Stochastische partielle Differentialgleichungen 1.Ordnung

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt der

Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

von Herrn Christian Roth

geboren am 14. August 1972 in Neunkirchen/Saar

Gutachter:

1. Herr Prof. Dr. W. Grecksch (Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg)
2. Herr Prof. Dr. P. Kloeden (J.W. Goethe-Universität Frankfurt am Main)
3. Herr Prof. Dr. B. Schmalfuss (Fachhochschule Merseburg)

Halle (Saale), 12.07.2002

urn:nbn:de:gbv:3-000003600
[http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=nbn%3Ade%3Agbv%3A3-000003600]

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Eines der aktuellsten Forschungsgebiete in der stochastischen Analysis sind stochastische partielle Differentialgleichungen. Dies betrifft sowohl die Theorie als auch die Anwendungen. Beispielsweise können durch stochastische partielle Differentialgleichungen Prozesse in der Populationsgenetik [44], [45], die Ausbreitung von Epidemien [6], die Ausbreitung von Schadstoffen in der Atmosphäre [31], [47], zufällige Schwingungen u.v.a.m. modelliert werden. Auch die Aufgabe der optimalen Schätzung eines Systemzustandes auf der Grundlage verrauschter Beobachtungen (Filtration) führt auf stochastische partielle Differentialgleichungen.

Die obigen Beispiele führen auf Differentialgleichungen 2. Ordnung des Typs

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t,x) = \Delta_x v(t,x) + F(t,x,v(t,x)) + G(t,x,v(t,x),\nabla_x v(t,x))\dot{W}(t) \tag{1.1}$$

oder

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(t,x) = \Delta_x v(t,x) + F(t,x,v(t,x)) + G(t,x,v(t,x),\nabla_x v(t,x))\dot{W}(t). \tag{1.2}$$

$\dot{W}(t)$ ist dabei meistens ein weißes Rauschen bezüglich der Zeit oder bezüglich der Zeit und des Ortes. Oft wird eine Lösung gesucht, die vorgegebene Anfangsbedingungen und Randbedingungen erfüllt. Zur Untersuchung von stochastischen partiellen Differentialgleichungen und damit zusammenhängenden Anfangs- und Randwertproblemen haben sich verallgemeinerte Lösungsbegriffe eingebürgert. Diese beruhen auf der Interpretation der Anfangswert- bzw. der Anfangs- und Randwertaufgabe als stochastische Operatorgleichung. Dabei gibt es zwei grundsätzliche Herangehensweisen:

(1) Interpretation als stochastische Integralgleichungen;

(2) Stochastische Operatorengleichungen mit monotonen und koerzitiven Operatoren.

Bei der ersten Herangehensweise werden die stochastischen Integralgleichungen mittels der Greenschen Funktion des zugehörigen deterministischen linearen Problems von (1) oder (2) konstruiert, vgl. Manthey [42], [43], [45], oder in die Integralgleichung geht die Halbgruppe ein, deren erzeugender Operator der Laplaceoperator Δ_x mit den entsprechenden Randbedingungen ist, vgl. Grecksch [16] und DaPrato [55] und [50], [51]. Die Existenz von Lösungen wird durch die Anwendung von Fixpunktsätzen nachgewiesen. Bei der Anwendung der monotonen und koerzitiven Operatoren betrachtet man das Problem als stochastische Evolutionsgleichung über einem Evolutionstripel von Hilberträumen, vgl. Pardoux [4], [48], [49], [52], [53], und Krylov und Rozovskij [39]. Die Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen basieren dabei wesentlich auf dem Grundgedanken der Galerkinmethode. Beziehungen zwischen den beiden Herangehensweisen werden u.a. von Grecksch und Tudor [15] untersucht.

Neben der Untersuchung von Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen nimmt die Diskussion zur näherungsweisen Ermittlung von Lösungen einen breiten Raum ein. Üblich sind Galerkinmethoden [3], [28], [32], [34], [41] und Diskretisierungsmethoden [7], [9], [30], Grecksch und Kloeden [13], Grecksch und Blaar [1]. Oft werden (1) und (2) als stochastische Gleichungen im Sinne von Itô oder Stratonovich interpretiert, wenn beispielsweise $(W(t))_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess ist. Bekanntlich sind die Realisierungen eines Wiener-Prozesses mit Wahrscheinlichkeit 1 nicht differenzierbar. Somit ergibt sich eine weitere Interpretationsmöglichkeit, die darin besteht, dass der Wiener-Prozess durch eine Folge von Prozessen mit stückweise differenzierbaren Trajektorien ersetzt wird, siehe beispielsweise Gyöngy und Krylov [23], [25], [26], [27] oder Grecksch und Schmalfuß [14] oder Twardowska [65]. Der Vorteil dieser Methode besteht darin, dass die approximierten Probleme realisierungsweise Differentialgleichungen sind, auf die die deterministische Numerik angewandt werden kann. Schon im deterministischen Fall weisen partielle Differentialgleichungen erster Ordnung und die zugehörigen Anfangs- und Randwertprobleme Besonderheiten gegenüber Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf. Einer der Gründe ist, dass der Operator der Ortsableitungen im Falle 1. Ordnung nicht koerzitiv ist. Daher hat sich für diese Aufgaben eine recht eigenständige Forschung entwickelt [18], [19], [20], [21], [35], [36], [37], [38], [56], [66]. Vom Standpunkt der Anwendungen ist es naheliegend, auch bei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zufällige Effekte einzubeziehen.

Ein wichtiges Beispiel für partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung sind die Telegraphengleichungen, vgl. [15],

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} i(t,x) + C\frac{\partial}{\partial t} v(t,x) + Gv(t,x) &= 0 \qquad (1.3) \\ \frac{\partial}{\partial x} v(t,x) + L\frac{\partial}{\partial t} i(t,x) + Ri(t,x) &= 0. \qquad (1.4) \end{aligned}$$

Durch diese Gleichungen werden die Veränderungen der Stromstärke und Spannung in einem elektrischen Leiter beschrieben. In einer natürlichen Weise erhält man eine stochastische Version dieser Gleichungen durch die Hinzunahme von Rauschprozessen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} i(t,x) + C\frac{\partial}{\partial t} v(t,x) + Gv(t,x) &= h_1(t,x)dW_1(t) \qquad (1.5) \\ \frac{\partial}{\partial x} v(t,x) + L\frac{\partial}{\partial t} i(t,x) + Ri(t,x) &= h_2(t,x)dW_2(t), \qquad (1.6) \end{aligned}$$

wobei $W_1(t)$ und $W_2(t)$ unabhängige Wiener-Prozesse sind und die stochastischen Differentiale als Itô-Differentiale aufgefaßt werden. Weitere Anwendungen stochastischer partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung findet man in der Finanzmathematik. Beispielsweise wird durch eine

Gleichung des Types

$$dr(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left[r(t,x) + \frac{\lambda}{2}|\alpha(x)|^2\right] dt + \alpha(x)dW(t) \tag{1.7}$$

die Entwicklung einer Zinsstruktur $r(t,x)$ beschrieben, wobei x die Laufzeit der Kapitalanlage beschreibt. Eine Gleichung des Types

$$dr(t,x) = \left(\frac{\partial}{\partial x}r(t,x) + \tau^*(t,x)\int_0^x \tau(t,\nu)\,d\nu\right) dt + \tau^*(t,x)dW(t) \tag{1.8}$$

wird von Brace und Musiela in [2] benutzt, um den Kaufpreis von Optionen, Swaps und Futures zur Zeit t zu bewerten, die zur Zeit x fällig werden.

Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für eine Anfangswertaufgabe mit einer stochastischen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung durch Interpretation als stochastische Integralgleichung werden von H. Kunita in [40] mittels einer stochastischen Version der Charakteristiken-Methode hergeleitet. Dieser Weg wird auch in [5], [54], [63], [64] beschritten. In [17] wird einem Anfangswertproblem mit einer stochastischen partiellen Differentialgleichung eine Familie von parabolisierten Aufgaben zugeordnet, deren Lösungen in Wahrscheinlichkeit die Lösung des Ausgangsproblems approximieren. In [17] werden auch Regularitätsaussagen der Lösungen bewiesen. Weitere Regularitätsaussagen werden in [8] und [10] gemacht.

Anliegen der vorliegenden Arbeit ist die näherungsweise Ermittlung von Lösungen stochastischer partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung. Das erste Kapitel ist Lösungsbegriffen, Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen bei stochastischen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung gewidmet. Es wird auf die Charakteristikenmethode [40], die Methode der parabolischen Regularisierung [17] und die Anwendung von Halbgruppen [55] eingegangen, und Beziehungen zwischen den einzelnen Lösungsbegriffen werden diskutiert. Theorem 2.5 enthält eine Aussage über die stetige Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen, wenn die Lösungen mit der Charakteristikenmethode konstruiert werden. Für den Fall einer linearen Gleichung wird die Stetigkeit im quadratischen Mittel bezüglich der Zeit gezeigt (Theorem 2.6).

Im zweiten Kapitel werden finite Differenzenmethoden für ein Anfangswertproblem mit einer stochastischen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung diskutiert. Ausführlich wird auf den linearen Fall

$$d_t v(t,x) + a v_x(t,x)\,dt + bv(t,x)\,dW(t) = 0 \tag{1.9}$$

$$v(0,x) = f(x), \quad t \geq 0, \; x \in \mathbb{R}^1 \tag{1.10}$$

eingegangen. Eine Version des „Forward-Time-Forward-Space“-Schema (FTFS-Schema) für diese Aufgabe ist durch

$$u_k^{n+1} = (1 + a\frac{\Delta t}{\Delta x})u_k^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}u_{k+1}^n - bu_k^n(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \tag{1.11}$$

gegeben. Im Teilkapitel 3.2 werden die Begriffe der Konsistenz (Definition 3.1) und Stabilität (Definition 3.2) eingeführt. Die Konsistenz und die Stabilität sind dem deterministischen Fall angelehnt. Hier wird ein Stabilitätsbegriff gewählt, der das Fehlerwachstum auf höchstens exponentielles Wachstum beschränkt. In den Theoremen 3.1 und 3.2 wird die Stabilität des stochastischen FTFS-Schemas (1.11) und eines Lax-Friedrich-Verfahrens für (1.9) bewiesen. Das FTFS-Verfahren ist auch konsistent (Theorem 3.3), und für dieses Beispiel folgt hieraus auch die die schwache Konvergenz (Theorem 3.4).

Bei deterministischen Gleichungen ist im linearen Fall bei der Stabilitätsanalyse auch die Anwendung der Fourier-Transformation üblich. Dieser Grundgedanke ist auch für den stochastischen Fall hilfreich. Es gelingt im Theorem 3.5 die Formulierung eines notwendigen und hinreichenden Stabilitätskriteriums. Korollar 3.1 gibt einen Spezialfall an, wo aus der Stabilität des zugehörigen deterministischen Problems die Stabilität des stochastischen Problems folgt. Schließlich wird auf die Stabilität von Mehrschrittverfahren eingegangen. Das Theorem 3.7 zeigt, dass der hier gewählte Konsistenzbegriff auch hinreichend für die schwache Konvergenz eines Differenzenverfahrens im Falle einer nichtlinearen stochastischen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung ist.

Das 4. Kapitel beinhaltet eine Approximationsaussage (Theorem 4.1), wenn der Wiener-Prozess durch eine Folge von Prozessen mit stückweise differenzierbaren Trajektorien ersetzt wird. Für die approximierenden Probleme können die Stabilität und die Konsistenz bewiesen werden. Schließlich werden im Teilkapitel 4.3.2 Systeme von partiellen Differentialgleichungen untersucht.

2. Hyperbolische stochastische partielle Differentialgleichungen

Im vorliegenden Kapitel erfolgt eine Darstellung von Lösungsbegriffen stochastischer partieller Differentialgleichungen und der entsprechenden Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen. Grundlegend sind dabei die Arbeiten von H. Kunita, [40], und von W. Grecksch und C. Tudor, [17], die Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen zum einen mit der Charakteristikenmethode, zum anderen mit der Methode der parabolischen Regularisierung herleiten. Im Anschluß werden die Wechselbeziehungen zwischen den Lösungsbegriffen im hyperbolischen Fall untersucht. Am Ende dieses Kapitels findet sich eine Aufstellung von Eigenschaften der Lösungen.

2.1 Lösungsbegriffe

2.1.1 Lösungsbegriff nach Kunita

Definition 2.1. Ein lokaler $C^{m,\alpha}$-Prozeß X_t heißt lokales $C^{m,\alpha}$-Martingal, falls die gestoppten Prozesse $D^k X_t^{T_n(x)}$, $\mid k \mid \leq m$, $n = 1, 2, ...$ Martingale sind für jedes x, wobei $T_n(x)$ eine erreichbare, unterhalbstetige Stoppzeit ist. Dabei ist $C^{m,\alpha}$, der Raum der m-mal stetig differenzierbaren Funktionen, wobei die m-te Ableitung α-Hölderstetig ist. k bezeichnet einen Multi-Index nichtnegativer ganzer Zahlen, $\mid k \mid = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ und $D^k = \frac{\partial}{\partial x_1}^{k_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}^{k_n}$.

H. Kunita betrachtet in [40] Differentialgleichungen der Form

$$du_t = \sum_{j=1}^{n} F^{(j)}(t, x, u_t, \partial u_t) \circ dW_t^j + F^{(0)}(t, x, u_t, \partial u_t)dt. \tag{2.1}$$

Dabei sind die $F^{(j)}(t, x, u, p)$, $j = 1, \cdots, n$ stetige Funktionen in $(t, x, u, p) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$, stetig differenzierbar in t und $C^{m+2,\alpha}$-Funktionen von (x, u, p). m ist eine positive ganze Zahl größer gleich 3. ∂u_t bezeichnet den Vektor der partiellen Ableitungen $(\partial_1 u_t, \cdots, \partial_n u_t)$ von u_t nach $x_1, \cdots, x_n$, und $W_t = (W_t^1, \cdots, W_t^n)$ ist ein n-dimensionaler Wiener-Prozeß, wobei die W^i, $i = 1, \cdots, n$, Werte in $\mathbb{R}$ annehmen. $\circ dW_t^j$ bezeichnet hier das Stratonovich-Differential. Mit der Beziehung

$$\int_0^t f(x_s) \circ dW(s) = \int_0^t f(x_s)dW(s) + \frac{1}{2}\langle f(x), W\rangle_t \tag{2.2}$$

wird der Zusammenhang zwischen dem stochastischen Integralbegriffen von Itô und Stratonovich hergestellt, wobei $\langle f(x), W \rangle_t$ die quadratische Variation bezeichnet. Im allgemeinen ist für (2.1) nur eine lokale Lösungsdefinition möglich.

Definition 2.2. Gegeben sei eine C^1-Funktion $\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Ein zufälliges Feld $u_t(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0\ , T(x))$ mit Werten in $\mathbb{R}^1$ heißt lokale Lösung der Gleichung (2.1) mit der Anfangswertfunktion $u_0(x,\omega) = \Phi(x)$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- $T = T(x,\omega)$ ist eine erreichbare, unterhalbstetige Stoppzeit.
- $u_t(x)$, $0 \le t \le T(x,\omega)$ ist ein lokales $C^{1,\alpha}$-Semimartingal und erfüllt

$$\begin{aligned} u_t(x) &= \Phi(x) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t F^{(j)}(r, x, u_r(x), \partial u_r(x)) \circ dW_r^j \\ &\quad + \int_0^t F^{(0)}(r, x, u_r(x), \partial u_r(x)) dr \end{aligned} \tag{2.3}$$

  für alle (t, x), so dass $t < T(x,\omega)$ f.s..

Ist $T(x,\omega) = \infty$ so heißt die Lösung global.

Setzt man $W_t^0 \equiv t$, so läßt sich Gleichung (2.3) schreiben als

$$u_t(x) = \Phi(x) + \sum_{j=0}^{n} \int_0^t F^{(j)}(r, x, u_r(x), \partial u_r(x)) \circ dW_r^j. \tag{2.4}$$

2.1.2 Ein verallgemeinerter Lösungsbegriff

Es seien K ein separabler Hilbertraum und $(W(t), \mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ ein K-wertiger Wiener-Prozeß definiert auf dem vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, adaptiert zur Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, d.h. für $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ gilt $(\mathcal{F}_s) \subset (\mathcal{F}_t)$ für $s \le t \le T < \infty$. Man bezeichnet mit $(\mathcal{F}_\infty) = \bigcup_{t\ge 0}(\mathcal{F}_t)$. Es bezeichne E die mathematische Erwartung bezüglich P. Weiterhin seien

$$\begin{aligned} A &: [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1, \\ B &: [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \longrightarrow K \end{aligned}$$

meßbare Funktionen in allen Variablen (t, ω, x, u), $\mathcal{F}_t$-adaptiert für fixierte t, x, u, und X_0 sei eine $\mathcal{F}_0$-meßbare $L^2(\mathbb{R}^n)$-wertige Zufallsvariable. Weiterhin bezeichnen

$$b_i : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^1,\ i = 1, \cdots, n,$$

meßbare Funktionen.

Es wird die folgende semilineare, stochastische, partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\begin{aligned} dX(t,x) &= \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[b_i(t,x)X(t,x)] + A(t,x,X(t,x))\right] dt \\ &\quad + B(t,x,X(t,x))dW(t), \;\; t \in [0,T] \end{aligned} \tag{2.5}$$

mit

$$X(0,x) = X_0(x) \tag{2.6}$$

betrachtet. Die zu Gleichung (2.5) regularisierte, parabolische Familie ist eine Familie stochastischer Differentialgleichungen 2. Ordnung, die für alle $\varepsilon > 0$ durch

$$\begin{aligned} dX_\varepsilon(t,x) &= \left[\varepsilon \triangle X_\varepsilon(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[b_i(t,x)X_\varepsilon(t,x)] + A(t,x,X_\varepsilon(t,x))\right] dt \\ &\quad + B(t,x,X_\varepsilon(t,x))dW(t), \;\; t \in [0,T] \end{aligned} \tag{2.7}$$

mit $X_\varepsilon(0,x) = X_0(x)$ definiert sind, wobei $\triangle$ den Laplace-Operator bezüglich x bezeichnet. Diese beiden Gleichungen (2.5) und (2.7) sind Spezialfälle der folgenden Gleichung

$$\begin{aligned} dX(t,x) &= \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[a_{ij}(t,x)\frac{\partial X(t,x)}{\partial x_j}] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[b_i(t,x)X(t,x)] + A(t,x,X(t,x))\right] dt \\ &\quad + B(t,x,X(t,x))dW(t), \;\; t \in [0,T], \end{aligned} \tag{2.8}$$

mit $X(0,x) = X_0(x)$, wobei

$$a_{ij} \; : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^1$$

meßbare, beschränkte Funktionen sind. Wir bezeichnen mit $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ den Sobolev-Raum, der auf $\mathbb{R}^n$ definierten quadratisch integrierbaren Funktionen, deren erste verallgemeinerte Ableitungen quadratisch intgrierbar sind. Der Dualraum werde mit $W_2^{-1}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Eine Lösung von (2.8) ist wie folgt definiert:

Definition 2.3. Eine $W_2^1(\mathbb{R}^n)$-Lösung der Gleichung (2.8) ist ein meßbarer, adaptierter $L^2(\mathbb{R}^n)$ -wertiger Prozeß $(X(t,\cdot))_{t\in[0,T]}$, so dass:

(i) $X(t,\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$ P-f.s., für fast alle $t \in [0,T]$.

(ii) $E\left[\int_0^T \|X(t)\|^2_{W_2^1(\mathbb{R}^n)} dt\right] < \infty$.

(iii) Für alle $v \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} X(t,x)v(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} X_0(x)v(x)dx - \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} a_{ij}(s,x)\frac{\partial X(s,x)}{\partial x_j}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dxds \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} b_i(s,x)X(s,x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dxds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} A(s,x,X(s,x))v(x)dxds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} B(s,x,X(s,x))v(x)dxdW(s), \end{aligned} \tag{2.9}$$

für fast alle $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$.

Entsprechend definiert man eine Lösung von (2.5) wie folgt:

Definition 2.4. Eine verallgemeinerte Lösung der Gleichung (2.5) ist ein meßbarer, adaptierter $L^2(\mathbb{R}^n)$-wertiger Prozeß $(X(t,\cdot))_{t\in[0,T]}$, so dass:

(i) $E\left[\int_0^T \|X(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt\right] < \infty$.

(ii) Für alle $v \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} X(t,x)v(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} X_0(x)v(x)dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} A(s,x,X(s,x))v(x)dxds \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} b_i(s,x)X(s,x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dxds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} B(s,x,X(s,x))v(x)dxdW(s), \end{aligned} \tag{2.10}$$

für fast alle $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$.

Für die in den folgenden Kapiteln oft betrachtete Differentialgleichung

$$d_t v(t,x) + av_x(t,x)dt + bv(t,x)dW(t) = 0, \tag{2.11}$$

wobei $v(x,0) = v_0(x) = f(x), t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^1$, benutzen wir die folgende Definition:

Definition 2.5. Eine Lösung von (2.11) ist ein Zufallsfeld $(v(t,x))_{x\in\mathbb{R},\, t\in[0,T]}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $(v(t,x))_{t\in[0,T]}$ ist ein zur Standardfiltration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ adaptierter Prozeß für alle $x \in \mathbb{R}^1$.

(ii) Es existiert $\frac{\partial}{\partial x}v(t,x)$ stetig für jedes $t \in [0,T]$ mit Wahrscheinlichkeit 1.

(iii) $v(t,\cdot)$ ist $L^2(\mathbb{R}^1)$-wertig.

(iv) Es ist $v(0,x) = v_0(x) = f(x) \in L^2(\mathbb{R}^1)$.

(v) Die Gleichung (2.11) gilt für alle $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^1$ mit Wahrscheinlichkeit 1.

Wenn eine Lösung im Sinne der Definition 2.2 existiert, so ist dieser Prozeß auch Lösung im Sinne der Definition 2.3, wenn

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^n \int_0^t F^{(j)}(s,x,X_s,\partial X_s) \circ dW_s^j \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} B(s,x,X(s,x))v(x)dxdW(s) + \frac{1}{2}\Big\langle B(s,x,X(s,x))v(x), W\Big\rangle_t. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Aus Definition 2.3 folgt natürlich (2.10), d.h. es liegt eine Lösung im Sinne von Definition 2.4 vor. Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch. Der Lösungsbegriff in Definition 2.5 ergibt sich auch aus Definition 2.2 unter Beachtung von (2.2) und indem man für $T(x,\omega)$ einen deterministischen Zeitpunkt $T > 0$ wählt.

2.1.3 Der milde und der starke Lösungsbegriff

Wir betrachten einen weiteren Lösungsbegriff. Es seien $H = L^2(\mathbb{R}^1)$, $f \in H$, $t \geq 0$. Dann führen wir eine Familie $(T_t)_{t\geq 0}$ von Operatoren ein, die für $f \in H$ durch $(T_t f)(x) = f(x+t)$ definiert sind. $(T_t f)$ definiert eine parametrische Halbgruppe, denn es gilt für f, $g \in H$, α, $\beta \in \mathbb{R}^1$:

$$\begin{aligned}
(T_0 f)(x) &= f(x), \\
(T_h T_t f)(x) &= T_h((T_f)(x)) = (T_h f)(x+t) = f(x+t+h) = (T_{t+h} f)(x), \\
\text{und} \qquad (T_t \alpha f)(x) + (T_t \beta g)(x) &= \alpha f(x+t) + \beta g(x+t) \\
&= (\alpha f + \beta g)(t+x) = (T_t(\alpha f + \beta g))(x).
\end{aligned}$$

Weiterhin erhält man mit der Definition der Norm in H

$$\begin{aligned}
\| T_t f \|_H^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x+t)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = \| f \|_H^2 .
\end{aligned}$$

Definiert man einen Operator $\mathcal{A}$ mit $D(\mathcal{A}) := C^1(\mathbb{R}^1) \cap L^2(\mathbb{R}^1)$ durch

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A} f)(x) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{T_h f(x) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),
\end{aligned}$$

so stellt man fest, dass $D(\mathcal{A})$ in H dicht liegt und $\mathcal{A} f = f'$ infinitesimaler Operator der Halbgruppe von Kontraktionen $(T_t f)(x) = f(x+t)$ ist. Damit können wir für (2.11) mit $a = -1$ einen weiteren Lösungsbegriff einführen. Wir formulieren die Definition für die allgemeinere Gleichung (2.5).

Definition 2.6. $X(t,x)$ heißt milde Lösung von (2.5) mit $n = 1$ und $b_i(t,x) \equiv 1$, wenn

(i) $X(t,x)$ die Gleichung

$$X(t,x) = T_t X_0(x) + \int_0^t T_{t-s} A(s,x,X(s,x))ds + \int_0^t T_{t-s} B(s,x,X(s,x))dW(s) \quad (2.13)$$

erfüllt.

(ii) $X(t,\cdot)$ ist ein L^2-wertiger, $\mathcal{F}_t$-meßbarer Prozeß.

(iii) Es gilt: $\sup_{t\in[0,T]} E \int_{\mathbb{R}^1} X^2(t,x)dx < \infty$.

Beispiel 2.1. Setzt man in der Gleichung

$$\begin{aligned}
dv(t,x) + a v_x(t,x)dt + b(t,x)v(t,x)dW(t) &= 0, \\
v(0,x) &= v_0(x) \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

$b = 0$ und $a = -1$, so ist $v(t,x) = T_t v_0(x) = v_0(t+x)$. Wenn $v_0 \in D(\mathcal{A})$, dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} &= \frac{\partial v(\bar{t})}{\partial \bar{t}}\Big|_{\bar{t}=x+t} \\ \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} &= \frac{\partial v(\bar{t})}{\partial \bar{t}}\Big|_{\bar{t}=x+t}. \end{aligned}$$

Damit ist $T_t v_0(x)$ Lösung des deterministischen Problems $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}$, $v(0,x) = v_0(x)$.

Beispiel 2.2. Es sei $a \in \mathbb{R}^1$, $a \neq 0$. Dann ist auch $(T_t f)(x) = f(x+at)$ eine Halbgruppe von Kontraktionen. Für den infinitesimalen Operator ergibt sich

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}f)(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(T_h f)(x) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+ah) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+ah) - f(x)}{ah}\frac{ah}{h} = af', \end{aligned} \tag{2.15}$$

d.h.

$$\mathcal{A}f = a\frac{\partial}{\partial x}. \tag{2.16}$$

Damit kann die milde Lösung von (2.14) ermittelt werden:

$$\begin{aligned} v(t,x) &= T_t v_0(x) - \int_0^t T_{t-s}(b(s,x)v(s,x))dW(s) \\ &= v_0(x+at) - \int_0^t b(x+a(t-s),s)v(x+a(t-s),s)dW(s). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Man betrachte das Problem

$$\left.\begin{aligned} dX &= AX\,dt + \textstyle\sum_{k=1}^N B_k X\,d\beta_k \\ X(0) &= x \in H, \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

wobei $A : D(A) \subset H \to H$ und $B_k : D(B_k) \subset H \to H,\ k = 1,...,N$ die Generatoren von zwei Halbgruppen sind, nämlich von $S(t) = e^{tA}$ und $S(t) = e^{tB_k}$, und $\beta_1(\cdot),...,\beta_N(\cdot)$ eine endliche Anzahl unabhängiger, reellwertiger Wiener-Prozesse sind. Für dieses Problem (2.18) führen G. Da Prato und J. Zabczyk (vgl. [55]) den Begriff der starken Lösung folgendermaßen ein:

Definition 2.7. Ein H-wertiger vorhersagbarer Prozeß $X(t)$, $t \in [0,T]$ heißt starke Lösung von Gleichung (2.18), falls $X(t)$ P_T-f.s. Werte in $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ annimmt, so dass

(i) für alle $k = 1,...,N$ gilt:

$$P\left(\int_0^T (|AX(s)| + |X(s)|)\,ds < +\infty\right) = 1, \tag{2.19}$$

$$P\left(\int_0^T \|B_k(X(s))\|^2_{L_2^0}\,ds < +\infty\right) = 1, \tag{2.20}$$

(ii) für beliebiges $t \in [0,T]$ P-f.s. die Beziehung

$$X(t) = \xi + \int_0^t [AX(s) + f(s)]\, ds + \sum_{k=1}^{N} \int_0^t B_k(X(s))\, d\beta_k(s) \tag{2.21}$$

erfüllt ist.

Für eine spezielle stochastische Gleichung in zwei Ortskoordinaten

$$\begin{aligned} v(t,x,y) - v(0,x,y) \quad &+ \quad a_1 \int_0^t v_x(s,x,y)\, ds \\ &+ \quad a_2 \int_0^t v_y(s,x,y)\, ds + b \int_0^t v(s,x,y)\, dW(s) = 0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

mit der Anfangswertfunktion

$$v(0,x,y) = f(x,y), \; f \in L^2(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1) \tag{2.23}$$

definiert man die Lösung gemäß Definition 2.5 wie folgt.

Definition 2.8. Eine Lösung von (2.22) ist ein Zufallsfeld $(v(t,x,y))_{x,y\in\mathbb{R},t\in[0,T]}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $(v(t,x,y))_{t\in[0,T]}$ ist ein zur Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ adaptierter Prozeß für alle $x, y \in \mathbb{R}^1$.

(ii) Es existieren $\frac{\partial}{\partial x} v(t,x,y)$ und $\frac{\partial}{\partial y} v(t,x,y)$ stetig für jedes $t \in [0,T]$ mit Wahrscheinlichkeit 1.

(iii) $v(t,\cdot,\cdot)$ ist $L^2(\mathbb{R}^1)$-wertig.

(iv) Es gilt $v(0,x,y) = v_0(x,y) = f(x,y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

(v) Die Gleichung (2.22) gilt für alle $t \in [0,T]$, x, $y \in \mathbb{R}^1$ mit Wahrscheinlichkeit 1.

2.2 Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen

2.2.1 Existenz und Eindeutigkeit mittels Charakteristikenmethode

Kunita beweist in [40] die beiden folgenden Theoreme zur Existenz- und Eindeutigkeit mit Hilfe der Charakteristikenmethode. Man definiert dazu die Charakteristiken, die zu (2.3) assoziiert sind als

$$\begin{aligned} d\xi_t &= -\sum_{j=0}^{n} F_p^{(j)}(t,\xi_t,\eta_t,\zeta_t) \circ dW_t^j \\ d\eta_t &= \sum_{j=0}^{n} \Big[F^{(j)}(t,\xi_t,\eta_t,\zeta_t) - F_p^{(j)}(t,\xi_t,\eta_t,\zeta_t) \cdot \zeta_t \Big] \circ dW_t^j \\ d\zeta_t &= \sum_{j=0}^{n} \Big[F_x^{(j)}(t,\xi_t,\eta_t,\zeta_t) + F_u^{(j)}(t,\xi_t,\eta_t,\zeta_t) \cdot \zeta_t \Big] \circ dW_t^j . \end{aligned} \tag{2.24}$$

Zu gegebenem $(x, u, p) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d$ existiert eine eindeutige Lösung startend im Zeitpunkt 0 in (x, u, p). Die Lösung $(\xi_t(x, u, p), \eta_t(x, u, p), \zeta_t(x, u, p))$, $t \in [0, T(x, u, p))$ ist ein stetiges lokales Semimartingal, wobei $T(x, u, p)$ die Explosionszeit ist. Ist die Anfangswertfunktion $\Phi(x)$ in (2.3) eine $C^{l+1,\alpha}$-Funktion, so definiert man lokale $C^{l,\beta}$-Semimartingale

$$(\bar{\xi}_t(x, u, p), \bar{\eta}_t(x, u, p), \bar{\zeta}_t(x, u, p)), \ t \in [0, \bar{T}(x, u, p)),$$

wobei $\bar{T} = T(x, \Phi(x), \partial\Phi(x))$, $\beta \leq \alpha$, wie folgt:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_t(x) &= \xi_t(x, \Phi(x), \partial\Phi(x)) \\ \bar{\eta}_t(x) &= \eta_t(x, \Phi(x), \partial\Phi(x)) \\ \bar{\zeta}_t(x) &= \zeta_t(x, \Phi(x), \partial\Phi(x)). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Weiterhin führt Kunita die folgenden Stoppzeiten

$$\tau(x) = \inf\{t > 0; \ \det \partial\bar{\xi}_t = 0\} \wedge \bar{T}(x), \tag{2.26}$$

und

$$\sigma(y) = \inf\{t > 0; \ y \notin \bar{\xi}_t(\{\tau > t\})\} \tag{2.27}$$

ein. Damit sind alle Vorbetrachtungen gemacht und wir können Theorem 3.1 aus [40] formulieren.

Theorem 2.1. *Es seien $\Phi(x)$ eine $C^{l+1,\alpha}$-Funktion in $\mathbb{R}^d$ mit $2 \leq l$, $\alpha > 0$ und $\bar{\xi}_t$, $\bar{\eta}_t$, $\bar{\zeta}_t$ die in (2.25) definierten Prozesse und $\sigma(x)$ sei die Stoppzeit (2.27). Dann ist $u_t(x) \equiv \bar{\eta}_t\left(\bar{\xi}_t^{-1}(x)\right)$, $t \in [0, \sigma(x))$ eine lokale Lösung von (2.3). Weiterhin ist die Lösung sogar ein lokales $C^{l-1,\alpha}$-Semimartingal für beliebiges $\beta < \alpha$.*

2.2.2 Existenz und Eindeutigkeit mittels parabolischer Regularisierung

Hypothese 2.1. (h_1) $A(t, \omega, x, u)$ ist eine stetige Funktion in u für alle t, ω, x.

(h_2) Das Paar (A, B) ist monoton im folgenden Sinn: Es existiert eine Konstante $L \geq 0$, so dass

$$\begin{aligned} &(A(t, \omega, x, v_1) - A(t, \omega, x, v_2))(v_1 - v_2) \\ &\quad + \|B(t, \omega, x, v_1) - B(t, \omega, x, v_2)\|_K^2 \qquad \leq L|v_1 - v_2|^2, \end{aligned}$$

für alle $(t, \omega, x) \in [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^n$ und $v_1, \ v_2 \in \mathbb{R}^1$.

(h_3) Das Paar (A, B) erfüllt folgende Wachstumsbedingung: Es existiert eine meßbare Funktion $l : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ und eine positive Konstante L_1 mit $l(t, x) \leq L_1$ für alle t, x und $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} l^2(t, x) dx dt < \infty$, so dass

$$| \ A(t, \omega, x, v) \ | + \| \ B(t, \omega, x, v) \ \|_K \leq l(t, x) + C \ | \ v \ |$$

für eine Konstante $C \geq 0$ und für alle t, ω, x, v gilt.

(h_4) $E\big[\|X_0\|^2_{W_2^1(\mathrm{I\!R}^n)}\big] < \infty$.

(h_5) Für $l_0 > 0$ und für alle t, x gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \mid b_i(t,x) \mid + \sum_{i,j=1}^{n} \mid \frac{\partial b_i(t,x)}{\partial x_j} \mid \leq l_0,$$

wobei $\frac{\partial}{\partial x_i}$ die verallgemeinerte Ableitung bezeichnet.

Hypothese 2.2. (h_1') B ist Lipschitz-stetig in u und gleichmäßig stetig in den anderen Variablen.

(h_2') Es existiert eine Konstante $l_1 > 0$, so dass für alle t, ω, x, u

$$\begin{aligned} |A'(t,\omega,x,u)| &= \Big|\frac{\partial}{\partial u} A(t,\omega,x,u)\Big| \leq l_1, \\ \|B'(t,\omega,x,u)\|_K &= \Big\|\frac{\partial}{\partial u} B(t,\omega,x,u)\Big\|_K \leq l_1. \end{aligned} \tag{2.28}$$

(h_3') Für alle $\varepsilon_0 > 0$ existiert eine Konstante $l_2 > 0$, so dass

$$\begin{aligned} \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \textstyle\sum_{i=1}^n \Big\{ E\Big[\int_0^T \int_{\mathrm{I\!R}^n} \Big(\frac{\partial A(t,x,u)}{\partial x_i}\Big|_{u=X_\varepsilon(t,x)} \Big)^2 dxdt \Big] \\ + E\Big[\int_0^T \int_{\mathrm{I\!R}^n} \Big\| \Big(\frac{\partial B(t,x,u)}{\partial x_i} \Big|_{u=X_\varepsilon(t,x)} \Big\|_K^2 dxdt \Big] \Big\} \qquad \leq l_2. \end{aligned} \tag{2.29}$$

(h_4') $E\big[\|X_0\|^2_{W_2^1(\mathrm{I\!R}^n)}\big] < \infty$.

(h_5') Es existiert eine Konstante $l_3 > 0$, so dass $\sum_{i,j=1}^n \big|\frac{\partial^2 b(t,x)}{\partial x_i \partial x_j}\big| \leq L_3$ für alle t, x, wobei $\frac{\partial^2 b(t,x)}{\partial x_i \partial x_j}$ die verallgemeinerte Ableitung bezeichnet.

Für die regularisierte Gleichung gilt das folgende Theorem.

Theorem 2.2. *Wenn die Hypothese 2.1 erfüllt ist, dann hat die regularisierte Gleichung (2.7) eine pfadweise eindeutige $W_2^1(\mathrm{I\!R}^n)$-Lösung X_ε, die $L^2(\mathrm{I\!R}^n)$-stetig ist. Weiterhin gilt für alle $\varepsilon_0 > 0$ die folgende Abschätzung*

$$\begin{aligned} \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \Big\{ E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \int_{\mathrm{I\!R}^n} \mid X_\varepsilon(t,x) \mid^2 dx\right] \\ + 2\varepsilon \textstyle\sum_{i=1}^n E\left[\int_0^T \int_{\mathrm{I\!R}^n} \|\frac{\partial X_\varepsilon(t,x)}{\partial x_i}\|^2 dxdt \right] \Big\} \qquad = D < \infty, \end{aligned} \tag{2.30}$$

wobei d von C, L_1 und dem Integral $\int_0^T \int_{\mathrm{I\!R}^n} l^2(t,x)dxdt$ abhängig ist.

Entsprechend gilt für die hyperbolische Gleichung das folgende Theorem.

Theorem 2.3. *Unter der Annahme, dass die Hypothesen 2.1 und 2.2 gelten, hat die Gleichung (2.5) eine pfadweise eindeutige $W_2^1(\mathbb{R}^n)$-Lösung, die $L^2(\mathbb{R}^n)$-stetig ist und der folgenden Gleichung genügt*

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\|X(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right]+\sum_{i=1}^{n}E\left[\int_0^T\|\frac{\partial X(t)}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dt\right]=D<\infty. \tag{2.31}$$

Weiterhin gilt

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\|X_\varepsilon(t)-X(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right]=0. \tag{2.32}$$

Desweiteren gilt

Theorem 2.4. *Hypothese 2.1 sei erfüllt. Weiterhin seien die Funktionen $A(t,\omega,x,u)$ und $B(t,\omega,x,u)$ stetig in (x,u) und beschränkt. Dann hat (2.5) eine verallgemeinerte Lösung, die*

$$\sup_{0\leq t\leq T}E\big[\|X(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\big]<\infty \tag{2.33}$$

erfüllt.

Beschäftigen wir uns jetzt mit der Frage, unter welchen Bedingungen die milden Lösungen der Differentialgleichung (2.11) im Sinne von Definition 2.6 auch starke Lösungen im Sinne der Definition 2.7 sind. Da Prato und Zabzcyk erhalten dabei die folgende etwas allgemeiner formulierte Aussage über den Zusammenhang starker und milder Lösungen.

Proposition 2.1. *Es seien die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) Die Operatoren $B_1,...,B_N$ erzeugen kommutierende C_0-Gruppen S_k, $k=1,...,N$.

(ii) Für $k=1,...,N$ gilt $D(A)\subset D(B_K^2)$ und $\bigcap_{k=1}^N D((B_k^*)^2)$ ist eine dichte Teilmenge des Hilbertraumes H. Dabei bezeichnet B_k^* die Adjungierte von B_k, $k=1,...,N$.

(iii) Der Operator $C:=A-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N B_k^2$ mit $D(C)=D(A)$ ist der infinitesimale Generator eine C_0-Halbgruppe $S_0=e^{tC}$, $t\geq 0$.

Wenn $X(t)$ eine starke Lösung von (2.18) ist, dann erfüllt der Prozeß v, definiert durch

$$v(t)=U^{-1}(t)X(t),\quad \text{wobei } U(t)=\prod_{k=1}^N S_k(\beta_k(t)), \tag{2.34}$$

die folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{rcl} v'(t) & = & U^{-1}(t)CU(t)v(t),\\ v(0) & = & x. \end{array}\right\} \tag{2.35}$$

Umgekehrt, ist $v(t)$ ein vorhersagbarer Prozess mit Trajektorien in C^1, der (2.35) P-f.s. erfüllt, dann nimmt der Prozeß $X(\cdot)=U(\cdot)v(\cdot)$ P_T-f.s. Werte in $D(C)$ an und ist eine starke Lösung von Gleichung (2.18).

In Gleichung (2.11) erzeugt der Operator $A = a\frac{\partial}{\partial x}$ eine C_0-Halbgruppe, und der Operator $B = b$ als linearer Operator erzeugt ebenfalls eine C_0-Halbgruppe, so dass die gefundenen milden Lösungen auch automatisch starke Lösungen im Sinne von Definition 2.7 sind.

2.3 Eigenschaften der Lösungen

Die oben definierten Lösungsbegriffe besitzen wichtige Eigenschaften. Zu diesen gehört z.B. die stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten. Für die Lösung gemäß Definition 2.2 mit der Charakteristikenmethode gilt:

Theorem 2.5. *Es existieren zu* $t \in [0,T]$; $T < \infty$

$$\begin{array}{lll} F^{(0)}(t,x,u,p) & , & F^{(1)}(t,x,u,p) \\ F^{(0)}_k(t,x,u,p) & , & F^{(1)}_k(t,x,u,p); \quad k \in \{x,u,p\} \\ F^{(0)}_{kj}(t,x,u,p) & , & F^{(1)}_{kj}(t,x,u,p); \quad k,j \in \{x,u,p\} \end{array} \tag{2.36}$$

Lipschitz-stetig in (x,u,p) *und stetig in* t*. Dann gilt für* $x \to \bar{x}$, $u \to \bar{u}$, $p \to \bar{p}$

$$\begin{aligned} P\Big\{ \mid \xi(t,x,u,p) - \xi(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p}) \mid + \mid \eta(t,x,u,p) - \eta(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p}) \mid & \\ + \mid \zeta(t,x,u,p) - \zeta(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p}) \mid > \varepsilon \Big\} & \longrightarrow \quad 0, \forall \varepsilon > 0. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Zunächst beweisen wir

Lemma 2.1. *Es seien* B_1, B_2, B_3 *Banachräume und* $\varphi : B_1 \longrightarrow \mathcal{L}(B_2, B_3)$ *mit*

$$\| \varphi(p) - \varphi(q) \|_{\mathcal{L}(B_2,B_3)} \leq L \| p - q \| .$$

Dann gilt:

$$\| \varphi(p)(x) - \varphi(q)(y) \|_{B_3} \leq \| \varphi(p) \|_{\mathcal{L}(B_2,B_3)} \cdot \| x - y \|_{B_3} + L \| y \|_{B_2} \cdot \| p - q \|_{B_1} . \tag{2.38}$$

Beweis: Es gilt die Abschätzung:

$$\begin{aligned} & \| \varphi(p)(x) - \varphi(q)(y) \|_{B_3} \\ \leq \ & \| \varphi(p)(x-y) \|_{B_3} + \| (\varphi(p) - \varphi(q))y \|_{B_3} \\ \leq \ & \| \varphi(p) \|_{\mathcal{L}(B_2,B_3)} \cdot \| x - y \|_{B_2} + L \| y \|_{B_2} \cdot \| p - q \|_{B_1} . \end{aligned} \tag{2.39}$$

■

Beweis des Theorems 2.5: Man definiert die Stoppzeiten

$$\begin{aligned} \tau_1^N &:= \inf \big\{ t : \mid \xi_t \mid \geq N \big\} \\ \tau_2^N &:= \inf \big\{ t : \mid \eta_t \mid \geq N \big\} \\ \tau_3^N &:= \inf \big\{ t : \mid \zeta_t \mid \geq N \big\} \end{aligned} \tag{2.40}$$

und setzt

$$\tau^N \quad := \quad \tau_1^N \wedge \tau_2^N \wedge \tau_3^N . \tag{2.41}$$

Wir betrachten die folgenden Differentialgleichungen:

$$\xi_{t\wedge\tau^N}(x,u,p) = x - \int_0^{t\wedge\tau^N} F_p^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)dr - \int_0^{t\wedge\tau^N} F_p^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)\circ dW(r) \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned} \eta_{t\wedge\tau^N}(x,u,p) &= u + \int_0^{t\wedge\tau^N} \left[F^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) - F_p^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)\cdot\xi_r\right]dr \\ &\quad + \int_0^{t\wedge\tau^N} \left[F^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) - F_p^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)\cdot\xi_r\right]\circ dW(r) \end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{t\wedge\tau^N}(x,u,p) &= p + \int_0^{t\wedge\tau^N} \left[F_x^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) + F_u^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)\cdot\xi_r\right]dr \\ &\quad + \int_0^{t\wedge\tau^N} \left[F_x^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) + F_u^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)\cdot\xi_r\right]\circ dW(r) \end{aligned} \tag{2.44}$$

Durch die Stoppzeiten erreicht man, dass die obigen Prozesse durch N beschränkt sind. Für $t > \tau^N$ setzt man die Prozesse gleich Null. Man kann dann die Gleichungen (2.42), (2.43), (2.44) durch Einführung der Indikatorfunktion

$$I_{\{\omega:\, t\le\tau^N\}}(X(t)) := \begin{cases} X(t) & : \quad t \le \tau^N \\ 0 & : \quad t > \tau^N, \end{cases} \tag{2.45}$$

in der folgenden Art umschreiben:

$$\begin{aligned} I_{\{\omega:\, t\le\tau^N\}}\xi_t(x,u,p) &= x - \int_0^t I_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}}F_p^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)dr \\ &\quad - \int_0^t I_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}}F_p^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)\circ dW(r) \\ I_{\{\omega:\, t\le\tau^N\}}\eta_t(x,u,p) &= u + \int_0^t \left[I_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}}F^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) - I_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}}F_p^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)\cdot\xi_r\right]dr \\ &\quad + \int_0^t \left[I_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}}F^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)\right. \\ &\quad \left. - I_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}}F_p^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)\cdot\xi_r\right]\circ dW(r) \qquad (2.46) \\ I_{\{\omega:\, t\le\tau^N\}}\zeta_t(x,u,p) &= p + \int_0^t \left[I_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}}F_x^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) + I_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}}F_u^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)\cdot\xi_r\right]dr \\ &\quad + \int_0^t \left[I_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}}F_x^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)\right. \\ &\quad \left. + I_{\{\omega:\, t\le\tau^N\}}F_u^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r)\cdot\xi_r\right]\circ dW(r). \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man auch für die Anfangswerte $\bar{x}$, $\bar{u}$, $\bar{p}$ die Prozesse

$$I_{\{\omega:\, t\le\tau^N\}}\xi_t(\bar{x},\bar{u},\bar{p}),\ I_{\{\omega:\, t\le\tau^N\}}\eta_t(\bar{x},\bar{u},\bar{p}),\ I_{\{\omega:\, t\le\tau^N\}}\xi_t(\bar{x},\bar{u},\bar{p}).$$

Der Einfachheit halber bezeichnen wir diese Prozesse mit $\bar{\xi}_t^N$, $\bar{\eta}_t^N$, $\bar{\zeta}_t^N$. Man betrachtet die Differenz der Lösungen im quadratischen Mittel und schätzt wie folgt ab

$$\begin{aligned}
&E \mid I_{\{\omega:\, t\le\tau^N\}} \left[\xi_t^N(x,u,p) - \xi_t^N(\bar{x},\bar{u},\bar{r})\right] \mid^2 \\
&\le\ 3 \mid x-\bar{x} \mid^2 + 3TE\int_0^t I_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}} \mid F_p^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) - F_p^{(0)}(r,\bar{\xi}_r,\bar{\eta}_r,\bar{\zeta}_r) \mid^2 dr \\
&\quad +3E\Big[\int_0^t I_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}} F_p^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) - F_p^{(1)}(r,\bar{\xi}_r,\bar{\eta}_r,\bar{\zeta}_r)\circ dW(r)\Big] \\
&\le\ 3 \mid x-\bar{x} \mid^2 + 3TE\int_0^t I_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}} \mid F_p^{(0)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) - F_p^{(0)}(r,\bar{\xi}_r,\bar{\eta}_r,\bar{\zeta}_r) \mid^2 dr \\
&\quad +3E\Big[2\Big\{\int_0^t I_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}} F_p^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) - F_p^{(1)}(r,\bar{\xi}_r,\bar{\eta}_r,\bar{\zeta}_r)\circ dW(r)\Big\}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big\{I_{\{\omega:\, t\le\tau^N\}}\Big\langle F_p^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) - F_p^{(1)}(r,\bar{\xi}_r,\bar{\eta}_r,\bar{\zeta}_r)\Big\rangle_t\Big\}^2\Big]. \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

Wegen der Beziehung von Itô- und Stratonovich-Integral (2.2) und mit Lemma 2.38 gilt

$$\begin{aligned}
&E \mid I_{\{\omega:\, t\le\tau^N\}} \left[\xi_t^N(x,u,p) - \xi_t^N(\bar{x},\bar{u},\bar{r})\right] \mid^2 \\
&\le\ 3 \mid x-\bar{x} \mid^2 + 6\int_0^t EI_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}} \mid F_p^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) - F_p^{(1)}(r,\bar{\xi}_r,\bar{\eta}_r,\bar{\zeta}_r) \mid^2 dr \\
&\quad +3T\int_0^t EI_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}}\Big(\mid \xi_r^N - \bar{\xi}_r^N \mid^2 + \mid \eta_r^N - \bar{\eta}_r^N \mid^2 + \mid \zeta_r^N - \bar{\zeta}_r^N \mid^2 \Big)dr \\
&\quad +CE\Big\{\int_0^t I_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}} \mid F_p^{(1)}(r,\xi_r,\eta_r,\zeta_r) - F_p^{(1)}(r,\bar{\xi}_r,\bar{\eta}_r,\bar{\zeta}_r) \mid \\
&\quad \cdot\Big[\mid F_{px}^{(1)} - \bar{F}_{px}^{(1)} \mid + \mid F_{pu}^{(1)} - \bar{F}_{pu}^{(1)} \mid + \mid F_{pp}^{(1)} - \bar{F}_{pp}^{(1)} \mid \Big]dr\Big\}^2, \qquad (2.48)
\end{aligned}$$

dabei sind $F_{pk}^{(1)} = F_{pk}^{(1)}(r,\xi_r^N,\eta_r^N,\zeta_r^N)$ und $\bar{F}_{pk}^{(1)} = F_{pk}^{(1)}(r,\bar{\xi}_r^N,\bar{\eta}_r^N,\bar{\zeta}_r^N)$ und $k\in\{x,u,p\}$. Da nach Voraussetzung $F_p^{(1)}$ Lipschitz-stetig in (x,u,p), $F_p^{(1)}x$, $F_p^{(1)}u$, $F_p^{(1)}p$ stetig sind und die $\xi_r^N,\eta_r^N,\zeta_r^N,\bar{\xi}_r^N,\bar{\eta}_r^N,\bar{\zeta}_r^N$ beschränkt sind, ist der letzte Summand, die geschweifte Klammer, in Gleichung (2.47) beschränkt. Damit kann man (2.47) auch durch

$$\begin{aligned}
&E \mid I_{\{\omega:\, t\le\tau^N\}} \left[\xi_t^N(x,u,p) - \xi_t^N(\bar{x},\bar{u},\bar{r})\right] \mid^2 \le C_1 \mid x-\bar{x} \mid^2 \\
&\quad +C_2\int_0^t EI_{\{\omega:\, r\le\tau^N\}}\Big(\mid \xi_r^N - \bar{\xi}_r^N \mid^2 + \mid \eta_r^N - \bar{\eta}_r^N \mid^2 + \mid \zeta_r^N - \bar{\zeta}_r^N \mid^2 \Big)dr \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

abschätzen.

Analoge Abschätzungen erhält man auch für $E \mid I_{\{\omega:\, t\le\tau^N\}} \left[\eta_t^N(x,u,p) - \eta_t^N(\bar{x},\bar{u},\bar{r})\right] \mid^2$ und $E \mid I_{\{\omega:\, t\le\tau^N\}} \left[\zeta_t^N(x,u,p) - \zeta_t^N(\bar{x},\bar{u},\bar{r})\right] \mid^2$, wobei auch hier die Beziehung (2.38) aus Lemma 2.1 in den Abschätzungen verwandt wird. Führt man die Bezeichnung

$$\begin{aligned}
\Psi_t^N\ :=\ & I_{\{\omega:\, t\le\tau^N\}}\left[\mid \xi_t^N(x,u,p) - \xi_t^N(\bar{x},\bar{u},\bar{r}) \mid^2\right. \\
& + \mid \eta_t^N(x,u,p) - \eta_t^N(\bar{x},\bar{u},\bar{r}) \mid^2 \\
& \left.+ \mid \zeta_t^N(x,u,p) - \zeta_t^N(\bar{x},\bar{u},\bar{r}) \mid^2\right]
\end{aligned}$$

ein, so erhält man

$$\begin{aligned} E[\Psi_t^N] \;&\leq\; D_1\big[\mid x-\bar{x}\mid^2 + \mid u-\bar{u}\mid^2 + \mid p-\bar{p}\mid^2\big] \\ &\quad + D_2^N \int_0^t E[\Psi_r^N]dr. \end{aligned}$$

Das Gronwallsche Lemma impliziert nun

$$\lim_{(x,u,p)\longrightarrow(\bar{x},\bar{u},\bar{p})} E\Psi_t^N(t,x,\bar{x},u,\bar{u},p,\bar{p}) = 0. \tag{2.50}$$

Sei nun ein $\varepsilon > 0$ gegeben, so erhält man

$$\begin{aligned} &P\Big(\mid \xi(t,x,u,p)-\xi(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p})\mid + \mid \eta(t,x,u,p)-\eta(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p})\mid \\ &\quad + \mid \zeta(t,x,u,p)-\zeta(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p})\mid > \varepsilon\Big) \\ &\leq P\Big(\mid \xi(t,x,u,p)-\xi(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p})\mid + \mid \eta(t,x,u,p)-\eta(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p})\mid \\ &\quad + \mid \zeta(t,x,u,p)-\zeta(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p})\mid > \varepsilon \wedge (t \leq \tau^N)\Big) + P\Big(\tau^N < t\Big) \\ &= P\Big(I_{\{\omega:\, t\leq\tau^N\}}[\mid\mid \xi(t,x,u,p)-\xi(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p})\mid + \mid \eta(t,x,u,p)-\eta(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p})\mid \\ &\quad + \mid \zeta(t,x,u,p)-\zeta(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p})\mid\mid] > \varepsilon\Big) + P\Big(\tau^N < t\Big). \end{aligned}$$

Mit der Markovschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} &P\Big(\mid\mid \xi(t,x,u,p)-\xi(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p})\mid + \mid \eta(t,x,u,p)-\eta(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p})\mid \\ &\quad + \mid \zeta(t,x,u,p)-\zeta(t,\bar{x},\bar{u},\bar{p})\mid > \varepsilon\Big) \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^2} E I_{\{\omega:\, t\leq\tau^N\}}\Big[\mid x-\bar{x}\mid^2 + \mid u-\bar{u}\mid^2 + \mid p-\bar{p}\mid^2\Big] + P\Big(\tau^N < t\Big). \end{aligned} \tag{2.51}$$

Der erste Summand in (2.51) geht wegen der obigen Überlegungen gegen Null, für den zweiten Summanden gilt

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} P\Big(\tau^N < t\Big) = 0. \tag{2.52}$$

Daraus folgt die Behauptung.

■

Eine wichtige Eigenschaft der Differenzenschemata ist die Lipschitz-Stetigkeit im quadratischen Mittel des Lösungsprozesses bezüglich der Zeit, wenn die Definition 2.5 zugrunde gelegt wird.

Theorem 2.6. *Es gibt eine Konstante C, so dass für die Lösung von (2.11) gilt*

$$E\int_{\mathbb{R}^1} |v(t+\Delta t,x)-v(t,x)|^2\,dx \leq C\Delta t. \tag{2.53}$$

Beweis: Mit der Schwarzschen Ungleichung und den Eigenschaften des Itô-Integrales erhält man unter Ausnutzung von Theorem (2.3) die folgende Ungleichungskette

$$\begin{aligned}
& E\left[\int_{\mathbb{R}^1} |v(t+\Delta t,x)-v(t,x)|^2\,dx\right] \\
= \;& E\left[\int_{\mathbb{R}^1} |a\int_t^{t+\Delta t} v_x(s,x)\,ds + b\int_t^{t+\Delta t} v(s,x)\,dW(s)|^2\,dx\right] \\
\leq \;& 2E\left[\int_{\mathbb{R}^1} a^2|\int_t^{t+\Delta t} v_x(s,x)\,ds|^2 + b^2|\int_t^{t+\Delta t} v(s,x)\,dW(s)|^2\,dx\right] \\
\leq \;& 2\left[a^2\Delta t E\int_{\mathbb{R}^1}\int_t^{t+\Delta t} v_x^2(s,x)\,ds\,dx + b^2\int_t^{t+\Delta t} E\int_{\mathbb{R}^1}|v(s,x)|^2\,dx\,ds\right] \\
\leq \;& 2\left[a^2\Delta t E\int_0^T\int_{\mathbb{R}^1} v_x^2(s,x)\,dx\,ds + b^2\int_t^{t+\Delta t}\sup_{s\in[0,T]} E\int_{\mathbb{R}^1}|v(s,x)|^2\,dx\,ds\right] \\
\leq \;& C\Delta t, \qquad (2.54)
\end{aligned}$$

womit die Aussage bewiesen ist.

■

Bemerkung 2.1. Ist für die Gleichung (2.11) die Anfangswertfunktion $\Phi \in C^{4,\alpha}$, dann ist der Lösungsprozeß bzgl. x sogar zweimal stetig differenzierbar (siehe Theorem 2.1) und es gilt:

$$v_x(t,x) = \Phi'(x) + a\int_0^t v_{xx}(s,x)\,ds + b\int_0^t v_x(s,x)\,dW(s). \qquad (2.55)$$

Der Lösungsprozeß $\Psi(t,x) := v_x(t,x)$ besitzt dann ebenfalls die Eigenschaften von Theorem 2.3, d.h. es gilt

$$E\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\mathbb{R}^1} v_x^2(t,x)\,dx =: D_1 < \infty. \qquad (2.56)$$

Folglich gilt dann auch

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} Ev_x^2(t,k\Delta x)\Delta x \leq \tilde{D}_1 \qquad (2.57)$$

für alle t und $\Delta x > 0$ und man erhält weiterhin für die folgende Differenz

$$\begin{aligned}
& E\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(v_x(s,k\Delta x)-v_x(n\Delta t,k\Delta x)\right)\,ds|^2\right] \\
\leq \;& \Delta t\left[\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} E\left(v_x(s,k\Delta x)-v_x(n\Delta t,k\Delta x)\right)^2\Delta x\,ds\right] \\
\leq \;& C\Delta t \qquad (2.58)
\end{aligned}$$

eine Beschränkung in Abhängigkeit von Δt.

3. Finite Differenzenmethoden im stochastischen Fall

Das Kapitel beschäftigt sich mit Differenzenmethoden zur approximativen Lösung stochastischer hyperbolischer Differentialgleichungen vom Itô-Typ. Die Hauptbegiffe der deterministischen Theorie der Finiten Differenzen nämlich die Konsistenz und die Stabilität werden für den stochastischen Fall entwickelt. Für gewöhnliche Itô-Gleichungen findet man diese Begriffe u.a. in [33], [57], [58]. Es wird gezeigt, dass die in diesem Kapitel vorgeschlagenen Schemata zur Approximation der stochastischen partiellen Differentialgleichungen auch diesen Begriffsbildungen genügen. Weiterhin wird auch die auf von Neumann zurückgehende Analysis, mit der die Stabilitätsanalyse durch die Anwendung der Fourier-Transformation vereinfacht wird, vgl. [60], [61], auf die betrachteten stochastischen Fälle übertragen. So kommt man beispielsweise auch zu dem interessanten Ergebnis, dass sich in bestimmten Fällen die Stabilität des stochastischen Differenzenverfahrens schon dann ergibt, wenn das zugrunde liegende deterministische Verfahren stabil ist, (Korollar 3.1).

In diesem Kapitel werden Finite Differenzenmethoden zur Approximation der Lösung der hyperbolischen Itô-Gleichung

$$v(t,x) - v(0,x) + a\int_0^t v_x(s,x)\,ds + \int_0^t A(s,v(s,x))\,ds + \int_0^t B(s,v(s,x))\,dW(s) = 0 \qquad (3.1)$$

entwickelt. Ausführlich wird der lineare Fall

$$v(t,x) - v(0,x) + a\int_0^t v_x(s,x)\,ds + b\int_0^t v(s,x)\,dW(s) = 0$$

studiert. Zum Verständnis werden hier die grundlegenden Ideen der deterministischen finiten Differenzenmethoden erläutert, vergleiche auch [61].

Man betrachtet ein Problem der Form

$$v_t(t,x) + av_x(t,x) = 0, \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}, \qquad (3.2)$$

$$v_0(x) = v(0,x) = f(x), \qquad (3.3)$$

wobei $f \in L^2(\mathbb{R})$. Man führt eine äquidistante Zerlegung Δx der Raumachse und eine äquidistante Zerlegung Δt der Zeitachse ein, so dass man ein Raum-Zeit-Gitter erhält, auf dem man versucht, die Lösung des Problems (3.2), (3.3) auf den Gitterpunkten zu approximieren.

Dabei soll u_k^n eine Funktion im Punkt $(n\Delta t, k\Delta x)$ oder dem Gitterpunkt $(n,\ k)$ sein, die eine Approximation der Lösung des Problems (3.2), (3.3) in $(n\Delta t,\ k\Delta x)$ ist, wobei

$$u_k^0 = f(k\Delta x) = v_k^0$$

gesetzt wird.

Mit dem Differenzenquotienten

$$v_t(t,x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t, x) - v(t,x)}{\Delta t}$$

erhält man eine einfache Approximation der Zeitableitung $v_t(n\Delta t, k\Delta x)$ in folgender Form

$$v_t(n\Delta t, k\Delta x) \approx \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t}; \tag{3.4}$$

in analoger Weise erhält man auch für die räumliche Ableitung

$$v_x(n\Delta t, k\Delta x) \approx \frac{u_{k+1}^{n} - u_k^n}{\Delta x}. \tag{3.5}$$

Damit erhält man für (3.2) die folgende Differenzengleichung

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} + a\frac{u_{k+1}^{n} - u_k^n}{\Delta x} = 0.$$

und daher

$$u_k^{n+1} = (1 + a\frac{\Delta t}{\Delta x})u_k^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}u_{k+1}^n, \tag{3.6}$$

ein sogenanntes Forward-Time-Forward-Space-Schema (FTFS). In [61] finden sich die Beweise für die Konvergenz, die Stabilität und die Konsistenz für dieses und andere deterministische Verfahren.

Bemerkung 3.1. Numerische Differenzenverfahren und auch stochastische numerische Verfahren sind vor allem deshalb von Interesse, weil man heute die Möglichkeit hat, die Lösungen mit Hilfe des Computers zu berechnen. Natürlich macht eine solche Berechnung am Computer keinen Sinn, wenn unendlich viele Zerlegungspunkte der Raumachse zu betrachten sind. Deshalb führt man, wenn man die Lösung auf einem Zeitintervall $[0,T]$ und einem Raumintervall $[0,X]$ approximieren will, eine Zerlegung der Raumachse ein. In dieser Arbeit beschränken wir uns ausschließlich auf äquidistante Zerlegungen, so dass wir in diesem Fall der abzählbar endlichen Zerlegung eines Intervalles die Schrittweite Δx wie folgt definieren: Es sei $\Delta x = \frac{1}{M}$, so dass $x_k = k\Delta x,\ k = 0,1,...,M$. Dann ist der Raum, den wir betrachten ein $M-1$, M oder $M+1$-dimensionaler Raum, abhängig von der Art der betrachteten Randbedingungen an jedem Endpunkt des Intervalles. Dabei gilt natürlich weiterhin, dass $\Delta t \to 0$ und zwar solcher Art, dass Δt und Δx die Bedingungen an die Stabilität erfüllen.

3.1 Stochastische Differenzenschemata

Es wird die stochastische partielle Differentialgleichung 1. Ordnung

$$d_t v(t,x) + av_x(t,x)dt + bv(t,x)dW(t) = 0 \tag{3.7}$$

betrachtet, wobei $v(0,x) = v_0(x) = f(x) \in L^2(\mathbb{R}^1)$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^1$.

Diese Differentialgleichung wird durch

$$v(t,x) - v(0,x) + a\int_0^t v_x(s,x)\,ds + b\int_0^t v(s,x)\,dW(s) = 0 \tag{3.8}$$

definiert, wobei das stochastische Integral das gewöhnliche Itô-Integral ist, welches bezüglich eines $\mathbb{R}^1$-wertigen Wiener-Prozesses $(W(t), \mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, adaptiert zur Standardfiltration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ definiert ist. Im Sinne der Definition 2.5 im zweiten Kapitel existiert wegen Satz 2.1 ein eindeutiger Lösungsprozeß mit Wahrscheinlichkeit 1.

Weiterhin folgt aus Satz 2.3

$$E\bigg(\sup_{t\in[0,T]}\int_{\mathbb{R}^1}|v(t,x)|^2dx\bigg) + E\bigg(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^1}|v_x(s,x)|^2dxds\bigg) < \infty. \tag{3.9}$$

Wir führen ein erstes Differenzenschema ein:

$$u_k^{n+1} \quad = \quad (1 + a\frac{\Delta t}{\Delta x})u_k^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}u_{k+1}^n - bu_k^n(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)). \tag{3.10}$$

Die Lösungen von (3.8) sollen durch die mit (3.10) definierten Zufallsvariablen u_k^n approximiert werden. (3.10) ist eine stochastische Variante des Forward-Time-Forward-Space-Schemas. In der deterministischen Literatur wird das FTFS-Schema auch als One-(Time)-Level-Schema bezeichnet, weil in die Berechnung einer jeden Stufe, jeden Levels nur die Vertreter eines anderen Zeitlevels (meist des direkt vorangehenden) eingehen.

Weitere mögliche Schemata sind z.B. das Forward-Time-Backward-Space-Schema

$$u_k^{n+1} \quad = \quad (1 - a\frac{\Delta t}{\Delta x})u_k^n + a\frac{\Delta t}{\Delta x}u_{k-1}^n - bu_k^n(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \tag{3.11}$$

oder eine stochastische Variante des Schemas von Lax-Friedrich:

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} \quad = \quad & \frac{1}{2}\left(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n\right) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) \\ & -\frac{b}{2}(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \end{aligned} \tag{3.12}$$

oder eine stochastische Version des Leapfrog-Schemas, eines sogenannten Zwei-(Time)-Level - Schemas:

$$u_k^{n+1} = u_k^{n-1} - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) - bu_k^n(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)). \tag{3.13}$$

3.2 Konsistenz und Stabilität

In diesem Abschnitt werden die Hauptbegriffe der deterministischen Theorie der Finiten Differenzen, nämlich die Konsistenz und die Stabilität für den stochastischen Fall definiert. Es wird gezeigt, dass die vorgeschlagenen Verfahren konvergieren. Natürlich ist die Konvergenz die anschaulichste Eigenschaft eines Approximationsschemas. Grob gesagt bedeutet diese, dass die Lösung der korrespondierenden Differentialgleichung Grenzwert der Näherungen für Δt und $\Delta x \to 0$ ist.

Um zu einer möglichst allgemeinen Definition zu gelangen, ist es vorteilhaft, eine allgemeinere Bezeichnung für die Differenzenschemata, die Differentialoperatoren und Anfangswertbedingungen einzuführen. Es sei L ein Operator, der v, die Anfangsbedingungen, Ableitungen bezüglich x, Integrale bezüglich t und Itô-Integrale bezüglich t enthält. Man betrachtet

$$Lv = G, \tag{3.14}$$

mit einer Anfangswertbedingung (3.3), wobei G eine Inhomogenität bezeichnet. Offensichtlich ist (3.1) ein Beispiel für (3.14). u_k^n sei die approximierende Lösung des Problems, die unter Anwendung eines Differenzenschemas, das mit L_k^n bezeichnet werden soll, erhalten wird. Dabei korrespondieren wie zuvor n mit dem Zeitschritt und k mit dem räumlichen Zerlegungspunkt. Weiterhin steht im folgenden G_k^n für die Approximation der Inhomogenität G. Wir führen für die Lösungen des Differenzenschemas und die Lösungen der stochastischen Differentialgleichung an der Stelle $((n+1)\Delta t, k\Delta x)$ Folgen ein:

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= (\cdots, u_{k-2}^{n+1}, u_{k-1}^{n+1}, u_k^{n+1}, u_{k+1}^{n+1}, u_{k+2}^{n+1}, \cdots)^T, && (3.15)\\ v^{n+1} &= (\cdots, v_{k-2}^{n+1}, v_{k-1}^{n+1}, v_k^{n+1}, v_{k+1}^{n+1}, v_{k+2}^{n+1}, \cdots)^T, && (3.16)\\ v_k^{n+1} &= v((n+1)\Delta t, k\Delta x),\ (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots). \end{aligned}$$

Bemerkung 3.2. Es werden die für ein Schema angepaßten Normen verwandt (vgl. im deterministischen Fall [61]). Die Normen, die wir für Folgen $(x) = (..., x_{-1}, x_0, x_1, ...)$ einführen, sind die $\ell_{2,\Delta x}$-Norm mit

$$\| x \|_{2,\Delta x} := \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2 \Delta x} \tag{3.17}$$

und die Supremums-Norm $\| x \|_\infty$ mit $\|x\|_\infty := \sup_k |x|$.

Das Lax-Richtmyer-Theorem in der deterministischen Theorie erlaubt es auf einfache Weise, die Konvergenz eines Differenzenschemas nachzuweisen, indem man zeigt, dass das Schema sowohl konsistent als auch stabil ist. Deswegen ist es auch interessant, diese Begriffsbildungen für stochastische Differenzenschemata durchzuführen und nach analogen Zusammenhängen zu suchen.

Definition 3.1 (Konsistenz eines SDS). Ein Differenzenverfahren, das mit der Zerlegung in ein Raum-Zeit-Gitter mit maximalen Raumschrittweite $\Delta\bar{x}_0$ und maximaler Zeitschrittweite

$\Delta\bar{t}_0$ korrespondiert, heißt konsistent mit (3.1), wenn

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} E|v((n+1)\Delta t, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x) - \tilde{a}_k(n\Delta t, v(n\Delta t, \circ)) \\ +B(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x))\,(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t))\,|^2 \Delta x \leq C(\Delta t, \Delta x) \tag{3.18}$$

gilt, wobei $\tilde{a}_k(n\Delta t, v(n\Delta t, \circ))$ ein Differenzenoperator bezüglich x von $-av_x(t,x) - A(t, v(t,x))$ ist und

$$\lim_{\Delta t \to 0, \Delta x \to 0} C(\Delta t, \Delta x) = 0 \tag{3.19}$$

gilt.

Bemerkung 3.3. Es gibt sowohl in der deterministischen Theorie (siehe [60], [61]) als auch in der stochastischen Theorie (siehe [33]) eine Vielzahl von Konsistenzbegriffen. Der hiesige Begriff ist an den Fall von einparametrischen Prozessen angelehnt (siehe [33]). Der Begriff ist so stark gewählt, dass sich die Konvergenz ergibt. Bei anderen Konsistenzbegriffen muß dies nicht der Fall sein. Betrachtet man im einparametrischen Fall die sogenannte schwache Konsistenz (siehe [33]), dann sind noch Stabilitätsvoraussetzungen erforderlich (siehe [33], Theorem 9.7.4). Für den Fall deterministischer partieller Differentialgleichungen sei auf [60], [61], [66] verwiesen.

Unabhängig von den Konvergenzbetrachtungen sind Stabilitätsbetrachtungen für das Fehlerwachstum von Interesse.

Definition 3.2 (Stabilität eines SDS). Ein stochastisches Differenzenschema wird stabil im quadratischen Mittel bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ genannt, wenn positive Konstanten $\overline{\Delta x_0}$ und $\overline{\Delta t_0}$ und nicht-negative Konstanten K und β existieren , so dass

$$E\|u^{n+1}\|^2 \leq Ke^{\beta t} E\|u^0\|^2$$

für alle $t = (n+1)\Delta t$, $0 \leq \Delta x \leq \overline{\Delta x_0}$, $0 \leq \Delta t \leq \overline{\Delta t_0}$ gilt.

Definition 3.3. Ein Differenzenschema heißt unbedingt stabil, falls keine zusätzlichen Voraussetzungen an Δx und Δt gestellt werden müssen, um die Stabiliät zu gewährleisten. Ansonsten heißt ein Differenzenschema bedingt stabil.

Bemerkung 3.4. Aus der Stabilität ergibt sich, dass für stabile Schemata kleine Fehler in den Anfangswerten auch nur zu kleinen Fehlern im Ergebnis führen. Die Definition zeigt insbesondere auch ein Anwachsen des Fehlers in jedem Schritt. Das Fehlerwachstum ist aber auf ein höchstens exponentielles Wachstum beschränkt.

Nun soll gezeigt werden, dass die Schemata (3.10) und (3.12) den obigen Definitionen genügen.

Theorem 3.1. *Das stochastische FTFS-Schema mit*

$$(n+1)\Delta t = t \tag{3.20}$$

und $-1 \leq a\frac{\Delta t}{\Delta x} =: R \leq 0$, $a < 0$ *ist stabil im quadratischen Mittel bezüglich der* $\|\cdot\|_{2,\Delta x}$*-Norm, mit* $K = 1$ *und* $\beta = b^2$ *, wobei* $\overline{\Delta t_0}$ *und* $\overline{\Delta x_0}$ *aus der Definition 3.2 der Stabilität durch* t *und durch* $|a|t$ *gegeben sind.*

Beweis: Wendet man $E|\cdot|^2$ auf das sFTFS (3.10) an und beachtet die Unabhängigkeit der Zuwächse des Wiener-Prozesses und die $\mathcal{F}_{t_n}$-Meßbarkeit der u_k^n, u_{k+1}^n, so erhält man

$$\begin{aligned}
E|u_k^{n+1}|^2 &= E|(1+R)u_k^n - Ru_{k+1}^n - bu_k^n(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t))|^2 \\
&= E|(1+R)u_k^n - Ru_{k+1}^n|^2 \\
&\quad +2E((1+R)u_k^n - Ru_{k+1}^n)bu_k^n(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \\
&\quad +b^2\Delta t E|u_k^n|^2 \\
&= E|(1+R)u_k^n - Ru_{k+1}^n|^2 + b^2\Delta t E|u_k^n|^2.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Da die Anfangswertfunktion $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$ ist, gilt

$$E\int_{\mathbb{R}^1} (v_0(x))^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^1} f^2(x)\,dx < \infty, \tag{3.22}$$

und man erhält mittels Rekursion

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} E|u_k^n|^2 \Delta x < \infty. \tag{3.23}$$

Multipliziert man (3.21) mit Δx und summiert über alle k, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} E|u_k^{n+1}|^2\Delta x &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[E|(1+R)u_k^n - Ru_k^{n+1}|^2 + b^2\Delta t E|u_k^n|^2\right]\Delta x \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Big[\big(|1+R|^2 E|u_k^n|^2 + 2|1+R||R|E|u_k^n||u_{k+1}^n| + |R|^2 E|u_{k+1}^n|^2\big) \\
&\quad +b^2\Delta t E|u_k^n|^2\Big]\Delta x \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Big[\big(|1+R|^2 E|u_k^n|^2 + |1+R||R|\{E|u_k^n|^2 + E|u_{k+1}^n|^2\} \\
&\quad +|R|^2 E|u_{k+1}^n|^2\big) + b^2\Delta t E|u_k^n|^2\Big]\Delta x \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{\left[|1+R|^2 + 2|1+R||R| + |R|^2\right] + b^2\Delta t] E|u_k^n|^2\}\Delta x \\
&= \left[(|1+R| + |R|)^2 + b^2\Delta t\right] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E|u_k^n|^2\Delta x.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Für $-1 \leq R \leq 0$ erhält man nun die Ungleichung $|1+R|+|R| \leq 1$ und kann deshalb den obigen Ausdruck weiter abschätzen durch

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} E|u_k^{n+1}|^2\Delta x &\leq (1+b^2\Delta t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} E|u_k^n|^2\Delta x, \\
E\|u^{n+1}\|_{2,\Delta x}^2 &\leq (1+b^2\Delta t)E\|u^n\|_{2,\Delta x}^2 \leq (1+b^2\Delta t)^{n+1}E\|u^0\|_{2,\Delta x}^2.
\end{aligned}$$

Wegen $\Delta t = \frac{t}{n+1}$ gilt

$$E\|u^{n+1}\|^2_{2,\Delta x} \quad \leq \quad \left(1 + \frac{b^2 t}{n+1}\right)^{n+1} E\|u^0\|^2_{2,\Delta x} \leq e^{b^2 t} E\|u^0\|^2_{2,\Delta x}. \tag{3.25}$$

Das ist die Stabilität.

■

Als nächstes zeigen wir die Stabilität von (3.12) bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm. Der Beweis wird zeigen, dass sich mit analogen Überlegungen auch die Stabilität von (3.10) bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm ergibt. Analoges gilt auch für die Stabilität von (3.12) bezüglich der $\|\cdot\|_{2,\Delta x}$-Norm, vergleiche dazu auch Satz 3.8.

Theorem 3.2. *Die Differenzengleichung (3.12) mit* $(n+1)\Delta t = t$ *und* $-1 \leq a\frac{\Delta t}{\Delta x} =: R \leq 1$, *ist stabil im quadratischen Mittel bezüglich der* $\|\cdot\|_\infty = \sup_k |\cdot|$*-Norm mit* $K = 1$ *und* $\beta = \frac{b^2}{4}$.

Beweis: Im quadratischen Mittel ergibt aus (3.12):

$$\begin{aligned}
E|u_k^{n+1}|^2 &= E|\frac{1}{2}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) - \frac{R}{2}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n)|^2 + \frac{b^2\Delta t}{4}E|u_{k+1}^n - u_{k-1}^n|^2 \\
&= \frac{1}{4}\left[(1-R)^2 E|u_{k+1}^n|^2 + 2(1-R^2)E[u_{k+1}^n u_{k-1}^n]\right. \\
&\quad \left.+(1+R)^2 E|u_{k-1}^n|^2\right] + \frac{b^2\Delta t}{4}E|u_{k+1}^n - u_{k-1}^n|^2 \\
&\leq \frac{1}{4}\left(4\sup_k E|u_k^n|^2 + b^2\Delta t \sup_k E|u_k^n|^2\right) \\
&\leq \left\{1 + \frac{b^2\Delta t}{4}\right\}\sup_k E|u_k^n|^2.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Diese Abschätzung gilt natürlich für alle k, deshalb erhält man

$$\sup_k E|u_k^{n+1}|^2 \quad \leq \quad \left\{1 + \frac{b^2\Delta t}{4}\right\}\sup_k E|u_k^n|^2 \leq \left\{1 + \frac{b^2\Delta t}{4}\right\}^{n+1}\sup_k E|u_k^0|^2. \tag{3.27}$$

Das entspricht

$$\|u^{n+1}\|^2_\infty \leq [1 + \frac{b^2\Delta t}{4}]^{n+1}\|u^0\|^2_\infty. \tag{3.28}$$

Erinnert man sich der Tatsache $\Delta t = \frac{t}{n+1}$, so hat man

$$\|u^{n+1}\|^2_\infty \quad \leq \quad \left(1 + \frac{b^2 t}{4(n+1)}\right)^{n+1}\|u^0\|^2_\infty \leq e^{\frac{b^2 t}{4}}\|u^0\|_\infty. \tag{3.29}$$

■

Bemerkung 3.5. Die Stabilität von (3.10) bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm folgt analog, indem man den Erwartungswert des Schemas im quadratischen Mittel betrachtet und gegen das Supremum abschätzt.

Nun soll der Nachweis erbracht werden, dass das Forward-Time-Forward-Space-Schema konsistent ist.

Theorem 3.3. *Es sei $v(0,\cdot) \in C^{5,\alpha}$. Das stochastische FTFS-Schema ist konsistent im Sinne von Definition 3.1.*

Beweis: Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned}
&v((n+1)\Delta t, k\Delta x)\\
&= v(n\Delta t, k\Delta x) - a\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} v_x(\tau, k\Delta x)\,d\tau - b\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} v(\tau, k\Delta x)\,dW(\tau)\\
&= v(n\Delta t, k\Delta x) - av_x(n\Delta t, k\Delta x)\Delta t - bv(n\Delta t, k\Delta x)\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right)\\
&\quad -a\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \left(v_x(\tau, k\Delta x) - v_x(n\Delta t, k\Delta x)\right)\,d\tau\\
&\quad -b\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \left(v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right)\,dW(\tau). \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

Da wegen Theorem 2.1 $v(t,x)$ bezüglich x dreimal stetig differenzierbar ist, gilt für $\tilde{v}(t,x) := v_{xx}(t,x)$

$$\tilde{v}(t,x) - v_{xx}(0,x) + a\int_0^t \tilde{v}_x(\tau,x)\,d\tau + b\int_0^t \tilde{v}(\tau,x)\,dW(\tau) = 0 \qquad (3.31)$$

und wegen Theorem 2.3 gilt

$$C := \sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^1} E|\tilde{v}(t,x)|^2\,dx < +\infty. \qquad (3.32)$$

Durch die Taylorentwicklung von $v_x(n\Delta t, k\Delta x)$ an der Stelle $k\Delta x$ erhält man weiterhin

$$\begin{aligned}
&v((n+1)\Delta t, k\Delta x)\\
&= v(n\Delta t, k\Delta x) - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(v(n\Delta t, (k+1)\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right)\\
&\quad -bv(n\Delta t, k\Delta x)\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right) - v_{xx}(n\Delta t, (k+\vartheta)\Delta x)\Delta t\Delta x\\
&\quad -a\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \left(v_x(\tau, k\Delta x) - v_x(n\Delta t, k\Delta x)\right)\,d\tau\\
&\quad -b\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \left(v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right)\,dW(\tau), \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

wobei ϑ eine Zufallsgröße mit $0 < \vartheta < 1$ ist. Folglich gilt mit der Schwarzschen Ungleichung und den Eigenschaften des Itô-Integrales

$$\begin{aligned}
&E\Big|v((n+1)\Delta t, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x) + \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(v(n\Delta t, (k+1)\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right)\\
&\qquad + bv(n\Delta t, k\Delta x)\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right)\Big|^2\\
&\leq 4Ev_{xx}^2(n\Delta t, (k+\vartheta)\Delta x)\Delta t^2\Delta x^2 + 4a^2\Delta t\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v_x(\tau, k\Delta x) - v_x(n\Delta t, k\Delta x)\right|^2\,d\tau\\
&\quad +4b^2\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right|^2\,d\tau. \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

Wegen (3.32) erhalten wir

$$4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(E v_{xx}^2(n\Delta t, (k+\vartheta)\Delta x) \Delta t^2 \Delta x^2 \right) \Delta x \leq 4C \Delta x^2 \Delta t^2. \tag{3.35}$$

Nach der Integraldefinition gilt, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein hinreichend kleines Δx gibt, so dass

$$\begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E \left| v_x(\tau, k\Delta x) - v_x(n\Delta t, k\Delta x) \right|^2 \, d\tau \Delta x \\ \leq \; &\varepsilon + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E \left| v_x(\tau, x) - v_x(n\Delta t, x) \right|^2 \, d\tau \, dx. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Da $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine positive Zahl ist, kann ε auch als Δt^2 gewählt werden. Aus Theorem 2.6 folgt dann wegen

$$v_x(t,x) = v_x(0,x) + a \int_0^t v_{xx}(\tau, x) \, d\tau + b \int_0^t v_x(t,x) \, dW(\tau), \tag{3.37}$$

dass eine Konstante C existiert, so dass

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E \left| v_x(\tau, k\Delta x) - v_x(n\Delta t, k\Delta x) \right|^2 \, d\tau \Delta x \leq \Delta t^2 + C \Delta t^2 \tag{3.38}$$

gilt. Mit analogen Überlegungen erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E \left| v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x) \right|^2 \, d\tau \Delta x \\ \leq \; &\Delta t^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E \left| v(\tau, x) - v(n\Delta t, x) \right|^2 \, d\tau \, dx. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Theorem 2.6 liefert dann die Existenz einer Konstanten C, für die

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E \left| v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x) \right|^2 \, d\tau \Delta x \leq \Delta t^2 + C \Delta t^2 \tag{3.40}$$

gilt. Mit (3.35), (3.38), (3.40) folgt schließlich aus (3.34)

$$\begin{aligned} E \Bigg| &v((n+1)\Delta t, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x) + \frac{a\Delta t}{k\Delta x} \left(v(n\Delta t, (k+1)\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x) \right) \\ &+ bv(n\Delta t, k\Delta x) \left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t) \right) \Bigg|^2 \\ \leq \; & 4C\Delta t^2 \Delta x^2 + 2\Delta t^2 + 4a^2 \Delta t^3 + 4a^2 C \Delta t^3 + 4b^2 \Delta t^2 + 4C\Delta t^2 \\ = \; & \Delta t^2 (C_1 \Delta x^2 + C_2 + C_3 \Delta t) \\ =: \; & C(\Delta t^2, \Delta x^2). \end{aligned} \tag{3.41}$$

$C(\Delta t^2, \Delta x^2)$ erfüllt offenbar die geforderten Bedingungen.

■

Wir wollen nun eine Konvergenzeigenschaft des FTFS-Schemas untersuchen. Zunächst stellen wir eine A-priori-Abschätzung bereit. Aus der Definition des FTFS-Schemas und der Gleichung (3.33) ergibt sich für

$$z_k^n := u_k^n - v(n\Delta t, k\Delta x) \tag{3.42}$$

mit $R := \frac{a\Delta t}{\Delta x}$ und $-1 \leq R \leq 0$ und

$$\begin{aligned} \phi_{n,k} &= -v_{xx}^2(n\Delta t, (k+\vartheta)\Delta x)\Delta t\Delta x - a\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} (v_x(\tau,x) - v_x(n\Delta t, x))\, d\tau \\ &\quad -b\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} (v(\tau,x) - v(n\Delta t, x))\, dW(\tau). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Dann gilt

$$z_k^{n+1} = (1+R)z_k^n - Rz_{k+1}^n - bz_k^n\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right) + \phi_{n,k}. \tag{3.44}$$

Im quadratischen Mittel erhält man

$$\begin{aligned} E|z_k^{n+1}|^2 &= E|(1+R)z_k^n - Rz_{k+1}^n|^2 + 2E\left(bz_k^n\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right)\phi_{n,k}\right) \\ &\quad +2E\left(\left((1+R)z_k^n - Rz_{k+1}^n\right)\phi_{n,k}\frac{\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{\Delta t}}\right) + b^2\Delta tE|z_k^n|^2 + E|\phi_{n,k}|^2. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Damit ergibt sich summiert über alle k

$$\begin{aligned} E\|z_\bullet^{n+1}\|_{2,\Delta x}^2 &\leq E\|z_\bullet^n\|_{2\Delta x}^2 + b^2E\|z_\bullet^n\|_{2\Delta x}^2\Delta t + \Delta t^2(C_1\Delta x^2 + C_2 + C_3\Delta t) \\ &\quad +b^2E\|z_\bullet^n\|_{2\Delta x}^2\Delta t + \Delta t(C_1\Delta x^2 + C_2 + C_3\Delta t) + b^2\Delta tE\|z_\bullet^n\|_{2\Delta x}^2 \\ &\quad +\Delta t^2(C_1\Delta x^2 + C_2 + C_3\Delta t) \\ &= E\|z_\bullet^n\|_{2\Delta x}^2 + (2b^2+1)\Delta tE\|z_\bullet^n\|_{2\Delta x}^2 + \Delta t(C_1\Delta x^2 + C_2 + C_3\Delta t) \\ &\quad +2\Delta t^2(C_1\Delta x^2 + C_2 + C_3\Delta t) \end{aligned} \tag{3.46}$$

für alle n. Nun sei $m < n$, dann gilt natürlich Beziehung (3.46) auch für $E\|z_\bullet^{m+1}\|_{2,\Delta x}^2$. Durch Summation ergibt sich unter Beachtung von $\|z_\bullet^0\| = 0$ und $(n+1)\Delta t = t$

$$\begin{aligned} E\|z_\bullet^{m+1}\|_{2,\Delta x}^2 &\leq (2b^2+1)\Delta t\sum_{k=0}^{n} E\|z_\bullet^m\|_{2,\Delta x}^2 \\ &\quad +3n\Delta t(C_1\Delta x^2 + C_2 + C_3\Delta t). \end{aligned} \tag{3.47}$$

Dann folgt aus dem Gronwallschen Lemma, dass eine Konstante C existiert, so dass

$$E\|z_\bullet^{n+1}\|_{2,\Delta x}^2 \leq C \tag{3.48}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit gilt

Lemma 3.1. *Es sei* $v(0,\cdot) \in C^{5,\alpha}$.

Dann gilt für $z^n(t,x) := z_k^n$, $(x \in [\, x_k, x_{k+1}\, [\,,\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} E|z^n(t,x)|^2\, dx \leq C. \tag{3.49}$$

Beweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E|z^n(t,x)|^2\,dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E|z^n(t,x)|^2\Delta x = E\|z^n_\bullet\|^2_{2,\Delta x} \leq C. \tag{3.50}$$

■

Unter den Voraussetzungen des Lemmas 3.1 folgt aus dem Satz von Riesz:

Folgerung 3.1. Es gibt eine Teilfolge $\left(n_j\right) \subset \left(n\right)$, so dass $\left(z^{n_j}\right)$ in $L^2(\mathbb{R}^1 \times \Omega)$ schwach konvergiert.

Lemma 3.2. *Der schwache Grenzwert in der Folgerung 3.1 ist P-f.s. und für L-fast alle x und alle t Null.*

Beweis: Angenommen der schwache Grenzwert sei nicht Null. Demzufolge muß für alle $\left(F_k\right)$ mit $E\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k^2\Delta x < \infty$ gelten

$$\lim_{n\to\infty} E\left(z^{n+1}, F\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E(z_k^{n+1}, F_k)\Delta x \neq 0. \tag{3.51}$$

Wir wählen speziell $F_0 = 1$, $F_k = 0$ für $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Damit gilt

$$Ez_0^{n+1} = (1+R)Ez_0^n - REz_1^n + E\phi_{n,0} \tag{3.52}$$

und somit

$$Ez_0^{n+1} - Ez_0^n = R\left(Ez_0^n - Ez_1^n\right) + E\phi_{n,0}. \tag{3.53}$$

Da aber $\lim_{n\to\infty}\left(Ez_1^{n+1} - Ez_1^n\right) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} E\phi_{n,0} = 0$ muß auch

$$\lim_{n\to\infty}\left(Ez_0^n - Ez_1^n\right) = 0 \tag{3.54}$$

gelten. Wird nun $F_1 = 1$ und $F_k = 0$ für $k = -1, 0, \pm 2, \ldots$ gewählt, so ergibt sich entsprechend

$$\lim_{n\to\infty}\left(Ez_1^n - Ez_2^n\right) = 0. \tag{3.55}$$

Setzen wir diesen Prozess fort, so erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} Ez_0^n = \lim_{n\to\infty} Ez_k^n =: A \neq 0 \tag{3.56}$$

für alle k. Aus der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\left(Ez_k^n\right)^2 \leq E\left(z_k^n\right)^2. \tag{3.57}$$

Aus der A-priori-Abschätzung des Lemmas 3.1 erhalten wir dann

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(Ez_k^n\right)^2\Delta x \leq C \tag{3.58}$$

für alle n. Aber

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (Ez_k^n)^2 \, \Delta x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A^2 \Delta x \leq C \tag{3.59}$$

ist für $A \neq 0$ nicht möglich.

■

Damit haben wir erhalten

Theorem 3.4. *Es seien $v_x(0,x) \in C^{5,\alpha}$ und $a \in [\,-1, 0\,[$. Dann gibt es eine Folge von Zerlegungen, so dass $\left(u_k^n\right)_{k=0,\pm1,\pm2,\dots}$ schwach gegen $v(t,x)$ in $L^2(\mathbb{R}^1 \times \Omega)$ konvergiert.*

3.2.1 Anwendungen der Fourier-Transformation

Ein anderer Weg für Stabilitätsbeweise ist von von Neumann beschritten worden [60]. Er wendete die Methoden der Fourier-Analysis an, um notwendige und hinreichende Bedingungen für die Stabilität eines Differenzenschemas herzuleiten. Im folgenden wird gezeigt, dass diese Vorgehensweise auch für den stochastischen Fall zweckmäßig ist.

Die Fourier-Inversionsformel liefert die Darstellung

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} e^{im\Delta x\xi} \hat{u}^{n+1}(\xi) d\xi, \tag{3.60}$$

wobei $\hat{u}^{n+1}$ die Fourier-Transformierte von u^{n+1} ist, d.h.

$$\hat{u}^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\Delta x\xi} u_m^{n+1} \Delta x,$$

wobei das ξ eine reelle Variable ist. Natürlich gilt auch

$$u_m^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} e^{im\Delta x\xi} \hat{u}^n(\xi) d\xi. \tag{3.61}$$

Setzt man diese Darstellung in die stochastische Variante des FTFS-Schemas (3.10) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} e^{im\Delta x\xi} \hat{u}^n(\xi) \left\{ (1 + \frac{a\Delta t}{\Delta x}) \right. \\ & \left. -e^{i\Delta x\xi} \frac{a\Delta t}{\Delta x} + b(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \right\} d\xi. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Die Eindeutigkeit der Fourier-Transformation liefert die Gleichheit der beiden Ausdrücke, d.h. es gilt

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = \hat{u}^n(\xi) \left\{ (1 + \frac{a\Delta t}{\Delta x}) - e^{i\Delta x\xi} \frac{a\Delta t}{\Delta x} + b(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \right\}. \tag{3.63}$$

In Anlehnung an den deterministischen Fall führen wir

$$g(\Delta x\xi, \Delta t, \Delta x) := \left\{(1+\frac{a\Delta t}{\Delta x}) - e^{i\Delta x\xi}\frac{a\Delta t}{\Delta x} + b(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t))\right\} \tag{3.64}$$

als Amplifikationsfaktor des entsprechenden Verfahrens - hier des sFTFS - ein. Das folgende Theorem liefert ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Stabilität eines Verfahrens in Abhängigkeit von den Eigenschaften seines Amplifikationsfaktors.

Theorem 3.5. *Ein stochastisches Ein-Schritt-Differenzenschema (mit konstanten Koeffizienten) ist dann und nur dann stabil, wenn eine Konstante K (unabhängig von ξ, Δt, Δx) und positive Schrittweiten $\overline{\Delta x_0}, \overline{\Delta t_0}$ existieren, so dass*

$$E|g(\Delta x\xi, \Delta t, \Delta x)|^2 \leq 1 + K\Delta t \tag{3.65}$$

für alle $0 \leq \Delta x \leq \overline{\Delta x_0}$ und $0 \leq \Delta t \leq \overline{\Delta t_0}$.

Beweis: Zuerst sei angenommen, dass (3.65) erfüllt ist. Man führt für $v \in L^2(\mathbb{R}^1 \times \Omega)$ die $E\|\cdot\|^2_{\Delta x}$–Norm ein, d.h.

$$E \parallel \hat{v} \parallel^2_{\Delta x} = E\int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi = E\sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_m|^2\Delta x = E \parallel v \parallel^2_{\Delta x}, \tag{3.66}$$

wobei $v_k = v_k(t)$ ist. Mit der Parsevalschen Relation (vgl. auch Anhang 5.2) und der Unabhängigkeit der Zuwächse des Wiener-Prozesses ergibt sich

$$\begin{aligned}
E\|v^n\|^2_{\Delta x} &= E\int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} |\hat{v}^n|^2 d\xi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} E|g(\Delta x\xi, \Delta t, \Delta x)|^{2n} E|\hat{v}^0|^2 d\xi \\
&\leq \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} (1+K\Delta t)^n E|\hat{v}^0|^2 d\xi \\
&= (1+K\Delta t)^n E\|\hat{v}^0\|^2_{\Delta x}.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Da $n \leq \frac{t}{\Delta t} \leq \frac{T}{\Delta t}$ gilt, folgt auch $(1+K\Delta t)^n \leq (1+K\Delta t)^{\frac{T}{\Delta t}} \leq e^{KT}$, wobei $\Delta t = \frac{t}{n+1}$, und deshalb erhält man auch $E\|v^n\|^2_{\Delta x} \leq e^{KT}E\|v^0\|^2_{\Delta x}$. Dies aber ist die Stabilität.

Es sei angenommen, dass die Bedingung (3.65) für den Amplifikationsfaktor für keinen positiven Wert von K erfüllt ist. Es wird gezeigt, dass unter dieser Bedingung die Stabilitätsbedingung nicht erfüllt sein kann. Es wird angenommen, dass für eine positive Konstante C ein Intervall von $\theta := \Delta x\xi, \theta \in [\theta_1, \theta_2]$ existiert, wobei $\theta_1 < 0$, $\theta_2 > 0$ und $\Delta x, \Delta t$ so dass $0 \leq \Delta x \leq \overline{\Delta x_0}$, $0 \leq \Delta t \leq \overline{\Delta t_0}$ mit

$$E|g(\theta, \Delta t, \Delta x)|^2 \geq 1 + C\Delta t$$

gilt. Dann definiert man eine Funktion $\hat{v}^0$

$$\hat{v}^0(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad \Delta x\xi \notin [\theta_1, \theta_2] \\ \sqrt{\Delta x(\theta_2-\theta_1)^{-1}}, & \text{falls} \quad \Delta x\xi \in [\theta_1, \theta_2], \end{cases} \tag{3.68}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} E\|v^n\|^2_{\Delta x} &= \int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} (E|g(\theta,\Delta x,\Delta t)|^2)^n E|\hat{v}^0|^2 d\xi \\ &= \int_{\frac{\theta_1}{\Delta x}}^{\frac{\theta_2}{\Delta x}} E|g(\theta,\Delta x,\Delta t)|^{2n} \frac{\Delta x}{\theta_2-\theta_1} d\xi \\ &\geq (1+C\Delta t)^n. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Für $j \approx n+1 = \frac{t}{\Delta t}$, $j \leq n$, gilt

$$(1+C\Delta t)^j \approx (1+C\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} = e^{tC}. \tag{3.70}$$

Mit $\Delta t = \frac{t}{n+1}$ und mit $E\|v^0\|^2_{\Delta x} = E\|\hat{v}^0\|^2_{\Delta x} = 1$ hat man

$$E\|v^n\|^2_{\Delta x} \geq \frac{1}{2} e^{tC} E\|v^0\|^2_{\Delta x}. \tag{3.71}$$

Dies zeigt, dass das Schema instabil ist, weil C beliebig groß sein kann.

■

Von diesem Theorem kann ein Korollar für alle stochastischen Differenzenschemata hergeleitet werden, die ein multiplikatives Rauschen enthalten.

Korollar 3.1. *Ein stochastisches Differenzenschema, das sich von seinem deterministischen Ausgangsschema nur durch den Zusatzterm zur Approximation von $b\int_0^t v(s,x)dW(s)$ unterscheidet, ist stabil dann und nur dann, wenn auch das deterministische Verfahren stabil ist.*

Beweis: Ein deterministisches Schema ist stabil dann und nur dann, wenn $|g| \leq 1 + K\Delta t$ gilt (vgl. [60], [61]). Für den Amplifikationsfaktor $\bar{g}$ des stochastischen Schemas gilt:

$$\begin{aligned} E|\bar{g}|^2 &\leq E|g + C(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)|^2 \\ &= E|g|^2 + C^2\Delta t \leq (1+K\Delta t)^2 + C^2\Delta t \\ &\leq 1 + H\Delta t, \end{aligned} \tag{3.72}$$

wobei $H = 2K + C^2 + K^2$.

■

Beispiel 3.1. Wendet man die von Neumann Analysis auf die stochastische Version des Lax-Friedrichs-Schemas (3.12) an, so erhält man

$$g(\theta,\Delta t,\Delta x) = \cos\theta - iR\sin\theta + B\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t))\right)(\cos\theta - iR\sin\theta) \tag{3.73}$$

für ein beliebiges $i \in \{1,...,n\}$. Im quadratischen Mittel erhält man

$$E|g(\theta,\Delta t,\Delta x)|^2 = |\cos\theta - iR\sin\theta|^2 + B^2\Delta t\,|\cos\theta - iR\sin\theta|^2. \tag{3.74}$$

Man sieht, dass $E|g(\theta,\Delta t,\Delta x)|^2$ nur dann kleiner gleich $1+K\Delta t$ sein kann, wenn $|R| \leq 1$ ist.

Bemerkung 3.6. Stabilitätsbedingungen für variable Koeffizienten
Bei den bisherigen Betrachtungen wurden Fälle hyperbolischer Differentialgleichungen mit variablem Koeffizienten $a(t,x)$ nicht betrachtet. Trotzdem lassen sich die bisherigen Betrachtungen und die gefundenen Stabilitätsbedingungen problemlos auf diesen Fall übertragen. Beispielsweise ist die Stabilitätsbedingung für eine entsprechende Version des Lax-Friedrich-Schemas

$$\begin{aligned} g(\theta,\Delta t,\Delta x) &= \cos\theta - ia(t,x)\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\theta \\ &\quad + B\left(W((i+1)\Delta t) - W(i\Delta t)\right)\right)\left(\cos\theta - ia(t,x)\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\theta\right) \end{aligned} \tag{3.75}$$

erfüllt, wenn das $a(t,x)\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ ist, und zwar für alle Gitterpunkte $(n\Delta t, k\Delta x)$, die im entsprechenden Berechnungsgebiet liegen.

3.2.2 Stochastische Mehrschrittverfahren

Den Nachweis der Stabilität stochastischer Mehrschrittverfahren kann man auch auf die deterministische Theorie zurückführen, indem man zeigt, dass sich das Abweichen des stochastischen Verfahrens vom deterministischen im quadratischen Mittel durch $C\Delta t$ beschränken läßt. Die Stabilitätsanalyse für deterministische Verfahren mit höherer Zeitschrittweite, d.h. für Verfahren bei denen das Level $n+1$ von mehr Leveln als vom Level n abhängt, gestaltet sich anspruchsvoller. Wir betrachten deshalb ein kurzes Beispiel, vgl. [60], nämlich die Stabilitätsanalyse des deterministischen Leapfrog-Verfahrens. Für die Fouriertransformierte des deterministischen Leapfrog-Schemas gilt wegen der Eindeutigkeit der Fouriertransformation die folgende Beziehung:

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) + 2iR\sin\Delta x\xi\,\hat{u}^n - \hat{u}^{n-1} = 0 \tag{3.76}$$

Diese Gleichung wird gelöst, indem man $\hat{u}^n = g^n$ setzt, wobei auf der linken Seite n für einen Index steht, auf der rechten für einen Exponenten. Löst man das entstehende Gleichungssystem, so erhält man nach Division durch g^{n-1}

$$g^2 + 2iR\sin\Delta x\xi\, g - 1 = 0, \tag{3.77}$$

das Amplifikationspolynom des Leapfrog-Schemas, dessen Nullstellen die folgende Gestalt haben

$$g_\pm = -iR\sin\Delta x\xi \pm \sqrt{1 - R^2\sin^2\Delta x\xi}. \tag{3.78}$$

Sind die beiden Nullstellen verschieden, so hat die Lösung nach [60] die Gestalt

$$\hat{u}^n(\xi) = A(\xi)g_+(\Delta x\xi) + B(\xi)\left(\frac{g_-(\Delta x\xi)^n - g_+(\Delta x\xi)^n}{g_-(\Delta x\xi) - g_+(\Delta x\xi)}\right) \tag{3.79}$$

und im Falle der Gleichheit

$$\hat{u}^n(\xi) = A(\xi)g(\Delta x\xi)^n + B(\xi)ng(\Delta x\xi)^{n-1}, \tag{3.80}$$

wobei die Funktionen $A(\xi)$ und $B(\xi)$ von den Anfangswerten abhängen, und zwar

$$A(\xi) = \hat{u}^0(\xi), \tag{3.81}$$

$$B(\xi) = \hat{u}^1(\xi) - \hat{u}^0 g_+(\Delta x\xi), \tag{3.82}$$

wobei auch hier $\hat{u}$ wieder durch ein stabiles Einschrittverfahren berechnet wird. Man kann dann die Anfangswerte so geschickt wählen, dass $B(\xi)$ identisch Null wird, so dass man wieder in einer ähnlichen Situation wie den Einschrittverfahren ist. Man braucht nämlich für die Stabilität, dass

$$|g_\pm(\Delta x\xi)| \leq 1 \tag{3.83}$$

gilt. Eingesetzt in Gleichung (3.78) erkennt man, dass zwar

$$|g_+|^2 = |g_-|^2 = 1$$

ist, aber für $|R| > 1$ sieht man, dass $|g_-| > 1$ ist, so dass die Stabilität in diesem Fall für $|R| \leq 1$ gewährleistet ist. Betrachtet man den Fall $g_+ = g_-$, so muß nur noch der bereits gefundene Bereich $|R| \leq 1$ untersucht werden, dort ist aber $g_+ = g_-$ nur dann, wenn $|R| = 1$ ist und $\Delta x\xi = \pm\pi/2$, so dass $g_\pm = \pm i$ ist. Eingesetzt in Gleichung (3.80) ergibt sich dann aber der Ausdruck

$$\hat{u}^n = A(\pm\frac{\pi}{2})g(\pm i)^n + B(\pm\frac{\pi}{2})ng(\pm i)^{n-1}, \tag{3.84}$$

der linear in n wächst. Deshalb ist das deterministische Leapfrog-Schema stabil für $|R| < 1$. Die deterministische Stabilitätstheorie für Mehrschrittverfahren beruht darauf, das Amplifikationspolynom des betrachteten Verfahrens und in Abhängigkeit von seinen Nullstellen den Stabilitätsbereich zu bestimmen. Dabei ist das Amplifikationspolynom im deterministischen Fall definiert als

$$\begin{aligned} \Phi(g,\theta) &= \Delta t\, p_{\Delta t,\Delta x}\left(\frac{\ln g}{\Delta t}, \frac{\theta}{\Delta x}\right), \quad \text{bzw.} \\ \Phi(e^{s\Delta t}, \Delta x\xi) &= \Delta t p_{\Delta t,\Delta x}(s,\xi), \end{aligned} \tag{3.85}$$

wobei $p_{\Delta t,\Delta x}$ das Symbol des Differenzenschemas ist.

Definition 3.4. Das Symbol $p_{\Delta t,\Delta x}$ des Differenzenoperators $P_{\Delta t,\Delta x}$ ist durch

$$P_{\Delta t,\Delta x} = p_{\Delta t,\Delta x} e^{sn\Delta t} e^{im\Delta x\xi} \tag{3.86}$$

definiert. d.h. das Symbol ist die Funktion, die man erhält, falls man den Differenzenoperator auf die Zerlegungsfunktion $e^{sn\Delta t}e^{im\Delta x\xi}$ anwendet und danach mit dieser multipliziert.

Eine alternative Berechnungsmöglichkeit im deterministischen Fall ist aber auch der Ansatz, den wir oben für das Leapfrog-Schema gewählt haben, indem wir $u_m^n = g^n e^{im\theta}$ für $f = 0$ gesetzt haben. Für Mehrschrittverfahren ist das Amplifikationspolynom vom Grad σ, wobei σ

die Differenz zwischen der $(n+1)$-Zeitstufe, die berechnet wird, und der frühesten Zeitstufe $(n+1-\sigma)$ ist, die noch in diese Berechnung mit eingeht. Hat das Amplifikationspolynom des deterministischen Verfahrens ausschließlich einfache Nullstellen $g_1(\Delta x\xi), ..., g_\sigma(\Delta x\xi)$, so hat die Fourier-Transformierte $\hat{u}^n$ die Darstellung

$$\hat{u}^n = \sum_{\nu=1}^{\sigma} g_\nu(\Delta x\xi)^n A_\nu(\xi) \tag{3.87}$$

in Abhängigkeit der Nullstellen. Dementsprechend ließen sich auch für stochastische Schemata die Symbole und Amplifikationspolynome aufstellen, die aber zu einer Berechnung einer allgemeinen Nullstelle für eine Realisierung des Wiener-Prozesses nicht taugen, da sie für jedes $\hat{u}^{n+1}$ von der Wiener-Prozess-Differenz $(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t))$ abhängen. Für Einschrittverfahren ist das Amplifikationspolynom $\Phi(g,\theta)$ ein lineares Polynom, und die Lösung ist im deterministischen Fall gegeben durch $\hat{u}^n_{det}(\xi) = g(\Delta x\xi)^n \hat{u}^0(\xi)$ und im stochastischen durch $\hat{u}^n(\xi) = \prod_{i=1}^n g_i(\Delta x\xi)\, \hat{u}^0(\xi)$. Es läßt sich induktiv für Ein- und Mehrschrittverfahren zeigen, dass die Differenz $E|\hat{u}^n - \hat{u}^n_{det}|^2 \leq C\Delta t$ ist für alle n. Wir führen folgende Notationen für deterministische und stochastische Mehrschrittverfahren ein:

$$\hat{u}^{n+1} = f(\hat{u}^n, ..., \hat{u}^{n-\sigma+1}), \tag{3.88}$$

wobei wir zur Kennzeichnung des Deterministischen *det* anhängen. Damit kann man den folgenden Satz zeigen.

Theorem 3.6. *Ein finites stochastisches Mehrschrittverfahren ist stabil im quadratischen Mittel genau dann, wenn das zugehörige deterministische Mehrschrittverfahren stabil ist, d.h. wenn das zugehörige deterministische Amplifikationspolynom $\Phi(\theta, \Delta t, \Delta x)$ die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) Es existiert eine Konstante $K > 0$, so dass für alle Nullstellen g_ν, $\nu = 1, ..., \sigma$ des Amplifikationspolynomes gilt

$$|g_\nu| \leq 1 + K\Delta t. \tag{3.89}$$

(ii) Falls $|g_\nu| = 1$, dann muß g_ν eine einfache Nullstelle sein.

Beweis:

(1) Zuerst sei angenommen, dass (i) und (ii) erfüllt sind. Mit der für $v \in L^2(\mathbb{R}^1 \times \Omega)$ eingeführten $\|\cdot\|^2_{\Delta x}$–Norm, der Parsevalschen Relation (vgl. auch Anhang 5.2), und der

Unabhängigkeit der Zuwächse des Wiener-Prozesses ergibt sich

$$
\begin{aligned}
E\|u^n\|^2_{\Delta x} &= E\int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} |\hat{u}^n|^2 d\xi \\
&\leq 2\int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} E|\hat{u}^n - \hat{u}^n_{det}|^2 + E|\hat{u}^n_{det}|^2 d\xi \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} E|f(\hat{u}^{n-1},...,\hat{u}^{n-\sigma}) - f_{det}(\hat{u}^{n-1},...,\hat{u}^{n-\sigma})|^2 \\
&\quad +|\sum_{\nu=1}^{\sigma} g_\nu(\Delta x\xi,\Delta t,\Delta x)^n A_\nu \hat{u}^0(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq 2\int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} \left(C_1\Delta t + \sigma\sum_{\nu=1}^{\sigma}|g_\nu(\Delta x\xi,\Delta t,\Delta x)|^{2n}|A_\nu|^2|\hat{u}^0|^2\right) d\xi \\
&\leq 2\int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} \left(C_1\Delta t + \sigma^2(1+C_2\Delta t)^n \max_\nu |A_\nu|^2|\hat{u}^0(\xi)|\right) d\xi \\
&\leq C(1+K\Delta t)^n\|u^0\|^2_{\Delta x}.
\end{aligned}
\tag{3.90}
$$

Da $n \leq \frac{t}{\Delta t} \leq \frac{T}{\Delta t}$ gilt, folgt auch

$$
(1+K\Delta t)^n \leq (1+K\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} \leq e^{Kt}, \tag{3.91}
$$

wobei $\Delta t = \frac{t}{n+1}$. Deshalb erhält man $E\|u^n\|^2_{\Delta x} \leq Ce^{KT}E\|u^0\|^2_{\Delta x}$. Also ist das Verfahren, das diese Bedingungen erfüllt, stabil.

(2) Jetzt weisen wir nach, dass ein Verfahren, für das Bedingung (3.89) nicht erfüllt ist, nicht stabil sein kann. Es wird angenommen, dass für eine positive Konstante C ein Intervall von $\theta := \Delta x\xi, \theta \in [\theta_1,\theta_2]$ existiert, wobei $\theta_1 < 0$, $\theta_2 > 0$ und $\Delta x, \Delta t$ so dass $0 \leq \Delta x \leq \overline{\Delta x_0}$, $0 \leq \Delta t \leq \overline{\Delta t_0}$ mit

$$
E|g_{\nu_0}(\theta,\Delta t,\Delta x)|^2 \geq 1 + C\Delta t
$$

für $\nu_0 \in \{1,...,\sigma\}$ gilt. Dann definiert man die Funktionen A_ν wie folgt

$$
A_{\nu_0}(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad \Delta x\xi \notin [\theta_1,\theta_2] \\ \sqrt{\Delta x(\theta_2-\theta_1)^{-1}}, & \text{falls} \quad \Delta x\xi \in [\theta_1,\theta_2], \end{cases} \tag{3.92}
$$

$$
A_\nu = 0, \quad \text{falls} \quad \nu \neq \nu_0. \tag{3.93}
$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
E\|v^n\|^2_{\Delta x} &= E\int_{-\frac{\pi}{\Delta x}}^{\frac{\pi}{\Delta x}} \left|\sum_{\nu=1}^{\sigma} g_\nu(\theta,\Delta x,\Delta t)^n A_\nu\right|^2 d\xi \\
&= \int_{\frac{\theta_1}{\Delta x}}^{\frac{\theta_2}{\Delta x}} E|g_{\nu_0}(\theta,\Delta x,\Delta t)|^{2n}\frac{\Delta x}{\theta_2-\theta_1} d\xi \\
&\geq (1+C\Delta t)^n.
\end{aligned}
\tag{3.94}
$$

Für $j \approx n+1 = \frac{t}{\Delta t}$, $j \leq n$, gilt

$$
(1+C\Delta t)^j \approx (1+C\Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} = e^{tC}, \tag{3.95}
$$

mit $\Delta t = \frac{t}{n+1}$, und mit $E\|u^0\|^2_{\Delta x} = E\|A_{\nu 0}\|^2_{\Delta x} = 1$ hat man $E\|u^n\|^2_{\Delta x} \geq \frac{1}{2}e^{tC}E\|A_{\nu 0}\|^2_{\Delta x}$. Dies zeigt, dass das Schema instabil ist, weil C beliebig groß sein kann.

(3) Gäbe es mehrfache Nullstellen vom Betrag 1, so könnte das Polynom nach [59] geschrieben werden als

$$\hat{u}^n = \sum_{\nu=1}^{\gamma}\sum_{\eta=1}^{\sigma_\nu} A_{\eta\nu} n^{\eta-1} g_\nu^n, \tag{3.96}$$

wobei $\sum_{\nu+1}^{\gamma}\sum_{\eta=1}^{\sigma_\nu} = \sigma$ ist. Diese Summanden wachsen aber für $\sigma_\nu = 2$ schon linear in n, so dass das Verfahren instabil wird. Dieses Verhalten überträgt sich auf den stochastischen Fall, da die stochastische Nullstelle für Δt klein beliebig nahe an die deterministische herankommt. Ist die deterministische Nullstelle $|g_\nu| < 1$, so ist

$$n|g_\nu|^{n-1}|A_{\sigma\nu}| < \frac{1}{|g_\nu|\log|g_\nu|}|A_{\sigma\nu}| \tag{3.97}$$

im deterministischen Fall begrenzt. Damit ist aber auch der entsprechende Ausdruck für die stochastische Nullstelle beschränkt.

■

3.2.3 Die Wohlgestelltheit von stochastischen partiellen Differentialgleichungen

Damit eine stochastische partielle Differentialgleichung die zeitliche Entwicklung eines sich wohlverhaltenden physikalischen Prozesses oder eines Finanzinstrumentes am Markt wiedergibt, sollte sie einige Eigenschaften besitzen. Eine der wichtigsten ist die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten. Diese besagt, dass kleine Fehler in den Anfangswerten nur zu kleinen Veränderungen der Lösungen führen. Analog zur deterministischen Begriffsbildung führen wir an dieser Stelle den Begriff der Wohlgestelltheit im quadratischen Mittel ein und zeigen, dass die von uns im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Anfangswertprobleme diesem Begriff genügen. Dabei verwenden wir insbesondere die Fourier-Analysis, um die Wohlgestelltheit zu zeigen.

Definition 3.5. Das Anfangswertproblem für eine stochastische partielle Differentialgleichung heißt wohlgestellt im quadratischen Mittel, falls eine Konstante $C = C(t)$ existiert, so dass die Ungleichung

$$E\|v(t,\cdot)\|^2 \leq C(t)E\|v(0,\cdot)\|^2 \tag{3.98}$$

für alle Anfangswerte $v(0,\cdot)$ erfüllt ist.

Betrachten wir Gleichung (3.8), so gilt nämlich wegen der Parsevalschen Relation, vgl. (5.2), die folgende Beziehung

$$E\int_{-\infty}^{\infty}|v(t,x)|^2\,dx = E\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{v}(t,\xi)|^2\,d\xi, \tag{3.99}$$

womit man die Norm von $v(t,x)$ durch die Norm von $\hat{v}(t,\xi)$ berechnen kann. Es gilt

$$\begin{aligned} d_t\hat{v}(t,\xi) &= -a\hat{v}_x(t,\xi)dt - b\hat{v}(t,\xi)dW(t) \\ &= -ia\xi\hat{v}(t,\xi)\,dt - b\hat{v}(t,\xi)\,dW(t) \end{aligned} \tag{3.100}$$

und daraus erhält man unter Anwendung der Lösungsformel für gewöhnliche stochastische Differentialgleichungen (vgl. I.I. Gikhman und A.V. Skorohod [11]), indem man mit der Itô-Formel das Differential

$$Z(t) := \ln \hat{v}(t,\xi) \tag{3.101}$$

bestimmt, d.h.

$$dZ(t) = \left[-ia\xi - \frac{b^2}{2}\right] dt - b\,dW(t) \tag{3.102}$$

und damit gilt

$$\hat{v}(t,\xi) = \hat{v}_0(\xi)\exp\left(\left[-ia\xi - \frac{b^2}{2}\right] t - bW(t)\right). \tag{3.103}$$

Eingesetzt in Gleichung (3.99) erhält man wegen der Unabhängigkeit von $\hat{v}_0(\xi)$ und dem Wiener-Prozeß

$$\begin{aligned} &E\int_{-\infty}^{\infty} |v(t,x)|^2\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E|\hat{v}(0,\xi)|^2 E\left|\exp\left(\left[-ia\xi - \frac{b^2}{2}\right] t - bW(t)\right)\right|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E|\hat{v}(0,\xi)|^2\,|\exp(-ia\xi t)|^2\,E\exp\left(-\int_0^t b^2\,ds - 2b\int_0^t dW(s)\right) d\xi \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} E|\hat{v}(0,\xi)|^2 E\exp\left(-\int_0^t b^2\,ds - 2b\int_0^t dW(s)\right) d\xi. \end{aligned} \tag{3.104}$$

Aus Lemma 5 in [11], Seite 250 folgt

$$E\exp\left(-2b\int_0^t dW(s)\right) \le e^{\frac{4b^2}{2}t}. \tag{3.105}$$

In diesem Fall erhält man sogar die Gleichheit, denn $X := e^{-2bW(t)} = e^Y$ ist logarithmisch normalverteilt, wobei $Y \sim N(\mu,\sigma^2)$ ist mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 4b^2t$. Damit ist insbesondere $EX = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} = e^{2b^2t}$. Also gilt

$$\begin{aligned} E\int_{-\infty}^{\infty} |v(t,x)|^2\,dx &\le \int_{-\infty}^{\infty} E|\hat{v}(0,\xi)|^2 E\left(\exp\left(-\int_0^t b^2\,ds - 2b\int_0^t dW(s)\right)\right) d\xi \\ &\le E\int_{-\infty}^{\infty} e^{b^2t}|\hat{v}(0,\xi)|^2\,d\xi. \end{aligned} \tag{3.106}$$

Für die Fourier-Transformierte hat man dabei die folgende Darstellung gefunden

$$d_t\hat{v}(t,\xi) = q(\xi,\omega)\hat{v}(t,\xi) \quad \text{bzw.} \tag{3.107}$$

$$\hat{v}(t,\xi) = e^{q(\xi,\omega)}\hat{v}(0,\xi), \tag{3.108}$$

wobei $q(\xi,\omega) = \left[-ia\xi - \frac{b^2}{2}\right] t - bW(t)$.

Korollar 3.2. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Wohlgestelltheit des Anfangswertproblems (3.107) ist, dass eine zufällige Konstante $\bar{q}$ existiert mit*

$$\Re q(\xi, \omega) \leq \bar{q}(\omega) \tag{3.109}$$

für alle reellen Werte von ξ ist.

Beweis: Angenommen die Funktion $q(\xi, \omega)$ erfüllt die Bedingung (3.109), dann folgt aus (3.108)

$$|\hat{v}(t, \xi)| = |e^{q(\xi,\omega)}||\hat{v}(0, \xi)| \leq e^{\bar{q}(\omega)}|\hat{v}(0, \xi)|, \tag{3.110}$$

womit (3.98) unter Ausnutzung der Parsevalschen Relation, vgl. (5.2), sofort folgt. Angenommen, die Bedingung (3.109) werde durch $q(\xi, \omega)$ verletzt, dann kann man durch eine geeignete Wahl von $\hat{v}(0, \xi)$ erreichen, vgl. dazu die Konstruktionen in den Beweisen von Theorem 3.5 und Theorem 3.6, dass

$$E\|v(t, \cdot)\|_2 > CE\|v(0, \cdot)\|_2, \tag{3.111}$$

und zwar für beliebig große Konstanten C, womit die Differentialgleichung nicht mehr wohlgestellt sein kann. ■

3.2.4 Ein Konvergenzsatz

Theorem 3.7. *Es sei $v(0, x) \in C^{5,\alpha}$. Das Differenzenverfahren $L_k^n u_k^n = G_k^n$ sei konsistent im Sinne von Definition 3.1 mit $C(\Delta t, \Delta x) = \Delta t^2 \cdot \tilde{C}(\Delta t, \Delta x)$ und stabil im Sinne von Definition 3.2 und die Funktionen $A(\cdot, \cdot)$, $B(\cdot, \cdot)$ seien Lipschitz-stetig und wachstumsbeschränkt.*

Geht $\tilde{C}(\Delta t, \Delta x)$ gegen Null für Δt, $\Delta x \to 0$, so konvergiert die Folge im quadratischen Mittel, d.h. es gilt

$$\lim_{n\to\infty} E\|v(n\Delta t, k\Delta x) - u_k^n\|^2 \longrightarrow 0. \tag{3.112}$$

Verhält sich der Ausdruck $\tilde{C}(\Delta t, \Delta x)$ lediglich wie eine Konstante, so gibt es eine Folge von Zerlegungen, so dass $\left(u_k^n\right)_{k=0,\pm1,\pm2,\ldots}$ schwach gegen $v(t, x)$ in $L^2(\mathbb{R}^1 \times \Omega)$ konvergiert.

Beweis: Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Theorem 3.4. Wir leiten zuerst eine A-priori-Abschätzung für

$$z_k^n := v(n\Delta t, k\Delta x) - u_k^n \tag{3.113}$$

her. Wir erhalten

$$\begin{aligned} z_k^{n+1} \quad = \quad & v(n\Delta t, k\Delta x) - \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} (av_x(\tau, x) + A(\tau, v(\tau, k\Delta x)))\, d\tau \\ & - \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} B(\tau, v(\tau, k\Delta x))\, dW(\tau) - u_k^n + \tilde{a}_k(n\Delta t, u_\bullet^n) \\ & + A(n\Delta t, u_k^n)\Delta t + B(n\Delta t, u_k^n)\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right), \end{aligned} \tag{3.114}$$

wobei $\tilde{a}_k(n\Delta t, u_\bullet^n)$ ein Differenzenoperator bezüglich x zur Approximation von $-av_x(t,x)$ ist.

Daraus folgt mit dem Einsetzen der Taylorentwicklung für $v_x(n\Delta t, k\Delta x)$ an der Stelle $k\Delta x$

$$
\begin{aligned}
z_k^{n+1} &= z_k^n - \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \Big(av_x(\tau, k\Delta x) + A(\tau, v(\tau, k\Delta x)) \\
&\quad - (av_x(n\Delta t, k\Delta x) + A(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x))) \Big) \, d\tau \\
&\quad - (av_x(n\Delta t, k\Delta x) + A(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x)))\, \Delta t \\
&\quad - \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} (B(\tau, v(\tau, k\Delta x)) - B(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x)))\, dW(\tau) \\
&\quad - B(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x))\, (W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \\
&\quad + \tilde{a}_k(n\Delta t, u_\bullet^n) + A(n\Delta t, u_k^n)\Delta t + B(n\Delta t, u_k^n)\, (W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \\
&= z_k^n - \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \Big(av_x(\tau, k\Delta x) + A(\tau, v(\tau, k\Delta x)) \\
&\quad - (av_x(n\Delta t, k\Delta x) + A(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x))) \Big) \, d\tau \\
&\quad - (\tilde{a}_k(n\Delta t, v(n\Delta t, \bullet)) + av_{xx}(n\Delta t, (k+\vartheta)\Delta x)\, \Delta t \Delta x \\
&\quad - \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} (B(\tau, v(\tau, k\Delta x)) - B(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x)))\, dW(\tau) \\
&\quad - (A(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x) - A(n\Delta t, u_k^n))\, \Delta t \\
&\quad - (B(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x) - B(n\Delta t, u_k^n))\, (W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) - \tilde{a}_k(n\Delta t, u_\bullet^n) \\
&= z_k^n - \tilde{a}_k(n\Delta t, z(n\Delta t, \bullet)) - (A(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x) - A(n\Delta t, u_k^n))\, \Delta t \\
&\quad - (B(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x) - B(n\Delta t, u_k^n))\, (W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) + \phi_{n,k},
\end{aligned} \tag{3.115}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
\phi_{n,k} &= - \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \Big(av_x(\tau, k\Delta x) + A(\tau, v(\tau, k\Delta x)) \\
&\quad - (av_x(n\Delta t, k\Delta x) + A(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x))) \Big) \, d\tau \\
&\quad - av_{xx}(n\Delta t, (k+\vartheta)\Delta t \Delta x \\
&\quad - \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} (B(\tau, v(\tau, k\Delta x)) - B(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x)))\, dW(\tau).
\end{aligned} \tag{3.116}
$$

gilt. Im quadratischen Mittel erhält man daraus

$$
\begin{aligned}
& E|z_k^{n+1}|^2 \\
&= E|z_k^n - \tilde{a}_k(n\Delta t, z(n\Delta t, \bullet)) - (A(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x) - A(n\Delta t, u_k^n))\, \Delta t|^2 \\
&\quad + \Delta t E|B(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x)) - B(n\Delta t, u_k^n)|^2 + E|\phi_{n,k}|^2 \\
&\quad + 2E\left[(z_k^n - \tilde{a}_k(n\Delta t, z(n\Delta t, \bullet)) - (A(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x) - A(n\Delta t, u_k^n))\, \Delta t)\, \phi_{n,k}\right] \\
&\quad + 2E\left[(B(n\Delta t, v(n\Delta t, k\Delta x)) - B(n\Delta t, u_k^n))\, (W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t))\, \phi_{n,k}\right].
\end{aligned} \tag{3.117}
$$

Die Lipschitz-Stetigkeit der Funktionen $A(\cdot,\cdot)$ und $B(\cdot,\cdot)$ liefert

$$\begin{aligned} & E|z_k^{n+1}|^2 \\ \leq\ & 2E|z_k^n - \tilde{a}_k(n\Delta t, z(n\Delta t, \bullet))|^2 + 2\Delta t^2 L_1^2 E|z_k^n|^2 + \Delta t L_2^2 E|z_k^n|^2 \\ & + E|\phi_{n,k}|^2 + 2E\left[(z_k^n - \tilde{a}_k(n\Delta t, z(n\Delta t, \bullet)))\,\phi_{n,k}\right] \\ & + 4L_1^2 \Delta t^2 E|z_k^n|^2 + 4L_2^2 \Delta t E|z_k^n|^2 + 8E|\phi_{n,k}|^2. \end{aligned} \tag{3.118}$$

Nimmt man nun den Summanden $\Delta t E|B(n\Delta t, z_k^n)|^2$ hinzu, addiert über alle k und multipliziert mit Δx, so erhält man

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} E|z_k^{n+1}|^2 \Delta x \\ =\ & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Bigg[E|z_k^n - \tilde{a}_k(n\Delta t, z(n\Delta t, \bullet))|^2 + \Delta t E|B(n\Delta t, z_k^n)|^2 + 9E|\phi_{n,k}|^2 \\ & + 2E\left[(z_k^n - \tilde{a}_k(n\Delta t, z(n\Delta t, \bullet)))\,\phi_{n,k}\right] + (6L_1^2 \Delta t^2 + 6L_2^2 \Delta t) E|z_k^n|^2 \Bigg] \Delta x. \end{aligned} \tag{3.119}$$

Wir setzen $C_0 \Delta t \geq (6L_1^2 \Delta t + 6L_2^2)\Delta t$. Die vorausgesetzte Stabilität des Verfahrens im quadratischen Mittel sichert nun, dass für die beiden ersten Summanden von (3.119)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[E|z_k^n - \tilde{a}_k(n\Delta t, z(n\Delta t, \bullet))|^2 + \Delta t E|B(n\Delta t, z_k^n)|^2 \right] \Delta x \\ & \qquad \leq (1 + C_1 \Delta t) E\|z_\bullet^n\|_{2,\Delta x}^2 \end{aligned} \tag{3.120}$$

gilt. Entsprechend sichert die vorausgesetzte spezielle Konsistenz des Verfahrens, dass die Abschätzung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} E|\phi_{n,k}|^2 \Delta x \quad \leq \quad \Delta t^2 \tilde{C}(\Delta t, \Delta x) \tag{3.121}$$

erfüllt ist. Für den vorletzten Summanden von (3.119) gilt mit der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2E\left[(z_k^n - \tilde{a}_k(n\Delta t, z(n\Delta t, \bullet)))\,\phi_{n,k}\right] \frac{\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{\Delta t}} \\ \leq\ & 4 \sum_{k=-\infty}^{\infty} E\left|z_k^n - \tilde{a}_k(n\Delta t, z(n\Delta t, \bullet))\right|^2 \Delta t \Delta x + C_2 \Delta t \tilde{C}(\Delta t, \Delta x) \\ =\ & C_3 \Delta t E\|z_\bullet^n\|_{2,\Delta x}^2 + C_2 \Delta t \tilde{C}(\Delta t, \Delta x). \end{aligned} \tag{3.122}$$

Damit hat man erhalten, dass

$$\begin{aligned} E\|z_\bullet^{n+1}|_{2,\Delta x}^2 \ \leq\ & E\|z_\bullet^n\|_{2\Delta x}^2 + E\|z_\bullet^n\|_{2\Delta x}^2 \Delta t (C_0 + C_1 + C_3) \\ & + \Delta t^2 \tilde{C}(\Delta t, \Delta x) + \Delta t C_2 \tilde{C}(\Delta t, \Delta x) \\ =\ & E\|z_\bullet^n\|_{2\Delta x}^2 + C_4 \Delta t E\|z_\bullet^n\|_{2\Delta x}^2 + C_5 \Delta t \tilde{C}(\Delta t, \Delta x) \end{aligned} \tag{3.123}$$

für alle n gilt. Nun sei $m < n$, dann gilt natürlich Beziehung (3.123) auch für $E\|z_\bullet^{m+1}\|^2_{2,\Delta x}$. Durch Summation ergibt sich unter Beachtung von $\|z_\bullet^0\| = 0$ und $(n+1)\Delta t = t$

$$E\|z_\bullet^{n+1}\|^2_{2,\Delta x} \leq C_4 \Delta t \sum_{m=0}^{n} E\|z_\bullet^m\|^2_{2,\Delta x} + n\Delta t C_5 \tilde{C}(\Delta t, \Delta x). \tag{3.124}$$

Dann folgt aus dem Gronwallschen Lemma, dass eine Konstante C_6 existiert, so dass

$$E\|z_\bullet^{n+1}\|^2_{2,\Delta x} \leq C_6 \tilde{C}(\Delta t, \Delta x) \tag{3.125}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit ist der Satz bewiesen, wenn $\tilde{C}(\Delta t, \Delta x)$ gegen Null geht für Δt,$\Delta x \to 0$.

Für den Fall, daß $\tilde{C}$ nur eine Konstante ist, kann man den Beweis folgendermassen fortführen. Analog zum Lemma 3.1 erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} E|z^n(t,x)|^2 \, dx \leq C \tag{3.126}$$

gilt. Dann existiert nach dem Satz von Riesz eine Teilfolge $\left(n_j\right) \subset \left(n\right)$, so dass $\left(z^{n_j}\right)$ in $L^2(\mathbb{R}^1 \times \Omega)$ schwach konvergiert. Lemma 3.2 liefert dann, dass der schwache Grenzwert dieser Folge P-f.s. und für L-fast alle x und t gleich Null ist. Damit ist der Satz bewiesen.

■

Wir betrachten nun ein weiteres Beispiel. Wir zeigen, dass die Bedingung (3.18) für folgende Version des Lax-Friedrichs-Schemas

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) - b u_k^n (W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \tag{3.127}$$

erfüllt ist.

Korollar 3.3. *Es sei $v(0,\cdot) \in C^{5,\alpha}$. Die Version (3.127) des Lax-Friedrichs-Schemas ist konsistent im Sinne von Definition 3.1.*

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} & v((n+1)\Delta t, k\Delta x) \\ = \; & v(n\Delta t, k\Delta x) - a v_x(n\Delta t, k\Delta x)\Delta t - b v(n\Delta t, k\Delta x)\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right) \\ & - a \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \left(v_x(\tau, k\Delta x) - v_x(n\Delta t, k\Delta x)\right) d\tau \\ & - b \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \left(v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right) dW(\tau). \end{aligned} \tag{3.128}$$

Durch die Taylorentwicklung von $v_x(n\Delta t, k\Delta x)$ an der Stelle $k\Delta x$ erhält man weiterhin

$$\begin{aligned}
&v((n+1)\Delta t, k\Delta x) \\
&= v(n\Delta t, k\Delta x) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}\left(v(n\Delta t,(k+1)\Delta x) - v(n\Delta t,(k-1)\Delta x)\right) \\
&\quad -bv(n\Delta t, k\Delta x)\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right) - v_{xx}(n\Delta t,(k+\vartheta)\Delta x)\Delta t\Delta x \\
&\quad -a\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(v_x(\tau, k\Delta x) - v_x(n\Delta t, k\Delta x)\right)\,d\tau \\
&\quad -b\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right)\,dW(\tau),
\end{aligned} \tag{3.129}$$

wobei ϑ eine Zufallsgröße mit $-1 < \vartheta < 1$ ist. Folglich gilt mit der Schwarzschen Ungleichung und den Eigenschaften des Itô-Integrales

$$\begin{aligned}
&E\left|v((n+1)\Delta t, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x) + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}\left(v(n\Delta t,(k+1)\Delta x) - v(n\Delta t,(k-1)\Delta x)\right)\right. \\
&\qquad \left. + bv(n\Delta t, k\Delta x)\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right)\right|^2 \\
&\leq 4Ev_{xx}^2(n\Delta t,(k+\vartheta)\Delta x)\Delta t^2\Delta x^2 + 4a^2\Delta t\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v_x(\tau, k\Delta x) - v_x(n\Delta t, k\Delta x)\right|^2\,d\tau \\
&\quad +4b^2\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right|^2\,d\tau.
\end{aligned} \tag{3.130}$$

Die rechte Seite der Ungleichung entspricht nun der rechten Seite der Ungleichung (3.34) und läßt sich demnach wie in Theorem 3.3 durch den gleichen Term $C(\Delta t^2, \Delta x^2)$ abschätzen.

■

3.3 Weitere hyperbolische stochastische Differentialgleichungen

3.3.1 Eindimensionale Ortskoordinaten

In diesem Abschnitt werden Differenzenschemata vorgestellt, die weitere stochastische partielle Differentialgleichungen approximieren. Um auch für diese Schemata die entsprechenden Aussagen über Konvergenz, Stabilität und Konsistenz zu formulieren, sind zusätzliche Voraussetzungen nötig.

Lösungen von Differentialgleichungen des Typs

$$v(t,x) - v(0,x) + a\int_0^t v_x(s,x)\,ds + b\int_0^t v_x(s,x)\,dW(s) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1 \tag{3.131}$$

können durch entsprechende Varianten des Lax-Friedrich-Schemas

$$\begin{aligned}
u_k^{n+1} &= \frac{1}{2}(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) \\
&\quad -\frac{b}{2\Delta x}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n)(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t))
\end{aligned} \tag{3.132}$$

oder entsprechend angepaßte Varianten des FTFS-Schemas

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} &= (1+a\frac{\Delta t}{\Delta x})u_k^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}u_{k+1}^n \\ &\quad -\frac{b}{\Delta x}(u_{k+1}^n - u_k^n)(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \end{aligned} \tag{3.133}$$

approximiert werden. Die Existenz und Eindeutigkeit des Lösungsprozesses von (3.131) ist wegen Theorem 2.1 gesichert. Der Lösungsprozeß

$$\begin{aligned} v(t,x) - v(0,x) + a\int_0^t v_x(s,x)ds + \int_0^t F(v(s,x), v_x(s,x))\,ds \\ + \int_0^t G(v(s,x), v_x(s,x))\,dW(s) &= 0, \end{aligned} \tag{3.134}$$

wobei F, G Lipschitz-stetige Funktionen in v, v_x sind, kann durch

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} &= (1+a\frac{\Delta t}{\Delta x})u_k^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}u_{k+1}^n - \Delta t F(u_k^n, \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{\Delta x}) \\ &\quad -G(u_k^n, \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{\Delta x})(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)) \end{aligned} \tag{3.135}$$

approximiert werden. Theorem 2.1 sichert hier Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (3.134).

Theorem 3.8. *Die Differenzengleichung (3.132) mit $(n+1)\Delta t = t$, $-1 \leq a\frac{\Delta t}{\Delta x} =: R \leq 1$ und $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{n}$ ist stabil im quadratischen Mittel bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm mit $K = 1$ und $\beta = b^2$.*

Beweis: Aus (3.132) ergibt sich

$$\begin{aligned} E|u_k^{n+1}|^2 &= E|\frac{1}{2}(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n) - \frac{R}{2}(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n)|^2 + \frac{b^2\Delta t}{4\Delta x^2}E|u_{k+1}^n - u_{k-1}^n|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left[(1-R)^2 E|u_{k+1}^n|^2 + 2(1-R^2)E[u_{k+1}^n u_{k-1}^n]\right. \\ &\quad \left. +(1+R)^2 E|u_{k-1}^n|^2\right] + \frac{b^2\Delta t}{4\Delta x^2}E|u_{k+1}^n - u_{k-1}^n|^2 \\ &\leq \frac{1}{4}\left([(1-R)+(1+R)]^2 \sup_k E|u_k^n|^2\right) + \frac{b^2\Delta t}{\Delta x^2}\sup_k E|u_k^n|^2 \\ &\leq \left\{1 + \frac{b^2\Delta t}{\Delta x^2}\right\}\sup_k E|u_k^n|^2 \leq \left\{1+\frac{b^2}{n}\right\}\sup_k E|u_k^n|^2 \end{aligned} \tag{3.136}$$

und folglich

$$\sup_k E|u_k^{n+1}|^2 \leq \left\{1+\frac{b^2}{n}\right\}\sup_k E|u_k^n|^2 \leq \left\{1+\frac{b^2}{n}\right\}^{n+1}\sup_k E|u_k^0|^2. \tag{3.137}$$

Deshalb gilt

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq [1+\frac{b^2}{n}]^{\frac{n+1}{2}}\|u^0\|_\infty \leq e^{b^2}\|u^0\|_\infty. \tag{3.138}$$

■

Entsprechend erhält man auch

Theorem 3.9. *Das Differenzenschema (3.133), das Gleichung (3.131) approximiert, mit* $(n+1)\Delta t = t$, $-1 \leq a\frac{\Delta t}{\Delta x} =: R \leq 0$ *und* $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{n}$ *ist stabil im quadratischen Mittel bezüglich der* $\|\cdot\|_{2,\Delta x}$*-Norm mit* $K = 1$ *und* $\beta = 4b^2$.

Beweis: Wendet man $E|\cdot|^2$ auf (3.133) an und beachtet die Unabhänigikeit der Wiener-Prozeß-Zuwächse, so ergibt sich

$$\begin{aligned} E|u_k^{n+1}|^2 &= E|(1+a\frac{\Delta t}{\Delta x})u_k^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}u_{k+1}^n \\ &\quad -\frac{b}{\Delta x}(u_{k+1}^n - u_k^n)(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t))|^2 \\ &= E|(1+R)u_k^n - Ru_{k+1}^n|^2 + \frac{b^2\Delta t}{\Delta x^2}E|u_{k+1}^n - u_k^n|^2. \end{aligned} \tag{3.139}$$

Addiert man über alle k, so liefert eine einfache Rechnung

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E|u_k^{n+1}|^2\Delta x &\leq (|1+R|+|R|)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} E|u_k^n|^2\Delta x + \frac{4b^2\Delta t}{\Delta x^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} E|u_k^n|^2\Delta x \\ &\leq \big((|1+R|+|R|)^2 + \frac{4b^2}{n}\big)\sum_{k=-\infty}^{\infty} E|u_k^n|^2\Delta x \\ &\leq \big(1+\frac{4b^2}{n}\big)\sum_{k=-\infty}^{\infty} E|u_k^n|^2\Delta x \\ &\leq \big(1+\frac{4b^2}{n}\big)^n\sum_{k=-\infty}^{\infty} E|u_k^0|^2\Delta x \\ &\leq e^{4b^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} E|u_k^0|^2\Delta x. \end{aligned} \tag{3.140}$$

■

Theorem 3.10. *Das Differenzenschema (3.135), das die Gleichung (3.134) approximiert, ist stabil im quadratischen Mittel bezüglich der* $\|\cdot\|_{2,\Delta x}$*-Norm mit* $(n+1)\Delta t = t$, $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{n}$, $\overline{\Delta x_0} = 1$, *wenn* F *und* G *die folgenden Bedingungen erfüllen.*

$$\begin{aligned} |F(t,x,y,z)| &\leq C_1\{|y|+|z|\} \\ |G(t,x,y,z)| &\leq C_2\{|y|+|z|\}, \end{aligned} \tag{3.141}$$

$$\begin{aligned} |F(t,x,y,z) - F(t,x,u,v)| &\leq C_3\{|y-u|+|z-v|\} \\ |G(t,x,y,z) - G(t,x,u,v)| &\leq C_4\{|y-u|+|z-v|\} \end{aligned} \tag{3.142}$$

für alle $x, y, u, v \in \mathbb{R}^1$, $t \geq 0$.

Beweis: Aus (3.135) folgt

$$\begin{aligned} E \mid u_k^{n+1} \mid^2 &= E \mid (1+a\frac{\Delta t}{\Delta x})u_k^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}u_{k+1}^n - \Delta t F(u_k^n, \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{\Delta x}) \mid^2 \\ &\quad + \Delta t E \mid G(u_k^n, \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{\Delta x}) \mid^2 . \end{aligned} \tag{3.143}$$

Mit (3.141) ergibt sich unter Beachtung von $\Delta t \leq \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

$$\begin{aligned} E|u_k^{n+1}|^2 &\leq E|(1+R)u_k^n - Ru_{k+1}^n + C_1 \Delta t \Big(|u_k^n| + \frac{|u_{k+1}^n - u_k^n|}{\Delta x}\Big) |^2 \\ &\quad + C_2 \Delta t E\Big| \mid u_k^n \mid + \frac{\mid u_{k+1}^n - u_k^n \mid}{\Delta x}\Big|^2 \\ &\leq E|(1+R)u_k^n - Ru_{k+1}^n|^2 + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(\tilde{C}_1 E|u_k^n|^2 + \tilde{C}_2 E|u_{k+1}^n|^2). \end{aligned} \tag{3.144}$$

Addiert man nun wieder über alle k auf und ordnet die Reihen entsprechend, so folgt die Stabilität aus

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} E|u_k^{n+1}|^2 \Delta x \leq \Big((|1+R| + |R|)^2 + \frac{\tilde{C}_3}{n}\Big) \sum_{k=-\infty}^{\infty} E|u_k^n|^2 \Delta x. \tag{3.145}$$

■

Bemerkung 3.7. Die Konsistenz beider Schemata läßt sich in analoger Weise zur Konsistenz des sFTFS-Schemas zeigen. Die Anwendungen der Fouriertransformation in der Stabilitätsanalyse führen im nichtlinearen Fall aber nicht mehr zum Ziel. Die Existenz einer schwach konvergierenden Teilfolge ergibt sich aus Theorem 3.7.

3.3.2 Differenzenschemata mit zwei und mehr Raumvariablen

Entsprechend der Ausführungen für den eindimensionalen Raumfall kann man die Theorie auch auf den zweidimensionalen bzw. allgemein vektorwertigen Fall ausweiten.

Wir betrachten die folgende Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} v(t,x,y) - v(0,x,y) &+ a_1 \int_0^t v_x(s,x,y)\,ds \\ &+ a_2 \int_0^t v_y(s,x,y)\,ds + b\int_0^t v(s,x,y)\,dW(s) = 0 \end{aligned} \tag{3.146}$$

mit der Anfangswertfunktion

$$v(0,x,y) = f(x,y), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1), \tag{3.147}$$

wobei die Lösung im Sinne von Definition 2.8 zu verstehen ist.

Die Vorgehensweise für höhere Dimensionen ist ähnlich dem eindimensionalen Fall, bringt naturgemäß aber einen höheren Aufwand mit sich. Beispielsweise ergibt sich für (3.146) eine zweidimensionale Version des sFTFS-Schemas

$$\begin{aligned} u_{j,k}^{n+1} &= u_{j,k}^n - \frac{a_1 \Delta t}{\Delta x}(u_{j+1,k}^n - u_{j,k}^n) - \frac{a_2 \Delta t}{\Delta y}(u_{j,k+1}^n - u_{j,k}^n) \\ &\quad - b u_{j,k}^n (W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)). \end{aligned} \tag{3.148}$$

$u^n_{j,k}$ bezeichne dabei die Approximation im Punkt $(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)$ oder im Gitterpunkt (n, j, k). Dabei werden die folgenden Anfangswerte für das Differenzenverfahren in analoger Weise zum eindimensionalen Fall gewählt:

$$u^0_{j,k} = f(j\Delta x, k\Delta y) = v^0_{j,k} \tag{3.149}$$

gewählt. Exemplarisch wird hier die Stabilität und Konsistenz des Schemas (3.148) gezeigt.

Theorem 3.11. *Das zweidimensionale sFTFS-Schema mit* $(n+1)\Delta t = t$ *und* $-1 \leq R_x+R_y \leq 0$, *wobei* $R_x := a_1\frac{\Delta t}{\Delta x}$ *und* $R_y := a_2\frac{\Delta t}{\Delta y}$, R_x, $R_y \leq 0$, *ist stabil im quadratischen Mittel bezüglich der* $\|\cdot\|_{2,\Delta x,\Delta y}$*-Norm, definiert durch* $\|u_{j,k}\|_{2,\Delta x,\Delta y} := \sqrt[2]{\sum_{j,k=-\infty}^{+\infty}|u_{j,k}|^2\Delta x\Delta y}$.

Beweis: Wendet man $E|\cdot|^2$ auf das zweidimensonale sFTFS (3.148) an und beachtet die Unabhängigkeit der Zuwächse des Wiener-Prozesses, so erhält man

$$\begin{aligned} E|u^{n+1}_{j,k}|^2 &= E|u^n_{j,k} - R_x(u^n_{j+1,k} - u^n_{j,k}) \\ &\quad -R_y(u^n_{j,k+1} - u^n_{j,k}) - bu^n_{j,k}(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t))|^2 \\ &= E|(1+R_x+R_y)u^n_{j,k} - (R_x u^n_{j+1,k} + R_y u^n_{j,k+1})|^2 + b^2\Delta t E|u^n_{j,k}|^2. \end{aligned}$$

Mittels Rekursion erhält man dann auch $\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} E|u^n_{j,k}|^2\Delta x\Delta y < \infty$. Addiert man nun über alle j und k und schätzt das Binom ab, so erhält man

$$\begin{aligned} &\sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} E|u^{n+1}_{j,k}|^2\Delta x\Delta y \\ &= \sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} \left[E|(1+R_x+R_y)u^n_{j,k} - (R_x u^n_{j+1,k} + R_y u^n_{j,k+1})|^2 + b^2\Delta t E|u^n_{j,k}|^2\right]\Delta x\Delta y \\ &\leq \sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} \Big[\big(|1+R_x+R_y|^2 E|u^n_{j,k}|^2 \; - 2(1+R_x+R_y)(R_x E(u^n_{j,k}u^n_{j+1,k}) \\ &\quad +R_y E(u^n_{j,k}u^n_{j,k+1})) + E|R_x u^n_{j+1,k} + R_y u^n_{j,k+1}|^2\big) + b^2\Delta t E|u^n_{j,k}|^2\Big]\Delta x\Delta y. \end{aligned}$$

Ordnet man diese Reihe geschickt um, so erhält man

$$\begin{aligned} &\sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} E|u^{n+1}_{j,k}|^2\Delta x\Delta y \\ &\leq \sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} \Big[\big(|1+R_x+R_y|^2 E|u^n_{j,k}|^2 - 2(1+R_x+R_y)(R_x+R_y)E(u^n_{j,k}u^n_{j+1,k}) \\ &\quad +E|R_x u^n_{j+1,k} + R_y u^n_{j,k+1}|^2 + b^2\Delta t E|u^n_{j,k}|^2\Big]\Delta x\Delta y \\ &\leq \sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} \Big[\big(|1+R_x+R_y|^2 E|u^n_{j,k}|^2 - 2(1+R_x+R_y)(R_x+R_y)E(u^n_{j,k}u^n_{j+1,k}) \\ &\quad +|R_x|^2 E|u^n_{j+1,k}|^2 + 2|R_x R_y|E|u^n_{j,k+1}u^n_{j+1,k}| + |R_y|^2 E|u^n_{j,k+1}|^2 \\ &\quad +b^2\Delta t E|u^n_{j,k}|^2\Big]\Delta x\Delta y. \end{aligned}$$

Schätzt man hier das gemischte Glied mit der binomischen Formel ab und ordnet die Reihe nun noch einmal um, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} E|u_{j,k}^{n+1}|^2 \Delta x \Delta y \\
\leq & \sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} \big[\big(|1+R_x+R_y|^2 E|u_{j,k}^n|^2 - 2(1+R_x+R_y)(R_x+R_y) E|u_{j,k}^n|^2 \\
& +|R_x|^2 E|u_{j,k}^n|^2 + 2|R_x R_y| E|u_{j,k}^n|^2 + |R_y|^2 E|u_{j,k}^n|^2 + b^2 \Delta t E|u_{j,k}^n|^2 \big] \Delta x \Delta y \\
\leq & \sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} \big[\big(|1+R_x+R_y|^2 E|u_{j,k}^n|^2 + 2|1+R_x+R_y||R_x+R_y| E|u_{j,k}^n|^2 \\
& +|R_x|^2 E|u_{j,k}^n|^2 + 2|R_x R_y| E|u_{j,k}^n|^2 + |R_y|^2 E|u_{j,k}^n|^2 + b^2 \Delta t E|u_{j,k}^n|^2 \big] \Delta x \Delta y \\
\leq & \sum_{j,k=-\infty}^{+\infty} \big[(|1+R_x+R_y| + |R_x+R_y|)^2 + b^2 \Delta t \big] E|u_{j,k}^n|^2 \Delta x \Delta y. \qquad (3.150)
\end{aligned}$$

Nun braucht man nur noch die Voraussetzungen an R_x, R_y wie in den anderen Stabilitätsbeweisen auszunutzen, vergleiche den Beweis von Theorem 3.1.

■

Theorem 3.12. *Es sei $v(0,\cdot,\cdot) \in C^{5,\alpha}$. Das Schema (3.148) ist konsistent im Sinne von Definition 3.1.*

Beweis: Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned}
& v((n+1)\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) \\
= \; & v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) - a_1 \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} v_x(\tau, j\Delta x, k\Delta y)\, d\tau \\
& -a_2 \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} v_y(\tau, j\Delta x, k\Delta y)\, d\tau - b \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} v(\tau, j\Delta x, k\Delta y)\, dW(\tau) \\
= \; & v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) - a_1 v_x(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\Delta t - a_2 v_y(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\Delta t \\
& -bv(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right) \\
& -a_1 \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \left(v_x(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v_x(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right)\, d\tau \\
& -a_2 \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \left(v_y(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v_y(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right)\, d\tau \\
& -b \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \left(v(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right)\, dW(\tau). \qquad (3.151)
\end{aligned}$$

Da wegen Theorem 2.1 $v(t,x,y)$ bezüglich x dreimal stetig differenzierbar ist, gilt für $\tilde{v}(t,x,y) := v_{xx}(t,x,y)$

$$\begin{aligned}
& \tilde{v}(t,x,y) - v_{xx}(0,x,y) - a_1 \int_0^t \tilde{v}_x(\tau,x,y)\, d\tau \\
& -a_2 \int_0^t \tilde{v}_y(\tau,x,y)\, d\tau - b \int_0^t \tilde{v}(\tau,x,y)\, dW(\tau) = 0 \qquad (3.152)
\end{aligned}$$

und wegen Theorem 2.3 gilt

$$C_1 := \sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^1} E|\tilde{v}(t,x,y)|^2\,dx < +\infty. \tag{3.153}$$

Entsprechend erhält man auch

$$C_2 := \sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^1} E|v_{yy}(t,x,y)|^2\,dx < +\infty. \tag{3.154}$$

Durch die Taylorentwicklung von $v_x(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)$ an der Stelle $j\Delta x$ und von $v_y(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)$ an der Stelle $k\Delta y$ erhält man weiterhin

$$\begin{aligned}
&v((n+1)\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\\
&= \; v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) - \frac{a_1\Delta t}{\Delta x}\left(v(n\Delta t,(j+1)\Delta x, k\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right)\\
&\quad -\frac{a_2\Delta t}{\Delta x}\left(v(n\Delta t, j\Delta x,(k+1)\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right)\\
&\quad -bv(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right)\\
&\quad -v_{xx}(n\Delta t,(j+\vartheta_1)\Delta x, k\Delta y)\Delta t\Delta x - v_{yy}(n\Delta t, j\Delta x,(k+\vartheta_2)\Delta y)\Delta t\Delta y\\
&\quad -a_1\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(v_x(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v_x(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right)\,d\tau\\
&\quad -a_2\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(v_y(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v_y(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right)\,d\tau\\
&\quad -b\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(v(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right)\,dW(\tau),
\end{aligned} \tag{3.155}$$

wobei ϑ_i, $i = 1,2$, Zufallsgrößen mit $0 < \vartheta_i < 1$ sind. Folglich gilt mit der Schwarzschen Ungleichung und den Eigenschaften des Itô-Integrales

$$\begin{aligned}
&E\Big|v((n+1)\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\\
&\quad +\frac{a_1\Delta t}{\Delta x}\left(v(n\Delta t,(j+1)\Delta x, k\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right)\\
&\quad +\frac{a_2\Delta t}{\Delta y}\left(v(n\Delta t, j\Delta x,(k+1)\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right)\\
&\quad + bv(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right)\Big|^2\\
&\le \; C_3Ev_{xx}^2(n\Delta t,(j+\vartheta_1)\Delta x, k\Delta y)\Delta t^2\Delta x^2 + C_3Ev_{yy}^2(n\Delta t, j\Delta x,(k+\vartheta_2)\Delta y)\Delta t^2\Delta y^2\\
&\quad +C_3a_1^2\Delta t\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v_x(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v_x(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right|^2\,d\tau\\
&\quad +C_3a_2^2\Delta t\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v_y(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v_y(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right|^2\,d\tau\\
&\quad +C_3b^2\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v(\tau, j\Delta x, k\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y)\right|^2\,d\tau.
\end{aligned} \tag{3.156}$$

Wegen (3.153) und (3.154) erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \left(Ev_{xx}^2(n\Delta t,(k+\vartheta_1)\Delta x, j\Delta y)\Delta t^2\Delta x^2\right)\Delta x\Delta y\cdot\Delta t^2\Delta x^2 \\
&+\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \left(Ev_{yy}^2(n\Delta t,k\Delta x,(j+\vartheta_2)\Delta y)\Delta t^2\Delta y^2\right)\Delta x\Delta y\cdot\Delta t^2\Delta x^2 \\
&\qquad\qquad\leq C_4\Delta t^2(\Delta x^2+\Delta y^2),
\end{aligned} \tag{3.157}$$

wobei $C_4 = \max\{C_1, C_2\}$. Nach der Integraldefinition gilt, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein hinreichend kleines Δx gibt, so dass

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v_x(\tau,j\Delta x,k\Delta y)-v_x(n\Delta t,j\Delta x,k\Delta y)\right|^2\,d\tau\Delta x\Delta y \\
&\leq\ \varepsilon+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v_x(\tau,x,y)-v_x(n\Delta t,x,y)\right|^2\,d\tau\,dx\,dy.
\end{aligned} \tag{3.158}$$

Da $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine positive Zahl ist, kann ε auch als Δt^2 gewählt werden. Aus einem zweidimensionalen Analogon von Theorem 2.6 folgt dann wegen

$$\begin{aligned}
v_x(t,x) &= v_x(0,x,y)+a_1\int_0^t v_{xx}(\tau,x,y)\,d\tau+a_2\int_0^t v_{xy}(\tau,x,y)\,d\tau \\
&\quad +b\int_0^t v_x(t,x,y)\,dW(\tau),
\end{aligned} \tag{3.159}$$

dass

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v_x(\tau,j\Delta x,k\Delta y)-v_x(n\Delta t,j\Delta x,k\Delta y)\right|^2\,d\tau\Delta x\Delta y\leq\Delta t^2+C_5\Delta t^2 \tag{3.160}$$

gilt. Entsprechend erhält man auch

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v_y(\tau,j\Delta x,k\Delta y)-v_y(n\Delta t,j\Delta x,k\Delta y)\right|^2\,d\tau\Delta x\Delta y\leq\Delta t^2+C_6\Delta t^2. \tag{3.161}$$

Mit analogen Überlegungen erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v(\tau,j\Delta x,k\Delta y)-v(n\Delta t,j\Delta x,k\Delta y)\right|^2\,d\tau\Delta x\Delta y \\
&\leq\ \Delta t^2+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v(\tau,x,y)-v(n\Delta t,x,y)\right|^2\,d\tau\,dx\,dy.
\end{aligned} \tag{3.162}$$

Theorem 2.6 liefert dann

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v(\tau,j\Delta x,k\Delta y)-v(n\Delta t,j\Delta x,k\Delta y)\right|^2\,d\tau\Delta x\Delta y\leq\Delta t^2+C_7\Delta t^2. \tag{3.163}$$

Mit (3.157), (3.160), (3.161), (3.163) folgt schließlich aus (3.156)

$$
\begin{aligned}
& E \, \Big| v((n+1)\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) \\
& \quad + \frac{a_1 \Delta t}{\Delta x} \left(v(n\Delta t, (j+1)\Delta x, k\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) \right) \\
& \quad + \frac{a_2 \Delta t}{\Delta y} \left(v(n\Delta t, j\Delta x, (k+1)\Delta y) - v(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) \right) \\
& \quad + bv(n\Delta t, j\Delta x, k\Delta y) \left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t) \right) \Big|^2 \\
\leq \quad & C_8 \left(\Delta t^2 \Delta x^2 + \Delta t^2 \Delta y^2 + \Delta t^2 + \Delta t^3 \right) \cdot C_9 \\
\leq \quad & C_{10} \left(\Delta t^2 \Delta x^2 + \Delta t^2 \Delta y^2 + \Delta t^2 + \Delta t^3 \right) \\
=: \quad & C(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2),
\end{aligned}
\tag{3.164}
$$

wobei $C_8 := \max\{1, \max_{\{i:i=1,\ldots,7\}}\{C_i\}\}$, $C_9 := \max\{1, a_1^2, a_2^2, b^2\}$ und $C_{10} = C_9 \cdot C_8$ ist.

$C(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$ erfüllt offenbar die geforderten Bedingungen.

■

4. Stochastische Anfangs- und Randwertprobleme

In diesem Kapitel werden Differenzenmethoden zur approximativen Lösung von Anfangsrandwertaufgaben für stochastische partielle Differentialgleichungen untersucht. Dabei wird im ersten Abschnitt gezeigt, wie sich die Betrachtungen mit Randwerten in die allgemeine Theorie einfügen und welche Bedingungen bei der Randwertapproximation zu beachten sind. Im zweiten Abschnitt wird die Lösung der Itô-Gleichung in Wahrscheinlichkeit durch Lösungen von Gleichungen approximiert, die selber keine stochastischen Integrale bzgl. des Wiener-Prozesses mehr enthalten. Zur Approximation dieser Lösungen kann man Differenzenverfahren, die konsistent und stabil sind, verwenden. In den letzten Abschnitten werden Anfangs- und Randwertprobleme für Systeme stochastischer Differentialgleichungen untersucht. Es werden verschiedene Begriffe der Wohlgestelltheit für Randwertprobleme eingeführt, und es wird gezeigt, dass die betrachteten Probleme den Begriffsbildungen genügen. Dabei kann man die Frage der Wohlgestelltheit des stochastischen Problems auf die Wohlgestelltheit des deterministischen Problems zurückführen. In analoger Weise kann man dann die Stabilitätsanalyse der approximierenden Systeme auf die Stabilitätsanalyse im deterministischen Fall zurückführen, d.h. man erhält für die approximierenden Systeme des stochastischen Differentialgleichungssystems die Stabilität genau dann, wenn schon das deterministische System stabil ist.

4.1 Das stochastische Anfangs- und Randwertproblem

In diesem Kapitel soll die Lösung der Differentialgleichung

$$v(t,x) = v(0,x) - \int_0^t a v_x(s,x)ds - \int_0^t bv(s,x)dW(s) \tag{4.1}$$

mit der Anfangswertbedingung

$$v(0,x) = f(x) \;\text{ mit }\; f \in L^2(\mathrm{I\!R}^1) \tag{4.2}$$

und der Randwertbedingung

$$v(t,0) = g(t) \;\text{ mit }\; g \in L^2(\mathrm{I\!R}^1) \tag{4.3}$$

untersucht werden. Damit die Gleichung (4.1) gemäß der Definiton einer $W_2^1(\mathrm{I\!R}^n)$-Lösung, vgl. dazu Definition 2.3, einen Sinn hat, muß gelten, dass

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} v(t,x) = 0 \;\text{ P-f.s.}, \tag{4.4}$$

denn eine $W_2^1(\mathbb{R}^n)$-Lösung ist natürlich auch eine verallgemeinerte Lösung und für die Integralbildung wird diese Voraussetzung benötigt. Wir nehmen eine parabolische Regularisierung des Problems vor und erhalten

$$v_\varepsilon(t,x) = v_\varepsilon(0,x) - \int_0^t \left(\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_\varepsilon(s,x) + a v_{\varepsilon,x}(s,x) \right) ds - \int_0^t b v_\varepsilon(s,x) dW(s), \tag{4.5}$$

wobei für die Lösung die Anfangswertbedingung (4.2) und die Randwertbedingungen (4.3) und (4.4) gelten. Damit hat man ein parabolisches Randwertproblem, das sich komplett in die allgemeine Theorie einordnen läßt, vergleiche Pardoux [52]. Die Lösung von (4.5) ist dabei insbesondere eindeutig. O.B.d.A. kann $g(t) \equiv 0$ gesetzt werden. Deswegen gelten auch für das Problem mit den Randwertbedingungen (4.3) und (4.4) die Aussagen der Theoreme 2.2 - 2.4.

4.2 Approximation durch stückweise differenzierbare Rauschprozesse

In diesem Abschnitt soll die Lösung der Differentialgleichung

$$v(t,x) = v(0,x) + \int_0^t \left(a v_x(s,x) + \frac{b^2}{2} v(s,x) \right) ds + \int_0^t b v(s,x)\, dW(s) \tag{4.6}$$

mit der Anfangswertbedingung

$$v(0,x) = f(x) \tag{4.7}$$

und der Randwertbedingung

$$v(t,0) = g(t) \tag{4.8}$$

durch Lösungen von Gleichungen approximiert werden, die keine stochastischen Integrale bezüglich des Wiener-Prozesses enthalten. Eine ähnliche Vorgehensweise findet man bei Grecksch und Schmalfuß [14] oder Gyöngy [22]. Das stochastische Integral in (4.6) versteht sich auch hier im Sinne von Itô, wobei sich der zusätzliche Term in (4.6) dadurch ergibt, dass durch die gewählte Approximation der Übergang zum Stratonovich-Integral erforderlich ist. Wir approximieren Gleichung (4.6) dadurch, dass wir den Wiener-Prozess W durch einen Prozess W^δ mit stückweise differenzierbaren Trajektorien ersetzen

$$v_\delta(t,x) = v_\delta(0,x) + \int_0^t a v_{x,\delta}(s,x) ds + \int_0^t b v_\delta(s,x) dW^\delta(s), \tag{4.9}$$

wobei die Anfangs- und Randwertbedingungen beibehalten werden. Dabei ist $W_t^\delta \in C([0,T];\mathbb{R}^1)$ durch

$$W^\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \in [t_0^n\,,\, t_1^n) \\ W(t_{i-1}^n) + \frac{1}{\delta}\left(W(t_i^n) - W(t_{i-1}^n) \right)(t - t_{i-1}^n), & \text{falls } t \in [t_i^n\,,\, t_{i+1}^n)\,; i \geq 1, \end{cases} \tag{4.10}$$

definiert und $0 = t_0^n < t_1^n < t_2^n < \cdots < t_{n-1}^n < t_n^n = T$ eine äquidistante Zerlegung des Intervalles $[0, T]$ ist. Wir setzen $t_i^n = i2^{-n}T;\ i = 0, \cdots, 2^n$ und bezeichnen $\delta = 2^{-n}T$.

Bei der Approximation durch den stückweise differenzierbaren Wiener-Prozess werden wir das folgende Lemma aus dem Buch von Ikeda und Watanabe, [29], Kapitel 7, Formel 7.1 verwenden.

Lemma 4.1. *Es gilt:*

$$E \sup_{0\le t\le T} \mid W(t) - W^{\delta}(t) \mid^2 \longrightarrow 0 \textit{ für } n \to \infty. \tag{4.11}$$

Dabei hat W^δ im Gegensatz zum Wiener-Prozess absolutstetige Realisierungen. Deshalb existiert die Ableitung $\dot{W}^\delta$, so dass für $t \in [0, T]$ gilt:

$$W^\delta(t) = \int_0^t \dot{W}^\delta(\tau)d\tau = \int_0^t d\dot{W}^\delta(\tau). \tag{4.12}$$

Hierbei ist $dW^\delta(t) = \dot{W}^\delta(t)dt$.

Theorem 4.1. *Angenommen v und v_δ seien Lösungen von (4.6) und (4.9) mit der Anfangsbedingung (4.7) und der Randbedingung (4.8). Dann gilt:*

$$\sup_{0\le t\le T} \parallel v(t,x) - v_\delta(t,x) \parallel_H \longrightarrow 0 \tag{4.13}$$

für $\delta \to 0$ in Wahrscheinlichkeit mit $H = (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)_H)$, wobei $H = L^2\,[\,0, \infty\,)$.

Bemerkung 4.1. Die Existenz einer (eindeutigen) Lösung v_δ der approximierenden Probleme folgt für festes $\omega \in \Omega$ aus der deterministischen Theorie. Die Existenz einer (eindeutigen) Lösung für (4.6), (4.7), (4.8) folgen aus Abschnitt 4.1. Theorem 4.1 gilt natürlich auch für das Anfangswertproblem (4.6), (4.7).

Beweis: Mit der Itô-Formel folgt aus der Gleichung (4.9)

$$\begin{aligned} d\Big\langle bv_\delta, v_\delta\Big\rangle &= \Big\langle bav_{x,\delta}, v_\delta\Big\rangle dt + \Big\langle b^2 v_\delta, v_\delta\Big\rangle dW^{n,\delta}(t) \\ &\quad + \Big\langle bv_\delta, av_{x,\delta}\Big\rangle dt + \Big\langle bv_\delta, bv_\delta\Big\rangle dW^{n,\delta}(t). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Angewandt auf die Gleichungen (4.6), (4.9) liefert die Itô-Formel

$$\begin{aligned} d\Big\langle bv_\delta, v\Big\rangle &= \Big\langle bav_{x,\delta}, v\Big\rangle dt + \Big\langle b^2 v_\delta, v\Big\rangle dW^{n,\delta}(t) \\ &\quad + \Big\langle bv_\delta, av_x + \frac{b^2}{2}v\Big\rangle dt + \Big\langle bv_\delta, bv\Big\rangle dW(t). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Im nächsten Schritt wendet man die Itô-Formel auf $\| v(t,x) - v_\delta(t,x) \|^2$ an und erhält

$$\begin{aligned}
d \| v(t,x) - v_\delta(t,x) \|^2 &= d \| -\int_0^t \Big(a(v_x(t,x) - v_{x,\delta}(t,x) + \frac{b^2}{2} v(t,x)\Big)dt \\
&\quad -b\Big[\int_0^t v(t,x)dW(t) - \int_0^t v_\delta(t,x)dW^{n,\delta}(t) \|^2 \\
&= 2\big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), a(v_x(t,x) - v_{x,\delta}(t,x))\big\rangle dt \\
&\quad +2\big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), \frac{b^2}{2} v(t,x)\big\rangle dt \\
&\quad + \| bv(t,x) \|_H^2 \, dt \\
&\quad +2\big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), bv(t,x)\big\rangle dW(t) \\
&\quad +2\big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), bv_\delta(t,x)\big\rangle dW^{n,\delta}(t) \\
&= 2\big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), a(v_x(t,x) - v_{x,\delta}(t,x))\big\rangle dt \\
&\quad +2\big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), \frac{b^2}{2} v(t,x)\big\rangle dt \\
&\quad + \| bv(t,x) \|_H^2 \, dt \\
&\quad +2\big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), b(v(t,x) - v_\delta(t,x))\big\rangle dW(t) \\
&\quad +2\big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), bv_\delta(t,x)\big\rangle (dW(t) - dW^{n,\delta}(t)), \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt der Term $2\langle v - v_\delta, bv_\delta\rangle dW(t)$ addiert und subtrahiert wurde. Die hier verwandte unendlichdimensionale Version der Itô-Formel findet sich im Anhang 5.1 und stammt ursprünglich aus Gyöngy und Krylov [24]. Im Folgenden betrachten wir den zweiten, den dritten und den fünften Summanden von Gleichung (4.16). Zuerst betrachten wir den letzten Summanden

$$2\big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), bv_\delta(t,x)\big\rangle (dW(t) - dW^{n,\delta}(t))$$

aus Gleichung (4.16). Bildet man von $2\Big[\Big\langle bv_\delta(t,x), v(t,x) - v_\delta(t,x)\Big\rangle \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big)\Big]$ das Differential, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&2d\Big[\Big\langle bv_\delta(t,x), v(t,x) - v_\delta(t,x)\Big\rangle \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big)\Big] \\
&\quad = 2d\Big\langle bv_\delta(t,x), v(t,x) - v_\delta(t,x)\Big\rangle \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big) \\
&\quad\quad +2\Big\langle bv_\delta(t,x), v(t,x) - v_\delta(t,x)\Big\rangle \big(dW(t) - dW^{n,\delta}(t)\big). \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Mit

$$d\Big\langle bv_\delta(t,x), v(t,x) - v_\delta(t,x)\Big\rangle = d\Big\langle bv_\delta(t,x), v(t,x)\Big\rangle - d\Big\langle bv_\delta(t,x), v_\delta(t,x)\Big\rangle \qquad (4.18)$$

erhält man unter Beachtung von (4.14) und (4.15)

$$\begin{aligned}
&2d\Big\langle bv_\delta(t,x), v(t,x)-v_\delta(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)\\
&= 2\Big\langle bav_{x,\delta}(t,x), v(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dt\\
&\quad +2\Big\langle b^2 v_\delta(t,x), v(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)\\
&\quad +2\Big\langle bv_\delta(t,x), av_x(t,x)+\frac{b^2}{2}v(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dt\\
&\quad +2\Big\langle bv_\delta(t,x), bv(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW(t)\\
&\quad -2\Big\langle av_{x,\delta}(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dt\\
&\quad -2\Big\langle bv_\delta(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)\\
&\quad -2\Big\langle v_\delta(t,x), bav_{x,\delta}(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dt\\
&\quad -2\Big\langle v_\delta(t,x), b^2 v_\delta(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)\\
&\quad -2\Big\langle bv_\delta(t,x), bv(t,x)\Big\rangle dt. \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

Für den Term $d\big[\int_0^t \langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\rangle dW(t)(W(t)-W^{n,\delta}(t))\big]$ gilt:

$$\begin{aligned}
&d\Big[\int_0^t \langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\rangle dW(t)(W(t)-W^{n,\delta}(t))\Big]\\
&= d\Big[\int_0^t \langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\rangle dW(t)\cdot\int_0^t dW(s)\Big]\\
&\quad -d\Big[\int_0^t \langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\rangle dW(t)\cdot\int_0^t dW^{n,\delta}(s)\Big]\\
&= \Big\langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle dW(t)\cdot W(t)\\
&\quad +\int_0^t \Big\langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle dW(t)\cdot dW(t)+\Big\langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle dt\\
&\quad -\Big\langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle dW(t)\cdot W^{n,\delta}(t)-\Big(\int_0^t \Big\langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle dW(t)\Big)dW^{n,\delta}(t)\\
&= \Big\langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle dW(t)\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)+\Big\langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle dt\\
&\quad +\int_0^t \Big\langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle dW(t)\cdot\big(dW(t)-dW^{n,\delta}(t)\big). \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

Betrachtet man nun den dritten Summanden $\| bv \|_H^2\, dt$ aus Gleichung (4.16), so erhält man

$$\begin{aligned}
&\Big\langle bv(t,x), bv(t,x)\Big\rangle dt\\
&= 2\Big\langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle dt\\
&\quad -2\Big\langle bv_\delta(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)\\
&\quad +2\Big\langle b[v(t,x)-v_\delta(t,x)], b[v(t,x)-v_\delta(t,x)]\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)\\
&\quad -2\Big[\Big\langle bv(t,x), bv(t,x)\Big\rangle-\Big\langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle-\Big\langle bv_\delta(t,x), bv(t,x)\Big\rangle\Big]\\
&\quad \cdot\Big[\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)-\frac{1}{2}dt\Big]. \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden in (4.16) erhält man

$$\begin{aligned}
&2\big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), \frac{b^2}{2} v(t,x)\big\rangle dt \\
= \;& \big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), b^2 v(t,x)\big\rangle dt \\
= \;& +2\big\langle b^2 v_\delta(t,x), v(t,x) - v_\delta(t,x)\big\rangle \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big) dW^{n,\delta}(t) \\
& +2\big\langle b^2 (v(t,x) - v_\delta(t,x)), v(t,x) - v_\delta(t,x)\big\rangle \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big) dW^{n,\delta}(t) \\
& -2\big\langle b^2 v(t,x), v(t,x) - v_\delta(t,x)\big\rangle \Big(\big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big) dW^{n,\delta}(t) - \frac{1}{2} dt\Big).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Mit diesen Umformungen erhält man für Gleichung (4.16) unter Beachtung von (4.19)

$$\begin{aligned}
& d \parallel v(t,x) - v_\delta(t,x) \parallel^2 \\
= \;& 2d\big[\big\langle b v_\delta(t,x), v(t,x) - v_\delta(t,x)\big\rangle \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big)\big] \\
& -2\Big\langle b a v_{x,\delta}(t,x), v(t,x)\Big\rangle \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big) dt \\
& -2\Big\langle b^2 v_\delta(t,x), v(t,x)\Big\rangle \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big) dW^{n,\delta}(t) \\
& -2\Big\langle b v_\delta(t,x), a v_x(t,x) + \frac{b^2}{2} v(t,x)\Big\rangle \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big) dt \\
& -2\Big\langle b v_\delta(t,x), b v(t,x)\Big\rangle \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big) dW(t) \\
& +2\Big\langle a v_{x,\delta}(t,x), b v_\delta(t,x)\Big\rangle \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big) dt \\
& +2\Big\langle b v_\delta(t,x), b v_\delta(t,x)\Big\rangle \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big) dW^{n,\delta}(t) \\
& +2\Big\langle v_\delta(t,x), b a v_{x,\delta}(t,x)\Big\rangle \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big) dt \\
& +2\Big\langle v_\delta(t,x), b^2 v_\delta(t,x)\Big\rangle \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big) dW^{n,\delta}(t) \\
& -2\big\langle b v(t,x), v_\delta(t,x)\big\rangle dt + 2\big\langle b v(t,x), v_\delta(t,x)\big\rangle dt \\
& -2\big\langle b v_\delta(t,x), b v_\delta(t,x)\big\rangle \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big) dW^{n,\delta}(t) \\
& +2\big\langle b(v(t,x) - v_\delta(t,x)), b(v(t,x) - v_\delta(t,x))\big\rangle \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big) dW^{n,\delta}(t) \\
& -2\big[\big\langle b v(t,x), b v(t,x)\big\rangle - \big\langle b v(t,x), b v_\delta(t,x)\big\rangle - \big\langle b v_\delta(t,x), b v(t,x)\big\rangle\big] \\
& \quad \cdot \big[\big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big) dW^{n,\delta}(t) - \frac{1}{2} dt\big] \\
& +2\big\langle b^2 v_\delta(t,x), v(t,x) - v_\delta(t,x)\big\rangle \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big) dW^{n,\delta}(t) \\
& +2\big\langle b(v(t,x) - v_\delta(t,x)), v(t,x) - v_\delta(t,x)\big\rangle \big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big) dW^{n,\delta}(t) \\
& -2\big\langle b^2 v(t,x), v(t,x) - v_\delta(t,x)\big\rangle \Big[\big(W(t) - W^{n,\delta}(t)\big) dW^{n,\delta}(t) - \frac{1}{2} dt\Big] \\
& +2\big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), b\big(v(t,x) - v_\delta(t,x)\big)\big\rangle dW(t) \\
& +2\big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), a\big(v_x(t,x) - v_{x,\delta}(t,x)\big)\big\rangle dt.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Es ist unser nächstes Ziel die behauptete Konvergenz in Wahrscheinlichkeit unter Beschränktheitsannahmen zu zeigen. Wir führen deshalb die folgenden Stoppzeiten ein:

$$\begin{aligned}
\tau^1_{N,\delta} &= \inf\Big\{t\in[0,T] :\| v_\delta(t,x) \|^2_H \geq N\Big\}\\
\tau^1_{N} &= \inf\Big\{t\in[0,T] :\| v(t,x) \|^2_H \geq N\Big\}\\
\tau^2_{N} &= \inf\Big\{t\in[0,T] : \int_0^t \mid W(s)-W^{n,\delta}(s)\mid \cdot \mid \dot{W}^{n,\delta}(s)\mid ds \geq N\Big\}\\
\tau^3_{N,\delta} &= \inf\Big\{t\in[0,T] :\| v_{x,\delta}(t,x) \|^2_H \geq N\Big\}\\
\tau^3_{N} &= \inf\Big\{t\in[0,T] :\| v_x(t,x) \|^2_H \geq N\Big\}\\
\tau_{N,\delta} &= \min\Big\{\tau^1_{N,\delta},\ \tau^1_N,\ \tau^2_N,\ \tau^3_{N,\delta},\ \tau^3_N\Big\}.
\end{aligned}$$

Entsprechend benötigt man beschränkte Anfangswerte, die man wie folgt erhält:

$$\begin{aligned}
v_{0,N,\delta} &= \begin{cases} \frac{v_{0,\delta}}{\|v_{N,\delta}\|_H}\cdot N & : \ \| v_{N,\delta}\|_H > N\\ v_{0,\delta} & : \ \| v_{N,\delta}\|_H \leq N\end{cases}\\
v_{0,N} &= \begin{cases} \frac{v_0}{\|v_N\|_H}\cdot N & : \ \| v_N\|_H > N\\ v_0 & : \ \| v_N\|_H \leq N.\end{cases}
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Summanden von (4.23). Für den ersten Summanden

$$dR^1_\delta := 2d\big[\big\langle bv_\delta(t,x), v(t,x)-v_\delta(t,x)\big\rangle\big]\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big) \tag{4.24}$$

gilt

$$R^1_\delta = 2\big\langle bv_\delta(t,x), v(t,x)-v_\delta(t,x)\big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big).$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]} R^1_\delta(\tau_{N,\delta}\wedge t)\\
&= \sup_{t\in[0,T]}\int_0^{\tau_{N,\delta}\wedge t} 2\Big\langle bv_\delta(t,x), v(t,x)-v_\delta(t,x)\Big\rangle dt\cdot\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)\longrightarrow 0
\end{aligned}\tag{4.25}$$

in Wahrscheinlichkeit gilt, da $W^{N,\delta}(t)$ gleichmäßig auf $[0,T]$ gegen $W(t)$ konvergiert. Nun betrachten wir die Terme aus (4.23), die ebenfalls den Faktor $(W(t)-W^{n,\delta}(t))$ enthalten, d.h.

$$\begin{aligned}
dR^2_\delta \ :=\ &\Big\{2\Big\langle bav_{x,\delta}(t,x), v(t,x)\Big\rangle dt + 2\Big\langle bv_\delta(t,x), av_x(t,x)+\frac{b^2}{2}v(t,x)\Big\rangle dt\\
&-2\Big\langle av_{x,\delta}(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle dt - 2\Big\langle v_\delta(t,x), bav_\delta(t,x)\Big\rangle dt\Big\}\\
&\cdot\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big).
\end{aligned}\tag{4.26}$$

Diese Terme konvergieren wegen analoger Überlegungen zum Konvergenzbeweis von (4.25) gegen Null. Mit der Beziehung (4.20) enthält (4.23) auch den folgenden Term

$$2\Big\langle bv_\delta(t,x), bv(t,x)\Big\rangle dW(t)\cdot\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big). \tag{4.27}$$

Setzt man

$$dI_\delta := \Big\langle bv_\delta(t,x), bv(t,x)\Big\rangle dW(t),$$

so folgt

$$\sup_{t\in[0,T]} I_\delta(t\wedge\tau_{N,\delta}) = \sup_{t\in[0,T]} \int_0^{\tau_{N,\delta}\wedge t} \Big\langle bv_\delta(t,x), bv(t,x)\Big\rangle dW(t) \tag{4.28}$$

und es gilt

$$\begin{aligned}
& E \sup_{t\in[0,T]} \mid I_\delta(t\wedge\tau_{N,\delta})\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big) \mid^2 \\
\leq\ & 2\int_t^{t\wedge\tau_{N,\delta}} E \sup_{t\in[0,T]} \mid \Big\langle bv_\delta(t,x), bv(t,x)\Big\rangle \mid^2 dt \cdot E \sup_{t\in[0,T]} \mid W(t)-W^{n,\delta}(t)\mid^2 \\
\leq\ & CE \sup_{t\in[0,T]} \mid W(t)-W^{n,\delta}(t)\mid^2 .
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Mit Lemma 4.1 folgt, dass (4.29) im quadratischen Mittel gegen Null strebt. Analog folgt, dass der Term

$$\begin{aligned}
dR^3_\delta \ :=\ & -2\Big\langle b^2 v_\delta(t,x), v(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t) \\
& -2\Big\langle bv_\delta(t,x), bv(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW(t) \\
& +2\Big\langle bv_\delta(t,x), bv_\delta(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t) \\
& +2\Big\langle v_\delta(t,x), b^2 v_\delta(t,x)\Big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t) \\
& -2\big\langle bv_\delta(t,x), bv_\delta(t,x)\big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t) \\
& +2\big\langle b^2 v_\delta(t,x), v(t,x)-v_\delta(t,x)\big\rangle\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

unter Benutzung von Lemma 4.1 im quadratischen Mittel gegen Null strebt. Für die nächsten Summanden in (4.23) führen wir

$$\begin{aligned}
dR^4_\delta \ :=\ & -2\big[\big\langle bv(t,x), bv(t,x)\big\rangle - \big\langle bv(t,x), bv_\delta(t,x)\big\rangle\big] \\
& \cdot\big[\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t) - \frac{1}{2}dt\big]
\end{aligned} \tag{4.31}$$

und

$$dR^5_\delta \ :=\ -2\big\langle b^2 v(t,x), v(t,x)-v_\delta(t,x)\big\rangle\Big[\big(W(t)-W^{n,\delta}(t)\big)dW^{n,\delta}(t) - \frac{1}{2}dt\Big] \tag{4.32}$$

ein. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} (W(s)-W^{N,\delta}(s))\dot W^{N,\delta}(s)ds \\
=\ & \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} W(s)\dot W^{N,\delta}(s)ds - \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} W^{N,\delta}(s)\dot W^{N,\delta}(s)ds \\
=\ & \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} W(s)dW^{N,\delta}(s) - \frac{1}{2}W^{N,\delta}(t\wedge\tau_{N,\delta})^2.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Für den ersten Summanden in (4.33) erhält man mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} W(s)dW^{N,\delta}(s) &= W(t\wedge\tau_{N,\delta})W^{N,\delta}(t\wedge\tau_{N,\delta}) - \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} W^{N,\delta}(s)dW(s) \\
&= W(t\wedge\tau_{N,\delta})W^{N,\delta}(t\wedge\tau_{N,\delta}) \\
&\quad + \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} (W(s)-W^{N,\delta}(s))dW(s) - \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} W(s)dW(s) \\
&= W(t\wedge\tau_{N,\delta})W^{N,\delta}(t\wedge\tau_{N,\delta}) \\
&\quad + \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} (W(s)-W^{N,\delta}(s))dW(s) \\
&\quad - \Big(\frac{1}{2}W^2(t\wedge\tau_{N,\delta}) - \frac{1}{2}(t\wedge\tau_{N,\delta})\Big) \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

Eingesetzt in (4.33) ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} (W(t)-W^{N,\delta}(t))\dot{W}^{N,\delta}(t)ds \\
&= \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} (W(s)-W^{N,\delta}(s))dW(s) + \frac{1}{2}(t\wedge\tau_{N,\delta}) \\
&\quad -\frac{1}{2}\Big(W(t\wedge\tau_{N,\delta})^2 - 2W(t\wedge\tau_{N,\delta})W^{N,\delta}(t\wedge\tau_{N,\delta}) + W^{N,\delta}(t\wedge\tau_{N,\delta})^2\Big). \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

Aus (4.35) folgt

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} (W(t)-W^{N,\delta}(t))\dot{W}^{N,\delta}(t)ds - \frac{1}{2}(t\wedge\tau_{N,\delta}) \\
&= \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} (W(s)-W^{N,\delta}(s))dW(s) \\
&\quad -\frac{1}{2}\Big(W(t\wedge\tau_{N,\delta}) - W^{N,\delta}(t\wedge\tau_{N,\delta})\Big)^2. \qquad (4.36)
\end{aligned}$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz in Wahrscheinlichkeit gegen Null für $\delta \to 0$ geht die rechte Seite von Gleichung (4.36) gegen Null in Wahrscheinlichkeit und somit auch die linke Seite der Gleichung. Unter Beachtung von (4.36) gehen auch die Ausdrücke dR_δ^4 und dR_δ^5 in Wahrscheinlichkeit gegen Null. Führen wir die Schreibweisen

$$dR_\delta := dR_\delta^1 + dR_\delta^2 + dR_\delta^3 + dR_\delta^4 + dR_\delta^5, \qquad (4.37)$$

$$d\phi_1(t) := 4b^2\big(W(t) - W^{N,\delta}(t)\big)dW^{N,\delta}(t), \qquad (4.38)$$

$$d(\Delta_\delta(t)) := d \parallel v(t,x) - v_\delta(t,x) \parallel^2 \qquad (4.39)$$

ein, so ergibt sich für Gleichung (4.23):

$$\begin{aligned}
d(\Delta_\delta(t)) &= dR_\delta^1 + dR_\delta^2 + dR_\delta^3 + dR_\delta^4 + dR_\delta^5 \\
&\quad +4b^2(\Delta_\delta(t))dW^{N,\delta}(t)\big(W(t) - W^{N,\delta}(t)\big) \\
&\quad +2\big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), b\big(v(t,x) - v_\delta(t,x)\big)\big\rangle dW(t) \\
&\quad +2\big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), a\big(v_x(t,x) - v_{x,\delta}(t,x)\big)\big\rangle dt \\
&= dR_\delta + \phi_1(t)(\Delta_\delta(t)) + 2b((\Delta_\delta(t))dW(t) \\
&\quad +2\big\langle v(t,x) - v_\delta(t,x), a\big(v_x(t,x) - v_{x,\delta}(t,x)\big)\big\rangle dt \\
&\leq dR_\delta + \phi_1(t)(\Delta_\delta(t)) + 2b((\Delta_\delta(t))dW(t) \\
&\quad +2\|v(t,x) - v_\delta(t,x)\|_H |a| dt \\
&\leq dR_\delta + \phi_1(t)(\Delta_\delta(t)) + 2b((\Delta_\delta(t))dW(t) \\
&\quad +C\|v(t,x) - v_\delta(t,x)\|_H dt. \qquad (4.40)
\end{aligned}$$

Weiterhin führen wir die Prozesse

$$\Phi(t) := (|\ \phi_1(t)\ | + |\ C\ |), \qquad (4.41)$$

$$\Lambda(t) := 2b((\Delta_\delta(t)) \qquad (4.42)$$

ein. Es sei $\Xi(t) \leq 0$ P-f.s. der Prozess, der bei Addition auf der rechten Seite von (4.40) die Gleichung herstellt. Dann erhalten wir aus (4.40)

$$\begin{aligned}
d(\Delta_\delta(t)) &= dR_\delta + \phi_1(t)(\Delta_\delta(t))dt + 2b((\Delta_\delta(t))dW(t) \\
&\quad +C(\Delta_\delta(t))dt + \Xi(t) \\
&= dR_\delta + \Phi(t)(\Delta_\delta t) + \Lambda(t)dW(t) + \Xi(t)dt. \qquad (4.43)
\end{aligned}$$

Nun wollen wir (4.43) in zwei Gleichungen zerlegen. Deshalb führen wir die Prozesse

$$\begin{aligned}
d\overline{\Delta_\delta(t)} &= \Phi(t)\overline{\Delta_\delta(t)}dt + \Lambda(t)dW(t), \qquad (4.44) \\
\overline{\Delta_\delta(0)} &= \|\ v_{0,N} - v_{0,N,\delta}\ \|_H^2, \qquad (4.45)
\end{aligned}$$

und

$$d\underline{\Delta_\delta(t)} = \Phi(t)\underline{\Delta_\delta(t)}dt + dR_\delta(t) + \Xi(t)dt, \qquad (4.46)$$

ein. Wir erhalten

$$\overline{\Delta_\delta(t)} = \overline{\Delta_\delta(0)} + \int_0^t \Phi(s)\overline{\Delta_\delta(s)}\, ds + \int_0^t \Lambda(s)dW(s) \qquad (4.47)$$

$$\underline{\Delta_\delta(t)} = \int_0^t \Phi(s)\underline{\Delta_\delta(s)}\, ds + \int_0^t dR_\delta(s) + \int_0^t \Xi(s)ds. \qquad (4.48)$$

Für die entsprechende Integralgleichung erhält man folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}\underline{\Delta_\delta(t\wedge\tau_{N,\delta})} &= \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} \Phi(s)\underline{\Delta_\delta(s)}ds + R_\delta(t\wedge\tau_{N,\delta}) + \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} \Xi(s)ds \\ &\le \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} \Phi(s)\underline{\Delta_\delta(s)}ds + R_\delta(t\wedge\tau_{N,\delta}). \qquad (4.49)\end{aligned}$$

Addiert man (4.44) und (4.46), so erhält man

$$\Delta_\delta(t\wedge\tau_{N,\delta}) = \overline{\Delta_\delta(t\wedge\tau_{N,\delta})} + \underline{\Delta_\delta(t\wedge\tau_{N,\delta})}. \qquad (4.50)$$

Da $\Phi(t)$ positiv ist, kann man das Gronwallsche Lemma auf (4.49) anwenden und erhält

$$\underline{\Delta_\delta(t\wedge\tau_{N,\delta})} \le \int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}} \mid R_\delta(s)\mid \Phi(s)\exp\Big(\int_s^{t\wedge\tau_{N,\delta}}\Phi(\bar{s})d\bar{s}\Big)ds + \mid R_\delta(t\wedge\tau_{N,\delta})\mid. \qquad (4.51)$$

Die angewandte Version des Gronwallschen Lemmas findet man im Anhang 5.1 oder bei Wloka [67]. Die Lösung für die eindimensionale Itô-Gleichung (4.44) ist

$$\begin{aligned}\overline{\Delta_\delta(t\wedge\tau_{N,\delta})} &= \overline{\Delta_\delta(0)}\exp\Big(\int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}}\Phi(s)ds\Big) \\ &\quad + \exp\Big(\int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}}\Phi(s)ds\Big)\int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}}\exp\Big(-\int_0^s\Phi(\bar{s})d\bar{s}\Big)\Lambda(s)dW(s). \qquad (4.52)\end{aligned}$$

Die Konstruktion der Stoppzeiten liefert

$$\begin{aligned}\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]}\Delta_\delta(s) &\le e^{(4b^2+C)N}\Delta_\delta(0) + \sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]}\mid R_\delta(s)\mid\big[(4b^2+C)Ne^{(4b^2+C)N}+1\big] \\ &\quad + e^{(4b^2+C)N}\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]}\int_0^s\exp\Big(-\int_0^{\bar{s}}\Phi(\bar{\bar{s}})d\bar{\bar{s}}\Big)\Lambda(\bar{s})dW(\bar{s}). \qquad (4.53)\end{aligned}$$

Die Burkholder-Davis-Gundy-Ungleichung, siehe Anhang 5.3 oder [46], und die Eigenschaften der Stoppzeiten ergeben

$$\begin{aligned}
E\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]}\Delta_\delta(s) &\leq e^{(4b^2+C)N}E\Delta_\delta(0)+E\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]}\mid R_\delta(s)\mid\Big[(4b^2+C)Ne^{(4b^2+C)N}+1\Big]\\
&\quad+e^{(4b^2+C)N}E\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]}\Big|\int_0^s\exp\Big(-\int_0^{\bar{s}}\Phi(\bar{\bar{s}})d\bar{\bar{s}}\Big)\Lambda(\bar{s})dW(\bar{s})\Big|\\
&\leq e^{(4b^2+C)N}E\Delta_\delta(0)+E\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]}\mid R_\delta(s)\mid\Big[(4b^2+C)Ne^{(4b^2+C)N}+1\Big]\\
&\quad+e^{(4b^2+C)N}KE\Big\{\Big|\int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}}\exp\Big(-\int_0^{\bar{s}}\Phi(\bar{\bar{s}})d\bar{\bar{s}}\Big)\Lambda(\bar{s})dW(\bar{s})\Big|^2\Big\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq e^{(4b^2+C)N}E\Delta_\delta(0)+E\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]}\mid R_\delta(s)\mid\Big[(4b^2+C)Ne^{(4b^2+C)N}+1\Big]\\
&\quad+e^{(4b^2+C)N}KE\Big\{\int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}}\Big|\exp\Big(-\int_0^{\bar{s}}\Phi(\bar{\bar{s}})d\bar{\bar{s}}\Big)\Lambda(\bar{s})\Big|^2\,d\bar{s}\Big\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq e^{(4b^2+C)N}E\Delta_\delta(0)+E\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]}\mid R_\delta(s)\mid\Big[(4b^2+C)Ne^{(4b^2+C)N}+1\Big]\\
&\quad+e^{(4b^2+C)N}KE\Big\{\int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}}\mid\Lambda(\bar{s})\mid^2\,d\bar{s}\Big\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq e^{(4b^2+C)N}E\Delta_\delta(0)+E\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]}\mid R_\delta(s)\mid\Big[(4b^2+C)Ne^{(4b^2+C)N}+1\Big]\\
&\quad+e^{(4b^2+C)N}KE\Big\{\int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}}\Delta_\delta(\bar{s})^2ds\Big\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq e^{(4b^2+C)N}E\Delta_\delta(0)+E\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]}\mid R_\delta(s)\mid\Big[(4b^2+C)Ne^{(4b^2+C)N}+1\Big]\\
&\quad+e^{(4b^2+C)N}KE\Big\{\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]}\Delta_\delta(s)\int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}}\Delta_\delta(\bar{s})ds\Big\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Dabei ist K eine Konstante, die unabhängig von N und δ ist. Man erhält durch weitere elementare Umformungen

$$\begin{aligned}
E\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]}\Delta_\delta(s) &\leq e^{(4b^2+C)N}E\Delta_\delta(0)+E\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]}\mid R_\delta(s)\mid\Big[(4b^2+C)Ne^{4b^2N}+1\Big]\\
&\quad+e^{(4b^2+C)N}KE\Big\{\int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}}\sup_{\bar{s}\in[0,s\wedge\tau_{N,\delta}]}\Delta_\delta(\bar{s})^2ds\Big\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leq e^{(4b^2+C)N}E\Delta_\delta(0)+E\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]}\mid R_\delta(s)\mid\Big[(4b^2+C)Ne^{(4b^2+C)N}+1\Big]\\
&\quad+2e^{(8b^2+2C)N}K^2\int_0^{t\wedge\tau_{N,\delta}}E\sup_{\bar{s}\in[0,s\wedge\tau_{N,\delta}]}\Delta_\delta(\bar{s})ds\\
&\quad+\frac{1}{2}E\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]}\Delta_\delta(s).
\end{aligned}\tag{4.54}$$

Das Gronwallsche Lemma sichert nun die Konvergenz von $E\sup_{s\in[0,t\wedge\tau_{N,\delta}]}\Delta_\delta(s)$ gegen Null für $\delta\to 0$. Zuletzt zeigen wir die Konvergenz für $E\sup_{s\in[0,T]}\Delta_\delta(s)$, d.h. wir zeigen die Konvergenz auf dem gesamten Zeitintervall $[0, T]$. Es gilt wegen der Isotonie

$$
\begin{aligned}
& P\Big\{\sup_{s\in[0,T]} \Delta_\delta(s) \geq \varepsilon\Big\} \\
\leq\ & P\Big\{\sup_{s\in[0,t\wedge\tau^2_{N,\delta}]} \Delta_\delta(s) \geq \varepsilon\Big\} + P\Big\{\sup_{s\in[t\wedge\tau^2_{N,\delta},T]} \Delta_\delta(s) \geq \varepsilon\Big\} \\
\leq\ & P\Big\{\sup_{s\in[0,t\wedge\tau^2_{N,\delta}]} \Delta_\delta(s) \geq \varepsilon\Big\} + P\Big\{\tau^2_{N,\delta} < T\Big\}. \qquad (4.55)
\end{aligned}
$$

Mit den obigen Betrachtungen und der Markovschen Ungleichung folgt, dass der erste Summand der rechten Seite von Gleichung (4.55) in Wahrscheinlichkeit gegen Null strebt für jedes $\varepsilon > 0$. Damit bleibt noch zu zeigen, dass $P\{\tau^2_\delta < T\} \to 0$ für $\delta \to 0$ und $N \to \infty$. Dazu zeigen wir, dass τ^2_δ gegen T geht für $N \to \infty, \delta \to 0$. Hierzu betrachten wir die Definition von W^δ

$$
W^\delta(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad \text{falls } t \in [t_0\ ,\ t_1^n) \\ W(t^n_{i-1}) + \frac{1}{\delta}\big(W(t^n_i) - W(t^n_{i-1})\big)(t - t^n_{i-1}) & ; \quad \text{falls } t \in [t^n_i\ ,\ t^n_{i+1})\ ,\ i \geq 1. \end{cases}
$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
& \sup_\delta E \int_0^T \mid W(s) - W^\delta(s) \mid\mid \dot{W}^\delta(s) \mid ds \\
=\ & \sup_\delta E\Big\{\sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{t^n_k}^{t^n_{k+1}} \Big|W(s) - W(t^n_{k-1}) - \frac{2^n}{T}\big(W(t^n_k) - W(t^n_{k-1})\big)(s - t^n_{k-1})\Big| \\
& \cdot \frac{1}{\delta} \mid W(t^n_k) - W(t^n_{k-1}) \mid ds\Big\} \\
\leq\ & \sup_\delta E\Big\{\sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{t^n_k}^{t^n_{k+1}} \frac{1}{\delta}\big|W(s) - W(t^n_{k-1})\big|\big|W(t^n_k) - W(t^n_{k-1})\big| ds\Big\} \\
& + \sup_\delta E\Big\{\sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{t^n_k}^{t^n_{k+1}} \frac{2^{2n}}{T^2} \mid W(t^n_k) - W(t^n_{k-1}) \mid^2 \mid s - t^n_{k-1} \mid ds\Big\}. \qquad (4.56)
\end{aligned}
$$

Den ersten Summanden der rechten Seite von (4.56) kann man unter Beachtung der Dreiecksungleichung

$$
\mid W(s) - W^\delta(t^n_{k-1}) \mid \leq \mid W(s) - W^\delta(t^n_k) \mid + \mid W(t^n_k) - W^\delta(t^n_{k-1}) \mid
$$

weiter abschätzen, und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\sup_\delta E\Big\{ \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \frac{1}{\delta} \big|W(s) - W(t_{k-1}^n)\big|\big|W(t_k^n) - W(t_{k-1}^n)\big| ds\Big\} \\
\leq\ & \sup_\delta \Big\{ \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \frac{1}{\delta} \Big[E\big|W(s) - W(t_k^n)\big|\big|W(t_k^n) - W(t_{k-1}^n)\big| \\
& + E\big|W(t_k^n) - W(t_{k-1}^n)\big|^2\Big] ds\Big\} \\
\leq\ & \sup_\delta \Big\{ \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \frac{1}{\delta} \Big[\frac{1}{2} E\big|W(s) - W(t_k^n)\big|^2 + \frac{1}{2} E\big|W(t_k^n) - W(t_{k-1}^n)\big|^2 \\
& + E\big|W(t_k^n) - W(t_{k-1}^n)\big|^2\Big] ds\Big\} \\
\leq\ & \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} 2ds \\
\leq\ & 2T < \infty. \qquad (4.57)
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun den zweiten Sumanden auf der rechten Seite von (4.56). Wegen $t_k^n = k2^{-n}T$ ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}
&\sup_\delta E\Big\{ \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \frac{2^{2n}}{T^2} \mid W(t_k^n) - W(t_{k-1}^n) \mid^2 \mid s - t_{k-1}^n \mid ds\Big\} \\
=\ & \sup_\delta E\Big\{ \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{2^{2n}}{T^2} \mid W(t_k^n) - W(t_{k-1}^n) \mid^2 \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \mid s - t_{k-1}^n \mid ds\Big\} \\
=\ & \frac{1}{2} \sup_\delta E \sum_{k=0}^{2^n-1} \mid W(t_k^n) - W(t_{k-1}^n) \mid^2 \\
=\ & \frac{T}{2} < \infty. \qquad (4.58)
\end{aligned}$$

Mit den Abschätzungen (4.57) und (4.58) folgt dann insbesondere

$$\sup_\delta E \int_0^T \mid W(s) - W^\delta(s) \mid\mid \dot{W}^\delta(s) \mid ds \leq 3T < \infty. \qquad (4.59)$$

Eine entsprechende Rechnung ergibt, dass

$$\sup_\delta E\Big[\int_0^T \mid W(s) - W^\delta(s) \mid\mid \dot{W}^\delta(s) \mid ds\Big]^2 \leq C(T). \qquad (4.60)$$

Führen wir die abkürzende Schreibweise

$$\Theta(\delta) := \sup_\delta E \int_0^T \mid W(s) - W^\delta(s) \mid\mid \dot{W}^\delta(s) \mid ds \qquad (4.61)$$

ein, so erhält man mit der Tschebyscheffschen Ungleichung

$$P\Big\{ \mid \Theta(\delta) - E\Theta(\delta) \mid \geq N\Big\} \leq \frac{C(T)}{N^2} \qquad (4.62)$$

und damit insbesondere

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} P\big\{ \mid \Theta(\delta) - E\Theta(\delta) \mid \geq N \big\} \leq \lim_{N\longrightarrow\infty} \frac{C(T)}{N^2} = 0. \tag{4.63}$$

Damit gilt

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \tau^2_{N,\delta} = \infty,$$

und somit

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \sup_{\delta>0} P\big\{\tau^2_{N,\delta} < T\big\} = 0, \tag{4.64}$$

womit die behauptete Konvergenz bewiesen ist.

■

Dieser Satz ermöglicht es uns, die Gleichung (4.9) wie folgt umzuformen

$$v_\delta(t,x) \quad = \quad v_\delta(0,x) - \int_0^t a v_{x,\delta}(s,x)ds - \int_0^t b\dot{w}_\delta(s)v_\delta(s,x)\,ds. \tag{4.65}$$

Für (4.65) können wir stückweise

$$\frac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial t} = a\frac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial x} + b\dot{w}_\delta(t)v_\delta(t,x) \tag{4.66}$$

schreiben. Bei dieser Gleichung handelt es sich nun um eine gewöhnliche partielle Differentialgleichung, die den Zufall nur noch in den Koeffizienten von $v_\delta(t,x)$ enthält. In der deterministischen Terminologie spricht man hier von Termen niederer Ordnung, die sich entsprechend einfach behandeln lassen. Eine Approximation für $v_\delta(t,x)$ ist zum Beispiel die folgende Version des FTFS-Verfahrens

$$\begin{aligned} u^{n+1}_{k,\delta} \quad &= \quad (1+R)u^n_{k,\delta} - Ru^n_{k+1,\delta} + b(W(n\Delta t) - W((n-1)\Delta t)))\frac{\Delta t}{\delta}u^n_{k,\delta} + \frac{b^2\Delta t}{2}u^n_{k,\delta} \\ &= \quad (1+R)u^n_{k,\delta} - Ru^n_{k+1,\delta} + b(W(n\Delta t) - W((n-1)\Delta t)))u^n_{k,\delta} + \frac{b^2\Delta t}{2}u^n_{k,\delta} \end{aligned} \tag{4.67}$$

für $t \in [t_n\ , t_{n-1})$, mit $\Delta t = t_i - t_{i-1} = \delta$ für $i = 2, ..., 2^n$. Für $t \in [t_0\ , t_1\ )$ definieren wir

$$u^{n+1}_{k,\delta} \quad = \quad (1+R)u^n_{k,\delta} - Ru^n_{k+1,\delta} + \frac{b^2\Delta t}{2}u^n_{k,\delta}. \tag{4.68}$$

Im Folgenden wird nun gezeigt, dass die vorgeschlagene Version (4.67), (4.68) des FTFS-Verfahrens stabil im quadratischen Mittel und konsistent im Sinne von Definition 3.1 ist. Das Verfahren (4.67) unterscheidet sich von dem ursprünglich vorgeschlagenen Verfahren (3.10) dadurch, dass auch der Anteil, der durch das Stratonovich-Integral eingeht, approximiert wird und dass sich die Zuwächse des Wiener-Prozesses um ein Segment nach unten verschieben.

Korollar 4.1. *Das Verfahren (4.67) ist im quadratischen Mittel stabil für* $-1 \leq R \leq 0$.

Beweis: Wendet man den $E|\cdot|^2$ an, so folgt

$$\begin{aligned}
E|u_{k,\delta}^{n+1}|^2 &= E|(1+R)u_{k,\delta}^n - Ru_{k+1,\delta}^n + b(W(n\Delta t) - W((n-1)\Delta t)))u_{k,\delta}^n + \frac{b^2\delta}{2}u_{k,\delta}^n|^2 \\
&= E|(1+R)u_{k,\delta}^n - Ru_{k+1,\delta}^n|^2 + b^2\delta E\left[\left((1+R)u_{k,\delta}^n - Ru_{k+1,\delta}^n\right)u_{k,\delta}^n\right] \\
&\quad + \frac{b^2\delta^2}{4}E|u_{k,\delta}^n|^2 \\
&\leq E|(1+R)u_{k,\delta}^n - Ru_{k+1,\delta}^n|^2 + b^2\delta\left[|1+R|E|u_{k,\delta}^n|^2 + 2|R|\left[E|u_{k+1,\delta}^n|^2 + E|u_{k,\delta}^n|^2\right]\right] \\
&\quad + \frac{b^2\delta^2}{4}E|u_{k,\delta}^n|^2. \qquad (4.69)
\end{aligned}$$

Addiert man nun wieder über alle k, multipliziert die Gleichung mit Δx durch, ordnet die Reihe um und verwendet die Voraussetzung $R = a\frac{\delta}{\Delta x}$, so erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{k+-\infty}^{\infty} E|u_{k,\delta}^{n+1}|^2\Delta x &\leq \sum_{k+-\infty}^{\infty}\left[(|1+R|+|R|)^2 + C_1\delta + C_2\delta^2\right]E|u_{k,\delta}^n|^2\Delta x \\
&\leq (1+C_3\delta)^{n+1}\sum_{k+-\infty}^{\infty} E|u_{k,\delta}^0|^2\Delta x, \qquad (4.70)
\end{aligned}$$

und die Aussage ist bewiesen.

■

Korollar 4.2. *Es sei* $v(0,\cdot) \in C^{5,\alpha}$. *Das Verfahren (4.67) ist konsistent zur Differentialgleichung (4.6) im Sinne von Definition 3.1.*

Beweis: Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned}
&v((n+1)\Delta t, k\Delta x) \\
&= v(n\Delta t, k\Delta x) - \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(av_x(\tau, k\Delta x) + \frac{b^2}{2}v(\tau, k\Delta x)\right)d\tau - b\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} v(\tau, k\Delta x)\,dW(\tau) \\
&= v(n\Delta t, k\Delta x) - av_x(n\Delta t, k\Delta x)\Delta t - bv(n\Delta t, k\Delta x)\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right) \\
&\quad -a\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(v_x(\tau, k\Delta x) - v_x(n\Delta t, k\Delta x)\right)d\tau \\
&\quad -\frac{b^2}{2}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta, k\Delta x)\right)d\tau - \frac{b^2}{2}v(n\Delta t, k\Delta x)\Delta t \\
&\quad -b\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\left(v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right)dW(\tau). \qquad (4.71)
\end{aligned}$$

Setzt man die Taylorentwicklung von $v_x(n\Delta t, k\Delta x)$ ein, so erhält man im quadratischen Mittel mit der Schwarzschen Ungleichung und den Eigenschaften des Itô-Integrales die Abschätzung

$$\begin{aligned}
E&\left|v((n+1)\Delta t, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x) + \frac{a\Delta t}{\Delta x}\left(v(n\Delta t,(k+1)\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{b^2}{2}v(n\Delta t, k\Delta x)\Delta t + bv(n\Delta t, k\Delta x)\left(W((n+1)\Delta t) - W(n\Delta t)\right)\right|^2\\
\leq&\quad 4Ev_{xx}^2(n\Delta t,(k+\vartheta)\Delta x)\Delta t^2\Delta x^2 + 4a^2\Delta t\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v_x(\tau, k\Delta x) - v_x(n\Delta t, k\Delta x)\right|^2\, d\tau\\
&+2b^2\Delta t\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right|^2\, d\tau\\
&+4b^2\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right|^2\, d\tau.
\end{aligned}\tag{4.72}$$

Es bleibt an dieser Stelle nur die beiden letzten Terme zu untersuchen, da sich alle anderen Terme abschätzen lassen wie in (3.34) im Beweis von Theorem 3.4. Betrachten wir zuerst den letzten Summanden von (4.72). Nach der Integraldefinition existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein hinreichend kleines Δx, so dass

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right|^2\, d\tau\\
&\leq\quad \varepsilon + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right|^2\, d\tau\, dx.
\end{aligned}\tag{4.73}$$

Da $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine positive Zahl ist, kann es auch als Δt^2 gewählt werden. Theorem 2.6 liefert dann

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} E\left|v(\tau, k\Delta x) - v(n\Delta t, k\Delta x)\right|^2\, d\tau \leq \Delta t^2 + C\Delta t^2. \tag{4.74}$$

Der vorletzte Summand läßt sich mit einer analogen Überlegung durch $\Delta t^3 + C\Delta t^3$ abschätzen. Das ist die Konsistenz.

■

Die Konvergenz des Schemas (4.67) folgt aus Theorem 3.7 im Sinne des 2. Teiles dieses Theorems, da der allgemeine Fall auch einen Lipschitz-stetigen Term enthält. Es läßt sich aber auch eine A-priori-Abschätzung analog zu der in Theorem 3.4 verwandten aufstellen, so dass man den Beweis analog führen kann.

Mit dieser Approximation haben wir ein Verfahren entwickelt, dass die Lösung von Gleichung (4.6) approximiert. Denn für $\delta \to 0$ approximiert $v_\delta(t,x)$ die ursprüngliche Funktion $v(t,x)$, $v_\delta(t,x)$ selbst wird durch die $u_{k,\delta}^n$ approximiert, so dass man am Ende zumindest eine schwache Approximation erhält. Weitere mögliche Approximationen erhält man durch entsprechende Abwandlung der anderen Verfahren.

4.3 Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen

4.3.1 Anfangswertprobleme hyperbolischer Differentialgleichungssysteme

Wir beginnen bei der Betrachtung von Systemen hyperbolischer Differentialgleichungen mit Systemen von Anfangswertproblemen. Wir betrachten Systeme mit konstanten Koeffizienten, wobei die einzelnen Komponenten die folgende Gestalt haben:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} v^{(1)}(t,x) \\ v^{(2)}(t,x) \\ \vdots \\ v^{(m)}(t,x) \end{pmatrix}. \tag{4.75}$$

Dabei sind die Elemente der $m \times m$-Matrix A konstant, bei der Lösung $v(t,x)$ handelt es sich um eine m-dimensionale Vektorfunktion. Der Zufall soll in die Gleichung durch den verrauschten Vektor

$$v(t,x)dW(t) = \begin{pmatrix} v^{(1)}(t,x)dW^{(1)}(t) \\ v^{(2)}(t,x)dW^{(2)}(t) \\ \vdots \\ v^{(m)}(t,x)dW^{(m)}(t) \end{pmatrix}. \tag{4.76}$$

eingehen, wobei die einzelnen $W^{(j)}$, $j = 1, ..., m$, unabhängige Wiener-Prozesse sind. Wir erhalten dann das m-dimensinonale, hyperbolische stochastische Differentialgleichungssystem

$$d_t v(t,x) = A(v_x(t,x)dt + v(t,x)dW(t)). \tag{4.77}$$

Ist die Matrix A diagonalisierbar, so läßt sich die Differentialgleichung entkoppeln, so dass man m skalare Gleichungen erhält, die man separat lösen kann. Dazu bringt man die Matrix A auf Diagonalgestalt

$$S^{-1} A\, S = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}. \tag{4.78}$$

Führt man dabei neue Variablen

$$v(t,x) = S\tilde{v}(t,x) \tag{4.79}$$

ein, so erhält man für Gleichung (4.77)

$$d_t\tilde{v}(t,x) = \Lambda(\tilde{v}_x(t,x)dt + \tilde{v}(t,x))dW(t) \tag{4.80}$$

und man hat dann nur noch m skalare Gleichungen

$$d_t\tilde{v}^{(j)} = \lambda_j \left(\frac{\partial \tilde{v}^{(j)}}{\partial x} dt + \tilde{v}^{(j)} dW(t) \right). \tag{4.81}$$

zu lösen.

Wir betrachten im Folgenden die etwas allgemeineren Differentialgleichungssysteme

$$d_t v(t,x) = \Lambda \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} dt + Bv(t,x)dW(t), \tag{4.82}$$

wobei B eine $m \times m$-Matrix in Diagonalform ist.

4.3.2 Randwertprobleme für Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen

Wir betrachten zunächst Randwertaufgaben für Differentialgleichungssysteme

$$d_t\bar{v}(t,x) = A \frac{\partial \bar{v}(t,x)}{\partial x} dt + A\bar{v}(t,x)dW(t) \tag{4.83}$$

für $x \in [0,1]$ und $t \geq 0$, wobei A wiederum eine diagonalisierbare $m \times m$-Matrix ist. Dieses System läßt sich wie im Fall für Anfangswerte skalarisieren, indem wir das Gleichungssystem umformen. Mit der Matrix S der Eigenvektoren von A erhält man

$$S^{-1} A\, S = \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^I & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda^{II} & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda^{III} \end{pmatrix}. \tag{4.84}$$

Daraus ergibt sich für das Differentialgleichungssystem (4.83), wenn wir eine neue Variable $v(t,x) := S^{-1}\bar{v}(t,x)$ einführen

$$d_t v(t,x) \;=\; \Lambda \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} dt + \Lambda v(t,x)dW(t). \tag{4.85}$$

Dabei enthält die $m \times m$-Diagonalmatrix Λ drei Diagonalmatrizen, Λ^I, Λ^{II} und Λ^{III}, die wie folgt gegeben sind

$$\begin{aligned} \Lambda^I &= \begin{pmatrix} \lambda_1^I & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^I & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_j^I \end{pmatrix}, \\ \Lambda^{II} &= \begin{pmatrix} \lambda_{j+1}^{II} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_{j+2}^{II} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^{II} \end{pmatrix}, \\ \Lambda^{III} &\equiv 0, \end{aligned} \tag{4.86}$$

wobei für die Dimensionen $j+k+i=m$ gilt. Weiterhin gilt $\lambda_l^I > 0$ für $l = 1, ..., j$, $\lambda_l^{II} < 0$ für $l = j+1, ..., k$ und $\lambda_l^{III} = 0$ für $l = k+1, ..., m$. Dabei ist die Anfangswertfunktion durch

$$\bar{v}(t_0, x) = f(x) \in L^2(\mathbb{R}^m) \tag{4.87}$$

gegeben und die Randwertbedingungen sind durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{rcl} \bar{v}^I(t,1) &=& g^I(t) \\ \bar{v}^{II}(t,0) &=& g^{II}(t) \end{array}\right\} \tag{4.88}$$

gegeben. Dabei sind $v^I(t,x)$ die Komponenten von $v(t,x)$ für die gilt $\lambda_l^I > 0$ für $l = 1, ..., j$ und $v^{II}(t,x)$ diejenigen, für die gilt $\lambda_l^I < 0$ für $l = j+1, ..., k$. Man kann hier die Komponenten koppeln, indem man die Randwertbedingungen wie im deterministischen Fall (vgl. [21]) zu

$$\left.\begin{array}{rcl} v^{II}(t,0) &=& R_0^I v^I(t,0) + R_0^{III} v^{III}(t,0) + g^{II}(t) \\ v^I(t,1) &=& R_1^{II} v^{II}(t,1) + R_1^{III} v^{III}(t,1) + g^I(t) \end{array}\right\} \tag{4.89}$$

verallgmemeinert, wobei die R_0^I, R_1^I, R_0^{II}, R_1^{II}, R_0^{III} und R_1^{III} quadratische Matrizen sind, die auch zusätzlich von der Zeit t abhängen können. $\Lambda^{III} = 0$ impliziert

$$v^{III}(t,x) = f^{III}(x)\left(1 + \int_0^t dW(t)\right), \tag{4.90}$$

so dass wir nur die Randwertbedingungen an v^I und v^{II} betrachten müssen. Wir schreiben daher (4.89) wie folgt

$$\left.\begin{array}{rcl} v^{II}(t,0) &=& R^I v^I(t,0) + \tilde{g}^{II}(t), \\ v^I(t,1) &=& R_1^{II} v^{II}(t,1) + R_1^{III} v^{III}(t,1) + \tilde{g}^I(t), \end{array}\right\} \tag{4.91}$$

wobei

$$\left.\begin{array}{rcl} \tilde{g}^{II}(t) &=& g^{II}(t) + R_0^{III} f^{III}(0), \\ \tilde{g}^I(t) &=& g^I(t) + R_0^{III} f^{III}(1). \end{array}\right\} \tag{4.92}$$

Dabei sind $R^I := R_0^I$ und $R^{II} := R_1^{II}$. Die Anfangswertfunktion

$$v(t_0, x) = f(x) \tag{4.93}$$

ist eine m-dimensionale Vektorfunktion mit Komponenten in $L^2[0,1]$. Die Randwertbedingungen sind durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{rcl} v^{II}(t,0) &=& R^I(t) v^I(t,0) \\ v^I(t,1) &=& R^{II}(t) v^{II}(t,1) \end{array}\right\} \tag{4.94}$$

gegeben. Dieses System läßt sich, wie wir es in Abschnitt 4.2 für skalare Gleichungen gezeigt haben, durch ein System mit stückweise differenzierbaren Wiener-Prozessen approximieren:

$$\begin{aligned} d_t v_\delta(t,x) &= \Lambda \frac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial x} dt + \Lambda v_\delta(t,x) dW^\delta(t) \\ &= \big(\Lambda \frac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial x} + \Lambda \dot{w}_\delta v_\delta(t,x)\big) dt, \end{aligned} \tag{4.95}$$

wobei der Ausdruck $\Lambda \dot{w}_\delta v_\delta(t,x)dt$ durch

$$\int_0^t \Lambda \dot{w}_\delta v_\delta(t,x)dt = \frac{1}{\delta}\Lambda \sum_{i=1}^{2^n-1} \big(W(i\Delta t) - W((i-1)\Delta t)\big) \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_\delta(t,x)\,dt \tag{4.96}$$

gegeben ist.

Im Folgenden betrachten wir entkoppelte approximierte Differentialgleichungssysteme

$$\begin{aligned} d_t v_\delta(t,x) &= \Lambda \frac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial x} dt + B v_\delta(t,x) dW^\delta(t) \\ &= \big(\Lambda \frac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial x} + B \dot{w}_\delta v_\delta(t,x)\big)dt, \end{aligned} \tag{4.97}$$

wobei die Matrix B eine $m \times m$-Diagonalmatrix ist.

Definition 4.1. Ein Problem

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial t} &= P(t,x,\tfrac{\partial}{\partial x},\omega) v_\delta(t,x) + F(t,x), \quad \text{mit } \; 0 \le x \le 1 \; \text{ und } \; t \ge t_0 := 0 \\ v_\delta(t_0,x) &= f(x), \end{aligned}\right\} \tag{4.98}$$

wobei $F(t,x) \in L^2([0,T]\times[0,1])$ ist, mit den Randwertbedingungen

$$\left.\begin{aligned} v_\delta(t,0) &= g^{II}(t) \\ v_\delta(t,1) &= g^{I}(t) \end{aligned}\right\} \tag{4.99}$$

und $F = g^I = g^{II} = 0$ heißt wohlgestellt, falls für jede Funktion $f \in C^\infty$, die nahe den Randwerten $x = 0$ und $x = 1$ verschwindet, eine Lösung existiert, für die

$$\|v_\delta(t,\cdot)\|^2 \le K e^{\alpha(t-t_0)} \|v_\delta(t_0,\cdot)\|^2 \tag{4.100}$$

gilt, wobei die Konstanten K und α unabhängig von der Anfangswertfunktion f und dem Startpunkt t_0 sind.

Die Definition für den inhomogenen Fall erfolgt später (Definition 4.2). Dann gilt das folgende Theorem.

Theorem 4.2. *Sei $v_\delta(t,\cdot)$ eine Lösung des Problems (4.97), (4.93), (4.94). Dann ist das Problem wohlgestellt, d.h. es gilt*

$$\begin{aligned} \|v_\delta(t,\cdot)\|^2 &\le K e^{2\alpha t} \|v_\delta(0,\cdot)\|^2 \\ &= K e^{2\alpha t} \|f\|^2, \end{aligned} \tag{4.101}$$

wobei $\alpha = \alpha(\omega)$ und K eine positive Konstante ist.

Beweis: $(\cdot,\cdot)$ bezeichne das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^m$. Differenziert man den Ausdruck $\|v_\delta\|^2$ bezüglich der Zeit t, so erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\|v_\delta(t,x))\|^2}{\partial t} &= \big\langle\frac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial t}, v_\delta(t,x)\big\rangle + \big\langle v_\delta(t,x), \frac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial t}\big\rangle \\
&= \big\langle \Lambda v_{x,\delta}(t,x), v_\delta(t,x)\big\rangle + \big\langle v_\delta(t,x), \Lambda v_{x,\delta}(t,x)\big\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2^n-1}\Big[\big\langle\frac{B}{\delta}v_\delta(t,x)\big(W(i\Delta t)-W((i-1)\Delta t)\big), v_\delta(t,x)\big\rangle \\
&\quad + \big\langle v_\delta(t,x), \frac{B}{\delta}v_\delta(t,x)\big(W(i\Delta t)-W((i-1)\Delta t)\big)\big\rangle\Big] \\
&\leq 2\alpha\|v_\delta\|^2 - \big\langle v_\delta(t,x), \Lambda_x v_\delta(t,x)\big\rangle + \left(v_\delta(t,x), \Lambda v_\delta(t,x)\right)\Big|_0^1 \\
&\leq 2\alpha\|v_\delta\|^2 + \left(v_\delta(t,x), \Lambda v_\delta(t,x)\right)\Big|_0^1, \qquad (4.102)
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
&\frac{\left|\big\langle v_\delta(t,x), \big((B+B^*)\delta^{-1}\sum_{i=1}^{2^n-1}\big(W(i\Delta t)-W((i-1)\Delta t)\big)-\Lambda_x\big)v_\delta(t,x)\big\rangle\right|}{\|v_\delta\|^2} \\
\leq\;& \|(B+B^*)\delta^{-1}\sum_{i=1}^{2^n-1}\big(W(i\Delta t)-W((i-1)\Delta t)\big)-\Lambda_x\| \\
\leq\;& \max_{t\in[0,T],i\in\{1,\dots,2^n\}}\|(B+B^*)\big(W(i\Delta t)-W((i-1)\Delta t)\big)-\Lambda_x\| \\
=:\;& \alpha(\omega). \qquad (4.103)
\end{aligned}$$

Setzt man die zweite der Randwertbedingungen aus (4.94) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
(v_\delta(t,1), \Lambda v_\delta(t,1)) &= \big(v_\delta^I(t,1), \Lambda^I v_\delta^I(t,1)\big) + \big(v_\delta^{II}(t,1), \Lambda^{II} v_\delta^{II}(t,1)\big) \\
&= \big(R^{II}(t)v_\delta^{II}(t,1), \Lambda^I R^{II}(t)v_\delta^{II}(t,1)\big) + \big(v_\delta^{II}(t,1), \Lambda^{II} v_\delta^{II}(t,1)\big) \\
&= \big(v_\delta^{II}(t,1), C(t,1)v_\delta^{II}(t,1)\big), \qquad (4.104)
\end{aligned}$$

wobei $C(t,1) = \Lambda^{II}(t,1) + R^{II*}(t)\Lambda^I R^{II}(t)$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $|R^{II}(t)|$ genügend klein ist. Dann gilt insbesondere

$$C(t,1) < \frac{1}{2}\Lambda^{II}(t,1), \qquad (4.105)$$

womit sich die Gleichung (4.104) durch

$$(v_\delta(t,1), \Lambda v_\delta(t,1)) \leq -\frac{\lambda_0}{2}\|v_\delta(t,1)\|^2 \qquad (4.106)$$

mit $\lambda_0 := \min_l\{|\lambda_l^{II}| : \ l = j+1,...,k\}$ abschätzen läßt. Eine entsprechende Abschätzung erhält man auch für

$$-\left(v_\delta(t,0), \Lambda v_\delta(t,0)\right) \leq -\frac{\lambda_0}{2}\|v_\delta^I(t,0)\|^2. \qquad (4.107)$$

Damit hat man für $|R^{II}(t)|$ genügend klein gezeigt, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\|v_\delta(t,x)\|^2}{\partial t} + \frac{\lambda_0}{2}\Big[|v_\delta^I(t,1)|^2 + |v_\delta^{II}(t,0)|^2\Big] &\leq 2\alpha\|v_\delta(0,x)\|^2, \\
\|v_\delta(t,x)\|^2 + \int_0^t\Big[|v_\delta(\tau,1)|^2 + |v_\delta(\tau,0)|^2\Big]d\tau &\leq Ke^{2\alpha t}\|v_\delta(0,x)\|^2, \qquad (4.108)
\end{aligned}$$

für eine Konstante K. Dabei wurde ausgenutzt, dass $v_\delta^I(t,1)$ und $v_\delta^{II}(t,0)$ als Linearkombinationen von $v_\delta^{II}(t,1)$ und $v_\delta^I(t,0)$ dargestellt werden können.

Wir betrachten nun den Fall, dass $R^I(t)$ und $R^{II}(t)$ nicht genügend klein sind. Wir führen in Gleichung (4.97) eine neue Funktion $d = d(x)$ ein, die nur von x abhängt. Wir setzen

$$v_\delta^I(t,x) = z^I(t,x), \tag{4.109}$$

$$v_\delta^{II}(t,x) = d(x) z^{II}(t,x). \tag{4.110}$$

Dabei ist dann die Funktion $z(t,x) = (z^I(t,x), z^{II}(t,x))^T$ Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = \Lambda \frac{\partial z(t,x)}{\partial x} + B_d \dot{w}_\delta z(t,x) \tag{4.111}$$

mit $B_d = B_d(B, d(x))$. Für die beiden Randwertbedingungen gelten die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} z^{II}(t,0) &= d^{-1}(0) R^I(t) z^I(t,0) \\ z^I(t,1) &= d(1) R^{II}(t) z^{II}(t,1). \end{aligned}\right\} \tag{4.112}$$

Man kann sich jetzt wieder durch eine geschickte Wahl der Funktion $d(x)$ die Situation des ersten Beweisschrittes herstellen, indem man für $d(x)$ eine glatte, invertierbare Funktion wählt, so dass $d^{-1}(0)R^I(t)$ und $d(1)R^{II}(t)$ genügend klein sind. Damit erhalten wir die Abschätzungen für $v_\delta(t,x)$.

■

Eine Verschärfung des Begriffs der Wohlgestelltheit ist die starke Wohlgestelltheit, bei der auf das Verschwinden der Funktion F und der Randwerte verzichtet wird.

Definition 4.2. Ein Problem

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial t} &= P(t,x,\tfrac{\partial}{\partial x},\omega) v_\delta(t,x) + F(t,x), \quad \text{mit } 0 \le x \le 1 \text{ und } t \ge t_0 := 0 \\ v_\delta(t_0,x) &= f(x), \end{aligned}\right\} \tag{4.113}$$

wobei $F(t,x) \in L^2([0,T] \times [0,1])$ ist, mit den Randwertbedingungen

$$\left.\begin{aligned} v_\delta(t,0) &= g^{II}(t) \\ v_\delta(t,1) &= g^I(t) \end{aligned}\right\} \tag{4.114}$$

heißt stark wohlgestellt, falls es wohlgestellt ist im Sinne von Definition 4.1 und die folgende Abschätzung gilt

$$\begin{aligned} \|v_\delta(t,\cdot)\|^2 \le\; & K(t,t_0,\omega)\Big(\|v_\delta(t_0,\cdot)\|^2 + \int_{t_0}^t \|F(\tau,\cdot)\|^2 \\ & + |g^I(\tau)|^2 + |g^{II}(\tau)|^2 + |\left(g^I\right)'(\tau)|^2 + |\left(g^{II}\right)'(\tau)|^2 \big) \, d\tau \Big). \end{aligned} \tag{4.115}$$

Dabei ist die Funktion $K(t,t_0,\omega)$ für festes ω beschränkt auf jedem endlichen Zeitintervall $[0,T]$ und unabhänging von der Anfangswertfunktion f und dem Startpunkt t_0. $\|\cdot\|$ ist die Norm auf $L^2[0,1] \times ... \times L^2[0,1]$.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass das betrachtete inhomogene Randwertproblem auch dieser Definition genügt.

Theorem 4.3. *Für stochastische, hyperbolische Systeme (4.113) mit allgemeinen inhomogenen Randwertbedingungen*

$$\left.\begin{array}{rcl} v_\delta^{II}(t,0) & = & R^I(t)v_\delta^I(t,0)+g^{II}(t) \\ v_\delta^I(t,1) & = & R^{II}(t)v_\delta^{II}(t,1)+g^I(t) \end{array}\right\} \tag{4.116}$$

ist das Anfangsrandwertproblem (ARWP) stark wohlgestellt, d.h. es gilt (4.115).

Beweis: Wir führen zwei neue Variablen

$$\left.\begin{array}{rcl} \tilde{v}_\delta^I(t,x) & := & v_\delta^I(t,x)+g^I(t)x \\ \tilde{v}_\delta^{II}(t,x) & := & v_\delta^{II}(t,x)+g^{II}(t)(1-x) \end{array}\right\} \tag{4.117}$$

ein und erhalten dadurch ein Problem mit homogenen Randwerten

$$\left.\begin{array}{rclcl} \tilde{v}_\delta^I(t,1) & := & R^{II}(t)\tilde{v}_\delta^{II}(t,1) & = & R^{II}(t)v_\delta^{II}(t,1) \\ \tilde{v}_\delta^{II}(t,0) & := & R^I(t)v_\delta^I(t,0) & = & R^I(t)v_\delta^I(t,0), \end{array}\right\} \tag{4.118}$$

wobei sich aber die Anfangswertfunktion und die Funktion F ändern. Es gilt insbesondere

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\partial \tilde{v}_\delta^I(t,x)}{\partial t} & = & \Lambda^I \frac{\partial v_\delta^I(t,x)}{\partial x} - g^I(t) + B^I v_\delta^I(t,x)\dot{W}_\delta(t) + g^I(t)\dot{W}_\delta(t) \\ & & +F^I(t,x) - \left(g^I\right)'(t)x \\ \frac{\partial \tilde{v}_\delta^{II}(t,x)}{\partial t} & = & \Lambda^{II} \frac{\partial v_\delta^{II}(t,x)}{\partial x} + g^{II}(t) + B^{II} v_\delta^{II}(t,x)\dot{W}_\delta(t) + g^{II}(t)\dot{W}_\delta(t) \\ & & +F^{II}(t,x) - \left(g^{II}\right)'(t)(1-x). \end{array}\right\} \tag{4.119}$$

Differenziert man den Ausdruck $\|\tilde{v}_\delta\|^2$ bezüglich der Zeit t, so erhält man mit (4.119) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \|\tilde{v}_\delta(t,x))\|^2}{\partial t} \\
&= \Big\langle \frac{\partial \tilde{v}_\delta(t,x)}{\partial t}, \tilde{v}_\delta(t,x)\Big\rangle + \Big\langle \tilde{v}_\delta(t,x), \frac{\partial \tilde{v}_\delta(t,x)}{\partial t}\Big\rangle \\
&= \big\langle \Lambda v_{x,\delta}(t,x), v_\delta(t,x)\big\rangle + \big\langle v_\delta(t,x), \Lambda v_{x,\delta}(t,x)\big\rangle \\
&\quad +\big\langle v_\delta(t,x), F(t,x)+g(t)-(g)'(t)h(x)\big\rangle + \big\langle F(t,x)+g(t)+(g)'(t)h(x), v_\delta(t,x)\big\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2^n-1}\Big[\Big\langle \left(\frac{B}{\delta}v_\delta(t,x)+\frac{g(t)}{\delta}\right)\big(W(i\Delta t)-W((i-1)\Delta t)\big), v_\delta(t,x)\Big\rangle \\
&\quad + \Big\langle v_\delta(t,x), \left(\frac{B}{\delta}v_\delta(t,x)+\frac{g(t)}{\delta}\right)\big(W(i\Delta t)-W((i-1)\Delta t)\big)\Big\rangle\Big] \\
&= -\big\langle v_\delta(t,x), \Lambda_x v_\delta(t,x)\big\rangle + \left(\tilde{v}_\delta(t,x), \Lambda\tilde{v}_\delta(t,x)\right)\Big|_0^1 \\
&\quad +\big\langle v_\delta(t,x), F(t,x)+g(t)-(g)'(t)h(x)\big\rangle + \big\langle F(t,x)+g(t)+(g)'(t)h(x), v_\delta(t,x)\big\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2^n-1}\Big[\Big\langle \left(\frac{B}{\delta}v_\delta(t,x)+\frac{g(t)}{\delta}\right)\big(W(i\Delta t)-W((i-1)\Delta t)\big), v_\delta(t,x)\Big\rangle \\
&\quad + \Big\langle v_\delta(t,x), \left(\frac{B}{\delta}v_\delta(t,x)+\frac{g(t)}{\delta}\right)\big(W(i\Delta t)-W((i-1)\Delta t)\big)\Big\rangle\Big].
\end{aligned} \tag{4.120}$$

wobei

$$h(x) = \begin{pmatrix} h^I(x) \\ h^{II}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} g^I(t) \\ g^{II}(t) \end{pmatrix}.$$

Schätzt man nun alle Summanden der rechten Seite von (4.120) ab, wie dies hier exemplarisch für fünften Summanden (vgl. dazu Beziehung (4.96)) geschieht

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \left(\frac{B}{\delta} v_\delta(t,x) + \frac{g(t)}{\delta}\right) \sum_{i=1}^{2^n-1} \big(W(i\Delta t) - W((i-1)\Delta t)\big), v_\delta(t,x)\Big\rangle \\
\leq\ & \Big\langle \frac{B}{\delta} v_\delta(t,x) \sum_{i=1}^{2^n-1} \big(W(i\Delta t) - W((i-1)\Delta t)\big), v_\delta(t,x)\Big\rangle \\
& + \Big\langle \frac{g(t)}{\delta} \sum_{i=1}^{2^n-1} \big(W(i\Delta t) - W((i-1)\Delta t)\big), v_\delta(t,x)\Big\rangle \\
\leq\ & \frac{\left|\left\langle v_\delta(t,x) \sum_{i=1}^{2^n-1} \big(W(i\Delta t) - W((i-1)\Delta t)\big), v_\delta(t,x)\right\rangle\right|}{\|v_\delta(t,x)\|^2} \cdot \|v_\delta(t,x)\|^2 \\
& + \beta(t,\omega)\left(\|v_\delta(t,x)\|^2 + |g(t)|^2\right) \\
\leq\ & \alpha(t,\omega)\left(\|v_\delta(t,x)\|^2 + |g(t)|^2\right),
\end{aligned} \tag{4.121}$$

so kann man (4.120) abschätzen durch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \|\tilde{v}_\delta(t,x))\|^2}{\partial t} \leq\ & \beta(t,\omega)\Big(\|v_\delta(t,x)\|^2 + \|F^I(t,x)\|^2 + \|F^{II}(t,x)\|^2 + \|g(t)\|^2 \\
& + \|\left(g^I\right)'(t)\|^2 + \|\left(g^{II}\right)'(t)\|^2\Big) + \left(\tilde{v}_\delta(t,x), \Lambda\tilde{v}_\delta(t,x)\right)\Big|_0^1.
\end{aligned} \tag{4.122}$$

Setzt man die zweite der Randwertbedingungen aus (4.118) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
(\tilde{v}_\delta(t,1), \Lambda\tilde{v}_\delta(t,1)) &= \big(v_\delta^I(t,1), \Lambda^I v_\delta^I(t,1)\big) + \big(v_\delta^{II}(t,1), \Lambda^{II} v_\delta^{II}(t,1)\big) \\
&= \big(R^{II}(t) v_\delta^{II}(t,1), \Lambda^I R^{II}(t) v_\delta^{II}(t,1)\big) + \big(v_\delta^{II}(t,1), \Lambda^{II} v_\delta^{II}(t,1)\big) \\
&= \big(v_\delta^{II}(t,1), C(t,1) v_\delta^{II}(t,1)\big),
\end{aligned} \tag{4.123}$$

wobei $C(t,1) = \Lambda^{II}(t,1) + R^{II*}(t)\Lambda^I R^{II}(t)$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $|R^{II}(t)|$ genügend klein ist. Dann gilt insbesondere

$$C(t,1) < \frac{1}{2}\Lambda^{II}(t,1), \tag{4.124}$$

womit sich die Gleichung (4.123) durch

$$(v_\delta(t,1), \Lambda v_\delta(t,1)) \leq -\frac{\lambda_0}{2}\|v_\delta(t,1)\|^2 \tag{4.125}$$

mit $\lambda_0 := \min_l\{|\lambda_l^{II}| : \ l = j+1, ..., k\}$ abschätzen läßt. Eine entsprechende Abschätzung erhält man auch für

$$-\left(v_\delta(t,0), \Lambda v_\delta(t,0)\right) \leq -\frac{\lambda_0}{2}\|v_\delta^I(t,0)\|^2. \tag{4.126}$$

Damit hat man für $|R^{II}(t)|$ genügend klein gezeigt, dass gilt:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \|v_\delta(t,x)\|^2}{\partial t} + \frac{\lambda_0}{2}\left[|v_\delta^I(t,1)|^2 + |v_\delta^{II}(t,0)|^2\right] \\
&\le \gamma(t,\omega)\left(\|v_\delta(0,x)\|^2 + \|F^I(t,x)\|^2 + \|F^{II}(t,x)\|^2 + \|g(t)\|^2\right. \\
&\quad \left. + \|\left(g^I\right)'(t)\|^2 + \|\left(g^{II}\right)'(t)\|^2\right). \qquad (4.127)
\end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned}
&\|v_\delta(t,x)\|^2 + \int_0^t \left[|v_\delta(\tau,1)|^2 + |v_\delta(\tau,0)|^2\right] d\tau \\
&\le K(t,t_0,\omega)\Bigg(\|v_\delta(0,x)\|^2 + \int_0^t \left(\|F^I(t,x)\|^2 + \|F^{II}(t,x)\|^2 + \|g(t)\|^2\right. \\
&\quad \left. + \|\left(g^I\right)'(t)\|^2 + \|\left(g^{II}\right)'(t)\|^2\right) d\tau\Bigg). \qquad (4.128)
\end{aligned}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass $\tilde{v}_\delta^I(t,1)$ und $\tilde{v}_\delta^{II}(t,0)$ als Linearkombinationen von $\tilde{v}_\delta^{II}(t,1)$ und $\tilde{v}_\delta^I(t,0)$ dargestellt werden können.

Wir betrachten nun den Fall, dass $R^I(t)$ und $R^{II}(t)$ nicht genügend klein sind. Wir führen in Gleichung (4.97) wiederum eine neue Funktion $d = d(x)$ ein, die nur von x abhängt. Es sei

$$\tilde{v}_\delta^I(t,x) = z^I(t,x), \qquad (4.129)$$

$$\tilde{v}_\delta^{II}(t,x) = d(x) z^{II}(t,x). \qquad (4.130)$$

Dabei ist dann die Funktion $z(t,x) = (z^I(t,x), z^{II}(t,x))^T$ Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = \Lambda \frac{\partial z(t,x)}{\partial x} + B_d \dot{w}_\delta z(t,x) \qquad (4.131)$$

mit $B_d = B_d(B, d(x))$. Für die beiden Randwertbedingungen gelten die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}
z^{II}(t,0) &= d^{-1}(0) R^I(t) z^I(t,0) \\
z^I(t,1) &= d(1) R^{II}(t) z^{II}(t,1).
\end{aligned}\right\} \qquad (4.132)$$

Durch geschickte Wahl von $d(x)$, kann man sich wieder die Situation des ersten Beweisschrittes von Theorem 4.2 herstellen, womit wir die Abschätzungen für $v_\delta(t,x)$ erhalten.

■

Nachfolgend werden „Energie-Abschätzungen“der Form

$$2\Re\langle P v_\delta, v_\delta\rangle = \langle P v_\delta, v_\delta\rangle + \langle v_\delta, P v_\delta\rangle \le \alpha(\omega)\|v_\delta\|^2$$

für die Differentialgleichung

$$\frac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial t} = P v_\delta, \qquad (4.133)$$

für $0 \le x \le 1$ und $t_0 \le t \le T < \infty$ betrachtet. Dabei galt für die Randwertbedingungen

$$v_\delta(t,0) = 0 = v_\delta(t,1). \qquad (4.134)$$

Falls der rechte Randpunkt $+\infty$ ist, so kann die Randwertbedingung an der Stelle $x = 1$ durch die Bedingung $\|v_\delta(t,\cdot)\| < \infty$ ersetzt werden, und man kann annehmen, dass $v_\delta(t,x)$ und alle Ableitungen gegen Null gehen, falls $x \to \infty$.

Es empfiehlt sich für die späteren Betrachtungen den Operator P für festes t zu charakterisieren.

Definition 4.3. Ein Operator P heißt halbbeschränkt, falls eine positve Konstante $\alpha = \alpha(\omega)$ existiert, so dass für alle Funktionen $z \in \mathcal{V} := \{z \in C^\infty, z(0) = 0 = z(1)\}$

$$2\Re\big\langle Pz, z\big\rangle = \big\langle Pz, z\big\rangle + \big\langle z, Pz\big\rangle \leq \alpha(\omega)\|z\|^2 \tag{4.135}$$

gilt. Ist dabei der rechte Randpunkt $+\infty$, so ersetzt man die rechte Randwertbedingung $z(1) = 0$ durch die Forderung $\|z\| < \infty$.

Im Folgenden wäre natürlich ein Theorem ideal, welches die Wohlgestelltheit eines stochastischen Randwertproblems für den Fall, dass der Operator P halbbeschränkt ist, garantiert. Aber eine solche Aussage gilt schon im deterministischen Fall nicht, vgl. [21]. Man kann durch Hinzunahme weiterer Randwertbedingungen das Problem so verändern, dass zwar der Operator P halbbeschränkt bleibt, das Randwertproblem aber keine Lösung mehr hat, weil die Lösung am Rand überbestimmt ist.

Definition 4.4. Wir betrachten das Problem (4.97), (4.93), (4.116).

(i) Wir nennen das Problem wohlgestellt im verallgemeinerten Sinne für den Fall $f \equiv g^I \equiv g^{II} \equiv 0$, falls für eine glatte, kompatible Funktion F eine Lösung existiert, die die Abschätzung

$$\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|v_\delta(t,\cdot)\|^2 \leq K(\eta)\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|F(t,\cdot)\|^2\,dt \tag{4.136}$$

für alle $\eta(\omega) > \eta_0$ erfüllt, wobei $\lim_{\eta\to\infty} K(\eta) = 0$. Dabei sind die Konstanten η_0 und $K(\eta,\omega)$ unabhängig von F.

(ii) Wir nennen das Problem stark wohlgestellt im verallgemeinerten Sinne, falls

$$\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|v_\delta(t,\cdot)\|^2 \leq K(\eta)\int_0^\infty e^{-2\eta t}\left(\|F(t,\cdot)\|^2 + |g^I(t)|^2 + |g^{II}(t)|^2\right)\,dt \tag{4.137}$$

für alle $\eta(\omega) > \eta_0$ erfüllt ist, wobei $\lim_{\eta\to\infty} k(\eta) = 0$. Dabei sind die Konstanten η_0 und $K(\eta,\omega)$ unabhängig von F.

Bemerkung 4.2. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass die Funktion f konstant Null ist. Andernfalls betrachtet man einfach eine neue Variable. Man setzt

$$\tilde{v}_\delta(t,x) = v_\delta(t,x) - h(t)f(x), \tag{4.138}$$

wobei $h(t),\ t \in [0,T]$, eine glatte Funktion mit $h(0) = 1$ ist.

Theorem 4.4. *Angenommen, der Operator $P = P(t, x, \frac{\partial}{\partial x}, \dot{w}_\delta)$ ist halbbeschränkt, d.h. es gilt*

$$\Re(v_\delta, Pv_\delta) \le \alpha \|v_\delta\|^2, \tag{4.139}$$

wobei $\alpha = \alpha(\omega)$. Dann ist das Problem (4.97), (4.93), (4.94) wohlgestellt im verallgemeinerten Sinne.

Beweis: Mit der Substitution $z(t,x) := e^{-\eta t} v_\delta(t,x)$ ergibt sich

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = e^{-\eta t} \frac{\partial v_\delta(t,x)}{\partial t} - \eta e^{-\eta t} v_\delta(t,x), \tag{4.140}$$

damit erhält man für (4.97)

$$\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = (P - \eta I) z(t,x) - \eta e^{-\eta t} F(t,x) =: Cz(t,x). \tag{4.141}$$

Es gilt die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \|z(t,x)\|^2}{\partial t} \\
&= \big\langle Cz(t,x), z \big\rangle + \big\langle z, Cz(t,x) \big\rangle \\
&= \big\langle A\frac{\partial z(t,x)}{\partial x} + (B\dot{w}_\delta - \eta I)\, z(t,x), z(t,x) \big\rangle + \big\langle z(t,x), A\frac{\partial z(t,x)}{\partial x} + (B\dot{w}_\delta - \eta I)\, z(t,x) \big\rangle \\
&\quad + 2\big\langle z(t,x), e^{-\eta t} F(t,x) \big\rangle \\
&= \big\langle Pz(t,x), z(t,x) \big\rangle + \big\langle z(t,x), Pz(t,x) \big\rangle - 2\eta \big\langle z(t,x), z(t,x) \big\rangle + 2\big\langle z(t,x), e^{-\eta t} F(t,x) \big\rangle \\
&\le 2\alpha(\omega) \|z(t,x)\| 2 - 2\eta \|z(t,x)\|^2 + \tilde{\eta} \|z(t,x)\|^2 + \frac{1}{\tilde{\eta}} \|F(t,x)\|^2, \\
&= -\tilde{\eta} \|z(t,x)\|^2 + \frac{1}{\tilde{\eta}} \|F(t,x)\|^2,
\end{aligned} \tag{4.142}$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^m$ ist. Dabei wurde bei der Abschätzung die zufällige Konstante $\tilde{\eta}(\omega)$ so gewählt, dass

$$\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\omega) := \eta - \alpha(\omega) > 0 \tag{4.143}$$

gilt. Mit der Lösungsformel für gewöhnliche lineare Differentialgleichungen kann man das Normquadrat der Lösung wie folgt abschätzen:

$$\|z(t,\cdot)\|^2 \le \int_0^t e^{-\tilde{\eta}(t-\tau)} G(\tau)\, d\tau, \tag{4.144}$$

wobei die Funktion $G(\tau)$ durch $G(\tau) := \frac{1}{\tilde{\eta}} \|F(t,\cdot)\|^2$ definiert ist. Wir führen weiter die Funktion

$$\varphi(t) := \begin{cases} e^{-\tilde{\eta} t}, & \text{für} \quad t \ge 0, \\ 0, & \text{für} \quad t < 0 \end{cases} \tag{4.145}$$

ein. Damit kann man die Wohlgestelltheit im verallgemeinerten Sinn zeigen:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \|z(t,x)\|^2 dt &\leq \int_0^\infty \left(\int_0^t \varphi(t-\tau)G(\tau)\,d\tau\right)\,dt \\ &\leq \int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty \phi(t-\tau)\,dt\right) G(\tau)\,d\tau \\ &\leq \int_0^\infty \left[\frac{-1}{\tilde{\eta}}\varphi(t-\tau)\Big|_{t=\tau}^\infty\right] G(\tau)\,d\tau \\ &= \frac{1}{\eta}\int_0^\infty G(\tau)\,d\tau \\ &= \frac{1}{\tilde{\eta}^2}\int_0^\infty e^{-2\tilde{\eta}\tau}\|F(\tau,\cdot)\|^2\,d\tau. \end{aligned} \tag{4.146}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. ■

Man kann zeigen, dass das Problem (4.97), (4.93), (4.94) bereits wohlgestellt ist, wenn das deterministische Problem wohlgestellt ist, d.h. es gilt das folgende Theorem.

Theorem 4.5. *Angenommen, das deterministische Problem*

$$\frac{\partial v(t,x))}{\partial t} = A\frac{\partial}{\partial x}v(t,x) + F(t,x)$$

ist wohlgestellt im verallgemeinerten Sinne. Dann ist auch das stochastische Problem

$$\frac{\partial v_\delta(t,x))}{\partial t} = \left(A\frac{\partial}{\partial x} + B\dot{w}_\delta\right) v_\delta(t,x) + F(t,x) \tag{4.147}$$

für $0 \leq x \leq 1$ *und* $0 \leq t \leq T$ *mit*

$$v_\delta(0,x) = 0 \tag{4.148}$$

und homogenen Randwertbedingungen wohlgestellt.

Beweis: Formal kann man den Term $P_0 v_\delta(t,x) := B\dot{w}_\delta v_\delta(t,x)$ als einen zusätzlichen Term betrachten. Dann gilt nach der Annahme

$$\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|v_\delta(t,\cdot)\|^2 \leq K(\eta)\int_0^\infty e^{-2\eta t}\left(\|P_0 v_\delta(t,\cdot)\|^2 + \|F(t,\cdot)\|^2\right)\,dt. \tag{4.149}$$

Eine einfache Umformung ergibt nun, dass

$$(1-\alpha(\omega)K(\eta))\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|z(t,\cdot)\|^2 \leq K(\eta)\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|F(t,\cdot)\|^2\,dt. \tag{4.150}$$

Setzt man nun

$$K_1(\eta,\omega) := \frac{K(\eta)}{1-\alpha(\omega)K(\eta)}, \tag{4.151}$$

so gilt $\lim_{\eta\to\infty} K_1(\eta,\omega) = 0$, und damit ist die Behauptung bewiesen.

■

Theorem 4.6. *Das stochastische Problem*

$$\frac{\partial v_\delta(t,x))}{\partial t} = \left(\Lambda \frac{\partial}{\partial x} + B\dot{w}_\delta\right) v_\delta(t,x) + F(t,x) \tag{4.152}$$

für $0 \le x \le 1$ und $0 \le t \le T$ mit der Anfangswertbedingung

$$v_\delta(0,x) \quad = \quad 0 \tag{4.153}$$

und den Randwertbedingungen

$$\left.\begin{array}{lcl} v_\delta(t,0) & = & g_0(t) \\ \|v_\delta(t,\cdot)\| & < & \infty \end{array}\right\} \tag{4.154}$$

für jedes feste t ist stark wohlgestellt im verallgemeinerten Sinne.

Beweis: Wendet man die Laplace-Transformation

$$\hat{z}(s,x) = \int_0^\infty e^{-st} z(t,x) dt \tag{4.155}$$

auf Gleichung (4.152) an, wobei $s = i\xi + \eta$ und $\xi,\ \eta \in \mathbb{R}^1$ gesetzt wird, so erhält man

$$\int_0^\infty e^{-st} d_t v_\delta(t,x)\, dt = \Lambda \int_0^\infty e^{-st} \left(v_{x,\delta}(t,x) + F(t,x)\right)\, dt + B \int_0^\infty e^{-st} \dot{w}_\delta v_\delta(t,x)\, dt. \tag{4.156}$$

Wenn man die linke Seite der Gleichung partiell integriert, so erhält man unter Berücksichtigung der Voraussetzung $f \equiv 0$

$$\int_0^\infty e^{-st} d_t v_\delta(t,x)\, dt = e^{-st} v_\delta(t,x)\Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} v_\delta(t,x)\, dt \tag{4.157}$$

die folgende Darstellung der Laplace-Transformierten

$$s\hat{v}_\delta(t,x) = \Lambda \hat{v}_{x,\delta}(t,x) + B\dot{w}_\delta \hat{v}_\delta + \hat{F}(t,x). \tag{4.158}$$

Die transformierte Randwertbedingung hat die Form

$$\hat{v}_\delta^{II}(s,0) \quad = \quad R^I \hat{v}_\delta^I(s,0) + \hat{g}^{II}(s,0) \tag{4.159}$$

$$\|\hat{v}_\delta(s,\cdot)\| \quad < \quad \infty. \tag{4.160}$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich in zwei Systeme aufspalten

$$s\hat{v}_\delta^I(t,x) \quad = \quad \Lambda^I \hat{v}_{x,\delta}^I(t,x) + B^I \dot{w}_\delta \hat{v}_\delta^I(t,x) + \hat{F}^I(t,x) \tag{4.161}$$

$$s\hat{v}_\delta^{II}(t,x) \quad = \quad \Lambda^{II} \hat{v}_{x,\delta}^{II}(t,x) + B^{II} \dot{w}_\delta \hat{v}_\delta^{II}(t,x) + \hat{F}^{II}(t,x), \tag{4.162}$$

wobei die Matrizen B^I und B^{II} die Unterdiagonalmatrizen der Matrix B mit $\dim B^I = \dim \Lambda^I$ und $\dim B^{II} = \dim \Lambda^{II}$ sind.

Man hat also zwei Systeme linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen mit stochastischen Koeffizienten

$$\hat{v}^I_{x,\delta}(t,x) = (\Lambda^I)^{-1} s\hat{v}^I_\delta(t,x) - (\Lambda^I)^{-1} B^I \dot{w}_\delta \hat{v}^I_\delta(t,x) - (\Lambda^I)^{-1}\hat{F}^I(t,x) \tag{4.163}$$

$$\hat{v}^{II}_{x,\delta}(t,x) = (\Lambda^{II})^{-1} s\hat{v}^{II}_\delta(t,x) + (\Lambda^{II})^{-1} B^{II} \dot{w}_\delta \hat{v}^{II}_\delta(t,x) + (\Lambda^{II})^{-1}\hat{F}^{II}(t,x). \tag{4.164}$$

Die Lösungen haben dann die folgende Gestalt

$$\hat{v}^I_\delta(t,x) = \frac{1}{e^{((\Lambda^I)^{-1}s-(\Lambda^I)^{-1}B^I\dot{w}_\delta)x}} \int_0^x (\Lambda^I)^{-1}\hat{F}^I(t,z) e^{((\Lambda^I)^{-1}s-(\Lambda^I)^{-1}B^I\dot{w}_\delta)z}\, dz \tag{4.165}$$

$$\begin{aligned}\hat{v}^{II}_\delta(t,x) &= \frac{1}{e^{((\Lambda^{II})^{-1}s-(\Lambda^{II})^{-1}B^{II}\dot{w}_\delta)x}} \int_0^x (\Lambda^{II})^{-1}\hat{F}^{II}(t,z) e^{((\Lambda^{II})^{-1}s-(\Lambda^{I})^{-1}B^{II}\dot{w}_\delta)z}\, dz \\ &\quad + e^{((\Lambda^{II})^{-1}s-(\Lambda^{II})^{-1}B^{II}\dot{w}_\delta)x}\hat{v}^{II}_\delta(s,0).\end{aligned} \tag{4.166}$$

wobei $\hat{v}^{II}_\delta(s,0)$ durch die Randwertbedingung (4.154) bestimmt ist. Betrachtet man (4.161), so erhält man für das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ im Hilbertraum die Beziehung

$$\begin{aligned}&\langle \hat{v}^I_\delta, s\hat{v}^I_\delta\rangle + \langle s\hat{v}^I_\delta, \hat{v}^I_\delta\rangle = \langle \hat{v}^I_\delta, \Lambda^I \hat{v}^I_{x,\delta}(t,x)\rangle + \langle \Lambda^I \hat{v}^I_{x,\delta}(t,x), \hat{v}^I_\delta\rangle \\ &\quad + \langle \hat{v}^I_\delta, \Lambda^I B^I \dot{w}_\delta \hat{v}^I_\delta(t,x) + \hat{F}^I(t,x)\rangle + \langle \Lambda^I B^I \dot{w}_\delta \hat{v}^I_\delta(t,x) + \hat{F}^I(t,x), \hat{v}^I_\delta\rangle\end{aligned} \tag{4.167}$$

oder

$$\eta\|\hat{v}^I_\delta\|^2 = \Re\langle \hat{v}^I_\delta, \Lambda^I \hat{v}^I_{x,\delta}\rangle + \Re\langle \hat{v}^I_\delta, \hat{F}^I\rangle + \Re\langle \hat{v}^I_\delta, B^I\dot{w}_\delta \hat{v}_\delta\rangle. \tag{4.168}$$

Integriert man das erste Skalarprodukt auf der rechten Seite von (4.168) partiell, so erhält man

$$\int_0^\infty \left(\hat{v}^I_\delta, \Lambda^I \hat{v}^I_{x,\delta}\right) dx = \left(\hat{v}^I_\delta, \Lambda^I \hat{v}^I_\delta\right)\big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(\hat{v}^I_{x,\delta}, \Lambda^I \hat{v}^I_\delta\right) dx, \tag{4.169}$$

woraus man wegen des Verschwindens von $\hat{v}^I_\delta$ für $x \to \infty$

$$\int_0^\infty \Re\left(\hat{v}^I_\delta \Lambda^I \hat{v}^I_{x,\delta}\right) dx = -\frac{1}{2}\left(\hat{v}^I_\delta(0,s), \Lambda^I \hat{v}^I_\delta(s,0)\right) \tag{4.170}$$

erhält. Eingesetzt in (4.168) ergibt dies

$$\eta\|\hat{v}^I_\delta\|^2 + \frac{1}{2}\left(\hat{v}^I_\delta(0,s), \Lambda^I \hat{v}^I_\delta(s,0)\right) \le \|\hat{v}^I_\delta\| \left(\|\hat{F}^I\| + \|B^I \dot{w}_\delta\|\right), \tag{4.171}$$

daraus folgt

$$\|\hat{v}^I_\delta\| \le \frac{1}{\eta}\left(\|\hat{F}^I\| + \|B^I \dot{w}_\delta\|\right). \tag{4.172}$$

Weiter kann man aus (4.171) schließen, dass

$$\frac{1}{2}\left(\hat{v}^I_\delta(0,s), \Lambda^I \hat{v}^I_\delta(s,0)\right) \le \left(\|\hat{F}^I\| + \|B^I \dot{w}_\delta\|\right) \tag{4.173}$$

gilt, daraus folgt

$$|\hat{v}_\delta^I(s,0)| \leq \frac{C}{\sqrt{\eta}} \left(\|\hat{F}^I\| + \|B^I \dot{w}_\delta\| \right). \tag{4.174}$$

Entsprechend erhält man für das zweite Gleichungssystem bezüglich $\hat{v}_\delta^{II}$ nach einigen algebraischen Umformungen

$$\begin{aligned} \eta\|\hat{v}_\delta^{II}\|^2 &\leq \|\hat{v}_\delta^{II}\| \left(\|\hat{F}^{II} + B^{II}\dot{w}_\delta\| \right) - \frac{1}{2} \left(\hat{v}_\delta^{II}(0,s), \Lambda^{II} \hat{v}_\delta^{II}(s,0) \right) \\ &\leq \frac{\eta}{2}\|\hat{v}_\delta^{II}\|^2 + \frac{1}{2\eta}\|\hat{F}^{II} + B^{II}\dot{w}_\delta\|^2 + \frac{1}{2} \left(\hat{v}_\delta^{II}(0,s), \left(-\Lambda^{II}\right) \hat{v}_\delta^{II}(s,0) \right), \end{aligned} \tag{4.175}$$

woraus wegen $\lambda_l^{II} < 0, \forall l = j+1, ..., k$, schließlich folgt

$$\eta\|\hat{v}_\delta^{II}\|^2 \leq C \left(\frac{1}{\eta}\|\hat{F}^{II} + B^{II}\dot{w}_\delta\|^2 + |\hat{v}_\delta(s,0)|^2 \right). \tag{4.176}$$

Aus der Randwertbedingung (4.159) folgt mit (4.174) die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\hat{v}_\delta^{II}(s,0)|^2 &\leq C \left(|\hat{g}^{II}(s)|^2 + |\hat{v}_\delta^I(s,0)|^2 \right) \\ &\leq C \left(|\hat{g}^{II}(s)|^2 + \frac{1}{\eta} \left(\|\hat{F}^I\|^2 + \|B^I\dot{w}_\delta\|^2 \right) \right). \end{aligned} \tag{4.177}$$

Damit hat man die Abschätzungen

$$\eta\|\hat{v}_\delta\|^2 \leq C \left(\frac{1}{\eta} \left(\|\hat{F}\|^2 + \|B\dot{w}_\delta\|^2 \right) + |\hat{g}^{II}|^2 \right) \tag{4.178}$$

$$|\hat{v}_\delta(s,0)|^2 \leq C \left(\frac{1}{\eta} \left(\|\hat{F}\|^2 + \|B\dot{w}_\delta\|^2 \right) + |\hat{g}^{II}| \right). \tag{4.179}$$

erhalten. Invertiert man die Laplace-Transformation, so erhält man die Lösung des Problems

$$e^{-\eta t} v_\delta(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} \hat{v}_\delta(x, i\xi + \eta)\, d\xi, \tag{4.180}$$

wendet man weiterhin die Parsevalsche Relation an, so erhält man für beliebiges $\eta > 0$, wobei $s = \eta + i\xi$, für (4.178) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\eta t}\|v_\delta(t,x)\|^2\, dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{v}_\delta(s,\cdot)\|^2\, d\xi \\ &\leq C \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\eta^2} \left(\|\hat{F}\|^2 + \|B\dot{w}_\delta\|^2 \right) + \frac{1}{\eta}|\hat{g}^{II}|^2 \right) d\xi \\ &\leq C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\eta t} \left(\frac{1}{\eta^2} \left(\|F(t,\cdot)\|^2 + \|B\dot{w}_\delta\|^2 \right) + \frac{1}{\eta}|g(t)|^2 \right) dt. \end{aligned} \tag{4.181}$$

Entsprechend erhält man für (4.179)

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\eta t}\|v_\delta(t,0)\|^2\, dt \\ &\leq C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\eta t} \left(\frac{1}{\eta} \left(\|F(t,\cdot)\|^2 + \|B\dot{w}_\delta\|^2 \right) + |g(t)|^2 \right) dt. \end{aligned} \tag{4.182}$$

Damit ist gezeigt, dass auch in diesem Fall die Lösung in Abhängigkeit der Anfangs- und Randwerte abgeschätzt werden kann.

■

Dieser Beweis führt aber im folgenden auch zu einer weiterführenden Begriffsbildung der Wohlgestelltheit. In ähnlicher Weise wie sich die Wohlgestelltheit der Differentialgleichung mit stochastischen Koeffizienten in den Termen niederer Ordnung auf die Wohlgestelltheit der deterministischen Problemstellung zurückführen läßt, läßt sich auch die Stabilität der entsprechenden approximierenden stochastischen Differenzenschemata auf die Stabilität des deterministischen Schemas zurückführen. Es gilt die folgende Aussage:

Definition 4.5. Ein Approximationsverfahren des Types

$$\left.\begin{array}{rcl} u_k^{n+1} &=& (Q+Q_0)u_k^n + F_k^n, \\ u(0,x) &=& u_0(x) = 0, \\ u_0(t) &=& 0 \end{array}\right\} \tag{4.183}$$

für ein homogenes stochastisches Randwertproblem mit Anfangswertfunktion konstant Null heißt stabil im verallgemeinerten Sinne, wenn für genügend kleines h eine eindeutige Lösung existiert, die der folgenden Ungleichung genügt:

$$\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|u(t)\|_h^2\,dt \le K(\eta)\int_0^\infty \|F(t)\|_h^2\,dt \tag{4.184}$$

für alle $\eta(\omega) > \eta_0$. Dabei sind η_0 und $K(\eta)$ Konstanten, die nicht von F abhängen, und es gilt

$$\lim_{\eta\to\infty} K(\eta) = 0 \quad P-\text{f.s.} \tag{4.185}$$

Gilt stattdessen nur, dass die Anfangswertfunktion konstant gleich Null ist, so nennt man die Approximation stark stabil im verallgemeinerten Sinne, wenn statt der Bedingung (4.184) die Bedingung

$$\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|u(t)\|_h^2\,dt \le K(\eta)\int_0^\infty \left(\|F(t)\|_h^2 + |g(t)|^2\right)\,dt \tag{4.186}$$

erfüllt ist.

Theorem 4.7. *Angenommen, die Approximation des deterministischen Problems*

$$\left.\begin{array}{rcccl} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} &=& Qu(t,x) &+& F(t,x), \\ u(0,x) &=& u_0(x) &=& f(x)\in L^2(\mathbb{R}^1), \\ u_0(t) &=& 0 && \end{array}\right\} \tag{4.187}$$

ist stabil, $Q_0 := B\dot{w}_\delta$ sei ein Operator niederer Ordnung mit stochastischen Koeffizienten, dann ist auch das stochastische System

$$\left.\begin{array}{rcccl} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} &=& (Q+Q_0)u(t,x) &+& F(t,x), \\ u(0,x) &=& u_0(x) &=& f(x)\in L^2(\mathbb{R}^1), \\ u_0(t) &=& 0 && \end{array}\right\} \tag{4.188}$$

stabil.

Beweis: Formal kann man den Term $Q_0 = B\dot{w}_\delta$ als einen zusätzlichen Term betrachten, den man wie den Term $F(t,x)$ behandelt. Dann gilt

$$\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|u(t,\cdot)\|^2 \leq K(\eta)\int_0^\infty e^{-2\eta t}\left(\|Q_0 u(t,\cdot)\|^2 + \|F(t,\cdot)\|^2\right)\,dt. \tag{4.189}$$

Eine einfache Umformung ergibt nun, dass

$$(1-\alpha(\omega)K(\eta))\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|u(t,\cdot)\|^2 \leq K(\eta)\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|F(t,\cdot)\|^2\,dt. \tag{4.190}$$

Setzt man

$$K_1(\eta,\omega) := \frac{K(\eta)}{1-\alpha(\omega)K(\eta)}, \tag{4.191}$$

so gilt $\lim_{\eta\to\infty} K_1(\eta,\omega) = 0$. Für η genügend groß, erhalten wir

$$\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|u(t,\cdot)\|^2 \leq K_1(\eta)\int_0^\infty e^{-2\eta t}\|F(t,\cdot)\|^2\,dt. \tag{4.192}$$

■

5. Anhang

5.1 Eine unendlichdimensionale Itô-Formel

I. Gyöngy und N.V. Krylov beweisen in [24] eine unendlichdimensionale Itô-Formel, wobei sie die nachfolgenden Voraussetzungen und Begriffsbildungen voranstellen. Sei V ein separabler Banachraum und V^* sein Dualraum. Angenommen, es existiert ein Hilbertraum H und ein beschränkter linearer Operator $\Lambda : V \to H$, so dass ΛV dicht in H liegt. Sei weiterhin $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine Orthonormalbasis von H, so dass $e_i = \Lambda w_i$ für entsprechendes $w_i \in V$. Sei Π_k die Projektion von H auf den Unterraum, der durch $\{e_i\}_{i=1}^{k}$ erzeugt wird. Weiterhin bezeichne uz das Skalarprodukt von $u, z \in H$ bzw. das Skalarprodukt von $u \in V$ und $z \in V^*$. Sei h ein H-wertiges, lokal quadratisch integrierbares cadlag-Martingal. Für jede positive ganze Zahl k sei $w_k(t) := \sum_{i=1}^{k}(h(t)e_i)w_i$. Weiterhin sei $A(t)$ ein reellwertiger wachsender cadlag-Prozeß, der in der Null startet, $v(t)$ ein V-wertiger progressiv meßbarer Prozeß und $v^*(t)$ ein V^*-wertiger Prozeß, so dass $vv^*(t)$ progressiv meßbar ist für jedes $v \in V$. Weiterhin gelte, dass $|v(t)|$, $|v^*(t)|$ und $|v(t)||v^*(t)|$ fast sicher lokal integrierbar sind bezüglich $dA(t)$. Gyöngy und Krylov beweisen das folgende Theorem:

Theorem 5.1. *Sei τ eine Stoppzeit. Angenommen, für jedes $v \in V$ und für $dP \times dA(t)$-fast alle $(t, \omega) \in]0, \tau[$ gelte*

$$\Lambda v \Lambda v(t) = \int_{]0,t]} vv^*(u)\, dA(u) + \Lambda v h(t). \tag{5.1}$$

Dann existiert eine Teilmenge $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ mit $P(\tilde{\Omega}) = 1$ und ein H-wertiger adaptierter cadlag-Prozeß, so dass $\tilde{h}(t) = \Lambda v(t)$ für $dP \times dA(t)$-fast alle $(t, \omega) \in]0, \tau[$. Weiterhin gilt für alle $\omega \in \tilde{\Omega}$, $t < \tau(\omega)$ und für alle $v \in V$

$$\Lambda v \tilde{h}(t) = \int_{]0,t]} vv^*(u)\, dA(u) + \Lambda v h(t) \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}^2(t) &= h^2(0) + 2\int_{]0,t]} v(u)v^*(u)\, dA(u) \\ &\quad + 2\int_{]0,t]} \tilde{h}(u-)\, dh(u) - \int_{]0,t]} |\Lambda^{*\,-1} v^*(u)|^2 \Delta A(u)\, dA(u) + [h]_t\,, \end{aligned} \tag{5.3}$$

wobei wir $|\Lambda^{*\,-1} v^*(u)| := \infty$ setzen, falls $v^*(u) \notin \Lambda^* H^*$. Dabei bezeichnet $[h]_t$ die quadratische Variation des Hilbertraum-wertigen Martingals.

Weiterhin zeigen Gyöngy und Krylov die Formel für den folgenden Spezialfall: Sei $V \subset H$ dicht und Λ die Identität auf V. Es existiere eine Konstante K, so dass $\|v\|_H \leq K\|v\|_V$ für alle $v \in V$ gilt. Weiterhin sei H eine dichte Teilmenge des Banachraumes V' und es gelte $|\varphi\psi| \leq |\varphi|_V |\psi|_{V'}$ für alle $\varphi \in V$ und $\psi \in V'$. Der beschränkte lineare Operator $T : V' \to V^*$ sei eindeutig und $v'(t)$ ein V'-wertiger progressiv meßbarer Prozeß, so dass auch $|v'(t)|$ fast sicher lokal integrierbar ist bezüglich $dA(t)$. Dann existiert $\Omega' \subset \Omega$ mit $P(\Omega') = 1$, so dass das Integral $\int_{]o,t]} v'(u)\, dA(u)$ für alle $\omega \in \Omega'$ und alle $t \geq 0$ existiert. Es gilt dann das folgende Theorem:

Theorem 5.2. *Sei $\tilde{h}(t) = \int_{]0,t]} v'(u)\, dA(u) + h(t)$ für $\omega \in \Omega'$ und $\tilde{h}(t) = 0 \in V'$ sonst. Angenommen, es gelte $\tilde{h}(t) = v(t)$ für $dP \times dA(t)$-fast alle (t, ω). Dann existiert ein $\Omega'' \subset \Omega$ mit $P(\Omega'') = 1$, so dass $\chi_{\Omega''}\tilde{h}(t)$ ein H-wertiger cadlag-Prozess ist. Für alle $\omega \in \Omega''$ und $t \geq 0$ gilt dann*

$$\begin{aligned} \tilde{h}^2(t) &= h^2(0) + 2\int_{]0,t]} \tilde{h}(u) v'(u)\, dA(u) \\ &\quad +2\int_{]0,t]} \tilde{h}(u-)\, dh(u) - \int_{]0,t]} |v'(u)|^2 \Delta A(u)\, dA(u) + [h]_t\,, \end{aligned} \tag{5.4}$$

wobei $|v'(u)| := \infty$, falls $v'(u) \notin H$ und $\tilde{h}(u)v'(u) := \infty$ ist, falls $\tilde{h}(u) \notin V$.

5.2 Die Parsevalsche Relation

Sei $\hat{v}(w)$ die Fourier-Transformierte von $v(x)$. Dann gilt im kontinuierlichen Fall

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{v}(s)|^2\, ds \tag{5.5}$$

und im diskreten Fall

$$\|\hat{v}\|_h^2 = \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |\hat{v}(\xi)|^2\, d\xi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m|^2 h = \|v\|_h^2. \tag{5.6}$$

Die beiden Beziehungen (5.5) und (5.6) heißen die Parsevalschen Relationen. Die Beziehung (5.6) kann man mit der Rechnung

$$\begin{aligned} \| \hat{v} \|_h^2 &= \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |\hat{v}(\xi)|^2\, d\xi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \overline{\hat{v}(\xi)} \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-mh\xi} v_m h\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \overline{\hat{v}(\xi)} e^{-mh\xi}\, d\xi\, v_m h \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{\int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \hat{v}(\xi) e^{-mh\xi}\, d\xi}\, v_m h \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{v_m} v_m h = \| v \|_h^2 \end{aligned} \tag{5.7}$$

nachweisen. Für die Beziehung (5.5) sei der Leser auf die entsprechende funktionalanalytische Literatur verwiesen, vgl. z.B. Titchmarsh [62] oder Goldberg [12].

Betrachten wir nun die Laplace-Transformation. Angenommen, $v(t,x)$ sei eine stetige Funktion für $0 \le t < \infty$, $0 \le x \le l$, die der Abschätzung

$$|v(t,x)| \le Ce^{\alpha t} \tag{5.8}$$

genügt. Dann bezeichnet die Funktion

$$\hat{\hat{v}} = \hat{\hat{v}}(s,x) = \int_0^\infty e^{-st} v(t,x)\, dt, \quad 0 \le x \le l, \tag{5.9}$$

für $s = \eta + i\xi$ mit $\eta > \alpha$ die Laplace-Transformierte der Zeit für jedes feste x. Partielle Integration liefert die folgenden Beziehungen für die Laplace-Transformierte

$$\begin{aligned} s\hat{\hat{v}} &= \widehat{\widehat{\frac{\partial v}{\partial t}}} + v(0,x), \\ \hat{\hat{v}}_x &= \frac{\partial \hat{\hat{v}}}{\partial x} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial v(t,x)}{\partial x}\, dt = \widehat{\widehat{\frac{\partial v}{\partial x}}}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Die Parsevalsche Relation für die Fourier-Transformierte liefert die folgende Beziehung für die Norm der Funktion und ihrer Laplace-Transformierten

$$\| v(t,\cdot) \|_\eta^2 = \int_{-\infty}^\infty e^{-2\eta t} |v(t,\cdot)|^2\, dt = \int_{-\infty}^\infty |\hat{\hat{v}}(\eta + i\xi, \cdot)|^2\, d\xi \tag{5.11}$$

für den kontinuierlichen Fall, und im diskreten Fall gilt

$$\| v \|_{\eta,\Delta t}^2 = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2n\eta\Delta t} |v^n|^2 = \int_{-\frac{\pi}{\Delta t}}^{\frac{\pi}{\Delta t}} |\hat{\hat{v}}(\eta + i\xi, \cdot)|^2\, d\xi. \tag{5.12}$$

5.3 Die Davis-Burkholder-Gundy-Ungleichung

Theorem 5.3. Davis-Burkholder-Gundy-Ungleichung
Sei $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$, wobei $\mathcal{M}^{c,loc}$ der Raum der stetigen, lokalen Martingale ist, und sei

$$M_t^* := \max_{0 \le s \le t} |M_s|. \tag{5.13}$$

Dann existieren für jedes $m > 0$ postive Konstanten k_m und K_m, die nur von m abhängen, so dass

$$k_m E\left(\langle M \rangle_T^m\right) \le E\left[(M_T^*)^{2m}\right] \le K_m E\left(\langle M \rangle_T^m\right) \tag{5.14}$$

gilt für jede beliebige Stoppzeit T. Insbesondere kann man z.B.

$$\left.\begin{array}{lll} k_m = (p/e)^p, & K_m = (32/p)^{p/2} & \textit{falls} \;\; 0 < p < 2 \\ k_m = 1, & K_m = 4 & \textit{falls} \;\; p = 2 \\ k_m = (2p)^{-p/2}, & K_m = (\frac{p^{p+1}}{2(p-1)^{p-1}})^{p/2} & \textit{falls} \;\; p > 2 \end{array}\right\} \tag{5.15}$$

wählen, obwohl diese Konstanten nicht optimal sind.

5.4 Das Gronwallsche Lemma

Lemma 5.1. (Gronwall) *Es seien $g(t)$ und $v(t)$ stetige Funktionen über $[0,T]$ und für die Funktion $h(t)$ gelte $0 \leq h(t) \in L^1[0,T]$, sowie in $[0,T]$*

$$v(t) \leq g(t) + \int_0^t h(\tau)v(\tau)\,d\tau. \tag{5.16}$$

Dann ist für $t \in [0,T]$

$$v(t) \leq g(t) + \int_0^t g(\tau)h(\tau)e^{H(t)-H(\tau)}\,d\tau, \tag{5.17}$$

mit $H(t) = \int_0^t h(\tau)\,d\tau$.

Literaturverzeichnis

[1] Blaar, H. und Grecksch, W. *A Parallel Version of a Quasigradient Method in Stochastic Control Theory.* Optimization **49** (2001), 49:95–114.

[2] Brace, A. und Musiela, M. *A Multifactor Gauss Markov Implementation of Heath, Jarrow and Morton.* Mathematical Finance **4** (1994), 4(3):259–283.

[3] Breckner, H. *Galerkin approximation and the strong solution of the Navier-Stokes equation.* J. Appl. Stochastic Anal. **13** (2000), 13(3):239–259.

[4] Buckdahn, R. und Pardoux, E. *Monotonicity methods for white noise driven quasi-linear SPDEs.* Prog. Probab. **22** (1990), 22:219–233.

[5] Cheng, S. *Stochastic analysis method for Hopfs equation* $u_t + uu_x = 0$. Stochastic Anal. Appl. **15** (1997), 15(3):419–430.

[6] Das, P. K. und De, S. S. *A stochastic Model for Host-Vector Epidemic system.* Bull. Cal. Math. Soc. **89** (1997), 89:9–22.

[7] Davie, A. M. und Gaines, J. G. *Convergence of Implicit Schemes for Numerical Solution of Parabolic Stochastic Differential Equations.* Technischer Bericht, Preprint der Universität von Edinburgh, 1995.

[8] Ferrario, B. *Pathwise regularity of nonlinear Itô equatons: Applications to a stochastic Navier-Stokes equation.* Stochastic Anal. Appl. **19** (2001), 19(1):135–150.

[9] Fierro, R. und Torres, S. *The Euler scheme for Hilbert space valued stochastic differential equations.* Stat. Probab. Lett. **51** (2001), 51(3):207–213.

[10] Filipovic, D. *Invariant manifolds for weak solutions to stochastic equations.* Probab. Theory Relat. Fields **118** (2000), 118(3):323–341.

[11] Gikhman, I. und Skorohod, A. *The Theory of Stochastic Processes III.* Springer Verlag, New York, 1979.

[12] Goldberg, R. R. *Fourier transforms.* Cambridge University Press, New York, 1965.

[13] Grecksch, W. und Kloeden, P. E. *Time-Discretised Galerkin Approximations of Parabolic Stochastic PDEes.* Bull. Austral. Math. Soc. **54** (1996), 54:79–85.

[14] Grecksch, W. und Schmalfuß, B. *Approximation of the Stochastic Navier-Stokes Equation.* Comp. Appl. Math. **15** (1996), 15(3):227–239.

[15] Grecksch, W. und Tudor, C. *Stochastic Evolution Equations.* Mathematical Research, Vol. 85. Akademie Verlag, Berlin, 1. edition, 1995.

[16] Grecksch, W. und Tudor, C. *An identification problem for partially observed infinite dimensional linear stochastic systems.* Optimization **43** (1998), 43(3):199–217.

[17] Grecksch, W. und Tudor, C. *Parabolic Regularization of a First Order Stochastic Partial Differential Equation.* Stochastic Analysis and Applications **18** (2000), 18(3):397–416.

[18] Gustaffson, B. *The convergence rate for difference approximations to mixed initial boundary value problems.* Math. Comp. **29** (1975), 29:396–406.

[19] Gustaffson, B. und Kreiss, H.-O. *Difference Approximations of hyperbolic problems with different time scales, I.* SIAM J. Num. Anal. **18** (1983), 18(1):46–58.

[20] Gustaffson, B.; Kreiss, H.-O. und A.Sundström. *Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems. II.* Math. Comp. **26** (1972), 26:649–686.

[21] Gustaffson, B.; Kreiss, H.-O. und Ohliger, J. *Time Dependent Problems and Difference Methods.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.

[22] Gyöngy, I. *On the approximation of stochastic partial differential equations.* Stochastics (1988), (25):59–89.

[23] Gyöngy, I. *On Stochastic Partial Differential Equations. Results on Approximations.* Number. 161 in Lect. Notes Control Inf. Sci. Springer-Verlag, 1992.

[24] Gyöngy, I. und Krylov, N. *On stochastic equations with represent to semimartingales II. Ito formula in Banach spaces.* Stochastics (1982), (6):153–173.

[25] Gyöngy, I. und Krylov, N. *Stochastic partial differential equations with unbounded coefficients and applications. I.* Stochastics Stochastics Rep. **32** (1990), 32(1/2):53–91.

[26] Gyöngy, I. und Krylov, N. *Stochastic partial differential equations with unbounded coefficients and applications. II.* Stochastics Stochastics Rep. **32** (1990), 32(3/4):165–180.

[27] Gyöngy, I. und Krylov, N. *Stochastic partial differential equations with unbounded coefficients and applications. III.* Stochastics Stochastics Rep. **40** (1992), 40(1/2):77–115.

[28] I., M. K. D.; Babuska, M. und Oden, J. T. *Solution of stochastic partial differential equations using Galerkin finite element techniques.* Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **190** (2001), 190(48):6359–6372.

[29] Ikeda, N. und Watanabe, S. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes.* North Holland, Amsterdam, 1981.

[30] Jetschke, G. *Lattice approximation of a nonlinear stochastic partial differential equation with white noise.* International Series of Numerical Mathematics **102** (1991), 102:107–126.

[31] Kallianpur, G. *Stochastic models of environmental pollution.* Adv. Appl. Prob. **26** (1994), 26:377–403.

[32] Kim, J. U. *On a stochastic nonlinear equation in one-dimensional viscoelasticity.* Trans. Am. Math. Soc. **354** (2002), 354(3):1117–1135.

[33] Kloeden, P. E. und Platen, E. *The Numerical Solution of Stochastic Differential Equations.* Springer-Verlag, Berlin, 2. edition, 1995.

[34] Kloeden, P. E. und Shott, S. *Linear-implicit strong schemes for Itô-Galerkin approximations of stochastic PDEs.* J. Appl. Math. Stochastic Anal. **14** (2001), 14(1):47–53.

[35] Kreiss, H.-O. *On Difference Approximations of the Dissipative Type for Hyperbolic Differential Epuations.* Communications on Pure and Applied Math. **17** (1964), 17:335–353.

[36] Kreiss, H.-O. *Stability theory for difference approximations of mixed initial boundary value problems. I.* Math. Comp. **22** (1968), 22:703–714.

[37] Kreiss, H. O. und Busenhart, H. U. *Time-dependent Partial Differential Equations and Their Numerical Solution.* Birkhäuser, 2001.

[38] Kreiss, H.-O. und Lorenz, J. *Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations.* Academic Press, New York, 1989.

[39] Krylov, N. V. und Rozovskij, B. L. *Ob evoljucionnych stochasticeskich uravnenijach.* Itogi nauki i techniki, serija sovremennych problemy mathematiki, TOM 14, Moskva, 1979.

[40] Kunita, H. *First order stochastic partial differential equations.* Stochastic Analysis. Taniguchi Symp. (Kataya 1982), pp. 249–269.

[41] Lisei, H. *A special evolution equation used in the analysis of the Navier-Stokes equation.* Random Oper. Stoch. Equ. **9** (2001), 9(1):29–52.

[42] Manthey, R. und Mittmann, K. *The initial value problem for stochastic reaction-diffusion equations with continuous reaction.* Stochastic Anal. Appl. **15** (1997), 15(4):555–583.

[43] Manthey, R. und Mittmann, K. *On a class of stochastic functional-differential equations arising in population dynamics.* Stochastics Stochastics Rep. **64** (1998), 64(1-2):75–115.

[44] Manthey, R. und Mittmann, K. *On the qualitive behaviour of the solution to a stochastic partial functional-differential equations arising in population dynamics.* Stochastics Stochastics Rep. **66** (1999), 66(1-2):153–166.

[45] Manthey, R. und Zausinger, T. *Stochastic evolution equations in $L_\rho^{2\nu}$.* Stochastics Stochastics Rep. **66** (1999), 66(1-2):37–85.

[46] Mao, X. *Exponential Stability of Stochastic Differential Equations.* Marcel Dekker, Inc., New York, 1994.

[47] Nakonechnyi, A. G.; Levoshich, O. L. und Kordas, V. A. *Source intensity control in transport and diffusion problems.* Cybernetics and Systems Analysis **33** (1997), 33(4):593–596.

[48] Nualart, D. und Pardoux, E. *Boundary value problems for stochastic differential equations.* Ann. Probab. **19** (1991), 19(3):1118–1144.

[49] Nualart, D. und Pardoux, E. *Second order stochastic differential equations with Dirichlet boundary conditions.* Stochastic Processes Appl. **39** (1991), 39(1):1–24.

[50] Oostveen, J. C. und Curtain, R. F. *Riccati equations for strongly stabilizable bounded linear systems.* Automatica **34** (1998), 34(8):953–967.

[51] Oostveen, J. C. und Curtain, R. F. *Robustly stabilizing controllers for dissipative infinite-dimensional systems with collocared actuators and sensors.* Automatica **36** (2000), 36(3):337–348.

[52] Pardoux, E. *Équation aux derivées partielles stochastiques nonlinéaires monotones. Étude de solutions fortes de type Itô.* These doct. sci. math., Paris, 1975.

[53] Pardoux, E. und Tang, S. *Forward-backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic PDEs.* Probab. Theory Relat. Fields **114** (1999), 114(2):123–150.

[54] Prato, G. D. und Tubaro, L. *Fully nonlinear stochastic differential equations.* SIAM J. Math. Anal. **27** (1996), 27(1):40–55.

[55] Prato, G. D. und Zabczyk, J. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions.* Cambridge University Press, Cambridge, 1. edition, 1992.

[56] Richtmyer, R. D. und Morton, K. W. *Difference Methods for Initial-Value Problems.* John Wiley & Sons, New York, 2. edition, 1967.

[57] Schurz, H. *A Brief Introduction To Numerical Analysis of Ordinary Stochastic Differential Equations Without Tears.* IMA Preprint Series 1670, Institute of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis, 12 1999.

[58] Schurz, H. *General Principles For Numerical Approximation of Stochastic Processes On Some Stochastically Weak Banach Spaces.* IMA Preprint Series 1669, Institute of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis, 12 1999.

[59] Strehmel, K. und Weiner, R. *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen.* Teubner Studienbücher, 1995.

[60] Strikwerda, J. C. *Finite Difference Schemes And Partial Differential Equations.* Wadsworth&Brooks/Cole; Mathematics,Series, Pacific Grove, California, First edition, 1989.

[61] Thomas, J. W. *Numerical Partial Differential Equations, Finite Difference Methods, TAM 22.* Springer-Verlag, New York, 1. edition, 1995.

[62] Titshmarsh, E. *Introduction to the theory of Fourier intgerals.* Clarendon Press, Oxford, 1962.

[63] Tubaro, L. *Some result on stochastic partial differential equations by the stochastic characteristics method.* Stoch. Anal. Appl. **6** (1988), 6(2):217–230.

[64] Turo, J. *Existence and uniqueness of solutions to a class of stochastic functional partial differential equations via contractors.* Z. Anal. Anwend. **18** (1999), 18(1):131–141.

[65] Twardowska, K. *An extension of the Wong-Zakai theorem for stochastic evolution equations in Hilbert spaces.* Stoch. Anal. Appl. **10** (1992), 10(4):471–500.

[66] Veque, R. J. L. *Numerical Methods for Conservation Laws.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2. edition, 1992.

[67] Wloka, J. *Partielle Differentialgleichungen.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1982.

6. Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkäre ich, die vorliegende Dissertation selbständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe angefertigt zu haben. Ich habe keine anderen als die im Schriftenverzeichnis angeführten Quellen benutzt und sämtliche Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Schriften entnommen wurden, und alle Angaben, die auf mündlichen Auskünften beruhen, als solche kenntlich gemacht. Ebenfalls sind alle von anderen Personen bereitgestellten Materialien oder erbrachten Dienstleistungen als solche gekennzeichnet.

Halle, den 31.05.2002

7. Lebenslauf

Ich, Christian Roth, wurde am 14. August 1972 in Neunkirchen an der Saar geboren. Meine Mutter, Rosemarie Roth geb. Tussing, die ausgebildete Friseurmeisterin ist, ist nicht mehr in ihrem Beruf tätig. Mein Vater, Erich Roth, ist von Beruf Volljurist und als Beamter des Landes Sachsen-Anhalt beim Regierungspraesidium Dessau beschäftigt. Ich wurde am 1. September 1978 in Neunkirchen in die Bachschule eingeschult, die ich bis 1982 besuchte. Von 1982 bis 1991 besuchte ich das staatliche Gymnasium am Steinwald in Neunkirchen, wo ich im Frühjahr 1991 die Abiturprüfung ablegte. Im Oktober 1991 begann ich ein Mathematikstudium an der Universität des Saarlandes in Saarbrücken, das ich ab Oktober 1997 an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg fortsetzte und das ich im Juli 1999 mit dem Erreichen des Diploms abschloß. Von August 1999 bis April 2002 war ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg beschäftigt. In diesem Zeitraum ist auch die hier vorliegende Dissertation angefertigt worden.

8. Dank

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei all denen bedanken, die mich bei der Erarbeitung dieser Dissertation unterstützt haben. Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr. Wilfried Grecksch, der mir durch seine Anregungen und Ratschläge sehr geholfen hat. Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Kollegen Frau Kristin Winkler, Herrn Dr. Andreas Hamel, Herrn Dr. Frank Heyde und bei Herrn Prof. Dr. Ralf Wunderlich. Natürlich dürfen an dieser Stelle auch meine Eltern nicht unerwähnt bleiben, die mir mein Studium erst ermöglicht haben und die mich stets unterstützt haben.

Dank auch Dir, Silvia.