9.

Nachricht

über das

Königliche Pädagogium zu Halle.

Herausgegeben

von

Dr. G. Kramer,

Director des Königlichen Pädagogiums und der Franckeschen Stiftungen.

Einundzwanzigste Fortsetzung.

Inhalt:

Halle,

Druck der Waisenhaus-Buchdruckerei.

1856.

9.

Theorie der parallelen Curven und der Evolventen in ihrem Zusammenhange mit der allgemeinen Kreisgleichung.

§. 1.

Die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf einer durch die Gleichung

$$(1)\quad \Phi(\beta,\alpha)=0$$

gegebenen Curve fortrückt, ist bekanntlich

$$(2)\quad (y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\varrho^2.$$

Differentiiren wir dieselbe zweimal nach x, so kommt:

$$(3)\quad (y-\beta)y'+(x-\alpha)=0,$$

$$(4)\quad (y-\beta)y''+y'^2+1=0,$$

wo y' und y'' die Differentialverhältnisse $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ bezeichnen. Aus den Gleichungen (1), (3), (4) ergiebt sich durch Elimination der Constanten β und α die Differentialgleichung der zweiten Ordnung:

$$(5)\quad \Phi\left(y+\frac{1+y'^2}{y''},\ x-y'.\frac{1+y'^2}{y''}\right)=0,$$

deren allgemeines Integral durch das System der beiden Gleichungen (1) und (2) dargestellt wird und, wie es sein muß, zwei von einander unabhängige Constante enthält.

Es hält nicht schwer, die beiden ersten Integrale der Gleichung (5) anzugeben; denn eine passende Combination der Gleichungen (1) bis (4) ist dazu vollkommen ausreichend. Obwohl nun diese indirekte Integration die Betrachtung der Differentialgleichung (5) überflüssig erscheinen lassen könnte, so ist doch zu bedenken, daß auf diese Weise die etwaigen vorhandenen singulären Integrale nicht mit erhalten werden. Demgemäß werden wir die direkte Integration der Gleichung (5) versuchen: dieselbe wird uns zwei singuläre Integrale liefern, deren Discussion den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung bildet.

Also, um die Integration der Gleichung (5) in möglichster Einfachheit zu erhalten, differentiiren wir die Gleichung (5) abermals, so bekommt man zu Folge der Relation

$$d\left(x - y'\frac{2 + y'^2}{y''}\right) = - y' d\left(y + \frac{1 + y'^2}{y''}\right)$$

die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(6)\quad \left\{\frac{d\Phi\left(y+\frac{1+y'^2}{y''}, x-y'\frac{1+y'^2}{y''}\right)}{d\left(y+\frac{1+y'^2}{y''}\right)} - y'\frac{d\Phi\left(y+\frac{1+y'^2}{y''}, x-y'\frac{1+y'^2}{y''}\right)}{d\left(x-y'\frac{1+y'^2}{y''}\right)}\right\} d\left(y+\frac{1+y'^2}{y''}\right) = 0.$$

Dieser wird zunächst genügt durch Annullation des zweiten Faktors, woher

$$y + \frac{1 + y'^2}{y''} = \beta$$

und, wenn α eine mit β durch die Gleichung (1) verknüpfte Constante bezeichnet, da die Gleichung (5) durch den vorhergehenden Werth von β befriedigt werden muß,

$$x - y'\frac{1 + y'^2}{y''} = \alpha$$

folgt. Das erste Integral der Gleichung (5) wird daher dargestellt durch das System der drei Gleichungen:

$$(7)\quad y + \frac{1 + y'^2}{y''} = \beta,\quad x - y'\frac{1 + y'^2}{y''} = \alpha,\quad \Phi(\beta, \alpha) = 0.$$

Eliminiren wir aus diesen beiden Gleichungen y'', so erhalten wir die Gleichung (3), welche durch eine abermalige Integration unmittelbar auf die Gleichung (2) des Kreises zurückführt.

Der Gleichung (6) kann aber auch noch dadurch Genüge geschehen, daß man den ersten Faktor sich annulliren läßt. Indem die Gleichung (5) dann doch immer gleichzeitig bestehen bleibt, erhalten wir das System der Gleichungen:

$$(8)\quad \begin{cases} \Phi\left(y+\frac{1+y'^2}{y''}, x-y'.\frac{1+y'^2}{y''}\right) = 0 \\ \frac{d\Phi\left(y+\frac{1+y'^2}{y''}, x-y'\frac{1+y'^2}{y''}\right)}{d\left(y+\frac{1+y'^2}{y''}\right)} - y'\frac{d\Phi\left(y+\frac{1+y'^2}{y''}, x-y'\frac{1+y'^2}{y''}\right)}{d\left(x-y'\frac{1+y'^2}{y''}\right)} = 0, \end{cases}$$

aus denen $y + \frac{1 + y'^2}{y''}$ und $x - y'\frac{1 + y'^2}{y''}$ als Funktionen von y' folgen. Da dieselben Größen, für den Fall des allgemeinen Integrales, den Constanten β und α gleich sind, so ist das System (8) auf keine andere Weise mit dem allgemeinen Integrale (7) in Verbindung zu bringen, als indem man β und α aufhört als Constante zu denken und sie vielmehr sich in passender Weise als Funktionen von x und y bestimmt. **Das System der Gleichungen (8) wird daher ein singuläres Integral der Differentialgleichungen (5) vorstellen.** Durch Elimination von y'' ergiebt sich aus ihm eine Differentialgleichung der ersten Ordnung zwischen y, x, y', welche die Form hat

$$(9) \quad F(yy' + x, y') = 0,$$

und das allgemeine Integral dieser Gleichung wird die endliche Form des gesuchten singulären Integrales der Gleichung (5) sein. Dasselbe enthält mithin eine willkürliche Constante und gehört demzufolge einer ganzen Classe von Curven an.

Die Differentialgleichung (5) muß aber noch ein zweites Integral erster Ordnung besitzen, welches von dem durch die Gleichungen (7) dargestellten verschieden ist. Zu dessen Herstellung bemerken wir, daß die Differentialgleichung (6) erfüllt wird, wenn man hat

$$d\left(y + \frac{1 + y'^2}{y''}\right) = 0,$$

d. h. durch Ausführung der Differentation, wenn die Differentialgleichung

$$(10) \quad y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0$$

besteht. Hier ist

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = y''\frac{dy''}{dy'}$$

und demnach (10) identisch mit der Gleichung

$$\frac{dy''}{y''} = 3y'\frac{dy'}{1 + y'^2},$$

woher durch Integration, wenn ϱ eine willkürliche Constante bezeichnet,

$$(11) \quad \varrho y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{ds}{dx}\right)^3,$$

wenn, wie gewöhnlich, ds das Differential $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ des Bogens bezeichnet. Diese Gleichung, zusammen mit der Gleichung (5), stellt das erste Integral dieser letztern, um welches es sich handelt, dar; dasselbe ist demgemäß, durch Elimination des Differentialverhältnisses y'', von der Form

$$(12) \quad \Phi\left(y + \varrho\frac{dx}{ds},\; x - \varrho\frac{dy}{ds}\right) = 0.$$

Die nochmalige Integration dieser Gleichung führt eine zweite Constante in die Rechnung herein und muß schließlich die Gleichung (2) wieder ergeben.

Um dies zu zeigen, setzen wir größerer Bequemlichkeit willen,

$$(13) \quad \frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \text{ also } \frac{dy}{dx} = y' = \operatorname{tg}\varphi,\; \frac{dy}{ds} = \sin\varphi$$

und erhalten dadurch an Stelle von (12)

$$(14) \quad \Phi(y + \varrho\cos\varphi,\; x - \varrho\sin\varphi) = 0.$$

Differentiiren wir diese Gleichung unter der Rücksicht, daß ϱ constant ist, so erhält man, weil

$$d(x - \varrho\sin\varphi) = \cot\varphi\, d(x + \varrho\cos\varphi)$$

ist, durch eine leichte Transformation:

$$(15) \quad \left\{\frac{d\Phi(y + \varrho\cos\varphi,\; x - \varrho\sin\varphi)}{d(y + \varrho\cos\varphi)} + \cot\varphi\frac{d\Phi(y + \varrho\cos\varphi,\; x - \varrho\sin\varphi)}{d(x - \varrho\sin\varphi)}\right\} . (d(y + \varrho\cos\varphi)) = 0.$$

Dieser Gleichung geschieht Genüge, wenn

$$d(y + \varrho\cos\varphi) = 0,$$

also

$$y + \varrho\cos\varphi = \beta$$

gesetzt wird, wo β wiederum eine willkürliche Constante bezeichnet. Zu Folge der Gleichung (14), die ja durch Einsetzung des gefundenen constanten Werthes für $y + \varrho\cos\varphi$ befriedigt werden muß, wird jetzt auch

$$x - \varrho\sin\varphi = \alpha,$$

wo α wieder durch die Relation (1) aus β seine Bestimmung erhält. Wir kommen daher auf das System der Gleichungen

$$(16) \quad \beta = y + \varrho\cos\varphi,\; \alpha = x - \varrho\sin\varphi,\; \Phi(\beta, \alpha) = 0$$

zurück, aus denen in der That durch Elimination von φ die Kreisgleichung (2) hervorgeht.

Es ist aber wohl zu bemerken, daß der Gleichung (15) auch noch dadurch Genüge geschieht, daß man den ersten Faktor zum Verschwinden bringt. Indem nun gleichzeitig die Gleichung (14) ihre Geltung behält, folgt das System der Gleichungen

$$(17) \quad \begin{cases} \Phi(y + \varrho\cos\varphi,\; x - \varrho\sin\varphi) = 0 \\ \sin\varphi\dfrac{d\Phi(y + \varrho\cos\varphi,\; x - \varrho\sin\varphi)}{d(y + \varrho\cos\varphi)} + \cos\varphi\dfrac{d\Phi(y + \varrho\cos\varphi,\; x - \varrho\sin\varphi)}{d(x - \varrho\sin\varphi} = 0, \end{cases}$$

aus denen die Ausdrücke $y + \varrho \cos \varphi$ und $x - \varrho \sin \varphi$ sich als Funktionen von φ und folgeweise auch als Funktionen von x und y ergeben. Die Gleichungen (11) sind also mit den Gleichungen (16) nur so in Verbindung zu bringen, daß man in letzteren sich β und α nicht mehr als Constante, sondern als angemessene Funktionen von x und y bestimmt. Sie stellen daher ein singuläres Integral der Gleichung (13) oder (12) dar, welches natürlich auch der Differentialgleichung (5) der zweiten Ordnung Genüge leisten muß. Aus den Gleichungen (17) folgt, daß die Summe der Ausdrücke $\operatorname{tg}\varphi\,(y + \varrho \cos \varphi) + (x - \varrho \sin \varphi) = y \operatorname{tg}\varphi + x = yy' + x$ wiederum eine Funktion von y' ist und mithin die Relation

$$f(yy' + x,\; y') = 0$$

gesetzt werden darf. Diese letztere Gleichung ist die Differentialgleichung aller Curven, welche durch die Gleichungen (17) für die verschiedenen Werthe des Parameters ϱ umfaßt werden, und diese Gleichungen selbst stellen daher umgekehrt das endliche Integral derselben dar.

Die direkte Integration der Gleichung (5) führt sonach auf die Existenz zweier singulärer Integrale, jedes mit einer willkürlichen Constanten, deren Discussion ersichtlich in dem innigsten Zusammenhang mit der Theorie des Kreises stehen muß. Wir werden nach einander diese Discussion vornehmen und sehen, wie sie uns zu einer neuen Theorie der parallelen Curven und der Evolventen führt.

§. 2.

Theorie der parallelen Curven.

Betrachten wir zunächst das System der Gleichungen (17), welches das singuläre Integral der Gleichung (14), so wie auch eines der singulären Integrale der Gleichung (5) darstellt. Als solches wird es einer solchen Curve angehören, welche alle durch das allgemeine Integral der Gleichung (14), oder, was dasselbe ist, der Gleichung (12) dargestellten Curven einhüllt und mithin die **Einhüllende aller Kreise bestimmen, deren Mittelpunkt auf der Leitcurve (1) fortrückt.** Die Gleichungen (17) gestatten aber auch noch eine andere Auffassung. Sehen wir nämlich φ als einen constanten Parameter an, so kann die zweite als die Differentialgleichung der ersten in Bezug auf diese Größe angesehen werden und mithin, wenn man sie beide als zusammen bestehend annimmt, oder auch, wenn man φ aus ihnen herauseliminirt, wird die resultirende Gleichung die Einhüllende aller Curven festlegen, welche den verschiedenen Werthen des Parameters φ in der ersten entsprechen. Die letzteren, die eingehüllten Curven, werden mithin durch die Gleichung (14) gegeben, unter der Voraussetzung, daß φ von Curve zu Curve variirt, und sind sämmtlich der Leitcurve (1) vollkommen congruente Curven: denn wenn man den Anfangspunkt nach dem Punkte

$$(18) \quad \eta = -\varrho\cos\varphi, \; \xi = +\varrho\sin\varphi$$

verlegt, d. h. nach einem beliebigen Punkte in der Peripherie des Kreises

$$(19) \quad \eta^2 + \xi^2 = \varrho^2,$$

so geht die Gleichung (14) geradezu über in die einfachere $\Phi(y, x) = 0$. Die **eingehüllten Lagen der Leitcurve (1) sind demzufolge alle nur möglichen Verschiebungen derselben entlang der Peripherie des Kreises (19) und die auf einander folgenden Berührungslinien jeder Verschiebungscurve sind den correspondirenden auf einander folgenden Berührungslinien der Leitcurve parallel.**

Denken wir uns jetzt einen speciellen Punkt der einhüllenden Curve, so wird dieselbe in diesem Punkte sowohl eine specielle Lage des eingehüllten Kreises, wie auch eine specielle unter den eingehüllten Verschiebungen (14) der Leitcurve berühren. Alle drei Curven haben also in diesem Punkte eine gemeinschaftliche Tangente und die gleichfalls gemeinschaftliche Normale ist der Halbmesser, der den Berührungspunkt (y, x) mit dem Mittelpunkte (β, α) des speciellen eingehüllten Kreises verbindet. Es läßt sich nun leicht beweisen, daß diese Normale auch zugleich die Curve

(1) in dem speciellen Punkte (β, α) senkrecht durchschneidet. Die erwähnte Verbindungslinie hat nämlich zu ihrer Gleichung, wenn man unter η, ξ ihre allgemeinen Coordinaten versteht,

$$\eta - y = \frac{y-\beta}{x-\alpha}(\xi - x),$$

und zugleich auch, weil sie normal auf der Einhüllenden in dem Punkte (y, x) steht, für welchen wir $\frac{dy}{dx} = y'$ gesetzt haben,

$$\eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x);$$

mithin ist

$$-\frac{1}{y'} = \frac{y-\beta}{x-\alpha}$$

oder auch

$$(3)\quad (y-\beta)y' + (x-\alpha) = 0.$$

Nun ist aber zu Folge der zweiten der Gleichungen (17), wenn man (y, x) als den Berührungspunkt des speciellen eingehüllten Kreises (2) mit der Einhüllenden (17) und dem zu Folge $y + \varrho\cos\varphi$, $x - \varrho\sin\varphi$ als identisch mit β, α betrachtet,

$$\sin\varphi\frac{d\Phi(\beta, \alpha)}{d\beta} + \cos\varphi\frac{d\Phi(\beta, \alpha)}{d\alpha} = 0,$$

und hieraus ergiebt sich durch Vergleichung mit der Differentialgleichung von (1), nämlich

$$\frac{d\beta}{d\alpha}\frac{d\Phi(\beta, \alpha)}{d\beta} + \frac{d\Phi(\beta, \alpha)}{d\alpha} = 0,$$

sogleich die wichtige Relation

$$(n')\quad \operatorname{tg}\varphi = y' = \frac{d\beta}{d\alpha}.$$

Setzen wir jetzt in (3) für y' seinen Werth $\frac{d\beta}{d\alpha}$ ein, so geht es über in

$$(3')\quad (y-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha} + (x-\alpha) = 0$$

und die in Rede stehende Verbindungslinie ist darum identisch mit der Normalen, welche die Leitcurve im Punkte (β, α) besitzt und überdies, in Folge der Gleichung (2) von den constanten Länge ϱ.

Hiermit ist bewiesen, daß jeder Punkt (y, x) der einhüllenden Curve (17) auf der Normalen der Leitcurve im entsprechenden Punkte (β, α) enthalten ist und zwar, von diesem aus gerechnet, in dem unveränderlichen Abstande ϱ; die Curve (17) ist daher, zu Folge des eingeführten Sprachgebrauches der Leitcurve (1) parallel oder man hat den Satz:

Das durch die Gleichungen (17) ausgedrückte singuläre Integral der Differentialgleichung (5) drückt für die verschiedenen Werthe des Parameters ϱ das System aller parallelen Curven aus, welche in Bezug auf die gegebene Leitcurve (1) gedacht werden können.

Es mag noch bemerkt werden, daß man für zwei gleich große, aber bezüglich des Vorzeichens entgegengesetzte Werthe des Parameters ϱ zwei zu einander gehörige parallele Curven erhält, von denen man wohl die eine als die äußere, die andere als die innere bezeichnet hat, so wie daß man zu Folge des Begriffes der parallelen Curve auf die Leitcurve zurückkommen muß, wenn man $\varrho = 0$ setzt. In der That reduciren sich die Gleichungen (17) unter dieser Annahme auf

$$\Phi(y, x) = 0, \quad \operatorname{tg}\varphi \frac{d\Phi(y, x)}{dy} + \frac{d\Phi(y, x)}{dx} = 0,$$

welche, wenn man die Relation $y' = \operatorname{tg}\varphi$ beachtet, respektive die Gleichung der Leitcurve und deren Differentialgleichung erster Ordnung darstellen.

Aus den vorstehenden Entwickelungen fließen unmittelbar und mit großer Leichtigkeit die folgenden auf die Theorie der parallelen Curven bezüglichen Theoreme:

1) **Die correspondirenden Berührungslinien paralleler Curven sind parallel.**
2) **Die parallele Curve zu einer gegebenen Curve ist die einhüllende Curve eines Kreises mit constantem Radius ϱ, dessen Mittelpunkt auf der gegebenen Curve fortrückt.**
3) **Die parallele Curve zu einer gegebenen Curve ist die einhüllende Curve aller Verschiebungen dieser letztern, welche entlang der Peripherie eines um den Anfangspunkt mit dem constanten Radius ϱ beschriebenen Kreises vor sich gehen.**
4) **Wenn eine Curve einer anderen parallel ist, so ist auch umgekehrt die andere der ersten parallel.**

Zu Folge der Relation

$$y' = \frac{d\beta}{d\alpha}$$

folgt, daß die Gleichung (3) eine Normale an die Leitcurve ausdrückt und in Verbindung mit der Gleichung (2) enthält sie daher die wesentliche Eigenschaft der

Parallelcurven. Mithin werden auch die aus dieser resultirenden Gleichungen (16) als die Gleichungen der parallelen Curven angesehen werden können und man hat, um ihre Gleichung zwischen x und y allein zu erhalten, nur nöthig β und α herauszueliminiren. Die resultirende Gleichung wird sich zunächst unter die Form einer Differentialgleichung stellen, da ja die Größen $\operatorname{tg}\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ als Differentialverhältnisse zwischen den Variabeln y, x, s bestimmt sind: aber dieser Umstand kann vermieden werden, wenn man $\frac{d\beta}{d\alpha}$ für $\operatorname{tg}\varphi = y'$ setzt: dadurch bekommen wir nämlich an Stelle von (16) die Gleichungen:

$$(20) \quad \Phi(\beta, \alpha) = 0, \quad \beta = y + \frac{\varrho d\alpha}{\sqrt{d\beta^2 + d\alpha'}}, \quad \alpha = x - \frac{\varrho d\beta}{\sqrt{d\beta^2 + d\alpha'}},$$

aus denen durch Elimination von β, α die Gleichung der parallelen Curve in endlicher Form zwischen y, x hervorgeht.

Unterlassen wir die angedeutete Substitution, so ergiebt sich durch Elimination von α und β aus den Gleichungen (16) die Differentialgleichung (12) oder (14), die der Sache nach ja beide identisch sind, und die parallele Curve ist hierdurch gleichfalls vollständig bestimmt, nämlich als ein der genannten Differentialgleichung entsprechendes singuläres Integral, welches, wie wir wissen, durch das System der beiden Gleichungen (17) dargestellt wird.

Eliminirt man aus den Gleichungen (17), wie schon bemerkt, die Größe ϱ, so bekommt man eine Gleichung von der Form

$$(21) \quad f(yy' + x, y') = 0$$

und da dieser letztern durch das System der beiden ersten, welches zudem eine willkürliche Constante ϱ enthält, Genüge geschieht, so folgt, daß die Gleichung (21) die Differentialgleichung aller mit der Leitcurve (1) parallelen Curven ist. Da ferner, wenn die Gleichung irgend einer beliebigen parallelen Curve bekannt ist, man dieselbe nur als die Gleichung (1) der Leitcurve zu betrachten hat, um vermöge der Formeln (20) die Gleichung aller mit ihr parallelen Curven zu erhalten, so folgt jetzt das Theorem:

Die Differentialgleichung

$$f(yy' + x, y') = 0$$

drückt ein System unter einander paralleler Curven aus und ihr allgemeines Integral kann daher immer gefunden werden, sobald man eine partikuläre Lösung kennt.

In der That bleibt die Gleichung (21) von derselben Form, wenn man $y + \varrho\cos\varphi$ und $x - \varrho\sin\varphi$ für y und x einführt: demgemäß hat man, um das allgemeine Integral zu erhalten, nur nöthig diese Substitution in irgend einer partikulären Integralgleichung vorzunehmen und alsdann aus der so entstehenden verallgemeinerten Integralgleichung und der Gleichung (21) selbst, unter Berücksichtigung der Relation

$$y' = \operatorname{tg}\varphi,$$

das Differentialverhältniß y' zu eliminiren.

Die eben auseinandergesetzte Methode, die Gleichung der parallelen Curven zu einer gegebenen Leitcurve zu finden, versagt selbst in dem Falle nicht, wenn die Gleichung der Leitcurve nicht in expliciter Weise, sondern als ein singuläres Integral einer Differentialgleichung von gegebener Form bestimmt ist. Sei nämlich diese Differentialgleichung

$$(22) \quad \Psi(y, x, y') = 0:$$

so können wir für einen Augenblick, um auszudrücken, daß diese Gleichung auch durch die Coordinaten der Leitcurve befriedigt wird, β und α an Stelle von y und x treten lassen. Dadurch erhält man

$$\Psi\left(\beta, \alpha, \frac{d\beta}{d\alpha}\right) = 0$$

und kommt nach dem Vorhergehenden zur Gleichung der parallelen Curven, indem man aus ihr und den beiden Gleichungen

$$\beta = y + \frac{\varrho d\alpha}{\sqrt{d\beta^2 + d\alpha'}}, \quad \alpha = x + \frac{\varrho d\beta}{\sqrt{d\beta' + d\alpha'}}$$

die Coordinaten β und α eliminirt. Bemerkt man, daß

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{dy}{d\alpha}$$

ist und führt das Bogendifferential $ds = \sqrt{dy^2 + dx^2}$ ein, so ist das Resultat dieser Elimination die Gleichung

$$\Psi\left(y + \varrho\frac{dx}{ds}, \; x - \varrho\frac{dy}{ds}, \; \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

oder auch

$$(23) \quad \Psi(y + \varrho\cos\varphi, \; x - \varrho\sin\varphi, \; \operatorname{tg}\varphi) = 0$$

und das singuläre Integral dieser Differentialgleichung ist die Gleichung der gesuchten parallelen Curve. Um dieselbe in endlicher Form zu erhalten, hat man zu Folge der Theorie der singulären Integrale diese Gleichung partiell nach φ zu differentiren und aus ihr und der entstehenden Differentialgleichung die Größe φ zu eliminiren; die gesuchte Gleichung ist also das Resultat der Elimination von φ zwischen den beiden Gleichungen:

$$(24) \quad \begin{cases} \psi(y+\varrho\cos\varphi,\ x-\varrho\sin\varphi,\ \mathrm{tg}\,\varphi)=0 \\ \varrho\sin\varphi\dfrac{d\psi}{d(y+\varrho\cos\varphi)}+\varrho\cos\varphi\dfrac{d\psi}{d(x-\varrho\sin\varphi)}-\dfrac{1}{\cos\varphi^2}\cdot\dfrac{d\psi}{d(\mathrm{tg}\,\varphi)}=0. \end{cases}$$

Es kann der Fall eintreten, daß die Gleichungen (24) mehrere singuläre Integrale der Gleichung (23) bestimmen. Um dasjenige herauszufinden, welches der parallelen Curve, um die es zu thun ist, angehört, muß man die verschiedenen Gleichungen zwischen y und x, wenn deren mehrere resultiren sollten, dahin untersuchen, ob sie das Differentialverhältniß $\dfrac{dy}{dx}$ als Funktion von ϱ ergeben oder nicht. Nur im letzten Falle können sie mit der gesuchten singulären Lösung identisch sein.

Man kann ohne Schwierigkeit nachweisen, daß die durch das allgemeine Integral von (23) dargestellten Curven respektive die durch das allgemeine Integral von (22) dargestellten Curven respektive parallel sein müssen, natürlich nur, wenn die Constanten der Integration entsprechende Werthe haben. Da nun das singuläre Integral einer jeden Differentialgleichung die dem allgemeinen Integrale entsprechenden Curven einhüllt, so folgt das Theorem:

> Wenn eine Curve die Einhüllende zu irgend einer Curvenreihe ist, so ist die hierzu in einem gewissen Abstande ϱ befindliche parallele Curve die Einhüllende zu derjenigen Reihe von Curven, welche der erstern in dem Abstande ϱ parallel läuft.

Die analytische Consequenz dieses geometrischen Satzes ist folgendes Theorem:

> Die Integration der allgemeinen Differentialgleichung
> $$\psi(y+\varrho\cos\varphi,\ x-\varrho\sin\varphi,\ \mathrm{tg}\,\varphi)=0$$
> oder was dasselbe ist, die Differentialgleichung
> $$\psi\left(y+\varrho\frac{dx}{ds},\ x-\varrho\frac{dy}{ds},\ \frac{dy}{dx}\right)=0$$
> läßt sich immer auf die Integration der einfachern Gleichung
> $$\psi(y,\ x,\ y')=0$$
> zurückführen. Denn das Integral der ersteren Gleichung umfaßt alle Curven, welche den durch das Integral der zweiten ausgedrückten Curven in dem Abstande ϱ parallel sind.

Zu der behandelten Art von Differentialgleichungen gehört auch noch die folgende:

$$\Phi\left(y + \frac{1 + y'^2}{y''},\ x - y'\frac{1 + y'^2}{y''},\ y'\right) = 0,$$

deren Form unverändert bleibt, wenn wir statt y, x die Größen $y + \varrho \cos\varphi$, $x - \varrho \sin\varphi$ einführen. Um dieses zu beweisen, setzen wir für den Augenblick

$$\beta = y + \varrho\cos\varphi,\quad \alpha = x - \varrho\sin\varphi,$$

$$\beta' = \frac{d\beta}{d\alpha},\quad \beta'' = \frac{d\beta'}{d\alpha} = \frac{d^2\beta}{d\alpha^2}:$$

so folgt

$$\beta' = y' = \operatorname{tg}\varphi,\quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta'^2}},\quad \sin\varphi = \frac{\beta'}{\sqrt{1 + \beta'^2}},$$

und unsere Substitutionsgleichungen gehen über in

$$y = \beta - \varrho\frac{1}{\sqrt{1 + \beta'^2}},\quad x = \alpha + \varrho\frac{\beta'}{\sqrt{1 + \beta'^2}};$$

hieraus entwickelt man ohne Mühe

$$y'' = \frac{d\beta'}{d\alpha} = \frac{d\beta'}{d\alpha + \varrho d\left(\frac{\beta'}{\sqrt{1 + \beta'^2}}\right)} = \frac{\beta''}{1 + \varrho\frac{\beta''}{\sqrt{(1 + \beta'^2)^3}}},$$

$$y + \frac{1 + y'^2}{y''} = \beta + \frac{1 + \beta'^2}{\beta''},$$

$$x - y'\frac{1 + y'^2}{y''} = \alpha - \beta'\frac{1 + \beta'^2}{\beta''}.$$

Unsere transformirte Gleichung wird daher:

$$\Phi\left(\beta + \frac{1 + \beta'^2}{\beta''},\ \alpha - \beta'\frac{1 + \beta'^2}{\beta''}\right) = 0,$$

d. h. sie hat ihre Form, wie wir es vorhin sagten, nicht verändert. Hiermit ergiebt sich das neue Theorem:

Jede partikuläre Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\Phi\left(y + \frac{1 + y'^2}{y''},\ x - y'\frac{1 + y'^2}{y''},\ y'\right) = 0$$

läßt sich dergestalt verallgemeinern, daß eine willkürliche Constante hineinkommt; diese Constante ist nämlich der Parameter aller derjenigen Curven, welche mit den zu der partikulären Lösung gehörigen

Curven parallel sind, und die Gleichung dieser Parallelcurven ist die Verallgemeinerung der betrachteten partikulären Lösung.

Das nämliche und aus den nämlichen Gründen kann man übrigens auch von der noch etwas allgemeinern Differentialgleichung

$$\Phi\left(y+\frac{1+y'^2}{y''},\ x-y'\frac{1+y'^2}{y''},\ yy'+x,\ y'\right)=0$$

aussagen; alle derartigen Gleichungen sind integrabel, wenn man irgend eine partikuläre Lösung mit einer willkürlichen Constanten erhalten kann und diese nicht etwa selber den oben erwähnten Parameter des Parallelismus darstellt.

Es mögen noch ein Paar allgemeinere Theoreme folgen, welche ohne gerade zu unserer Entwickelung zu gehören, dennoch die Theorie der parallelen Curven vervollständigen. Aus den Gleichungen (20) ergiebt sich

$$(25)\qquad y=\beta-\varrho\frac{d\alpha}{\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2}},\quad x=\alpha+\varrho\frac{d\beta}{\sqrt{d\alpha^2+d\beta^2}},$$

und diese Gleichungen geben die Coordinaten y, x ausgedrückt als Funktionen der Coordinaten β, α eines homologen Punktes der Leitcurve. Differentiiren wir diese Gleichungen und bezeichnen den Krümmungshalbmesser der Leitcurve mit r und den der parallelen Curve mit R, so erhält man durch Zuziehung der bekannten Formeln:

$$r=\frac{\left(1+\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}},$$

$$R=\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

die Differentialgleichungen

$$(26)\qquad \begin{cases} dy=d\beta\left(1+\frac{\varrho}{r}\right)\\ dx=d\alpha\left(1+\frac{\varrho}{R}\right)\end{cases}$$

und

$$(27)\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)}{d\alpha}\,\frac{d\alpha}{dx}=\frac{\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}}{1+\frac{\varrho}{r}}.$$

Setzt man jetzt diesen Werth für $\frac{d^2y}{dx^2}$, so wie für $\frac{dy}{dx}$ seinen Werth $\frac{d\beta}{d\alpha}$ in den Ausdruck für R ein und vergleicht den so resultirenden Werth mit dem von r: so ergiebt sich endlich die bemerkenswerthe Relation

$$(28)\quad R=r+\varrho.$$

Mithin ist die Differenz der Krümmungshalbmesser zweier homologen Punkte immer dem Abstande der beiden parallelen Curven gleich, und da die Krümmungsmittelpunkte zu gleicher Zeit auf der beiden entsprechenden Punkten gemeinschaftlichen Normale enthalten sind, so folgt das bekannte Theorem:

Parallele Curven haben für entsprechende Punkte denselben Krümmungsmittelpunkt und mithin ist auch ihre Evolute unabhängig von dem Parameter ϱ, d. h. sie ist allen parallelen Curven gemeinschaftlich.

Man kann dies letztere Resultat auch noch in anderer Weise verificiren. Zu dem Zwecke bemerken wir, daß die zweckmäßigste Form für die Gleichung paralleler Curven diejenige ist, in welcher die Coordinaten y, x als Funktionen des Differentialverhältnisses

$$\frac{dy}{dx}=y'=\operatorname{tg}\varphi$$

sich darstellen und daß es angemessen ist auch die Coordinaten der Leitcurve durch dieselbe Hülfsgröße auszudrücken. Möge also die letztere dargestellt werden durch das System der beiden Gleichungen

$$(29)\quad \beta=F(\varphi),\ \alpha=f(\varphi);$$

alsdann sind zu Folge der Gleichungen (20) und der Relationen

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{d\beta^2+d\alpha^2}}=\cos\varphi,\quad \frac{d\beta}{\sqrt{d\beta^2+d\alpha^2}}=\sin\varphi$$

die Gleichungen der parallelen Curve

$$(30)\quad \begin{cases} y+\varrho\cos\varphi=F(\varphi)\\ x-\varrho\sin\varphi=f(\varphi)\end{cases}$$

und es folgt die allgemeine Regel:

Wenn die Coordinaten y, x irgend einer Curve als Funktionen ihres Differentialverhältnisses gegeben sind, so bekommt man die Gleichung

der parallelen Curven, wenn man für y und x die Substitutionen $y + \varrho \cos\varphi$ und $x - \varrho \sin\varphi$ oder auch $y - \varrho \cos\varphi$ und $x + \varrho \sin\varphi$ einführt.

Dieses vorausgesetzt bemerken wir, daß die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes, nämlich

$$y + \frac{1+y'^2}{y''},\quad x - y'\frac{1+y'^2}{y''},$$

wie wir wissen, ungeändert bleiben, wenn man an Stelle von y, x die Ausdrücke $y + \varrho\cos\varphi$, $x - \varrho\sin\varphi$ treten läßt. Dies heißt nun aber nichts anderes, als die Werthe dieser Coordinaten bleiben unverändert, wenn man an Stelle eines beliebigen Punktes (y, x) der Leitcurve den entsprechenden Punkt einer Parallelcurve treten läßt; mithin sind dieselben unabhängig von ϱ oder mit anderen Worten die Evolute ist für alle Parallelcurven dieselbe.

Weiter ist $\frac{dy}{dx} = \frac{d\beta}{d\alpha}$, also, wenn wir die zwischen entsprechenden Punkten liegenden Bogenstücke mit s und σ bezeichnen:

$$\frac{ds}{dx} = \frac{d\sigma}{d\alpha},\quad ds = d\sigma\frac{dx}{d\alpha},$$

oder, wenn wir für $\frac{dx}{d\alpha}$ seinen Werth aus (26) einsetzen,

$$ds = d\sigma\left(1 + \frac{\varrho}{r}\right) = d\sigma + \varrho\frac{d\sigma}{r}.$$

Nun ist bekanntlich $\frac{d\sigma}{r}$ der Ausdruck für den Contingenzwinkel einer Curve, d. h. für den Winkel, den zwei benachbarte Tangenten mit einander einschließen. Dieser Winkel ist in Consequenz der eingeführten Bezeichnung $d\varphi$ und es folgt daher jetzt

$$ds = d\sigma + \varrho d\varphi,$$

also durch Integration

$$(31)\quad s - \sigma = \varrho\varphi + \text{Const.}$$

oder in Worten das Theorem:

Der Unterschied zweier correspondirender Bogenstücke ist bis auf eine Constante dem correspondirenden Bogen des Kreises (19) gleich, welcher mit der Distanz der beiden Parallelcurven um den Anfangspunkt beschrieben ist.

---

§. 3.

Theorie der Evolventen.

Betrachten wir jetzt das zweite singuläre Integral (8) der Differentialgleichung (5): so ist aus der allgemeinen Theorie der singulären Integrale klar, daß man das allgemein in den Gleichungen (7) enthaltene Integral mit ihm identificiren kann, sobald man sich die Constanten β, α in angemessener Weise als Funktionen von y, x bestimmt denkt. Unter dieser Voraussetzung können wir die Gleichungen (4) geradezu in die Gleichungen (8) einsetzen: dieselben gehen dadurch über in

$$\Phi(\beta, \alpha = 0, \quad \frac{d\Phi(\beta, \alpha)}{d\beta} - y' \frac{d\Phi(\beta, \alpha)}{d\alpha} = 0$$

und aus diesen beiden Gleichungen kann man die Größen β, α als Funktionen der y' und mithin die gesuchte Bestimmung derselben als Funktionen von y, x erhalten. Differentiiren wir die erste dieser Gleichungen, so folgt

$$\frac{d\Phi(\beta, \alpha)}{d\beta} \frac{d\beta}{d\alpha} + \frac{d\Phi(\beta, \alpha)}{d\alpha} = 0$$

und diese Differentialgleichung zusammengehalten mit der zweiten führt sogleich auf die Relation

$$(32) \qquad \frac{d\beta}{d\alpha} y' + 1 = 0 \text{ oder } \frac{d\beta}{d\alpha} \frac{dy}{dx} + 1 = 0.$$

Indem ferner aus den Gleichungen (7) durch Elimination von y'' sich ergiebt

$$(y - \beta) y' + (x - \alpha) = 0,$$

sind wir jetzt berechtigt das Gleichungssystem (8) zu identificiren mit den folgenden:

$$(33) \quad \Phi(\beta, \alpha) = 0, \quad \frac{d\beta}{d\alpha} y' + 1 = 0, \quad (y - \beta) y' + (x - \alpha) = 0.$$

Aus diesen Gleichungen können wir β und α aliminiren und erhalten dadurch eine Differentialgleichung von der ersten Ordnung und von der Form:

$$(9) \quad F(yy' + x, y') = 0,$$

in Uebereinstimmung mit der Aussage des §. 1. Das allgemeine Integral dieser Gleichung stellt die endliche Gleichung des gesuchten singulären Integrales zwischen den Coordinaten y und x dar.

Aus der Form der Differentialgleichung (9) erhellt nach dem Obigen, daß ihre Integralgleichung ein System unter einander paralleler Curven ausdrückt und bezeichnen wir die Constante der Integration mit ϱ, so können wir uns diese Integralgleichung durch ein Gleichungssystem von der Form der Gleichungen (30) ersetzt denken. Die Kreise (2), welche das allgemeine Integral der Differentialgleichung (5) bilden, müssen daher von diesem Systeme unter einander paralleler Curven eingehüllt werden und dies hat man sich näher so vorzustellen, daß es für jeden Werth der Constanten ϱ eine entsprechende Reihe eingehüllter Kreise giebt, deren Einhüllende die diesem speciellen ϱ entsprechende Integralcurve ist. Nehmen wir aus dieser Reihe von Kreisen einen speciellen heraus, so wird sein Berührungspunkt mit der Einhüllenden ein specieller Punkt y, x sein und in diesem Punkte haben beide Curven eine gemeinschaftliche Tangente und eine gemeinschaftliche Normale. Die letztere geht durch den Mittelpunkt des Kreises, d. h. durch den speciellen Punkt (β, α) der Leitcurve und wir wollen diesen bestimmten Punkt der Leitcurve als dem bestimmten Punkte y, x entsprechend betrachten, in welchen die Einhüllende die betrachtete specielle eingehüllte Kreislinie berührt. Indem nun die Gleichung der in Rede stehenden Geraden, welche mit (3) identisch ist, zu Folge der Relation

$$-\frac{1}{y'} = \frac{d\beta}{d\alpha}$$

auch geschrieben werden kann, wie folgt:

$$(y-\beta) = \frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha):$$

erhellt unmittelbar, daß dieselbe zusammenfällt mit der Berührungslinie, welche die Leitcurve in dem entsprechenden Punkte (β, α) hat, mithin folgt der Satz:

Die Normalen der durch das singuläre Integral (8) umfaßten Curven sind Tangenten an der Leitcurve (1).

Bemerken wir ferner, daß, indem wir β und α als willkürliche Parameter der Kreisgleichung betrachten, für zwei entsprechende Punkte (y, x) und (β, α) die Gleichungen (3) und (4) zusammen bestehen: so folgt

$$(34) \quad \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}, \quad \alpha = x - y'\frac{1+y'^2}{y''}.$$

Diese Gleichungen drücken aber nichts anderes aus, als die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes der Curve y, x. Also ist der eingehüllte Kreis geradezu mit dem Krümmungskreis der Curve y, x identisch und die Leitcurve β, α ist die Evolute dieser letzteren, mithin umgekehrt die einhüllende Curve y, x die Evolvente der Leitcurve β, α. Alle Evolventen einer und derselben Curve sind also einander parallel und dies ist in vollständiger Uebereinstimmung mit dem Satze, den wir schon früher auf unabhängigem Wege hergeleitet haben, daß alle parallelen Curven eine und dieselbe Evolute haben.

Um hiernach den geometrischen Charakter der Integralgleichung, welche zu der Differentialgleichung (9) gehört, festzustellen, hat man blos nöthig die Gleichung der Evoluten aufzustellen, welche sich auf die durch die genannte Gleichung dargestellte Reihe von Parallelcurven bezieht. Zu dem Zwecke bemerke man, daß die Gleichung (9) zusammen bestehen muß mit der Gleichung, welche durch ihre nochmalige Differentation nach x entspringt, und daß man dem gemäß, wenn die Gleichung (9) ihrer Zusammensetzung nach gegeben ist, das System folgender beiden Gleichungen hat:

$$(35)\quad \begin{cases} F(yy' + x\,,\, y') = 0, \\ \dfrac{dF(yy' + x\,,\, y')}{d(yy'' + x)}(yy'' + y'^2 + 1) + \dfrac{dF(yy' + x\,,\, y')}{dy'}\, y'' = 0. \end{cases}$$

Mit diesen Gleichungen bestehen zusammen die Gleichungen (32) und (34), und es kommt so ein System von 5 Gleichungen zu Stande, aus denen man durch Elimination von y, x, y', y'' eine Gleichung der gesuchten Evoluten zwischen β und α in endlicher Form erhalten kann.

Um diese Elimination, so weit es im Allgemeinen angeht, auszuführen, leite man sich aus (32) und (34) her:

$$yy'' + y'^2 + 1 = \beta y'',$$
$$y' = -\frac{d\alpha}{d\beta}\,,\quad yy' + x = \alpha - \beta\frac{d\alpha}{d\beta}.$$

Setzen wir diese Werthe in das System der Gleichungen (25) ein, so kann man aus der zweiten den Faktor y'' herausdividiren und es kommen so die beiden Gleichungen:

$$(36)\quad \begin{cases} F\left(\alpha - \beta\dfrac{d\alpha}{d\beta}\,,\, -\dfrac{d\alpha}{d\beta}\right) = 0, \\ \dfrac{dF\left(\alpha - \beta\dfrac{d\alpha}{d\beta}\,,\, -\dfrac{d\alpha}{d\beta}\right)}{d\left(\alpha - \beta\dfrac{d\alpha}{d\beta}\right)}\beta + \dfrac{dF\left(\alpha - \beta\dfrac{d\alpha}{d\beta}\,,\, -\dfrac{d\alpha}{d\beta}\right)}{d\left(-\dfrac{d\alpha}{d\beta}\right)} = 0, \end{cases}$$

aus denen man durch Elimination des Differentialverhältnisses $\frac{d\alpha}{d\beta}$ die Gleichung der Evoluten in der gewünschten endlichen Form zwischen β, α bekommt. Als das Resultat unserer Untersuchung können wir jetzt folgendes Theorem aussprechen:

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$F(yy' + x\,,\, y') = 0$$

umfaßt alle diejenigen unter einander parallelen Curven, deren gemeinschaftliche Evolute dargestellt wird durch das System der beiden Gleichungen:

$$F\left(\alpha - \beta\frac{d\alpha}{d\beta}\,,\, -\frac{d\alpha}{d\beta}\right) = 0,$$

$$\frac{dF\left(\alpha - \beta\frac{d\alpha}{d\beta}\,,\, -\frac{d\alpha}{d\beta}\right)}{d\left(\alpha - \beta\frac{d\alpha}{d\beta}\right)}\beta + \frac{dF\left(\alpha - \beta\frac{d\alpha}{d\beta}\,,\, -\frac{d\alpha}{d\beta}\right)}{d\left(-\frac{d\alpha}{d\beta}\right)} = 0.$$

Die zweite der Gleichungen (36) ist offenbar das Resultat der Differentation der ersten, wenn man darin $\frac{d\alpha}{d\beta}$ als einen constanten Parameter ansieht und nun in Bezug auf diesen differentiirt. Daher stellt das System der Gleichungen (36) die Einhüllende aller sich auf diesen constanten Parameter beziehenden Curven vor, welche dnrch die erste der Gleichungen (36) ausgedrückt werden. Um eine nähere Bestimmung dieser Einhüllenden zu erhalten, differentiiren wir die letztgenannte Gleichung, indem wir für den Augenblick $\frac{d\alpha}{d\beta}$ als gleichfalls variabel ansehen. Dies giebt

$$\left\{\frac{dF\left(\alpha - \beta\frac{d\alpha}{d\beta}\,,\, -\frac{d\alpha}{d\beta}\right)}{d\left(\alpha - \beta\frac{d\alpha}{d\beta}\right)}\beta + \frac{dF\left(\alpha - \beta\frac{d\alpha}{d\beta}\,,\, -\frac{d\alpha}{d\beta}\right)}{d\left(-\frac{d\alpha}{d\beta}\right)}\right\} d\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right) = 0.$$

Mithin wird das allgemeine Integral der ersten Gleichung (36), dieselbe als Differentialgleichung zwischen β, α, $d\alpha$, $d\beta$ anzusehen, dadurch erhalten, daß man in ihr $\frac{d\alpha}{d\beta}$ als constant ansieht, und es drückt demgemäß eine Reihe gerader Linien aus. Die Einhüllende dieser Geraden fällt mit der durch die beiden Gleichungen (36) ausgedrückten Curve offenbar zusammen: denn diese beiden Gleichungen stellen ersichtlich das singuläre Integral der Differentialgleichung

$$F\left(\alpha - \beta\frac{d\alpha}{d\beta}\,,\, -\frac{d\alpha}{d\beta}\right) = 0$$

dar. Dies alles zusammengefaßt gestattet das vorhergehende Theorem folgende elegante Aussprache:

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$F(yy' + x\,,\, y') = 0$$

umfaßt alle diejenigen unter einander parallelen Curven, deren gemeinschaftliche Evolute durch das singuläre Integral der Differentialgleichung

$$F\left(\alpha - \frac{\beta}{\beta'}\,,\, -\frac{1}{\beta'}\right) = 0$$

ihre Bestimmung erhält;

oder noch anders ausgedrückt:

Diejenige Curve, welche alle durch die Differentialgleichung

$$F\left(\alpha - \frac{\beta}{\beta'}\,,\, -\frac{1}{\beta'}\right) = 0$$

dargestellten Geraden einhüllt oder berührt, ist die gemeinschaftliche Evolute zu allen den unter einander parallelen Curven, welche durch das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$F(yy'' + x\,,\, y') = 0$$

ausgedrückt werden.

Schließlich wollen wir noch auseinander setzen, wie man am einfachsten zu der Gleichung der Evolventen in endlicher Form zwischen y und x gelange. Zu dem Zwecke ist es gut die Coordinaten der Leitcurve (1), welche als Evolute zu betrachten ist, als Funktionen ihres Differentialverhältnisses zu entwickeln. Sei also

$$(37)\quad \beta = F\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right),\quad \alpha = f\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right),$$

so hat man

$$\frac{d\beta}{d\alpha}y' + 1 = 0,\ \text{also}\ \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{y'}$$

und demzufolge

$$\beta = F\left(-\frac{1}{y'}\right),\quad \alpha = f\left(-\frac{1}{y'}\right);$$

ferner ist wegen der letzten unter den Gleichungen (33)

$$yy' + x = \beta y' + \alpha,$$

und mithin, wenn man für β und α ihre Werthe setzt:

$$(38)\quad yy' + x = y'F\left(-\frac{1}{y'}\right) + f\left(-\frac{1}{y'}\right).$$

Um diese Gleichung zu integriren, differentiire man sie nach x, so wird, wenn man bemerkt, daß

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\, y'$$

ist und der Kürze halber

$$(39)\quad \Psi(y') = \frac{d\left\{y'F\left(-\frac{1}{y'}\right) + f\left(-\frac{1}{y'}\right)\right\}}{dy'}$$

$$= F\left(-\frac{1}{y'}\right) + \frac{1}{y'}\,\frac{dF\left(-\frac{1}{y'}\right)}{d\left(-\frac{1}{y'}\right)} + \frac{1}{y'^2}\,\frac{df\left(-\frac{1}{y'}\right)}{d\left(-\frac{1}{y'}\right)}$$

setzt, die resultirende Gleichung sich unter die folgende Form stellen:

$$\left\{y - \Psi(y')\right\} y'dy' + (1 + y'^2)\, dy = 0.$$

Diese Gleichung wird integrabel, wenn man sie mit $\sqrt{1 + y'^2}$ dividirt, alsdann erhält man

$$\frac{yy'dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} + \sqrt{1 + y'^2}\, dy = \Psi(y')\,\frac{y'dy'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

und hieraus, da die linke Seite ein vollständiges Differential ist:

$$(40)\quad y\sqrt{1 + y'^2} = \int \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\,\Psi(y')\, dy'.$$

Vermittelst dieser Gleichung ist y als Funktion von y' ausgedrückt, und setzt man diesen Werth für y in (38) ein, so erhält man auch x als Funktion von y'. Das Problem kann also als vollständig gelöst angesehen werden, indem es nur noch, vorausgesetzt daß die angezeigte Integration in geschlossener Weise ausführbar ist, einer algebraischen Operation bedarf, um eine Gleichung zwischen y und x allein zu erhalten. Dies wird nämlich durch die Elimination von y' aus den beiden Gleichungen geleistet, welche die Bestimmung von y und x als Funktionen dieser Größe enthalten. Wenn man die Einführung der Hülfsfunktion Ψ vermeiden will, so kann man an Stelle der drei Gleichungen (38), (39) und (40) auch die folgenden beiden treten lassen, wie ohne Schwierigkeit durch partielle Integration der Gleichung (40) sich ergiebt:

$$(41)\quad y\sqrt{1+y'^2} = y'\,\frac{y'F\left(-\frac{1}{y'}\right) + f\left(-\frac{1}{y'}\right)}{\sqrt{1+y'^2}} - \int \frac{y'F\left(-\frac{1}{y'}\right) + f\left(-\frac{1}{y'}\right)}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}\, dy'.$$

$$(38)\quad yy' + x = y'F\left(-\frac{1}{y'}\right) + f\left(-\frac{1}{y'}\right).$$

Das Gesammtresultat der vorhergehenden Erörterungen fassen wir jetzt in dem folgenden Theorem zusammen:

Die Differentialgleichung

$$(5)\quad \Phi\left(y + \frac{1 + y'^2}{y''},\ x - y'\frac{1 + y'^2}{y''}\right) = 0$$

hat zu ihrem allgemeinen Integrale die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf einer durch die Gleichung

$$(1)\quad \Phi(\beta,\ \alpha) = 0$$

gegebenen Leitcurve fortrückt, und außerdem zwei singuläre Integrale, jedes mit einer willkürlichen Constanten. Diese singulären Integrale drücken zwei Systeme paralleler Curven aus, von denen das eine der Leitcurve, das andere deren Evolventen parallel ist.

Schulnachrichten über das Königliche Pädagogium
von Michaelis 1855 bis Michaelis 1856.

I. Lehrverfassung.

In der Lehrverfassung der Anstalt sind in Folge des Circular-Rescripts des Königlichen Ministerii der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten von 7. Januar d. J., betreffend die als angemessen erschienenen Modificationen des in der Circular-Verfügung vom 24. October 1837 aufgestellten Normalplans für den Gymnasialunterricht, manche nicht unerhebliche Veränderungen seit Ostern d. J. eingetreten. Es sind seitdem weggefallen in Prima die philosophische Propädeutik; in Tertia und Quarta der Unterricht in der Naturgeschichte; in Quarta der Schreibunterricht; in Sexta das Französische. Modificirt wurde nach der in den resp. Classen dafür festgesetzten Stundenzahl der Unterricht in der Geschichte und Geographie, der Religion, im Deutschen und Französischen.

Hiernach gestaltete sich der Unterricht folgendermaßen:

Lehrgegenstände	I	II a	II b	III	IV	V	VI	Summa
Religion	2	2	2	2	2	3	3	16
Deutsch	3	2	2	2	2	2	2	15
Lateinisch	8	10	10	10	10	10	10	68
Griechisch	6	6	6	6	6	—	—	30
Französisch	2	2	2	2	2	3	—	11
Geschichte und Geographie .	3	3	3	4	3	2	2	17
Mathematik und Rechnen .	4	4	4	4	3	3	4	26
Physik	2	1	1	—	—	—	—	3
Naturgeschichte	—	—	—	—	—	2	2	2
Zeichnen	—	—	—	—	2	2	2	4
Schreiben	—	—	—	—	—	3	3	3
	30	30	30	30	30	30	28	189

Dazu kommt der Unterricht im Hebräischen und im Gesang in je 2 Classen und 2 wöchentlichen Stunden, und im Turnen, der in 2 allgemeinen Stunden und 1 besondern für die Vorturner ertheilt wird.

Im Einzelnen wurde der Unterricht in folgender Weise ertheilt:

Prima.

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Voigt.

Lateinisch. Taciti Germania, dialogus de oratoribus, Ciceron. Laelius; Horat. carm. I, 26—38, II. III. Aufsätze, Scripta, Extemporalia und Disputirübungen; Memoriren horazischer Oden und eines Theils von Cic. de officiis. Die Privatlectüre umfaßte Horatius, Cic. Epp. ad Famil., Tusc., Laelius, de natura deorum, de finibus. 8 St. Dr. Voigt.

Griechisch. Demosth. orr. Olynth. I. II. III., de pace Philipp. II.; Homeri Ilias XIX—XXII. Sophoclis Ajax. Scripta und Extemporalia. Privatlectüre: Homeri Ilias. 6 St. Der Director.

Deutsch. Aufsätze und Disputirübungen. Geschichte der Literatur der neuern Zeit von der Reformation bis Herder. 2 St. im W. 3 St. im S. Professor Daniel.

Französisch. Montesquieu, considérations sur la grandeur etc. Grammatik und Scripta nach Plötz Elementarbuch. II. Cursus. Mündliche Uebungen. 2 St. Der Director.

Hebräisch. Es wurden verschiedene Abschnitte aus der Genesis und dem Exodus cursorisch gelesen; außerdem Psalm 45. 78. 65. 50. 19. 8. 104. Repetition der Elemente, Beendigung der Formenlehre, Syntax; Auswendiglernen von Psalmen und mündliche Retroversionen. 2 St. Coll. Reifenrath.

Religion. Lesung und Erklärung des Evangelium St. Johannis und des Briefs an die Römer nach dem Grundtext. Memoriren von Kirchenliedern. 2 St. Prof. Daniel.

Geschichte. Vom Westphälischen Frieden bis zum zweiten Pariser Frieden. 2 St. Prof. Daniel.

Mathematik. Im Winter: Stereometrie. Im Sommer: Repetitorischer Cursus der Planimetrie und Algebra. Stereometrische Uebungen. Combinationslehre. Dr. Schwarz.

Physik. Im Winter: Electricität und Galvanismus. Im Sommer: Physicalische Geographie. 2 St. Dr. Schwarz.

Philos. Propädeutik. Im Winter: Elemente der Psychologie und der Logik. 1 St. Prof. Daniel.

Secunda superior.

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Dryander.

Lateinisch. Livius XXII, 38 — XXIII med., Cic. pro Milone. Virgil. Aeneis VI u. IX. Privatlectüre: Livius VII, 28 — VIII extr., Cic. pro Murena. Virgil. Aen. VII. Scripta und Extemporalia. Metrische Uebungen. 10 St. Dr. Dryander.

Griechisch. Lysiae orr. sell., Homeri Ilias III. IV. X. Scripta und Extemporalia. Privatlectüre: Homeri Odyss. XXI — XXIV. XV — XIX. 6 St. Dr. Dryander.

Deutsch. Die lyrische Poësie (im W.), die epische Poësie (im S.). Aufsätze, freie Vorträge, Disputationen. 2 St. Prof. Daniel.

Französisch. Charles XII. par Voltaire. Grammatik und Scripta nach Plötz Elementarbuch. II. Curs. Mündliche Uebungen. 2 St. Der Director.

Hebräisch. Cursus der Elementar-Grammatik, Vocabellernen, Leseübungen; Uebersetzung nach Gesenius Lesebuch; schriftliche Uebungen. 2 St. Coll. Reifenrath.

Religion. Kirchengeschichte bis zu dem Zeitalter Spener's und Francke's. Memoriren von Sprüchen und Kirchenliedern. 2 St. Coll. Reifenrath.

Geschichte. Im Winter: Allgemeine Geschichte von Augustus bis Carl dem Großen. Im Sommer: Alte Geschichte der orientalischen Völker. 2 St. Coll. Nagel.

Mathematik. Im Winter: Logarithmen, Progressionen, Zins auf Zinsrechnung. Geometrische Uebungen. Im Sommer: Aehnlichkeit, Proportionen am Kreise, Kreismessung. Algebraische Uebungen. 4 St. Dr. Schwarz.

Physik. Im Winter: Statik der festen Körper. Im Sommer: Pendelgesetze und tropfbare Flüssigkeiten. 1 St. Dr. Schwarz.

Secunda inferior.

Ordinarius: Dr. Garcke.

Lateinisch. Cic. orr. in Catilinam I. II. und pro imp. Cn. Pompeji, daneben privatim: in Catil. III. IV., pro Archia, Caes. de bello Gall. VI. VII. —

Virgilii Aen. I. II. Vollständiger Cursus der Syntax nach Zumpt's Grammatik; Scripta und Extemporalia. Metrische Uebungen. 10 St. Dr. Garcke.

Griechisch. Xenoph. Anabasis IV. Homeri Odyssea XI. und VI., daneben privatim: XII. I. II. V. Homerische Formenlehre; Einübung der Casuslehre nach Krüger's Grammatik für Anf.; Wiederholung der unregelmäßigen Verba, Scripta und Extemporalia. 6 St. Dr. Garcke.

Deutsch. Lesung und Besprechung ausgewählter Dichtungen; Declamirübungen und freie Vorträge; Aufsätze. 2 St. Collegienrath v. Thrämer (im W.), Dr. Garcke (im S.).

Französisch.
Hebräisch. } Mit Sec. sup. verbunden.
Geschichte.

Religion. Im Winter: Das apostolische Zeitalter nach der Apostelgeschichte und den apostolischen Briefen. Im Sommer: Das Leben Jesu nach den 4 Evangelien. Memoriren von Sprüchen und Kirchenliedern. 2 St. Coll. Reifenrath.

Mathematik. Im Winter: Potenzlehre, Gleichungen des ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten; planimetrische Aufgaben. Im Sommer: Geometrie: Gleichheit und Aehnlichkeit. Arithmetische Uebungen. 4 St. Dr. Schwarz.

Physik. Mit Sec. sup. verbunden.

Tertia.

Ordinarius: Coll. Nagel.

Lateinisch. Caesar de bello Gall. V, 38 — VII, 34. Ovid. Metam. ausgewählte Stücke aus lib. VI u. VII. Elemente der Prosodie und metrische Uebungen. Die wichtigsten Regeln über den Gebrauch der temp. und modi; Wiederholung der Casuslehre. Scripta und Extemporalia. 9 St. (im W.), 10 St. (im S.) Coll. Nagel.

Griechisch. Xenoph. Anab. II. III. Die unregelmäßigen Verba. 6 St. Coll. Nagel. Coet. B. Xenoph. Anab. I. Die Verba auf $\mu\iota$ nebst Repetition des regelmäßigen Verbum. 6 St. Cand. Hofmeister.

Deutsch. Lesung und Erklärung von Gedichten, Anleitung zu Dispositionen, Aufsätze und metrische Uebungen. 2 St. Coll. Reifenrath.

Französisch. Charles XII. par Voltaire; die unregelmäßigen Verba nach Plötz Elementarbuch II. Curs.; Scripta und Extemporalia. Mündliche Uebungen. 2 St. Der Director.

Religion. Im Winter: das dritte, vierte und fünfte Hauptstück. Lesung des Evangeliums Sct. Matthäi in Luther's Uebersetzung. Memoriren von Sprüchen und Kirchenliedern. 2 St. Prof. Daniel.

Geschichte. Im Winter: Römische Geschichte. Im Sommer: Deutsche Geschichte. 2 St. Coll. Nagel.

Geographie. Repetitorischer Cursus nach Daniel's größerem Lehrbuch: Grundbegriffe; Asien; Africa; America; allgemeine Uebersicht über Europa; Pirenäen- und Alpen-Halbinsel. 2 St. Prof. Daniel.

Mathematik. Coet. A.: Congruenz der Dreiecke. Die Lehre vom Parallelogramm, vom Kreise. Repetition der Buchstabenrechnung, Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten. 4 St. Dr. Schwarz. — Coet. B.: Die Elemente der Geometrie bis zur Congruenz der Dreiecke incl. Die Buchstabenrechnung und die Decimalbrüche. 4 St. Cand. Hofmeister.

Naturgeschichte. Im Winter: Zoologie. 1 St. Rend. Hößler.

Quarta.

Ordinarius: Coll. Reifenrath (im W.), Coll. Todt (im S.).

Lateinisch. Cornelius Nepos: Miltiades, Themistocles, Aristides, Agesilaus, Epaminondas, Lysander. Repetition der Formenlehre, Einübung der Casuslehre nach O. Schulz Grammatik und Aufgaben; Scripta und Extemporalia. Memoriren von Beispielen zu den Regeln und mehrerer Capitel aus Cornel. Nep. 10 St. (im W.) Coll. Reifenrath, 10 St. (im S.) Coll. Todt.

Griechisch. Die Formenlehre bis zum Verbum contr. (incl.). Gelesen wurden ausgewählte Stücke aus dem Elementarbuch von Schmidt und Wensch. 6 St. Coll. Todt.

Deutsch. Lesen nach Masius Lesebuch. Stillehre, Uebungen in der Orthographie und Interpunction, Aufsätze. 2 St. Coll. Reifenrath.

Französisch. Mündliche und schriftliche Uebungen nach Plötz Elementarbuch I. Curs., Lection 51 bis zum Schluß. 2 St. Dr. Dryander.

Religion. Im Winter: Das erste Hauptstück. 2 St. Im Sommer: Ausgewählte Abschnitte aus den 2 ersten Büchern Mosis wurden gelesen und erklärt. Memoriren von Sprüchen und Kirchenliedern. 2 St. Coll. Reifenrath.

Geographie. Europa nach Daniel's Lehrbuch. 2 St. (im W.), 3 St. (im S.) Dr. Voigt.

Arithmetik. Practisches Rechnen nach Fölsing's Rechenbuch 2. Thl. 3 St. Rend. Hößler.

Naturgeschichte. Im Winter: Zoologie. 2 St. Rend. Hößler.

Zeichnen. 2 St. Kupferstecher Voigt.

Schreiben. 1 St. (im W.) Rend. Hößler.

Quinta.

Ordinarius: Coll. Todt (im W.), Cand. Janke (im S.).

Lateinisch. Wiederholung des Pensum von Sexta. Einprägen der unregelmäßigen Verba. Elemente der Syntax nach O. Schulz Aufgaben I. Cursus. Scripta und Extemporalia. Uebersetzung und Erklärung ausgewähter Abschnitte von Schirlitz lat. Lesebuch. 10 St. Coll. Todt (im W.), Cand. Janke (im S.).

Deutsch. Uebungen im Lesen, Wiedererzählen und Declamiren; orthographische Dictate und Aufsätze. 3 St. Coll. Todt (im W.), 2 St. Cand. Hofmeister (im S.).

Französisch. Die regelmäßige Conjugation. Mündliche und schriftliche Uebungen nach Plötz Elementarbuch I. Cursus, Lection 33—50. 2 St. Dr. Garcke (im W.), 3 St. Coll. Todt (im S.).

Religion. Biblische Geschichte des Neuen Testaments nach Kohlrausch. Memoriren von Bibelsprüchen, Kirchenliedern und des Catechismus, im Sommer auch der Sonntagsevangelien der Trinitatiszeit. 2 St. Prof. Daniel (im W.), 3 St. Coll. Reifenrath (im S.).

Geographie. Asien, Africa, America und Australien nach Daniel's Leitfaden. 3 St. (im W.), 2 St. (im S.) Dr. Voigt.

Arithmetik. Regel de tri, Vertheilungs=Rechnung, Zinsrechnung nach Fölsing's Rechenbuch 2. Thl. 3 St. Rend. Hößler.

Naturgeschichte. Im Winter: Zoologie (Vierfüßler). Im Sommer: Botanik. 2 St. Rend. Hößler.

Zeichnen. 2 St. Kupferstecher Voigt.

Schreiben. 3 St. Rend. Hößler.

Sexta.

Ordinarius: Cand. Janke.

Lateinisch. Einübung der Formenlehre bis zum regelmäßigen Verbum (incl.) nach O. Schulz und Gercke Uebungsstücke; Scripta und Extemporalia. 10 St. Cand. Janke.

Deutsch. Uebungen im Lesen, Wiedererzählen und Declamiren; orthographische Dictate und Aufsätze. 2 St. Cand. Drosihn (im W.), Cand. Hofmeister (im S.).

Französisch. Einübung der Elemente nach Plötz Elementarbuch I. Curs. bis Lection 32. 2 St. (im W.) Coll. Todt.

Religion. Biblische Geschichte des Alten Testaments nach Kohlrausch. Memoriren von Sprüchen, Kirchenliedern, Psalmen und des Catechismus. 2 St. Cand. Drosihn (im W.), 3 St. Coll. Reifenrath (im S.).

Geographie. Die Grundlehren nach Daniel's Leitfaden. Allgemeine Uebersicht über die fünf Erdtheile. 3 St. Cand. Janke (im W.), 2 St. Dr. Voigt (im S.).

Naturgeschichte } Mit Quinta verbunden.
Zeichnen. }

Schreiben. 3 St. Rend. Hößler.

Für den Gesangunterricht sind sämmtliche daran theilnehmende Schüler in zwei Classen getheilt; er wird in 2 St. für jede ertheilt vom Musikdirector Greger. Den Turnunterricht leitet in 3 St. Dr. Voigt.

Vertheilung der Lehrfächer unter die Lehrer.

<table>
<tr><th></th><th>I</th><th>IIa</th><th>IIb</th><th>III</th><th>IV</th><th>V</th><th>VI</th><th>Summa</th></tr>
<tr><td>Dr. Kramer, Director</td><td>6 Griechisch
2 Französisch</td><td colspan="2">2 Französisch</td><td>2 Französisch</td><td></td><td></td><td></td><td>12</td></tr>
<tr><td>Dr. Daniel, Professor,
Inspector adjunct.</td><td>2 Religion
3 Deutsch
3 Geschichte</td><td>2 Deutsch</td><td></td><td>2 Religion
2 Geographie</td><td></td><td></td><td></td><td>14</td></tr>
<tr><td>Dr. Voigt, Oberlehrer,
Ordinarius von I</td><td>8 Latein</td><td></td><td></td><td></td><td>3 Geographie</td><td>2 Geographie</td><td>2 Geographie</td><td>15</td></tr>
<tr><td>Dr. Dryander, Oberlehrer, Ordinarius von IIa</td><td></td><td>10 Latein
6 Griechisch</td><td></td><td></td><td>2 Französisch</td><td></td><td></td><td>18</td></tr>
<tr><td>Dr. Garcke, College,
Ordinarius von IIb</td><td></td><td></td><td>10 Latein
6 Griechisch
2 Deutsch</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>18</td></tr>
<tr><td>Nagel, College,
Ordinarius von III</td><td></td><td colspan="2">3 Geschichte</td><td>10 Latein
6 Griechisch
2 Geschichte</td><td></td><td></td><td></td><td>21</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Dr. Schwarz, College,
Mathematikus</td><td rowspan="2">4 Mathematik
2 Physik</td><td>4 Mathematik</td><td>4 Mathematik</td><td rowspan="2">4 Mathematik
(Coet. A)</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">19</td></tr>
<tr><td colspan="2">1 Physik</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Reifenrath, College</td><td rowspan="2">2 Hebräisch</td><td>2 Religion</td><td>2 Religion</td><td rowspan="2">2 Deutsch</td><td rowspan="2">2 Religion
2 Deutsch</td><td rowspan="2">3 Religion</td><td rowspan="2">3 Religion</td><td rowspan="2">20</td></tr>
<tr><td colspan="2">2 Hebräisch</td></tr>
<tr><td>Todt, College,
Ordinarius von IV</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>10 Latein
6 Griechisch</td><td>3 Französisch</td><td></td><td>19</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Hößler, Rendant</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">3 Rechnen</td><td>3 Rechnen
3 Schreiben</td><td>4 Rechnen
3 Schreiben</td><td rowspan="2">18</td></tr>
<tr><td colspan="2">2 Naturgeschichte</td></tr>
<tr><td>Janke, Hülfslehrer,
Ordinarius von V u. VI</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>10 Latein</td><td>10 Latein</td><td>20</td></tr>
<tr><td>Hofmeister, Hülfslehrer</td><td></td><td></td><td></td><td>6 Griech. } Coet.
4 Math. } B</td><td></td><td>2 Deutsch</td><td>2 Deutsch</td><td>14</td></tr>
<tr><td>Voigt, Zeichnenlehrer</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>2 Zeichnen</td><td colspan="2">2 Zeichnen</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Greger, Gesanglehrer</td><td colspan="4">2 Gesang</td><td colspan="3">2 Gesang</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Summa</td><td>216</td></tr>
</table>

II. Verordnungen der vorgesetzten Behörden.

Unter den Verordnungen der vorgesetzten hohen Behörden, welche in diesem Jahre erlassen worden sind, haben vor Allen zwei Ministerialrescripte eine hervorragende Wichtigkeit:

1. Die Circularverfügung vom 7. Januar d. J., wodurch die oben näher angedeuteten Modificationen des in der Circularverfügung vom 24. October 1837 aufgestellten Normalplans festgesetzt sind. Zugleich wird dringend darauf hingewiesen, daß „das Bedürfniß größerer Concentration des gesammten Unterrichtsstoffes nur durch ein einmüthiges Zusammenwirken jedes Lehrer-Collegiums zu erreichen ist, wobei der Einzelne sich willig dem Zwecke des Ganzen unterordnet, kein Lehrobject sich isolirt, und in der Lehrweise, so wie in der Auffassung der Gegenstände, ohne Beeinträchtigung der persönlichen Eigenthümlichkeit des einzelnen Lehrers, eine principielle Uebereinstimmung herrscht." Weitere sehr beherzigenswerthe Fingerzeige, wie die Erfüllung dieser ohne Zweifel wichtigsten Aufgabe anzustreben ist, schließen sich daran an, und es ist zum Heil unserer Jugend nur zu wünschen, daß sie überall recht zur Verwirklichung kommen.

2. Die Circularverfügung vom 12. Januar d. J., welche unter Bezugnahme auf die Erläuterungen des Circularrescripts vom 24. October 1837 zu dem Abiturienten-Prüfungs-Reglement vom 4. Juni 1834 Ergänzungen und Abänderungen des letztern festsetzt. Es ist in derselben vor Allem darauf abgesehen, in der Abiturientenprüfung so viel als möglich Alles zu beseitigen, was dieselbe als einen gleichsam für sich bestehenden Act, für welchen besondere Anstrengungen zu machen seien, erscheinen lassen kann, und sie dagegen zu dem, was sie in der That sein soll, zu machen, nämlich zu dem *natürlichen* Abschluß der gesammten Schullaufbahn, in welchem die Resultate derselben in ihren Hauptmomenten zur Darlegung kommen. Sie ist deshalb bedeutend vereinfacht, und namentlich in der *mündlichen* Prüfung auf diejenigen Unterrichtsfächer beschränkt, welche den sichersten Anhalt darbieten, die Reife der Abiturienten für die Universitätsstudien zu beurtheilen, nämlich auf das *Lateinische*, *Griechische*, die *Mathematik*, *Geschichte* und *Religion*, wozu für die zukünftigen Theologen das *Hebräische* kommt. Es findet demnach keine mündliche Prüfung mehr statt in der *deutschen Sprache* und *Literatur*, in der *philosophischen Propädeutik*, im *Französischen*, in der *Naturbeschreibung* und *Physik*. In Bezug auf die schriftlichen Prüfungsarbeiten wird vor Allem darauf gedrungen, daß sie auf den einzelnen Gebieten in den rechten durch die Natur der Schule bedingten Gren-

zen gehalten werden, übrigens nur die einzige Aenderung getroffen, daß Behufs der Ermittlung der Sicherheit in der griechischen Formenlehre und Syntax statt der bisher üblichen Uebersetzung aus dem Griechischen ein kurzes und einfaches griechisches Scriptum trete. Ueberhaupt aber soll die Prüfung hauptsächlich darauf achten, ob die erforderlichen Kenntnisse ein sicherer, mit eignem Urtheil verbundner Besitz des Examinanden geworden, nicht eine nur zum Zweck der Prüfung in das Gedächtniß aufgenommene Sammlung vereinzelter Notizen sind. Ueberdies wird darauf hingewiesen, daß das eigentlich Entscheidende bei dem schließlichen Urtheil über Reife und Nichtreife der Schüler ihr Interesse am Unterricht, ihr Fleiß und ihre Leistungen, so wie ihr sittliches Verhalten während der Schulzeit sei, und es ist der Berücksichtigung der individuellen Begabung durch Gestattung der Compensation schwächerer Leistungen in der Mathematik durch vorzügliche philologische und umgekehrt so viel Spielraum gewährt, als es überhaupt möglich ist. Ein besonderes Gewicht endlich wird auf die Beibringung von Proben eingehender, von eignem wissenschaftlichen Triebe zeugender Privatstudien der Abiturienten gelegt. So sind alle Anordnungen dieser Verfügung auf die Weckung und Belebung eines wahrhaft fruchtbaren Fleißes der Schüler gerichtet.

In engem Zusammenhange mit diesen beiden Verfügungen steht

3. das Ministerialrescript vom 10. April d. J., betreffend die zweckmäßigsten Maaßregeln, um den Schülern die nicht selten vermißte copia vocabulorum, deren es zu einem leichten und sichern Verständniß der griechischen und lateinischen Autoren bedarf, anzueignen. Es wird außer vielfacher Repetition des einmal Erlernten vornämlich ein methodisches Vocabellernen in den untern Classen sehr empfohlen.

III. Chronik der Schule.

Die Eröffnung des Schuljahrs geschah am 9. October in gewohnter Weise durch den Unterzeichneten.

Die Feier des Geburtsfestes Sr. Majestät des Königs fand in Gemeinschaft mit der lat. Hauptschule in dem großen Versammlungssaale statt. Der Professor Dr. Daniel hielt die Festrede, in welcher er in sinniger Weise den Gedanken durchführte: „Wie schön und bedeutungsvoll die Sitte sei, gerade die Geburtstage der Könige als patriotische Jahresfeste zu begehen.“

Am 1. Januar d. J., dem Gedächtnißtage der 25jährigen Amtsthätigkeit des Hrn. Condirector Dr. Eckstein, brachte demselben eine Deputation des Lehrer-Collegiums, welchem er von Michaelis 1839 bis Ostern 1842 selbst angehört hatte, ihre herzlichen Glückwünsche dar, indem sie ihm eine zur Feier dieses Tages gedruckte Jubelschrift, „Ramlers erste Ode auf Friedrich den Großen," eine bisher unbekannte, in mehr als einer Beziehung interessante Jugendarbeit des berühmten Dichters überreichte.

Am 9. März wurde die feierliche Einsegnung der Hausscholaren Heinrich von Arnim und Ludolf von Kotze, so wie der beiden Scholaren Hermann Grafen von Arnim-Boitzenburg und Albert Kramer durch den Herrn Pastor Dr. Scheele in dem Betsaale der Anstalt vollzogen: die gemeinsame Communion der Lehrer und Scholaren, so wie der anwesenden Eltern und Verwandten der Eingesegneten schloß sich daran.

Am 14. März wurde das Wintersemester mit der Censur geschlossen. Das Sommersemester wurde am 1. April wie gewöhnlich mit der Aufnahme der Novizien begonnen. Am 29. August fand der Schluß desselben mit der Censur statt.

Vom 2.—4. Juni hatten wir die Freude den Hrn. Provinzial-Schulrath Dr. Wendt, welcher zum Nachfolger des am 16. September v. J. seiner segensreichen Wirksamkeit durch einen plötzlichen Tod entrissnen Hrn. Prov.-Schulraths Dr. Schaub kurz vorher ernannt worden war, unter uns zu sehen. Er war gekommen, um zunächst eine allgemeine Uebersicht über die zahlreichen Schulen der Stiftungen zu gewinnen. Auch unserer Anstalt widmete er einen Theil seiner Zeit. Wir wünschen herzlich, daß seine schon anderwärts in der hochwichtigen Stellung, die er einnimmt, so vielfach bewährte Wirksamkeit auch unter uns eine vom Herrn reichlich gesegnete sein möge, und werden unsrerseits Nichts verabsäumen, seinen nur auf das Heil unsrer Jugend gerichteten Absichten nach Kräften entgegenzukommen.

Im Lehrer-Collegium haben im verfloßnen Schuljahre keine wesentlichen Veränderungen stattgefunden. Am Schluß des v. J. gab der Collegienrath v. Thrämer, der den deutschen Unterricht in Unter-Secunda ertheilt hatte, diese Stunden auf, da er Halle verließ, um die Leitung einer Privatanstalt in Rogasen zu übernehmen. Der Cand. Drosihn, der zu Michaelis v. J. als Hülfslehrer eingetreten war, ging zu Ostern d. J. als Collaborator zur lat. Hauptschule über. Der Oberlehrer Dr. Voigt, welcher von den hohen vorgesetzten Behörden Urlaub zu einer wissenschaftlichen Reise nach England und Schottland erhalten hatte, war während des ersten Quartals des Schuljahrs abwesend. Seine Lehrstunden hatten während dieser Zeit mehrere Mitglieder des Collegiums freundlich übernommen.

Mit dem innigen Gefühle tiefer Dankbarkeit ist zu erwähnen, daß Seine Majestät der König mittels allerhöchsten Erlasses vom 14. Nov. v. J. zur Verbesserung der Lehrerbesoldungen einen Zuschuß von 600 Thlr. jährlich, zunächst auf 6 Jahre, aus Staatsfonds zu bewilligen allergnädigst geruht haben, und in Folge dessen die Besoldungen der ordentlichen Lehrer und des Schreib- und Rechenlehrers, abgesehen von der ihnen zustehenden freien Wohnung 2c., durch hohes Ministerial-Rescript vom 7. December v. J. auf 600, 550, 500, 450, 400, 350, 300, 300 und 200 Thaler normirt sind. Außerdem wurden an Gratificationen aus den Fonds der Schule 200 Thaler, und an außerordentlichen Unterstützungen aus Staatsfonds 40 Thaler gewährt.

Von den Scholaren verließen sechs nach abgelegter Maturitätsprüfung die Anstalt und zwar

A. zu Ostern:

1) der Stadtscholar Traugott Wilhelm Rudolph aus Süptitz bei Torgau, Sohn des Herrn Maurermeisters Rudolph zu Süptitz, 21½ Jahr alt, evangelischer Confession, war 6½ Jahr auf dem Königl. Pädagogium, 2 Jahr in Prima; er studirt Theologie;
2) der Hausscholar Ludwig Jacobs aus Fehrbellin, Sohn des Herrn Oberamtmann Jacobs zu Fehrbellin, 20½ Jahr alt, evangelischer Confession, war 7 Jahr auf dem Königl. Pädagogio, 2 Jahr in Prima, er studirt die Rechte.

B. zu Michaelis:

3) der Stadtscholar Carl Hermann Quinque aus Naumburg a./S., Sohn des Herrn Justizrath Quinque hierselbst, 19 Jahr alt, evangelisch-lutherischer Confession, 8½ Jahr auf dem Königl. Pädagogium, 2 Jahr in Prima; er will die Rechte studiren;
4) der Stadtscholar Heinrich Maximilian Florentin Oscar Papendick aus Erfurt, Sohn des verstorbenen Oberst a. D. Herrn Papendick, 17¾ Jahr alt, evangelischer Confession, 7½ Jahr auf dem Königl. Pädagogium, 2 Jahr in Prima; er will in die Königl. Armee eintreten;
5) der Hausscholar Hermann Röhrig aus Barmen, Sohn des verstorbenen Fabrikbesitzers Herrn Röhrig, 19¾ Jahr alt, evangelischer Confession,

$3\frac{1}{2}$ Jahr auf dem Königl. Pädagogium, 2 Jahr in Prima; er will die Rechte studiren;

6) der Stadtscholar Ernst August Theodor Thienemann aus Krößuln bei Weißenfels, Sohn das Herrn Pastor Thienemann zu Ober-Nessa bei Teuchern, 21 Jahr alt, evangelischer Confession, $\frac{1}{2}$ Jahr auf dem Königl. Pädagogium, 2 Jahr in Prima ($1\frac{1}{2}$ in Schulpforta); er will Theologie studiren.

Außerdem verließen die Anstalt im Laufe des Schuljahrs 16 Scholaren, und zwar aus

Prima: v. Engel (Forstacademie in Tharand), v. Hirschfeld (Militär), Neumke (lat. Hauptschule), Deleroi.

Ober-Secunda: v. Werthern (Militär).

Unter-Secunda: Axt (Buchhändler), v. Krosigk (Gymnasium zu Wittenberg), v. Oppel, v. Biela, v. Kalm (Militär).

Tertia: Trappe (Privatunterricht), v. Arnim (Bensberg).

Quarta: v. Biela, v. Bassewitz (Realschule), v. Eberstein.

Quinta: v. Cloudt (Gymnasium zu Erfurt).

Neu aufgenommen wurden 31 Scholaren, und im letzten Quartal besuchten die Anstalt 105 Scholaren, von denen 20 in Prima, 13 in Ober-Secunda, 17 in Unter-Secunda, 17 in Tertia, 18 in Quarta, 12 in Quinta, 8 in Sexta saßen. Unter dieser Zahl befanden sich 28 Hausscholaren.

IV. Sammlungen.

Der Lehrer-Bibliothek sind von dem hohen Ministerium der geistlichen rc. Angelegenheiten folgende werthvolle Geschenke zugegangen: von der Hagen Heldenbuch, 2 Theile; Ludw. Erk Liederhort; ferner zwei Kupferstiche, Kaulbach Christengruppe, gestochen von Waagen, und Rafael Madonna aus dem Hause Colonna, gestochen von Mandel. Ich verfehle nicht dafür den ergebensten Dank auszusprechen. Außerdem ist sowohl diese, als die oratorische Bibliothek, so wie auch das physikalische Cabinet durch die etatsmäßigen Ankäufe vermehrt worden.

Halle, im September 1856.

Dr. Kramer.

Anhang.

Deutsche und lateinische Themata aus dem Schuljahre Michaelis 1855 bis Michaelis 1856.

Prima. Deutsche Themata.

1) Man lebt nur einmal in der Welt: ein ebenso trefflicher als verwerflicher Ausspruch.
2) Verstand ohne Muth,
Zum Schmieden fehlt die Glut —
Muth ohne Verstand,
Zum Schmieden fehlt die Hand.
3) Der Adler fliegt allein,
Die Raben schaarenweise,
Gesellschaft braucht der Thor
Und Einsamkeit der Weise.
4) Ein böser Mensch ist wie eine Kohle; entweder er brennt oder er schwärzt.
5) Eitelkeit ist der Affe des Stolzes. (Hamann.)
6) Die beiden Maler in Emilie Galotti und Fiesco.
7) Tamms dreißigster Geburtstag.
8) Der Proceß in Krähwinkel. Imitation des Processes über „des Esels Schatten" in Wieland's Abderiten.
9) Jage nicht das flüchtige Reh des Weltgenusses,
Denn es wird ein Leu und wird den Jäger jagen.

Lateinische Themata.

1) Ciceroniana Catilinariae coniurationis enarratio ita cum Sallustiana comparetur ut appareat, quibus in rebus altera ab altera discedat.
2) Sp. Postumius, quod suasit suam et omnium captorum in furculis Caudinis deditionem, utrum laudandus an vituperandus esse videatur, sive iustitiam spectas, sive patriae amorem, sive prudentiam civilem (cf. Liv. IX, 1 sqq.).
3) Comparentur mores Germanorum, quos Tacitus descripsit, cum Romanis eiusdem aetatis.
4) Quo quasi vinculo Horatii carmina cum vita eius et fortuna coniuncta fuerint. (Abituri.)
5) De Caesaris expeditionibus Britannicis.
6) Fabiorum ad Cremeram clades cum Lacedaemoniorum in Thermopylis nece comparetur.
7) De bello Mutinensi.
8) De morte Ciceronis.
9) Quibus causis Spartanorum respublica pessumdata sit. (Abituri.)

Ober-Secunda. Deutsche Themata.

1) Das Mittelmaß ist gut, den Alten wie der Jugend,
Die Mittelmäßigkeit jedoch ist keine Tugend.
2) Die fünf vorzüglichsten Künste: Baukunst, Bildhauerkunst, Malerei, Tonkunst, Dichtkunst streiten um den Vorrang.
3) Magnet und Gedächtniß. Parallele.
4) Riesenart und Riesensitte. Nach griechischen und deutschen Volksepen.
5) Bittschrift an Herrn Lenz, seine Ankunft zu beschleunigen.
6) Die Personen in Voß Luise, nach 10 Jahren zusammengeführt.
7) Krieg und Frieden. Nach Schiller aus Wallenstein, der Braut von Messina und der Jungfrau von Orleans.
8) Weshalb ist das Verfahren Homers, der den Schild des Achilles entstehen läßt und so beschreibt, dem des Virgil, der den Schild des Aeneas als fertig beschreibt, vorzuziehen?
9) Die Sünde eine Schlange.
10) Wer ist der gespenstische Reiter in der Leonore?

11) Beurtheilung der Aenderungen, welche Bürger in dem ursprünglichen Text der Lenore vorgenommen hat.
12) Lenore in ein kurzes Drama verwandelt.

Lateinische Themata.

1) Quo consilio Homerus τειχοσκοπίαν Iliadi inseruerit.
2) Exponatur, quibus argumentis T. Manlius Torquatus reiiciens M. Iunii orationem effecerit, ne captivi Romanorum post cladem Cannensem ab Hannibale redimerentur.
3) Enarretur accuratius, quibus causis effectum sit, ut bellum inter Troianos et Rutulos exardesceret.

4) Hannibalis ab Italia discedentis meditationes.
5) Qua via et ratione Cicero in eloquentiae quasi arcem pervenerit (abit.).
6) De legatione illa nobili qua Carneades, Critolaus Diogenesque philosophi ab Atheniensibus Romam missi sunt.
7) Bellum Cn. Pompeii Magni contra C. Iulium Caesarem cur exspectatione celerius tristissimum exitum habuisse videatur.
8) Quam mobilis sit aura popularis demonstretur exemplis Coriolani, Camilli, M. Manlii.
9) Optimam hereditatem et universis populis et singulis hominibus esse laudes maiorum (abit.).

Ober-Secunda. Deutsche Themata.

1) Die Fama im 4. Buche der …
2. Theile von Heinrich IV.
2) Der erste Act im Tell, die Ex…
3) Mein erster Theaterbesuch.
4) Macbeth und Banquo, oder de…
5) Briefwechsel zwischen einem …
Scene in Macbeth.
6) Vorfabel zu Maria Stuart.
7) Wie hat wohl nach Schiller's …
8) Die Eiche von Dom-Remi, n…
9) Was ist der rechte Sinn von …
10) Contraria iuxta se posita ma…
paaren aus Minna von Barnh…
11) Die Planeten-Constellation von…
12) Das Schachspiel, die Krone d…
13) Einige Fabeln, prosaisch oder …
14) Die Eselsbrücke.
15) Mit Andacht lies und dich wird jedes Buch erbauen;
Mit Andacht schau und du wirst lauter Wunder schauen.
Mit Andacht sprich, man hört dir zu andächtig,
Mit Andacht bist du stark und ohn' Andacht unmächtig.
16) Die lateinische, griechische, französische und deutsche Sprache streiten um den Vorrang. Gespräch.
17) Der Bienenstaat mit Anlehnung an Virgil's Georgica.
18) Der Adler im Käfig.
19) Drei Briefe an verschiedene Personen (Vormund, Tante, Schulfreund) über denselben Gegenstand (Actusball oder Landpartie).
20) Deutschland, das Herz von Europa.

9.

Nachricht

über das

Königliche Pädagogium zu Halle.

Herausgegeben

…en.

I. Theorie der parallelen Curven und der Evolventen in ihrem Zusammenhange mit der allgemeinen Kreisgleichung, von Dr. Fr. S. H. Schwarz.
II. Schulnachrichten über das Königliche Pädagogium, von Dr. G. Kramer.

Halle,
Druck der Waisenhaus-Buchdruckerei.
1856.