) verwendet. Dabei wird jedem Baustein  $A$  der Parkettierung  $\mathcal{T}$  ein Punkt  $c(A) \in A$  derart zugeordnet, daß für jede Verschiebung  $A + g$  ( $g \in \mathbb{R}^d$ ) auch  $c(A + g) = c(A) + g$  gilt und das Bild eines Kontrollpunktes unter der expandierenden affinen Abbildung  $\varphi$  selbst Kontrollpunkt eines Bausteines in  $\mathcal{T}$  ist.

Im Fall selbstaffiner Parkettierungen des Gitters  $\mathbb{Z}^d$  ist es wegen der Definition des Konzeptes der verallgemeinerten expandierenden affinen Abbildung möglich, daß keine Wahl von Punkten  $c(H)$  ( $H \in \mathcal{P}$ ) existiert, die die genannten Eigenschaften erfüllt. (In Beispiel 4.48 wird die Konstruktion der Eigenfunktionen für eine Parkettierung erläutert, die die Wahl von Kontrollpunkten mit den gewünschten Eigenschaften erlaubt.)

2. Ist  $\mathcal{P} \in \Omega^*$  eine periodische Parkettierung mit endlichem primitiven Periodenindex, so ist die Menge der Eigenwerte für  $(\Omega_{\mathcal{P}}^*, \mu, \sigma^{\mathbb{Z}^d})$  gleich dem „reziproken Gitter“

$$A_H^*(\mathcal{P}, \sigma^{\mathbb{Z}^d}) := \{\alpha \in \mathbb{R}^d \mid \langle z, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}, \forall z \in A_H(\mathcal{P}, \sigma^{\mathbb{Z}^d})\},$$

wobei  $A_H(\mathcal{P}, \sigma^{\mathbb{Z}^d})$  die Menge aller Perioden von  $\mathcal{P}$  bezeichnet. (Diese Eigenschaft folgt unmittelbar aus der Abgeschlossenheit des Orbits der  $d$ -periodischen Parkettierung  $\mathcal{P}$  und ist in gleicher Weise für Parkettierungen des Raumes  $\mathbb{R}^d$  richtig.)

Für eine nichttriviale (d. h. nicht nur aus Ein-Punkt-Bausteinen aufgebaute) periodische Parkettierung mit endlichem Orbit folgt damit die Existenz eines Eigenwertes  $\alpha \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Z}^d$ , d. h. das Fehlen schwacher Mischung für das dynamische System  $(\Omega_{\mathcal{P}}^*, \mu, \sigma^{\mathbb{Z}^d})$ .

**Beispiel 4.48** Für die in Beispiel 4.46 betrachtete selbstähnliche Parkettierung des  $\mathbb{Z}^2$  wird durch Konstruktion von Eigenfunktionen gezeigt, daß  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  die Menge der Eigenwerte von  $(\Omega_{\mathcal{P}_1}^*, \mu, \sigma^{\mathbb{Z}^2})$  ist.

Dazu wird mit  $c(G_1^{(1)} := e_2, c(G_i^{(1)}) = 0 (i = 2, 3, 4)$  und  $c(\sigma^z G_i^{(1)}) := c(G_i^{(1)}) + z (z \in \mathbb{Z}^2, i \in \{1, \dots, 4\})$  jedem Baustein der Parkettierung  $\mathcal{P}_1$  ein Punkt zugeordnet. Man prüft nach, daß für jeden Baustein  $H \in \mathcal{P}_1$  der Punkt  $\tilde{\varphi}(c(H))$  der Kontrollpunkt des eindeutig bestimmten Bausteines  $H' \in \mathcal{P}$  ist, der  $\tilde{\varphi}(c(H))$  enthält. Definiert man die Kontrollpunkte der Bausteine der  $n$ -ten Vergrößerung  $\varphi^n(\mathcal{P}_1)$  gemäß  $c(\varphi^n(H)) := \tilde{\varphi}^n(c(H)) (n \in \mathbb{N})$ , so ist gesichert, daß der Kontrollpunkt jedes Bausteines der Vergrößerung  $\varphi^n(\mathcal{P}_1)$  gleich dem Kontrollpunkt eines Bausteines seiner zerlegenden Teilparkettierung in  $\varphi^k(\mathcal{P}_1) (\forall k < n)$  ist.

Es sei  $\alpha \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  gegeben und  $\mathcal{R} \in \Omega_{\mathcal{P}_1}^*$  eine beliebige Parkettierung. Da  $\mathcal{P}_1$  bezüglich  $\varphi$  „eindeutig zusammensetzbar“ ist, besitzt  $\mathcal{R}$  eine eindeutig bestimmte Folge  $\{\mathcal{R}^{(n)}\}_{n \geq 0}$  von Parkettierungen  $\mathcal{R}^{(n)} \in \Omega_{\varphi^n(\mathcal{P}_1)}^* (n \geq 0)$ , die Vergrößerungen von  $\mathcal{R}$  sind. Weiter bezeichne  $H^{(n)} \in \mathcal{R}^{(n)}$  den eindeutig bestimmten Baustein, der den Nullpunkt überdeckt. Damit definiert man eine Funktion  $f_\alpha$  auf  $\Omega_{\mathcal{P}_1}^*$  durch

$$f_\alpha(\mathcal{R}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-2\pi i \langle c(H^{(n)}), \alpha \rangle).$$

Nach Wahl der Kontrollpunkte ist  $c(H^{(n+1)})$  gleich  $c(K^{(n)})$  für einen Baustein  $K^{(n)}$  in der Teilparkettierung  $\varphi^n(\mathcal{P}_1)|_{H^{(n+1)}}$ . Wegen  $\mathcal{R}^{(n)} \in \Omega_{\varphi^n(\mathcal{P}_1)}^*$  ist die Teilparkettierung  $\{K^{(n)}, H^{(n)}\}$  innerhalb von  $H^{(n+1)}$  eine Verschiebung von  $\{\varphi^n(K), \varphi^n(H)\}$  für gewisse Bausteine  $K, H \in \mathcal{P}_1$ , die innerhalb des gleichen Bausteines von  $\varphi(\mathcal{P}_1)$  liegen. Also gilt

$$c(H^{(n+1)}) - c(H^{(n)}) = c(K^{(n)}) - c(H^{(n)}) = \tilde{\varphi}^n(c(K) - c(H)),$$

woraus wegen  $c(K) - c(H) \in \mathbb{Z}^2$  die Existenz des interessierenden Grenzwertes folgt (vgl. auch Beispiel 4.46). Die Gültigkeit von  $f_\alpha(\sigma^{-z} \mathcal{R}) = \exp(2\pi i \langle z, \alpha \rangle) f_\alpha(\mathcal{R})$  folgt unmittelbar aus der Invarianz der Kontrollpunkte unter Verschiebungen des Gitters.

# Literaturverzeichnis

- [1] Adler, R.A., Konheim, A., McAndrew, M.H.: Topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc.* **114** (1965), 309–319.
- [2] Bandt, C.: Self-similar sets 5. Integer matrices and fractal tilings of  $\mathbb{R}^n$ . *Proc. Amer. Math. Soc.* **112** (1991), 549–562.
- [3] Bandt, C., Gelbrich, G.: Classification of self-affine lattice tilings, *J. London Math. Soc.*(2) **50** (1994), 581–593.
- [4] Billingsley, P.: *Ergodic Theory and Information*. J. Wiley and Sons, New York, 1965.
- [5] Bombieri, E., Taylor, J.E.: Quasicrystals, tilings and algebraic number theory: some preliminary connections, *Contemp. Math.* **64** (1987), 241–264.
- [6] Bowen, R.: Entropy for Group Endomorphisms and Homogeneous Spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **153** (1971), 401–414.
- [7] Bowen, R.: Periodic Orbits for Hyperbolic Flows, *Amer. Journal of Math.* **94** (1972), 1–30.
- [8] Bowen, R.: Topological entropy for noncompact sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **184** (1973), 125–136.
- [9] Bowen, R. *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*. Lecture Notes in Math. **470**, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [10] Boyle, M.: Lower entropy factors of sofic systems, *Ergodic Th. Dynam. Syst.* **4** (1984), 541–557.
- [11] Conze, J.P.: Points périodiques et entropie topologique. *C. R. Acad. Sc. Paris* **267**, Nr. 3 (1968), 149–152.
- [12] Conze, J.P.: Entropie d'un groupe abélien de transformations. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete* **25** (1972), 11–30.
- [13] Coven, E., Paul, M.: Endomorphisms of irreducible subshifts of finite type, *Math. Systems Theory* **8** (1974), 167–175.
- [14] Dekking, F.M.: Replicating superfigures and endomorphisms of free groups. *J. Combin. Theory Ser. A* **32** (1982), 315–320.

- [15] Dekking, F.M., Keane, M.: Mixing Properties of Substitutions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* **42** (1978), 23–33.
- [16] Denker, M., Grillenberger, C., Sigmund, K.: *Ergodic Theory on Compact Spaces*. Lecture Notes in Math. **527**, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [17] Dinaburg, E.I.: The relation between topological entropy and metric entropy. (in Russ.) *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **190** (1970), 19–22.
- [18] Dinaburg, E.I.: On the relation among various entropy characteristics of dynamical systems. (in Russ.) *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **35** (1971), 324–366.
- [19] Friedman, N.A., Ornstein, D.S.: On Isomorphism of Weak Bernoulli Transformations, *Adv. in Math.* **5** (1971), 365–394.
- [20] Gabriel, W.P.: On dynamical Systems with uncomputable Topological Entropy. *Mathematica Gottingensis* **30** (1993).
- [21] Gantmacher, F.R.: *Matrizentheorie*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1986.
- [22] Golomb, S.: Replicating figures in the plane, *Mathematical Gazette*, Vol. 48 (1964), 403–412.
- [23] Goodman, T.N.T.: Relating topological entropy and measure entropy, *Bull. London Math. Soc.* **3** (2) (1971), 176–180.
- [24] Goodwyn, L.W.: Topological entropy bounds measure-theoretic entropy, *Proc. Amer. Math. Soc.* **23** (3) (1969), 679–688.
- [25] Grünbaum, B., Shephard, G. C.: *Tilings and patterns*. W.H. Freeman and Company, New York, 1986.
- [26] Häsler, K.: On topological transitivity of set configuration spaces, in: *Proc. Conference Ergod. Theory Relat. Topics II (1986, Georgenthal, GDR)*.
- [27] Häsler, K.: Approximation of mixing point configuration spaces over  $\mathbb{Z}^d$  by spaces of set configurations, *Dynamical Systems and Ergodic Theory*, Banach Center Publications **23** (1989), 135–142.
- [28] Hedlund, G.: Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system, *Math. Systems Theory* **3** (1969), 320–375.
- [29] Heilmann, O. J., Lieb, E. H.: Lattice Models for Liquid Crystals, *Journ. Statist. Phys.* **20** (1979), Nr.6, 679–693.
- [30] Host, B.: Valeurs propres de systèmes dynamiques définis par de substitutions de longueur variable, *Ergod. Th. Dynam. Syst.* **6** (1986), 529–540.

- [31] Hurd, L.P., Kari, J., Culik, K.: The topological entropy of cellular automata is uncomputable, *Ergodic Theory & Dynamical Systems* **12** (1992), 255–265.
- [32] Kakutani, S.: Examples of ergodic measure preserving transformations which are weakly mixing but not strongly mixing, Springer Lect. Notes **318** (1973), 143–149.
- [33] Katznelson, Y.: Ergodic automorphisms of  $T^n$  are Bernoulli shifts, *Israel J. Math.* **10** (2) (1971), 186–195.
- [34] Katznelson, Y., Weiss, B.: Commuting measure-preserving transformations. *Israel J. Math.* **12** (2) (1972), 161–173.
- [35] Keynes, H. B., Robertson, J. B.: Generators for topological entropy and expansiveness, *Math. Systems Theory* **3** (1969), 51–59.
- [36] Kitchens, B.: An invariant for continuous factors of Markov shifts, *Proc. Am. Math. Soc.* **83** (1981), 825–828.
- [37] Krieger, W.: On the Subsystems of Topological Markov Chains, *Ergodic Theory & Dynamical Systems* **2** (1982), 195–202.
- [38] Lunnon, F., Pleasants, P.: Quasicrystallographic tilings, *Journal Math. pures et appl.* **66** (1987), 217–263.
- [39] Markley, N.G., Paul, M.E.: Matrix Subshifts for  $\mathbb{Z}^\nu$  Symbolic Dynamics. *Proc. London Math. Soc.* **43** Nr. 3 (1981), 251–278.
- [40] Markley, N.G., Paul, M.E.: Maximal Measures and Entropy for  $\mathbb{Z}^\nu$  Subshifts of Finite Type. *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* **70** (1981), 135–157.
- [41] Martin, N.F.G., England, J.W.: *Mathematical Theory of Entropy*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 12, Addison-Wesley, London, 1981.
- [42] Michel, P.: Stricte ergodicite d'ensembles minimaux de substitutions. *C. R. Acad. Sci. Paris* **278**, 811–813.
- [43] Michel, H.: Embedding set configuration spaces into those of Ruelle's point configurations, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. 41 (1984), Nr. 3, 255–267.
- [44] Morse, M., Hedlund, G.: Symbolic Dynamics. *Amer. Journal of Math.*, Vol. 60 (1938), 815–866.
- [45] Ornstein, D.S.: Bernoulli Shifts with the Same Entropy are Isomorphic. *Adv. in Math.* **4** (1970), 337–352.
- [46] Ornstein, D.S.: Imbedding Bernoulli shifts in flows, *Lecture Notes Math.* **160** (1970), 178–218.
- [47] Ornstein, D.S., Weiss, B.: Geodesic flows are Bernoullian, *Israel J. Math.* **14** (2) (1973), 184–198.

- [48] Parry, W.: Intrinsic Markov Chain. *Trans. Amer. Math. Soc.* **112** (1970), 55–66.
- [49] Queffelec, M.: *Substitution dynamical systems – spectral analysis*, Lecture Notes in Math. **1294**, Springer-Verlag.
- [50] Radin, C.: Space tilings and substitutions, *Geometriae Dedicata* **55** (1995), 257–264.
- [51] Radin, C., Wolff, M.: Space tilings and local isomorphism, *Geometriae Dedicata* **42** (1992), 355–360
- [52] Richter, K.: Möglichkeiten zur Klassifikation mehrdimensionaler Mengenkonfigurationsräume, *Preprint, MLU Halle-Wittenberg*, 1999.
- [53] Robinson, E.A. Jr.: The dynamical theory of tilings and quasicrystallography, in: *Ergodic Theory of  $\mathbb{Z}^d$ -Actions*, (M. Pollicott and K. Schmidt, ed.) (1994), 451–473.
- [54] Robinson, R.M.: Undecidability and nonperiodicity of tilings of the plane, *Inventiones Math.* **12** (1971), 177–209.
- [55] Ruelle, D.: *Thermodynamic Formalism*. Addison-Wesley, Reading 1978.
- [56] Schwenzfefer, G.: Mengen-Konfigurationenräume über  $\mathbb{Z}^1$  als topologische Markov-Ketten, Dissertation, MLU Halle, Sektion Mathematik, 1984.
- [57] Senechal, M.: *Quasicrystals and Geometry*. Cambridge University Press, 1996.
- [58] Sinai, Ya.G.: Gibbsian measures in ergodic theory, (in Russ.) *Usp. Mat. Nauk* **27**, Nr. 4 (1972), 21–64.
- [59] Smale, S.: Differentiable Dynamical Systems, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 747–817.
- [60] Solomyak, B.: Dynamics of Selfsimilar Tilings, *Ergodic Th. Dynam. Syst.* **17** (1997), 695–738.
- [61] Solomyak, B.: Non-periodicity implies unique composition for self-similar translationally-finite tilings, *Preprint, University of Washington* (1997).
- [62] Thurston, W.: Groups, tilings, and finite state automata. AMS Colloquium Lecture Notes, Boulder, 1989.
- [63] Van Hove, F.: Quelques propriétés générales de l'intégrale de configuration d'un système de particules avec interaction, *Physica* **15** (1949), 951–961.
- [64] deVries, J.: *Elements of topological dynamics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1993.
- [65] Walters, P.: *Ergodic Theory – Introductory Lectures*. Lect. Notes Math. **458** (1976), Springer-Verlag.
- [66] Williams, R.F.: Classification of Subshifts of Finite Type, *Ann. of Math.* **98** (1973), 120–153; Errata, *ibid.* **99** (1974), 380–381.

## **Eidesstattliche Erklärung**

Ich erkläre hiermit an Eides statt, die vorliegende Arbeit selbständig und ausschließlich unter Verwendung der im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen angefertigt zu haben, wobei wörtlich oder inhaltlich entnommene Stellen als solche kenntlich gemacht wurden.

Halle, den 25. März 1999

# Lebenslauf

Name: Hirsch, Katrin  
Geburtsdatum: 01.02.1972  
Geburtsort: Leipzig  
Wohnort: Blücherstr. 9  
04509 Delitzsch  
Familienstand: ledig

## Schulbildung

Sept. 1978 – Juli 1988 Polytechnische Oberschule in Delitzsch  
Sept. 1988 – Juli 1990 Spezialklassen f. Mathematik und Physik an der  
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg,  
Abschluß: Abitur

## Studium

Sept. 1990 – Aug. 1995 Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg,  
Abschluß als Diplommathematikerin  
Okt. 1995 – Sept. 1998 Promotionsstudium an der MLU Halle-Wittenberg,  
Fachrichtung Mathematik, gefördert durch ein  
Promotionsstipendium des Landes Sachsen-Anhalt.  
14.09. – 27.09.1997 Forschungsaufenthalt an der Nikolaus-Kopernikus-  
Universität Toruń (Polen) bei Prof. B. Kamiński  
26. März 1999 Vorlage der Dissertation an der Mathematisch-  
Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät der MLU  
Halle-Wittenberg

## Praktikum

22.08.94 – 16.09.94 Umweltforschungszentrum Leipzig-Halle GmbH,  
Sektion Bodenforschung (Betreuer Dr. Franko)

## weitere Tätigkeiten

Okt. 1998 – Feb. 1999 Drittmittelprojekt zur statistischen Analyse von  
Meßdaten der biologischen Abwasserbehandlungsanlage  
im BSL-Werk Schkopau, Projekt-Nr. 60104-30-113  
seit Mai 1999 wissenschaftliche Hilfskraft am Fachbereich Mathematik  
und Informatik der MLU Halle-Wittenberg

Halle, den 13. Juli 1999