14.

Nachricht

über das

Königliche Pädagogium zu Halle.

Herausgegeben

von

Dr. G. Kramer,

Director des Königlichen Pädagogiums und der Franckeschen Stiftungen.

Sechsundzwanzigste Fortsetzung.

Inhalt:

Halle,

Druck der Waisenhaus-Buchdruckerei.

1861.

14

14

Untersuchungen über die biquadratischen Reste und Nichtreste der Primzahlen von der Form $4n + 1$.

---

§. 1.

Der erste Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, wie ihn Legendre in seiner théorie des nombres gegeben hat, gilt in aller Strenge nur für die Primzahlen von der Form $4n + 3$, $8n + 5$ und diejenigen von der Form $8n + 1$, welche Nichtreste zu 3 sind; die übrigen können nur insofern mit hinzugezogen werden, als eine spezielle Berechnung für jede einzelne darthut, daß sie Nichtrest zu irgend einer Primzahl $4n + 3$ ist, oder durch Nachweisung der Allgemeingültigkeit dieses Postulates. Der Beweis selbst beruht auf einer Zerlegung der Gleichung $y^2 = px^2 + 1$ in zwei andere, wobei p das nichtquadratische Produkt der zu vergleichenden Primzahlen allein oder mit einer dritten bezeichnet. Die eben genannte Gleichung hängt wiederum ab von der Entwickelung der Quadratwurzel aus p in einen Kettenbruch. Um Wiederholungen zu vermeiden sollen zunächst die Grundgedanken von Legendre's Darstellung angegeben werden, und zwar mit einigen Erweiterungen, die für das Folgende wesentlich sind.

Es führt nemlich die Entwickelung von $\sqrt{p}$ in einen Kettenbruch zu Näherungswerthen $\frac{y}{x}$, die sämmtlich Gleichungen von der Form $y^2 = px^2 \pm r$ genügen. Die Reste r werden ebenso wie die Kettenbruchsnenner wiederkehrend periodisch gefunden, und zwar so, daß wenn

$$\sqrt{p} = a + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cdots}}}}}}$$

ist, den Näherungswerthen

$$\frac{a}{1}, \quad \frac{a\alpha_1 + 1}{\alpha_1}, \quad \ldots\ldots$$

die Reste

$$-r_0, \; +r_1, \; -r_2, \; \ldots \pm r_2, \; \mp r_1, \; \ldots\ldots$$

entsprechen. Unter den unbestimmten Gleichungen befinden sich auch solche von der besondern Form

$$(1.) \qquad y^2 = px^2 + 1,$$

die ebenfalls periodisch wiederkehren; jedoch soll weiterhin unter (1.) immer diejenige verstanden werden, in welcher y und x die kleinsten möglichen Werthe annehmen, mit Ausschluß von $y = 1$, $x = 0$. In besondern Fällen, wenigstens jedesmal dann, wenn p eine ungerade Primzahl von der Form $4n + 1$ ist, existiren ebenfalls periodisch wiederkehrend unzählig viele Gleichungen

$$(2.) \qquad y^2 = px^2 - 1,$$

deren kleinste aus der Gleichung (1.) leicht abgeleitet werden kann. Soll sie für zusammengesetzte Zahlen p möglich sein, so ist nothwendige Bedingung, daß p, außer dem Faktor 2^μ, nur Primzahlen von der Form $4n + 1$ enthalte, da niemals die Kongruenz $y^2 \equiv -1$, (mod. $4n + 3$) stattfinden kann. Hinreichend ist übrigens diese Bedingung keineswegs.

Von Legendre *) ist ferner bewiesen, daß, im Fall die Gleichung (2.) möglich ist, in der Mitte der ersten Periode der Näherungswerthe, ebenso auch in allen anderen, zwei derartige auf einander folgende vorhanden sein müssen, daß sie den Gleichungen

$$(a.) \qquad y_1^2 = px_1^2 \pm a \text{ und } y_2^2 = px_2^2 \mp a$$

genügen; gleichzeitig ist a an die Bedingung geknüpft, daß $p = a^2 + b^2$ wird; ein Satz, aus dem die Zerlegung der Primzahlen $4n + 1$ in die Summe zweier Quadrate hervorgeht.

Wenn p ungerade ist, so läßt sich auch noch entscheiden, welcher Art die Größe a sein muß. Es sei nemlich in $p = a^2 + b^2$ die Größe a ungerade, b also gerade. Unter der Annahme, daß b der in der Mitte der Periode zweimal auftretende Rest ist, hätte man dann die Gleichungen

$$(b.) \qquad \left\{ \begin{aligned} y_1^2 &= px_1^2 \pm b \\ y_2^2 &= px_2^2 \mp b, \end{aligned} \right\}$$

*) Diese Entwickelungen finden sich in der théorie des nombres, 3. ed. tom. I. pag. 49 — 71.

wobei $\frac{y_1}{x_1}$ und $\frac{y_2}{x_2}$ zwei auf einander folgende Näherungswerthe darstellten; bekanntlich würde in diesem Falle

$$y_1x_2 - y_2x_1 = \pm 1$$

gefunden werden. Durch Quadriren erhält man

$$y_1^2x_2^2 + y_2^2x_1^2 = 1 + 2y_1y_2x_1x_2. \qquad \text{(c.)}$$

Andrerseits folgt aus den Gleichungen (b.)

$$y_1^2y_2^2 - p(y_1^2x_2^2 + y_2^2x_1^2) + p^2x_1^2x_2^2 = -b^2,$$

oder da $-b^2 = -p + a^2$, durch Anwendung der Gleichung (c.)

$$y_1^2y_2^2 - p - 2py_1y_2x_1x_2 + p^2x_1^2x_2^2 = -p + a^2,$$

und hieraus

$$y_1y_2 - px_1x_2 = \pm a. \qquad \text{(d.)}$$

Nun sind y_1 und x_1, y_2 und x_2 als Näherungswerthe eines Kettenbruchs prim zu einander, und da b in den Gleichungen (b.) gerade ist, so müssen y_1, x_1, y_2, x_2 ungerade Zahlen sein, indem sie außerdem nur gleichzeitig gerade sein könnten, also nicht prim wären. Dazu ist aber nöthig, daß b mindestens den Faktor 4 enthalte, was für $p = 8n + 5$ nicht möglich ist. Im anderen Falle, nemlich $p = 8n + 1$, findet man dann aus der Gleichung (d.), daß $\pm a$ als die Differenz von zwei ungeraden Größen gerade ist, was der Voraussetzung widerspricht. Demnach sind, unter den angegebenen Bedingungen, nur die Gleichungen (a.) möglich, in welchen a eine ungerade Zahl bedeutet.

§. 2.

Nach diesen Voraussetzungen soll nun zu dem eigentlichen Gegenstande der vorliegenden Untersuchungen übergegangen werden, zur Bestimmung der biquadratischen Beziehungen zwischen ungeraden nicht komplexen Primzahlen von der Form $4n + 1$.

Legendre leitet in seinem Beweise des quadratischen Reziprozitätsgesetzes aus der Gleichung $y^2 = \alpha\beta\gamma x^2 + 1$, wo α eine Primzahl $4n + 1$, β und γ Primzahlen $4n + 3$ bedeuten, andere Gleichungen, wie z. B. $\alpha\beta \cdot u^2 = \gamma \cdot v^2 \pm 1$, ab, in denen die Größen α, β, γ theilweise von einander getrennt vorkommen. Mittelst des im Anfange angegebenen Postulates muß dann über die Existenz oder Nichtexistenz einer jeden von diesen Gleichungen entschieden werden, Bestimmungen, die leichter, wie es Gauss in den disquisitiones arithmeticae gethan hat, von dem Reziprozitätsgesetze erst abhängig zu machen sind, indem nemlich in der Gleichung $ax^2 + 2bxy + cy^2 = M$ die Bedingung erfüllt werden muß, daß $b^2 - ac$ quadratischer Rest zu M. Wenn $M = 1$ wird, so ist auf die quadratischen Beziehungen der Größen a, b, c

zu einander zurückzugehen. Inzwischen ist, wenn $b = 0$ gesetzt wird und a und c Primzahlen sind, die Eigenschaft der einen von diesen quadratischer Rest oder Nichtrest der andern zu sein, nicht immer allein hinreichend, die Möglichkeit einer aus den beiden Zahlen zu bildenden unbestimmten Gleichung des zweiten Grades darzuthun, so daß z. B. die Gleichung $au^2 - bv^2 = \pm 1$, worin a und b Primzahlen von der Form $4n + 1$ sein mögen, zu den unmöglichen gehören kann, obgleich a und b quadratische Reste zu einander sind. In diesem Falle kommt es vielmehr, wie bald dargethan werden soll, darauf an, ob die eine der beiden Primzahlen biquadratischer Rest oder Nichtrest der andern ist.

Es sei, wie schon oben festgestellt wurde,

$$(1.) \qquad y^2 = px^2 + 1$$

die Auflösung dieser unbestimmten Gleichung in den kleinsten Zahlenwerthen; ferner sei

$$p = \alpha\delta$$

das Produkt von zwei Primzahlen α und δ von der Form $4n + 1$, p also von derselben Form. Dann ist in (1.) y nothwendig ungerade, x gerade, so daß man daraus die Gleichung

$$\frac{y+1}{2} \cdot \frac{y-1}{2} = \alpha\delta\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

ableiten kann. Die ganzen Zahlen $\frac{y+1}{2}$ und $\frac{y-1}{2}$, die sich um die Einheit unterscheiden, haben keinen gemeinsamen Faktor. Nimmt man demnach an, daß $\alpha\delta$ in $\frac{y-1}{2}$ aufgehe, so wird

$$\frac{y-1}{2} = \alpha\delta \cdot u^2, \quad \frac{y+1}{2} = v^2$$

zu setzen sein, wo auf den rechten Seiten die quadratischen Formen u^2 und v^2 genommen werden müssen, weil ihr Produkt ein Quadrat $\left(\frac{x}{2}\right)^2$ ist, während die Größen selbst keine gemeinschaftlichen Faktoren haben. Hieraus würde folgen

$$v^2 = \alpha\delta u^2 + 1,$$

eine Gleichung, die der Voraussetzung nach nicht stattfinden kann, weil sie eine Auflösung der Gleichung (1.) in kleineren Zahlen wäre. Es bleiben also zwei Fälle zu untersuchen, nemlich erstens der, daß $\alpha\delta$ in $\frac{y+1}{2}$ aufgeht, oder

$$\frac{y+1}{2} = \alpha\delta u^2, \quad \frac{y-1}{2} = v^2$$

oder

$$v^2 = \alpha\delta u^2 - 1 \qquad (2.)$$

zu setzen ist.

Der zweite Fall ist der, daß eine der beiden Primzahlen, z. B. α, in $\frac{y+1}{2}$, die andere δ in $\frac{y-1}{2}$ aufgeht, wobei

$$\frac{y+1}{2} = \alpha u^2, \quad \frac{y-1}{2} = \delta v^2,$$

genommen werden muß, also die Gleichung

$$\alpha u^2 - \delta v^2 = 1 \qquad (3.)$$

entsteht. Diese beiden Fälle schließen einander aus, und da der zweite nur dann eintreten kann, wenn α und δ quadratische Reste zu einander sind, so folgt nothwendig, daß die Gleichung (2.) bestehen muß, wenn α und δ quadratische Nichtreste zu einander sind. Die Umkehrung aber, daß die Gleichung (3.) stattfinden müßte, wenn α und δ quadratische Reste zu einander sind, ergiebt sich hieraus nicht.

Schon eine mäßig ausgedehnte Induktion innerhalb der Grenzen der Tafel X. in Legendre's théorie des nombres, tom. I. (wo die kleinsten Zahlenwerthe zur Auflösung der Gleichung $y^2 = px^2 \pm 1$ angegeben sind, aus denen man leicht entscheiden kann, ob auf der rechten Seite das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist), und auf diejenigen Zahlen α und δ beschränkt, welche quadratische Reste zu einander sind, führt zu ganz anderen Bestimmungen. Die letztere Beschränkung rechtfertigt sich durch das in Bezug auf Nichtreste so eben gewonnene Resultat. Die Gleichung $y^2 = \alpha\delta x^2 - 1$ ist hiernach möglich für folgende Zahlen

$$145 = 5 \cdot 29, \; 445 = 5 \cdot 89, \; 901 = 17 \cdot 53. \qquad (4.)$$

Die Gleichung $y^2 = \alpha\delta x^2 - 1$ ist nicht möglich, oder die andere $\alpha u^2 - \delta v^2 = 1$ ist möglich für:

$$\left.\begin{array}{l} 205 = 5 \cdot 41, \; 221 = 17 \cdot 13, \; 305 = 5 \cdot 61, \; 377 = 13 \cdot 29, \\ 505 = 5 \cdot 101, \; 545 = 109 \cdot 5, \; 689 = 13 \cdot 53, \; 745 = 149 \cdot 5, \\ \qquad 793 = 13 \cdot 61, \; 905 = 5 \cdot 181. \end{array}\right\} \qquad (5.)$$

Es sind nun die biquadratischen Reste der hier vorkommenden Zahlen in der Tafel enthalten:

Zahlen.	Biquadratreste.
5	1.
13	1, 3, 9.
17	1, 4, 13, 16.
29	1, 7, 16, 20, 23, 24, 25.
41	1, 4, 10, 16, 18, 23, 25, 31, 37, 40.
53	1, 10, 13, 15, 16, 24, 28, 36, 42, 44, 46, 47, 49.
61	1, 9, 12, 13, 15, 16, 20, 22, 25, 34, 42, 47, 56, 57, 58.
89	1, 2, 4, 8, 11, 16, 22, 25, 32, 39, 44, 45, 50, 57, 64, 67, 73, 78, 81, 85, 87, 88.
101	1, 5, 16, 19, 24, 25, 31, 36, 37, 52, 54, 56, 58, 68, 71, 78, 79, 80, 81, 84, 87, 88, 92, 95, 97.
109	1, 3, 5, 7, 9, 15, 16, 21, 22, 25, 26, 27, 35, 38, 45, 48, 49, 63, 66, 73, 75, 78, 80, 81, 89, 97, 105.
149	1, 5, 6, 16, 17, 19, 25, 28, 29, 30, 31, 33, 36, 37, 49, 63, 67, 73, 80, 81, 83, 85, 88, 95, 97, 102, 104, 106, 107, 117, 123, 125, 127, 129, 140, 142, 145.
181	1, 3, 5, 9, 13, 14, 15, 16, 25, 27, 29, 34, 38, 39, 42, 43, 44, 45, 48, 59, 62, 65, 70, 73, 75, 80, 81, 82, 87, 102, 114, 117, 121, 125, 126, 129, 132, 135, 144, 145, 148, 161, 169, 170, 177.

Man sieht sogleich, daß zu (4.) diejenigen Zahlen gehören, welche beide zu einander biquadratische Nichtreste sind, zu (5.) diejenigen, wo wenigstens die eine biquadratischer Rest der andern ist. Zur bequemeren Uebersicht sind die Faktoren a und δ hier jedesmal so gestellt, daß der zweite Rest des ersten ist.

In der That läßt sich leicht darthun, daß zur Existenz der Gleichung

$$au^2 - \delta v^2 = 1$$

die Bedingung δ biquadratischer Rest zu a nothwendig ist. Beim Beweise sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nemlich a von der Form $8n + 5$ oder $8n + 1$ ist.

Erster Fall. $\quad a = 8n + 5.$

Aus $\delta v^2 \equiv -1$, (mod. a) ergiebt sich, daß δv^2 biquadratischer Nichtrest zu a sein muß, da alle Primzahlen von der Form $8n + 5$ den biquadratischen Nichtrest -1 haben. Da ferner, wie leicht ersichtlich, in der oben aufgestellten Gleichung u nur eine ungerade, v eine gerade Zahl sein kann, so hat u^2 die Form $8n + 1$, au^2 die Form $8n + 5$ ebenso wie a. Damit man die Differenz $+ 1$ erhalte, muß δv^2

von der Form $8n + 4$ sein, woraus man schließt, daß v den Faktor 2 einmal und nur einmal enthält. Bezeichnet man jetzt die ungeraden Primfaktoren dieser Größe mit $k, k', k'', \ldots$, so ist

$$v = 2kk'k'' \ldots .$$

Es ist aber $\alpha u^2 \equiv 1$, (mod. $k, k', k'', \ldots$); man findet demnach, wenn man zur Abkürzung das Legendre'sche Zeichen $\left(\frac{p}{q}\right)$ anwendet, die Relationen

$$\left(\frac{\alpha}{k}\right) = 1, \ \left(\frac{\alpha}{k'}\right) = 1, \ \left(\frac{\alpha}{k''}\right) = 1, \ldots$$

woraus sich mittelst des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, da α von der Form $4n + 1$ ist,

$$\left(\frac{k}{\alpha}\right) = 1, \ \left(\frac{k'}{\alpha}\right) = 1, \ \left(\frac{k''}{\alpha}\right) = 1, \ldots$$

ergiebt. Nimmt man, wegen $\alpha = 8n + 5$, hierzu die Relation

$$\left(\frac{2}{\alpha}\right) = -1$$

und multiplizirt, so erhält man

$$\left(\frac{2kk'k'' \ldots}{\alpha}\right) = \left(\frac{v}{\alpha}\right) = -1.$$

Demnach ist v quadratischer, v^2 biquadratischer Nichtrest von α. Wäre jetzt δ ebenfalls biquadratischer Nichtrest zu α, so würde, wenn g eine primitive Wurzel von α bedeutet und $\delta \equiv g^\lambda$, (mod. α) gesetzt wird, der Index λ die Form $4n + 2$ haben, weil nemlich λ mit 2 theilbar sein muß, da nach Voraussetzung δ quadratischer Rest zu α ist. Ferner ist in $v^2 \equiv g^{\lambda'}$, (mod. α) der Index λ' ebenfalls von der Form $4n + 2$, so daß in $\delta v^2 \equiv g^{\lambda+\lambda'}$, (mod. α) der Index $\lambda + \lambda'$ mit 4 aufgehen und δv^2 biquadratischer Rest zu α sein müßte. Da man aber schon gefunden hat, daß δv^2 biquadratischer Nichtrest sein muß, so ist die für δ gemachte Annahme unmöglich, d. h. δ ist biquadratischer Rest zu α.

Zweiter Fall. $\quad \alpha = 8n + 1$.

Hier findet man aus $\delta v^2 \equiv -1$, (mod. α), daß δv^2 biquadratischer Rest von α sein wird, weil dasselbe von -1 gilt. Ferner ist jetzt

$$v = 2^\mu \cdot kk'k'' \ldots$$

zu setzen, wobei es, da 2 quadratischer Rest zu α ist, auf die Größe des Exponenten μ nicht ankommt. Wie oben ergiebt sich aus $\alpha u^2 \equiv 1$, (mod. v)

$$\left(\frac{\alpha}{k}\right) = 1, \ \left(\frac{\alpha}{k'}\right) = 1, \ \left(\frac{\alpha}{k''}\right) = 1, \ldots.$$

und durch Umkehrung

$$\left(\frac{k}{\alpha}\right) = 1, \ \left(\frac{k'}{\alpha}\right) = 1, \ \left(\frac{k''}{\alpha}\right) = 1, \ldots.$$

Multiplizirt man diese Relationen unter einander und mit

$$\left(\frac{2^\mu}{\alpha}\right) = 1,$$

so findet man

$$\left(\frac{2^\mu \cdot kk'k'' \ldots.}{\alpha}\right) = \left(\frac{v}{\alpha}\right) = 1.$$

Demnach ist jetzt v quadratischer, v^2 biquadratischer Rest zu α, und da schon bewiesen war, daß dasselbe von δv^2 gilt, so wird auch δ biquadratischer Rest zu α sein müssen. Man kann also folgenden Satz aufstellen:

(6.) „Wenn die Gleichung $\alpha u^2 - \delta v^2 = +1$ möglich sein soll, so muß wenigstens die eine der beiden Primzahlen biquadratischer Rest der andern sein."

Hieraus folgt ferner:

(7.) „Wenn beide Primzahlen α und δ biquadratische Nichtreste zu einander sind, so ist nur die Gleichung $y^2 = \alpha\delta x^2 - 1$ möglich."

§. 3.

Weit weniger einfach sind die Resultate, welche man aus der Gleichung (3.) in Bezug auf α ableiten kann. Es mag hierbei zunächst folgendes bemerkt werden. In einer Abhandlung von Dirichlet über die biquadratischen Reste (Crelle's Journal, Bd. III, S. 62 u. s. w.) ist gezeigt worden, welche Bedingungen dazu nöthig sind, daß eine Primzahl α von der Form $4n + 1$ zu der Primzahl δ von derselben Form biquadratischer Rest sei oder nicht sei. Von der Gleichung $t^2 + \alpha u^2 = \delta v^2$ ausgehend gelangt er, ohne den erst später von Gauss zu der Bestimmung der biquadratischen Reziprozitätsgesetze in diesen Theil der Zahlenlehre aufgenommenen Begriff der komplexen Primzahlen zu Hülfe zu nehmen, zu folgenden allgemeinen Resultaten. Da $\left(\frac{\delta}{\alpha}\right) = 1$, $\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) = 1$ vorausgesetzt werden muß, so ist $\delta \equiv \chi'^2$, (mod. α). Setzt man nun $\delta = \varphi'^2 + \psi'^2$, wo φ' eine ungerade, ψ' eine gerade Zahl bedeutet, so ist $\left(\frac{\chi' \cdot \chi' + \psi'}{\alpha}\right) = +1$ oder $= -1$, und im ersten Falle α biquadratischer Rest, im zweiten Nichtrest zu δ. Nimmt man außerdem $\alpha = \varphi^2 + \psi^2$ und $\alpha \equiv \chi^2$, (mod. δ), so ist δ biquadratischer Rest oder Nichtrest zu α, je nachdem $\left(\frac{\chi \cdot \chi + \psi}{\delta}\right) = +1$ oder $= -1$ ist. Man kann nun erstens annehmen, daß α biquadratischer Nichtrest zu δ und ebenso δ Nichtrest zu α ist. Dann hat man

$$\left(\frac{\chi'}{\alpha}\right) = -1, \left(\frac{\chi}{\delta}\right) = -1,$$

weil, wenn z. B. $\left(\frac{\chi'}{\alpha}\right) = 1$ wäre, man $\chi' \equiv r^2$, also $\chi'^2 \equiv r^4$, $\delta \equiv r^4$, (mod. α), hätte, was der Voraussetzung widerspricht. Hieraus folgt in Verbindung mit den so eben aufgestellten Relationen, daß

$$\left(\frac{\chi' + \psi'}{\alpha}\right) = +1, \left(\frac{\chi + \psi}{\delta}\right) = +1$$

sein muß.

Zweitens sei α biquadratischer Nichtrest zu δ, δ Rest zu α. Dann ist

$$\left(\frac{\chi'}{\alpha}\right) = +1, \left(\frac{\chi}{\delta}\right) = -1,$$

ferner

$$\left(\frac{\chi' \cdot \chi' + \psi'}{\alpha}\right) = -1, \left(\frac{\chi \cdot \chi + \psi}{\delta}\right) = 1,$$

also

$$\left(\frac{\chi' + \psi'}{\alpha}\right) = -1, \left(\frac{\chi + \psi}{\delta}\right) = -1.$$

Drittens sei α biquadratischer Rest zu δ und ebenso δ zu α. Dann ist

$$\left(\frac{\chi'}{\alpha}\right) = +1, \left(\frac{\chi}{\delta}\right) = +1,$$

und da hier

$$\left(\frac{\chi' \cdot \chi' + \psi'}{\alpha}\right) = 1, \left(\frac{\chi \cdot \chi + \psi}{\delta}\right) = 1$$

ist, so findet man

$$\left(\frac{\chi' + \psi'}{\alpha}\right) = +1, \left(\frac{\chi + \psi}{\delta}\right) = +1.$$

Eine Erweiterung dieser Resultate ergiebt sich aus der Betrachtung, daß

$$\chi'^2 \equiv \varphi'^2 + \psi'^2, \text{ (mod. } \alpha), \text{ oder}$$

$$(\chi' + \psi')(\chi' - \psi') \equiv \varphi'^2, \text{ (mod. } \alpha),$$

woraus folgt, daß $\chi' + \psi'$ und $\chi' - \psi'$ gleichzeitig quadratische Reste oder Nichtreste zu α sind. Dasselbe gilt für $\chi \pm \psi$ in Bezug auf δ. Das Gesetz, das man hieraus ableiten kann, ist ziemlich leicht zu übersehen. Der Fall, daß α in φ' (oder δ in φ) aufgeht, wobei $\chi' + \psi'$ oder $\chi' - \psi'$ ebenfalls mit α aufgehen würde, kann ohne Schwierigkeit für sich behandelt werden.

Es könnte nun scheinen, als ob im vorliegenden Falle, wo eine der Gleichung $t^2 + \alpha u^2 = \delta v^2$ ähnliche aber einfachere existirt, nemlich $\alpha u^2 - \delta v^2 = 1$, aus dieser letzteren auch einfachere Beziehungen als die eben angegebenen abgeleitet werden könnten. Dies ist auch in der That für δ bereits durchgeführt worden; ganz anders steht es mit der andern Primzahl α. Indem man nemlich

$$-1 + \alpha u^2 = \delta v^2 \text{ oder } i^2 + \alpha u^2 = \delta v^2$$

setzt, eine Gleichung, in der $i = \sqrt{-1}$ statt der allgemeinen Größe t auftritt, ist jede Art von Beweisführung, die der in der citirten Abhandlung auf der Zerlegung von t in seine Primfaktoren beruhenden analog wäre, unmöglich gemacht. Mittelst der Gleichung (3.) läßt sich nur noch zweierlei darthun.

Hat u die Form $4n + 1$ und enthält demnach unter seinen Primfaktoren solche von der Form $4n + 3$ stets paarweise oder als Quadrate, so ist in

$$\delta v^2 \equiv -1, \text{ (mod. } u)$$

δ entweder zu keinem Faktor von u oder zu je zweien quadratischer Nichtrest. Daraus folgt durch Umkehrung, daß man unter den Primfaktoren von u Nichtreste zu δ entweder gar nicht, oder immer paarweise antrifft, u demnach quadratischer, u^2 biquadratischer Rest zu δ sein wird. Andrerseits hat man

$$\alpha u^2 \equiv 1, \text{ (mod. } \delta),$$

d. h. αu^2 biquadratischer Rest zu δ, woraus man ableitet:

„W e n n u d i e F o r m $4n + 1$ h a t, s o i s t α b i q u a d r a t i s c h e r R e s t z u δ."

Auf ganz ähnliche Weise ergiebt sich für $u = 4n + 3$, indem in dieser Größe Primfaktoren von derselben Form immer in ungerader Anzahl vorhanden sind, daß δv^2 wie auch δ zu einer ungeraden Anzahl von Primfaktoren von u Nichtrest ist. Durch Umkehrung findet man leicht, daß u quadratischer Nichtrest, u^2 also biquadratischer Nichtrest zu δ ist; und da αu^2 auch jetzt biquadratischer Rest zu δ sein muß, so hat man:

„W e n n u d i e F o r m $4n + 3$ h a t, s o i s t α b i q u a d r a t i s c h e r N i c h t r e s t z u δ."

Einfachere Resultate lassen sich aber weder hieraus noch aus den übrigen Angaben dieses Paragraphen in einfacherer Weise ableiten.

§. 4.

Schon im ersten Paragraphen ist angegeben worden, daß zur Gleichung $y^2 = px^2 - 1$ nothwendig zwei andere $y^2 = px^2 \pm a$ gehören, wobei, vorausgesetzt daß p ungerade ist, die ungerade Zahl a so beschaffen sein muß, daß $p = a^2 + b^2$ gefunden wird. Man sieht leicht, daß $\pm a$ quadratischer Rest zu den in p enthaltenen Primzahlen ist. Setzt man im vorliegenden Falle

$$\alpha = a^2 + b^2,\ \delta = a'^2 + b'^2,$$

wo a und a' die ungeraden Theile bezeichnen, so findet man, daß sich das Produkt $\alpha\delta$ auf zweierlei Art als die Summe von zwei Quadraten darstellen läßt, nemlich

$$\alpha\delta = (aa' + bb')^2 + (ab' - a'b)^2$$
$$\alpha\delta = (aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2.$$

Zur Abkürzung soll

$$aa' + bb' = A,\ aa' - bb' = A'$$
$$ab' - a'b = B,\ ab' + a'b = B'$$

also

$$\alpha\delta = A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2$$

gesetzt werden. Auch hier sind A und A' ungerade.

Zunächst sei nun $a = kk'k'' \ldots.$, wo die Größen k lauter ungerade Primzahlen bedeuten; dann ist, da $\alpha \equiv b^2$, (mod. a)

$$\left(\frac{\alpha}{k}\right) = 1, \left(\frac{\alpha}{k'}\right) = 1, \left(\frac{\alpha}{k''}\right) = 1, \ldots.$$

und durch Umkehrung

$$\left(\frac{k}{\alpha}\right) = 1, \left(\frac{k'}{\alpha}\right) = 1, \left(\frac{k''}{\alpha}\right) = 1, \ldots.$$

oder

$$\left(\frac{kk'k'' \ldots.}{\alpha}\right) = \left(\frac{a}{\alpha}\right) = 1,$$

d. h. a ist quadratischer Rest zu α, und ganz ebenso a' zu δ. Ferner folgt aus den Kongruenzen

$$\alpha\delta \equiv B^2, \text{ (mod. } A),\ \alpha\delta \equiv B'^2, \text{ (mod. } A'),$$

wenn $A = l \cdot l' \cdot l'' \ldots.$, $A' = m \cdot m' \cdot m'' \ldots.$ gesetzt wird,

$$\left(\frac{\alpha\delta}{l}\right) = 1, \left(\frac{\alpha\delta}{l'}\right) = 1, \ldots\ldots$$

$$\left(\frac{\alpha\delta}{m}\right) = 1, \left(\frac{\alpha\delta}{m'}\right) = 1, \ldots\ldots$$

Diese Kongruenzen lassen sich, indem man ± 1 mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots$ bezeichnet, in andere zerlegen, die so lauten

$$\left(\frac{\alpha}{l}\right) = \varepsilon_1, \left(\frac{\delta}{l}\right) = \varepsilon_1, \left(\frac{\alpha}{l'}\right) = \varepsilon_2, \left(\frac{\delta}{l'}\right) = \varepsilon_2, \ldots\ldots$$

$$\left(\frac{\alpha}{m}\right) = \eta_1, \left(\frac{\delta}{m}\right) = \eta_1, \left(\frac{\alpha}{m'}\right) = \eta_2, \left(\frac{\delta}{m'}\right) = \eta_2, \ldots\ldots$$

aus denen sich ergiebt

$$\left(\frac{l}{\alpha}\right) = \varepsilon_1, \left(\frac{l'}{\alpha}\right) = \varepsilon_2, \ldots.$$

$$\left(\frac{l}{\delta}\right) = \varepsilon_1, \left(\frac{l'}{\delta}\right) = \varepsilon_2, \ldots.$$

$$\left(\frac{m}{\alpha}\right) = \eta_1, \left(\frac{m'}{\alpha}\right) = \eta_2, \ldots.$$

$$\left(\frac{m}{\delta}\right) = \eta_1, \left(\frac{m'}{\delta}\right) = \eta_2, \ldots.,$$

oder durch Multiplikation

$$\left(\frac{ll' \ldots.}{\alpha}\right) = \left(\frac{A}{\alpha}\right) = \varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots.$$

$$\left(\frac{ll' \ldots.}{\delta}\right) = \left(\frac{A}{\delta}\right) = \varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots.$$

$$\left(\frac{mm' \ldots.}{\alpha}\right) = \left(\frac{A'}{\alpha}\right) = \eta_1\ \eta_2 \ldots.$$

$$\left(\frac{mm' \ldots.}{\delta}\right) = \left(\frac{A'}{\delta}\right) = \eta_1\ \eta_2 \ldots.$$

Man schließt hieraus, „daß A gleichzeitig quadratischer Rest oder Nichtrest zu α und δ sein muß. Ebenso ist auch A' Rest oder Nichtrest zu δ, je nachdem es Rest oder Nichtrest zu α ist.“

Es soll jetzt der früher ausgeschlossene Fall, daß α und δ quadratische Nichtreste zu einander sind, der Uebereinstimmung in der Beweisführung wegen, mit hinzugenommen werden.

Erster Fall. $\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) = -1, \left(\frac{\delta}{\alpha}\right) = -1.$

Aus der Differenz

$$a'^2\alpha - b^2\delta = a^2a'^2 - b^2b'^2 = A \cdot A'$$

ergeben sich, wenn die Kongruenz

$$-b^2 \equiv a^2, \text{ oder } -b^2\delta \equiv a^2\delta, \text{ (mod. } \alpha)$$

berücksichtigt wird, die Relationen

$$AA' \equiv a'^2\alpha, \text{ (mod. } \delta), \; AA' \equiv a^2\delta, \text{ (mod. } \alpha),$$

aus denen hervorgeht, daß AA' quadratischer Nichtrest, d. h. ein Faktor, z. B. A Nichtrest, der andere A' Rest zu α und zu δ sein muß. Ist aber $\left(\frac{A}{\alpha}\right) = -1$ und demnach $\left(\frac{A'}{\alpha}\right) = +1$, so folgt nach dem Obigen, daß gleichzeitig $\left(\frac{A}{\delta}\right) = -1$, $\left(\frac{A'}{\delta}\right) = +1$ gefunden wird, und umgekehrt.

„Wenn α und δ quadratische Nichtreste zu einander sind, so muß eine der Größen A, A' Rest, die andere Nichtrest zu α und gleichzeitig zu δ sein."

In der That waren in diesem Falle die Gleichungen $y^2 = \alpha\delta x^2 - 1$, $y^2 = \alpha\delta x^2 \pm A$ oder $y^2 = \alpha\delta x^2 \pm A'$ möglich, wobei sich in Betreff der letzteren über das Vorkommen von A oder A' von vornherein entscheiden läßt.

Zweiter Fall. $\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) = 1, \left(\frac{\delta}{\alpha}\right) = 1.$

Eine der eben gegebenen Schritt für Schritt analoge Beweisführung läßt zunächst aus den Kongruenzen

$$AA' \equiv a'^2\alpha, \text{ (mod. } \delta), \; AA' \equiv a^2\delta, \text{ (mod. } \alpha)$$

ersehen, daß AA' quadratischer Rest zu α und zu δ sein muß, woraus man den Satz ableitet:

„Wenn α und δ quadratische Reste zu einander sind, so sind A und A' gleichzeitig entweder Reste oder Nichtreste zu α und zu δ." (8.)

§. 5.

Wir wenden jetzt die Ergebnisse der bisherigen Betrachtungen auf die oben angegebenen Primzahlen an, um durch Induktion nähere Beziehungen aufzufinden.

Die Gleichung $y^2 = \alpha\delta x^2 - 1$ war möglich für

(I.) $145 = 5 \cdot 29,\ 445 = 5 \cdot 89,\ 901 = 17 \cdot 53.$

Man hat hier, $(\alpha\delta = A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2)$

$$145 = 9^2 + 8^2 = 1^2 + 12^2$$
$$445 = 21^2 + 2^2 = 11^2 + 18^2$$
$$901 = 15^2 + 26^2 = 1^2 + 30^2,$$

und übersieht leicht, daß die ungeraden Größen A und A' quadratische Reste zu α und zu δ sind. Für eine dieser Größen ist dies übrigens schon durch die Möglichkeit der Gleichungen $y^2 = \alpha\delta x^2 \pm A$, oder $\pm A'$ festgestellt.

Die Zahlen, für welche die Gleichung $\alpha u^2 - \delta v^2 = 1$ möglich sein muß, zerfallen, je nachdem A und A' beide Reste oder beide Nichtreste sind, (es kommt nemlich hier wegen $\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) = 1, \left(\frac{\delta}{\alpha}\right) = 1$ der Satz (8.) zur Anwendung) in zwei Klassen; in der ersten findet man die Zahlen

(II.) $505 = 5 \cdot 101,\ 689 = 13 \cdot 53,\ 793 = 13 \cdot 61,\ 905 = 5 \cdot 181,$

und zwar ist

$$505 = 21^2 + 8^2 = 19^2 + 12^2$$
$$689 = 25^2 + 8^2 = 17^2 + 20^2$$
$$793 = 27^2 + 8^2 = 3^2 + 28^2$$
$$905 = 29^2 + 8^2 = 11^2 + 28^2;$$

wobei A und A' beide als Reste zu α und zu δ gefunden werden; in der andern Klasse sind folgende enthalten:

(III.) $\left\{ \begin{array}{c} 205 = 5 \cdot 41,\ 221 = 17 \cdot 13,\ 305 = 5 \cdot 61,\ 377 = 13 \cdot 29 \\ 545 = 109 \cdot 5,\ 745 = 149 \cdot 5. \end{array} \right\}$

und zwar ist

$$205 = 13^2 + 6^2 = 3^2 + 14^2$$
$$221 = 11^2 + 10^2 = 5^2 + 14^2$$
$$305 = 17^2 + 4^2 = 7^2 + 16^2$$
$$377 = 19^2 + 4^2 = 11^2 + 16^2$$
$$545 = 23^2 + 4^2 = 17^2 + 16^2$$
$$745 = 27^2 + 4^2 = 13^2 + 24^2,$$

wobei A und A' beide als quadratische Nichtreste zu α und zu δ gefunden werden.

Nimmt man hinzu, daß in (I.) nur solche Primzahlen α und δ vorkommen, welche biquadratische Nichtreste, in (II.) nur solche, welche biquadratische Reste zu einander sind, während von denen in (III.) die eine biquadratischer Nichtrest der andern und umgekehrt die letztere Rest zur ersten ist, so wird man durch Induktion zu folgendem Gesetze geführt werden, welches sich auf alle die Primzahlen bezieht, die schon quadratische Reste zu einander sind:

„Wenn bei der Zerlegung des Produkts zweier Primzahlen von der Form $4n+1$ in die Summe von zwei Quadraten (auf zweierlei Weise möglich) die ungeraden Größen in diesen Ausdrücken quadratische Reste der Primzahlen sind, so sind die letzteren gleichzeitig biquadratische Reste zu einander oder nicht. Sind aber die ungeraden Größen quadratische Nichtreste der Primzahlen, so ist wenn die eine biquadratischer Rest der andern ist, umgekehrt die letztere Nichtrest der ersteren,“

ein Gesetz, welches die fraglichen Beziehungen der nicht komplexen ungeraden Primzahlen auf die einfachste Art regelt und eigenthümlicher Weise von der Form der Primzahlen ($8n+1$ oder $8n+5$) ganz unabhängig ist. Man kann noch bemerken, daß die hierbei unberücksichtigt gebliebenen Primzahlen, die schon quadratische Nichtreste zu einander sind, durch eine geringe Aenderung in der Fassung mit einbegriffen werden könnten.

Es sollen nun diese Ergebnisse der Induktion unter der Voraussetzung, daß

immer $\left(\frac{\alpha}{\delta}\right) = 1, \left(\frac{\delta}{\alpha}\right) = 1$

oder

$$\alpha^{\frac{1}{2}(\delta - 1)} \equiv 1, \text{ (mod. } \delta), \quad \delta^{\frac{1}{2}(\alpha - 1)} \equiv 1, \text{ (mod. } \alpha)$$

also

$$\alpha^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv \pm 1, \text{ (mod. } \delta), \quad \delta^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv \pm 1, \text{ (mod. } \alpha)$$

und

$$\alpha\delta = A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2$$

ist, in folgender Ordnung bewiesen werden.

Erstens. A und A' sind quadratische Nichtreste zu α und zu δ, d. h.

$$\left.\begin{array}{l}(aa' \pm bb')^{\frac{1}{2}(\alpha - 1)} \equiv -1, \text{ (mod. } \alpha) \\ (aa' \pm bb')^{\frac{1}{2}(\delta - 1)} \equiv -1, \text{ (mod. } \delta)\end{array}\right\} \quad (9.)$$

woraus folgen soll, daß die eine der beiden Primzahlen, z. B. δ biquadratischer Rest zu α und α Nichtrest zu δ ist, oder umgekehrt, d. h.

$$\delta^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv \pm 1, \text{ (mod. } \alpha)$$
$$\alpha^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv \mp 1, \text{ (mod. } \delta).$$

Zerlegt man $\alpha = a^2 + b^2$ in seine beiden komplexen Primfaktoren $(a + bi)$ und

$(a-bi)$, welche als primär angenommen werden können, indem man je nach der Form der ungeraden Zahl a das Vorzeichen, was immer möglich ist, so bestimmt, daß $a+bi \equiv 1$, (mod. $2+2i$) und $a-bi \equiv 1$, (mod. $2-2i$) ist, und setzt demnach

$$\alpha = (a+bi)\,(a-bi)$$

und ebenso

$$\delta = (a'+b'i)\,(a'-b'i);$$

so hat man

$$-bi \equiv a \text{ oder } b \equiv ai, \text{ (mod. } a+bi)$$
$$-bi \equiv -a \text{ oder } b \equiv -ai, \text{ (mod. } a-bi),$$

und ebenso

$$b' \equiv a'i, \text{ (mod. } a'+b'i), \; b' \equiv -a'i, \text{ (mod. } a'-b'i).$$

Aus der ersten Kongruenz (9.) folgt dann

$$(10.) \qquad (aa' \pm ab'i)^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} \equiv -1, \text{ (mod. } a \pm bi).$$

Da aber bekanntlich a quadratischer Rest zu α ist, so hat man

$$a^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} \equiv 1, \text{ (mod. } \alpha),$$

woraus sich sofort ergiebt

$$a^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} \equiv 1, \text{ (mod. } a \pm bi).$$

Man sieht jetzt leicht, daß die Kongruenz (10.) durch folgende ersetzt werden kann:

$$(a'+b'i)^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} \equiv -1, \text{ (mod. } a+bi),$$

wo bloß die oberen Vorzeichen angegeben sind, weil sich die übrigen Fälle ohne Schwierigkeit daraus ableiten lassen. Da $\frac{1}{2}(\alpha-1)$ eine gerade Zahl ist, so führt die Zerlegung der zuletzt angegebenen Relation auf bekannte Weise zu einer Kongruenz, die den biquadratischen Charakter der komplexen Zahl $a'+b'i$ bestimmt, nemlich zu

$$(a'+b'i)^{\frac{1}{4}(\alpha-1)} \equiv \pm i, \text{ (mod. } a+bi);$$

bezeichnet man also die Größe ± 1 mit ε_1, ε_2 so findet man die vier Kongruenzen:

$$(11.) \qquad \left\{\begin{array}{l} (a'+b'i)^{\frac{1}{4}(\alpha-1)} \equiv \varepsilon_1 i, \text{ (mod. } a+bi) \\ (a'+b'i)^{\frac{1}{4}(\alpha-1)} \equiv \varepsilon_2 i, \text{ (mod. } a-bi) \\ (a'-b'i)^{\frac{1}{4}(\alpha-1)} \equiv -\varepsilon_1 i, \text{ (mod. } a-bi) \\ (a'-b'i)^{\frac{1}{4}(\alpha-1)} \equiv -\varepsilon_2 i, \text{ (mod. } a+bi). \end{array}\right.$$

Es mag hierzu sogleich bemerkt werden, daß über die Vorzeichen ε_1 und ε_2 in der ersten und zweiten Kongruenz, ob sie gleich oder entgegengesetzt sind, nichts ausgemacht zu werden braucht; die Umkehrungen in der dritten und vierten sind nur eine einfache Folge der für Division mit komplexen Moduln geltenden Gesetze.

Um das biquadratische Reziprozitätsgesetz für komplexe Primzahlen, deren Norm eine Primzahl von der Form $4n + 1$ ist, hierauf anzuwenden, sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall. $\alpha = N(a + bi)$ und $\delta = N(a' + b'i)$ sind beide von der Form $8n + 5$.

Dann sind bekanntlich die Vorzeichen von $(a' + b'i)^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)}$, (mod. $a + bi$) und $(a + bi)^{\frac{1}{4}(\delta - 1)}$, (mod. $a' + b'i$) entgegengesetzt, so daß man aus (11.) der Reihe nach erhält

$$\left.\begin{array}{l} (a + bi)^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv -\varepsilon_1 i, \text{ (mod. } a' + b'i) \\ (a - bi)^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv -\varepsilon_2 i, \text{ (mod. } a' + b'i) \\ (a - bi)^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv \varepsilon_1 i, \text{ (mod. } a' - b'i) \\ (a + bi)^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv \varepsilon_2 i, \text{ (mod. } a' - b'i). \end{array}\right\} \quad (12.)$$

Durch Multiplikation der ersten und vierten Kongruenz in (11.) findet man aber

$$(a'^2 + b'^2)^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv \varepsilon_1 \varepsilon_2, \text{ (mod. } a + bi)$$

oder

$$\delta^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv \varepsilon_1 \varepsilon_2, \text{ (mod. } a + bi),$$

und ebenso aus der zweiten und dritten

$$\delta^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv \varepsilon_1 \varepsilon_2, \text{ (mod. } a - bi),$$

woraus man schließt, daß $\delta^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} - \varepsilon_1 \varepsilon_2$ mit $(a + bi)$ und $(a - bi)$, also mit α theilbar sein muß. Dies führt zu der Kongruenz

$$\delta^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv \varepsilon_1 \varepsilon_2, \text{ (mod. } \alpha).$$

Andrerseits ergiebt sich aus der ersten und zweiten Kongruenz in (12.)

$$\alpha^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv -\varepsilon_1 \varepsilon_2, \text{ (mod. } a' + b'i),$$

aus der dritten und vierten

$$\alpha^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv -\varepsilon_1 \varepsilon_2, \text{ (mod. } a' - b'i)$$

und aus diesen letzteren selbst, da ihnen zufolge $\alpha^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} + \varepsilon_1 \varepsilon_2$ mit $(a' + b'i)$ und $(a' - b'i)$ oder mit δ theilbar sein muß,

$$\alpha^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv -\varepsilon_1 \varepsilon_2, \text{ (mod. } \delta).$$

Wenn also A und A' quadratische Nichtreste zu α und δ sind, so hat man gleichzeitig

$$\delta^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv \pm 1, \text{ (mod. } \alpha) \text{ und } \alpha^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv \mp 1, \text{ (mod. } \delta).$$

Zweiter Fall. Die Normen α und δ sind nicht beide von der Form $8n + 5$.

Dann hat man

$$(a' + b'i)^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv \varepsilon_1 i, \text{ (mod. } a + bi)$$
$$(a' + b'i)^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv \varepsilon_2 i, \text{ (mod. } a - bi)$$
$$(a' - b'i)^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv -\varepsilon_1 i, \text{ (mod. } a - bi)$$
$$(a' - b'i)^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv -\varepsilon_2 i, \text{ (mod. } a + bi),$$

und wegen des biquadratischen Reziprozitätsgesetzes, nach welchem in diesem Falle $(a' + b'i)^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)}$, (mod. $a + bi$) und $(a + bi)^{\frac{1}{4}(\delta - 1)}$, (mod. $a' + b'i$) dasselbe Vorzeichen haben,

$$(a + bi)^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv \varepsilon_1 i, \text{ (mod. } a' + b'i)$$
$$(a - bi)^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv \varepsilon_2 i, \text{ (mod. } a' + b'i)$$
$$(a - bi)^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv -\varepsilon_1 i, \text{ (mod. } a' - b'i)$$
$$(a + bi)^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv -\varepsilon_2 i, \text{ (mod. } a' - b'i).$$

Wie oben ist

$$\delta^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv \varepsilon_1 \varepsilon_2, \text{ (mod. } a + bi)$$
$$\delta^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv \varepsilon_1 \varepsilon_2, \text{ (mod. } a - bi)$$
$$\delta^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv \varepsilon_1 \varepsilon_2, \text{ (mod. } \alpha)$$

und

$$\alpha^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv -\varepsilon_1 \varepsilon_2, \text{ (mod. } a' + b'i)$$
$$\alpha^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv -\varepsilon_1 \varepsilon_2, \text{ (mod. } a' - b'i)$$
$$\alpha^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv -\varepsilon_1 \varepsilon_2, \text{ (mod. } \delta),$$

so daß man auch hier findet

$$\delta^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv \pm 1, \text{ (mod. } \alpha)$$
$$\alpha^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv \mp 1, \text{ (mod. } \delta).$$

Das oben schon angegebene Gesetz gilt demnach für alle Normen α und δ.

Zweitens. A und A' sind quadratische Reste zu α und zu δ, d. h.

$$(aa' \pm bb')^{\frac{1}{2}(\alpha - 1)} \equiv 1, \text{ (mod. } \alpha)$$
$$(aa' \pm bb')^{\frac{1}{2}(\delta - 1)} \equiv 1, \text{ (mod. } \delta),$$

woraus folgen soll, daß wenn α biquadratischer Rest zu δ ist auch δ Rest zu α werden muß.

Ebenso, wie im vorigen Beweise findet man

$$(a' \pm b'i)^{\frac{1}{2}(\alpha - 1)} \equiv 1, \text{ (mod. } a \pm bi)$$
$$(a \pm bi)^{\frac{1}{2}(\delta - 1)} \equiv 1, \text{ (mod. } a' \pm b'i),$$

und hieraus, wenn wiederum ± 1 mit ε_1, ε_2 bezeichnet wird

$$\left.\begin{array}{l} (a' + b i')^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv \varepsilon_1, \text{ (mod. } a + bi) \\ (a' + b'i)^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv \varepsilon_2, \text{ (mod. } a - bi) \\ (a' - b'i)^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv \varepsilon_1, \text{ (mod. } a - bi) \\ (a' - b'i)^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv \varepsilon_2, \text{ (mod. } a + bi) \end{array}\right\} \quad (13.)$$

Die rechten Seiten in der ersten und dritten, zweiten und vierten Kongruenz stimmen hier ganz überein, weil, wenn $(a' + b'i)^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} - \varepsilon_1$ mit $(a + bi)$ theilbar ist, auch $(a' - b'i)^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} - \varepsilon_1$ mit $(a - bi)$ theilbar sein muß.

Sind jetzt beide Normen α und δ von der Form $8n + 5$, so erhält man durch das biquadratische Reziprozitätsgesetz

$$\left.\begin{array}{l} (a + bi)^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv -\varepsilon_1, \text{ (mod. } a' + b'i) \\ (a - bi)^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv -\varepsilon_2, \text{ (mod. } a' + b'i) \\ (a - bi)^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv -\varepsilon_1, \text{ (mod. } a' - b'i) \\ (a + bi)^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv -\varepsilon_2, \text{ (mod. } a' - b'i); \end{array}\right\} \quad (14.)$$

sind sie nicht beide von dieser Form, so findet man

$$\left.\begin{array}{l} (a + bi)^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv \varepsilon_1, \text{ (mod. } a' + b'i) \\ (a - bi)^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv \varepsilon_2, \text{ (mod. } a' + b'i) \\ (a - bi)^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv \varepsilon_1, \text{ (mod. } a' - b'i) \\ (a + bi)^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv \varepsilon_2, \text{ (mod. } a' - b'i). \end{array}\right\} \quad (15.)$$

Aus den Kongruenzen (13.) folgt, in derselben Reihenfolge wie im ersten Falle:

$$\delta^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv \varepsilon_1\, \varepsilon_2, \text{ (mod. } a + bi) \text{ und (mod. } a - bi),$$

also

$$\delta^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv \varepsilon_1\, \varepsilon_2, \text{ (mod. } \alpha),$$

während man aus (14.) und (15.) übereinstimmend erhält

$$\alpha^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv \varepsilon_1\, \varepsilon_2, \text{ (mod. } \delta),$$

so daß, wenn α biquadratischer Rest zu δ, d. h.

$$\alpha^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv 1, \text{ (mod. } \delta),$$

also $\varepsilon_1\, \varepsilon_2 = 1$ ist, auch

$$\delta^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv 1, \text{ (mod. } \alpha)]$$

oder δ biquadratischer Rest zu α sein muß.

Drittens. A und A' sind ebenfalls quadratische Reste zu α und zu δ; es soll bewiesen werden, daß wenn α biquadratischer Nichtrest zu δ ist, auch δ Nichtrest zu α sein muß.

Der Beweis stimmt mit dem eben geführten ganz genau überein, nur hat man zuletzt

$$\alpha^{\frac{1}{4}(\delta - 1)} \equiv -1, \text{ (mod. } \delta),$$

also $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$ zu setzen, woraus folgt, daß

$$\delta^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)} \equiv -1, \text{ (mod. } \alpha),$$

oder δ biquadratischer Nichtrest zu α ist.

Eine Abkürzung in der Fassung des so eben bewiesenen Gesetzes gewinnt man noch durch die Betrachtung, daß, wenn α und δ quadratische Reste zu einander sind, die Größen A und A' gleichzeitig quadratische Reste oder Nichtreste zu beiden Primzahlen sind, wie bereits bewiesen worden ist. Man braucht demnach $\alpha\delta$ nur einmal in die Summe zweier Quadrate zu zerlegen und zu untersuchen, ob die dabei erhaltene ungerade Zahl quadratischer Rest oder Nichtrest zu α (oder wenn man will zu δ) ist.

Was nun den Gang des Beweises überhaupt betrifft, so ist zu bemerken, daß das biquadratische Reziprozitätsgesetz zwischen komplexen Primzahlen dabei vorausgesetzt wird. Schon die größere Einfachheit des letzteren Gesetzes in Vergleich zu dem hier zwischen nicht komplexen Primzahlen aufgestellten rechtfertigt den eingeschlagenen Weg. Auch ist klar, daß durch die Nachweisung der biquadratischen Beziehungen zwischen den ungeraden Primzahlen α und δ, wenn man sie auf einem andern Wege festgestellt hätte, für die zwischen den komplexen Primzahlen bestehenden nichts Erhebliches gewonnen wäre, indem dann die Vorzeichen in

$$(a + bi)^{\frac{1}{4}(\delta - 1)}, \text{ (mod. } a' + b'i) \text{ und } (a' + b'i)^{\frac{1}{4}(\alpha - 1)}, \text{ (mod. } a + bi)$$

immer noch unbestimmt bleiben.

Im dritten Paragraphen sind andere Grundbedingungen der biquadratischen Beziehungen zwischen den beiden Primzahlen α und δ angegeben worden, die mit den eben bewiesenen im gewissen Sinne Aehnlichkeit haben. Wenn man mit geringen Aenderungen in den Bezeichnungen

$$\alpha \equiv c^2, \text{ (mod. } \delta)$$
$$\delta = c'^2, \text{ (mod. } \alpha),$$

und $\alpha = a^2 + b^2$, $\delta = a'^2 + b'^2$ setzt, so ist

1. $\alpha^{\frac{1}{4}(\delta-1)} \equiv -1$, (mod. δ) und $\delta^{\frac{1}{4}(\alpha-1)} \equiv -1$, (mod. α),
wenn
$$(c' \pm b')^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} \equiv 1, \text{ (mod. } \alpha) \text{ und } (c \pm b)^{\frac{1}{2}(\delta-1)} \equiv 1, \text{ (mod. } \delta);$$
2. $\alpha^{\frac{1}{4}(\delta-1)} \equiv -1$, (mod. δ) und $\delta^{\frac{1}{4}(\alpha-1)} \equiv 1$, (mod. α),
wenn
$$(c' \pm b')^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} \equiv -1, \text{ (mod. } \alpha) \text{ und } (c \pm b)^{\frac{1}{2}(\delta-1)} \equiv -1, \text{ (mod. } \delta);$$
3. $\alpha^{\frac{1}{4}(\delta-1)} \equiv 1$, (mod. δ) und $\delta^{\frac{1}{4}(\alpha-1)} \equiv 1$, (mod. α),
wenn
$$(c' \pm b')^{\frac{1}{2}(\alpha-1)} \equiv 1, \text{ (mod. } \alpha) \text{ und } (c \pm b)^{\frac{1}{2}(\delta-1)} \equiv 1, \text{ (mod. } \delta).$$

Man sieht, daß beide Zahlen α und δ zu einander biquadratische Reste oder Nichtreste sind, wenn von zwei bestimmten Größen $(c' \pm b')$ und $(c \pm b)$ die eine quadratischer Rest zu α, die andere zu δ ist; ferner daß die eine biquadratischer Rest zur andern, die zweite aber Nichtrest der ersten ist, wenn von den Größen $(c' + b')$ und $(c \pm b)$ die eine quadratischer Nichtrest zu α und die andere gleichzeitig Nichtrest zu δ ist. Es folgt daraus, daß
$$c' \pm b' \text{ und } aa' \pm bb' \; (= A \text{ oder } A')$$
gleichzeitig quadratische Reste oder Nichtreste zu α sein werden, wie auch, daß
$$c \pm b \text{ und } aa' \pm bb'$$
gleichzeitig quadratische Reste oder Nichtreste zu δ sind. Könnte man umgekehrt diese Relationen beweisen, ohne von dem Principe der komplexen Zahlen Gebrauch zu machen, so würde das Reziprozitätsgesetz zwischen α und δ damit dargethan sein.

Ganz kurz soll noch angegeben werden, was sich aus dem Vorliegenden über das Stattfinden der Gleichungen
$$y^2 = \alpha\delta x^2 - 1$$
und
$$\alpha u^2 - \delta v^2 = 1,$$
die einander, wie oben gezeigt worden, ausschließen, feststellen läßt.

Wenn die letztere Gleichung möglich ist und u die Form $4n + 1$ hat, so ist bewiesen worden, daß dann α und δ zu einander biquadratische Reste sind. Das Umgekehrte darf aber hiermit noch nicht als dargethan angenommen werden, indem für gewisse Zahlen α und δ etwa die Gleichung $y^2 = \alpha\delta x^2 - 1$, für gewisse andere

$\alpha u^2 - \delta v^2 = 1$ möglich sein könnte. Demnach beschränkt sich das streng Bewiesene darauf, daß, wenn α biquadratischer Nichtrest zu δ und δ Rest zu α ist, wobei gleichzeitig A und A' quadratische Nichtreste zu α und zu δ sind, die Gleichung $\alpha u^2 - \delta v^2 = 1$ möglich sein muß. Denn $y^2 = \alpha\delta x^2 - 1$ kann nur dann bestehen, wenn es möglich ist den Gleichungen $y^2 = \alpha\delta x^2 \pm A$ (oder $\pm A'$) zu genügen, d. h. wenn wenigstens eine der Größen A und A' quadratischer Rest zu α und zu δ ist. Die Größe u muß in diesem Falle die Form $4n + 3$ haben. Die Gleichung $y^2 = \alpha\delta x^2 - 1$ dagegen ist stets möglich, wenn α und δ zu einander biquadratische Nichtreste sind.

§. 6.

Schließlich lassen sich den vorstehenden ganz ähnliche Betrachtungen auf die Gleichungen anwenden, mit deren Hülfe Legendre das quadratische Reziprozitätsgesetz zu beweisen suchte, wobei sich ergeben wird, weshalb dieselben den Beweis des Gesetzes nicht unmittelbar enthalten können.

Die zu Grunde gelegte Gleichung ist die immer mögliche

$$y^2 = \alpha\beta\gamma x^2 + 1, \tag{16.}$$

worin α eine Primzahl von der Form $4n + 1$, β und γ Primzahlen von der Form $4n + 3$ bedeuten. Da $\alpha\beta\gamma$ demnach die Form $4n + 1$ hat, so kann y nur eine ungerade, x eine gerade Zahl sein, woraus sich wie auf S. 4

$$\frac{y+1}{2} \cdot \frac{y-1}{2} = \alpha\beta\gamma \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

ergiebt. Leicht leitet man die folgenden Zerlegungen ab

$$\frac{y \pm 1}{2} = \alpha u^2, \; \frac{y \mp 1}{2} = \beta\gamma v^2, \; \alpha u^2 - \beta\gamma v^2 = \pm 1,$$

$$\frac{y \pm 1}{2} = \alpha\beta u^2, \; \frac{y \mp 1}{2} = \gamma v^2, \; \alpha\beta u^2 - \gamma u^2 = \pm 1,$$

$$\frac{y \pm 1}{2} = \alpha\gamma u^2, \; \frac{y \mp 1}{2} = \beta v^2, \; \alpha\gamma u^2 - \beta v^2 = \pm 1;$$

wenn man wie oben die Gleichung (16.) als die kleinste ihrer Art bestimmt und berücksichtigt, daß $y^2 = \alpha\beta\gamma x^2 - 1$ nicht möglich ist.

Es scheint hieraus hervorzugehen, daß die zuerst angegeben Gleichung stattfinden müßte, wenn α entweder quadratischer Rest oder quadratischer Nichtrest zu β und zu γ ist, und demzufolge die übrigen immer dann und nur dann erhalten würden, wenn α nicht gleichzeitig quadratischer Rest oder Nichtrest zu β und zu γ ist; Bedingungen, die anders ausgedrückt aussagen würden, daß die Gleichung $\alpha u^2 - \beta\gamma v^2 = \pm 1$

jedesmal dem Falle entspräche, daß β und γ gleichzeitig quadratische Reste oder Nichtreste zu α sind.

Es mag nur der Fall hervorgehoben werden, daß man

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 1, \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right) = 1$$

und demnach

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = 1, \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) = 1$$

hat. Dann hätte man dieser Annahme gemäß

$$\alpha u^2 - \beta\gamma \cdot v^2 = +1, \qquad (17.)$$

eine Gleichung, in der $\beta\gamma$ ähnlich wie δ in den vorausgegangenen Entwickelungen von der Form $4n + 1$ ist, so daß u als eine ungerade, v als eine gerade Zahl angenommen werden muß. Hat man $\alpha = 8n + 5$, so enthält die gerade Zahl v den Faktor 2 nur einmal, so daß man $v = 2kk'k'' \ldots.$ setzen kann, wenn unter $k, k', \ldots.$ ungerade Primzahlen verstanden werden. Nun ist aber

$$\alpha u^2 \equiv 1, \text{ (mod. } k, k', \ldots.),$$

also, wie auf S. 7, $kk'k'' \ldots$ quadratischer Rest, $2kk'k \ldots = v$ quadratischer Nichtrest, v^2 biquadratischer Nichtrest zu α; und da aus

$$\beta\gamma v^2 \equiv -1, \text{ (mod. } \alpha)$$

folgt, daß $\beta\gamma v^2$ biquadratischer Nichtrest und demnach $\beta\gamma$ biquadratischer Rest zu α ist, ein Resultat, daß man auch für $\alpha = 8n + 1$ ohne alle Schwierigkeit erhält, so muß man schließen, daß die Gleichung (17.) stets nur dann entstehen kann, wenn die Primzahlen β und γ nicht bloß quadratische, sondern beide gleichzeitig entweder biquadratische Reste oder Nichtreste zu α sind.

Schulnachrichten über das Königliche Pädagogium
von Michaelis 1860 bis Michaelis 1861.

I. Lehrverfassung.

Prima.

Ordinarius: Professor Dr. Voigt.

Religion. Lesung und Erklärung des ersten Briefs Johannis, des ersten Briefs Petri, des Briefs Jacobi, der Bergpredigt, mehrerer Parabeln nach dem Grundtext. Memoriren von Kirchenliedern. 2 St. Prof. Daniel.

Deutsch. Aufsätze, Vorträge und Disputirübungen. Die Zeit Goethe's und Schiller's; die Literatur des Mittelalters. 3 St. Prof. Daniel.

Lateinisch. Taciti Germania. Ciceronis Tuscul. V, 30—41, de oratore I, 1—20. Horat. carm. IV. I, 1—30, carmen saeculare, epodi selecti. Aufsätze, Scripta, Extemporalia; Memoriren horazischer Oden und eines Theils von Cic. de officiis. Die Privatlectüre umfaßte Horatii Epist. I. und nach freier Wahl Cic. Epp. ad Att. I, ad Famil. I. II., Hor. Sat. I. II. 8 St. Prof. Voigt.

Griechisch. Demosthenis orr. Olynth., de pace; Thucyd. II, 1—70. Homeri Il. XX—XXIV. Scripta, Extemporalia und mündliche Uebersetzungen aus Halm's Anleitung zum Uebersetzen Theil II, Cursus 2. Privatlectüre: Homeri Ilias. 6 St. Der Director.

Französisch. Montesquieu, Considérations sur la grandeur etc. chap. 12 sqq. Grammatik und Scripta nach Plötz Elementarbuch, II. Cursus. Mündliche Uebungen. 2 St. Der Director.

Geschichte. Von Carl dem Großen bis zum Westphälischen Frieden. 3 St. Prof. Daniel.

Mathematik. Im Winter: Stereometrie. Geometrische und trigonometrische Uebungen. Im Sommer: Kettenbrüche, unbestimmte Gleichungen, Permutationen, binomischer Satz und Anwendungen desselben, Trigonometrie; Lösung leichterer Aufgaben aus derselben. 4 St. Coll. Götting.

Physik. Im Winter: Optik. Im Sommer: Electricität und Magnetismus. 2 St. Coll. Götting.

Secunda superior.

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Dryander.

Religion. Kirchengeschichte vom Anfang bis zur Gegenwart. Memoriren von Kirchenliedern. 2 St. Cand. Jericke.

Deutsch. Poëtik: die lyrische Poësie (im W.), die dramatische Poësie (im S.). Aufsätze, freie Vorträge, Disputationen. 2 St. Prof. Daniel.

Lateinisch. Cicero orat. pro Sestio; Livius XXI. Virgil. Aeneis V. VI. VII. VIII. Privatlectüre: Liv. VI, 11—20. und Cic. pro Sulla. Scripta und Extemporalia, vierteljährlich ein Aufsatz; mündliche Uebersetzungen aus Süpfle's Aufgaben 2. Thl.; metrische Uebungen nach Seiffert's Palaestra Musarum. 10 St. Dr. Dryander.

Griechisch. Herodotus VI., Lysiae orr. sell., Homeri Ilias III. IV. I. II. X. Scripta, Extemporalia und mündliche Uebersetzungen aus Halm. Privatlectüre: Homeri Odyss. XV—XXIV. 6 St. Dr. Dryander.

Französisch. Charles XII par Voltaire. Grammatik und Scripta nach Plötz Elementarbuch, II. Curs. Mündliche Uebungen. 2 St. Der Director.

Geschichte. Im Winter: Griechische Geschichte. Im Sommer: Römische Geschichte bis zum Numantinischen Kriege. 3 St. Coll. Nagel.

Mathematik. Quadratische Gleichungen, Progressionen, Logarithmen; Aehnlichkeit der Figuren am Kreise, Goniometrie. Algebraische und geometrische Aufgaben. 4 St. Coll. Götting.

Physik. Elemente der Chemie. 1 St. Coll. Götting.

Secunda inferior.

Ordinarius: Coll. Nagel.

Religion. Im Winter: Das Leben Jesu nach den 4 Evangelien. Im Sommer: Das apostolische Zeitalter nach der Apostelgeschichte mit Zuziehung der apostolischen Briefe. Memoriren von Sprüchen und Kirchenliedern. 2 St. Cand. Krüger.

Deutsch. Die epische Poësie (W.). Die gemischten Dichtungsarten (S.). Declamirübungen und freie Vorträge; Aufsätze. 2 St. Dr. Thilo.

Lateinisch. Cic. orr. in Catilinam I. II., pro S. Roscio Amerino. Virgilii Aen. II, 400—III, 250. I. Vollständiger Cursus der Syntax nach Zumpt's Grammatik; Scripta, Extemporalia, mündliche Uebungen aus Süpfle. Metrische Uebungen. Privatlectüre: Caesar de bello civili I. II. 10 St. Coll. Nagel.

Griechisch. Xenoph. Anabasis V. VI. Homeri Odyssea XII. XIII. I. II, 1—140. daneben privatim lib. VIII. IX. X. Homerische Formenlehre; Einübung der Casuslehre; Wiederholung der unregelmäßigen Verba, Scripta und Extemporalia. 6 St. Coll. Nagel.

Französisch. }
Geschichte. } Mit Sec. sup. verbunden.

Mathematik. Gleichungen des ersten Grades mit mehreren unbekannten; Potenzen und Wurzeln; Flächenräume, Aehnlichkeit der Figuren. Arithmetische und geometrische Uebungen. 4 St. Coll. Götting.

Physik. Die einfachern Erscheinungen aus dem Gebiete der Electricität, des Magnetismus und der Optik. 1 St. Coll. Götting.

Tertia superior.

Ordinarius: Dr. Thilo.

Religion. Im Winter: das zweite Hauptstück. Im Sommer: Lesung des Evangeliums Sct. Matthaei in Luther's Uebersetzung. Memoriren von Sprüchen und Kirchenliedern. 2 St. Prof. Daniel.

Deutsch. Lesung und Erklärung mehrerer Gedichte Schiller's (Glocke, Klage der Ceres rc.); Declamirübungen und freie Vorträge über meist selbstgewählte historische Stoffe; Aufsätze über gegebene Aufgaben. 2 St. Coll. Weicker I.

Lateinisch. Curtius, IX. X. III. Ovid. Metam., ausgewählte Stücke aus lib. IV. V. VI. Metrische Uebungen. Syntax nach O. Schulz Grammatik §. 88—95. Scripta, Extemporalia und mündliche Uebungen aus Gruber's Uebungsbuch. 10 St. Dr. Thilo.

Griechisch. Xenoph. Anabas. IV. und II. Die unregelmäßigen Verba; die Präpositionen; Vocabeln nach Todt's Vocabularium. Scripta und Extemporalia. Dr. Thilo.

Französisch. Charles XII. par Voltaire; die unregelmäßigen Verba nach Plötz Elementarbuch, II. Curs.; Scripta und Extemporalia. Mündliche Uebungen. 2 St. Der Director.

Geschichte. Im Winter: Schluß der deutschen Geschichte. Preußische Geschichte. Im Sommer: Griechische Geschichte. 2 St. Coll. Nagel.

Geographie. Repetitorischer Cursus nach Daniel's größerem Lehrbuch §. 80—102. 2 St. Prof. Voigt.

Mathematik. Congruenz der Dreiecke. Die Lehre vom Parallelogramm, vom Kreise. Repetition der Buchstabenrechnung, Gleichungen des ersten Grades mit einer unbekannten. 4 St. Coll. Götting.

Tertia inferior.

Ordinarius: Coll. Weicker I.

Religion. } Mit Tertia sup. verbunden.
Deutsch. }

Lateinisch. Caesar de bello Gallico I, 30—45. (memorirt) IV—VI. Ovidius II, 1—328. III, 1—137. 513—733. IV, 55—165. 416—789. V, 1—250. 341—571. 642—661. VI, 146—600. Lehre von den Modi, Repetition der Casuslehre; Scripta, Extemporalia und mündliche Uebungen nach Gruber. Elemente der Prosodie und metrische Uebungen. 10 St. Coll. Weicker I.

Griechisch. Xenoph. Anabasis I. Memoriren von c. 1. Die verba contracta, muta, liquida und auf $\mu\iota$; Vocabeln nach Todt's Vocabularium; Scripta und Extemporalia. 6 St. Cand. Weicker I.

Französisch. }
Geschichte. } Mit Tertia sup. verbunden.
Geographie. }

Mathematik. Die Elemente der Geometrie bis zur Congruenz der Dreiecke (incl.), die Buchstabenrechnung und die Decimalbrüche. 4 St. Coll. Hahnemann (W.); Cand. Hickethier (S.).

Quarta.

Ordinarius: Coll. Jericke.

Religion. Im Winter: Das erste Hauptstück. Im Sommer: Das erste Buch Mose wurde gelesen und erklärt. Memoriren von Sprüchen, Kirchenliedern und des Catechismus. 2 St. Cand. Krüger.

Deutsch. Lesen nach Masius Lesebuch; Declamiren; Uebungen in der Orthographie und Interpunction, Aufsätze. 2 St. Cand. Krüger.

Lateinisch. Cornelius Nepos: Hamilcar, Hannibal, Cato, Atticus, Miltiades, Themistocles, Aristides, Pausanias, Cimon, Lysander, Pelopidas. Repetition der Formenlehre, Einübung der Casuslehre nach O. Schulz Grammatik und Aufgaben; Scripta und Extemporalia. Memoriren von Beispielen zu den Regeln und mehrerer Capitel aus Cornel. Nep. 10 St. Coll. Jericke.

Griechisch. Die Formenlehre bis zum Verbum purum (inclus.). Vocabeln aus Todt's Vocabularium. Scripta und Extemporalia. Gelesen wurden ausgewählte Stücke aus dem Lesebuch von Gottschick. 6 St. Cand. Rathmann.

Französisch. Mündliche und schriftliche Uebungen nach Plötz Elementarbuch I. Curs., Lection 51 bis zum Schluß. 2 St. Dr. Dryander.

Geographie. Europa nach Daniel's Lehrbuch. 2 St. Prof. Voigt.

Geschichte. Preußische Geschichte. 1 St. Coll. Jericke.

Rechnen. Practisches Rechnen nach Fölsing's Rechenbuch 2. Theil. 3 St. Rend. Hößler.

Zeichnen. 2 St. Kupferstecher Voigt.

Quinta.

Ordinarius: Cand. Rathmann.

Religion. Biblische Geschichte des Neuen Testaments. Memoriren von Sprüchen, Kirchenliedern und des Catechismus. 3 St. Prof. Daniel.

Deutsch. Uebungen im Lesen, Wiedererzählen und Declamiren; orthographische Dictate und Aufsätze. 2 St. Coll. Rathmann.

Lateinisch. Wiederholung des Pensum von Sexta. Einprägen der unregelmäßigen Verba. Elemente der Syntax nach O. Schulz Aufgaben I. Cursus. Scripta und Extemporalia. Uebersetzung und Erklärung ausgewählter Abschnitte von Schirlitz lat. Lesebuch. 10 St. Coll. Rathmann.

Französisch. Mündliche und schriftliche Uebungen nach Plötz Elementarbuch I. Cursus, Lection 1—50. Dazu die 4 Conjugationen. 3 St. Coll. Jericke.

Geographie. Asien, Afrika, Amerika und Australien nach Daniel's Leitfaden. 2 St. Prof. Voigt.

Rechnen. Regel de tri, Vertheilungsrechnung, Zinsrechnung nach Fölsing's Rechenbuch 2 Thl. 3 St. Rendant Hößler.

Naturgeschichte. Im Winter: Zoologie. Im Sommer: Botanik. 2 St. Rend. Hößler.

Zeichnen. 2 St. Kupferstecher Voigt.

Schreiben. 3 St. Rend. Hößler.

Sexta.

Ordinarius: Rendant Hößler.

Religion. Biblische Geschichte des Alten Testaments, Memoriren von Sprüchen, Kirchenliedern und des Catechismus. 3 St. Cand. Krüger.

Deutsch. Lesen von Erzählungen und Gedichten aus Masius Lesebuch; Uebungen im mündlichen und schriftlichen Wiedererzählen; Recitiren von Gedichten; orthographische Dictate. 3 St. Cand. Weicker II.

Lateinisch. Einübung der Formenlehre bis zum regelmäßigen Verbum (incl.) nach O. Schulz und Gercke's Uebungsstücken; Scripta und Extemporalia. Vocabeln nach Gercke. 9 St. Cand. Weicker II.

Geographie. Die Grundlehren nach Daniel's Leitfaden. Allgemeine Uebersicht über die fünf Erdtheile. 2 St. Rend. Hößler.

Rechnen. Die Bruchrechnung nach Fölsing's Rechenbuch I. Theil. 4 St. Rend. Hößler.

Naturgeschichte. Im Winter: Zoologie. Im Sommer: Botanik. 2 St. Rend. Hößler.

Zeichnen. 2 St. Kupferstecher Voigt.

Schreiben. 3 St. Lehrer Brodtmann.

Für das Hebräische sind 2 Classen für die Primaner und Secundaner, welche daran theilnehmen wollen, eingerichtet.

I. Repetition der Formenlehre mit schriftlichen Uebungen; Einiges aus der Syntax; Anfertigung schriftlicher Commentare und Scripta. Gelesen wurde Genesis cap. 12—17. Psalm 2. 3. 16. 17. 22. 23. 40—47. 72. 103. Habacuc c. 1. 2. 2. St. Coll. Jericke.

II. Cursus der Elementargrammatik mit schriftlicher und mündlicher Einübung. Gelesen wurden einige Abschnitte aus Brückner's Lesebuch. 2 St. Coll. Jericke.

Für den Gesangunterricht sind sämmtliche daran theilnehmende Schüler in zwei Classen getheilt; er wird in 2 St. für jede ertheilt vom Musikdirector Greger. Den Turnunterricht leitet in 3 St. Prof. Voigt.

Neu eingeführte Lehrbücher: Halm, Anleitung zum Uebersetzen aus dem Deutschen in das Griechische II. Thl. 2. Cursus; Süpfle, Aufgaben zu lateinischen Stilübungen 2. Thl.; v. Gruber, Uebungsbuch; Nägelsbach, Uebungen Heft 1.

Vertheilung der Lehrfächer unter die Lehrer.

	I	IIa	IIb	IIIa	IIIb	IV	V	VI	Summa
Dr. Kramer, Director	6 Griechisch 2 Französisch	2 Französisch		2 Französisch					12
Dr. Daniel, Professor, Inspector adjunct.	2 Religion 3 Deutsch 3 Geschichte	2 Deutsch		2 Religion			3 Religion		15
Dr. Voigt, Professor, Ordinarius von I	8 Latein			2 Geographie		2 Geographie	2 Geographie		14
Dr. Dryander, Oberlehrer, Ordinarius von IIa		10 Latein 6 Griechisch				2 Französisch			18
Nagel, College, Ordinarius von IIb		3 Geschichte	10 Latein 6 Griechisch	2 Geschichte					21
Dr. Thilo, College Ordinarius von IIIa			2 Deutsch	10 Latein 6 Griechisch					18
Götting, College	4 Mathematik 2 Physik	4 Mathematik 1 Physik	4 Mathematik 1 Physik	4 Mathematik					20
Weicker I., College, Ordinarius von IIIb				2 Deutsch	10 Latein 6 Griechisch				18
Jericke, College, Ordinarius von IV	2 Hebräisch	2 Hebräisch 2 Religion				10 Latein 1 Geschichte	3 Französisch		20
Hößler, Rendant Ordinarius von VI						3 Rechnen	3 Rechnen 3 Schreiben 2 Naturgesch.	4 Rechnen 2 Geographie 2 Naturgesch.	19
Rathmann, Hülfslehrer, Ordinarius von V					6 Griechisch	10 Latein 2 Deutsch			18
Weicker II., Hülfslehrer								9 Latein 3 Deutsch	12
Krüger, Hülfslehrer			2 Religion			2 Religion 2 Deutsch		3 Religion	9
Hickethier, Hülfslehrer					4 Mathematik				4
Brodtmann, Hülfslehrer								3 Schreiben	3
Voigt, Zeichenlehrer						2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen.	6
Greger, Gesanglehre	2 Gesang					2 Gesang			4
								Summa	231.

II. Verordnungen der hohen vorgesetzten Behörden.

1. Vom 16. October v. J. Bestimmungen über das Verhältniß des Religionsunterrichts der evangelischen Gymnasial- und Realschüler in der Schule zu dem kirchlichen Catechumenen- und Confirmanden-Unterricht, und die dabei zu befolgenden Vorschriften.

2. Vom 11. November v. J. Ausführliche Hinweisung auf die Mittel, den Turn-Unterricht an den Gymnasien als „integrirenden Theil ihrer Aufgaben“ zu fördern und zu heben.

3. Vom 4. Januar d. J. Nähere Erläuterung über die Verfügung wegen der Nachweisungen der persönlichen und dienstlichen Verhältnisse der Lehrer und wegen der Verwaltungsberichte.

4. Vom 10. Januar d. J. Bemerkungen über das bei der Prüfung der Abiturienten in der Religion und im Hebräischen, so wie bei der Abfassung der Maturitäts-Zeugnisse zu befolgende Verfahren.

5. Vom 1. Februar d. J. Mittheilung einer amtlichen Nachricht über das von dem Professor Herrig in Berlin geleitete, mit dem Friedrichs-Gymnasium verbundene Institut zur Ausbildung von Lehrern für die neuern Sprachen.

6. Vom 22. Februar d. J. Anweisung, daß fortan der 22. März als Geburtsfest des jetzt regierenden Königs Wilhelm Majestät, wie früher der 15. October, in angemessener Weise gefeiert werde.

7. Vom 25. Februar d. J. Empfehlung der von Dr. Bremiker herausgegebenen deutschen Bearbeitung seiner früher erschienenen Nova logarithmorum tabula Berolinensis.

8. Vom 16. März d. J. Mittheilung der Bestimmungen über die Anrechnung der Studienzeit, welche studirende Inländer auf Oesterreichischen Universitäten zugebracht haben, auf das Triennium resp. Quadriennium academicum.

9. Vom 21. Juni d. J. betreffend die am 1. October d. J. stattfindende Eröffnung eines sechsmonatlichen Cursus für Civil-Eleven an der Königl. Central-Turnanstalt.

10. Vom 29. Juni d. J. Aufforderung, behufs einer beabsichtigten Zusammenstellung über die höhern Unterrichts-Anstalten der Monarchie, über die wichtigsten Momente der Geschichte des Königl. Pädagogiums nach den gegebenen Andeutungen zu berichten.

III. Chronik der Schule.

Die Eröffnung des Schuljahrs fand am 9. October v. J. in gewohnter Weise durch die nach einer Ansprache des Unterzeichneten an sämmtliche Scholaren vollzogene feierliche Aufnahme der Novitien statt.

Am 15. October wurde das Geburtsfest Sr. Majestät des Hochseligen Königs Friedrich Wilhelms IV. in dem Betsaale feierlich begangen. Die Festrede hielt College Götting. Das Gefühl der über Se. Majestät nun schon seit so langer Zeit vom Herrn verhängten schweren Prüfung gab auch diesesmal der Feier den Character ernster Stille.

Am 2. Januar d. J. durchflog die Trauerkunde das preußische Land, daß es Gott dem Herrn über Leben und Tod gefallen, Se. Majestät König Friedrich Wilhelm IV. aus dieser Zeitlichkeit in Sein ewiges Reich abzurufen. Der Unterzeichnete unterließ es nicht, den Gefühlen der Trauer, in welche das ganze Land durch dieses Ereigniß versetzt war, bei der Eröffnung des Unterrichts am folgenden Tage in einer an die versammelten Scholaren gerichteten Ansprache Ausdruck zu geben. Eine gemeinsame Gedächtnißfeier Sr. Majestät für die gesammten Franckeschen Stiftungen fand am 2. Februar in dem großen Versammlungssaale in Gegenwart der Beamten, Lehrer und Lehrerinnen, so wie der Schüler und Schülerinnen der oberen Classen der acht in den Stiftungen befindlichen Schulen statt. Die Büste Sr. Majestät des Hochseligen Königs Friedrich Wilhelm IV. war auf einem schwarz beschlagenen, mit Epheu und einem Lorbeerkranz verzierten Piedestal aufgestellt. Die durch gemeinsamen und Chor-Gesang eingeleitete und beschlossene Trauerrede hielt der Unterzeichnete, in welcher er in kurzen Andeutungen darzulegen versuchte, was König Friedrich Wilhelm IV. war, was er wollte, was er wirkte*). Es war wohl Keiner unter den Anwesenden, der nicht einen tiefen Eindruck von der Feier und dem Ereigniß, dem sie gewidmet war, empfangen hätte.

Am 17. März, dem Sonntag Judica, wurde die feierliche Einsegnung der Hausscholaren Paul und Otto von Ramin, Otto und Erich von Itzenplitz und Huldreich Rennecke, sowie der Stadtscholaren Günther von Cloudt und Conrad Graf von Lüttichau durch den Herrn Pastor Seiler in dem Betsaale der Anstalt vollzogen, woran sich die gemeinsame Communion der Lehrer und der

---

*) Die Rede ist auf mehrfach ausgesprochnen Wunsch in der Buchhandlung des Waisenhauses gedruckt erschienen.

bereits confirmirten Hausscholaren, so wie mehrerer der anwesenden Eltern und Verwandten der eben Eingesegneten anschloß.

Am 21. März fand die Censur statt.

Am 22. März wurde das Geburtsfest Sr. Majestät König Wilhems I. in dem Betsaale der Anstalt feierlich begangen und damit das Wintersemester beschlossen. Die Festrede hielt College Weicker. Indem er zum Mittelpunkt derselben ein Wort des Hochseligen Königs Friedrich Wilhelms IV. nahm — „Es ist Gottes Wohlgefallen gewesen, Preußen durch das Schwert groß zu machen, durch das Schwert des Krieges nach außen, durch das Schwert des Geistes nach innen, des Geistes der Ordnung und der Zucht," wies er darauf hin, wie es vor Allem die Aufgabe der Schule sei, das Schwert des Geistes zu schärfen, den Geist der Ordnung und Zucht zu bilden, und so die Jugend des Volkes hinanzuführen zu jenem mannhaften Sinn, der sie befähige, dereinst dem Könige in Treue, Gehorsam und Ausdauer zu dienen.

Am 9. April wurde das Sommersemester in gewohnter Weise eröffnet und am 30. August mit der Censur geschlossen.

Das Lehrer-Collegium hat in diesem Jahre verhältnißmäßig wenige Veränderungen erfahren. Mit dem Schlusse des vorigen hatte der College Janke die Anstalt verlassen, um eine Lehrerstelle am Gymnasium zu Pyritz zu übernehmen. Er hatte dem Königlichen Pädagogium seit Michaelis 1854 theils als Hülfslehrer, theils als College angehört, und dieselbe durch seine mit großer Treue geleisteten Dienste zu aufrichtigem Danke verpflichtet. Die herzlichsten Wünsche des Lehrercollegiums und der Schüler begleiteten ihn in seinen neuen Wirkungskreis. Um die entstandene Lücke auszufüllen, trat mit dem Anfang des Schuljahrs der Candidat der Theologie Heinrich Wilhelm Rathmann aus Cracau bei Magdeburg als Hülfslehrer ein. Kurz vor Schluß des Schuljahrs verließ der Hülfslehrer Krüger die Anstalt, um als Hülfsprediger nach Coblenz zu gehen. Auch ihm folgt unser herzlichster Dank für die Liebe und Hingebung, mit welcher er hier gewirkt hat. Außerdem fand nur noch eine Veränderung statt, indem der Schulamts-Candidat Hickethier nach den Pfingstferien den mathematischen Unterricht in Unter-Tertia übernahm, welchen bis dahin der Oberlehrer an der Realschule Hahnemann ertheilt hatte. Uebrigens blieben wir von Störungen durch Krankheiten oder andere hindernde Ereignisse durch Gottes Gnade verschont.

Eine besondere Erwähnung endlich verdient es, daß mit dem Anfang dieses Schuljahrs die durch den in den beiden letzten Jahren vollendeten Neubau des südwestlichen Flügels des Anstaltsgebäudes gewonnenen neuen Räume in Gebrauch genommen wurden. Möge auf ihnen derselbe Segen ruhen, den der Herr so lange Zeit hindurch auf die alten gelegt hatte!

IV. Statistisches.

Im Laufe dieses Jahrs verließen fünf Scholaren nach abgelegter Maturitätsprüfung die Anstalt und zwar:

A. zu Ostern:

1. Der Stadtscholar Paul Matthias Kramer aus Berlin, Sohn des Directors der Franckeschen Stiftungen Herrn Kramer, $18\,^1/_4$ Jahr alt, evangelischer Confession, war 8 Jahr auf dem Königl. Pädagogium, 2 Jahr in Prima; er studirt Mathematik und Naturwissenschaften.
2. Der Hausscholar Ernst Hans Peter Franz von Sobeck aus Kruckow bei Jarmen in Vor-Pommern, Sohn des Rittergutsbesitzers Herrn von Sobeck auf Kruckow, $22\,^3/_4$ Jahr alt, evangelischer Confession, war 2 Jahr auf dem Königl. Pädagogium; er studirt Jura und Cameralia.

B. zu Michaelis:

3. Der Stadtscholar Ernst Otto Carl Thilo aus Halle, Sohn des verstorbenen Consistorialraths Herrn Dr. Thilo, $16\,^3/_4$ Jahr alt, evangelischer Confession, war $7\,^1/_2$ Jahr auf dem Königl. Pädagogium, 2 Jahr in Prima; er will Jura studiren.
4. Der Stadtscholar Friedrich Wilhelm Gotthelf Winkler aus Halle, Sohn des Herrn Botenmeister Winkler hierselbst, $19\,^3/_4$ Jahr alt, evangelischer Confession, war $3\,^1/_2$ Jahr auf dem Königl. Pädagogium, 2 Jahr in Prima; er will Theologie studiren.
5. Der Stadtscholar Carl Georg Otto Aurbach aus Nelben bei Halle, Sohn des Herrn Pastors Aurbach zu Nelben, 23 Jahr alt, evangelischer Confession; er will Theologie studiren.

Außerdem verließen die Anstalt 18 Scholaren und zwar aus

Prima: Niemeyer (Buchhändler), v. Bethmann (Landwirth).

Ober-Secunda: Kramer (Landwirth), Allihn (Privatstudium), Krüger (entfernt).

Unter-Secunda: Bieler (Apotheker), Colberg (desgleichen), Runde (desgleichen), Picht (Landwirth) Badike (Militär).

Ober-Tertia: Hermanni.

Quarta: von Behr, Graf von Lüttichau (Realschule), von Itzenplitz I. (Privatunterricht), von Jagow I. und II. (Wilhelms-Gymnasium in Berlin).

Sexta: Herr (Gymnasium in Oppeln).

Ein Scholar, der Ober-Secundaner von Brandt, welcher kurz vor Ostern an einem Brustleiden erkrankt war, begab sich nach dem Eintritt der mildern Jahreszeit in die Schweitz, um dort Genesung zu suchen. Zu unsrer herzlichen Betrübniß ist, während diese Zeilen geschrieben wurden, die Nachricht eingegangen, daß er anstatt sie zu finden, in rascher Entwickelung seiner Krankheit gestorben ist.

Neu aufgenommen wurden 47 Scholaren, und im letzten Quartal besuchten die Anstalt 159 Scholaren, von denen 21 in Prima, 9 in Ober-Secunda, 21 in Unter-Secunda, 16 in Ober-Tertia; 18 in Unter-Tertia, 26 in Quarta, 26 in Quinta, 22 in Sexta saßen. Unter ihnen befanden sich 24 Hausscholaren.

Für die Lehrer-Bibliothek sind nachfolgende etatsmäßige Anschaffungen gemacht worden:

J. P. Lange Theologisch-Homiletisches Bibelwerk: Briefe an die Corinther; Brief an die Hebräer.* Schnorr Bibel in Bildern.* Centralblatt für die gesammten Unterrichts-Angelegenheiten in Preußen.* Schmid Encyclopädie des Erziehungswesens.* Vergilius ed. Ribbeck. Tom. II. Guhl und Koner Das Leben der Griechen und Römer Thl. 1. Schumann Griechische Alterthümer. Curtius Griechische Geschichte Thl. 2. Preller Mythologie. Grimm Deutsches Wörterbuch.* Schäfer Literatur-Bilder. Waitz Deutsche Verfassungsgeschichte Bd. 3. Pertz Monumenta Germaniae Tom. XVIII. Kopp und Will Jahrbuch über die Fortschritte der Chemie 1859. Schlechtendal Flora Deutschlands.* Petermanns Mittheilungen.* Hoffmann Geographische Encyclopädie.* Berghaus Deutschland vor 50 Jahren Bd. 1. Stein und Hörschelmann Geographie. N. A.*

Die oratorische Bibliothek, welche überwiegend für den Gebrauch der Schüler bestimmt ist, wurde um nachfolgende Bücher vermehrt:

---

*) Die mit * bezeichneten Bücher sind Fortsetzungen.

Archenholz siebenjähriger Krieg; Becker's Weltgeschichte 8. Aufl.; Kuhn Spiegelbilder 3 Bde.; Würdig Der alte Dessauer; Jahn Freiheitskriege; Kletke neue historische Bilder; Kletke Länder und Völker; Masius Thierwelt; Hertzberg Rückzug der Zehntausend; Schmidt Schiffskapitän; Schlimpert Duval; Schmidt Schiller; Fichte; Mozart; Richards Fahrt; Köhler und Prinzen; Wachenhusen Reisebilder; Heinzelmann Deutsches Vaterland Bd. 2. 3.

Schließlich kann ich nicht unerwähnt lassen, daß im Laufe dieses Jahrs der Betsaal der Anstalt durch mehrere Gaben einen neuen Schmuck erhalten hat. Zu Ostern schenkte einer der abgehenden Hausscholaren von Sobeck als Zeichen seiner Dankbarkeit für den an dieser Stätte empfangenen Segen ein Paar kostbare silberne Armleuchter mit der Bestimmung, daß dieselben nur beim Gottesdienst, namentlich bei der Feier des heiligen Abendmahls gebraucht werden sollten; in ähnlicher Weise stiftete der Cand. Krüger bei seinem Abgange eine schwarze Tuchdecke für das Predigtpult mit der Bestimmung, daß dieselbe in der Passionszeit aufgelegt werde. Wenn wir uns dieser Gaben freuen, durch welche der Ort geschmückt worden ist, da die Ehre des Herrn wohnt, so freuen wir uns doch noch mehr der Gesinnungen, aus welcher sie hervorgegangen sind. Sie sind der beste Schatz und der schönste Schmuck, den eine Anstalt gewinnen kann.

Halle, im September 1861.

Kramer.

Anhang.

Deutsche und lateinische Themata aus dem Schuljahre von Michaelis 1860 bis Michaelis 1861.

Prima. Deutsche Themata.

1) Alte soll man ehren,
Junge soll man lehren,
Weise soll man fragen,
Narren soll man tragen.
2) Der Wohlthätige giebt sich reich,
Der Geizige nimmt sich arm.
3) Was lehren den Jüngling die Flügel des Ikarus?
4) Historische Anklänge im König Rother.
5) Riesenart und Riesensitte im deutschen und griechischen Volksepos.
6) Schilt mir Keinen von unten bis oben,
Daß dir ein Plätzchen bleibe zu loben,
Stopfe auch Keinen mit Lob so voll,
Daß der Tadel nicht weiß wohin er soll.
7) Wenn diese Welt wäre unsere feste Stätte,
Wir dürften klagen, daß sie hart uns bette:
Sie ist nur unser Reisenachtquartier,
Wer suchet Hausbequemlichkeiten hier?
8) Der Schnitter Tod.
9) O willst du Wildpret bringen nach Haus,
Schieß nicht nach Spatzen die Ladung aus.

10) Pro et contra Tagebücher.
11) Einsamkeit in der Gesellschaft und Gesellschaft in der Einsamkeit.
12) Unter welchen Einflüssen reifte Schiller als Mensch und als Dichter?
13) Trauerrede auf das Hinscheiden König Friedrich Wilhelms IV.
14) Nachahmung und Nachäffung.
15) Was sollen wir,
Was wollen wir.

Abituri:

Ostern. Daß nur Menschen wir sind, der Gedanke beuget das Haupt dir,
Doch daß Menschen wir sind, richtet dich freudig empor.

Michaelis. Die Macht des Gesanges, in unserer alten und neuen classischen Dichtung verherrlicht.

Lateinische Themata.

1) Demosthenis et Ciceronis exitus inter se comparentur.
2) De Scipionis Africani minoris laudibus.
3) Num recte dixit Cicero, veterum Romanorum imperium patrocinium orbis terrae verius quam imperium nominari posse?
4) Cur Augustus principem se et imperatorem quam regem vocari maluerit.
(Abituri): Quibus causis factum sit, ut Graeci libertatem a Dario atque Xerxe defendere potuerint, a Philippo non item?
5) Bellum Peloponnesiacum Graecis, triginta annorum Germanis aeque funestum fuisse.
6) a) Quam vim habuerit Ciceronis exilium ad commutanda eius reipublicae capessendae consilia et ad artium litterarumque studia. (Für die Aelteren).
b) Quibus rebus factum sit, ut Cicero in exilium eiiceretur. (Für die Neuen).
7) Comparetur pugna Salaminia, qua Themistocles Graeciae libertatem vindicavit a Persarum barbarie, cum pugna Pictaviensi Caroli Martelli, qua is Arabum vim a Germaniae peste depulit.
8) Horatium pium se praestitisse erga deos, erga parentes, erga amicos carminibus eius demonstretur. (Vorher von den Abituri bearbeitet).

Secunda sup. Deutsche Themata.

1) O weh der Lüge, sie befreiet nicht
Wie jedes andre wahrgesprochne Wort
Die Brust: sie macht uns nicht getrost, sie ängstet
Den, der sie heimlich schmiedet, und sie kehrt
Ein losgedrückter Pfeil, von einem Gotte
Gewendet und versagend, sich zurück
Und trifft den Schützen.
2) Monolog Johann des Seifensieders, ehe er das Geld zurückbrachte.
3) Ein leidenschaftlicher Mensch, ein ausgetretner Strom.
4) Eile mit Weile! Das war schon Kaiser Augustus Devise.
5) Odysseus Kampf mit dem Freiern und Walthers Kampf auf dem Wasichenstein.
6) Mein Steckenpferd.
7) Elegie am Sarge Friedrich Wilhelms IV.
8) Der Sonnenwirth vertheidigt sich vor seinem Richter. Rede.
9) Der Nachmittag in Stolp. Fortsetzung des 70sten Geburtstags.
10) Haben die beiden Freunde in Schillers Bürgschaft den Wunsch des Tyrannen erfüllt?
11) Dem wälschen Hahnen macht sein Kropf,
Dem Storch sein Langhals Freude,
Der Kessel schilt den Ofentopf;
Schwarz sind sie alle beide.
12) Der Bürge des Möros im Gefängniß. Monolog.
13) Gruß an die erste Lerche.
14) Die Eselsbrücke. Humoristische Skizze.
15) Hans Bendix und der Abt von St. Gallen nach der Rückkehr des Ersten vom Hofe. Dialog.
16) Die Familie der Stöcke.
17) Meine drei Wünsche.
18) Cyclopen und Phäaken.
19) Sei eine Schneck' im Rathen,
Ein Vogel in Thaten.
20) Jubelt Menschen oder zittert,
Wenn euch unser Ruf erschüttert. (Aufschrift auf eine Glocke).

Lateinische Themata.

1) Enarretur argumentum libri tertii Iliadis et explicetur, quo consilio totum illum librum poëta carmini inseruisse videatur.
2) Quibus causis Troiani adducti sint, ut equum ligneum a Graecis relictum in urbem traherent.
3) Exponatur, quaenam discordiae et rixae inter Agamemnonem et Achillem exortae causae fuerint quique eventus, et adiiciatur, quanam in re iniuria Achilli illata posita fuisse videatur.
4) a) Enarretur accuratius secundum Virgilium, quibus causis effectum sit, ut bellum inter Troianos et Rutulos exardesceret.
   b) Exponatur quemadmodum Lysias causam Eratostheni de caede intentam contra ipsum et eius amicos sustinuerit.
   c) Exornetur Thersitae oratio contra Agamemnonem ducem habita.

Secunda inf. Deutsche Themata.

1) a) Zuruf an scheidende Zugvögel.
   b) Der Tod des Großvaters. Idyll.
2) a) Eumäus das Ideal ächter Dienertreue.
   b) Wer ist arm, und wen nennt man arm?
3) a) Welche Charakterzüge des Aeneas treten schon im ersten Buch der Aeneis hervor?
   b) Das Glück ist eine Klippe, das Unglück eine Schule.
4) a) Wenn ich ein Handwerk erlernen sollte, welches würde ich wählen?
   b) Der Mensch und der Obstbaum.
5) a) In welcher Beziehung heißt die Zunge das Beste und das Schlechteste.
   b) Todtengespräch zwischen Hektor und Odysseus.
6) a) Mortimers Reise nach Rom.
   b) Lob der Linde.
7) a) Die Intrigue gegen den Sextus Roscius.
   b) Die Heerstraße. Eine Schilderung.
8) a) Der Hof des Bischofs von Bamberg.
   b) Georg und Lerse. — (Nach Göthe's Götz von Berlichingen.)
9) a) Der Geist im Heere Wallensteins.
   b) Was erfahren wir schon im „Lager“ von Wallensteins Leben, Charakter, Plänen? — (Nach Wallensteins Lager von Schiller.)
10) a) Die letzten Lebensjahre Götzes von Berlichingen.
   b) Der Wachtmeister in Wallensteins Lager.

5) a) Der freudenvolle Abend. Ein Idyll.
b) Volle Fässer klingen nicht, leere desto mehr.
6) a) Hatten gerade die Römer ein Recht, den Puniern ihre Untreue vorzuwerfen?
b) Vier Fabeln in Prosa.
7) a) Wer sich alle Büsche besieht kommt nicht zum Holze.
b) Ueber die Grenze zwischen Geiz und Sparsamkeit.
8) a) Mit welchem Rechte nennt Ovid die Metalle irritamenta malorum?
b) Grabe Wohlthaten in Marmor, aber schreibe Beleidigungen in den Sand.
9) a) Geschichte Kalafs vor seiner Bewerbung um Turandot.
b) Der Sperling. Eine Naturstudie.

14.

Nachricht

über das

Königliche Pädagogium zu Halle.

Herausgegeben

Stiftungen.

g.

I. Untersuchungen über die biquadratischen Reste und Nichtreste der Primzahlen von der Form $4n + 1$, vom Collegen Götting.
II. Schulnachrichten über das Königliche Pädagogium, vom Director.

Halle,
Druck der Waisenhaus-Buchdruckerei.
1861.

14