

Calabi-Yau Kompaktifizierungen von Typ IIB Superstringtheorie

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt der

Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät

der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

von

Herrn Robert Böhm

geb. am: 21.05.1971 in: Dinslaken

Gutachter

1. Prof. Dr. Jan Louis
2. Prof. Dr. Richard Grimm
3. Prof. Dr. Albrecht Klemm

Halle (Saale), 26.06.2001

“So he binds himself
to the galloping mare
and she binds herself
to the rider there
and there is no space
but there’s left and right
and there is no time
but there’s day and night [...]“

Leonard Cohen, *Ballad of the Absent Mare*

Danksagung

An erster Stelle gebührt mein Dank Herrn Prof. J. Louis für den Vorschlag des Themas und die gleichermaßen unterstützende wie geduldige Betreuung der Arbeit.

Den Mitarbeitern der Arbeitsgruppe Quantenfeldtheorie, B. Gunara, H. Günther, M. Haack, C. Herrmann, M. Klein, M. Marquart, A. Micu, T. Mohaupt, H. Singh und M. Zagermann möchte ich für die freundliche Atmosphäre danken. Insbesondere war es mir ein Vergnügen, das Büro zeitweilig mit H. Günther und M. Haack zu teilen.

Zu Dank verpflichtet bin ich der Landesgraduiertenförderung Sachsen-Anhalt, welche mich in der Zeit von April 1998 bis Juni 2000 finanziell mit einem Stipendium unterstützt hat.

Persönlich möchte ich mich bei meiner Freundin Heidi bedanken, die mit ihrer positiven und optimistischen Denkungsart immer wieder aufbauend wirkte. Schließlich gilt mein ganz besonderer Dank meinen Eltern, ohne deren finanzielle und moralische Unterstützung vorliegende Dissertation nicht zustande gekommen wäre, und denen ich deshalb diese Arbeit widmen möchte.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Grundlagen der Supersymmetrie	2
1.2	Grundlagen der Stringtheorie	4
1.3	Aufbau und Gliederung der Arbeit	10
2	Typ IIB Supergravitation in $d = 10$	13
3	Kompaktifizierungen	17
3.1	Kaluza-Klein Theorie	17
3.2	Moduli	19
3.2.1	Metrik-Moduli	19
4	Typ IIB auf CY_3	23
4.1	$N = 2$ Supergravitation in $d = 4$	23
4.2	Eigenschaften der CY_3	25
4.3	Das Spektrum	27
4.4	Die Wirkung	28
4.5	Symmetrieeigenschaften in $d = 4$	33
5	Typ IIB auf CY_4	37
5.1	$N = (4, 0)$ Supergravitation in $d = 2$	37
5.2	Eigenschaften der CY_4	39
5.3	Das Spektrum	42
5.4	Die Wirkung	43
6	Der heterotische String auf $K3 \times K3$	49
6.1	Das Spektrum und die Wirkung	49
6.2	Die Wirkung in konformer Eichung	51
7	Zusammenfassung	53
A	Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten	55
A.1	Einleitung und Konventionen	55
A.2	Komplexe Mannigfaltigkeiten	56
A.3	Hermitesche Mannigfaltigkeiten	57
A.4	Kählermannigfaltigkeiten	58

A.5	Kähler Geometrie	61
A.6	Holonomie	62
A.7	Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten	63
B	Weyl-Reskalierungen zwischen verschiedenen Basen	65
C	Kompaktifizierung von \mathcal{R} auf CY_3	67
D	Kompaktifizierung von \mathcal{S}_2 auf CY_3	71
E	Typ IIB Bewegungsgleichungen auf CY_4	75
F	Der heterotische String auf $K3$	79
F.1	Eigenschaften der $K3$	79
F.2	Das Spektrum	81
F.3	Die Wirkung	82
G	Literaturverzeichnis	85

Kapitel 1

Einleitung

Supersymmetrische Stringtheorien stellen die zur Zeit vielversprechendsten Erweiterungen des Standardmodells der Elementarteilchen dar [1–8]. Elementarteilchen gelten in dem Sinne als elementar, als daß sie aus keinen weiteren Teilchen aufgebaut sein sollen, und werden im Standardmodell als punktförmig angesehen.¹ Das Standardmodell beschreibt außer der Gravitation, welche Gegenstand von Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie ist, alle in der Natur beobachtete Materie sowie die bekannten Wechselwirkungskräfte im Rahmen einer sog. Quantenfeldtheorie, und steht in bestem Einklang mit experimentellen Daten. Dennoch kann es nicht als fundamentale Theorie angesehen werden: zum einen ist bisher jeder Versuch einer quantenfeldtheoretischen Beschreibung der Gravitation gescheitert (die Theorie ist „nicht renormierbar“). Zum anderen besitzt das Standardmodell viele freie Parameter (wie z.B. die Massen der Quarks und Leptonen), deren Herkunft und Beziehung untereinander durch eine fundamentale Theorie erklärt werden sollten.

In der Stringtheorie wird das Konzept der Elementarteilchen als punktförmige Objekte aufgegeben, und statt dessen die eindimensionalen Strings als fundamentale Konstituenten der Materie angesehen. Alle bekannten Elementarteilchen lassen sich dann als unterschiedliche Schwingungsmoden der Strings deuten. Auf den ersten Blick scheint dies der Beobachtung zu widersprechen, daß sich die Elementarteilchen im Experiment eher als Teilchen denn als eindimensional ausgedehnte Objekte verhalten. Berechnet man aber die Länge eines Strings, so findet man, daß diese von der Größenordnung 10^{-33} cm ist: diese Länge ist viel zu klein, als daß sie von heutigen Teilchenbeschleunigern aufgelöst werden könnte, so daß Strings als punktförmig erscheinen und es keinen direkten Widerspruch zu bisher vorgenommenen Experimenten gibt.

Einer der Hauptgründe, warum Stringtheorie in der heutigen theoretischen Hochenergiephysik eine so prominente Rolle spielt, besteht darin, daß sich bei der Berechnung des Spektrums supersymmetrischer Stringtheorien insbesondere

¹Das derart gegebene Verständnis von „elementar“ ist natürlich von dem zur Verfügung stehenden Auflösungsvermögen der Teilchenbeschleuniger abhängig: so gelten z.B. bei einer heutzutage erreichten Auflösung von ca. 10^{-16} cm die Elektronen und Quarks noch als elementar, was sich jedoch durch zukünftige Experimente bei höheren Energien ändern könnte.

immer ein Spin-2 Teilchen findet, welches mit dem für die gravitative Wechselwirkung verantwortlichen Teilchen (dem Graviton) identifiziert werden kann: somit ist Gravitation auf natürliche Weise inkorporiert. Außerdem findet man bei Quantisierung keine ultravioletten Divergenzen, welche zuvor zur Nicht-Renormierbarkeit der Quantengravitationstheorien geführt hatten. Insgesamt enthalten supersymmetrische Stringtheorien somit eine endliche Quantentheorie der Gravitation.

Allerdings zeigt sich, daß es fünf verschiedene konsistente supersymmetrische Stringtheorien gibt (von denen eine Typ IIB genannt wird), deren Beziehungen untereinander noch nicht vollständig verstanden sind. Darüber hinaus führen Konsistenzbedingungen dazu, daß diese Theorien zunächst nur in zehn Raum-Zeit Dimensionen formuliert werden können, wohingegen die uns umgebende Raum-Zeit vierdimensional zu sein scheint. Als ein fruchtbarer Ansatz zur Erklärung der anscheinend überzähligen Raum Dimensionen hat sich ein Mechanismus herausgestellt, den man *Kompaktifizierung* nennt. Die Grundidee besteht darin, daß sechs der insgesamt neun Raum Dimensionen kompakt und sehr klein sind: und zwar so klein, daß ihre Größe durch die bis heute zur Verfügung stehenden Teilchenbeschleuniger noch nicht aufgelöst werden konnte, und der uns umgebende Raum somit dreidimensional erscheint. Für die Typ IIB Theorie werden in dieser Arbeit bestimmte Klassen von Kompaktifizierungen untersucht, die nach den beiden Mathematikern E. Calabi und S.T. Yau benannt sind.

1.1 Grundlagen der Supersymmetrie

Das Konzept von *Supersymmetrie* [9–11] ist unabhängig von dem der Stringtheorie und kann ohne weitere Annahmen als zusätzliche Symmetrie auch in jeder Quantenfeldtheorie eingeführt werden. Dabei ist Supersymmetrie per Definition eine Symmetrie zwischen Fermionen (den Konstituenten der Materie) und Bosonen (den Trägern der Wechselwirkungskräfte); entsprechend gibt es einen Operator Q (den man auch *Superladung* nennt), der die beiden Teilchensorten zueinander in Beziehung setzt, indem er fermionische Zustände auf bosonische abbildet und umgekehrt:

$$Q|\text{Fermion}\rangle = |\text{Boson}\rangle \quad ; \quad Q|\text{Boson}\rangle = |\text{Fermion}\rangle . \quad (1.1)$$

Gemäß dieser Abbildung besitzt also jedes Teilchen einen sog. *Superpartner*, wobei die Notation folgendermaßen festgelegt ist: die bosonischen Superpartner der bekannten Fermionen werden durch das Präfix „s-“ gekennzeichnet (z.B. *Squark*, *Slepton*), wohingegen die fermionischen Superpartner der bekannten Bosonen durch das Suffix „-ino“ kenntlich gemacht sind (z.B. *Gluino*, *Gravitino*). Die von Supersymmetrie vorhergesagte Existenz dieser Superpartner konnte bis zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht experimentell verifiziert werden. Es besteht aber die berechtigte Hoffnung, daß sich dies mit der nächsten Generation von Teilchenbeschleunigern ändern könnte.

Die Zustände einer supersymmetrischen Theorie lassen sich in sog. *Supermultipletts* anordnen: diese sind dadurch charakterisiert, daß die in ihnen enthaltenden

Zustände durch eine oder mehrere Supersymmetrietransformationen auseinander hervorgehen. Dabei enthält jedes Supermultiplett mindestens ein Boson und ein Fermion, deren Spin sich um $\frac{1}{2}$ unterscheidet. Eine wesentliche Eigenschaft von Q als dem Generator von Supersymmetrietransformationen besteht darin, daß er translationsinvariant ist; das bedeutet, daß Q mit dem Energieoperator E und Impulsoperator \mathbf{P} (als dem Generator von Raum-Zeit Translationen) kommutiert:

$$[Q, E] = [Q, \mathbf{P}] = 0. \quad (1.2)$$

Als Folge ändert die Anwendung von Q auf einen Zustand also weder dessen Energie noch Impuls, so daß im Fall von *ungebrochener* Supersymmetrie alle Zustände innerhalb eines Supermultipletts dieselbe Masse besitzen. Da dies experimentell ausgeschlossen ist, kann Supersymmetrie in der Natur bestenfalls (falls überhaupt) als *spontan gebrochene Symmetrie* realisiert sein.² Während der Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung die Massenentartung innerhalb von Supermultipletts aufheben kann, bleibt deren Struktur ansonsten bestehen.

Aus (1.1) ist ersichtlich, daß die Anwendung von Q den Spin eines Zustandes ändert: daraus folgt, daß Q selbst ein *Spinoperator* ist (d.h. Q ist fermionisch und transformiert unter der Lorentz Gruppe als Spinor). Die Superladungen erfüllen untereinander *Antikommutationsrelationen*, und die wichtigste solche Relation ist in d Raum-Zeit Dimensionen durch

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} \equiv Q_\alpha \bar{Q}_\beta + \bar{Q}_\beta Q_\alpha = 2(\Gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu \quad (1.3)$$

gegeben, wobei P_μ den Impulsvektor bezeichnet und Γ^μ die Diracschen Gamma Matrizen mit $\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} = 2 \text{diag}(-1, \underbrace{+1, \dots, +1}_{d-1})$ sind. Die Indizes α und

β sind Spinorindizes, und die Q_α 's bezeichnen entsprechend die unabhängigen Spinorkomponenten von Q .³ In (1.3) ist der einfachste Fall betrachtet, in dem lediglich ein Supersymmetriegenenerator Q mit Komponenten Q_α vorhanden ist: diesen Fall nennt man *minimale Supersymmetrie* oder auch $N = 1$ *Supersymmetrie*. Gibt es hingegen N verschiedene Supersymmetriegeneneratoren mit Komponenten Q_α^i ($i = 1, \dots, N$), so spricht man von *N -erweiterter Supersymmetrie*, und die für diese Arbeit relevanten Fälle sind in den Abschnitten 4.1 und 5.1 dargestellt.

Wie sich herausstellen wird, sind im Kontext von Stringtheorien die masselosen ($\mathbf{P}^2 = 0$) Supermultipletts von besonderem Interesse. Diese erhält man, indem man im Standardsystem (in welchem der Impulsoperator von der Form $\mathbf{P} = (-E, 0, \dots, 0, E)$ ist) aus den Q_α 's Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren bildet, und anschließend die Methode der *induzierten Darstellung* durch sukzessive Anwendung der Erzeugungsoperatoren auf den Grundzustand anwendet [11]. Die Größe der Supermultipletts ist dabei insbesondere von der Anzahl der unabhängigen Spinorkomponenten von Q abhängig, welche je nach betrachteter Raum-Zeit Dimension d variiert. So gibt es in geraden Dimensionen (in denen

²Von einer *spontan gebrochenen Symmetrie* spricht man, wenn im Gegensatz zum Wechselwirkungspotential einer Theorie deren Grundzustand nicht symmetrisch ist.

³Die genaue Definition von \bar{Q}_β hängt vom Spinortyp und somit von der betrachteten Raum-Zeit Dimension d ab.

sich Spinoren von bestimmter Chiralität, sog. *Weyl Spinoren*, definieren lassen) drei mögliche Fälle, welche in Tab. 1.1 zusammengefaßt sind: in $d = 4, 8 \bmod 8$

d	Anzahl der unabhängigen Q_α 's	Spinortyp
$4, 8 \bmod 8$	$2^{d/2}$	M oder W
$6 \bmod 8$	$2^{d/2}$	W
$2 \bmod 8$	$2^{d/2-1}$	MW

Tabelle 1.1: Die minimale Anzahl unabhängiger Superladungen in verschiedenen Raum-Zeit Dimensionen d . Als Spinortypen finden sich Majorana (M), Weyl (W) oder Majorana-Weyl (MW) Spinoren.

setzt Ladungskonjugation Spinoren unterschiedlicher Chiralität zueinander in Beziehung, und ein Spinor kann entweder die Weyl- oder die *Majorana*- Bedingung erfüllen (ein Majorana Spinor ist invariant unter Ladungskonjugation). In den zwei verbleibenden Fällen erhält Ladungskonjugation die Chiralität eines Spinors: in $d = 6 \bmod 8$ gibt es allerdings keine Majorana Spinoren, wohingegen in $d = 2 \bmod 8$ Spinoren sowohl die Majorana- als auch die Weyl-Bedingung erfüllen können (sog. *Majorana-Weyl Spinoren*). Die Fälle für ungerades d werden in dieser Arbeit nicht benötigt; sie finden sich ausführlich in [7] diskutiert.

Wegen ihrer Relevanz für Stringtheorien sei schließlich noch die *Supergravitation* erläutert: als solche bezeichnet man eine supersymmetrische Theorie, die kovariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen ist. In Supergravitationstheorien ist Supersymmetrie notwendigerweise *lokal* realisiert (d.h. die Supersymmetrie Transformationen sind Raum-Zeit abhängig): dies macht schon der für alle supersymmetrischen Theorien charakteristische Antikommutator aus (1.3) deutlich, da lokale Raum-Zeit Translationen eine allgemeine Koordinatentransformation darstellen. Im Spektrum einer Supergravitation findet sich immer das Spin-2 Graviton $g_{\mu\nu}$ zusammen mit seinem Superpartner, dem Spin-3/2 Gravitino ψ_μ^α : das Gravitino ist ein Vektor-Spinor, und wird auch *Rarita-Schwinger Feld* genannt.

1.2 Grundlagen der Stringtheorie

Ausgangspunkt der Stringtheorie ist die Idee, anstelle von Punktteilchen die im Raum eindimensional ausgedehnten Strings als fundamental anzusehen. Je nachdem, ob ein String zwei freie Endpunkte besitzt oder nicht, spricht man von einem *offenen* bzw. *geschlossenen* String. Im folgenden werden nur Theorien geschlossener Strings behandelt.

Während sich ein Punktteilchen in der Raum-Zeit entlang seiner eindimensionalen *Weltlinie* bewegt, ergibt die Bewegung eines Strings eine zweidimensionale *Weltfläche* W . Dies kann durch Funktionen $X^\mu(\sigma, \tau)$ beschrieben werden, welche angeben, wie die durch σ und τ parametrisierte Weltfläche in die Raum-Zeit (mit Koordinaten X^μ) eingebettet ist. Dabei bezeichnet σ die räumliche Koordinate

auf W und ist für geschlossene Strings periodisch mit $\sigma \in [0, 2\pi)$, und τ ist die zweidimensionale Zeitkoordinate. Für einen freien (d.h. nicht-wechselwirkenden) geschlossenen String ist die Topologie der Weltfläche die eines Zylinders, wie in Abb. 1.1 dargestellt. Die relativistische Wirkung eines Punktteilchens generali-

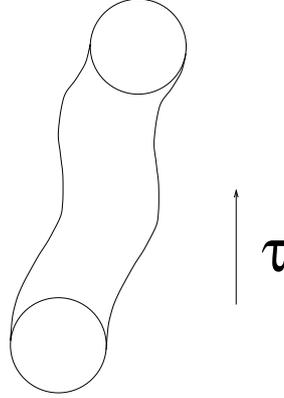


Abbildung 1.1: Weltfläche eines geschlossenen Strings.

sierend erhält man für den freien bosonischen String (der keine fermionischen Freiheitsgrade beinhaltet) die sog. *Nambu-Goto Wirkung*:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{NG} &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} (\text{Fläche von } W) \\ &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma (-\det \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu})^{1/2}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

wobei $\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial \sigma^a}$ mit $\sigma^a = (\sigma, \tau)$, und die Raum-Zeit als flacher Minkowski-Raum mit Metrik $\eta_{\mu\nu}$ betrachtet wird. α' ist eine Konstante, welche die Dimension $[\text{Länge}]^2$ bzw. $[\text{Masse}]^{-2}$ haben muß, damit die Wirkung \mathcal{S}_{NG} dimensionslos ist.⁴ Als einziger dimensionsbehafteter Parameter von Stringtheorie gibt α' die charakteristische Skala dieser Theorie an; so ist z.B. die fundamentale Massenskala m_S in Stringtheorie durch $m_S = (\alpha')^{-\frac{1}{2}}$ gegeben. Die Größenordnung von α' läßt sich dabei durch Dimensionsanalyse ermitteln: als relativistische Quantentheorie, welche auch die Gravitation enthält, muß Stringtheorie als fundamentale Konstanten die Lichtgeschwindigkeit c , das Plancksche Wirkungsquantum \hbar sowie die Newtonsche Gravitationskonstante G enthalten. Aus diesen Konstanten lassen sich die sog. *Planck Länge*

$$l_P = \left(\frac{\hbar G}{c^3} \right)^{1/2} = 1.6 \times 10^{-33} \text{ cm} \quad (1.5)$$

und *Planck Masse*

$$m_P = \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{1/2} = 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV}/c^2 \quad (1.6)$$

⁴In dieser Arbeit werden Einheiten verwendet, in denen $\hbar = c = 1$, und in diesen Einheiten gilt $[\text{Länge}]^2 \sim [\text{Masse}]^{-2}$.

bilden, wobei in den hier verwendeten Einheiten $\hbar = c = 1$ gilt, daß $l_P = m_P^{-1}$. Für die in dieser Arbeit betrachteten Stringtheorien ist α' von der Größenordnung der durch die Planck Masse m_P aus (1.6) gesetzten Skala, d.h. $\alpha' \propto m_P^{-2}$, und insbesondere sind nichtverschwindende Massen von der Ordnung $m_S \sim m_P$ (eine genauere Diskussion der Proportionalität zwischen der String- und Planck-Skala findet sich in [7]).

Es erweist sich als nützlich, die Wirkung aus (1.4) in einer klassisch äquivalenten Form anzugeben, in der sie quadratisch in den Ableitungen von $X^\mu(\sigma, \tau)$ ist. Dies geschieht durch die Einführung einer Metrik $h_{ab}(\sigma, \tau)$ auf der Weltfläche, und die entsprechende Wirkung wird als die *Polyakov Wirkung* bezeichnet:

$$\mathcal{S}_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

Hierbei gibt h^{ab} die zu h_{ab} inverse Metrik an, und $h = \det h_{ab}$. Die sich aus (1.7) für die Metrik h_{ab} ergebende Bewegungsgleichung lautet, daß diese konform äquivalent zur Metrik $\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}$ ist:

$$h_{ab} \propto \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}; \quad (1.8)$$

setzt man dies zurück in die Polyakov Wirkung ein, so ergibt sich die Nambu-Goto Wirkung.

Zusätzlich zur Invarianz unter globalen Poincaré Transformationen und lokalen Reparametrisierungen der Weltfläche besitzt die Polyakov Wirkung noch eine weitere lokale Symmetrie. So ist sie *konform invariant*, d.h. invariant unter sog. *Weyl-Reskalierungen* der Weltflächenmetrik h_{ab} :

$$\begin{aligned} \delta h_{ab} &= \Lambda(\sigma, \tau) h_{ab} \\ \delta X^\mu &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Die Wirkung aus (1.7) läßt sich leicht auf den Fall einer gekrümmten Raum-Zeit verallgemeinern : dazu ersetzt man die Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ durch eine allgemeine Metrik $g_{\mu\nu}(X)$, und in dieser Form stellt die Wirkung ein nicht-lineares Sigma-Modell dar. Die Wahl $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ist dann der erste Term einer Metrikentwicklung um einen flachen Hintergrund. Da das nicht-lineare Sigma-Modell nicht mehr quadratisch in X^μ ist, wird durch es auch keine freie Theorie beschrieben. Zusätzlich zu dieser Verallgemeinerung auf gekrümmte Raum-Zeit läßt sich zur Polyakov Wirkung ein weiterer Term addieren, der von der Form $\Phi_0 \chi$ und topologisch invariant ist; Φ_0 ist dabei ein freier Parameter, und χ bezeichnet die Eulerzahl von W :

$$\chi(W) = \frac{1}{4\pi} \int_W \sqrt{-h} \mathcal{R}^{(2)}, \quad (1.10)$$

wobei $\mathcal{R}^{(2)}$ der Ricci Skalar der Weltfläche ist. Zusammen mit diesem Zusatzterm stellt das nicht-lineare Sigma-Modell die für die wechselwirkende bosonische

Stringtheorie relevante Wirkung dar. Der freie Parameter Φ_0 ist dabei der konstante Vakuumerwartungswert eines masselosen Skalarfeldes ϕ , welches im Spektrum jeder Stringtheorie enthalten ist und *Dilaton* genannt wird. Es stellt sich heraus, daß Φ_0 gemäß

$$g_S = e^{\Phi_0} \tag{1.11}$$

die Größe der Stringkopplungskonstanten g_S angibt, welche ein Maß für die Stärke der in Abb. 1.2 dargestellten fundamentalen Wechselwirkung ist. Die Stringkopp-

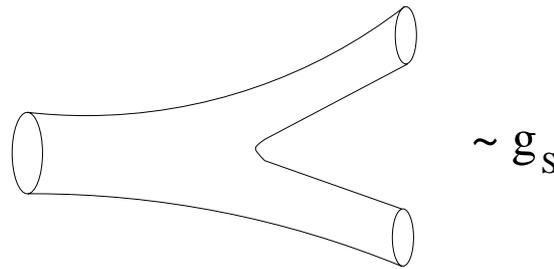


Abbildung 1.2: Der fundamentale Vertex eines geschlossenen Strings.

lungskonstante g_S ist ein dimensionsloser Parameter, in welchem die Störungsentwicklung wechselwirkender Strings angegeben wird (für kleine Werte von g_S , also $g_S < 1$): so lassen sich mit Hilfe des fundamentalen Vertex aus Abb. 1.2 alle möglichen Streuamplituden geschlossener Strings bilden. Dabei zeigt sich, daß die Reihenentwicklung in Potenzen von g_S äquivalent zur Summation über die möglichen Topologien der Weltfläche ist. Hierzu ist anzumerken, daß sich die Eulerzahl aus (1.10) auch als

$$\chi(W) = 2 - 2g - r \tag{1.12}$$

schreiben läßt, wobei g das sog. Genus (die Anzahl der Löcher) von W bezeichnet, und r die Anzahl der Ränder von W angibt. Zur Veranschaulichung sind in Abb. 1.3 die ersten Terme der Störungsreihe für die Stringzweipunktfunktion angegeben, für die $r = 2$ gilt (gem. jeweils einem String als Anfangs- und Endzustand).

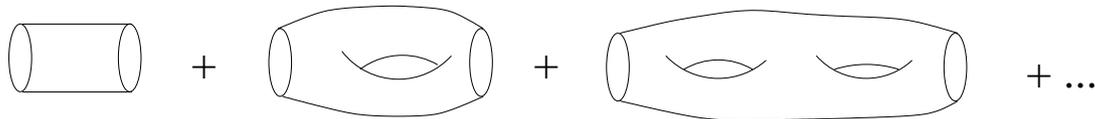


Abbildung 1.3: Störungsentwicklung der Stringzweipunktfunktion als Summe über die Topologien der Weltfläche.

Bisher wurde nur die bosonische Stringtheorie betrachtet: da diese jedoch keine Raum-Zeit Fermionen in ihrem masselosen Spektrum aufweist, und darüber

hinaus ein Teilchen mit negativem Massenquadrat (ein sog. *Tachyon*) beinhaltet, stellt sie eine unrealistische Theorie dar. Die Probleme des bosonischen Strings können dadurch gelöst werden, indem man auf der Weltfläche Supersymmetrie und damit Fermionen einführt: die Weltflächen Fermionen χ^μ gruppieren sich dann mit den Bosonen zu Supermultipletts. Superkonforme Invarianz der Weltflächentheorie ergibt als Einschränkung an die Dimension d der Raum-Zeit, in welcher sich der String bewegt, daß $d \leq 10$. Im folgenden werden die Stringtheorien betrachtet, die in der *kritischen Dimension* $d = 10$ formuliert sind; in dieser Dimension gibt es insgesamt vier konsistente geschlossene Stringtheorien: die Typ IIA und Typ IIB Superstringtheorie, sowie den $E_8 \times E_8$ bzw. $SO(32)$ heterotischen String.⁵ Alle vier Theorien besitzen Raum-Zeit Supersymmetrie und beinhalten kein Tachyon in ihrem Spektrum.

Die Typ II Superstringtheorien sind invariant unter 32 Superladungen und beinhalten rechtslaufende und linkslaufende Weltflächen Fermionen χ^μ . Demgegenüber sind die heterotischen Stringtheorien bloß invariant unter 16 Superladungen mit entweder nur rechts- oder linkslaufenden Weltflächen Fermionen. Für geschlossene Strings können die Weltflächen Fermionen zwei unterschiedliche Randbedingungen erfüllen, und je nach Randbedingung nennt man sie zum *Ramond* bzw. *Neveu-Schwarz Sektor* zugehörig:

$$\chi^\mu(\sigma) = \begin{cases} +\chi^\mu(\sigma + 2\pi) & \text{Ramond (R)}, \\ -\chi^\mu(\sigma + 2\pi) & \text{Neveu-Schwarz (NS)}. \end{cases} \quad (1.13)$$

Für die Typ II Superstrings ergeben sich Raum-Zeit Bosonen und Fermionen als das direkte Produkt von rechtslaufenden (r) mit linkslaufenden (l) Weltflächen Fermionen aus den entsprechenden Sektoren.⁶ So ergeben die Kombinationen $NS_r \otimes NS_l$ (NS-NS) und $R_r \otimes R_l$ (R-R) Raum-Zeit Bosonen, wohingegen $NS_r \otimes R_l$ und $R_r \otimes NS_l$ Raum-Zeit Fermionen liefern. Die heterotischen Stringtheorien besitzen nicht-abelsche Eichsymmetrien, und haben damit Vektorbosonen (zusammen mit ihren Superpartnern, den *Gauginos*) in der adjungierten Darstellung der entsprechenden Eichgruppe in ihrem Raum-Zeit Spektrum. Das Spektrum der masselosen Raum-Zeit Bosonen aller vier Theorien ist in Tabelle 1.2 zusammengefaßt (da sich aufgrund von Supersymmetrie die fermionischen Anteile einer Theorie immer rekonstruieren lassen, werden in dieser Arbeit nur die bosonischen Anteile untersucht). Dabei beinhaltet jede Theorie einen Skalar ϕ (das Dilaton), ein antisymmetrisches Tensorfeld $B_{\mu\nu}$ und ein symmetrisches Tensorfeld $g_{\mu\nu}$ (das Graviton). Darüber hinaus bezeichnet A_μ einen Vektor, $C_{\mu\nu\rho}$ ist eine 3-Form (d.h. vollständig antisymmetrisch in allen 3 Indizes) und $\mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma}^*$ ist eine 4-Form mit selbstdualer Feldstärke. Die Typ II Theorien enthalten als Superpartner des Gravitons zwei *Gravitinos* ψ_μ , die in der Typ IIA Theorie entgegengesetzte und in der Typ IIB Theorie gleiche Chiralität besitzen: entsprechend spricht man von einer *nicht-chiralen* (Typ IIA) bzw. *chiralen* (Typ IIB) Theorie.

⁵Es gibt noch eine fünfte konsistente Theorie, die sog. *Typ I $SO(32)$ Stringtheorie*, welche aber eine Theorie offener Strings ist.

⁶Weltflächen Bosonen erfüllen periodische Randbedingungen und tragen nicht zum Raum-Zeit Spektrum bei.

Stringtheorie	Anzahl der Q's	masseloses bosonisches Spektrum	
IIA	32	NS-NS	$g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi$
		R-R	$A_\mu, C_{\mu\nu\rho}$
IIB	32	NS-NS	$g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}^1, \phi$
		R-R	$l, B_{\mu\nu}^2, \mathcal{D}_{\mu\nu\rho\sigma}^*$
Heterotisch $E_8 \times E_8$	16	$g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi$ A_μ^a in der Adjungierten von $E_8 \times E_8$	
Heterotisch $SO(32)$	16	$g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi$ A_μ^a in der Adjungierten von $SO(32)$	

Tabelle 1.2: Die Spektren der masselosen bosonischen Zustände der vier konsistenten Theorien geschlossener Strings in $d = 10$.

Neben den in Tabelle 1.2 dargestellten masselosen Spektren enthält jede Stringtheorie unendlich viele massive Anregungen: diese sind in Einheiten der für Strings charakteristischen Masse quantisiert, welche durch die Planck Masse m_P aus (1.6) gegeben ist. Im Vergleich zu den experimentell zur Verfügung stehenden Energien ist m_P aber so groß, daß die massiven Moden nur in virtuellen Zuständen auftreten. Zur Beschreibung von Stringtheorien bei niedrigen Energien stellt sich ein Zugang als besonders fruchtbar heraus, der durch die sog. *Niederenergie effektive Wirkung* gegeben ist, welche nur von den masselosen Feldern abhängt: die massiven Zustände sind „ausintegriert“, wobei der Austausch von massiven Moden durch eine effektive Wechselwirkung der masselosen Moden ersetzt [12] wird. Die Niederenergie effektive Wirkung kann dabei mit Hilfe der Forderung konstruiert werden, daß ihre klassischen Streuamplituden die String S-Matrix Elemente für Energien $p \ll m_P$ reproduzieren [13,14]. Dazu berechnet man zunächst die String S-Matrix Elemente als Entwicklung in der Kopplungskonstanten g_S ; anschließend wird die Niederenergie effektive Wirkung als Funktion nur der masselosen Felder derart in Potenzen von $p^2\alpha'$ konstruiert, daß ihre S-Matrix für $p^2\alpha' \ll 1$ die String S-Matrix ergibt. Auf diese Weise ergibt sich die Niederenergie effektive Wirkung als Reihenentwicklung sowohl in der Stringkopplungskonstanten g_S als auch in $p^2\alpha'$. Letzteres entspricht einer Entwicklung in Raum-Zeit Ableitungen, und für niedrige Energien genügt üblicherweise die Betrachtung nur der ersten beiden Terme: dabei bezeichnet man den $(p^2\alpha')^0$ -Term als *effektives Potential*, und der $(p^2\alpha')^1$ -Beitrag beinhaltet die kinetischen Terme für die masselosen Felder.

Für die zehndimensionalen geschlossenen Stringtheorien stellt sich heraus, daß ihre Niederenergie effektiven Wirkungen durch die Typ IIA bzw. Typ IIB Supergravitation (den beiden Typ II Superstringtheorien entsprechend), sowie der an eine $SO(32)$ bzw. $E_8 \times E_8$ Super-Yang-Mills Theorie gekoppelten zehndimensionalen Supergravitation mit 16 Superladungen (den beiden heterotischen Stringtheorien entsprechend) gegeben sind.

1.3 Aufbau und Gliederung der Arbeit

In dieser Arbeit werden die Kompaktifizierungen der zehndimensionalen Typ IIB Supergravitation, als die Niederenergie effektive Wirkung der Typ IIB Superstring Theorie, auf einer Calabi-Yau 3-faltigkeit CY_3 und Calabi-Yau 4-faltigkeit CY_4 im Limes großen Volumens untersucht. Dazu ist in Kapitel 2 zunächst die Typ IIB Supergravitation in $d = 10$ vorgestellt: neben der Darstellung des Feldinhaltes und der Symmetrieeigenschaften wird insbesondere auf die Präsenz der 4-Form mit selbstdualer Feldstärke im Spektrum eingegangen, was in [23] zur Formulierung einer nicht-selbstdualen Wirkung (der *NSD-Wirkung*) geführt hat. Aus ihr lassen sich nach Implementierung der Selbstdualitätsbedingung auf der Ebene der Euler-Lagrange Gleichungen die richtigen Typ IIB Bewegungsgleichungen herleiten.

Kapitel 3 stellt das Grundkonzept von Kompaktifizierungen vor, mit deren Hilfe sich aus einer in einem höherdimensionalen Raum formulierten Theorie eine entsprechend niederdimensionalere Theorie ergibt. Dabei ist der Hauptfokus auf die in dieser Arbeit betrachteten Calabi-Yau Kompaktifizierungen gerichtet, und die in diesem Zusammenhang besonders wichtigen Metrik-Moduli werden in einem eigenen Abschnitt gesondert behandelt.

In Kapitel 4 wird die Kompaktifizierung der zehndimensionalen Typ IIB Supergravitation auf einer generischen Calabi-Yau 3-faltigkeit mit $SU(3)$ -Holonomie betrachtet. Zu diesem Zweck wird als erstes die $N = 2$ Supergravitation in $d = 4$ zusammen mit den relevanten masselosen Supermultipletts erläutert, und anschließend auf CY_3 -spezifische Eigenschaften eingegangen, welche in den darauffolgenden Abschnitten immer wieder benutzt werden. Nach Analyse des sich in $d = 4$ ergebenden Spektrums werden im folgenden Calabi-Yau 3-faltigkeiten mit eindeutiger komplexer Struktur, d.h. $h^{(2,1)} = 0$, untersucht. Der Fall $h^{(2,1)} \neq 0$ ist schon zuvor in der Literatur [15–19] behandelt worden, und gibt die Kopplungen der entsprechenden Vektormultipletts an. Noch nicht bekannt waren hingegen die allgemeinen Kopplungen der $h^{(1,1)}$ Tensormultipletts und des Doppel-Tensor Multipletts, die an dieser Stelle für beliebige Wahl von $h^{(1,1)}$ hergeleitet werden, und in [20] veröffentlicht worden sind. Dabei wird die zehndimensionale NSD-Wirkung ohne Benutzung der Selbstdualitätsbedingung kompaktifiziert, was eine NSD-Wirkung für Typ IIB in $d = 4$ ergibt. Setzt man in den Euler-Lagrange Gleichungen die kompaktifizierte Selbstdualitätsbedingung ein, so müssen sich die richtigen vierdimensionalen Bewegungsgleichungen ergeben: dies wird für den Fall der antisymmetrischen Tensorfelder im Limes $l = 0$, $\phi = \text{const.}$ und $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ dazu benutzt, die richtige vierdimensionale NSD-Wirkung anzugeben. Anschließend werden die antisymmetrischen Tensorfelder zu Skalaren dualisiert, und die Lagrange-Dichte in dieser dualen Feldbasis angegeben: in dieser Form konnte die Lagrange-Dichte in [20] auf diejenige der auf der Mirrormannigfaltigkeit kompaktifizierten Typ IIA Theorie abgebildet werden. Schließlich werden noch die Symmetrieeigenschaften der Wirkung in beiden Feldbasen untersucht.

Im darauffolgenden Kapitel werden Kompaktifizierungen der zehndimensionalen NSD-Wirkung auf Calabi-Yau 4-faltigkeiten mit $SU(4)$ -Holonomie betrachtet, was eine entsprechende NSD-Wirkung in $d = 2$ ergibt. Nach Erörterung von

$N = (4, 0)$ Supergravitation in $d = 2$, Zusammenstellung der CY_4 -Charakteristika sowie Spektrumsanalyse wird diese Wirkung hergeleitet und gezeigt, daß die sich aus ihr ergebenden Euler-Lagrange Gleichungen für die antisymmetrischen Tensorfelder im Limes $l = 0$, $\phi = \text{const.}$ und $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ nach Implementierung der Selbstdualitätsbedingung mit den kompaktifizierten Bewegungsgleichungen übereinstimmen. Anschließend wird der Fall $h^{(4,0)} = h^{(0,4)} = h^{(1,1)} = 1$, $h^{(2,2)} = h^{(3,1)} = 0$ genauer untersucht, der auf ein Gravitationsmultiplett sowie ein chirales Materiemultiplett führt.

Das letzte Kapitel schließlich befaßt sich mit der $K3 \times K3$ -Kompaktifizierung der Niederenergie effektiven Wirkung des zehndimensionalen heterotischen Strings. Dazu wird in zwei Schritten vorgegangen, und nach einer ersten (im Anhang F durchgeführten) $K3$ -Kompaktifizierung zu sechs Raum-Zeit Dimensionen eine weitere $K3$ -Kompaktifizierung vorgenommen: dies ergibt, wie schon Typ IIB auf CY_4 , eine zweidimensionale Theorie mit $N = (4, 0)$ Supersymmetrie. Es wird insbesondere untersucht, welcher der nicht-chiralen Skalare zusammen mit der zweidimensionalen Metrik das Gravitationsmultiplett bildet, was in Kapitel 5 aufgrund der in $d = 2$ nicht möglichen Weyl-Reskalierung problematisch war; die insgesamt in Kapitel 5 und 6 vorgestellten Ergebnisse sind in [21] zur Veröffentlichung vorgesehen.

Der Anhang enthält neben einem allgemeinen Teil über die den Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten zugrunde liegenden mathematischen Konzepte noch Detailrechnungen zu den einzelnen Kapiteln.

Kapitel 2

Typ IIB Supergravitation in $d = 10$

Die zehndimensionale IIB Superstring Theorie ergibt in ihrem Niederenergie Limit eine zehndimensionale chirale Supergravitation mit $N = (2, 0)$ Supersymmetrie - die sog. *Typ IIB Supergravitation* [24]. Die bosonischen masselosen Felder in dieser Theorie sind dabei das durch die Metrik beschriebene Graviton g_{MN} ($M, N = 0, \dots, 9$), ein Dublett antisymmetrischer Tensoren B_{MN}^I ($I = 1, 2$), zwei reelle Skalarfelder ϕ, l und eine 4-Form \mathcal{D}_{MNPQ} mit selbst-dualer Feldstärke. g_{MN}, B_{MN}^1 und ϕ kommen aus dem NS-NS Sektor, wohingegen B_{MN}^2, l und \mathcal{D}_{MNPQ} aus dem R-R Sektor stammen; ϕ ist das zehndimensionale Dilaton der Typ IIB Stringtheorie, und l wird auch *Axion* genannt.

Es ist bekannt, daß sich die Bewegungsgleichungen der zehndimensionalen Typ IIB Supergravitation nicht aus einer manifest kovarianten Wirkung herleiten lassen.¹ Das Problem in der Konstruktion einer kovarianten Niederenergie effektiven Wirkung für die oben aufgeführten masselosen Felder ist dabei die Bewegungsgleichung für die 4-Form \mathcal{D} : diese besagt, daß die zugehörige 5-Form Feldstärke F selbstdual ist, $F = \star F$. Das führt zum Verschwinden des üblichen kinetischen Terms $\int d^{10}x (F_{MNPQR})^2$, welcher sowohl den selbstdualen als auch den anti-selbstdualen Anteil von F beschreibt [24]. In [25] wurde gezeigt, daß wenn überall in den Bewegungsgleichungen F zu Null gesetzt wird, man diese eingeschränkten Bewegungsgleichungen aus einer Wirkung ableiten kann, indem man nach allen Feldern bis auf \mathcal{D} variiert.

In [23] schließlich ist es gelungen, eine *nicht-selbstduale* (NSD-) Wirkung anzugeben, in der sowohl F als auch $\star F$ vorkommen. In dieser kovarianten NSD-Wirkung wird F als *nicht* selbstdual angenommen; sie hat aber die Eigenschaft, daß bei Einsetzen der Selbstdualitätsbedingung in den aus ihr resultierenden Bewegungsgleichungen man die Bewegungsgleichungen der Typ IIB Supergravitation erhält. Der große Vorteil der NSD-Wirkung besteht darin, daß man sie zur Kompaktifizierung benutzen kann, um die richtigen Bewegungsgleichungen

¹In [22] wird eine kovariante Wirkung angegeben, die aber nicht global definiert ist; daher soll im folgenden zur Kompaktifizierung der Typ IIB Supergravitation die NSD-Wirkung (2.1) aus [23] benutzt werden.

der kompaktifizierten Typ IIB Supergravitation zu erhalten. Somit läßt sich die Kompaktifizierung der zehndimensionalen Bewegungsgleichungen vermeiden, was ungleich aufwendiger wäre.

Diese NSD-Wirkung ist in der Einsteinbasis nun wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & -\frac{1}{2} \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} \left(\mathcal{R}_{10} - \frac{1}{4} \text{Tr}(\partial M \partial M^{-1}) + \frac{3}{4} H^I M_{IJ} H^J \right. \\ & \left. + \frac{5}{6} F^2 + \frac{1}{96 \sqrt{-g^{(10)}}} \epsilon_{IJ} \mathcal{D} \wedge H^I \wedge H^J \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

wobei \mathcal{R}_{10} der zehndimensionale Ricci Skalar ist, und die anderen Größen durch

$$\begin{aligned} M_{IJ} & \equiv \frac{1}{\text{Im}\lambda} \begin{pmatrix} |\lambda|^2 & -\text{Re}\lambda \\ -\text{Re}\lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \equiv l + ie^{-\phi}, \\ H^I_{MNP} & \equiv \partial_{[M} B^I_{NP]} = \frac{1}{3} (\partial_M B^I_{NP} + \partial_N B^I_{PM} + \partial_P B^I_{MN}), \\ F_{MNPQR} & \equiv \partial_{[M} \mathcal{D}_{NPQR]} + \frac{3}{4} \epsilon_{IJ} B^I_{[MN} \partial_P B^J_{QR]} \end{aligned} \quad (2.2)$$

gegeben sind.

In (2.1) sind zur abkürzenden Schreibweise die Raum-Zeit Indizes nicht explizit ausgeschrieben; so sind alle Terme mit der zehndimensionalen Metrik kontrahiert, bis auf den topologischen Term $\mathcal{D} \wedge H^I \wedge H^J$: dieser ist mit dem zehndimensionalen ϵ -Tensor gemäß

$$\mathcal{D} \wedge H^I \wedge H^J = \epsilon^{MNPQRSTUVW} \mathcal{D}_{MNPQ} H^I_{RS} H^J_{UVW} \quad (2.3)$$

kontrahiert. Für den ϵ -Tensor ϵ_{IJ} , der sich nicht auf Raum-Zeit Indizes bezieht, wird zudem $\epsilon_{12} = +1$ gewählt.²

Wie schon erwähnt, erhält man die Bewegungsgleichungen der zehndimensionalen Typ IIB Supergravitation nun als die Euler-Lagrange Gleichungen der Wirkung (2.1), wenn in ihnen zusätzlich die Selbstdualitätsbedingung

$$F_{MNPQR} = \frac{1}{5! \sqrt{-g^{(10)}}} \epsilon_{MNPQRSTUVW} F^{STUVW} \quad (2.4)$$

eingesetzt wird.

Für spätere Zwecke ist es noch nützlich, die Wirkung (2.1) in einen 4-Form unabhängigen und einen 4-Form abhängigen Teil aufzuspalten:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 = \int d^{10}x (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) \quad , \quad (2.5)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 & \equiv -\frac{1}{2} \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} \left(\mathcal{R}_{10} - \frac{1}{4} \text{Tr}(\partial M \partial M^{-1}) + \frac{3}{4} H^I M_{IJ} H^J \right), \\ \mathcal{S}_2 & \equiv -\frac{1}{2} \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} \left(\frac{5}{6} F^2 + \frac{1}{96 \sqrt{-g^{(10)}}} \epsilon_{IJ} \mathcal{D} \wedge H^I \wedge H^J \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

²Für ϵ_{IJ} ($I, J = 1, 2$) mit $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = +1$ soll im Ggs. zu den ϵ -Tensoren mit Raum-Zeit Indizes $\epsilon_{IJ} = \epsilon^{IJ}$ gelten.

Die Wirkung \mathcal{S}_1 läßt sich auch explizit schreiben als

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 = -\frac{1}{2} \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} & \left(\mathcal{R}_{10} + \frac{1}{2} [e^{2\phi} (\partial_M l)^2 + (\partial_M \phi)^2] \right. \\ & \left. + \frac{3}{4} e^\phi [|\lambda|^2 (H^1)^2 - 2l H^1 H^2 + (H^2)^2] \right), \end{aligned} \quad (2.7)$$

wobei $H^I H^J \equiv H_{MNP}^I H^{JMNP}$.

Die Wirkung (2.1) besitzt eine Reihe von Symmetrien. So ist sie zunächst einmal invariant unter Eichtransformationen (mit Parametern Σ_{NPQ}) des 4-Form Feldes \mathcal{D}

$$\delta \mathcal{D}_{MNPQ} = \partial_{[M} \Sigma_{NPQ]}, \quad (2.8)$$

worunter die anderen Felder nicht transformieren.

Zum zweiten gibt es die Eichtransformationen (mit Parametern Ω_N^I) der beiden antisymmetrischen Tensoren B^I

$$\delta B_{MN}^I = \partial_{[M} \Omega_{N]}^I. \quad (2.9)$$

Damit F darunter invariant ist, sieht man aus (2.2), daß die 4-Form \mathcal{D} wie

$$\delta \mathcal{D}_{MNPQ} = -\frac{3}{4} \epsilon_{IJK} \Omega_{[M}^I H_{NPQ]}^J \quad (2.10)$$

transformiert.

Schließlich ist die Wirkung (2.1) außerdem noch manifest invariant unter globalen $SL(2, \mathbb{R})$ -Transformationen (mit Transformationsmatrix $\Lambda \in SL(2, \mathbb{R})$), unter denen

$$\begin{aligned} H & \equiv \begin{pmatrix} H^1 \\ H^2 \end{pmatrix} \mapsto H' = \Lambda H \\ M & \mapsto M' = \Lambda^{-1T} M \Lambda^{-1}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die Metrik in der Einsteinbasis und die 4-Form \mathcal{D} sind $SL(2, \mathbb{R})$ -invariant. Wenn die $SL(2, \mathbb{R})$ -Matrix Λ durch

$$\Lambda = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad (2.12)$$

gegeben ist, so berechnet sich aus dem Transformationsverhalten von M das von $\text{Re}\lambda$ und $\text{Im}\lambda$ zu

$$\begin{aligned} l & \mapsto l' = (ac|\lambda|^2 + (ad + bc)l + bd) \\ e^\phi & \mapsto e^{\phi'} = |c\lambda + d|^2 e^\phi, \end{aligned} \quad (2.13)$$

und für $\lambda = l + i e^{-\phi}$ ergibt sich

$$\lambda \mapsto \lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}. \quad (2.14)$$

Diese Transformationen besitzen zwei Erzeugende, die durch

$$\lambda \mapsto \lambda + 1 \quad , \quad \lambda \mapsto -\frac{1}{\lambda} \quad (2.15)$$

gegeben sind.

Die $SL(2, \mathbb{R})$ -Symmetrie der Typ IIB Supergravitation hat zu der Vermutung geführt, daß eine $SL(2, \mathbb{Z})$ -Untergruppe von $SL(2, \mathbb{R})$ eine Symmetrie der vollen Typ IIB Stringtheorie ist [26]. Aufgrund von Ladungsquantisierung ist dabei $SL(2, \mathbb{Z})$ (bei der die Matrixeinträge a, b, c und d aus (2.12) Elemente von \mathbb{Z} anstelle von \mathbb{R} sind) die größtmögliche Untergruppe von $SL(2, \mathbb{R})$, die eine Symmetrie der gesamten Typ IIB Stringtheorie sein kann. Für den Fall der Richtigkeit obiger Vermutung beachte man, daß die Erzeugende $\lambda \mapsto -\frac{1}{\lambda}$ aus (2.15) insbesondere die Transformation

$$e^\phi \mapsto e^{-\phi} \quad (2.16)$$

beinhaltet, unter der nach (1.11) die Stringkopplungskonstante g_S invertiert wird: Bereiche starker Kopplung werden auf Bereiche schwacher Kopplung abgebildet und umgekehrt. In diesem Sinne nennt man die Typ IIB Stringtheorie auch *selbstdual*.³ Da ein störungstheoretischer Zugang zur Stringtheorie nur für den Bereich schwacher Kopplung (d.h. mit kleinem Wert von g_S) definiert ist, läßt sich die vermutete $SL(2, \mathbb{Z})$ -Symmetrie nicht Ordnung für Ordnung in der Stringstörungstheorie nachprüfen, und stellt insofern eine *nicht-perturbative Symmetrie* dar. In [8] wird allerdings erläutert, wie sich dennoch nichttriviale Evidenz für diese Symmetrie finden läßt.

³Eine *Stringdualität* ist durch eine Äquivalenzabbildung zwischen zwei verschiedenen Stringtheorien gegeben, wobei i.A. der Bereich schwacher Kopplung der einen Theorie auf den Bereich starker Kopplung der anderen Theorie abgebildet wird und umgekehrt.

Kapitel 3

Kompaktifizierungen

3.1 Kaluza-Klein Theorie

Unter Kompaktifizierung wird in dieser Arbeit der in *Kaluza-Klein Theorien* enthaltene Grenzfall der *dimensionalen Reduktion* verstanden, in dem nur masselose Felder berücksichtigt werden. Dabei werden in Kaluza-Klein Theorien Entwicklungen von d -dimensionalen Gravitationstheorien um klassische Lösungen betrachtet, welche nicht maximal symmetrisch sind (die folgende Darstellung orientiert sich eng an [27]). Es wird also angenommen, daß der Grundzustand von d -dimensionaler Allgemeiner Relativitätstheorie nicht durch den d -dimensionalen Minkowski Raum \mathcal{M}_d , sondern durch einen Produktraum der Form

$$\mathcal{M}_d = \mathcal{M}_{d'} \times \mathcal{K}_{d-d'} \quad (3.1)$$

gegeben ist. Dabei bezeichnet $\mathcal{M}_{d'}$ den d' -dimensionalen Minkowski Raum ($d' < d$), und $\mathcal{K}_{d-d'}$ ist eine (interne) kompakte Mannigfaltigkeit der reellen Dimension $d - d'$.

Den Ausgangspunkt einer Kaluza-Klein Theorie bildet das Graviton g_{MN} ($M, N = 1, \dots, d$) zusammen mit einer gewissen Anzahl von Materiefeldern (die hier kollektiv als Φ bezeichnet werden) in einer d -dimensionalen Raum-Zeit mit Lorentzsignatur $(-, +, +, \dots)$. Anschließend sucht man nach Grundzustandslösungen der Feldgleichungen für g_{MN} und Φ , wobei für g_{MN} gem. (3.1) der Produktansatz

$$g_{MN}(x, y) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x) & 0 \\ 0 & g_{ab}(x, y) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

gemacht wird.¹ In (3.2) sind x^μ ($\mu = 0, 1, \dots, d' - 1$) die Koordinaten einer d' -dimensionalen Raum-Zeit mit Lorentzsignatur, wohingegen y^a ($a = 1, \dots, d - d'$) die reellen Koordinaten einer $d - d'$ -dimensionalen kompakten Mannigfaltigkeit $\mathcal{K}_{d-d'}$ mit euklidischer Signatur $(+, \dots, +)$ bezeichnen.

¹In einer allgemeinen Kaluza-Klein Theorie sind die nebendiagonalen Einträge der Matrix aus (3.2) nicht Null, sondern durch die Felder $g_{\mu b}$ bzw. $g_{a\nu}$ gegeben; bei den in vorliegender Arbeit untersuchten Kompaktifizierungen liefern diese Felder jedoch keinen Beitrag, und sind daher von vornherein zu Null gesetzt.

Bei den hier betrachteten Kompaktifizierungen von Stringtheorien stellt Weyl-Invarianz auf der Weltfläche (zu niedrigster Ordnung in der entsprechenden Kopplungskonstanten) die Konsistenzbedingung an die interne kompakte Mannigfaltigkeit, daß diese Ricci-flach sein muß [1–3]. Des weiteren schränkt die Forderung nach erhaltenen Superladungen die Holonomiegruppe von $\mathcal{K}_{d-d'}$ ein: man findet [1], daß Teile der ursprünglich vorhandenen Supersymmetrie bei der Kompaktifizierung erhalten bleiben, wenn $\mathcal{K}_{d-d'}$ als *Calabi-Yau Mannigfaltigkeit* gewählt wird. Dabei ist eine Calabi-Yau Mannigfaltigkeit CY_n per Definition A.7.1 eine kompakte Kähler n -faltigkeit, deren erste Chern-Klasse verschwindet (eine detaillierte Erklärung der in dieser Definition verwendeten Begriffe ist in Anhang A gegeben). Im folgenden werden also nur solche (komplex) n -dimensionalen Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten CY_n als interne kompakte Mannigfaltigkeit betrachtet.

Zur Bestimmung des Spektrums der sich bei Kompaktifizierung in d' Raum-Zeit Dimensionen ergebenden Theorie betrachtet man kleine Fluktuationen der d -dimensionalen Felder um ihre Grundzustände,

$$\begin{aligned} g_{MN} &= g_{MN}^0 + \delta g_{MN}, \\ \Phi &= \Phi^0 + \delta\Phi, \end{aligned} \quad (3.3)$$

setzt diese in die Bewegungsgleichungen ein, und behält alle in den Fluktuationen linearen Terme. Da CY_n insbesondere kompakt ist, lassen sich diese Terme (der Einfachheit halber kollektiv als $\hat{\Phi}^{(I)}$ bezeichnet, wobei (I) den jeweiligen Tensorcharakter indiziert) in harmonische Eigenfunktionen $Y_{(I)}^\alpha(y)$ des (reell) $2n$ -dimensionalen Laplace Operators auf CY_n entwickeln:

$$\hat{\Phi}^{(I)}(x, y) = \sum_{\alpha} \hat{\Phi}_{\alpha}^{(I)}(x) Y_{(I)}^{\alpha}(y). \quad (3.4)$$

Auf diese Weise erhält man eine endliche Anzahl masseloser Zustände $\hat{\Phi}_0^{(I)}(x)$ als Koeffizienten der Nullmoden $Y_{(I)}^0(y)$ des Laplace Operators auf CY_n , sowie eine unendliche Anzahl massiver Zustände, deren Massen in Einheiten einer für CY_n charakteristischen Massenskala $m \propto R^{-1}$ (wobei R die „Größe“ von CY_n angibt) quantisiert sind. Wenn diese Massenskala genügend groß ist, so ergibt sich als niederenergetische Approximation eine d' -dimensionale Theorie nur der masselosen Zustände, und das beschriebene Verfahren wird in dem Fall auch *dimensionale Reduktion* genannt.

Je nach der durch (I) indizierten Tensorstruktur von $Y_{(I)}^0(y)$ sieht man, daß die Nullmoden gerade durch die Entwicklung in entsprechende harmonische Differentialformen vom Grad (p, q) auf CY_n gegeben sind. Die Anzahl unabhängiger harmonischer (p, q) -Formen entspricht auf Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten der Hodgezahl $h^{(p,q)}$, und insofern ist das d' -dimensionale masselose Spektrum von den Kohomologiegruppen der betrachteten Mannigfaltigkeit abhängig (s. Anhang A).

Die durch oben beschriebenes Verfahren gewonnenen masselosen Zustände bezeichnet man auch als *Moduli*, und auf ihre physikalische Relevanz wird im nächsten Abschnitt noch einmal kurz eingegangen. Anschließend wird der Fall der Metrik-Moduli genauer untersucht, da diese für den Rest der Arbeit eine zentrale Rolle spielen.

3.2 Moduli

Die bei den Kompaktifizierungen als interne Mannigfaltigkeiten auftretenden Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten gehören typischerweise einer kontinuierlichen Familie von Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten an: die auf ihnen betrachteten Hintergrundfelder können derart stetig deformiert werden, daß sich die Calabi-Yau Bedingung und die Energie des Hintergrunds nicht ändern. Die sog. *Moduli* parametrisieren dabei den Übergang eines Hintergrunds in einen benachbarten gleicher Energie, und man definiert [28]:

Definition 3.2.1. Der *Moduli Raum* ist der Raum, welcher durch die erlaubten Deformationen eines auf der internen Mannigfaltigkeit gegebenen Hintergrunds parametrisiert wird.

So ist z.B. die Reskalierung der Metrik mit einer Konstanten immer erlaubt, da die Bedingung der Ricci-Flachheit erhalten bleibt.

In der Niederenergie effektiven Wirkung, die die Streuamplituden der masselosen Moden im Limes unendlicher String Spannung reproduziert, treten die Moduli als masselose neutrale Skalarfelder auf, deren Vakuumerwartungswert nicht von den Bewegungsgleichungen festgelegt wird: sie parametrisieren daher flache Richtungen des skalaren Potentials.

3.2.1 Metrik-Moduli

Im folgenden werden die Moduli untersucht, welche von erlaubten Metrik-Deformationen auf Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten herrühren [29–31]. Aufgrund des Theorems von Calabi und Yau aus Abschnitt A.7 läßt sich der Parameterraum einer Calabi-Yau Mannigfaltigkeit \mathcal{M} dabei als der Parameterraum von Ricci-flachen Metriken auf \mathcal{M} auffassen.² Für eine gegebene Ricci-flache Hintergrund-Metrik, $\mathcal{R}_{ab}(g^0) = 0$, werden also diejenigen infinitesimalen Metrik-Deformationen δg gesucht, für die $g^0 + \delta g$ ebenfalls Ricci-flach ist:

$$\mathcal{R}_{ab}(g^0 + \delta g) = 0. \quad (3.5)$$

Linearisierung von (3.5) führt dazu, daß δg in der Eichung $\nabla^a \delta g_{ab} = 0$ die sog. *Lichnerowicz Gleichung* erfüllt:

$$\Delta_L \delta g_{ab} \equiv \nabla^k \nabla_k \delta g_{ab} + 2\mathcal{R}_a^c{}_b^d \delta g_{cd} = 0. \quad (3.6)$$

Mit den im Anhang A zusammengestellten Eigenschaften von Kähler Mannigfaltigkeiten läßt sich zunächst feststellen [31], daß in komplexen Koordinaten der Lichnerowicz Operator Δ_L die Moden mit verschiedener Indexstruktur nicht mischt, d.h. $\delta g_{i\bar{j}}$, δg_{ij} und $\delta g_{\bar{i}\bar{j}}$ müssen (3.6) separat erfüllen.

²In [32] wird gezeigt, daß die erste Chern Klasse $c_1(\mathcal{M})$ invariant unter stetigen Deformationen der Metrik, $g \mapsto g + \delta g$, ist. Insbesondere bleibt also die Eigenschaft $c_1(\mathcal{M}) = 0$ für Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten unter Metrik-Deformationen erhalten.

Aus den Metrik-Deformationen mit gemischten Indizes lässt sich eine reelle $(1, 1)$ -Form gemäß

$$k = i\delta g_{i\bar{j}} d\xi^i \wedge d\bar{\xi}^{\bar{j}} \quad (3.7)$$

bilden. Es gilt, daß $\delta g_{i\bar{j}}$ genau dann (3.6) erfüllt, wenn k harmonisch ist:

$$\Delta_d k = (dd^\dagger + d^\dagger d)k = 0. \quad (3.8)$$

D.h., daß sich k in harmonische $(1, 1)$ -Formen entwickeln lässt:

$$i\delta g_{i\bar{j}} = \sum_A^{h(1,1)} \delta M^A(x) V_{i\bar{j}}^A, \quad (3.9)$$

wobei V^A eine geeignete Basis von $H^{(1,1)}(\mathcal{M})$ ist:

$$V^A = V_{i\bar{j}}^A d\xi^i \wedge d\bar{\xi}^{\bar{j}} \quad , \quad A = 1, \dots, h^{(1,1)}. \quad (3.10)$$

Aufgrund von (A.21) sieht man, daß k gerade der Deformation der Kähler Form J entspricht, und die $h^{(1,1)}$ reellen Moduli $M^A(x)$ nennt man die *Kähler Moduli*.

Bei der Untersuchung der Metrik-Deformationen mit gleichen Indizes genügt die Betrachtung von $\delta g_{i\bar{j}}$, da δg_{ij} und $\delta g_{\bar{i}\bar{j}}$ auseinander durch komplexe Konjugation hervorgehen. Aus $\delta g_{i\bar{j}}$ läßt sich nun eine $(0, 1)$ -Form mit einem holomorphen Vektor-Index³ bilden:

$$\delta g^i = g^{0\bar{i}} \delta g_{i\bar{j}} d\bar{\xi}^{\bar{j}}. \quad (3.11)$$

Man kann zeigen, daß $\delta g_{i\bar{j}}$ genau dann (3.6) erfüllt, wenn δg^i $\bar{\partial}$ -harmonisch ist:

$$\Delta_{\bar{\partial}} \delta g^i = (\bar{\partial}\bar{\partial}^\dagger + \bar{\partial}^\dagger\bar{\partial})\delta g^i = 0. \quad (3.12)$$

Auf einer Calabi-Yau n -faltigkeit gilt nun (unter Verwendung der eindeutigen $(n, 0)$ -Form Ω), daß die $(0, 1)$ -Formen mit holomorphem Vektor-Index zu den $(n - 1, 1)$ -Formen äquivalente Objekte darstellen. Im konkreten Beispiel einer Calabi-Yau 3-faltigkeit CY_3 ist dieser Zusammenhang dabei für eine $(2, 1)$ -Form Φ ,

$$\Phi = \frac{1}{2} \Phi_{i\bar{j}\bar{k}} d\xi^i \wedge d\xi^j \wedge d\bar{\xi}^{\bar{k}}, \quad (3.13)$$

durch

$$\Phi^i \equiv \frac{1}{2} \bar{\Omega}^{ijk} \Phi_{j\bar{k}\bar{l}} d\bar{\xi}^{\bar{l}} \quad (3.14)$$

gegeben. Dabei gilt außerdem, daß Φ genau dann d -harmonisch ist, wenn Φ^i $\bar{\partial}$ -harmonisch ist. Damit ist auf CY_3 die Deformation $\delta g_{i\bar{j}}$ also genau dann eine Lösung der Lichnerowicz Gleichung (3.6), wenn sie sich gemäß

$$\delta g_{i\bar{j}} = \sum_{\alpha=1}^{h(2,1)} \delta Z^\alpha(x) b_{i\bar{j}}^\alpha(y) \quad (3.15)$$

³D.h., daß die $(0, 1)$ -Form ihre Werte im holomorphen Tangentialbündel T annimmt.

entwickeln läßt, wobei die b_{ij}^α durch Kontraktion der antiholomorphen $(0, 3)$ -Form $\bar{\Omega}$ mit den Basiselementen Φ^α von $H^{(2,1)}(CY_3)$ gebildet werden [17]:

$$b_{ij}^\alpha = \frac{-i}{\|\Omega\|^2} \bar{\Omega}_i{}^{lk} \Phi_{lkj}^\alpha \quad , \quad \|\Omega\|^2 \equiv \frac{1}{3!} \Omega_{ijk} \bar{\Omega}^{ijk} . \quad (3.16)$$

Bei der offensichtlichen Verallgemeinerung auf den CY_n -Fall für $n > 2$ läuft der Summationsindex α aus (3.15) dann bis $h^{(n-1,1)}$, Φ^α bezeichnet die Basiselemente von $H^{(n-1,1)}(CY_n)$, und die Kontraktion in (3.16) erfolgt mit der antiholomorphen $(0, n)$ -Form $\bar{\Omega}$, wobei dann $\|\Omega\|^2 \equiv \frac{1}{n!} \Omega_{i_1 \dots i_n} \bar{\Omega}^{i_1 \dots i_n}$. Insbesondere gilt in der verallgemeinerten Version von (3.16) für CY_n mit $n > 2$ also [33, 34]: die Existenz der holomorphen n -Form Ω erlaubt eine eindeutige Abbildung zwischen symmetrischen harmonischen $(0, 2)$ -Tensoren (bzw. $(2, 0)$ -Tensoren) und harmonischen $(n-1, 1)$ -Formen; da $H^{(2,0)}(CY_n) = H^{(0,2)}(CY_n) = 0$ für $n > 2$ gilt, gibt es keine antisymmetrischen $(2, 0)$ - bzw. $(0, 2)$ -Formen, und ein durch die verallgemeinerte Fassung von (3.16) gebildeter harmonischer $(0, 2)$ -Tensor ist automatisch symmetrisch.

Die Entwicklungsparameter $Z^\alpha(x)$ aus (3.15) sind komplex. Sie werden als *komplexe-Struktur Moduli* bezeichnet, da sie die Deformationen der komplexen Struktur auf CY_n parametrisieren; dies läßt sich wie folgt sehen [35]: die Metrikdeformationen mit gleichen Indizes ergeben eine Metrik $g^0 + \delta g$, die nicht länger hermitesch ist. Allerdings läßt sich eine Koordinatentransformation in ein anderes Koordinatensystem finden, bezüglich welchem die Metrik wieder hermitesch ist und nur Komponenten mit gemischten Indizes besitzt. Diese Koordinatentransformation kann allerdings nicht holomorph sein, da sie sonst die Indexstruktur eines Tensors nicht ändern würde: somit ist $g^0 + \delta g$ also hermitesch bzgl. einer anderen komplexen Struktur auf CY_n - einem neuen Satz von komplexen Koordinaten, welche nicht holomorph von den ursprünglichen Koordinaten abhängen.

Kapitel 4

Typ IIB auf CY_3

In diesem Kapitel wird die zehndimensionale Niederenergie effektive Typ IIB Stringtheorie auf einer generischen¹ Calabi-Yau 3-faltigkeit CY_3 kompaktifiziert. Eine solche (reell) sechsdimensionale CY_3 bricht $3/4$ der in $d = 10$ vorhandenen Supersymmetrie, so daß die resultierende vierdimensionale Theorie $N = 2$ Supersymmetrie besitzt, und im ersten Abschnitt werden relevante Aspekte von $N = 2$ Supergravitation in $d = 4$ kurz dargelegt. Ausgangspunkt für die Kompaktifizierung ist die im letzten Kapitel vorgestellte nicht-selbstduale Wirkung für Typ IIB Supergravitation in $d = 10$ [23]. Zunächst sollen jedoch einige wichtige Eigenschaften von Calabi-Yau 3-faltigkeiten zusammengestellt werden, die im weiteren Verlauf dieses Kapitels immer wieder benötigt werden. Anschließend wird das Spektrum untersucht, welches sich in $d = 4$ ergibt. Schließlich wird im Limes großen Volumens und für $h^{(2,1)} = 0$ die Wirkung für die kompaktifizierte vierdimensionale Typ IIB Theorie hergeleitet, und deren Symmetrieeigenschaften werden dargestellt; Detailrechnungen sind dabei im Anhang zusammengestellt.

4.1 $N = 2$ Supergravitation in $d = 4$

Im Fall von $N = 2$ erweiterter Supersymmetrie gibt es zwei Generatoren Q^i ($i = 1, 2$) von Supersymmetrietransformationen. Gemäß Tabelle 1.1 besitzt in vier Raum-Zeit Dimensionen jeder der beiden Generatoren vier unabhängige Spinorkomponenten, so daß insgesamt acht fermionische Superladungen vorhanden sind. Dabei lassen sich je zwei Komponenten eines Q^i zu Weyl-Spinoren Q_α^i und $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^i$ ($\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$) unterschiedlicher Chiralität zusammenfassen. Diese erfüllen die durch

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha^i, \bar{Q}_{\dot{\beta}j}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu \delta_j^i, \\ \{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} &= \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{ij} Z, \quad \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^i, \bar{Q}_{\dot{\beta}}^j\} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon_{ij} \bar{Z}, \\ [P_\mu, Q_\alpha^i] &= [P_\mu, \bar{Q}_{\dot{\alpha}i}] = [P_\mu, P_\nu] = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

¹D.h., daß die Holonomiegruppe $SU(3)$ ist, und nicht eine echte Untergruppe davon.

gegebene Supersymmetrie-Algebra [11], wobei P_μ den Impuls-Vierervektor bezeichnet, ϵ der zweidimensionale vollständig antisymmetrische Tensor ist, und $\sigma^\mu \equiv (-\mathbf{1}, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ die Pauli-Matrizen sind. Den Generator Z bezeichnet man als *zentrale Ladung* der Algebra, da er mit allen anderen Generatoren vertauscht.

Es lassen sich in $d = 4$ sechs masselose $N = 2$ Supermultipletts finden, die *on-shell* (d.h. unter Verwendung der Bewegungsgleichungen) jeweils vier bosonische und fermionische Freiheitsgrade besitzen, und in Tab. 4.1 zusammengefaßt sind: so gibt es ein Gravitationsmultiplett, welches neben dem Spin-2 Graviton $g_{\mu\nu}$ noch zwei Spin-3/2 Gravitinos $\psi_{\alpha\mu}^i$ und ein Spin-1 *Graviphoton* γ_μ enthält. Das Vektormultiplett [36] besteht aus einem Vektor v_μ , zwei Weyl-Fermionen λ_α^i (den *Gauginos*) und einem komplexen Skalar z . Das Hypermultiplett [37] beinhaltet zwei Weyl-Fermionen χ_α^i und vier reelle Skalare q^{ij} . Das Vektor-Tensor Multiplett [38, 39] setzt sich aus einem antisymmetrischen Tensor $B_{\mu\nu}$, einem Vektor, zwei Weyl-Fermionen sowie einem reellen Skalar zusammen. Das Tensormultiplett [40] enthält einen antisymmetrischen Tensor, zwei Weyl-Fermionen und drei reelle Skalare. Der Feldinhalt des Doppel-Tensor Multipletts schließlich ist durch zwei antisymmetrische Tensoren $B_{\mu\nu}^i$, zwei Weyl-Fermionen und zwei reelle Skalare gegeben: für dieses Multiplett ist bisher noch keine off-shell Darstellung gefunden worden (eine ausführliche Diskussion des Doppel-Tensor Multipletts und der Problematik einer off-shell Realisierung findet sich in [41]).

Gravitationsmultiplett	$(g_{\mu\nu}, \psi_{\alpha\mu}^i, \gamma_\mu)$
Vektormultiplett	$(v_\mu, \lambda_\alpha^i, z)$
Hypermultiplett	(χ_α^i, q^{ij})
Vektor-Tensor Multiplett	$(B_{\mu\nu}, v_\mu, \chi_\alpha^i, l)$
Tensormultiplett	$(B_{\mu\nu}, \chi_\alpha^i, \phi, l)$
Doppel-Tensor Multiplett	$(B_{\mu\nu}^i, \chi_\alpha^i, l, l')$

Tabelle 4.1: Multipletts von $N = 2$ Supergravitation in $d = 4$.

$N = 2$ Supergravitation schränkt die möglichen Wechselwirkungen der in Tab. 4.1 aufgeführten Multipletts stark ein. So sind z.B. die komplexen Skalare z der Vektormultipletts Koordinaten einer speziellen Kählermannigfaltigkeit \mathcal{M}_V [15], wohingegen die reellen Skalare q^{ij} der Hypermultipletts Koordinaten einer quaternionischen Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_H [42] darstellen; die Vektormultipletts können nicht an neutrale Hypermultipletts koppeln, und als Folge bilden \mathcal{M}_V und \mathcal{M}_H lokal ein direktes Produkt [43]:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_V \otimes \mathcal{M}_H. \quad (4.2)$$

lautet. Es ist genau dieser Limes großen Volumens, in dem die zehndimensionale Typ IIB Supergravitation eine gute Approximation darstellt, und im folgenden beziehen sich alle weiteren Definitionen und Rechnungen auf diesen Limes.

Die Kähler Form ist wie in (A.21) definiert,

$$J = i g_{i\bar{j}} d\xi^i \wedge d\bar{\xi}^{\bar{j}} = M^A(x) V^A, \quad (4.9)$$

wobei ξ^i und $\bar{\xi}^{\bar{i}}$ ($i, \bar{i} = 1, 2, 3$) die komplexen Koordinaten auf CY_3 sind, V^A die Basis von $H^{(1,1)}$ aus (3.9) ist, und $M^A(x)$ die entsprechenden Kähler Moduli sind. Mit ihr läßt sich das Volumen \mathcal{V} der Calabi-Yau 3-faltigkeit als

$$\mathcal{V} = i \int_{CY_3} \sqrt{g^{(6)}} d^6 \xi = \frac{1}{3!} \int_{CY_3} J \wedge J \wedge J = \frac{1}{3!} \kappa_{ABC} M^A M^B M^C \quad (4.10)$$

schreiben, wobei die sog. *Tripelschnittzahlen* von CY_3 durch

$$\kappa_{ABC} = \int_{CY_3} V^A \wedge V^B \wedge V^C \quad (4.11)$$

gegeben sind.

Auf dem Raum der (1, 1)-Formen definiert man wie in [44] eine Metrik via

$$G_{AB} \equiv -\frac{i}{4\mathcal{V}} \int_{CY_3} V^A \wedge \star V^B = -\frac{i}{4\mathcal{V}} \int_{CY_3} V_{i\bar{j}}^A V_{k\bar{l}}^B g^{i\bar{l}} g^{k\bar{j}} \sqrt{g^{(6)}} d^6 \xi. \quad (4.12)$$

Hierbei wurde die Definition des Hodge Sternoperators aus (A.14) benutzt. Manchmal ist es nützlich, die Metrik G_{AB} durch die Kähler Moduli und Tripelschnittzahlen auszudrücken. Dazu bemerkt man, daß sich $\star V^B$ auch als

$$\star V^B = i(J \wedge V^A - \frac{1}{4} \mathcal{V}^{-1} \kappa_{BCD} M^C M^D J \wedge J) \quad (4.13)$$

schreiben läßt. Zusammen mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \kappa_A &\equiv \frac{1}{3!} \int_{CY_3} V^A \wedge J \wedge J, \\ \kappa_{AB} &\equiv \frac{1}{3!} \int_{CY_3} V^A \wedge V^B \wedge J \\ &= -\frac{i}{3!} \int_{CY_3} V_{i\bar{j}}^A V_{k\bar{l}}^B (g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} - g^{i\bar{l}} g^{k\bar{j}}) \sqrt{g^{(6)}} d^6 \xi \end{aligned} \quad (4.14)$$

liefert Einsetzen in (4.12) dann

$$\begin{aligned} G_{AB} &= -\frac{1}{4} \mathcal{V}^{-1} \kappa_{ABC} M^C + \frac{1}{16} \mathcal{V}^{-2} \kappa_{ACD} M^C M^D \kappa_{BEF} M^E M^F \\ &= -\frac{3}{2} \left(\frac{\kappa_{AB}}{\mathcal{V}} - \frac{3}{2} \frac{\kappa_A \kappa_B}{\mathcal{V}^2} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.3 Das Spektrum

Gemäß dem Hodge Diamanten (4.3) findet man bei Kompaktifizierung der zehndimensionalen Typ IIB Supergravitation auf CY_3 in $d = 4$ folgendes Spektrum: die 10-d Metrik g_{MN} spaltet auf in die 4-d Metrik $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, \dots, 3$), $2 \times h^{(2,1)}$ Deformationen der komplexen Struktur $\delta g_{ij}, \delta g_{\bar{i}\bar{j}}$ ($i, j = 1, 2, 3$) und $h^{(1,1)}$ Deformationen der Kählerform $\delta g_{i\bar{j}}$. Die antisymmetrischen Tensoren B_{MN}^I ergeben ein Dublett antisymmetrischer Tensoren $B_{\mu\nu}^I$, sowie $2 \times h^{(1,1)}$ Skalarfelder $B_{i\bar{j}}^I$; da $h^{(2,0)} = 0$ auf einer CY_3 , gibt es keine Moden der Form B_{ij}^I bzw. $B_{\bar{i}\bar{j}}^I$. Die 4-Form schließlich ergibt $h^{(1,1)}$ reelle antisymmetrische Tensoren $\mathcal{D}_{\mu\nu i\bar{j}}$ und $h^{(2,1)} + 1$ reelle Vektoren $\mathcal{D}_{\mu i\bar{j}\bar{k}}, \mathcal{D}_{\mu ijk}$. Hierbei ist folgendes zu beachten: die kompaktifizierte Selbstdualitätsbedingung (2.4) setzt die Felder $\mathcal{D}_{ij\bar{i}\bar{j}}$ und $\mathcal{D}_{\mu\nu k\bar{k}}, \mathcal{D}_{\mu ijk}$ und $\mathcal{D}_{\mu\bar{i}\bar{j}\bar{k}}$ sowie $\mathcal{D}_{\mu i\bar{j}\bar{k}}$ und $\mathcal{D}_{\mu\bar{i}\bar{j}k}$ miteinander in Beziehung, d.h. diese sind nicht unabhängig. Zusammen mit den beiden Skalaren ϕ und l arrangieren sich diese Felder in folgender Weise zu $N = 2$ Multipletts in $d = 4$:

$$\begin{array}{ll}
\text{Gravitationsmultiplett} & (g_{\mu\nu}, \mathcal{D}_{\mu ijk}) , \\
\text{Doppel – Tensor Multiplett} & (B_{\mu\nu}^I, \phi, l) , \\
h^{(2,1)} \text{ Vektormultipletts} & (\mathcal{D}_{\mu i\bar{j}\bar{k}}, \delta g_{ij}, \delta g_{\bar{i}\bar{j}}) , \\
h^{(1,1)} \text{ Tensormultipletts} & (\mathcal{D}_{\mu\nu i\bar{j}}, \delta g_{i\bar{j}}, B_{i\bar{j}}^I) ,
\end{array}$$

wobei nur die bosonischen Anteile aufgeführt sind. So enthält das Gravitationsmultiplett noch zusätzlich zwei Gravitini, wohingegen alle anderen Multipletts zwei Weyl-Fermionen beinhalten.

In vier Raum-Zeit Dimensionen besitzt ein anti-symmetrischer Tensor nur einen physikalischen Freiheitsgrad, und kann daher zu einem Skalar dualisiert werden.² Auf der Ebene obiger Supermultipletts bedeutet dies, daß das Tensor und Doppel-Tensor Multiplett zu einem Hypermultiplett dualisiert werden, welches vier reelle Skalare beinhaltet. In dieser dualen Basis besteht das Niederenergie Spektrum also neben dem Gravitationsmultiplett und den $h^{(2,1)}$ Vektormultipletts aus $h^{(1,1)} + 1$ Hypermultipletts.

Da die Kopplungen der Vektormultipletts schon aus [15–19] bekannt sind, sollen hier ausschließlich die Kopplungen der $h^{(1,1)}$ Tensormultipletts und des universellen Doppel-Tensor Multipletts untersucht werden: d.h., daß im folgenden Calabi-Yau 3-faltigkeiten mit eindeutiger komplexer Struktur ($h^{(2,1)} = 0$) betrachtet werden.

Neben der Entwicklung der Kähler Deformationen der Metrik (3.9) mit Entwicklungskoeffizienten $\delta \hat{M}^A(x)$ (wegen einer späteren Redefinition wird hier im Ggs. zu (3.9) \hat{M} anstelle von M verwandt),

$$i \delta g_{i\bar{j}} = \sum_A^{h^{(1,1)}} \delta \hat{M}^A(x) V_{i\bar{j}}^A, \quad (4.16)$$

²Wie diese Dualisierung im Detail geschieht, wird in Abschnitt 4.4 gezeigt.

lassen sich auf CY_3 nun noch die Felder $\mathcal{D}_{\mu\nu i\bar{j}}$ und $B_{i\bar{j}}^I$ wie folgt in harmonische $(1, 1)$ -Formen entwickeln:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mu\nu i\bar{j}} &= \sum_{A=1}^{h^{(1,1)}} \hat{D}_{\mu\nu}^A(x) V_{i\bar{j}}^A, \\ B_{i\bar{j}}^I &= \sum_{A=1}^{h^{(1,1)}} b^{IA}(x) V_{i\bar{j}}^A \quad (I = 1, 2).\end{aligned}\tag{4.17}$$

In diesen Variablen bestehen die $h^{(1,1)}$ Tensormultipletts also aus den Feldern $(\hat{D}_{\mu\nu}^A, \hat{M}^A, b^{IA})$.

4.4 Die Wirkung

In diesem Abschnitt wird die Wirkung für die kompaktifizierte Typ IIB Niederenergie effektive Theorie unter Vernachlässigung von Vektormultipletts für $h^{(2,1)} = 0$ hergeleitet. Dabei ist das Vorgehen wie in [23], wo allerdings nicht auf einer CY_3 , sondern auf einer speziell gewählten vierdimensionalen Mannigfaltigkeit kompaktifiziert wurde. Insbesondere dient die nicht-selbstduale Wirkung (2.1) als Ausgangspunkt, so daß die Selbstdualitätsbedingung (2.4) auf der Ebene der Bewegungsgleichungen explizit implementiert werden muß. Die etwas ausführlicheren Rechnungen bzgl. der Kompaktifizierung des Ricci Skalars und des 4-Form abhängigen Teils der Wirkung (2.1) sind dabei in den Anhängen C und D zusammengefaßt, und die Behandlung des Gravitationssektors orientiert sich an [17].

Es sei also zunächst die Wirkung \mathcal{S}_1 aus (2.7) betrachtet. Zusammen mit dem Resultat (C.13) für den Fall $h^{(2,1)} = 0$ und unter Ausnutzung von (C.5) läßt sie sich schreiben als:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= -\frac{i}{2} \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} \int_{CY_3} d^6\xi \sqrt{g^{(6)}} \left(\mathcal{R}_4 + \frac{1}{2} [e^{2\phi} (\partial_\mu l)^2 + (\partial_\mu \phi)^2] \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} H_{MNP}^I M_{IJ} H^{JMNP} + \partial_\mu \hat{M}^A \partial^\mu \hat{M}^B V_{i\bar{j}}^A V_{k\bar{l}}^B (g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} - \frac{1}{2} g^{i\bar{l}} g^{k\bar{j}}) \right).\end{aligned}\tag{4.18}$$

Dabei wurde außerdem schon berücksichtigt, daß die zehndimensionalen kinetischen Terme für das Dilaton und Axion, nämlich $-\frac{1}{4} (\partial_M \phi)^2$ und $-\frac{1}{4} e^{2\phi} (\partial_M l)^2$, unter Kompaktifizierung zu den jeweiligen vierdimensionalen kinetischen Termen $-\frac{1}{4} (\partial_\mu \phi)^2$ und $-\frac{1}{4} e^{2\phi} (\partial_\mu l)^2$ werden.

Für den $H_{MNP}^I M_{IJ} H^{JMNP}$ -Term beachte man nun folgendes: die antisymmetrischen Tensoren B_{MN}^I spalten bzgl. der reellen Koordinaten y^a ($a = 1, \dots, 6$) der CY_3 gemäß

$$B_{MN}^I = \begin{pmatrix} B_{\mu\nu}^I & 0 \\ 0 & B_{ab}^I \end{pmatrix}\tag{4.19}$$

auf. Mit $H_{MNP}^I \equiv \partial_{[M} B_{NP]}^I = \frac{1}{3}(\partial_M B_{NP}^I + \text{cycl.})$ aus (2.2) ergibt sich dann für $H_{MNP}^I H^{JMNP}$:

$$H_{MNP}^I H^{JMNP} = H_{\mu\nu\rho}^I H^{J\mu\nu\rho} + \frac{3}{3 \cdot 3} \partial_\mu B_{ab}^I \partial^\mu B^{Jab}. \quad (4.20)$$

Bei Übergang zu komplexen Koordinaten kann B_{ab}^I wegen $h^{(2,0)} = 0$ nur gem. (4.17) in harmonische (1,1)-Formen entwickelt werden; dabei gilt insbes., daß

$$\partial_\mu B_{ab}^I \partial^\mu B^{Jab} = -2 \partial_\mu B_{i\bar{j}}^I \partial^\mu B_{k\bar{l}}^J g^{i\bar{l}} g^{k\bar{j}}. \quad (4.21)$$

Der Faktor 2 stammt dabei von der kombinatorischen Möglichkeit der Indexverteilung, und das Minus-Zeichen läßt sich wie folgt einsehen: die naive Übertragung von $B_{ab}^I B^{Jab} = B_{ab}^I B_{cd}^J g^{ac} g^{bd}$ ins Komplexe via $B_{i\bar{j}}^I B_{k\bar{l}}^J g^{ik} g^{j\bar{l}}$ verschwindet in dieser Form, da $g_{ij} = g_{i\bar{j}} = 0$ auf Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten. Daher muß die Antisymmetrie der B-Felder benutzt werden, um auf die Form $B_{i\bar{j}}^I B_{k\bar{l}}^J g^{i\bar{l}} g^{k\bar{j}}$ zu kommen.

Insgesamt erbit sich also für die Aufspaltung des $H_{MNP}^I M_{IJ} H^{JMNP}$ -Terms unter Verwendung der Entwicklung (4.17):

$$H_{MNP}^I M_{IJ} H^{JMNP} = H_{\mu\nu\rho}^I M_{IJ} H^{J\mu\nu\rho} - \frac{2}{3} \partial_\mu b^{IA} M_{IJ} \partial^\mu b^{JB} V_{i\bar{j}}^A V^{B i\bar{j}}, \quad (4.22)$$

wobei $V_{i\bar{j}}^A V^{B i\bar{j}} \equiv V_{i\bar{j}}^A V_{k\bar{l}}^B g^{i\bar{l}} g^{k\bar{j}}$.

Zusammen mit (4.10), (4.12) und der Reskalierung $B_{\mu\nu}^I \mapsto \frac{2}{3} B_{\mu\nu}^I$ findet man somit für \mathcal{S}_1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 = & - \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} \left(\frac{\hat{\mathcal{V}}}{2} \mathcal{R}_4 + \frac{\hat{\mathcal{V}}}{4} [e^{2\phi} (\partial_\mu l)^2 + (\partial_\mu \phi)^2] \right. \\ & + \frac{\hat{\mathcal{V}}}{6} H_{\mu\nu\rho}^I M_{IJ} H^{J\mu\nu\rho} + \hat{\mathcal{V}} \hat{G}_{AB} \partial_\mu b^{IA} M_{IJ} \partial^\mu b^{JB} \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_{CY_3} id^6 \xi \sqrt{g^{(6)}} \partial_\mu \hat{M}^A \partial^\mu \hat{M}^B V_{i\bar{j}}^A V_{k\bar{l}}^B (g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} - \frac{1}{2} g^{i\bar{l}} g^{k\bar{j}}) \right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

wobei $\hat{\mathcal{V}}$ bzw. \hat{G}_{AB} das Volumen aus (4.10) bzw. die Metrik aus (4.12) bezüglich \hat{M}^A bezeichnen. Genauso sollen sich im folgenden auch die Größen $\hat{\kappa}_{AB}$ und $\hat{\kappa}_A$ auf \hat{M}^A beziehen.

Mit Hilfe von (4.12) und (4.14) läßt sich der kinetische Term für die Kähler-Moduli noch umschreiben zu

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \int_{CY_3} id^6 \xi \sqrt{g^{(6)}} \partial_\mu \hat{M}^A \partial^\mu \hat{M}^B V_{i\bar{j}}^A V_{k\bar{l}}^B (g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} - \frac{1}{2} g^{i\bar{l}} g^{k\bar{j}}) \\ & = + \partial_\mu \hat{M}^A \partial^\mu \hat{M}^B (\hat{\mathcal{V}} \hat{G}_{AB} + 3 \hat{\kappa}_{AB}). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Um die Wirkung in der Einsteinbasis zu erhalten, nimmt man nun gemäß Anhang B eine Weyl-Reskalierung der Metrik vor, nämlich $g_{\mu\nu} \mapsto \hat{\mathcal{V}}^{-1}g_{\mu\nu}$; die Weyl-reskalierte Wirkung \mathcal{S}_1 lautet dann

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 = - \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} & \left(\frac{1}{2} \mathcal{R}_4 + \frac{1}{4} [e^{2\phi}(\partial_\mu l)^2 + (\partial_\mu \phi)^2] + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial_\mu \hat{\mathcal{V}}}{\hat{\mathcal{V}}} \right)^2 \right. \\ & + \frac{1}{6} \hat{\mathcal{V}}^2 H^I_{\mu\nu\rho} M_{IJ} H^{J\mu\nu\rho} + \hat{G}_{AB} \partial_\mu b^{IA} M_{IJ} \partial^\mu b^{JB} \\ & \left. - \partial_\mu \hat{M}^A \partial^\mu \hat{M}^B (\hat{G}_{AB} + 3\hat{\mathcal{V}}^{-1} \hat{\kappa}_{AB}) \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Mit den Definitionen aus Abschnitt 4.2 gilt

$$\left(\frac{\partial_\mu \hat{\mathcal{V}}}{\hat{\mathcal{V}}} \right)^2 = 9 \partial_\mu \hat{M}^A \partial^\mu \hat{M}^B \frac{\hat{\kappa}_A \hat{\kappa}_B}{\hat{\mathcal{V}}^2}, \quad (4.26)$$

und zusammen mit (4.15) ergibt sich:

$$\begin{aligned} & - \frac{3}{4} \left(\frac{\partial_\mu \hat{\mathcal{V}}}{\hat{\mathcal{V}}} \right)^2 + \partial_\mu \hat{M}^A \partial^\mu \hat{M}^B (\hat{G}_{AB} + 3\hat{\mathcal{V}}^{-1} \hat{\kappa}_{AB}) \\ & = - \partial_\mu \hat{M}^A \partial^\mu \hat{M}^B (\hat{G}_{AB} + \frac{9}{4} \hat{\mathcal{V}}^{-2} \hat{\kappa}_A \hat{\kappa}_B). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Zur Identifikation des vierdimensionalen Dilatons muß schließlich noch eine Redefinition der Kähler-Moduli vorgenommen werden:

$$\hat{M}^A \mapsto M^A = e^{\phi/2} \hat{M}^A. \quad (4.28)$$

Unter (4.28) verhalten sich die verschiedenen geometrischen Größen der CY_3 dabei wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(M) &= e^{3\phi/2} \hat{\mathcal{V}}(\hat{M}), \\ \kappa_{AB}(M) &= e^{\phi/2} \hat{\kappa}_{AB}(\hat{M}), \\ \kappa_A(M) &= e^\phi \hat{\kappa}_A(\hat{M}), \\ G_{AB}(M) &= e^{-\phi} \hat{G}_{AB}(\hat{M}), \end{aligned} \quad (4.29)$$

wobei die M^A -Abhängigkeit von \mathcal{V} , κ_{AB} , κ_A und G_{AB} dieselbe ist wie die \hat{M}^A -Abhängigkeit von $\hat{\mathcal{V}}$, $\hat{\kappa}_{AB}$, $\hat{\kappa}_A$ und \hat{G}_{AB} .

Mit (4.28) gilt außerdem

$$\begin{aligned} \partial_\mu \hat{M}^A \partial^\mu \hat{M}^B &= e^{-\phi} \left(\partial_\mu M^A \partial^\mu M^B - \frac{1}{2} M^B \partial_\mu M^A \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} M^A \partial_\mu M^B \partial^\mu \phi \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} M^A M^B (\partial_\mu \phi)^2 \right), \end{aligned} \quad (4.30)$$

und unter Benutzung von

$$\begin{aligned} G_{AB} \partial_\mu M^A M^B &= \frac{3}{4} \partial_\mu M^A \frac{\kappa_A}{\mathcal{V}} \\ G_{AB} M^A M^B &= \frac{3}{4} \end{aligned} \quad (4.31)$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}(\partial_\mu\phi)^2 - \partial_\mu\hat{M}^A\partial^\mu\hat{M}^B(\hat{G}_{AB} + \frac{9}{4}\hat{\mathcal{V}}^{-2}\hat{\kappa}_A\hat{\kappa}_B) \\
& = -G_{AB}\partial_\mu M^A\partial^\mu M^B - (\partial_\mu\phi)^2 + \frac{\partial_\mu\mathcal{V}}{\mathcal{V}}\partial^\mu\phi - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial_\mu\mathcal{V}}{\mathcal{V}}\right)^2.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Mit der Definition

$$e^{-2\phi_4} \equiv \mathcal{V}e^{-2\phi} \tag{4.33}$$

des vierdimensionalen Dilatons erhält man damit insgesamt für \mathcal{S}_1 :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_1 = & -\int d^4x\sqrt{-g^{(4)}}\left(\frac{1}{2}\mathcal{R}_4 + \frac{1}{4}e^{2\phi_4}\mathcal{V}(\partial_\mu l)^2 + (\partial_\mu\phi_4)^2\right. \\
& + \frac{1}{6}e^{-3\phi_4}\mathcal{V}^{\frac{1}{2}}H_{\mu\nu\rho}^I M_{IJ}H^{J\mu\nu\rho} \\
& \left. + e^{\phi_4}\mathcal{V}^{\frac{1}{2}}G_{AB}\partial_\mu b^{IA}M_{IJ}\partial^\mu b^{JB} + G_{AB}\partial_\mu M^A\partial^\mu M^B\right).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Die Herleitung der Kompaktifizierung des 4-Form abhängigen Teils aus (2.6) ist im Anhang D vorgenommen. Mit dem dort gefundenen Resultat für \mathcal{S}_2 lautet die vierdimensionale Niederenergie effektive Wirkung, welche die richtigen IIB Bewegungsgleichungen in $d = 4$ liefert, also:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 = \int d^4x\mathcal{L}, \tag{4.35}$$

wobei \mathcal{L} durch

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{L}}{\sqrt{-g^{(4)}}} = & -\frac{1}{2}\mathcal{R}_4 - \frac{1}{4}e^{2\phi_4}\mathcal{V}(\partial_\mu l)^2 - (\partial_\mu\phi_4)^2 - \frac{1}{6}e^{-3\phi_4}\mathcal{V}^{\frac{1}{2}}H_{\mu\nu\rho}^I M_{IJ}H^{J\mu\nu\rho} \\
& - G_{AB}\partial_\mu M^A\partial^\mu M^B - e^{\phi_4}\mathcal{V}^{\frac{1}{2}}G_{AB}\partial_\mu b^{IA}M_{IJ}\partial^\mu b^{JB} \\
& - \frac{2}{3}e^{-2\phi_4}\mathcal{V}G_{AB}(F_{\mu\nu\rho}^A + \epsilon_{IJ}H_{\mu\nu\rho}^J b^{IA})(F^{B\mu\nu\rho} + \epsilon_{KL}H^{L\mu\nu\rho}b^{KB}) \\
& - \frac{i}{12\sqrt{-g^{(4)}}}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\kappa_{ABC}\epsilon_{IJ}(F_{\mu\nu\rho}^A b^{IB}\partial_\sigma b^{JC} - \frac{2}{3}\epsilon_{KL}H_{\mu\nu\rho}^I b^{JA}b^{KB}\partial_\sigma b^{LC})
\end{aligned} \tag{4.36}$$

gegeben ist, und die Definitionen

$$D_{\mu\nu}^A \equiv \hat{D}_{\mu\nu}^A + \frac{1}{2}\epsilon_{IJ}B_{\mu\nu}^I b^{JA}, \quad F_{\mu\nu\rho}^A \equiv \partial_{[\mu}D_{\nu\rho]}^A \tag{4.37}$$

verwendet wurden. Gleichung (4.36) gibt die zuvor in der Literatur noch nicht bekannte bosonische Wirkung für das Doppel-Tensor Multipllett und $h^{(1,1)}$ Tensormultipletts an, und zwar für beliebige Wahl von $h^{(1,1)}$.

Wie schon bei der Diskussion des Spektrums im Abschnitt 4.3 erwähnt, ist in $d = 4$ ein antisymmetrischer Tensor dual zu einem Skalar. Daher können die $h^{(1,1)} + 2$ antisymmetrischen Tensorfelder $D_{\mu\nu}^A$ und $B_{\mu\nu}^I$ in der Lagrange-Dichte \mathcal{L} aus (4.36) zu Skalaren dualisiert werden. Dies erreicht man, indem man zunächst $h^{(1,1)} + 2$ Lagrange-Multiplikatoren g_A und h_I zu \mathcal{L} hinzuaddiert:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{i}{6} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} H_{\mu\nu\rho}^I \partial_\sigma h_I + \frac{i}{6} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu\rho}^A \partial_\sigma g_A . \quad (4.38)$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} H^{I\sigma} &\equiv \frac{1}{6\sqrt{-g^{(4)}}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} H_{\mu\nu\rho}^I , \\ F^{A\sigma} &\equiv \frac{1}{6\sqrt{-g^{(4)}}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu\rho}^A \end{aligned} \quad (4.39)$$

läßt sich \mathcal{L}' dann als

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}'}{\sqrt{-g^{(4)}}} &= -\frac{1}{2} \mathcal{R}_4 - \frac{1}{4} e^{2\phi_4} \mathcal{V} (\partial_\mu l)^2 - (\partial_\mu \phi_4)^2 - e^{\phi_4} \mathcal{V}^{\frac{1}{2}} G_{AB} \partial_\mu b^{IA} M_{IJ} \partial^\mu b^{JB} \\ &\quad - G_{AB} \partial_\mu M^A \partial^\mu M^B - e^{-3\phi_4} \mathcal{V}^{\frac{1}{2}} H_\mu^I M_{IJ} H^{J\mu} \\ &\quad - 4 e^{-2\phi_4} \mathcal{V} G_{AB} (F_\mu^A + \epsilon_{IJ} H_\mu^J b^{IA}) (F^{B\mu} + \epsilon_{KL} H^{L\mu} b^{KB}) \\ &\quad + H^{I\mu} \left(\frac{i}{3} \kappa_{ABC} \epsilon_{IJ} \epsilon_{KL} b^{JA} b^{KB} \partial_\mu b^{LC} + i \partial_\mu h_I \right) \\ &\quad + F^{A\mu} \left(-\frac{i}{2} \kappa_{ABC} \epsilon_{IJ} b^{IB} \partial_\mu b^{JC} + i \partial_\mu g_A \right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

schreiben. Anschließend berechnet man die sich aus $\frac{\delta \mathcal{L}'}{\delta H^{I\mu}} \stackrel{!}{=} 0$ und $\frac{\delta \mathcal{L}'}{\delta F^{A\mu}} \stackrel{!}{=} 0$ ergebenden algebraischen Bewegungsgleichungen für H_μ^I und F_μ^A , die

$$\begin{aligned} H_\mu^I &= -\frac{i}{2} e^{3\phi_4} \mathcal{V}^{-\frac{1}{2}} (M^{-1})^{IJ} \left(-\frac{1}{2} \kappa_{ABC} \epsilon_{KJ} \epsilon_{LM} b^{KA} b^{LB} \partial_\mu b^{MC} + \epsilon_{KJ} b^{KA} \partial_\mu g_A \right. \\ &\quad \left. - \partial_\mu h_J - \frac{1}{3} \kappa_{ABC} \epsilon_{JK} \epsilon_{LM} b^{KA} b^{LB} \partial_\mu b^{MC} \right) \end{aligned} \quad (4.41)$$

und

$$\begin{aligned} F_\mu^A &= \frac{1}{8} e^{2\phi_4} \mathcal{V}^{-1} (G^{-1})^{AB} \left(-8 e^{-2\phi_4} \mathcal{V} G_{BC} \epsilon_{IJ} b^{IC} H_\mu^J \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2} \kappa_{BCD} \epsilon_{IJ} b^{IC} \partial_\mu b^{JD} + i \partial_\mu g_B \right) \end{aligned} \quad (4.42)$$

lauten. Dabei bezeichnet $(M^{-1})^{IJ}$ die inverse Matrix zu M_{IJ} aus (2.2), und ist durch

$$(M^{-1})^{IJ} = e^\phi \begin{pmatrix} 1 & l \\ l & |\lambda|^2 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

gegeben. Setzt man nun (4.41) und (4.42) in (4.40) ein, so lassen sich die Felder H_μ^I und F_μ^A zugunsten der Skalarfelder g_A und h_I aus \mathcal{L}' eliminieren. Für die auf diese Weise dualisierte Lagrange-Dichte ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}'}{\sqrt{-g^{(4)}}} = & -\frac{1}{2} \mathcal{R}_4 - \frac{1}{4} e^{2\phi_4} \mathcal{V}(\partial_\mu l)^2 - (\partial_\mu \phi_4)^2 - G_{AB} \partial_\mu b^{1A} \partial^\mu b^{1B} \\ & - G_{AB} \partial_\mu M^A \partial^\mu M^B - e^{2\phi_4} \mathcal{V} G_{AB} (\partial_\mu b^{2A} - l \partial_\mu b^{1A}) (\partial^\mu b^{2B} - l \partial^\mu b^{1B}) \\ & - \frac{e^{2\phi_4}}{16\mathcal{V}} (G^{-1})^{AB} (\partial_\mu g_A - \frac{1}{2} \kappa_{ACD} \epsilon_{IJB}{}^{IC} \partial_\mu b^{JD}) (\partial^\mu g_B - \frac{1}{2} \kappa_{BEF} \epsilon_{KLB}{}^{KE} \partial^\mu b^{LF}) \\ & - \frac{1}{4} e^{2\phi_4} \mathcal{V}^{-1} (\partial_\mu h_2 - b^{1A} (\partial_\mu g_A - \frac{1}{6} \kappa_{ABC} \epsilon_{IJB}{}^{IB} \partial_\mu b^{JC}))^2 \\ & - \frac{1}{4} e^{4\phi_4} (\partial_\mu h_1 + l \partial_\mu h_2 - (l b^{1A} - b^{2A}) (\partial_\mu g_A - \frac{1}{6} \kappa_{ABC} \epsilon_{IJB}{}^{IB} \partial_\mu b^{JC}))^2 . \end{aligned} \quad (4.44)$$

Dies ist genau die Lagrange-Dichte der vierdimensionalen Niederenergie effektiven Typ IIB Theorie, die in [20] weiter dazu verwendet wurde, die Feldabbildung zur auf der Mirror-Mannigfaltigkeit kompaktifizierten dualen Typ IIA Theorie zu bestimmen. Diese explizite Abbildung (die zuvor in der Literatur nur für einen Spezialfall bekannt war [45, 46]) erlaubte die Diskussion der Geometrie der Tensormultipletts mit Hilfe eines holomorphen Präpotentials, sowie die Auffindung von Weltflächen Instantonkorrekturen. Ebenfalls in [20] konnte die Übertragung der aus der IIB Theorie bekannten $SL(2, \mathbb{Z})$ -Symmetrie auf die IIA Theorie erfolgreich untersucht werden.

4.5 Symmetrieeigenschaften in $d = 4$

Die in Kapitel 2 aufgeführten Symmetrien der zehndimensionalen Typ IIB Supergravitation übertragen sich bei der CY_3 -Kompaktifizierung auf die resultierende Theorie in $d = 4$. So ist die Lagrange-Dichte \mathcal{L} aus (4.36) nicht nur invariant unter den $h^{(1,1)} + 2$ Eichtransformationen (mit Parametern Σ_ν^A und Ω_ν^I) der antisymmetrischen Tensoren $D_{\mu\nu}^A$ und $B_{\mu\nu}^I$,

$$\delta D_{\mu\nu}^A = \partial_{[\mu} \Sigma_{\nu]}^A , \quad \delta B_{\mu\nu}^I = \partial_{[\mu} \Omega_{\nu]}^I , \quad (4.45)$$

sondern auch zusätzlich unter $2 \times h^{(1,1)}$ *Peccei-Quinn (PQ) Symmetrien* (mit Parametern c^{IA}), die auf den Skalarfeldern b^{IA} und den antisymmetrischen Tensoren $D_{\mu\nu}^A$ wie folgt wirken:

$$\delta b^{IA} = c^{IA} , \quad \delta D_{\mu\nu}^A = -\epsilon_{IJ} c^{IA} B_{\mu\nu}^J . \quad (4.46)$$

Diese PQ Symmetrien stammen dabei von den zehndimensionalen Eichsymmetrien (2.8) und (2.9).

Beim Übergang zur dualen Feldbasis (in welcher die $h^{(1,1)} + 2$ antisymmetrischen Tensorfelder $D_{\mu\nu}^A$ und $B_{\mu\nu}^I$ zu den Skalaren g_A und h_I dualisiert sind) werden die Eichsymmetrien von $D_{\mu\nu}^A$ und $B_{\mu\nu}^I$ aus (4.45) zu weiteren $h^{(1,1)} + 2$ PQ

Symmetrien (mit Parametern \tilde{c}_A und \hat{c}_I), und zwar bezüglich der Skalarfelder g_A und h_I :

$$\delta g_A = \tilde{c}_A, \quad \delta h_I = \hat{c}_I. \quad (4.47)$$

In der dualen Basis überträgt sich außerdem die Symmetrie (4.46) von \mathcal{L} in folgender Weise auf \mathcal{L}' : die Forderung der Invarianz des $(G^{-1})^{AB}$ -Terms aus \mathcal{L}' unter $\delta b^{IA} = c^{IA}$,

$$\delta \left(\partial_\mu g_A - \frac{1}{2} \kappa_{ACD} \epsilon_{IJC} b^{IC} \partial_\mu b^{JD} \right) \stackrel{!}{=} 0, \quad (4.48)$$

führt auf

$$\delta g_A = \frac{1}{2} \kappa_{ABC} \epsilon_{IJC} b^{IB} b^{JC}. \quad (4.49)$$

Anschließend berechnet man aus der Invarianzforderung

$$\delta \left(\partial_\mu h_2 - b^{1A} (\partial_\mu g_A - \frac{1}{6} \kappa_{ABC} \epsilon_{IJC} b^{IB} \partial_\mu b^{JC}) \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.50)$$

das Transformationsverhalten von h_2 zu

$$\delta h_2 = c^{1A} g_A + \frac{1}{6} \kappa_{ABC} b^{1A} \epsilon_{IJC} b^{IB} b^{JC}. \quad (4.51)$$

Schließlich ergibt

$$\delta \left(\partial_\mu h_1 + l \partial_\mu h_2 - (l b^{1A} - b^{2A}) (\partial_\mu g_A - \frac{1}{6} \kappa_{ABC} \epsilon_{IJC} b^{IB} \partial_\mu b^{JC}) \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.52)$$

für δh_1 :

$$\delta h_1 = -c^{2A} g_A - \frac{1}{6} \kappa_{ABC} b^{2A} \epsilon_{IJC} b^{IB} b^{JC}. \quad (4.53)$$

Zusammenfassend lautet also die Symmetrie (4.46) von \mathcal{L} in der dualen Basis für \mathcal{L}' :

$$\begin{aligned} \delta b^{IA} &= c^{IA}, & \delta g_A &= \frac{1}{2} \kappa_{ABC} \epsilon_{IJC} b^{IB} b^{JC}, \\ \delta h_I &= -\epsilon_{IJ} (c^{JA} g_A + \frac{1}{6} \kappa_{ABC} \epsilon_{KLB} b^{JA} c^{KB} b^{LC}). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Eine wesentliche Eigenschaft der zehndimensionalen Typ IIB Supergravitation ist ihre $SL(2, \mathbb{R})$ -Symmetrie (2.11)-(2.14). Wie in Kapitel 2 diskutiert, bildet einer der $SL(2, \mathbb{R})$ -Generatoren Bereiche schwacher und starker Kopplung aufeinander ab, was diese Symmetrie so interessant macht. Ebenso wie die zehndimensionalen Eichsymmetrien (2.8) und (2.9) überträgt sich auch die $SL(2, \mathbb{R})$ -Symmetrie bei CY_3 -Kompaktifizierung auf die vierdimensionale Theorie. Aufgrund der Redefinition (4.28) wirkt sie in $d = 4$ allerdings auch auf die Kähler Moduli M^A ,

was schließlich beim Transformationsverhalten des durch (4.33) definierten vierdimensionalen Dilatons berücksichtigt werden muß. Insgesamt findet man unter Verwendung von (2.11)-(2.14), (4.28) und (4.33):

$$M^A \mapsto M^A |c\lambda + d|, \quad e^{-2\phi_4} \mapsto \frac{e^{-2\phi_4}}{|c\lambda + d|}, \quad l \mapsto \frac{ac|\lambda|^2 + (bc + ad)l + bd}{|c\lambda + d|^2}, \quad (4.55)$$

wobei $\lambda = l + i\mathcal{V}^{-\frac{1}{2}} e^{-\phi_4}$.

Auf die antisymmetrischen Tensoren $B_{\mu\nu}^I$ und die Skalare b^{IA} überträgt sich das Transformationsverhalten von H_{MNP}^I aus (2.11):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B_{\mu\nu}^1 \\ B_{\mu\nu}^2 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} B_{\mu\nu}^{\prime 1} \\ B_{\mu\nu}^{\prime 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{\mu\nu}^1 \\ B_{\mu\nu}^2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} b^{1A} \\ b^{2A} \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} b^{\prime 1A} \\ b^{\prime 2A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^{1A} \\ b^{2A} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

wohingegen die antisymmetrischen Tensoren $D_{\mu\nu}^A$ (wie schon die 4-Form \mathcal{D} in $d = 10$) $SL(2, \mathbb{R})$ -invariant sind. Beim Übergang zur dualisierten Lagrange-Dichte \mathcal{L}' aus (4.44) sind daher auch die zu $D_{\mu\nu}^A$ dualen Skalare g_A invariant; aus (4.38) findet man hingegen für die zu $B_{\mu\nu}^I$ dualen Skalare h_I , daß diese kontragredient zu $B_{\mu\nu}^I$ transformieren, d.h. mit der inversen Matrix Λ^{-1} :

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} h'_1 \\ h'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

Mittels der in (4.55)-(4.57) angegebenen Transformationen läßt sich explizit verifizieren, daß \mathcal{L} bzw. \mathcal{L}' invariant sind. Somit ist also für die Niederenergie effektive Wirkung in $d = 4$ nach CY_3 -Kompaktifizierung im Limes großen Volumens die $SL(2, \mathbb{R})$ -Symmetrie ungebrochen [47].

Kapitel 5

Typ IIB auf CY_4

In diesem Kapitel wird die zehndimensionale Niederenergie effektive Typ IIB Stringtheorie auf einer Calabi-Yau 4-faltigkeit CY_4 mit $SU(4)$ -Holonomie (und keiner Untergruppe davon) kompaktifiziert, was in zwei Raum-Zeit Dimensionen eine Anomalie-freie Theorie mit $N = (4, 0)$ Supersymmetrie ergibt [48].¹ Wie schon im vorigen Kapitel wird der Ausgangspunkt die aus [23] bekannte nicht-selbst-duale Wirkung für die zehndimensionale Typ IIB Supergravitation sein. Ebenfalls wie bereits für CY_3 -Kompaktifizierungen wird dabei angenommen, daß das Volumen der CY_4 groß im Vergleich zur String-Skala ist: es ist dieser Limes großen Volumens, in dem die Typ IIB Supergravitation eine gute Niederenergie-Approximation zur Typ IIB Stringtheorie darstellt.

Der Aufbau dieses Kapitels ist dabei wie folgt: zunächst werden die wichtigsten Eigenschaften von zweidimensionaler $N = (4, 0)$ Supergravitation vorgestellt. Nach einer Zusammenstellung der relevanten Charakteristika von Calabi-Yau 4-faltigkeiten wird dann das Spektrum in $d = 2$ untersucht. Anschließend wird die Wirkung hergeleitet, welche sich durch Kompaktifizierung von (2.1) auf CY_4 im Limes großen Volumens ergibt. Die Überprüfung, daß die sich aus ihr ergebenden Euler-Lagrange Gleichungen mit den kompaktifizierten Bewegungsgleichungen aus $d = 10$ übereinstimmen, ist schließlich für den Fall $l = 0$, $\phi = \text{const.}$ und $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ im Anhang E vorgenommen.

5.1 $N = (4, 0)$ Supergravitation in $d = 2$

In zwei Raum-Zeit Dimensionen läßt sich auf eine Lorentz-invariante Weise angeben, ob sich ein masseloses Teilchen nach links oder rechts bewegt [1]. Zur adäquaten Beschreibung bietet sich der Übergang zu den sog. *Lichtkegelkoordinaten* an, die durch $x^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 \pm x^1)$ definiert sind. Bezüglich diesen Koordinaten lauten die Komponenten der Minkowski-Metrik $\eta_{++} = \eta_{--} = 0$ und $\eta_{+-} = \eta_{-+} = -1$, und die entsprechenden Impulsgeneratoren sind wie üblich durch $P_\pm = i\frac{\partial}{\partial x^\mp} \equiv i\partial_\pm$ definiert: für ein masseloses linkslaufendes (rechtslaufen-

¹Die Anzahl der Supersymmetrien ist dabei bezüglich einkomponentiger Majorana-Weyl Spinoren angegeben.

des) Teilchen gilt dann $P_+ = 0$ ($P_- = 0$). Bei erhaltenen Ladungen besteht nun die Möglichkeit, daß diese nur von rechts- oder linkslaufenden masselosen Teilchen getragen werden [49], was sich im Fall von Supersymmetrie direkt sehen läßt: laut Tabelle 1.1 besitzt ein Supersymmetriegenerator Q in $d = 2$ als minimale Anzahl lediglich eine Komponente, die durch einen Majorana-Weyl Spinor gegeben ist. Je nach Chiralität nennt man diesen Q_+ (chiral) bzw. Q_- (anti-chiral), was auf (1, 0)- bzw. (0, 1)-Supersymmetrie führt. Der fundamentale Antikommutator ist für (1, 0)-Supersymmetrie durch

$$\{Q_+, Q_+\} = Q_+^2 = P_+ \quad (5.1)$$

gegeben, so daß also linkslaufende masselose Teilchen Singletts bzgl. Q_+ sind; gemäß der Benennung von Q_+ als chiralem Supersymmetriegenerator werden diese Teilchen fortan als anti-chiral bezeichnet.

Der durch (5.1) gegebene Fall besitzt nun eine offensichtliche Verallgemeinerung auf (4, 0)-Supersymmetrie mit vier chiralen Supersymmetriegeneratoren Q_+^i ($i = 1, \dots, 4$), welche die Algebra

$$\{Q_+^i, Q_+^j\} = 2\delta^{ij}P_+ \quad (5.2)$$

erfüllen.²

Als masselose $N = (4, 0)$ Supermultipletts finden sich in $d = 2$ ein Gravitationsmultiplett und ein skalares Multiplett (das *chirale Materiemultiplett*), welches on-shell vier bosonische und vier fermionische Freiheitsgrade besitzt.³ Beide Multipletts sind in Tab. 5.1 mit ihrem Feldinhalt zusammengefaßt: so enthält das Gravitationsmultiplett neben dem Graviton $g_{\mu\nu}$ noch einen reellen Skalar ϕ , vier anti-chirale Gravitinos ψ_μ^- und vier chirale Majorana-Weyl Fermionen ψ^+ , wohingegen im skalaren Multiplett vier chirale Skalare ϕ^+ sowie vier chirale Majorana-Weyl Fermionen ψ^+ vorhanden sind [48].

Gravitationsmultiplett	$(g_{\mu\nu}, \phi, 4\psi_\mu^-, 4\psi^+)$
skalares Multiplett	$(4\phi^+, 4\psi^+)$

Tabelle 5.1: Multipletts von $N = (4, 0)$ Supergravitation in $d = 2$.

²Ganz allgemein ist eine *Supersymmetrieralgebra vom Typ (p, q)* durch p chirale Supersymmetriegeneratoren Q_+^i ($i = 1, \dots, p$) und q anti-chirale Supersymmetriegeneratoren $Q_-^{i'}$ ($i' = 1, \dots, q$) gegeben, die $\{Q_+^i, Q_+^j\} = 2\delta^{ij}P_+$, $\{Q_-^{i'}, Q_-^{j'}\} = 2\delta^{i'j'}P_-$, $\{Q_+^i, Q_-^{j'}\} = Z^{ij'}$ erfüllen [50], wobei $Z^{ij'}$ zentrale Ladungen ohne besondere Symmetrieeigenschaften sind. Eine solche Algebra existiert, wenn die Dimension der Raum-Zeit $d = 2 \pmod{8}$ ist (s. Tab. 1.1).

³Tatsächlich sind in [51] vier verschiedene skalare Multipletts gefunden worden, die allerdings über Automorphismen der Supersymmetrieparameter zueinander in Beziehung stehen [52].

wohingegen die $(3, 1)$ - und $(1, 3)$ -Formen einer CY_4 anti-selbstdual sind. Damit ergibt sich aus (5.7) für b_+ und b_- :

$$\begin{aligned} b_+ &= 2 + h_+^{(2,2)}, \\ b_- &= 2h^{(3,1)} + h_-^{(2,2)}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

wobei $h_+^{(2,2)}$ bzw. $h_-^{(2,2)}$ die Anzahl selbstdualer bzw. anti-selbstdualer $(2, 2)$ -Formen auf CY_4 bezeichnet. Schließlich sei noch bemerkt, daß sich $h_+^{(2,2)}$ und $h_-^{(2,2)}$ durch die anderen Hodgezahlen ausdrücken lassen: aus (5.7) und (5.8) folgt unter Verwendung von (5.4) und (5.5), daß sich b_+ und b_- auch als

$$\begin{aligned} b_+ &= 47 + 3h^{(1,1)} + 4h^{(3,1)} - 2h^{(2,1)}, \\ b_- &= -1 + h^{(1,1)} + 2h^{(3,1)} \end{aligned} \quad (5.10)$$

schreiben lassen, und zusammen mit (5.9) ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} h_+^{(2,2)} &= 45 + 3h^{(1,1)} + 4h^{(3,1)} - 2h^{(2,1)}, \\ h_-^{(2,2)} &= h^{(1,1)} - 1. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Die Deformationen der Kählerform sind durch (3.9) gegeben, wobei

$$J = i g_{i\bar{j}} d\xi^i \wedge d\bar{\xi}^{\bar{j}} = M^A(x) V^A \quad (5.12)$$

die Kählerform aus (A.21) bezeichnet. ξ^i ($i = 1, 2, 3, 4$) sind dabei die komplexen Koordinaten auf CY_4 , die aus den reellen Koordinaten y^a ($a = 1, \dots, 8$) via $\xi^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(y^{2i-1} + iy^{2i})$ gebildet werden; für die entsprechenden Integrationsmaße gilt die Beziehung: $d^8\xi \equiv d^4\xi \wedge d^4\bar{\xi} = d^8y$.

Für die Deformationen der komplexen Struktur ergibt sich nach der Diskussion aus Abschnitt 3.2.1:

$$\delta g_{i\bar{j}} = \sum_{\alpha=1}^{h^{(3,1)}} \delta Z^\alpha(x) b_{i\bar{j}}^\alpha(y). \quad (5.13)$$

Hierbei sind die $Z^\alpha(x)$ die komplexen Moduli, und die $b_{i\bar{j}}^\alpha$ werden durch Kontraktion der Basiselemente Φ^α von $H^{(3,1)}(CY_4)$ mit der antiholomorphen $(0, 4)$ -Form $\bar{\Omega}$ gebildet [56]:

$$b_{i\bar{j}}^\alpha = -\frac{1}{3\|\Omega\|^2} \bar{\Omega}_{\bar{i}}{}^{klm} \Phi_{klm\bar{j}}^\alpha, \quad \|\Omega\|^2 \equiv \frac{1}{4!} \Omega_{ijkl} \bar{\Omega}^{ijkl}. \quad (5.14)$$

Das Volumen der Calabi-Yau 4-faltigkeit ist durch

$$\mathcal{V} = \int_{CY_4} \sqrt{g^{(8)}} d^8\xi = \frac{1}{4!} \int_{CY_4} J \wedge J \wedge J \wedge J = \frac{1}{4!} \kappa_{ABCD} M^A M^B M^C M^D \quad (5.15)$$

gegeben, wobei die *Schnittzahlen* von CY_4 durch

$$\kappa_{ABCD} \equiv \int_{CY_4} V^A \wedge V^B \wedge V^C \wedge V^D \quad (5.16)$$

definiert sind.

Mittels (A.14) errechnet man für $\star V^A$ auf CY_4 :

$$\star V^A = \left(\frac{1}{6} V_{k\bar{i}}^A g^{k\bar{i}} g_{j\bar{l}} g_{o\bar{m}} g_{p\bar{n}} - \frac{1}{2} V_{j\bar{l}}^A g_{o\bar{m}} g_{p\bar{n}} \right) d\xi^j \wedge d\xi^o \wedge d\xi^p \wedge d\xi^{\bar{l}} \wedge d\xi^{\bar{m}} \wedge d\xi^{\bar{n}}. \quad (5.17)$$

Unter Verwendung von $V_{i\bar{j}}^A g^{i\bar{j}} = \text{const.}$ für V^A harmonisch [44] gilt außerdem

$$\begin{aligned} \kappa_A &\equiv \frac{1}{4!} \int_{CY_4} V^A \wedge J \wedge J \wedge J \\ &= -\frac{6i}{4!} \int_{CY_4} V_{i\bar{j}}^A g^{i\bar{j}} \sqrt{g^{(8)}} d^8 \xi = -\frac{6i}{4!} V_{i\bar{j}}^A g^{i\bar{j}} \mathcal{V}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

womit sich $\star V^A$ auch als

$$\star V^A = \frac{2}{3} \frac{\kappa_A}{\mathcal{V}} J \wedge J \wedge J - \frac{1}{2} V^A \wedge J \wedge J \quad (5.19)$$

schreiben läßt.

Auf dem Raum der (1, 1)-Formen definiert man nun die Metrik [56]

$$G_{AB} \equiv \frac{1}{2\mathcal{V}} \int_{CY_4} V^A \wedge \star V^B = -\frac{1}{2\mathcal{V}} \int_{CY_4} d^8 \xi \sqrt{g^{(8)}} V_{i\bar{j}}^A V_{k\bar{l}}^B g^{i\bar{l}} g^{k\bar{j}}, \quad (5.20)$$

die sich mit Hilfe von (5.19) und der Definition

$$\begin{aligned} \kappa_{AB} &\equiv \frac{1}{4!} \int_{CY_4} V^A \wedge V^B \wedge J \wedge J \\ &= \frac{1}{12} \int_{CY_4} d^8 \xi \sqrt{g^{(8)}} V_{i\bar{j}}^A V_{k\bar{l}}^B (g^{i\bar{l}} g^{k\bar{j}} - g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}}) \end{aligned} \quad (5.21)$$

auch gemäß

$$G_{AB} = -6 \frac{\kappa_{AB}}{\mathcal{V}} + 8 \frac{\kappa_A \kappa_B}{\mathcal{V}^2} = -\frac{1}{2} \partial_A \partial_B \ln \mathcal{V} \quad (5.22)$$

ausdrücken läßt.

Auf dem Raum der (3, 1)-Formen schließlich definiert man noch wie in [19] die Metrik

$$\begin{aligned} G_{\alpha\bar{\beta}} &\equiv -\frac{\int_{CY_4} \Phi^\alpha \wedge \bar{\Phi}^{\bar{\beta}}}{\int_{CY_4} \Omega \wedge \bar{\Omega}} = \frac{1}{4\mathcal{V}} \int_{CY_4} d^8 \xi \sqrt{g^{(8)}} b_{j\bar{l}}^\alpha \bar{b}_{ik}^{\bar{\beta}} g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} \\ &= -\partial_\alpha \bar{\partial}_{\bar{\beta}} \ln \int_{CY_4} \Omega \wedge \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

5.3 Das Spektrum

Bei der Analyse des Spektrums, welches sich in $d = 2$ bei Kompaktifizierung der zehndimensionalen Typ IIB Supergravitation auf CY_4 ergibt, ist zunächst anzumerken, daß in zwei Raum-Zeit Dimensionen nur noch Skalare dynamische Freiheitsgrade besitzen. Ihre Anzahl findet man gemäß dem Hodge-Diamanten (5.3) folgendermaßen: die zehndimensionale Metrik g_{MN} ergibt $h^{(1,1)}$ Kähler-Moduli und $2 \times h^{(3,1)}$ Moduli der komplexen Struktur gem. (3.9) bzw. (5.13). Das Dublett antisymmetrischer Tensoren B_{MN}^I liefert $2 \times h^{(1,1)}$ Skalarmoden $B_{i\bar{j}}^I$, und zwei weitere Skalare erhält man vom zehndimensionalen Dilaton ϕ und Axion l . All diese Skalare sind nicht-chiral, wobei sich in zwei Raum-Zeit Dimensionen ein nicht-chiraler Skalar als die Summe eines chiralen (d.h. mit positiver Chiralität) und anti-chiralen (d.h. mit negativer Chiralität) Skalars schreiben läßt. Die Eigenschaft der Chiralität von Skalaren in $d = 2$ wird bedeutsam bei der Untersuchung des sich aus der 4-Form \mathcal{D}_{MNPQ} ergebenden Spektrums, und ist eng an die Aufspaltung der mittleren Kohomologie (5.6) geknüpft: da die 5-Form Feldstärke F von \mathcal{D} selbstdual ist, ergibt die Entwicklung von \mathcal{D}_{MNPQ} in selbstduale 4-Formen Skalare negativer Chiralität, wohingegen die Entwicklung in anti-selbstduale 4-Formen Skalare positiver Chiralität in $d = 2$ liefert. Wenn $h_-^{(2,2)}$ die Anzahl anti-selbstdualer $(2, 2)$ -Formen bezeichnet, und entsprechend $h_+^{(2,2)}$ die Anzahl der selbstdualen $(2, 2)$ -Formen angibt, so erhält man also von der 4-Form \mathcal{D}_{MNPQ} stammend $b_- = h_-^{(2,2)} + 2h^{(3,1)}$ chirale Skalare und $b_+ = 2 + h_+^{(2,2)}$ anti-chirale Skalare.⁴ Dabei wurde bereits ausgenutzt, daß auf einer Calabi-Yau 4-faltigkeit die $(4, 0)$ - und $(0, 4)$ -Form selbstdual sind, die $(3, 1)$ - und $(1, 3)$ -Formen anti-selbstdual sind [55], und eine $(2, 2)$ -Form entweder selbstdual oder anti-selbstdual sein kann.

Insgesamt befinden sich somit neben der zweidimensionalen Metrik $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1$) noch

$$n_+ = 3h^{(1,1)} + 2h^{(3,1)} + 2 + b_- \quad (5.24)$$

chirale Skalare und

$$n_- = 3h^{(1,1)} + 2h^{(3,1)} + 2 + b_+ \quad (5.25)$$

anti-chirale Skalare im Spektrum.⁵

In $d = 2$ mit $(4, 0)$ -Supersymmetrie gibt es neben dem Supergravitationsmultiplett $(g_{\mu\nu}, \phi, 4\psi_\mu^-, 4\psi^+)$ noch das chirale Materiemultiplett $(4\phi^+, 4\psi^+)$, wohingegen die anti-chiralen Skalare ϕ^- und anti-chiralen Majorana-Weyl Fermionen ψ^- supersymmetrische Singletts sind. In [48] wurde gezeigt, daß sich obiges Spektrum

⁴Die von der Entwicklung in harmonische $(2, 1)$ -Formen stammenden Moden $\mathcal{D}_{\mu i \bar{j} \bar{k}}$ beschreiben in $d = 2$ masselose Vektoren, und besitzen daher keinen physikalischen Freiheitsgrad.

⁵An dieser Stelle sei angemerkt, daß für einen potentiellen Vergleich mit anderen zweidimensionalen Theorien, in denen nur nicht-chirale Skalare gegeben sind (bzw. in denen $n_+ = n_-$ gilt), nur Calabi-Yau 4-faltigkeiten mit Eulerzahl $\chi(CY_4) = -96$ in Frage kommen, was sich aus (5.8) ergibt.

bosonischer Moden wie folgt auf Supermultipletts verteilt: die zweidimensionale Metrik und ein Skalar gehen in das Gravitationsmultiplett, so daß $n_+ - 1$ chirale Skalare und $n_- - 1$ anti-chirale Skalare verbleiben, wobei letztere ja supersymmetrische Singletts sind. Unter Ausnutzung von (5.4), (5.5) und (5.24) erhält man für $n_c \equiv \frac{1}{4}(n_+ - 1)$:

$$n_c = h^{(2,1)} + \frac{\chi}{6} - 8. \quad (5.26)$$

Da die Eulerzahl für Calabi-Yau 4-faltigkeiten mit $SU(4)$ -Holonomie durch 6 teilbar ist, können sich die verbliebenen $n_+ - 1$ chiralen Skalare auf Materiemultipletts verteilen, deren Anzahl durch n_c gegeben ist.

Um das noch zu präzisieren, seien die Entwicklungen der Felder in harmonische Formen angegeben. So werden neben der Entwicklung der Kähler Deformationen bzw. komplexen Struktur Deformationen der Metrik aus (3.9) bzw. (5.13) die Felder B_{ij}^I wie in (4.17) in harmonische $(1, 1)$ -Formen entwickelt:

$$B_{ij}^I = \sum_{A=1}^{h^{(1,1)}} b^{IA}(x) V_{ij}^A \quad (I = 1, 2). \quad (5.27)$$

Bezüglich dem selbstdualen Feld \mathcal{D} soll im folgenden wie in [57] vorgegangen werden, wo anstelle der Entwicklung von \mathcal{D} die Entwicklung der Feldstärke F betrachtet wird:

$$F \sim \sum_{\Theta} \partial_{\mu} u_{\Theta} \cdot \omega_{\Theta}^{(4)}. \quad (5.28)$$

Je nachdem, ob die 4-Form $\omega_{\Theta}^{(4)}$ selbstdual oder anti-selbstdual ist, ergibt die Selbstdualitätsbedingung $F = \star F$, daß die Skalare u_{Θ} anti-chiral oder chiral sind. Gemäß (5.7) und (5.9) lautet die Entwicklung von F aus (5.28):

$$\begin{aligned} F = & \sum_{\Xi=1}^{h_+^{(2,2)}} (\partial_{\mu} u_{\Xi}) \omega_{\Xi}^{(2,2)+} + \sum_{\Upsilon=1}^{h_-^{(2,2)}} (\partial_{\mu} v_{\Upsilon}) \omega_{\Upsilon}^{(2,2)-} + \sum_{\alpha=1}^{h^{(3,1)}} (\partial_{\mu} p_{\alpha}) \Phi^{\alpha} \\ & + \sum_{\alpha=1}^{h^{(3,1)}} (\partial_{\mu} \bar{p}_{\alpha}) \bar{\Phi}^{\alpha} + (\partial_{\mu} q) \Omega + (\partial_{\mu} \bar{q}) \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (5.29)$$

wobei $h_+^{(2,2)}$ und $h_-^{(2,2)}$ durch (5.11) gegeben sind. Da die Skalare aus der Entwicklung in selbstduale Formen anti-chiral sind, sind u_{Ξ} und q supersymmetrische Singletts, und außer ihnen besteht das Spektrum in $d = 2$ noch aus einem Gravitationsmultiplett, sowie $h^{(3,1)} + h^{(1,1)}$ skalaren Multipletts.

5.4 Die Wirkung

Ausgehend von der nicht-selbstdualen Wirkung der zehndimensionalen Typ IIB Supergravitation (2.1) wird zunächst untersucht, wie sich diese unter Aufspaltung der zehndimensionalen Koordinaten in (reell) achtdimensionale interne und

zwei Raum-Zeit Koordinaten verhält. Im Anhang wird explizit gezeigt, daß die so erhaltene Wirkung die richtigen Typ IIB Bewegungsgleichungen reproduziert. Anschließend wird für eine bestimmte Wahl der Hodgezahlen von CY_4 die Feldentwicklung eingesetzt, und nach Integration über die internen Koordinaten die zweidimensionale Wirkung untersucht. Dabei wird insbesondere auf für $d = 2$ charakteristische Probleme eingegangen.

Ausgehend von den Wirkungen \mathcal{S}_1 und \mathcal{S}_2 aus (2.6) sei als erstes angemerkt, daß die Kompaktifizierung des zehndimensionalen Ricci Skalars analog zum CY_3 -Fall durchgeführt wird (s. Anhang C), wobei die für die CY_4 gültigen Entwicklungen (3.9) und (5.13) benutzt werden. Als Resultat erhält man für den Gravitationssektor aus \mathcal{S}_1

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{Grav.} &= \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} \left(-\frac{\mathcal{R}_{10}}{2} \right) \\ &= \int d^2x \sqrt{-g^{(2)}} \int_{CY_4} d^8\xi \sqrt{g^{(8)}} \left(-\frac{\mathcal{R}_2}{2} - \frac{1}{4} \partial_\mu Z^\alpha \partial^\mu \bar{Z}^\beta b_{\bar{j}}^\alpha \bar{b}_{ik}^{\beta} g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \partial_\mu M^A \partial^\mu M^B V_{ij}^A V_{kl}^B (g^{i\bar{l}} g^{k\bar{j}} - 2g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}}) \right) \quad (5.30) \\ &= \int d^2x \sqrt{-g^{(2)}} \mathcal{V} \left(-\frac{\mathcal{R}_2}{2} - \partial_\mu Z^\alpha \partial^\mu \bar{Z}^\beta G_{\alpha\bar{\beta}} \right. \\ &\quad \left. + \partial_\mu M^A \partial^\mu M^B \left(\frac{1}{2} G_{AB} + \frac{1}{4} \frac{\kappa_{AB}}{\mathcal{V}} \right) \right), \end{aligned}$$

wobei schon mit den aus Abschnitt 5.2 bekannten Definitionen über die internen Koordinaten integriert worden ist. Man beachte in (5.30) (s. Anhang B), daß es in zwei Raum-Zeit Dimensionen nicht möglich ist, durch eine Weyl-Reskalierung der Metrik in die Einsteinbasis zu gelangen.

Für den restlichen Teil der Wirkung \mathcal{S}_1 , $\mathcal{S}' \equiv \mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_{Grav.}$, ergibt sich:

$$\mathcal{S}' = \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} \left(+\frac{1}{8} \text{Tr} (\partial_\mu M \partial^\mu M^{-1}) - \frac{1}{8} (\partial_\mu B_{ab}^I) M_{IJ} (\partial^\mu B^{Jab}) \right), \quad (5.31)$$

was bei Übergang zu komplexen Koordinaten (unter Ausnutzung der Beziehung $(\partial_\mu B_{ab}^I) (\partial^\mu B^{Jab}) = -2 (\partial_\mu B_{i\bar{j}}^I) (\partial^\mu B^{Ji\bar{j}})$), Einsetzen der Feldentwicklung aus (5.27) und anschließender Integration über die Calabi-Yau 4-faltigkeit auf

$$\mathcal{S}' = \int d^2x \sqrt{-g^{(2)}} \mathcal{V} \left(-\frac{1}{4} e^{2\phi} (\partial_\mu l)^2 - \frac{1}{4} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} \partial_\mu b^{IA} M_{IJ} \partial^\mu b^{JB} G_{AB} \right) \quad (5.32)$$

führt.

Für die 4-Form abhängige Wirkung \mathcal{S}_2 gilt bei Aufspaltung der 10- d Koordinaten in interne und Raum-Zeit Koordinaten zunächst, daß

$$F^2 = F_{MNPQS} F^{MNPQS} = 5(F_{\mu abcd})^2, \quad (5.33)$$

und die zehndimensionale Selbstdualitätsbedingung (2.4) ergibt

$$F_{\mu abcd} = \frac{5}{5! \sqrt{-g^{(10)}}} \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{abcdefgh} F^{\nu e f g h}. \quad (5.34)$$

Einsetzen von (5.34) in (5.33) liefert wie schon in $d = 10$, daß $(F_{\mu abcd})^2 = 0$; daher kann man bei Kompaktifizierung der zehndimensionalen nicht-selbstdualen Typ IIB Wirkung nicht die kompaktifizierte Selbstdualitätsbedingung benutzen, sondern erhält eine zweidimensionale nicht-selbstduale IIB Wirkung. Wie in $d = 10$ muß man allerdings auf der Ebene der Bewegungsgleichungen die Selbstdualität benutzen, um die richtigen zweidimensionalen Typ IIB Bewegungsgleichungen zu erhalten. Im Limes $l = 0$, $\phi = \text{const.}$ und $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ist dies für die Bewegungsgleichung von B_{ab}^1 im Anhang E nachgerechnet.

Gemäß diesem Vorgehen erhält man für \mathcal{S}_2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 = \int d^{10}x \left(-\frac{1}{12} \sqrt{-g^{(10)}} (\partial_\mu \mathcal{D}_{abcd} + \frac{15}{4} \epsilon_{IJ} B_{[ab}^I \partial_\mu B_{cd]}^J)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{192} \epsilon_{IJ} \epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{abcdefgh} (\partial_\mu \mathcal{D}_{abcd}) B_{ef}^I \partial_\nu B_{gh}^J \right), \end{aligned} \quad (5.35)$$

wobei

$$\begin{aligned} \epsilon_{IJ} B_{[ab}^I \partial_\mu B_{cd]}^J = \frac{1}{30} \epsilon_{IJ} (B_{ab}^I \partial_\mu B_{cd}^J + B_{cd}^I \partial_\mu B_{ab}^J + B_{ac}^I \partial_\mu B_{db}^J \\ + B_{db}^I \partial_\mu B_{ac}^J + B_{ad}^I \partial_\mu B_{bc}^J + B_{bc}^I \partial_\mu B_{ad}^J), \end{aligned} \quad (5.36)$$

und noch nicht über die achtdimensionalen internen Koordinaten der CY_4 integriert worden ist.

Bei der Entwicklung der Felder in harmonische Formen der CY_4 soll im folgenden der einfachste konsistente Fall untersucht werden, der in zwei Raum-Zeit Dimensionen auf ein Gravitationsmultiplett und ein skalares Multiplett führt. Nach der Diskussion in Abschnitt 5.3 ist dieser Fall durch die Wahl

$$h^{(4,0)} = h^{(0,4)} = h^{(1,1)} = 1 \quad , \quad h^{(2,2)} = h^{(3,1)} = 0 \quad (5.37)$$

gegeben. Gemäß (5.24) und (5.25) führt diese Wahl⁶ nämlich auf $n_+ = 5$ chirale und $n_- = 7$ anti-chirale Skalare; da ein (nicht-chiraler) Skalar zusammen mit der 2-d Metrik $g_{\mu\nu}$ das Gravitationsmultiplett bildet, verbleiben noch vier chirale Skalare (die ein chirales Materiemultiplett ausfüllen) und sechs anti-chirale Skalare, die supersymmetrische Singletts sind.

Für die in (5.37) gemachte Wahl der Hodgezahlen ergeben der topologische Term und der $(\partial^\mu \mathcal{D}^{abcd}) \epsilon_{IJ} B_{[ab}^I \partial_\mu B_{cd]}^J$ -Term von \mathcal{S}_2 keinen Beitrag bei der Entwicklung in harmonische Formen. Nimmt man also nach Übergang zu komplexen Koordinaten zusätzlich zu den Entwicklungen der Kählerdeformationen und der antisymmetrischen Tensoren aus (5.27) die Entwicklung

$$\partial_\mu \mathcal{D}_{ijkl} = (\partial_\mu q) \Omega_{ijkl} \quad (5.38)$$

⁶Man beachte, daß es konsistent mit der aus Gleichung (5.4) gewonnenen Anzahl $h^{(2,1)} = 24$, der daraus resultierenden Eulerzahl $\chi(CY_4) = -90$ und (5.26) ist.

vor, so erhält man insgesamt folgende zweidimensionale nichtselbstduale Typ IIB Wirkung:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \int d^2x \sqrt{-g^{(2)}} \mathcal{V} & \left(-\frac{\mathcal{R}_2}{2} + \partial_\mu M^A \partial^\mu M^B \left(\frac{1}{2} G_{AB} + 6 \frac{\kappa_{AB}}{\mathcal{V}} \right) - (\partial_\mu q)(\partial^\mu \bar{q}) G(q) \right. \\ & - \frac{1}{4} e^{2\phi} (\partial_\mu l)^2 - \frac{1}{4} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu b^{IA}) M_{IJ} (\partial^\mu b^{JB}) G_{AB} \\ & \left. - \epsilon_{IJ} \epsilon_{KL} b^{IA} b^{KB} (\partial_\mu b^{JC}) (\partial^\mu b^{LD}) G_{ABCD} \right), \end{aligned} \quad (5.39)$$

wobei zusätzlich zu den aus Abschnitt 5.2 bekannten Größen noch

$$\begin{aligned} G(q) & \equiv \frac{1}{6\mathcal{V}} \int_{CY_4} d^8\xi \sqrt{g^{(8)}} \Omega_{ijkl} \bar{\Omega}^{ijkl} = 4 \|\Omega\|^2, \\ G_{ABCD} & \equiv \frac{1}{16\mathcal{V}} \int_{CY_4} d^8\xi \sqrt{g^{(8)}} V_{ij}^A V_{kl}^B V_{m\bar{n}}^C V_{o\bar{p}}^D (g^{i\bar{l}} g^{k\bar{j}} g^{m\bar{p}} g^{o\bar{n}} - g^{i\bar{n}} g^{o\bar{j}} g^{m\bar{l}} g^{k\bar{p}}) \end{aligned} \quad (5.40)$$

verwendet wurde, und wegen $h^{(1,1)} = 1$ auch $A, B, C, D = 1$ gilt.

Unter Verwendung von (5.22) und der Beziehung

$$8 \frac{\kappa_{AB}}{\mathcal{V}^2} \partial_\mu M^A \partial^\mu M^B = \frac{1}{2} (\partial_\mu \ln \mathcal{V}) (\partial^\mu \ln \mathcal{V}) \quad (5.41)$$

läßt sich die Wirkung aus (5.39) auch schreiben als:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \int d^2x \sqrt{-g^{(2)}} \mathcal{V} & \left(-\frac{\mathcal{R}_2}{2} - \frac{1}{2} \partial_\mu M^A \partial^\mu M^B G_{AB} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \ln \mathcal{V}) (\partial^\mu \ln \mathcal{V}) \right. \\ & - \frac{1}{4} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu b^{IA}) M_{IJ} (\partial^\mu b^{JB}) G_{AB} \\ & - \frac{1}{4} e^{2\phi} (\partial_\mu l)^2 - 4 \|\Omega\|^2 (\partial_\mu q)(\partial^\mu \bar{q}) \\ & \left. - \epsilon_{IJ} \epsilon_{KL} b^{IA} b^{KB} (\partial_\mu b^{JC}) (\partial^\mu b^{LD}) G_{ABCD} \right). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Eine solche zweidimensionale Wirkung für auf einer Calabi-Yau 4-faltigkeit kompaktifizierten Typ IIB Supergravitation ist bisher nicht bekannt gewesen. Allerdings wurde während des Verfassens dieser Arbeit in [57] ein ähnliches Resultat für den hier betrachteten Fall veröffentlicht: die dort vorgestellte Wirkung weicht jedoch von der aus (5.42) ab, weswegen die hier erzielten Ergebnisse in [21] zur Veröffentlichung vorgesehen sind.

Man beachte das aufgrund der in $d = 2$ nicht möglichen Weyl-Reskalierung positive Vorzeichen vom Volumenabhängigen Term in (5.42), weswegen er nicht durch eine Variablentransformation weghebbar ist: nimmt man nämlich, wie im CY_3 -Fall, die Redefinition $M^A \mapsto \tilde{M}^A = \mathcal{V}^x M^A$ vor, so erhält man

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} G_{AB} (\partial_\mu M^A) (\partial^\mu M^B) & = -\frac{1}{2} \tilde{G}_{AB} (\partial_\mu \tilde{M}^A) (\partial^\mu \tilde{M}^B) \\ & + \mathcal{V}^{-2} (\partial_\mu \mathcal{V}) (\partial^\mu \mathcal{V}) (x^2 + \frac{1}{2} x), \end{aligned} \quad (5.43)$$

was bei der Forderung $x^2 + \frac{1}{2}x \stackrel{!}{=} -\frac{1}{2}$ auf $x_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{-7}$ führt.

In dem hier betrachteten besonderen Fall $h^{(1,1)} = 1$ gilt aber (wegen $G_{AB} \sim \frac{\kappa_A \kappa_B}{\mathcal{V}^2}$ für $h^{(1,1)} = 1$)

$$-\frac{1}{2}(\partial_\mu M^A)(\partial^\mu M^B)G_{AB} = -\frac{1}{16}(\partial_\mu \ln \mathcal{V})(\partial^\mu \ln \mathcal{V}). \quad (5.44)$$

Darüber hinaus läßt sich in zwei Raum-Zeit Dimensionen für die Metrik $g_{\mu\nu}$ eine besondere Eichung wählen, die man die *konforme Eichung* nennt. Diese ist durch

$$g_{\mu\nu} = e^\lambda \eta_{\mu\nu} \quad (5.45)$$

gegeben, was $g^{\mu\nu} = e^{-\lambda} \eta^{\mu\nu}$ und $\sqrt{-g^{(2)}} = e^\lambda$ impliziert, wobei $\eta_{\mu\nu}$ die flache Minkowski-Metrik bezeichnet. Für die Christoffel Symbole aus (A.3) ergibt sich in der Eichung (5.45):

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}(\delta_\mu^\rho \partial_\nu \lambda + \delta_\nu^\rho \partial_\mu \lambda - \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \lambda). \quad (5.46)$$

Mit ihnen läßt sich der Ricci Tensor aus (A.5) zu

$$\mathcal{R}^\rho_{\mu\rho\nu} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho \lambda \quad (5.47)$$

berechnen, was für den Ricci Skalar aus (A.6)

$$\mathcal{R} = e^{-\lambda} \partial_\mu \partial^\mu \lambda \quad (5.48)$$

ergibt. In der konformen Eichung

$$g_{\mu\nu} = e^\lambda \eta_{\mu\nu} \quad , \quad \lambda \equiv \sigma + a \ln \mathcal{V} \quad (5.49)$$

erhält man also zusammen mit (5.44):

$$\begin{aligned} & \int d^2x \sqrt{-g^{(2)}} \mathcal{V} \left(-\frac{\mathcal{R}_2}{2} - \frac{1}{2}(\partial_\mu M^A)(\partial^\mu M^B)G_{AB} + \frac{1}{2}(\partial_\mu \ln \mathcal{V})(\partial^\mu \ln \mathcal{V}) \right) \\ &= \int d^2x \mathcal{V} \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} a (\partial_\mu \ln \mathcal{V})(\partial^\mu \ln \mathcal{V}) + \frac{7}{16} (\partial_\mu \ln \mathcal{V})(\partial^\mu \ln \mathcal{V}) \right). \end{aligned} \quad (5.50)$$

Mit der Wahl $a = -\frac{7}{8}$ ergibt sich somit für die Wirkung aus (5.42):

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \int d^2x \sqrt{-g^{(2)}} \mathcal{V} & \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \sigma - \frac{1}{4} e^{2\phi} (\partial_\mu l)^2 - \frac{1}{4} (\partial_\mu \phi)^2 \right. \\ & - \frac{1}{2} (\partial_\mu b^{IA}) M_{IJ} (\partial^\mu b^{JB}) G_{AB} - 4 ||\Omega||^2 (\partial_\mu q)(\partial^\mu \bar{q}) \\ & \left. - \epsilon_{IJ} \epsilon_{KL} b^{IA} b^{KB} (\partial_\mu b^{JC}) (\partial^\mu b^{LD}) G_{ABCD} \right). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Des weiteren beachte man noch, daß es für den hier betrachteten Fall der durch (5.37) gegebenen Hodgezahlen keinen Unterschied macht, ob man die zweidimensionale Selbstdualitätsbedingung erst auf der Ebene der Bewegungsgleichungen

oder schon in der Wirkung (5.51) einsetzt, da es keine Kopplungsterme zwischen q und b^I gibt. Daher verschwinden die vom zehndimensionalen F^2 -Term herrührenden Beiträge, und man erhält

$$\mathcal{S} = \int d^2x \sqrt{-g^{(2)}} \mathcal{V} \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \sigma - \frac{1}{4} e^{2\phi} (\partial_\mu l)^2 - \frac{1}{4} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_\mu b^{IA}) M_{IJ} (\partial^\mu b^{JB}) G_{AB} \right), \quad (5.52)$$

wobei $(\partial_\mu b^I) M_{IJ} (\partial^\mu b^J) = e^\phi (l \partial_\mu b^1 - \partial_\mu b^2)^2 + e^{-\phi} (\partial_\mu b^1)^2$. Da für $h^{(1,1)} = 1$

$$G_{AB} \sim M^{-2} \sim \mathcal{V}^{-\frac{1}{2}} \quad (5.53)$$

gilt, hat die Lagrange-Dichte aus Gl. (5.52) nicht die in [58] angegebene erwünschte Form

$$\mathcal{L} = \rho \left(\frac{1}{2} \partial^2 \sigma + \hat{\mathcal{L}} \right) \quad , \quad \hat{\mathcal{L}} \neq \hat{\mathcal{L}}(\rho, \sigma), \quad (5.54)$$

in der sich die Felder ρ und σ als unphysikalische longitudinale Raum-Zeit Koordinaten interpretieren lassen.

Im Zusammenhang mit der CY_3 -Kompaktifizierung von Typ IIB konnte als Anwendung von Kapitel 4 hingegen früher schon gezeigt werden [20], daß für $G_{AB} \sim e^{3\phi}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} e^{2\phi} (\partial_\mu l)^2 + \frac{1}{4} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} G_{AB} e^\phi [l \partial_\mu b^1 - \partial_\mu b^2]^2 + \frac{1}{2} G_{AB} e^{-\phi} (\partial_\mu b^1)^2 \\ &= 2 \frac{\partial_\mu C \partial^\mu \hat{C}}{S + \hat{S} - 2C\hat{C}} + \frac{|\partial_\mu S - 2\hat{C} \partial_\mu C|^2}{(S + \hat{S} - 2C\hat{C})^2}, \end{aligned} \quad (5.55)$$

die Metrik von $\hat{\mathcal{L}}$ also quaternionisch ist.

Schließlich sei erwähnt, daß im Gegensatz zum heterotischen String auf $K3 \times K3$ aus Kapitel 6 auch eine geeignete Definition des Dilatons nicht auf die Form einer Lagrange-Dichte wie in (5.54) führt. Dies läßt sich auch an der Wirkung ablesen, die man durch Kompaktifizierung der zehndimensionalen Wirkung in der Stringbasis erhält (noch ohne die konforme Eichung aus (5.49)):

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-g^{(2)}} \hat{\mathcal{V}} & \left(e^{-2\phi} (-\mathcal{R}_2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \ln \hat{\mathcal{V}}) (\partial^\mu \ln \hat{\mathcal{V}}) - \frac{\partial_\mu M \partial^\mu M}{M^2} \right. \\ & \left. + (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{\sqrt{\hat{\mathcal{V}}}} (\partial_\mu b^1)^2 \right) \\ & - \frac{1}{2} (\partial_\mu l)^2 - \frac{1}{\sqrt{\hat{\mathcal{V}}}} (l \partial_\mu b^1 - \partial_\mu b^2)^2, \end{aligned} \quad (5.56)$$

wobei $\hat{\mathcal{V}}$ das Volumen bzgl. der Metrik in der Stringbasis bezeichnet. Das Problem der Auffindung eines in (5.56) ausklammerbaren zweidimensionalen Dilatons besteht darin, daß der $(\partial_\mu b^1)^2$ - und $(l \partial_\mu b^1 - \partial_\mu b^2)^2$ -Term unterschiedlich an das zehndimensionale Dilaton koppeln.

Kapitel 6

Der heterotische String auf $K3 \times K3$

In diesem Kapitel wird die Kompaktifizierung der Niederenergie effektiven Wirkung des zehndimensionalen heterotischen Superstrings auf einer $K3 \times K3$ Mannigfaltigkeit betrachtet. Die Motivation hierfür ist dadurch gegeben, daß die resultierende zweidimensionale Theorie $(4,0)$ -Supersymmetrie besitzt, genau wie schon Typ IIB auf CY_4 . Somit besteht für bestimmte Klassen von Mannigfaltigkeiten die Möglichkeit einer Dualität zwischen diesen beiden Theorien. Außerdem ist für den heterotischen String auf $K3 \times K3$, wenn die Kompaktifizierung in der Stringbasis vorgenommen wird, relativ klar ersichtlich, welcher Skalar in zwei Dimensionen zum Gravitationsmultiplett gehört: es ist dieser Aspekt, auf den in den Abschnitten F.3 und 6.1 das Hauptaugenmerk gerichtet wird.

Der heterotische String auf $K3$ ist aus der Literatur hinlänglich bekannt [59], weshalb die entsprechende Darstellung im Anhang F zu finden ist: dort werden nach Diskussion der relevanten $K3$ -Eigenschaften das Spektrum und die Wirkung der sich in $d = 6$ ergebenden Theorie vorgestellt. An dieser Stelle soll analog zu Anhang F die nochmalige Kompaktifizierung dieser sechsdimensionalen Wirkung (F.30) auf einer weiteren $K3$ betrachtet werden, so daß man insgesamt also die zehndimensionale Wirkung (F.1) kompaktifiziert auf der Produktmannigfaltigkeit $K3 \times K3$ erhält. Ausgehend von $N = (1,0)$ Supersymmetrie in sechs Dimensionen erhält man wegen der Brechung der Hälfte der Supersymmetrie bei $K3$ -Kompaktifizierungen dabei in $d = 2$ eine Theorie mit $Q = 4$ Superladungen, bzw. $(4,0)$ -Supersymmetrie. Im folgenden bezeichne $K'3$ diese weitere Mannigfaltigkeit, und \mathcal{V}' deren Volumen.

6.1 Das Spektrum und die Wirkung

In zwei Raum-Zeit Dimensionen besitzen Vektoren und antisymmetrische Tensoren keinen physikalischen Freiheitsgrad mehr, so daß gem. (F.5) die sechsdimensionalen Felder aus (F.30) bei Kompaktifizierung auf $K'3$ folgendes Spektrum in $d = 2$ ergeben: die $6-d$ Metrik $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ ergibt die $2-d$ Metrik $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1$),

und abermals $h^{(1,1)} = 20$ Deformationen der Kählerform $\delta g_{i\bar{j}}$ ($i, j = 1, 2$) und $2 \times (h^{(1,1)} - 1) = 38$ Deformationen der komplexen Struktur δg_{ij} & $\delta g_{i\bar{j}}$. Der antisymmetrische Tensor $B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ ergibt wiederum $h^{(1,1)}$ Skalarmoden $B_{i\bar{j}}$, sowie $h^{(2,0)} = 1$ und $h^{(0,2)} = 1$ Skalarmoden B_{ij} und $B_{i\bar{j}}$. Die sechsdimensionalen Vektoren liefern wegen $h^{(1,0)} = h^{(0,1)} = 0$ keine weiteren Skalare, und schließlich erhält man in $d = 2$ noch 81 Skalare von den 80 σ^m und dem sechsdimensionalen Dilaton.

Insgesamt sind neben der zweidimensionalen Metrik also noch 161 Skalare vorhanden, wobei wie schon in Anhang F.3 die von den Eichvektoren der betrachteten Eichgruppe stammenden Bündel-Moduli konstant gesetzt wurden. Ein Skalar gehört zum Gravitationsmultiplett, da formal das Graviton in $d = 2$ einen Freiheitsgrad von -1 besitzt.

Völlig analog zu den Rechnungen, die zu (F.24) bzw. (F.26) geführt haben, gilt auch bei der Kompaktifizierung von \mathcal{R}_6 in der Stringbasis nach $d = 2$, daß die Terme

$$\begin{aligned} & 2\partial_\mu M^A \partial^\mu M^B \frac{K^A K^B}{\mathcal{V}'^2} + 2i g^{\mu\nu} g^{i\bar{j}} V_{i\bar{j}}^A \partial_\mu M^A \partial_\nu \phi_6 + 2(\partial_\mu \phi_6)^2 \\ & = 2(\partial_\mu \phi_6)^2 - 2\partial_\mu \phi_6 \partial^\mu \ln \mathcal{V}' + \frac{1}{2}(\partial_\mu \ln \mathcal{V}')^2 \end{aligned} \quad (6.1)$$

zum kinetischen Term

$$2(\partial_\mu \phi_2)^2 \quad (6.2)$$

für das zweidimensionale Dilaton kombinieren, welches durch

$$e^{-2\phi_2} \equiv e^{-2\phi_6} \mathcal{V}' \quad (6.3)$$

gegeben ist.

Außerdem parametrisieren die achtzig Skalare von den Metrik-Deformationen und der $B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ -Entwicklung auf $K'3$ wieder einen Quotientenraum der Form (F.31), so daß der Moduli Raum (ohne das zweidimensionale Dilaton und ohne die Bündel-Moduli) der Gesamtkompaktifizierung auf der Produktmannigfaltigkeit also durch

$$M_\sigma^{K3 \times K3} = \frac{SO(4, 20)}{SO(4) \times SO(20)} \times \frac{SO(4, 20)}{SO(4) \times SO(20)} \quad (6.4)$$

gegeben ist. Für die Wirkung ergibt sich in $d = 2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2^{het} = & \int d^2 x \sqrt{-g^{(2)}} e^{-2\phi_2} \left[-\frac{R_2}{2} + 2(\partial_\mu \phi_2)^2 \right. \\ & \left. + G_{mn}(\sigma) \partial_\mu \sigma^m \partial^\mu \sigma^n + \hat{G}_{mn}(\hat{\sigma}) \partial_\mu \hat{\sigma}^m \partial^\mu \hat{\sigma}^n \right], \end{aligned} \quad (6.5)$$

wobei σ^m und $\hat{\sigma}^m$ ($m = 1, \dots, 80$) die nun insgesamt 160 Moduli von (6.4) bezeichnen. Wie auch schon für die Metrik $G_{mn}(\sigma)$ aus (F.30) gilt für $\hat{G}_{mn}(\hat{\sigma})$, daß diese quaternionisch ist.

6.2 Die Wirkung in konformer Eichung

Wie bereits in Abschnitt 5.4 erläutert, läßt sich für die Metrik $g_{\mu\nu}$ in zwei Raum-Zeit Dimensionen die konforme Eichung

$$g_{\mu\nu} = e^\lambda \eta_{\mu\nu} \quad (6.6)$$

wählen. In dieser Eichung gilt unter Verwendung von (5.48) für die Einstein-Hilbert Wirkung (B.1) in zwei Dimensionen:

$$\mathcal{S}_{Grav} = -\frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{-g^{(2)}} \mathcal{R}_2 = -\frac{1}{2} \int d^2x (\partial_\mu \partial^\mu \lambda) . \quad (6.7)$$

Mit dem Ansatz $\lambda = \rho + c \phi_2$ ($c = \text{const.}$) erhält man dann in der Stringbasis mittels einer partiellen Integration

$$\begin{aligned} & \int d^2x \sqrt{-g^{(2)}} e^{-2\phi_2} \left(-\frac{\mathcal{R}_2}{2} + 2(\partial_\mu \phi_2)^2 \right) \\ &= \int d^2x e^{-2\phi_2} \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \rho - \frac{1}{2} c \partial_\mu \partial^\mu \phi_2 + 2(\partial_\mu \phi_2)^2 \right) \\ &= \int d^2x e^{-2\phi_2} \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \rho - c(\partial_\mu \phi_2)^2 + 2(\partial_\mu \phi_2)^2 \right), \end{aligned} \quad (6.8)$$

so daß für die Wahl $c = 2$ der kinetische Term für das zweidimensionale Dilaton weggehoben wird.

Insgesamt ergibt sich damit die Wirkung \mathcal{S}_2^{het} aus (6.5) in der konformen Eichung $g_{\mu\nu} = e^\lambda \eta_{\mu\nu}$ mit $\lambda \equiv \rho + 2\phi_2$ zu

$$\mathcal{S}_2^{het} = \int d^2x e^{-2\phi_2} \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \rho + G_{mn}(\sigma) \partial_\mu \sigma^m \partial^\mu \sigma^n + \hat{G}_{mn}(\hat{\sigma}) \partial_\mu \hat{\sigma}^m \partial^\mu \hat{\sigma}^n \right). \quad (6.9)$$

Damit ist sie also von der näher in [58] untersuchten Form

$$\mathcal{S}_2^{het} = \int d^2x e^{-2\phi_2} \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \rho + \hat{\mathcal{L}} \right), \quad (6.10)$$

wobei $\hat{\mathcal{L}}$ unabhängig von den Feldern ϕ_2 und ρ ist.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Ausgehend von einer nicht-selbstdualen (NSD-) Wirkung für zehndimensionale Typ IIB Supergravitation [23] wird diese Theorie auf einer Calabi-Yau 3-faltigkeit CY_3 und 4-faltigkeit CY_4 kompaktifiziert. Die Kompaktifizierungen werden dabei in dem Limes vorgenommen, in dem die Volumina der CY_n groß gegenüber der String-Skala sind: es ist dieser *Limes großen Volumens*, in dem die Supergravitationstheorie eine gute Approximation der Stringtheorie darstellt.

Die Hauptmotivation für die Betrachtung der CY_3 -Kompaktifizierung war dadurch gegeben, daß in der Literatur bisher nur die Kopplungsterme bestimmter Felder bekannt waren. So finden sich im vierdimensionalen Spektrum neben dem Gravitationsmultiplett noch $h^{(1,1)}$ Tensormultipletts, ein Doppel-Tensor Multiplett sowie $h^{(2,1)}$ Vektormultipletts. Die Kopplungen der Vektormultipletts sind schon aus [15–19] bekannt, nicht aber die der Tensormultipletts und des Doppel-Tensor Multipletts. Entsprechend werden in dieser Arbeit Calabi-Yau 3-faltigkeiten mit $h^{(2,1)} = 0$, aber beliebigem $h^{(1,1)}$ untersucht, und diese Kopplungen bestimmt [20]. Anschließend werden die $h^{(1,1)} + 2$ antisymmetrischen Tensorfelder in $d = 4$ zu Skalaren dualisiert, und die vierdimensionale Wirkung in der dualen Felddbasis angegeben. Es ist diese Form der Niederenergie effektiven Typ IIB Wirkung, die in [20] dazu verwendet werden konnte, eine explizite Realisierung der sog. *Mirrorsymmetrie* anzugeben: dazu wurden die IIB-Felder auf die Felder der auf der Mirror-Calabi-Yau 3-faltigkeit kompaktifizierten Typ IIA Supergravitation abgebildet. Schließlich ist in der vorliegenden Arbeit noch die Übertragung der in $d = 10$ vorhandenen Symmetrien der Typ IIB Theorie auf die resultierende vierdimensionale Theorie untersucht. Besonderes Interesse gilt dabei der für Typ IIB charakteristischen $SL(2, \mathbb{R})$ -Symmetrie, da diese u.a. eine Abbildung Bereiche schwacher auf Bereiche starker Kopplung beinhaltet.

Bei den in dieser Arbeit betrachteten Kompaktifizierungen der Typ IIB Theorie gibt es eine Konsistenzbedingung, welche wie folgt zu verstehen ist: die zehndimensionale Bewegungsgleichung des im Spektrum von Typ IIB vorhandenen 4-Form Feldes lautet, daß die zugehörige Feldstärke selbstdual ist. Die NSD-Wirkung ist in dem Sinne nicht-selbstdual, als daß diese Selbstdualitätsbedingung an die Feldstärke nicht in der Wirkung selbst gilt; vielmehr wird sie erst auf der Ebene der aus ihr resultierenden Euler-Lagrange Gleichungen eingesetzt,

um die richtigen Typ IIB Bewegungsgleichungen zu ergeben. Eine konsistente Kompaktifizierung dieser NSD-Wirkung wird nun ohne Benutzung der kompaktifizierten Selbstdualitätsbedingung durchgeführt; diese wird analog zu $d = 10$ erst in den Euler-Lagrange Gleichungen aus den entsprechenden niederdimensionalen Wirkungen eingesetzt, und sollte dann die richtigen kompaktifizierten Typ IIB Bewegungsgleichungen reproduzieren. Dies wird in den hier betrachteten Fällen der CY_3 - und CY_4 -Kompaktifizierungen für die Bewegungsgleichungen der beiden antisymmetrischen Tensorfelder in einem bestimmten Feldlimites verifiziert.

Für CY_4 -Kompaktifizierungen von Typ IIB war bislang nur das resultierende Spektrum in $d = 2$ bekannt [48], nicht aber eine Wirkung, aus der sich die zweidimensionalen Bewegungsgleichungen herleiten lassen.¹ In Kapitel 5 wird eine im oben erklärten Sinne konsistente Wirkung in $d = 2$ angegeben. Insbesondere wird der durch die Hodgezahlen $h^{(4,0)} = h^{(0,4)} = h^{(1,1)} = 1$, $h^{(2,2)} = h^{(3,1)} = 0$ gegebene Fall untersucht, der auf ein Gravitationsmultiplett und ein chirales Materiemultiplett führt, und die erzielten Resultate sind zur Veröffentlichung vorgeesehen [21]. Im Gegensatz zum CY_3 -Fall kann das niederdimensionale Dilaton nicht ohne weiteres identifiziert werden, was eng an die Tatsache geknüpft ist, daß in zwei Raum-Zeit Dimensionen keine Weyl-Reskalierung der Metrik vorgenommen werden kann. Allerdings läßt sich für die Raum-Zeit Metrik eine spezielle Eichung wählen, die man *konforme Eichung* nennt. In dieser Eichung und bei obiger Wahl der Hodgezahlen wird in Abschnitt 5.4 gezeigt, daß für eine bestimmte Wahl der Metrik auf dem Raum der $(1,1)$ -Formen von CY_4 die Skalare der zweidimensionalen Lagrangedichte eine quaternionische Mannigfaltigkeit parametrisieren.

Im Zusammenhang mit der problematischen Auffindung des zweidimensionalen Dilatons wird schließlich die Kompaktifizierung der Niederenergie effektiven Wirkung des zehndimensionalen heterotischen Strings auf $K3 \times K3$ untersucht. Diese ist in der Stringbasis vorgenommen, und der Hauptfokus ist auf die Frage gerichtet, welcher Skalar in $d = 2$ zum Gravitationsmultiplett gehört. In Kapitel 6 wird dieser Skalar als das zweidimensionale Dilaton identifiziert, und die Wirkung kann auf eine Standardform gebracht werden, in der die Metrik für die restlichen Skalare quaternionisch ist. Dieses Resultat ist für einen potentiellen Vergleich mit der CY_4 -kompaktifizierten Typ IIB Theorie interessant, und stellt einen für weitere Untersuchungen vielversprechenden Ausgangspunkt dar: so besitzen beide Theorien $N = (4,0)$ Supersymmetrie in zwei Dimensionen, wobei für Typ IIB auf CY_4 die Wirkung im allgemeinen Fall noch nicht in einer Standardform angegeben werden konnte, in der die Metrik der Skalarfelder (ohne das Dilaton) manifest quaternionisch ist. Da die heterotische Niederenergie effektive Wirkung auf $K3 \times K3$ in $d = 2$ nur nicht-chirale Skalare ergibt, müßten bei einem Vergleich mit Typ IIB auf CY_4 solche Calabi-Yau 4-faltigkeiten gewählt werden, für deren Eulerzahl $\chi(CY_4) = -96$ gilt: für diese Mannigfaltigkeiten verschwindet nämlich gerade deren Hirzebruch Signatur, welche die Differenz von chiralen und anti-chiralen Skalaren im Spektrum angibt.

¹Während der Fertigstellung dieser Arbeit wurde allerdings in [57] eine solche Wirkung unter Vernachlässigung des topologischen Terms angegeben, welche aber nicht mit den hier dargestellten Ergebnissen übereinstimmt.

Anhang A

Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten

A.1 Einleitung und Konventionen

Da Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten als diejenigen Mannigfaltigkeiten, auf denen in dieser Arbeit kompaktifiziert wird, eine zentrale Rolle spielen, sollen sie in diesem Anhang näher vorgestellt werden. Dabei wird auf allgemein gültige Eigenschaften eingegangen. Die in den jeweiligen Kapiteln benötigten speziellen Eigenschaften der (reell) vier-, sechs- bzw. acht-dimensionalen Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten werden dort eingeführt.

Beginnend mit der Definition einer komplexen Mannigfaltigkeit wird eine Grundkenntnis der reellen Riemannschen¹ Differentialgeometrie vorausgesetzt, deren Begriffe wie p -Form oder *de Rham Kohomologie* ins Komplexe erweitert werden. Umfangreiche Einführungen in das Gebiet der reellen und komplexen Differentialgeometrie finden sich z.B. in [32, 54, 60], wohingegen vertiefte Abhandlungen über Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten in [33, 61] gegeben sind; auf das Wesentliche beschränkte Zusammenfassungen finden sich in [35] und [62], an denen sich auch dieser Anhang orientiert.

Zunächst sollen an dieser Stelle einige Konventionen gegeben werden, die im gesamten Verlauf der Arbeit benutzt werden: die Signatur der Raum-Zeit Metrik ist als $(- + + \dots +)$ gewählt. Der d -dimensionale antisymmetrische Levi-Civita Tensor ϵ ist gemäß

$$\epsilon^{1\dots d} = 1 \quad , \quad \epsilon_{1\dots d} = \pm 1 \tag{A.1}$$

definiert, so daß die durch

$$E^{1\dots d} \equiv (\pm g^{(d)})^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad E_{1\dots d} \equiv \pm (\pm g^{(d)})^{\frac{1}{2}} \tag{A.2}$$

definierte Größe E wie eine Tensordichte transformiert. Dabei bezeichnet $g^{(d)}$ in (A.2) die Determinante der d -dimensionalen Metrik, und das $+$ Zeichen (bzw.

¹Alle in dieser Arbeit behandelten Mannigfaltigkeiten sind Riemannsch, d.h. sie besitzen eine Metrik. Außerdem werden alle Mannigfaltigkeiten als kompakt vorausgesetzt, und sie sollen auch nur eine einzige Zusammenhangskomponente besitzen.

– Zeichen) in (A.1) und (A.2) bezieht sich auf euklidische (bzw. Minkowski) Signatur.

Großbuchstabige lateinische Indizes aus der Mitte des Alphabets sind zehndimensionale Indizes, wohingegen griechische Indizes aus der Mitte des Alphabets immer entsprechende Raum-Zeit Indizes nach der Kompaktifizierung sind.

Die Christoffel Symbole sind gemäß

$$\Gamma_{NP}^M = \frac{1}{2}g^{MQ}(\partial_P g_{NQ} + \partial_N g_{PQ} - \partial_Q g_{NP}) \quad (\text{A.3})$$

definiert; aus ihnen wird der Riemannsche Krümmungstensor nach der Vorschrift

$$\mathcal{R}_{NPQ}^M = \partial_Q \Gamma_{NP}^M - \partial_P \Gamma_{NQ}^M + \Gamma_{NP}^S \Gamma_{SQ}^M - \Gamma_{NQ}^S \Gamma_{SP}^M \quad (\text{A.4})$$

gebildet. Der Ricci Tensor ist durch

$$\mathcal{R}_{MN} = \mathcal{R}_{MPN}^P \quad (\text{A.5})$$

gegeben, und der Ricci Skalar lautet

$$\mathcal{R} = g^{MN} \mathcal{R}_{MN}. \quad (\text{A.6})$$

A.2 Komplexe Mannigfaltigkeiten

Definition A.2.1. Eine *komplexe Mannigfaltigkeit* \mathcal{M} der Dimension $\dim_{\mathbb{C}} = n$ ist eine reelle Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim_{\mathbb{R}} = 2n$, auf der man n komplexe Koordinaten ξ^i wählen kann, so daß die Übergangsfunktionen $\xi'^i(\xi^j)$ zwischen allen Kartengebieten holomorph sind. \mathcal{M} wird auch *komplexe n -faltigkeit* genannt, und die lokalen komplexen Koordinaten zusammen mit holomorphen Übergangsfunktionen versehen \mathcal{M} mit einer sog. *komplexen Struktur*.

Analog zu p -Formen auf reellen Mannigfaltigkeiten lassen sich auf komplexen Mannigfaltigkeiten (p, q) -Formen definieren, die p antisymmetrische holomorphe und q antisymmetrische antiholomorphe Indizes haben:

$$\omega_{(p,q)} = \frac{1}{p!q!} \omega_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} d\xi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\xi^{i_p} \wedge d\bar{\xi}^{\bar{j}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}^{\bar{j}_q}. \quad (\text{A.7})$$

Die äußere Ableitung einer (p, q) -Form ist explizit durch

$$\begin{aligned} d\omega_{(p,q)} &= \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q}}{\partial \xi^{i_{p+1}}} d\xi^{i_{p+1}} \wedge d\xi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\xi^{i_p} \wedge d\bar{\xi}^{\bar{j}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}^{\bar{j}_q} \\ &+ \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_p \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q}}{\partial \bar{\xi}^{\bar{j}_{q+1}}} d\bar{\xi}^{\bar{j}_{q+1}} \wedge d\xi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\xi^{i_p} \wedge d\bar{\xi}^{\bar{j}_1} \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}^{\bar{j}_q} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

gegeben, was sich auch kurz als

$$d = \partial + \bar{\partial} \equiv d\xi^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} + d\bar{\xi}^{\bar{i}} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}^{\bar{i}}} \quad (\text{A.9})$$

schreiben läßt. Der reelle äußere Ableitungsoperator d spaltet also in einen holomorphen und einen antiholomorphen äußeren Ableitungsanteil auf: angewandt

auf eine (p, q) -Form ergibt ∂ eine $(p+1, q)$ -Form, wohingegen $\bar{\partial}$ eine $(p, q+1)$ -Form liefert. Die Operatoren ∂ und $\bar{\partial}$ heißen *Dolbeault Operatoren*. Beide Operatoren sind nilpotent, d.h.

$$\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0. \quad (\text{A.10})$$

Aufgrund dieser Eigenschaft läßt sich der von reellen Mannigfaltigkeiten bekannte Begriff der *p*-ten *de Rham Kohomologiegruppe* in offensichtlicher Weise auf komplexe Mannigfaltigkeiten erweitern:

Definition A.2.2. Die (p, q) -te $\bar{\partial}$ -Kohomologiegruppe einer komplexen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist durch

$$H_{\bar{\partial}}^{(p,q)}(\mathcal{M}) = \frac{\{\omega_{(p,q)} | \bar{\partial}\omega_{(p,q)} = 0\}}{\{\omega_{(p,q)} | \omega_{(p,q)} = \bar{\partial}\lambda_{(p,q-1)}\}} \quad (\text{A.11})$$

gegeben.² Die komplexe Dimension von $H_{\bar{\partial}}^{(p,q)}(\mathcal{M})$ nennt man die *Hodgezahl* $h^{(p,q)}$:

$$h^{(p,q)} = \dim_{\mathbb{C}} H_{\bar{\partial}}^{(p,q)}(\mathcal{M}). \quad (\text{A.12})$$

Eine Form ω mit $\bar{\partial}\omega = 0$ heißt $\bar{\partial}$ -geschlossen; wenn es eine Form λ gibt, so daß $\omega = \bar{\partial}\lambda$ gilt, so nennt man ω $\bar{\partial}$ -exakt. Die $\bar{\partial}$ -Kohomologiegruppen von \mathbb{C}^n sind trivial, d.h. alle $\bar{\partial}$ -geschlossenen (p, q) -Formen sind auch $\bar{\partial}$ -exakt. In diesem Sinne messen die $\bar{\partial}$ -Kohomologiegruppen die topologische Nichttrivialität einer komplexen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} .

A.3 Hermitesche Mannigfaltigkeiten

Definition A.3.1. Eine Metrik g auf einer komplexen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} heißt *hermitesch*, wenn in lokalen komplexen Koordinaten $g_{ij} = g_{\bar{i}\bar{j}} = 0$ gilt. Das Paar (\mathcal{M}, g) bezeichnet man als *hermitesche Mannigfaltigkeit*.

Da für eine hermitesche Metrik g also nur die Komponenten mit gemischten Indizes ungleich Null sind, läßt sich g als

$$g = g_{i\bar{j}} d\xi^i \otimes d\bar{\xi}^{\bar{j}} + g_{\bar{i}j} d\bar{\xi}^{\bar{i}} \otimes d\xi^j \quad (\text{A.13})$$

schreiben, wobei $d\xi^i \otimes d\bar{\xi}^{\bar{j}}$ das *Tensorprodukt* von $d\xi^i$ mit $d\bar{\xi}^{\bar{j}}$ bezeichnet. Es gilt, daß auf jeder komplexen Mannigfaltigkeit eine hermitesche Metrik existiert.

Auf einer hermiteschen n -faltigkeit ist der *Hodge Sternoperator* \star für eine (p, q) -Form wie in [63] gemäß

$$\begin{aligned} \star\omega_{(p,q)} = \frac{(-1)^{\frac{(n-p)q+1}{2n(n-1)}} i^n}{p!q!(n-p)!(n-q)!} \bar{\omega}_{i_1 \dots i_q \bar{i}_1 \dots \bar{i}_p} E_{\bar{j}_1 \dots \bar{j}_q}^{i_1 \dots i_q} E_{j_{p+1} \dots j_n}^{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_p} \\ \times d\xi^{j_{p+1}} \wedge \dots \wedge d\xi^{j_n} \wedge d\bar{\xi}^{\bar{j}_{q+1}} \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}^{\bar{j}_n} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

²Eine entsprechende Definition gilt für $H_{\partial}^{(p,q)}(\mathcal{M})$ unter Verwendung von ∂ anstelle von $\bar{\partial}$.

definiert, wobei $\bar{\omega}_{i_1 \dots i_q \bar{i}_1 \dots \bar{i}_p} \equiv \overline{\omega_{i_1 \dots i_p \bar{i}_1 \dots \bar{i}_q}}$. Der Hodge Sternoperator bildet also eine (p, q) -Form auf eine $(n - q, n - p)$ -Form ab. Die in (A.14) gegebene Definition des Hodge Sternoperators führt dazu, daß man auf einer hermiteschen n -faltigkeit \mathcal{M} folgenden Ausdruck für das Skalarprodukt zweier (p, q) -Formen erhält:

$$\begin{aligned} \langle \omega_{(p,q)}, \lambda_{(p,q)} \rangle &\equiv \int_{\mathcal{M}} \omega_{(p,q)} \wedge \star \lambda_{(p,q)} \\ &= \frac{(-1)^{\frac{1}{2n(n-1)}} i^n}{p!q!} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{|detg|} \omega_{i_1 \dots i_p \bar{i}_1 \dots \bar{i}_q} \bar{\lambda}^{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_q i_1 \dots i_p} d^n \xi d^n \bar{\xi}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Mit Hilfe des in (A.15) definierten Skalarproduktes definiert man auf einer hermiteschen n -faltigkeit in Analogie zum adjungierten äußeren Ableitungsoperator d^\dagger die *adjungierten Dolbeault Operatoren* ∂^\dagger und $\bar{\partial}^\dagger$ wie folgt:

$$\langle \omega, \partial \lambda \rangle = \langle \partial^\dagger \omega, \lambda \rangle, \quad \langle \omega, \bar{\partial} \lambda \rangle = \langle \bar{\partial}^\dagger \omega, \lambda \rangle. \quad (\text{A.16})$$

Als Folge von (A.9) erhält man auch für den adjungierten äußeren Ableitungsoperator d^\dagger folgende Aufspaltung:

$$d^\dagger = \partial^\dagger + \bar{\partial}^\dagger. \quad (\text{A.17})$$

Mit Hilfe der (analog zu $d^\dagger = -\star d\star$) gültigen Relationen $\partial^\dagger = -\star \bar{\partial}\star$ und $\bar{\partial}^\dagger = -\star \partial\star$ läßt sich einfach zeigen, daß auch die adjungierten Dolbeault Operatoren nilpotent sind, d.h. es gilt

$$(\partial^\dagger)^2 = (\bar{\partial}^\dagger)^2 = 0. \quad (\text{A.18})$$

Neben dem mittels der äußeren Ableitung d gebildeten *Laplace Operator* $\Delta_d = (dd^\dagger + d^\dagger d)$ definiert man auf einer hermiteschen n -faltigkeit noch die Laplace Operatoren Δ_∂ und $\Delta_{\bar{\partial}}$ gemäß:

$$\begin{aligned} \Delta_\partial &\equiv (\partial + \partial^\dagger)^2 = \partial \partial^\dagger + \partial^\dagger \partial \\ \Delta_{\bar{\partial}} &\equiv (\bar{\partial} + \bar{\partial}^\dagger)^2 = \bar{\partial} \bar{\partial}^\dagger + \bar{\partial}^\dagger \bar{\partial}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Definition A.3.2. Eine (p, q) -Form ω heißt *∂ -harmonisch* (*$\bar{\partial}$ -harmonisch*), wenn $\Delta_\partial \omega = 0$ ($\Delta_{\bar{\partial}} \omega = 0$) gilt.

Es gilt, daß auf einer hermiteschen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} die $\bar{\partial}$ -harmonischen (∂ -harmonischen) (p, q) -Formen in eindeutiger Weise Elementen aus $H_{\bar{\partial}}^{(p,q)}(\mathcal{M})$ ($H_\partial^{(p,q)}(\mathcal{M})$) entsprechen.

A.4 Kählermannigfaltigkeiten

Kählermannigfaltigkeiten sind komplexe Mannigfaltigkeiten mit einer hermiteschen Metrik g , die einer weiteren Einschränkung unterliegt. Eine Möglichkeit der

Formulierung dieser Zusatzbedingung an g ist dabei wie folgt gegeben: zunächst definiert man auf einer hermiteschen n -faltigkeit eine $(1,1)$ -Form gemäß

$$J = i g_{i\bar{j}} d\xi^i \otimes d\bar{\xi}^{\bar{j}} - i g_{j\bar{i}} d\bar{\xi}^{\bar{j}} \otimes d\xi^i, \quad (\text{A.20})$$

was sich aufgrund der Symmetrie von g auch als

$$J = i g_{i\bar{j}} d\xi^i \wedge d\bar{\xi}^{\bar{j}} \quad (\text{A.21})$$

schreiben läßt. Die so definierte Form J heißt *Kähler Form*, und sie ist eine reelle Form:

$$\bar{J} = -i \overline{g_{i\bar{j}}} d\bar{\xi}^{\bar{i}} \wedge d\xi^j = i g_{j\bar{i}} d\xi^j \wedge d\bar{\xi}^{\bar{i}} = J. \quad (\text{A.22})$$

Weiterhin läßt sich zeigen, daß

$$\underbrace{J \wedge \cdots \wedge J}_n \quad (\text{A.23})$$

eine nirgends verschwindende reelle $2n$ -Form ist, und somit als Volumenelement dient: jede hermitesche Mannigfaltigkeit, und damit auch jede komplexe Mannigfaltigkeit, ist *orientierbar*.

Als Kählermannigfaltigkeit definiert man nun

Definition A.4.1. Eine *Kählermannigfaltigkeit* ist eine hermitesche Mannigfaltigkeit (\mathcal{M}, g) , deren Kähler Form geschlossen ist: $dJ = 0$. Die Metrik g heißt *Kähler Metrik* auf \mathcal{M} .

In lokalen Koordinaten ergibt die Bedingung $dJ = (\partial + \bar{\partial})i g_{i\bar{j}} d\xi^i \wedge d\bar{\xi}^{\bar{j}} = 0$, daß

$$\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \xi^l} = \frac{\partial g_{l\bar{j}}}{\partial \xi^i}, \quad \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \bar{\xi}^l} = \frac{\partial g_{i\bar{l}}}{\partial \bar{\xi}^j} \quad (\text{A.24})$$

gelten muß. Wenn die Metrik g lokal von der Form

$$g_{i\bar{j}} = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}^{\bar{j}}} K(\xi, \bar{\xi}) \quad (\text{A.25})$$

ist, so sind die Bedingungen von (A.24) sicherlich erfüllt; umgekehrt kann man zeigen, daß sich jede Kähler Metrik *lokal* wie in (A.25) ausdrücken läßt. Die Funktion $K(\xi, \bar{\xi})$ heißt *Kähler Potential*, und lokal läßt sich die Kähler Form also gemäß $J = i \partial \bar{\partial} K$ darstellen. Man beachte, daß das Kähler Potential nicht global definiert zu sein braucht, sondern auf verschiedenen Kartengebieten auch eine unterschiedliche Form haben kann.

Für Kählermannigfaltigkeiten gilt

$$\Delta_d = 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\bar{\partial}}, \quad (\text{A.26})$$

so daß also die harmonischen Formen bzgl. der einzelnen Laplace Operatoren dieselben sind. Weiterhin gilt, daß die $\bar{\partial}$ - und ∂ -Kohomologiegruppen gleich sind:

$$H_{\bar{\partial}}^{(p,q)}(\mathcal{M}) = H_{\partial}^{(p,q)}(\mathcal{M}) \equiv H^{(p,q)}(\mathcal{M}). \quad (\text{A.27})$$

Auf einer Kähler n -faltigkeit läßt sich jede k -Form in (p, q) -Formen mit $p + q = k$ zerlegen; entsprechend gilt der folgende Zusammenhang zwischen den de Rham und Dolbeault Kohomologiegruppen

$$H^k(\mathcal{M}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{(p,q)}(\mathcal{M}), \quad (\text{A.28})$$

was man auch als *Hodge Zerlegung* bezeichnet. Somit sind die Betti Zahlen³ mit den Hodgezahlen über

$$b_k = \sum_{p+q=k} h^{(p,q)} \quad (\text{A.29})$$

korreliert. Für die *Eulerzahl von \mathcal{M}* als die alternierende Summe der Betti Zahlen erhält man für eine Kähler n -faltigkeit somit

$$\chi(\mathcal{M}) \equiv \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k b_k = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \sum_{p+q=k} h^{(p,q)}. \quad (\text{A.30})$$

Die gesamten *Hodgezahlen* $h^{(p,q)} = \dim_{\mathbb{C}} H^{(p,q)}(\mathcal{M})$ einer Kähler n -faltigkeit werden üblicherweise in Form des sog. *Hodge-Diamanten* dargestellt:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & h^{(n,n)} & & \\ & & & & & & \\ & & & & h^{(n,n-1)} & & h^{(n-1,n)} \\ & & & & & & \\ h^{(n,0)} & \cdots & h^{(n-1,1)} & \cdots & h^{(1,n-1)} & \cdots & h^{(0,n)} \\ & & & & & & \\ & & & & h^{(1,0)} & \cdots & h^{(0,1)} & \cdots \\ & & & & & & h^{(0,0)} \end{array} \quad (\text{A.31})$$

Unter diesen zunächst $(n+1)^2$ unabhängigen Einträgen herrschen folgende Beziehungen: komplexe Konjugation ergibt

$$h^{(p,q)} = h^{(q,p)}, \quad (\text{A.32})$$

und unter Anwendung des Hodge Sternoperators erhält man

$$h^{(p,q)} = h^{(n-p,n-q)}. \quad (\text{A.33})$$

Somit ist der Hodge-Diamant einer Kähler n -faltigkeit symmetrisch bzgl. der horizontalen und vertikalen Achse. Durch diese Symmetrien reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Hodgezahlen auf $(\frac{1}{2}n+1)^2$ für gerades n , und $\frac{1}{4}(n+1)(n+3)$ für ungerades n . Außerdem werden in dieser Arbeit nur Mannigfaltigkeiten mit einer Zusammenhangskomponente betrachtet, und für diese Mannigfaltigkeiten gilt $h^{(0,0)} = h^{(n,n)} = 1$ ($h^{(0,0)}$ ist die Dimension des Raums der konstanten Funktionen auf \mathcal{M}).

³Die reelle Dimension der k -ten de Rham Kohomologiegruppe $H^k(\mathcal{M})$ nennt man die k -te Betti Zahl b_k von \mathcal{M} : $b_k = \dim_{\mathbb{R}} H^k(\mathcal{M})$.

A.5 Kähler Geometrie

Die Kählerbedingung an eine hermitesche Metrik führt bei der Berechnung von geometrischen Größen auf einer Kählermannigfaltigkeit zu einigen Besonderheiten, die hier kurz zusammengestellt werden.

Berechnet man auf einer Kählermannigfaltigkeit die Christoffel Symbole aus (A.3) in komplexen Koordinaten, so ergeben die Bedingungen (A.24) an die Kähler Metrik, daß lediglich die Christoffel Symbole mit entweder nur holomorphen oder nur anti-holomorphen Indizes ungleich Null sind:

$$\Gamma_{jk}^i = g^{i\bar{l}} \frac{\partial g_{k\bar{l}}}{\partial \xi^j} \quad , \quad \Gamma_{\bar{j}\bar{k}}^{\bar{i}} = g^{\bar{l}l} \frac{\partial g_{\bar{l}k}}{\partial \bar{\xi}^{\bar{j}}} . \quad (\text{A.34})$$

Außerdem besitzt der Riemann Tensor (in komplexen Koordinaten) aufgrund von (A.24) eine zusätzliche Symmetrie

$$\mathcal{R}_{j\bar{k}\bar{l}}^i = \partial_{\bar{l}}(g^{\bar{m}i} \partial_k g_{j\bar{m}}) = \partial_{\bar{l}}(g^{\bar{m}i} \partial_j g_{k\bar{m}}) = \mathcal{R}_{k\bar{j}\bar{l}}^i , \quad (\text{A.35})$$

die zusammen mit den üblichen Symmetrien noch auf

$$\mathcal{R}_{\bar{j}\bar{k}\bar{l}}^{\bar{i}} = \mathcal{R}_{\bar{k}\bar{j}\bar{l}}^{\bar{i}} , \quad \mathcal{R}_{j\bar{k}\bar{l}}^i = \mathcal{R}_{l\bar{k}\bar{j}}^i , \quad \mathcal{R}_{\bar{j}\bar{k}\bar{l}}^{\bar{i}} = \mathcal{R}_{l\bar{k}\bar{j}}^{\bar{i}} \quad (\text{A.36})$$

führt.

Der Ricci Tensor hat nur Komponenten mit gemischten Indizes,

$$\mathcal{R}_{i\bar{j}} = g^{k\bar{l}} \mathcal{R}_{\bar{l}i\bar{k}\bar{j}} . \quad (\text{A.37})$$

Schon auf hermiteschen Mannigfaltigkeiten existiert die Definition der sog. *Ricci Form* R gemäß

$$R \equiv i R_{i\bar{j}} d\xi^i \wedge d\bar{\xi}^{\bar{j}} = -i \partial \bar{\partial} \ln g , \quad (\text{A.38})$$

wobei $g \equiv \det(g_{i\bar{j}})$ und

$$R_{i\bar{j}} \equiv \mathcal{R}_{k\bar{i}\bar{j}}^k = \partial_{\bar{j}}(g^{k\bar{l}} \partial_i g_{k\bar{l}}) = \partial_{\bar{j}} \partial_i \ln g . \quad (\text{A.39})$$

Allerdings gilt erst auf Kählermannigfaltigkeiten, daß wegen (A.35) die Komponenten der Ricci Form mit denen des Ricci Tensors übereinstimmen, $R_{i\bar{j}} \equiv \mathcal{R}_{k\bar{i}\bar{j}}^k = \mathcal{R}_{i\bar{k}\bar{j}}^k = \mathcal{R}_{i\bar{j}}$, woher die Ricci Form denn auch ihren Namen hat. Wenn $R_{i\bar{j}} = \mathcal{R}_{i\bar{j}} = 0$ gilt, so nennt man die Kähler Metrik *Ricci-flach*.

Wie schon die Kähler Form ist auch R eine reelle Form: $\bar{R} = i \overline{\partial \bar{\partial} \ln g} = -i \partial \bar{\partial} \ln g = R$. Wegen $\partial \bar{\partial} = -\frac{1}{2} d(\partial - \bar{\partial})$ gilt außerdem, daß R geschlossen ist:

$$dR \propto d^2(\partial - \bar{\partial}) \ln g = 0 . \quad (\text{A.40})$$

Da g kein Skalar ist, und somit $(\partial - \bar{\partial}) \ln g$ nicht *global* definiert ist, ist R im allg. aber nicht exakt. Vielmehr definiert R eine nicht-triviale Kohomologie-Klasse

$$c_1(\mathcal{M}) \equiv [R/2\pi] \in H^2(\mathcal{M}) , \quad (\text{A.41})$$

die man die *erste Chern-Klasse von \mathcal{M}* nennt. Der Faktor $\frac{1}{2\pi}$ ist dabei lediglich ein Normierungsfaktor, der aus der allg. Def. höherer Chern-Klassen stammt.

A.6 Holonomie

Der letzte zur Behandlung von Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten noch benötigte Begriff ist der der *Holonomie*, welcher an dieser Stelle eingeführt werden soll. Dazu sei zunächst eine reelle orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit \mathcal{M} mit Dimension $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{M} = m$ gegeben. Ausgehend von einem fest gewählten Basispunkt p betrachte man nun einen Vektor v , den man von p entlang einer geschlossenen Kurve C zurück nach p paralleltransportiert: auf diese Weise erhält man einen Vektor v' , der in der Regel in eine andere Richtung zeigt als v (da Paralleltransport die Länge eines Vektors nicht verändert, sind v und v' aber gleichlang). Da \mathcal{M} orientierbar ist, stehen v und v' über eine $SO(m)$ -Transformation miteinander in Beziehung:

$$v' = S(C)v \quad , \quad S(C) \in SO(m). \quad (\text{A.42})$$

Auf diese Weise wird also jeder von p ausgehenden geschlossenen Kurve C eine $SO(m)$ -Matrix $S(C)$ zugeordnet. Die Menge aller $S(C)$ für alle möglichen von p ausgehenden geschlossenen Kurven C bildet eine Gruppe (nach Konstruktion eine Untergruppe von $SO(m)$), die man die *Holonomiegruppe* $Hol(\mathcal{M}, p)$ von \mathcal{M} am Punkt p nennt. Für die hier betrachteten Mannigfaltigkeiten mit nur einer Zusammenhangskomponente ist es einfach zu sehen, daß für verschieden gewählte Basispunkte $p, q \in \mathcal{M}$ die entsprechenden Gruppen $Hol(\mathcal{M}, p)$ und $Hol(\mathcal{M}, q)$ isomorph zueinander sind: in diesem Sinne spielt die ursprüngliche Wahl des Basispunktes keine Rolle, und man spricht einfach von der Holonomiegruppe $Hol(\mathcal{M})$ von \mathcal{M} .

Die Holonomie Gruppe enthält Information darüber, wie gekrümmt der Raum ist. So besteht sie z.B. für flache Mannigfaltigkeiten nur aus der Identität, da auf flachen Mannigfaltigkeiten der Paralleltransport eines Vektors dessen Richtung nicht ändert.

Für eine Kähler n -faltigkeit ist die Holonomiegruppe in $U(n) \subset SO(2n)$ enthalten, was man wie folgt sehen kann: da für eine Kählermannigfaltigkeit die Christoffel Symbole gem. (A.34) nur für Indizes desselben Typs nichtverschwindend sind, ergibt der Paralleltransport eines Vektors mit rein holomorphen (anti-holomorphen) Komponenten einen ebensolchen Vektor. Schreibt man also allg. einen Vektor v in lokalen komplexen Koordinaten als

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} + v^{\bar{i}} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}^{\bar{i}}}, \quad (\text{A.43})$$

so werden unter Paralleltransport die holomorphen Komponenten v^i nicht mit den anti-holomorphen Komponenten $v^{\bar{i}}$ vermischt. Daher können die Holonomie Matrizen $S(C)$ durch ihre Wirkung auf die holomorphen bzw. anti-holomorphen Basiselemente ausgedrückt werden, und liegen somit in einer $U(n)$ -Untergruppe von $SO(2n)$.

A.7 Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten

Nach der Zusammenstellung der relevanten Begriffe in den letzten Abschnitten läßt sich eine Calabi-Yau Mannigfaltigkeit nun folgendermaßen definieren:

Definition A.7.1. Eine *Calabi-Yau Mannigfaltigkeit* CY_n ist eine kompakte Kähler n -faltigkeit, deren erste Chern-Klasse verschwindet.

Gemäß den Ausführungen in Abschnitt A.5 ist klar, daß für Ricci-flache Kählermannigfaltigkeiten die erste Chern-Klasse verschwindet. Umgekehrt sichert folgendes (von E. Calabi 1957 aufgestellte und von S.T. Yau 1977 bewiesene) Theorem die Existenz einer Ricci-flachen Metrik auf Kählermannigfaltigkeiten mit $c_1 = 0$:

Theorem. Wenn \mathcal{M} eine Kählermannigfaltigkeit mit verschwindender erster Chern-Klasse und mit Kähler Form J ist, dann existiert eine bis auf Skalierung eindeutige, Ricci-flache Metrik auf \mathcal{M} , deren Kähler Form J' in derselben Kohomologie Klasse wie J liegt.

Da auf Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten Ricci-flache Metriken nicht explizit bekannt sind, ist dieses Theorem sehr nützlich. Insbesondere wird die Existenz der Ricci-flachen Metrik für nachstehendes Theorem bzgl. der Holonomiegruppe von Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten benötigt:

Theorem. Wenn g die Ricci-flache Metrik auf einer Calabi-Yau n -faltigkeit CY_n ist, so ist die Holonomiegruppe in $SU(n)$ enthalten.

Bemerkung. In dieser Arbeit werden nur Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten betrachtet, deren Holonomiegruppe genau $SU(n)$ ist, und keine echte Untergruppe davon. So werden z.B. bei Calabi-Yau 4-faltigkeiten nicht die Mannigfaltigkeiten T^8 , $K3 \times T^4$ oder $T^2 \times CY_3$ berücksichtigt.

Zusätzlich zu den in Abschnitt A.4 genannten, allgemein auf Kählermannigfaltigkeiten gültigen Relationen zwischen den Hodgezahlen existieren auf Calabi-Yau n -faltigkeiten noch weitere Beziehungen, die die Anzahl der unabhängigen Hodgezahlen nochmals reduzieren. Insbesondere gilt folgendes Theorem:

Theorem. Auf einer kompakten Kähler n -faltigkeit \mathcal{M} verschwindet die erste Chern-Klasse genau dann, wenn es auf \mathcal{M} eine nirgends verschwindende, holomorphe $(n, 0)$ -Form Ω gibt. Diese $(n, 0)$ -Form Ω ist außerdem harmonisch, sowie kovariant konstant bzgl. der Ricci-flachen Metrik.

Unter Verwendung von Ω läßt sich dann zeigen, daß auf einer Calabi-Yau n -faltigkeit

$$h^{(p,0)} = h^{(n-p,0)} \quad (\text{A.44})$$

gilt. Weiterhin gilt für Calabi-Yau n -faltigkeiten, deren Holonomiegruppe genau $SU(n)$ ist, daß

$$h^{(p,0)} = h^{(0,p)} = 0 \quad \text{für } 0 < p < n. \quad (\text{A.45})$$

Zusammen mit $h^{(0,0)} (= h^{(n,n)}) = 1$ reduziert dies zunächst die Anzahl der unabhängigen Hodgezahlen auf $\frac{1}{4}n^2$ für gerades n , und $\frac{1}{4}(n^2 - 1)$ für ungerades n . Zusätzlich können für Calabi-Yau n -faltigkeiten mit $SU(n)$ -Holonomie noch weitere Einschränkungen gelten, was im jeweils betrachteten Einzelfall einer genaueren Überprüfung bedarf. So gilt z.B. im Fall der $K3$, daß diese eindeutig ist [64], und als Folge sind alle Hodgezahlen eindeutig bestimmt; bei Calabi-Yau 4-faltigkeiten findet man eine aus $SU(4)$ -Holonomie folgende Zusatzbedingung [53], so daß insgesamt nur drei frei wählbare Hodgezahlen verbleiben. Für die in dieser Arbeit betrachteten Fälle der $K3$, CY_3 und CY_4 sind die unabhängigen Hodgezahlen in Tab. A.1 zusammengestellt.

CY_n	unabhängige Hodgezahlen
$K3$	keine
CY_3	$h^{(1,1)}, h^{(2,1)}$
CY_4	$h^{(1,1)}, h^{(2,1)}, h^{(3,1)}$

Tabelle A.1: Frei wählbare Hodgezahlen von Calabi-Yau n -faltigkeiten mit $n = 2, 3, 4$.

Anhang B

Weyl-Reskalierungen zwischen verschiedenen Basen

In dieser Arbeit werden die Wirkungen für die jeweils betrachtete Stringtheorie je nach Kontext in unterschiedlichen Feldbasen angegeben. Für beliebige Raum-Zeit Dimension d bezeichnet man dabei die Basis, in der alle Felder des NS-NS Sektors einschl. des Ricci Skalars mit dem Dilaton Term $e^{-2\phi}$ multipliziert sind, als *Stringbasis*. Die sog. *Einsteinbasis* ist hingegen dadurch charakterisiert, daß die Gravitations-Wirkung gerade durch die übliche Einstein-Hilbert Wirkung

$$\mathcal{S}_{Grav} = -\frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{-g} \mathcal{R} \quad (\text{B.1})$$

gegeben ist.

Wie in [7] erklärt gehen Einstein- und Stringbasis auseinander durch eine *Weyl-Reskalierung* $g_{\mu\nu} \mapsto \hat{g}_{\mu\nu} = \tau^2 g_{\mu\nu}$ der Metrik hervor, unter der $g^{\mu\nu}$ und $\sqrt{-g}$ gemäß

$$g^{\mu\nu} \mapsto \hat{g}^{\mu\nu} = \tau^{-2} g^{\mu\nu} \quad , \quad \sqrt{-g} \mapsto \sqrt{-\hat{g}} = \tau^d \sqrt{-g} \quad (\text{B.2})$$

transformieren.

Setzt man das Transformationverhalten der Metrik in (A.3) ein, so erhält man, daß die Christoffel Symbole wie

$$\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \mapsto \hat{\Gamma}_{\nu\rho}^{\mu} = \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} + \tau^{-1} g^{\mu\sigma} (g_{\nu\sigma} \partial_{\rho} \tau + g_{\rho\sigma} \partial_{\nu} \tau - g_{\nu\rho} \partial_{\sigma} \tau) \quad (\text{B.3})$$

transformieren.

Mit Hilfe von (B.3) läßt sich nun das Transformationsverhalten des Ricci Skalars aus (A.6) zu

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \mapsto \hat{\mathcal{R}} = & \tau^{-2} \mathcal{R} + 2(d-1)\tau^{-3} (g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \tau + (\partial_{\mu} \tau) \partial_{\nu} g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_{\rho} g_{\mu\nu}) \partial^{\rho} \tau) \\ & + (d^2 - 5d + 4) \tau^{-4} (\partial_{\mu} \tau)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

bestimmen.

Insgesamt erhält man also für eine Wirkung der Form $\int d^d x \sqrt{-g} \tau^{2-d} \mathcal{R}$ das folgende Transformationsverhalten unter der Weyl-Reskalierung $g_{\mu\nu} \mapsto \hat{g}_{\mu\nu} = \tau^2 g_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \int d^d x \sqrt{-g} \tau^{2-d} \mathcal{R} &\mapsto \int d^d x \sqrt{-\hat{g}} \tau^{2-d} \hat{\mathcal{R}} \\ &= \int d^D x \sqrt{-g} [R + (d^2 - 5d + 4) \tau^{-2} (\partial_\mu \tau)^2 \\ &\quad + 2(d-1) \tau^{-1} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \tau + (\partial_\mu \tau) \partial_\nu g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\rho g_{\mu\nu}) \partial^\rho \tau)]. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Eine partielle Integration des $g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \tau$ -Terms liefert

$$\begin{aligned} 2(d-1) \int d^d x \sqrt{-g} \tau^{-1} g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \tau & \\ = -2(d-1) \int d^d x \sqrt{-g} (\partial_\nu \tau) & \left(\frac{1}{2} \tau^{-1} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \partial_\mu g_{\rho\sigma} - \tau^{-2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \tau + \tau^{-1} \partial_\mu g^{\mu\nu} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

so daß man als Endergebnis

$$\int d^d x \sqrt{-g} \tau^{2-d} \mathcal{R} \mapsto \int d^d x \sqrt{-g} [\mathcal{R} + (d-1)(d-2) \tau^{-2} (\partial_\mu \tau)^2] \quad (\text{B.7})$$

erhält.

Völlig analog berechnet man

$$\begin{aligned} \int d^d x \sqrt{-g} \mathcal{V} \mathcal{R} & \\ \mapsto \int d^d x \sqrt{-g} [\tau^{d-2} \mathcal{V} \mathcal{R} - (d-1)(d-2) \tau^{d-4} \mathcal{V} (\partial_\mu \tau)^2 - 2(d-1) \tau^{d-3} (\partial_\mu \tau) \partial^\mu \mathcal{V}], & \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

wobei $\mathcal{V} = \mathcal{V}(x)$ im Kontext von Kompaktifizierungen üblicherweise das Volumen der internen kompakten Mannigfaltigkeit bezeichnet.

Anhang C

Kompaktifizierung von \mathcal{R} auf CY_3

In diesem Anhang wird die Kompaktifizierung des Ricci Skalars \mathcal{R} auf einer Calabi-Yau 3-faltigkeit CY_3 mit $SU(3)$ -Holonomie explizit durchgeführt. Insgesamt ist es eine ausführlichere Darstellung als die bereits im Anhang von [20] gegebene, und die Herangehensweise ist eng an die von [17] gelehnt.

Ausgangspunkt ist, daß die zehndimensionale Metrik $g_{MN}^{(10)}$ gemäß

$$g_{MN}^{(10)}(x, y) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}^{(4)}(x) & 0 \\ 0 & g_{ab}^{(6)}(x, y) \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

in einen vierdimensionalen Raum-Zeit Anteil $g_{\mu\nu}^{(4)}(x)$ und eine sechsdimensionale interne Calabi-Yau Metrik $g_{ab}^{(6)}(x, y)$ aufspaltet.¹ Dabei sind x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) die Koordinaten des vierdimensionalen Minkowski Raums, und y^a ($a = 1, \dots, 6$) bezeichnen die reellen internen Calabi-Yau Koordinaten. Man beachte, daß in (C.1) keine Komponenten der Form $g_{\mu a}$ auftreten, was die Tatsache widerspiegelt, daß $h^{(1,0)} = 0$ auf Calabi-Yau 3-faltigkeiten mit $SU(3)$ -Holonomie.

Aufgrund von (C.1) spaltet auch der zehndimensionale Ricci Skalar \mathcal{R}_{10} auf:

$$\mathcal{R}_{10} = \mathcal{R}_4 + g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu a \nu}^a + g^{ab} (\mathcal{R}_{a \mu b}^\mu + \mathcal{R}_{a c b}^c). \quad (\text{C.2})$$

Die Calabi-Yau Metrik g_{ab} wird nun um eine gegebene Hintergrundmetrik $g_{ab}^0(y)$ entwickelt:

$$g_{ab}(x, y) = g_{ab}^0(y) + \delta g_{ab}(x, y), \quad (\text{C.3})$$

wobei $\delta g_{ab}(x, y)$ kleine Deformationen der Art sein sollen, daß die Calabi-Yau Bedingungen an die Metrik erfüllt bleiben. Diese Bedingungen werden auf natürlichste Weise in komplexen Koordinaten $\xi^i, \bar{\xi}^{\bar{i}}$ ($i, \bar{i} = 1, 2, 3$) formuliert, wobei $\xi^1 \equiv \frac{y^1 + iy^2}{\sqrt{2}}$, $\xi^2 \equiv \frac{y^3 + iy^4}{\sqrt{2}}$, $\xi^3 \equiv \frac{y^5 + iy^6}{\sqrt{2}}$, und $\bar{\xi}^{\bar{i}}$ die dazu komplex konjugierten Koordinaten sind. Unter Übergang zu diesem Koordinatensatz hat man

$$g_{ab} \mapsto g_{ij}, g_{\bar{i}\bar{j}} = \overline{g_{ij}}, g_{i\bar{j}}, g_{\bar{i}j} = \overline{g_{i\bar{j}}}, \quad (\text{C.4})$$

¹Im folgenden werden die sich auf die Dimension beziehenden, hochgestellten Indizes (4) bzw. (6) an den jeweiligen Metriken weggelassen, da aufgrund der Indexstruktur klar ist, um welche Metrik es sich handelt.

und der Zusammenhang zwischen den Differentialen ist durch $d^6\xi \equiv d^3\xi d^3\bar{\xi} = -i d^6y$ gegeben. Damit spaltet das zehndimensionale Integrationsmaß gemäß

$$\int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} = \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} \int_{CY_3} d^6\xi i \sqrt{g^{(6)}} \quad (C.5)$$

auf, wobei $\sqrt{g^{(6)}} \equiv \sqrt{\det g_{ab}} = \det g_{i\bar{j}}$.

Da die Hintergrund Calabi-Yau Metrik g_{ab}^0 insbesondere hermitesch ist, verschwinden deren Komponenten mit gleicher Indexart (bzgl. den komplexen Koordinaten), so daß $g_{ij} = \delta g_{ij}$ und $g_{\bar{i}\bar{j}} = \delta g_{\bar{i}\bar{j}}$ gilt. In $d = 4$ erhält man nun masselose Skalarfelder als die inäquivalenten harmonischen Deformationen der Calabi-Yau Metrik [30, 34]: ²

$$\begin{aligned} i \delta g_{i\bar{j}}(x, y) &= \sum_{A=1}^{h(1,1)} M^A(x) V_{i\bar{j}}^A(y) \quad , \\ \delta g_{ij}(x, y) &= \sum_{\alpha=1}^{h(1,2)} \bar{Z}^\alpha(x) \bar{b}_{ij}^\alpha(y) \quad . \end{aligned} \quad (C.6)$$

Hierbei sind $M^A(x)$ reelle, und $\bar{Z}^\alpha(x)$ komplexe Moduli der Deformationen. V^A ist eine Basis von $H^{(1,1)}(CY_3)$, dem Raum der harmonischen $(1, 1)$ -Formen auf CY_3 . Die $\bar{b}_{ij}^\alpha(y)$ werden aus den $(2, 1)$ -Formen $\bar{\Phi}_{i\bar{j}k}^\alpha$ und der $(3, 0)$ -Form Ω_{ijk} gemäß

$$\bar{b}_{ij}^\alpha = \frac{i}{\|\Omega\|^2} \Omega_i^{\bar{k}} \bar{\Phi}_{l\bar{k}j}^\alpha \quad (C.7)$$

gebildet, wobei $\|\Omega\|^2 \equiv \frac{1}{3!} \Omega_{ijk} \bar{\Omega}^{ijk}$.

Aufgrund von (C.4) gilt für (C.2) in komplexen Koordinaten

$$\mathcal{R}_{10} = \mathcal{R}_4 + g^{\mu\nu} (\mathcal{R}_{\mu i \nu}^i + \mathcal{R}_{\mu \bar{i} \nu}^{\bar{i}}) + g^{i\bar{j}} \mathcal{R}_{ij} + g^{\bar{i}\bar{j}} \mathcal{R}_{\bar{i}\bar{j}} + 2g^{i\bar{j}} \mathcal{R}_{i\bar{j}} \quad , \quad (C.8)$$

wobei $g^{i\bar{j}} \mathcal{R}_{i\bar{j}} = g^{\bar{i}\bar{j}} \mathcal{R}_{\bar{i}\bar{j}}$ benutzt wurde, und

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{i\bar{j}} &= \mathcal{R}_{i\mu\bar{j}}^\mu + \mathcal{R}_{ik\bar{j}}^k + \mathcal{R}_{i\bar{k}\bar{j}}^{\bar{k}} \quad , \\ \mathcal{R}_{ij} &= \mathcal{R}_{i\mu j}^\mu + \mathcal{R}_{ikj}^k + \mathcal{R}_{i\bar{k}j}^{\bar{k}} \quad , \\ \mathcal{R}_{\bar{i}\bar{j}} &= \mathcal{R}_{\bar{i}\mu\bar{j}}^\mu + \mathcal{R}_{\bar{i}k\bar{j}}^k + \mathcal{R}_{\bar{i}\bar{k}\bar{j}}^{\bar{k}} \end{aligned} \quad (C.9)$$

gilt.

Abgesehen von den vierdimensionalen Christoffel Symbolen $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ und denjenigen mit rein internen Indizes (die im folgenden nicht weiter berücksichtigt werden,

²Diese Entwicklungen der Metrik-Deformationen folgen zu niedrigster Ordnung aus der Lösung der linearisierten Gleichung $\mathcal{R}_{ab}^{(6)}(g^0 + \delta g) = 0$; da zur Bestimmung der Niederenergie effektiven Wirkung jedoch auch nur zu niedrigster Ordnung in den Moduli gerechnet wird, genügt die Betrachtung dieser Entwicklungen [56].

da sie keine Raum-Zeit Ableitung enthalten), erhält man in komplexen Koordinaten für die Christoffel Symbole:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu i}^j &= -\frac{i}{2}g^{j\bar{k}}\partial_\mu M^A V_{i\bar{k}}^A + \frac{1}{2}g^{jk}\partial_\mu \bar{Z}^\alpha \bar{b}_{ik}^\alpha, \\
\Gamma_{\mu i}^{\bar{j}} &= \frac{1}{2}g^{\bar{j}k}\partial_\mu \bar{Z}^\alpha \bar{b}_{ik}^\alpha - \frac{i}{2}g^{\bar{j}k}\partial_\mu M^A V_{i\bar{k}}^A, \\
\Gamma_{\mu \bar{j}}^i &= \frac{1}{2}g^{i\bar{k}}\partial_\mu Z^\alpha b_{\bar{j}k}^\alpha - \frac{i}{2}g^{i\bar{k}}\partial_\mu M^A V_{k\bar{j}}^A = \overline{\Gamma_{\mu j}^i}, \\
\Gamma_{\mu \bar{j}}^{\bar{i}} &= -\frac{i}{2}g^{\bar{i}k}\partial_\mu M^A V_{k\bar{j}}^A + \frac{1}{2}g^{\bar{i}k}\partial_\mu Z^\alpha b_{\bar{j}k}^\alpha = \overline{\Gamma_{\mu j}^{\bar{i}}}, \\
\Gamma_{ij}^\mu &= -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\nu \bar{Z}^\alpha \bar{b}_{ij}^\alpha, \\
\Gamma_{i\bar{j}}^\mu &= -\frac{i}{2}g^{\mu\nu}\partial_\nu M^A V_{i\bar{j}}^A = \Gamma_{\bar{j}i}^\mu, \\
\Gamma_{i\bar{j}}^\mu &= -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\nu Z^\alpha b_{i\bar{j}}^\alpha = \overline{\Gamma_{i\bar{j}}^\mu}.
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Im folgenden wird bis zur Ordnung δ^2 gearbeitet, d.h. es werden zur Bestimmung der Niederenergie effektiven Gravitationswirkung alle Beiträge bis zur quadratischen Ordnung der ersten Ableitungen der Moduli berücksichtigt. Insbesondere genügt es wegen $\Gamma \propto g\partial_\mu g$ dabei, die in (C.8) und (C.10) auftretenden inversen Metriken $g^{i\bar{j}}$ und g^{ij} bis zur linearen Ordnung in den Moduli anzugeben:

$$\begin{aligned}
g^{i\bar{j}}(x, y) &= g^{0i\bar{j}}(y) + i \sum_{A=1}^{h(1,1)} M^A(x) V^{Ai\bar{j}}(y), \\
g^{ij}(x, y) &= - \sum_{\alpha=1}^{h(1,2)} Z^\alpha(x) b^{\alpha ij}(y),
\end{aligned} \tag{C.11}$$

wobei $V^{Ai\bar{j}} \equiv V_{k\bar{l}}^A g^{0k\bar{j}} g^{0\bar{l}i}$ und $b^{\alpha ij} \equiv b_{k\bar{l}}^\alpha g^{0i\bar{k}} g^{0\bar{l}j}$.

Setzt man die Christoffel Symbole aus (C.10) in (C.8) ein und behält alle Beiträge bis zur quadratischen Ordnung in den ersten Ableitungen, so ergibt sich unter Ausnutzung der Beziehungen

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\rho &= g^{\rho\sigma}\partial^\mu g_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu}\partial_\sigma g_{\mu\nu}, \\
\Gamma_{\mu\nu}^\mu &= \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\partial_\nu g_{\mu\sigma}, \\
\partial_\mu(\sqrt{g^{(6)}}) &= \sqrt{g^{(6)}}(g^{i\bar{j}}\partial_\mu g_{i\bar{j}} + \frac{1}{2}g^{ij}\partial_\mu g_{ij} + \frac{1}{2}g^{\bar{i}\bar{j}}\partial_\mu g_{\bar{i}\bar{j}}), \\
\partial_\mu(\sqrt{g^{(4)}}) &= \frac{1}{2}\sqrt{g^{(4)}}g^{\nu\rho}\partial_\mu g_{\nu\rho},
\end{aligned} \tag{C.12}$$

daß das Endergebnis modulo einer totalen Ableitung durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{10} &= \mathcal{R}_4 - \frac{1}{2}\partial_\mu M^A \partial^\mu M^B V_{i\bar{j}}^A V_{k\bar{l}}^B g^{i\bar{l}} g^{k\bar{j}} \\
&\quad + \partial_\mu M^A \partial^\mu M^B V_{i\bar{j}}^A V_{k\bar{l}}^B g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial_\mu Z^\alpha \partial^\mu \bar{Z}^\beta b_{j\bar{l}}^\alpha b_{i\bar{k}}^\beta g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}}
\end{aligned} \tag{C.13}$$

gegeben ist.

Anhang D

Kompaktifizierung von \mathcal{S}_2 auf CY_3

In diesem Anhang wird die Kompaktifizierung von \mathcal{S}_2 durchgeführt. Dabei bezeichnet \mathcal{S}_2 den 4-Form abhängigen Teil aus (2.6) der zehndimensionalen nicht-selbstdualen Wirkung für Typ IIB. In $d = 10$ ist es gerade die Selbstdualitätsbedingung (2.4), welche *nicht* in der Wirkung (2.1) selbst gelten soll, sondern erst auf der Ebene der aus ihr gewonnenen Euler-Lagrange Gleichungen, um die richtigen Bewegungsgleichungen der Typ IIB Supergravitation zu ergeben. Die Kompaktifizierung von \mathcal{S}_2 wird nun derart durchgeführt, daß sich aus ihr in $d = 4$ die richtigen kompaktifizierten Bewegungsgleichungen ergeben.

Wie schon in Abschnitt 4.3 angesprochen sind in $d = 4$ die masselosen Moden von der Kompaktifizierung der 4-Form \mathcal{D}_{MNPQ} durch Vektoren $\mathcal{D}_{\mu abc}$ und Tensoren $\mathcal{D}_{\mu\nu ab}$ gegeben; dabei sind nicht alle Moden unabhängig voneinander, sondern durch die kompaktifizierte Selbstdualitätsbedingung (2.4) miteinander in Beziehung gesetzt. Da in Kapitel 4 ausschließlich die Kopplungen der $h^{(1,1)}$ Tensormultipletts und des universellen Doppel-Tensor Multipletts untersucht werden, sollen hier im folgenden unter Vernachlässigung der Vektoren auch nur die Tensoren berücksichtigt werden.

Ausgangspunkt sei also die durch (2.6) definierte Lagrange-Dichte \mathcal{L}_2 . Zur Kompaktifizierung macht man für \mathcal{L}_2 nun folgenden Ansatz bei Aufspaltung der zehndimensionalen Indizes in vierdimensionale Raum-Zeit und sechsdimensionale interne reelle Indizes:¹

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & \sqrt{-g^{(10)}} \left(k_1 (F_{\mu\nu\rho ab})^2 + k_2 \epsilon_{IJ} B_{ab}^I H_{\mu\nu\rho}^J F^{\mu\nu\rho ab} + k_3 \epsilon_{IJ} \epsilon_{KL} B_{ab}^I H_{\mu\nu\rho}^J B^{K ab} H^{L\mu\nu\rho} \right) \\ & + \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{abcdef} \epsilon_{IJ} \left(k_4 F_{\mu\nu\rho ab} B_{cd}^I \partial_\sigma B_{ef}^J + k_5 \epsilon_{KL} H_{\mu\nu\rho}^I B_{ab}^J B_{cd}^K \partial_\sigma B_{ef}^L \right) , \end{aligned} \quad (D.1)$$

wobei

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu\rho ab} & \equiv \frac{1}{30} (\partial_\mu \tilde{\mathcal{D}}_{\nu\rho ab} + \partial_\rho \tilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu ab} + \partial_\nu \tilde{\mathcal{D}}_{\rho\mu ab}) , \\ \tilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu ab} & \equiv \mathcal{D}_{\mu\nu ab} + \frac{3}{4} \epsilon_{IJ} B_{\mu\nu}^I B_{ab}^J , \end{aligned} \quad (D.2)$$

¹Die Struktur der einzelnen Terme ist dabei durch die Aufspaltung des F^2 - und topologischen Terms aus (2.6) gegeben.

und k_1, \dots, k_5 zu bestimmende Konstanten sind. Die Festlegung der Konstanten erfolgt durch den Vergleich der aus (2.5) gewonnenen Euler-Lagrange Gleichungen (nach Aufspaltung der zehndimensionalen Indizes und unter Verwendung des Ansatzes für \mathcal{L}_2 aus (D.1)) mit den kompaktifizierten Bewegungsgleichungen der zehndimensionalen Typ IIB Supergravitation. Zur Bestimmung von k_1, \dots, k_5 genügt es dabei, diesen Vergleich im Limes $l = 0$, $\phi = \text{const.}$ und $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ durchzuführen, und die $10 - d$ Bewegungsgleichungen

$$\partial^P G_{MNP} = -\frac{10}{3} i F_{MNPQS} G^{PQS} \quad (\text{D.3})$$

zu betrachten. Der Tensor G_{MNP} ist wie in [25] definiert, und in meiner Notation durch

$$G_{MNP} \equiv \frac{H_{MNP}^1 - \Phi_1 H_{MNP}^1 - \Phi_2 H_{MNP}^2 + i (H_{MNP}^2 + \Phi_1 H_{MNP}^2 - \Phi_2 H_{MNP}^1)}{\sqrt{1 - \Phi_1^2 - \Phi_2^2}} \quad (\text{D.4})$$

gegeben, wobei

$$\Phi_1 \equiv \frac{1 - e^{-2\phi} - l^2}{l^2 + (e^{-\phi} + 1)^2} \quad , \quad \Phi_2 \equiv \frac{2l}{l^2 + (e^{-\phi} + 1)^2} \quad . \quad (\text{D.5})$$

Im oben genannten Limes lauten die Komponenten

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu\rho} &= e^{\frac{\phi}{2}} (e^{-\phi} H_{\mu\nu\rho}^1 + i H_{\mu\nu\rho}^2) \quad , \\ G_{\mu ab} &= \frac{1}{3} e^{\frac{\phi}{2}} (e^{-\phi} \partial_\mu B_{ab}^1 + i \partial_\mu B_{ab}^2) \quad , \\ G_{a\mu\nu} &= G_{\mu a\nu} = G_{\mu\nu a} = G_{abc} = 0 \quad , \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

und als Folge vereinfacht sich (D.3) zu

$$\begin{aligned} \partial^\rho G_{\rho\mu\nu} &= -10 i F_{\mu\nu\rho ab} G^{\rho ab} \quad (\text{D.7}) \\ \partial^\mu G_{ab\mu} &= -\frac{10}{3} i (F_{\mu\nu\rho ab} G^{\mu\nu\rho} + 3 F_{\mu abcd} G^{\mu cd}) \quad . \end{aligned}$$

Da sich die erste Gleichung auf $B_{\mu\nu}^I$ bezieht, spielt sie bei der hiesigen Betrachtung keine weitere Rolle. Unter Verwendung der aus (2.4) folgenden, in vier- und sechsdimensionalen Indizes geschriebenen, Selbstdualitätsbedingung

$$F_{\mu abcd} G^{\mu cd} = \frac{1}{12 \sqrt{-g^{(10)}}} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{abcdef} F^{\nu\rho\sigma ef} G^{\mu cd} \quad (\text{D.8})$$

ergibt die zweite Gleichung aus (D.7) für B_{ab}^1 :

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial_\mu B_{ab}^1 &= 10 e^\phi (F_{\mu\nu\rho ab} + \frac{3}{20} \epsilon_{IJ} B_{ab}^I H_{\mu\nu\rho}^J) H^{2\mu\nu\rho} \quad (\text{D.9}) \\ &+ \frac{5}{6 \sqrt{-g^{(10)}}} e^\phi \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{abcdef} (F^{\nu\rho\sigma ef} + \frac{3}{20} \epsilon_{IJ} B^{I ef} H^{J\nu\rho\sigma}) \partial^\mu B^{2 cd} \quad . \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite muß B_{ab}^1 die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{\delta(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)}{\delta B_{ab}^1} - \partial_\mu \left(\frac{\delta(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)}{\delta(\partial_\mu B_{ab}^1)} \right) = 0 \quad (\text{D.10})$$

erfüllen, wobei die durch (2.6) definierte Lagrange-Dichte \mathcal{L}_1 im obigen Limes und nach Aufspaltung der zehndimensionalen Indizes in Raum-Zeit und interne Indizes folgende Form hat:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}_1}{\sqrt{-g^{(10)}}} = & -\frac{\mathcal{R}_{10}}{2} - \frac{3}{8}e^\phi \left(e^{-2\phi} \left((H_{\mu\nu\rho}^1)^2 + \frac{1}{3}\partial_\mu B_{ab}^1 \partial^\mu B^{1ab} \right) \right. \\ & \left. + (H_{\mu\nu\rho}^2)^2 + \frac{1}{3}\partial_\mu B_{ab}^2 \partial^\mu B^{2ab} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Mit dem Ansatz für \mathcal{L}_2 aus (D.1) erhält man aus (D.10) als Bewegungsgleichung für B_{ab}^1 :

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{1}{4} \sqrt{-g^{(10)}} e^{-\phi} \partial^\mu \partial_\mu B_{ab}^1 + \sqrt{-g^{(10)}} H_{\mu\nu\rho}^2 \left(k_2 F^{\mu\nu\rho ab} + 2k_4 \epsilon_{IJ} B^{Iab} H^J{}^{\mu\nu\rho} \right) \\ & + \sqrt{-g^{(10)}} B_{\nu\rho}^2 \left(\frac{3}{200} k_1 \partial_\mu \partial^{[\mu} \mathcal{D}^{\nu\rho]ab} + \frac{9}{800} k_1 \epsilon_{IJ} \partial_\mu (H^{I\mu\nu\rho} B^{Jab}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{9}{800} k_1 \epsilon_{IJ} \partial_\mu (B^{I[\nu\rho} \partial^{\mu]} B^{Jab}) + \frac{3}{40} k_2 \epsilon_{IJ} \partial_\mu (B^{Iab} H^J{}^{\mu\nu\rho}) \right) \\ & + \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{abcdef} \left(2k_4 F_{\mu\nu\rho cd} (\partial_\sigma B_{ef}^2) - \frac{3}{40} k_4 B_{\nu\rho}^2 \epsilon_{IJ} (\partial_\sigma B_{cd}^I) (\partial_\mu B_{ef}^J) \right. \\ & \quad \left. + k_5 \epsilon_{IJ} H_{\mu\nu\rho}^I B_{cd}^J (\partial_\sigma B_{ef}^2) \right). \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Zur Vereinfachung muß man die aus $\frac{\delta(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)}{\delta \mathcal{D}_{\nu\rho ab}} - \partial_\mu \left(\frac{\delta(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)}{\delta(\partial_\mu \mathcal{D}_{\nu\rho ab})} \right) \stackrel{!}{=} 0$ folgende Bewegungsgleichung für $\mathcal{D}_{\nu\rho ab}$ benutzen, welche

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^{[\mu} \mathcal{D}^{\nu\rho]ab} = & \left(5 \frac{k_2}{k_1} - \frac{3}{4} \right) \epsilon_{IJ} \partial_\mu (H^{I\mu\nu\rho} B^{Jab}) - \frac{3}{4} \epsilon_{IJ} \partial_\mu (B^{I[\nu\rho} \partial^{\mu]} B^{Jab}) \\ & - 5 \frac{k_4}{k_1} \left(\sqrt{-g^{(10)}} \right)^{-1} \epsilon_{IJ} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{abcdef} (\partial_\mu B_{cd}^I) (\partial_\sigma B_{ef}^J) \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

lautet. Setzt man (D.13) in (D.12) ein, so ergibt sich schließlich als Euler-Lagrange Gleichung für B_{ab}^1 :

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial_\mu B_{ab}^1 = & -4 e^\phi (k_2 F_{\mu\nu\rho ab} + 2k_3 \epsilon_{IJ} B_{ab}^I H_{\mu\nu\rho}^J) H^{2\mu\nu\rho} \\ & - \frac{4}{\sqrt{-g^{(10)}}} e^\phi \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{abcdef} (2k_4 F^{\mu\nu\rho cd} - k_5 \epsilon_{IJ} B^{Icd} H^J{}^{\mu\nu\rho}) \partial^\sigma B^{2ef}. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Durch Vergleich von (D.9) mit (D.14) erhält man

$$k_1 = -\frac{25}{3}, \quad k_2 = -\frac{5}{2}, \quad k_3 = -\frac{3}{16}, \quad k_4 = \frac{5}{48}, \quad k_5 = -\frac{1}{32}, \quad (\text{D.15})$$

wobei die Gesamtnormierung durch Eichinvarianz bzgl. (4.45) und (4.46) festgelegt ist.² Obige Diskussion hätte völlig analog auch für die Bewegungsgleichung von B_{ab}^2 durchgeführt werden können, was dieselben Koeffizienten k_1, \dots, k_5 ergibt.

Schließlich müssen noch dieselben Zwischenschritte vollzogen werden, die in Abschnitt 4.4 auf \mathcal{L}_1 in $d = 4$ geführt haben. D.h. es muß die Weyl-Reskalierung $g_{\mu\nu} \mapsto \mathcal{V}^{-1}g_{\mu\nu}$ vorgenommen werden, $B_{\mu\nu}^I$ gemäß $B_{\mu\nu}^I \mapsto \frac{2}{3}B_{\mu\nu}^I$ reskaliert werden, die Kähler-Moduli laut (4.28) redefiniert werden und nach Einsetzen der Entwicklungen (4.17) in komplexen Koordinaten die Integration über CY_3 mit den in Abschnitt 4.2 gegebenen Definitionen durchgeführt werden. Insgesamt ergibt dies für \mathcal{L}_2 in vier Dimensionen:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}_2}{\sqrt{-g^{(4)}}} = & -\frac{2}{3} e^{-2\phi_4} \mathcal{V} G_{AB} (F_{\mu\nu\rho}^A + \epsilon_{IJ} H_{\mu\nu\rho}^J b^{IA}) (F^{B\mu\nu\rho} + \epsilon_{KL} H^{L\mu\nu\rho} b^{KB}) \\ & - \frac{i}{12\sqrt{-g^{(4)}}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \kappa_{ABC} \epsilon_{IJ} (F_{\mu\nu\rho}^A b^{IB} \partial_\sigma b^{JC} - \frac{2}{3} \epsilon_{KL} H_{\mu\nu\rho}^I b^{JA} b^{KB} \partial_\sigma b^{LC}), \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

wobei das vierdimensionale Dilaton über (4.33) definiert ist, und für $F_{\mu\nu\rho}^A$ und $D_{\mu\nu}^A$ die Definitionen aus (4.37) benutzt wurden.

²Der Vergleich von (D.9) mit (D.14) legt die Konstanten k_2, \dots, k_5 in (D.1) nur bis auf einen Normierungsfaktor fest. Geforderte Eichinvarianz von \mathcal{L}_2 bzgl. (4.45) und (4.46) bestimmt schließlich den Wert für k_1 , und damit die Gesamtnormierung.

Anhang E

Typ IIB Bewegungsgleichungen auf CY_4

Ähnlich wie in Anhang D soll hier gezeigt werden, daß die Vorgehensweise in Kapitel 5 in folgender Weise konsistent ist: ausgehend von der zehndimensionalen nicht-selbstdualen Typ IIB Wirkung (2.1) wird dort die CY_4 -Kompaktifizierung ohne Benutzung der Selbstdualitätsbedingung (2.4) durchgeführt, was eine zweidimensionale nicht-selbstduale Wirkung ergibt. Diese Wirkung soll nun in dem Sinne die richtige Wirkung für Typ IIB in $d = 2$ sein, daß sich nach Einsetzen der kompaktifizierten Selbstdualitätsbedingung (2.4) in den aus ihr gewonnenen Euler-Lagrange Gleichungen die korrekten, ebenfalls durch Kompaktifizierung gewonnenen, zweidimensionalen Bewegungsgleichungen ergeben. Zur Überprüfung dieser Eigenschaft werden in diesem Anhang die relevanten Rechnungen für die Bewegungsgleichung des Feldes B_{ab}^1 im Limes $l = 0$, $\phi = \text{const.}$ und $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ durchgeführt. Dabei genügt es, den Vergleich der entsprechenden Gleichungen vor Integration über die internen CY_4 -Koordinaten durchzuführen, d.h. nach Aufspaltung der zehndimensionalen Koordinaten in interne und Raum-Zeit Koordinaten.

Es sei also wie im Anhang D die zehndimensionale Bewegungsgleichung (D.3) betrachtet. Nach Koordinatenaufspaltung erhält man beim Übergang von $d = 10$ nach $d = 2$ als Komponenten von G

$$\begin{aligned} G_{\mu ab} &= \frac{1}{3} e^{\frac{\phi}{2}} (e^{-\phi} \partial_{\mu} B_{ab}^1 + i \partial_{\mu} B_{ab}^2) , \\ G_{a\mu\nu} &= G_{\mu a\nu} = G_{\mu\nu a} = G_{abc} = G_{\mu\nu\rho} = 0 , \end{aligned} \tag{E.1}$$

so daß sich aus (D.3) als einzige Bewegungsgleichung

$$\partial^{\mu} G_{ab\mu} = -10 i F_{\mu abc d} G^{\mu cd} \tag{E.2}$$

ergibt. Ausführlich ausgeschrieben beinhaltet (E.2) als Real- bzw. Imaginärteil

die Bewegungsgleichungen für B_{ab}^1 bzw. B_{ab}^2 , und lautet:

$$\begin{aligned}
& e^{-\phi} \partial^\mu \partial_\mu B_{ab}^1 + i \partial^\mu \partial_\mu B_{ab}^2 \\
& = 2 \left(\partial_\mu \mathcal{D}_{abcd} + \frac{1}{8} \epsilon_{IJ} (B_{ab}^I \partial_\mu B_{cd}^J + B_{cd}^I \partial_\mu B_{ab}^J + 2B_{bc}^I \partial_\mu B_{ad}^J + 2B_{ac}^I \partial_\mu B_{db}^J) \right) \\
& \quad \times (\partial^\mu B^{2cd} - i e^{-\phi} \partial^\mu B^{1cd}) .
\end{aligned} \tag{E.3}$$

Die Bewegungsgleichung für B_{ab}^1 (der Realteil aus (E.3)) soll nun verglichen werden mit der Euler-Lagrange Gleichung für B_{ab}^1 , die sich aus der Wirkung $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{Grav.} + \mathcal{S}' + \mathcal{S}_2$ aus Kapitel 5 ergibt, wobei $\mathcal{S}_{Grav.}$, \mathcal{S}' und \mathcal{S}_2 durch (5.30), (5.31) und (5.35) gegeben sind. Im oben angegebenen Limes $l = 0$, $\phi = \text{const.}$ und $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ lautet $\mathcal{S} = \int d^{10}x \mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} = \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} & \left(-\frac{\mathcal{R}_2}{2} - \frac{1}{8} e^{-\phi} \partial_\mu B_{ab}^1 \partial^\mu B^{1ab} - \frac{1}{8} e^\phi \partial_\mu B_{ab}^2 \partial^\mu B^{2ab} \right. \\
& + \frac{1}{192 \sqrt{-g^{(10)}}} \epsilon_{IJ} \epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{abcdefgh} (\partial_\mu \mathcal{D}_{abcd}) B_{ef}^I \partial_\nu B_{gh}^J \\
& - \frac{1}{12} ((\partial_\mu \mathcal{D}_{abcd})^2 + \frac{3}{2} \epsilon_{IJ} \partial^\mu \mathcal{D}^{abcd} B_{ab}^I \partial_\mu B_{cd}^J \\
& \left. + \frac{3}{32} \epsilon_{IJ} \epsilon_{KL} B_{ab}^I \partial_\mu B_{cd}^J (B^{K ab} \partial^\mu B^{Lcd} + B^{K cd} \partial^\mu B^{Lab} + 4B^{K ad} \partial^\mu B^{Lbc})) \right) .
\end{aligned} \tag{E.4}$$

Die Euler-Lagrange Gleichung für B_{ab}^1 ,

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta B_{ab}^1} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu B_{ab}^1)} \right) \stackrel{!}{=} 0, \tag{E.5}$$

ergibt dann:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \sqrt{-g^{(10)}} e^{-\phi} \partial_\mu \partial^\mu B^{1ab} \\
& \stackrel{!}{=} \frac{1}{4} \sqrt{-g^{(10)}} \left(\frac{1}{2} B_{cd}^2 \partial_\mu \partial^\mu \mathcal{D}^{abcd} + (\partial^\mu \mathcal{D}^{abcd}) \partial_\mu B_{cd}^2 \right. \\
& + \frac{1}{8} \epsilon_{IJ} (\partial_\mu B_{cd}^2) (B^{I ab} \partial^\mu B^{Jcd} + B^{I cd} \partial^\mu B^{Jab} + 2B^{I ad} \partial^\mu B^{Jbc} + 2B^{I bc} \partial^\mu B^{Jad}) \\
& + \frac{1}{16} \epsilon_{IJ} B_{cd}^2 (B^{I ab} \partial_\mu \partial^\mu B^{Jcd} + B^{I cd} \partial_\mu \partial^\mu B^{Jab} + 2B^{I ad} \partial_\mu \partial^\mu B^{Jbc} + 2B^{I bc} \partial_\mu \partial^\mu B^{Jad}) \\
& \left. - \frac{1}{96} \epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{abcdefgh} (\partial_\mu \mathcal{D}_{cdef}) \partial_\nu B_{gh}^2 \right) .
\end{aligned} \tag{E.6}$$

In (E.6) muß nun die aus (E.4) resultierende Bewegungsgleichung für \mathcal{D}_{abcd} ein-

gesetzt werden. Die Forderung $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \mathcal{D}_{abcd}} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \mathcal{D}_{abcd})} \right) \stackrel{!}{=} 0$ liefert

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu \mathcal{D}^{abcd} &= \frac{1}{32 \sqrt{-g^{(10)}}} \epsilon_{IJ} \epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{abcdefgh} (\partial_\mu B_{ef}^I) \partial_\nu B_{gh}^J \\ &\quad - \frac{1}{8} \epsilon_{IJ} \left(B^{Iab} \partial_\mu \partial^\mu B^{Jcd} + B^{Icd} \partial_\mu \partial^\mu B^{Jab} + B^{Iac} \partial_\mu \partial^\mu B^{Jdb} \right. \\ &\quad \left. + B^{Idb} \partial_\mu \partial^\mu B^{Jac} + B^{Iad} \partial_\mu \partial^\mu B^{Jbc} + B^{Ibc} \partial_\mu \partial^\mu B^{Jad} \right), \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

und Einsetzen in (E.6) ergibt:

$$\begin{aligned} &e^{-\phi} \partial_\mu \partial^\mu B^{1ab} \\ &= (\partial^\mu \mathcal{D}^{abcd}) \partial_\mu B_{cd}^2 \\ &\quad + \frac{1}{8} \epsilon_{IJ} (\partial_\mu B_{cd}^2) (B^{Iab} \partial^\mu B^{Jcd} + B^{Icd} \partial^\mu B^{Jab} + 2B^{Iad} \partial^\mu B^{Jbc} + 2B^{Ibc} \partial^\mu B^{Jad}) \\ &\quad - \frac{1}{24 \sqrt{-g^{(10)}}} \epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{abcdefgh} (\partial_\mu \mathcal{D}_{cdef}) \partial_\nu B_{gh}^2 \\ &\quad + \frac{1}{64 \sqrt{-g^{(10)}}} \epsilon_{IJ} \epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{abcdefgh} B_{cd}^2 (\partial_\mu B_{ef}^I) \partial_\nu B_{gh}^J. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Benutzt man noch die zwischen $\partial_\mu \mathcal{D}_{cdef}$ und $F_{\mu cdef}$ gültige Beziehung

$$\epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{abcdefgh} \partial_\mu \mathcal{D}_{cdef} = \epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{abcdefgh} \left(5 F_{\mu cdef} - \frac{3}{4} \epsilon_{IJ} B_{cd}^I \partial_\mu B_{ef}^J \right) \quad (\text{E.9})$$

sowie die Selbstdualitätsbedingung

$$\epsilon^{\mu\nu} \epsilon^{abcdefgh} F_{\mu cdef} = -4! \sqrt{-g^{(10)}} F^{\nu abgh}, \quad (\text{E.10})$$

so ergibt sich aus (E.8) als Euler-Lagrange Gleichung für B_{ab}^1 schließlich:

$$\begin{aligned} &e^{-\phi} \partial_\mu \partial^\mu B^{1ab} \\ &= 2 (\partial^\mu \mathcal{D}^{abcd}) \partial_\mu B_{cd}^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \epsilon_{IJ} (\partial_\mu B_{cd}^2) (B^{Iab} \partial^\mu B^{Jcd} + B^{Icd} \partial^\mu B^{Jab} + 2B^{Iad} \partial^\mu B^{Jbc} + 2B^{Ibc} \partial^\mu B^{Jad}). \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Wie der Vergleich von (E.11) mit dem Realteil von (E.3) zeigt, stimmt dieses Resultat mit der zuvor berechneten Bewegungsgleichung für B_{ab}^1 überein.

Anhang F

Der heterotische String auf $K3$

Die zehndimensionale supersymmetrische heterotische Stringtheorie besitzt im Gegensatz zur IIB-Theorie $Q = 16$ Superladungen. Da Kompaktifizierungen auf einer vierdimensionalen $K3$ die Hälfte der Supersymmetrie brechen, erhält man für den heterotischen String in $d = 6$ eine Theorie mit $Q = 8$ Superladungen, bzw. $(1, 0)$ -Supersymmetrie. Tatsächlich ist $K3$ die einzige vierdimensionale Mannigfaltigkeit mit Holonomie $SU(2)$, um auf diese Weise $N = (1, 0)$ in sechs Dimensionen zu erhalten [65].

Ausgangspunkt für die Kompaktifizierung ist die zehndimensionale Niederenergie effektive Wirkung des heterotischen Strings in der Stringbasis [7, 8]:

$$\mathcal{S}_{10}^{het} = \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} \mathcal{L}_{10}^{het} = \int d^6x \sqrt{-g^{(6)}} \int_{K3} d^4\xi \sqrt{g^{(4)}} \mathcal{L}_{10}^{het} \quad (\text{F.1})$$

mit

$$\mathcal{L}_{10}^{het} = e^{-2\phi} \left[-\frac{1}{2} \mathcal{R}_{10} + 2(\partial_M \phi)^2 - \frac{3}{4} (H_{MNP})^2 - \frac{1}{4} \text{Tr} F_{MN} F^{MN} \right]. \quad (\text{F.2})$$

Dabei bezeichnet Tr die Spur in der Vektordarstellung von $SO(32)$ bzw. $E8 \times E8$, F_{MN} ist die durch

$$F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M + \sqrt{2} [A_M, A_N] \quad (\text{F.3})$$

gegebene nicht-abelsche Eichfeldstärke, und H_{MNP} ist die vom antisymmetrischen Tensorfeld B_{MN} stammende Feldstärke:

$$H_{MNP} = \partial_M B_{NP} - \frac{1}{2} \text{Tr} (A_M F_{NP} - \frac{\sqrt{2}}{3} A_M [A_N, A_P]) + \text{zyklische Permutationen von } M, N, P. \quad (\text{F.4})$$

F.1 Eigenschaften der $K3$

Vor der eigentlichen Kompaktifizierung sollen hier einige für die $K3$ gültigen Relationen zusammengestellt werden.

ausdrücken.

Anhand der allgemeinen Definition des Hodge Sternoperators für (p,q)-Formen (A.14) ergibt sich angewandt auf die (1,1)-Formen der $K3$:

$$\star V^A = \overline{V_{i\bar{k}}^A} \epsilon^k \bar{\epsilon}^{\bar{j}} d\xi^j \wedge d\bar{\xi}^{\bar{l}} = (V_{j\bar{l}}^A - V_{k\bar{i}}^A g^{k\bar{i}} g_{j\bar{l}}) d\xi^j \wedge d\bar{\xi}^{\bar{l}}. \quad (\text{F.14})$$

Benutzt man

$$\begin{aligned} K^A &\equiv \frac{1}{2} \int_{K3} V^A \wedge J = -\frac{i}{2} \int_{K3} V_{i\bar{j}}^A g^{i\bar{j}} \sqrt{g^{(4)}} d^4 \xi = -\frac{i}{2} V_{i\bar{j}}^A g^{i\bar{j}} \int_{K3} \sqrt{g^{(4)}} d^4 \xi \\ &= -\frac{i}{2} \mathcal{V} V_{i\bar{j}}^A g^{i\bar{j}}, \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

wobei $V_{i\bar{j}}^A g^{i\bar{j}} = \text{const.}$ für V^A harmonisch berücksichtigt wurde, so ergibt sich:

$$\star V^A = V^A - 2 \frac{K^A}{\mathcal{V}} J. \quad (\text{F.16})$$

Im Fall der Kähler Form läßt sich mit obigen Definitionen die Anti-Selbstdualität nun leicht verifizieren:

$$\star J = M^A \star V^A = M^A (V^A - 2 \frac{K^A}{\mathcal{V}} J) = J - 2 \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}} J = -J. \quad (\text{F.17})$$

Auf dem Raum der (1,1)-Formen definiert man eine Metrik via

$$\begin{aligned} G_{AB} &\equiv -\frac{1}{2\mathcal{V}} \int_{K3} V^A \wedge \star V^B = -\frac{1}{2\mathcal{V}} \int_{K3} V_{i\bar{j}}^A V_{k\bar{l}}^B g^{i\bar{l}} g^{k\bar{j}} \sqrt{g^{(4)}} d^4 \xi \\ &= 2 \frac{K^A K^B}{\mathcal{V}^2} - \frac{K^{AB}}{\mathcal{V}}, \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

wobei

$$K^{AB} \equiv \frac{1}{2} \int_{K3} V^A \wedge V^B = \frac{1}{2} \int_{K3} V_{i\bar{j}}^A V_{k\bar{l}}^B (g^{i\bar{l}} g^{k\bar{j}} - g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}}) \sqrt{g^{(4)}} d^4 \xi. \quad (\text{F.19})$$

F.2 Das Spektrum

Gemäß dem Hodge-Diamanten (F.5) ergibt sich das Spektrum in $d = 6$ nach Kompaktifizierung auf $K3$ wie folgt: die 10-d Metrik g_{MN} ergibt die 6-d Metrik $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ ($\hat{\mu}, \hat{\nu} = 0, \dots, 5$), $h^{(1,1)} = 20$ Deformationen der Kählerform $\delta g_{i\bar{j}}$ ($i, j = 1, 2$) und $2 \times (h^{(1,1)} - 1) = 38$ Deformationen der komplexen Struktur δg_{ij} & $\delta g_{\bar{i}\bar{j}}$ (vgl. (F.21), (F.22) und (F.23)). Der antisymmetrische Tensor B_{MN} ergibt den antisymmetrischen Tensor $B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, $h^{(1,1)}$ Skalarmoden $B_{i\bar{j}}$, sowie $h^{(2,0)} = 1$ und $h^{(0,2)} = 1$ Skalarmoden B_{ij} und $B_{\bar{i}\bar{j}}$. Da es auf $K3$ keine (1,0)- bzw. (0,1)-Formen gibt, liefern die zehndimensionalen Vektoren A_M auch nur die sechsdimensionalen Vektoren $A_{\hat{\mu}}$. Schließlich erhält man in $d = 6$ noch einen Skalar vom zehndimensionalen Dilaton.

Wie auch schon bei der Calabi-Yau 3- und 4-faltigkeit können die Deformationen der Kähler Form gemäß

$$i\delta g_{i\bar{j}} = \sum_{A=1}^{h^{(1,1)}} \delta M^A(x) V_{i\bar{j}}^A \quad (\text{F.20})$$

in harmonische (1,1)-Formen entwickelt werden, wobei die $M^A(x)$ die reellen Moduli dieser Deformationen sind.

Die entsprechende Entwicklung der Deformationen der komplexen Struktur ist durch

$$\delta g_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{h^{(1,1)}-1} \delta \bar{Z}^\alpha(x) \bar{b}_{ij}^\alpha \quad (\text{F.21})$$

gegeben, wobei die $\bar{Z}^\alpha(x)$ die komplexen Moduli dieser Deformationen sind. Die \bar{b}_{ij}^α werden dabei durch folgende Kontraktion der (2,0)-Form Ω_{ij} und (1,1)-Formen V_{ij}^α gebildet:

$$\bar{b}_{ij}^\alpha \equiv \frac{-i}{\|\Omega\|^2} \Omega_{(i}^{\bar{k}} V_{j)k}^\alpha = \frac{-i}{2\|\Omega\|^2} (\Omega_{i}^{\bar{k}} V_{jk}^\alpha + \Omega_j^{\bar{k}} V_{ik}^\alpha), \quad (\text{F.22})$$

wobei $\|\Omega\|^2 \equiv \frac{1}{2} \Omega_{ij} \bar{\Omega}^{ij}$.

Man beachte, daß der Index α nur von 1 bis $(h_{11} - 1) = 19$ läuft: aufgrund der Antisymmetrie der (2,0)-Form Ω_{ij} verschwindet nämlich \bar{b}_{ij}^α , falls die in der Kontraktion benutzte (1,1)-Form proportional zur Kähler Form ist:

$$\bar{b}_{ij}^\alpha \sim \Omega_i^{\bar{k}} g_{j\bar{k}} + \Omega_j^{\bar{k}} g_{i\bar{k}} = \Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0. \quad (\text{F.23})$$

Außerdem ist bemerkenswert, daß in (F.22) explizit symmetrisiert werden muß: im Gegensatz zu dem in Abschnitt 3.2.1 diskutierten Fall der komplexen-Struktur Moduli für Calabi-Yau n -faltigkeiten mit $n > 2$ gilt auf einer $K3$ nämlich nicht, daß $H^{(2,0)} = H^{(0,2)} = 0$, weswegen der bloß durch $\bar{d}_{ij}^\alpha \equiv \frac{-i}{\|\Omega\|^2} \Omega_i^{\bar{k}} V_{jk}^\alpha$ gebildete harmonische (2,0)-Tensor nicht automatisch symmetrisch ist.

F.3 Die Wirkung

Bei der Kompaktifizierung des Einstein-Hilbert Terms muß man bei partiellen Integrationen beachten, daß die Wirkung in der Stringbasis gegeben ist. Nach Einsetzen der Entwicklungen für die Metrik-Deformationen erhält man (s. Anhang C)

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} e^{-2\phi} \mathcal{R}_{10} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} e^{-2\phi} [\mathcal{R}_6 + \partial_{\hat{\mu}} M^A \partial^{\hat{\mu}} M^B (V_{ij}^A V_{k\bar{l}}^B g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} - \frac{1}{2} V_{ij}^A V^{Bij}) \\ & \quad + \frac{1}{2} \partial_{\hat{\mu}} Z^\alpha \partial^{\hat{\mu}} \bar{Z}^\beta b_{\alpha\bar{j}} \bar{b}_{\beta ik} g^{i\bar{j}} g^{k\bar{l}} - 4ig^{\hat{\mu}\hat{\nu}} g^{i\bar{j}} V_{i\bar{j}}^A \partial_{\hat{\mu}} M^A \partial_{\hat{\nu}} \phi + f(M^A, Z^\alpha)]. \end{aligned} \quad (\text{F.24})$$

Ein wesentlicher Unterschied der $K3$ im Gegensatz zu CY_3 und CY_4 besteht darin, daß auf ihr $H^{(2,0)} = H^{(0,2)} = 1$ gilt. Somit ergibt die Hodge Zerlegung (A.28) für $H^2(K3)$:

$$H^2(K3) = H^{(2,0)}(K3) \oplus H^{(1,1)}(K3) \oplus H^{(0,2)}(K3). \quad (\text{F.25})$$

Das bedeutet insbesondere, daß die Basis V^A von $H^{(1,1)}(K3)$ aus (F.12) *nicht unabhängig* von der komplexen Struktur gewählt werden kann. Diese Abhängigkeit der $H^{(1,1)}(K3)$ -Basis von der komplexen Struktur wurde bei der Herleitung von (F.24) nicht explizit berücksichtigt und liefert einen für CY_3 - und CY_4 -Kompaktifizierungen nicht vorhandenen Zusatzterm $f(M^A, Z^\alpha)$. Der Hauptfokus soll hier und bei der anschließenden nochmaligen $K3$ -Kompaktifizierung aber auf das Skalarfeld gerichtet sein, welches in zwei Raum-Zeit Dimensionen zum Gravitationsmultiplett gehört, und die explizite Kenntnis von $f(M^A, Z^\alpha)$ wird dabei im folgenden nicht benötigt.

Unter Ausnutzung der im vorigen Abschnitt gegebenen Definitionen läßt sich (F.24) zusammen mit dem kinetischen Term für das zehndimensionale Dilaton umschreiben zu

$$\begin{aligned} & \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} e^{-2\phi} \left(-\frac{\mathcal{R}_{10}}{2} + 2(\partial_M \phi)^2 \right) \\ &= \int d^6x \sqrt{-g^{(6)}} e^{-2\phi_6} \left[-\frac{\mathcal{R}_6}{2} - \frac{1}{2} \partial_{\hat{\mu}} M^A \partial^{\hat{\mu}} M^B G_{AB} + 2(\partial_{\hat{\mu}} \phi_6)^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\|\Omega\|^2} \partial_{\hat{\mu}} Z^\alpha \partial^{\hat{\mu}} \bar{Z}^\beta \left(-G_{\alpha\beta} + \frac{K^{\alpha\beta}}{\mathcal{V}} \right) + \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{K3} d^4\xi \sqrt{g^{(4)}} f(M^A, Z^\alpha) \right], \end{aligned} \quad (\text{F.26})$$

wobei das sechsdimensionale Dilaton durch

$$e^{-2\phi_6} \equiv e^{-2\phi} \mathcal{V} \quad (\text{F.27})$$

gegeben ist. Die Größen $G_{\alpha\beta}$ und $K^{\alpha\beta}$ sind dabei definiert wie in (F.18) und (F.19), mit der Ersetzung von V^A ($A = 1, \dots, h^{(1,1)}$) durch V^α ($\alpha = 1, \dots, h^{(1,1)-1}$).

Bei der Herleitung von (F.26) wurden bisher noch nicht die Dualitätseigenschaften der (1,1)-Formen ausgenutzt. So läuft nach den Ausführungen von Abschnitt F.1 und Abschnitt F.2 der Index α gerade über die 19 (1,1)-Formen, die selbstdual sind ($\star V^\alpha = V^\alpha$), da die anti-selbstduale Kähler Form J bei der Entwicklung der \bar{b}_{ij}^α in (F.22) keinen Beitrag liefert. Dies berücksichtigend gilt also

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &\equiv -\frac{1}{2\mathcal{V}} \int_{K3} V^\alpha \wedge \star V^\beta \\ &= -\frac{1}{2\mathcal{V}} \int_{K3} V^\alpha \wedge V^\beta \\ &= -\frac{K^{\alpha\beta}}{\mathcal{V}}, \end{aligned} \quad (\text{F.28})$$

so daß sich der kinetische Term für die Moduli der komplexen Struktur zu

$$-\frac{1}{2\|\Omega\|^2} \partial_{\hat{\mu}} Z^\alpha \partial^{\hat{\mu}} \bar{Z}^\beta G_{\alpha\beta} \quad (\text{F.29})$$

vereinfacht.

Welche Form auch immer der oben nicht explizit berücksichtigte Zusatzterm $f(M^A, Z^\alpha)$ haben mag: aus [66, 67] ist im Zusammenhang mit superkonformen

Feldtheorien bekannt, daß die 58 Skalare von den Metrik-Deformationen zusammen mit den 22 Skalaren von der Entwicklung des antisymmetrischen Tensorfeldes B_{MN} und den sog. *Bündel-Moduli* durch ein nicht-lineares σ -Modell beschrieben werden. Dabei stammen die Bündel-Moduli von den Eichvektoren in der adjungierten Darstellung der relevanten Eichgruppe, die in $d = 6$ eine Untergruppe von $SO(32)$ bzw. $E8 \times E8$ ist. Die Metrik auf dem von den 80 K3-Moduli und den Bündel-Moduli aufgespannten Moduli Raum ist i.A. unbekannt, durch Supersymmetrie aber derart eingeschränkt, daß sie quaternionisch sein muß. Im Kontext dieser Arbeit sind die Bündel-Moduli von untergeordnetem Interesse, und werden konstant gesetzt: in diesem Fall läßt sich also die Wirkung in $d = 6$ als

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_6^{het} = \int d^6x \sqrt{-g^{(6)}} e^{-2\phi_6} & \left[-\frac{\mathcal{R}_6}{2} + 2(\partial_{\hat{\mu}}\phi_6)^2 - \frac{3}{4}(H_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\rho}})^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{4}\text{Tr}F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} + G_{mn}(\sigma)\partial_{\hat{\mu}}\sigma^m\partial^{\hat{\mu}}\sigma^n \right] \end{aligned} \quad (\text{F.30})$$

schreiben. Dabei bezeichnen σ^m ($m = 1, \dots, 80$) die achtzig K3-Moduli, und $G_{mn}(\sigma)$ ist die Metrik auf dem von ihnen aufgespannten Moduli Raum, der lokal von der Form

$$M_{\sigma}^{K3} = \frac{SO(4, 20)}{SO(4) \times SO(20)} \quad (\text{F.31})$$

ist.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, (2 Vols.), Cambridge University Press (1987).
- [2] D. Lüst, S. Theisen, *Lectures on String Theory*, Lecture Notes in Physics **346**, Springer Berlin Heidelberg (1989).
- [3] J. Polchinski, *String Theory*, (2 Vols.), Cambridge University Press (1998).
- [4] E. D'Hoker, *Point Particles vs Strings*, IASSNS-HEP-97/72.
- [5] A. Sen, *Recent Developments in Superstring Theory*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **94** (2001) 35, hep-lat/0011073.
- [6] J. H. Schwarz, *Introduction to Superstring Theory*, preprints CALT-68-2293 und CITUSC-00-045, hep-ex/0008017.
- [7] B. de Wit, J. Louis, *Supersymmetry and Dualities in Various Dimensions*, Cargese 1997: Strings, branes and dualities (33-101), hep-th/9801132.
- [8] A. Sen, *An Introduction to Non-perturbative String Theory*, in *Cambridge 1997, Duality and supersymmetric theories* (297), hep-th/9802051.
- [9] M. F. Sohnius, *Introducing Supersymmetry*, Phys. Rep. **B128** (1985) 39.
- [10] P. C. West, *Introduction To Supersymmetry And Supergravity*, World Scientific, 1990.
- [11] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity (2nd ed.)* Princeton University Press (1992).
- [12] J. Louis, K. Förger, *Holomorphic Couplings in String Theory*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **55B** (1997) 33, hep-th/9611184.
- [13] D. J. Gross, E. Witten, *Superstring Modifications of Einstein's Equations*, Nucl. Phys. **B277** (1986) 1.
- [14] D. J. Gross, J. H. Sloan, *The Quartic Effective Action For The Heterotic String*, Nucl. Phys. **B291** (1987) 41.
- [15] B. de Wit, A. Van Proeyen, *Potentials and Symmetries of General Gauged $N=2$ Supergravity - Yang-Mills Models*, Nucl. Phys. **B245** (1984) 89.

- [16] S. Cecotti, S. Ferrara, L. Girardello, *Geometry of Type II Superstrings and the Moduli of Superconformal Field Theories*, Int. J. Mod. Phys. **A4** (1989) 2475.
- [17] M. Bodner, A. C. Cadavid, S. Ferrara, *(2,2) Vacuum Configurations for Type IIA Superstrings: $N=2$ Supergravity Lagrangians and Algebraic Geometry*, Class. Quant. Grav. **8** (1991) 789.
- [18] L. Castellani, R. D'Auria, S. Ferrara, *Special Geometry Without Special Coordinates*, Class. Quant. Grav. **7** (1990) 1767.
- [19] A. Strominger, *Special Geometry*, Comm. Math. Phys. **133** (1990) 163.
- [20] R. Böhm, H. Günther, C. Herrmann, J. Louis, *Compactification of Type IIB String Theory on Calabi-Yau Threefolds*, Nucl. Phys. **B569** (2000) 229, hep-th/9908007.
- [21] R. Böhm, J. Louis, *Compactification of Type IIB String Theory on Calabi-Yau Fourfolds*, in Vorbereitung.
- [22] G. Dall'Agata, K. Lechner and D. Sorokin, *Covariant Actions for the Bosonic Sector of $D = 10$ IIB Supergravity*, Class. Quant. Grav. **14** (1997) 195; hep-th/9707044;
G. Dall'Agata, K. Lechner and M. Tonin, *$D = 10$, $N = IIB$ Supergravity: Lorentz Invariant Actions and Duality*, JHEP **9807** (1998) 17, hep-th/9806140;
G. Dall'Agata, K. Lechner and M. Tonin, *Action for IIB Supergravity in 10-Dimensions*, hep-th/9812170.
- [23] E. Bergshoeff, H.J. Boonstra and T. Ortín, *S Duality and Dyonie p -Brane Solutions in Type II String Theory*, Phys. Rev. **D53** (1996) 7206, hep-th/9508091.
- [24] N. Marcus and J.H. Schwarz, *Field Theories that have no Manifestly Lorentz-Invariant Formulation*, Phys. Lett. **115B** (1982) 111;
J.H. Schwarz, *Covariant Field Equations of Chiral $N = 2$ $D = 10$ Supergravity*, Nucl. Phys. **B226** (1983) 269;
P. Howe and P.C. West, *The Complete $N = 2$, $d = 10$ Supergravity*, Nucl. Phys. **B238** (1984) 181.
- [25] E. Bergshoeff, C. M. Hull and T. Ortín, *Duality in the Type-II Superstring Effective Action*, Nucl. Phys. **B451** (1995) 547, hep-th/9504081.
- [26] C. M. Hull, P. K. Townsend, *Unity of Superstring Dualities*, Nucl. Phys. **B438** (1995) 109, hep-th/9410167.
- [27] M. J. Duff, B. E. Nilsson, C. N. Pope, *Kaluza-Klein Supergravity*, Phys. Rep. **130** (1986) 1.

- [28] S. Ferrara, S. Theisen, *Moduli Spaces, Effective Actions and Duality Symmetry in String Compactifications*, Hellenic School 1989: 0620-656, CERN-TH.5652/90.
- [29] P. Candelas, P. S. Green, T. Hübsch *Rolling Among Calabi-Yau Vacua*, preprint UTTG-10-89, Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 1956.
- [30] P. Candelas, X. de la Ossa, *Moduli Space of Calabi-Yau Manifolds*, Nucl. Phys. **B355** (1991) 455.
- [31] P. Candelas, *Yukawa Couplings Between (2,1)-Forms*, Nucl. Phys. **B298** (1988) 458.
- [32] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, IOP Publishing Bristol (1990).
- [33] P. Fre', P. Soriani *The N=2 Wonderland: From Calabi-Yau Manifolds to Topological Field Theories*. World Scientific Singapur (1995).
- [34] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger, E. Witten, *Vacuum Configurations For Superstrings*, Nucl. Phys. **B258** (1985) 46.
- [35] B. R. Greene, *String Theory on Calabi-Yau Manifolds*, preprint CU-TP-812, hep-th/9702155.
- [36] E. Cremmer, C. Kounnas, A. Van Proeyen, J. P. Derendinger, S. Ferrara, B. de Wit, L. Girardello, *Vector Multiplets Coupled to N=2 Supergravity: Superhiggs Effect, Flat Potentials and Geometric Structure*, Nucl. Phys. **B250** (1985) 385.
- [37] A. Salam, J. Strathdee, *Supersymmetry, Parity and Fermion-Number Conservation*, Nucl. Phys. **B97** (1975) 293.
P. Fayet, *Fermi-Bose Hypersymmetry*, Nucl. Phys. **B113** (1976) 135.
S. Ferrara, J. Scherk, B. Zumino, *Algebraic Properties of Extended Supergravity Theories*, Nucl. Phys. **B121** (1977) 393.
- [38] M. Sohnius, K. S. Stelle, P. C. West, *Off Mass Shell Formulation of Extended Supersymmetric Gauge Theories*, Phys. Lett. **B92** (1980) 123.
- [39] B. de Wit, V. Kaplunovsky, J. Louis, D. Lüüst, *Perturbative Couplings of Vector Multiplets in N=2 Heterotic String Vacua*, Nucl. Phys. **B451** (1995) 53, hep-th/9504006.
- [40] B. de Wit, J. W. van Holten, *Multiplets of Linearized SO(2) Supergravity*, Nucl. Phys. **B155** (1979) 530.
- [41] F. Brandt, *New N = 2 supersymmetric gauge theories: The double tensor multiplet and its interactions*, Nucl. Phys. **B587** (2000) 543, hep-th/0005086.

- [42] J. Bagger, E. Witten, *Matter Couplings in $N = 2$ Supergravity*, Nucl. Phys. **B222** (1983) 1.
- [43] B. de Wit, P. G. Lauwers, A. Van Proeyen, *Lagrangians of $N=2$ Supergravity - Matter Systems*, Nucl. Phys. **B255** (1985) 569.
- [44] A. Strominger, *Yukawa Couplings in Superstring Compactification*, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 2547.
- [45] M. Bodner, A. C. Cadavid, *Dimensional Reduction of Type IIB Supergravity and Exceptional Quaternionic Manifolds*, Class. Quant. Grav. **7** (1990) 829.
- [46] J. Michelson, *Compactifications of Type IIB Strings to Four-Dimensions with Nontrivial Classical Potential*, Nucl. Phys. **B495** (1997) 127, hep-th/9610151.
- [47] N. Berkovits, *Conformal Compensators and Manifest Type IIB S Duality*, Phys. Lett. **B423** (1998) 265, hep-th/9801009.
- [48] K. Dasgupta, S. Mukhi, *A Note on Low-Dimensional String Compactifications*, Phys. Lett. **B398** (1997) 285, hep-th/9612188.
- [49] C. M. Hull, E. Witten, *Supersymmetric Sigma Models and the Heterotic String*, Phys. Lett. **160B** (1985) 398.
- [50] G. Papadopoulos, P. K. Townsend, *Massive Sigma Models with (p, q) Supersymmetry*, Class. Quant. Grav. **11** (1994) 515, hep-th/9307066.
- [51] S. J. Gates, Jr., L. Rana, *Manifest $(4, 0)$ Supersymmetry, Sigma Models and the ADHM Instanton Construction*, Phys. Lett. **B345** (1995) 233, hep-th/9411091.
- [52] R. Dhanawittayapol, S. J. Gates, Jr., L. Rana, *A Canticle on $(4, 0)$ Supergravity-Scalar Multiplet Systems for a "Cognoscente"*, Phys. Lett. **B389** (1996) 264, hep-th/9606108.
- [53] A. Klemm, B. Lian, S-S. Roan, S-T. Yau, *Calabi-Yau fourfolds for M- and F-Theory compactifications*, Nucl. Phys. **B518** (1998) 515, hep-th/9701023.
- [54] T. Eguchi, P. B. Gilkey, A. J. Hansen, *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*, Phys. Rep. **66** (1980) 213.
- [55] S. Gukov, C. Vafa, E. Witten, *CFT's From Calabi-Yau Four-folds*, Nucl. Phys. **B584** (2000) 69, hep-th/9906070.
- [56] M. Haack, J. Louis, *Duality in Heterotic Vacua With Four Supercharges*, Nucl. Phys. **B575** (2000) 107, hep-th/9912181.
- [57] S. J. Gates, Jr., S. Gukov, E. Witten, *Two Two-Dimensional Supergravity Theories from Calabi-Yau Four-Folds*, Nucl. Phys. **B584** (2000) 109, hep-th/0005120.

- [58] B. de Wit, M. T. Grisaru, H. Nicolai, E. Rabinovici, *Two-Loop Finiteness of $D = 2$ Supergravity*, Phys. Lett. **B286** (1992) 78, hep-th/9205012.
- [59] Eine kleine Auswahl mit weiterführenden Referenzen ist gegeben durch:
M. A. Walton, *The Heterotic String on the Simplest Calabi-Yau Manifold and its Orbifold Limits*, Phys. Rev. **D37** (1988) 377.
J. Louis, J. Sonnenschein, S. Theisen, S. Yankielowicz, *Non-Perturbative Properties of Heterotic String Vacua Compactified on $K3 \times T^2$* , Nucl. Phys. **B480** (1996) 185, hep-th/9606049.
D. Lüst, *String Vacua with $N = 2$ Supersymmetry in Four Dimensions*, hep-th/9803072.
- [60] P. Candelas, *Lectures on Complex Manifolds*, Trieste 1987, Proceedings, Superstrings'87 (1-88), UTTG-21-87 (1987).
- [61] T. Hübsch, *Calabi-Yau Manifolds. A Bestiary for Physicists*. World Scientific Singapur (1992).
- [62] G. T. Horowitz, *What is a Calabi-Yau Space?*, in *Unified String Theories*, ed. by M. Green, D. Gross, World Scientific Singapur (1986).
- [63] M. Haack, J. Louis, M. Marquart, *Type IIA and Heterotic String Vacua in $D=2$* , hep-th/0011075.
- [64] P. S. Aspinwall, *$K3$ Surfaces and String Duality*, in *Fields, Strings and Duality, TASI 1996*, ed. by C. Esthimiou, B. Greene, World Scientific, 1997, hep-th/9611137.
- [65] P. S. Aspinwall, *Compactification, Geometry and Duality: $N = 2$.*, preprint DUKE-CGTP-00-01, hep-th/0001001.
- [66] N. Seiberg, *Observations on the Moduli Space of Superconformal Field Theories*, Nucl. Phys. **B303** (1988) 286.
- [67] P. S. Aspinwall, D. R. Morrison, *String Theory on $K3$ Surfaces*, in *Mirror Symmetry II*, ed. by B. Greene, S. T. Yau World Scientific, hep-th/9404151.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe verfaßt, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Lebenslauf

Angaben zur Person

Name: Böh
Vornamen: Robert
Geburtsdatum: 21.05.1971
Geburtsort: Dinslaken
Nationalität: Deutsch

Schulischer Bildungsgang

8/1977-6/1981 Grundschule, Voerde am Niederrhein
8/1981-5/1990 Otto-Hahn-Gymnasium, Dinslaken
30.05.1990 Abitur

Grundwehrdienst

11/1996-8/1997 Fernmelderegiment Frankenberg

Universitärer Bildungsgang

10/1990-7/1991 Studium der Philosophie an der
Philipps-Universität Marburg
4/1991-10/1993 Grundstudium der Physik an der
Philipps-Universität Marburg
12.10.1993 Vordiplom in Physik
10/1991-4/1994 Grundstudium der Mathematik an der
Philipps-Universität Marburg
18.04.1994 Vordiplom in Mathematik
10/1993-7/1994 Hauptstudium der Physik an der
Philipps-Universität Marburg
9/1994-10/1995 Master of Science (M.Sc.) Kurs in Mathematical
Physics am King's College der Universität London
01.11.1995 M.Sc. in Mathematical Physics (Project
Report: „Superstring Theory“ bei Prof. P.C. West)
seit 10/1997 Promotion in Physik an der MLU Halle-Wittenberg
unter Betreuung von Prof. J. Louis