Programm

des

Realgymnasiums

in

den Franckeschen Stiftungen zu Halle

für

das Schuljahr 1883—1884

vom

Direktor Dr. Schrader,

Inspektor des Realgymnasiums.

I. Teil:

Die Determinanten im Schulunterricht
und ihre Anwendung auf Gegenstände der analytischen Geometrie.
Von Direktor Dr. Schrader.

Halle a. S.,
Druck der Buchdruckerei des Waisenhauses.

1884.

1884. Progr. Nr. 239.

Die Determinanten im Schulunterricht

und ihre Anwendung auf Gegenstände der analytischen Geometrie.

Die große Bedeutung, welche die Determinanten für die höhere Rechnung erlangt haben, legt die Notwendigkeit nahe, die Einführung in die Elemente dieser Rechnung schon in der Schule vorzunehmen, weshalb auch einzelne Staaten diesen Zweig des mathematischen Unterrichts obligatorisch für ihre höheren Schulen gemacht haben. Man kann kaum sagen, daß hierdurch der mathematische Unterricht besonders belastet wird; denn die geringe Zeit, welche ausreichend ist, um die Elemente der Determinantenlehre einzuüben, wird reichlich wieder eingebracht durch den Gewinn, welcher in der erlangten Vereinfachung vieler Rechnungen erzielt wird. Deshalb sollten alle die Schulen, welche die analytische Geometrie in den Kreis ihrer Unterrichtsgegenstände aufgenommen haben, es nicht versäumen, diesem Unterricht die Elemente der Determinantenlehre vorauszuschicken, falls dieselben nicht in dem Vortrage der Analysis Platz gefunden haben. Aber insofern durch die Anwendung der Determinanten auf geometrische Gegenstände in der Rechnung eine Einfachheit gewonnen wird, welche die Klarheit der geometrischen Konstruktion erreicht, wenn nicht zuweilen übertrifft, hat die Determinantenlehre auch an sich hohen didaktischen Wert.

Im Nachfolgenden sollen zunächst in gedrängter Ableitung die Hauptsätze aus den Elementen der Determinantenlehre, so weit sie für den höheren Schulunterricht zweckmäßig und ausreichend sind, zusammengestellt werden, um sodann daran die fruchtbare Anwendung derselben auf Gegenstände der analytischen Geometrie anzuknüpfen.

I. Die Determinanten im Schulunterricht.

1. Eine Determinante n. Grades wird von n^2 Elementen gebildet, die in n Horizontalreihen (Zeilen) und n Vertikalreihen (Spalten) geordnet sind, und man versteht unter der Determinante die algebraische Summe aller Produkte, die man erhält, wenn man aus jeder Horizontalreihe und aus jeder Vertikalreihe je ein Element als Faktor nimmt. Von diesen Produkten erhalten je zwei dann entgegengesetzte Vorzeichen, wenn sie sich nur in der Reihenfolge zweier Indices unterscheiden, wobei dasjenige Produkt, welches aus den Elementen der Hauptdiagonale der quadratisch geordneten Elemente gebildet ist, das positive Vorzeichen enthält.

$$\text{Es ist: } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} a_1 b_2 c_3 d_4 - a_1 b_2 c_4 d_3 - a_1 b_3 c_2 d_4 + a_1 b_3 c_4 d_2 + a_1 b_4 c_2 d_3 - a_1 b_4 c_3 d_2 \\ - a_2 b_1 c_3 d_4 + a_2 b_1 c_4 d_3 + a_2 b_3 c_1 d_4 - a_2 b_3 c_4 d_1 - a_2 b_4 c_1 d_3 + a_2 b_4 c_3 d_1 \\ + a_3 b_1 c_2 d_4 - a_3 b_1 c_4 d_2 - a_3 b_2 c_1 d_4 + a_3 b_2 c_4 d_1 + a_3 b_4 c_1 d_2 - a_3 b_4 c_2 d_1 \\ - a_4 b_1 c_2 d_3 + a_4 b_1 c_3 d_2 + a_4 b_2 c_1 d_3 - a_4 b_2 c_3 d_1 - a_4 b_3 c_1 d_2 + a_4 b_3 c_2 d_1. \end{array} \right.$$

2. Jedes Element besitzt einen Zeilenindex und einen Spaltenindex. Man erhält nun sämtliche Glieder der Determinante, wenn man die eine Art der Indices in der natürlichen Reihenfolge beibehält, dagegen die andere Art permutiert. Deshalb ist die Zahl der Glieder einer Determinante n. Grades gleich n!. Deshalb ist auch das Vorzeichen irgend eines Gliedes der Determinante positiv oder negativ, jenachdem die Reihenfolge der verstellbaren Indices in ihm sich durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Vertauschungen aus der Reihenfolge derselben Indices des ersten Gliedes ableiten läßt.

Das 18. Glied der obigen Entwicklung $-a_3 b_4 c_2 d_1$ hat das Minuszeichen, weil die Stellung seiner Indices 3421 aus der ursprünglichen durch dreimalige Umstellung gefunden wird. Es folgt: 1234, 3214, 3412, 3421.

3. Da die Definition keinen Unterschied zwischen Zeilen und Spalten macht, so bleibt eine Determinante unverändert, wenn man unter Beibehaltung der Reihenfolge die Zeilen in Spalten und die Spalten in Zeilen verwandelt.

Es ist:
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

4. Ebenso folgt unmittelbar aus der Definition, daß abgesehen vom Vorzeichen die Glieder der Determinante dieselben bleiben, wenn man auch die Reihenfolge der Zeilen oder Spalten beliebig verändert. Es bleiben auch die Vorzeichen dieselben, wenn man die veränderte Folge der Zeilen hervorgebracht hat, indem man eine gerade Anzahl mal die Reihen vertauscht hat, dagegen kehren sich alle Vorzeichen und damit auch das Vorzeichen der Determinante um, wenn diese Vertauschungen eine ungerade Anzahl mal stattgefunden haben.

5. Man kann also einer Determinante n. Grades eine 2n!mal veränderte Gestalt geben; von diesen verschiedenen Formen stimmt die Hälfte mit der ursprünglichen Determinante auch im Vorzeichen überein, die andere Hälfte hat das entgegengesetzte Vorzeichen.

6. Im besonderen liegen in dem allgemeinen Satze Nr. 4 folgende Behauptungen: Eine Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man zwei gleichnamige Reihen miteinander vertauscht. Verrückt man eine Reihe parallel um eine gerade oder ungerade Anzahl von Reihen, so bleibt der Wert der Determinante unverändert, oder er verkehrt sein Vorzeichen.

Es ist:
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}.$$

7. Da die Null die einzige Zahl ist, deren Wert sich bei verändertem Vorzeichen nicht ändert, so folgt, daß eine Determinante mit zwei identischen gleichnamigen Reihen den Wert Null hat.

Es ist:
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Denkt man sich in einer Determinante n. Grades in Bezug auf ein bestimmtes Element die diesem Elemente zugehörige Zeile und Spalte fort, so bleibt eine Determinante (n — 1). Grades übrig, die man positiv oder negativ nimmt, je nachdem die Summe der beiden Indices jenes bestimmten Elementes eine gerade oder ungerade Zahl ist. Diese so bestimmte Determinante (n — 1). Grades nennt man die Unterdeterminante jenes Elementes.

In der in Nr. 1 aufgestellten Determinante ist die Unterdeterminante zu b_3:

$$-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix}.$$

9. Jedes einzelne Element einer Determinante n. Grades tritt in $(n-1)!$ Gliedern derselben auf, sondert man dasselbe aus diesen Gliedern aus, so erkennt man, daß es in ihnen mit seiner Unterdeterminante multipliziert ist. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Jede Determinante ist gleich der Summe der Produkte, die man erhält, wenn man die Elemente irgend einer Reihe mit ihren Unterdeterminanten multipliziert. — Es lassen sich bei einer Determinante n. Grades $2n$ solcher Summen bilden, von welchen jede den Wert der Determinante angiebt.

Die in Nr. 1 aufgestellte Determinante löst sich nach den Elementen der dritten Spalte auf in folgende Summe:

$$a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} - d_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}.$$

10. Unmittelbar folgt nun, daß eine Determinante, wenn die Elemente einer Reihe bis auf eins Nullen sind, gleich dem Produkt dieses einzelnen Elementes mit seiner Unterdeterminante ist.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = -c_4 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

11. Umgekehrt kann man jede Determinante in eine andere, um einen Grad höhere Determinante verwandeln, wenn man an beliebiger Stelle eine neue Zeile und eine neue Spalte einführt, an der Kreuzungsstelle beider Reihen eine Eins anbringt, in die übrigen Stellen der einen Reihe Nullen, der anderen Reihe aber willkürliche Zahlen setzt, dem Ganzen aber ein Minuszeichen zufügt, wenn die Indexsumme der beiden neuen Reihen eine ungerade Zahl ist.

Es ist: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ p & q & r & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 \end{vmatrix}$. Für p, q, r können beliebige Zahlenwerte gesetzt werden.

12. Multipliziert man die Unterdeterminanten, welche zu den Elementen einer Reihe gehören, nicht mit diesen Elementen, sondern mit beliebigen anderen Faktoren, so ist die Summe der erhaltenen Produkte einer Determinante gleich, welche man erhält, wenn man in der ursprünglichen Determinante an die Stelle der Elemente, deren Unterdeterminanten genommen waren, entsprechend jene beliebigen Faktoren setzt.

Demnach ist: $p \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} - q \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} + r \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} - s \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & p & a_4 \\ b_1 & b_2 & q & b_4 \\ c_1 & c_2 & r & c_4 \\ d_1 & d_2 & s & d_3 \end{vmatrix}.$

13. Ein besonderer Fall dieses Satzes ist folgender: Multipliziert man die Unterdeterminanten der Elemente einer Reihe mit den gleichnamigen Elementen einer anderen Parallelreihe, so ist die Summe der Produkte gleich Null. — Aus jeder Determinante n. Grades lassen sich also $2n(n-1)$ solcher Summen ableiten, die gleich Null sind.

Demnach ist: $a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} - d_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} = 0.$

14. Weiter folgt aus Nr. 9, daß man den allen Elementen einer Reihe gemeinschaftlichen Faktor aussondern und als Faktor der Determinante schreiben kann, so wie, daß man eine Determinante mit einer Zahl multipliziert oder dividiert, wenn man die Elemente einer Reihe mit dieser Zahl multipliziert oder dividiert.

Es ist: $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ nb_1 & nb_2 & nb_3 & nb_4 \\ mc_1 & mc_2 & mc_3 & mc_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = mn \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}.$$

15. Eine Determinante hat den Wert Null, wenn die Elemente zweier Reihen proportional sind.

Es ist: $$\begin{vmatrix} ma_1 & ma_2 & ma_3 & ma_4 \\ na_1 & na_2 & na_3 & na_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = 0.$$

16. Ebenso folgt aus Nr. 9, dem Prinzip der Auflösung einer Determinante nach den Elementen einer Reihe, daß man zwei Determinanten gleichen Grades, die in allen gleichnamigen Reihen bis auf eine übereinstimmen, algebraisch addieren kann, wenn man diese Addition mit den Elementen der nicht übereinstimmenden Reihen vornimmt, die übrigen Reihen aber unverändert läßt. Umgekehrt kann man eine Determinante, in welcher die Elemente einer Reihe Summen sind, in die Summe von Determinanten auflösen, deren Elemente einfach sind. — Hat man eine Determinante n. Grades, deren Elemente m gliedrige Summen sind, so läßt sich dieselbe auflösen in m^n Determinanten mit einfachen Elementen.

Es ist: $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 + a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 + b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 + c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 + d_5 \end{vmatrix}.$$

17. Addiert man zu den Elementen einer Reihe oder subtrahiert man von ihnen das beliebige Vielfache der entsprechenden Elemente einer anderen Reihe, so bleibt der Wert der Determinante unverändert. Denn löst man nach Nr. 16 diese Determinante wieder auf, so erhält man zunächst die erste wieder und dann eine zweite, welche nach Nr. 15 gleich Null ist.

Mit Hilfe dieses fruchtbaren Satzes kann man zunächst eine gegebene Determinante so umformen, daß die Elemente die möglichst kleinsten Werte erhalten; dann kann man so umformen, daß die Elemente einer Reihe bis auf eins Nullen werden, worauf sich dann der Grad der Determinante um eins erniedrigen läßt.

Es ist: $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 + na_3 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 + nb_3 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 + nc_3 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 + nd_3 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}.$$

18. Haben die aus den Elementen zweier oder mehrerer Reihen in gleicher Weise gebildeten algebraischen Summen einen Faktor gemein, so ist derselbe auch ein Faktor der Determinante.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a + b + c + d)\,(a + b - c - d)\,(a + c - b - d)\,(a + d - b - c).$$

Jeder dieser vier Faktoren läßt sich aus den Elementen jeder Zeile jedesmal in derselben Weise bilden, dann aber ist auch das erste Glied der Determinante gleich dem ersten Gliede des Produkts.

19. Multipliciert man zwei Determinanten gleichen Grades miteinander, so läßt sich das Produkt als eine Determinante desselben Grades darstellen, in welcher das k. Element der l. Reihe die Summe der

Produkte aus den Elementen der k. Reihe der einen mit den Elementen der l. Reihe der anderen Determinante ist. Da man zu diesen Reihen beliebig die Zeilen oder Spalten nehmen kann, so kann man die Produktdeterminante in vier verschiedenen Formen schreiben. — In der Produktdeterminante ist jedes Element eine Summe von n Gliedern, wenn die beiden multiplizierten Determinanten n. Grades waren. Löst man diese Determinante nach Nr. 16 auf, so erhält man n^n einfache Determinanten. Von diesen verschwinden nach Nr. 15 alle diejenigen, in welchen man aus den Summen der Elemente wenigstens zwei gleichnamige Summanden zusammengestellt hatte, und es bleiben nur diejenigen übrig, in denen nur ungleichnamige Summanden zusammentreten. Ihre Anzahl ist nur n!. Jede Zeile oder Spalte dieser Determinanten hat einen Faktor gemein; sondert man nun aus jeder der n! Determinanten diese n Faktoren aus, so bleibt überall dieselbe Determinante, nämlich eine der beiden ursprünglichen Determinanten übrig, die ausgesonderten n! Produkte aber schließen sich abermals zu einer Determinante, nämlich zu der zweiten der gegebenen Determinanten, zusammen. Die aufgelöste Determinante war also das Produkt der beiden gegebenen.

Es ist: $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 & a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 & a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 & b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3 \\ c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 & c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 & c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

20. Ersetzt man in einer Determinante jedes Element durch seine Unterdeterminante, so heißt die neue Determinante die *konjugierte* der gegebenen.

21. Der Wert der *konjugierten* Determinante einer Determinante n. Grades ist die (n—1). Potenz der letzteren. — Man beweist diesen Satz, indem man zeigt, daß das Produkt der Determinanten mit ihrer konjugierten gleich der n. Potenz der ersteren ist. Führt man diese Multiplikation nach Nr. 19 aus, so erhält man eine Determinante, in welcher alle Elemente ngliederige Summen sind. Jede Summe, die in der Hauptdiagonale steht, hat nach Nr. 9 den Wert der gegebenen Determinante, jede andere Summe ist nach Nr. 13 gleich Null. Deshalb reduziert sich der Wert des Ganzen auf das Produkt der in der Hauptdiagonale stehenden Zahlen, also auf die n. Potenz des Wertes der gegebenen Determinante.

Bezeichnet man die zu den Elementen der in Nr. 1 aufgestellten Determinante zugehörigen Unterdeterminanten mit den entsprechenden großen Buchstaben, so ist:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}^3.$$

22. Die Hauptanwendung der Determinantenlehre in der Arithmetik erstreckt sich auf die Auflösung algebraischer Gleichungen ersten Grades. Hat man n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten, so lassen sich dieselben stets so schreiben, daß die übereinstimmend geordneten unbekannten Glieder auf der einen Seite, die bekannten absoluten Glieder allein auf der anderen Seite stehen. Dann lassen sich die geordneten Koeffizienten der n Unbekannten als die Elemente einer Determinante n. Grades ansehen, so daß in jeder Spalte die Koeffizienten derselben Unbekannten stehen. Multipliziert man nun jede Gleichung mit der Unterdeterminante, die zu dem in ihr vorkommenden Koeffizienten einer gewissen, zu bestimmenden Unbekannten gehört, und addiert alle Produkte, so fallen nach Nr. 13 (n—1) Summen und damit (n—1) Unbekannte weg, und es bleibt bloß das Produkt der einen Unbekannten mit der Determinante aller Koeffizienten übrig, und die Summe der Produkte auf der anderen Seite läßt sich nach Nr. 12 ebenfalls als Determinante schreiben. Das Resultat kann man aber in folgender Weise ausdrücken:

Hat man n Gleichungen mit n Unbekannten, welche in der angegebenen Weise geordnet sind, so ist jede dieser Unbekannten gleich einem Quotienten; der Divisor desselben ist die Determinante aus allen

Koeffizienten der Unbekannten, der Dividendus aber wird aus der Divisor-Determinante abgeleitet, indem man an die Stelle der Koeffizienten der zu bestimmenden Unbekannten die entsprechenden absoluten Werte substituiert.

Sind folgende vier algebraische Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 &= a_5 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 &= b_5 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 &= c_5 \\ d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 + d_4 x_4 &= d_5 \, , \end{aligned}$$

so geben diese Gleichungen sofort ohne weitere Zwischenrechnung die Lösung:

$$x_1 = \begin{vmatrix} a_5 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_5 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_5 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_5 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} ,$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_5 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_5 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_5 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_5 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} , \text{ u. s. f.}$$

23. Ganz gleichbedeutend mit Nr. 22 ist folgendes Eliminationsverfahren:

Hat man n auf Null gebrachte und geordnete Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten, und will man $(n-1)$ derselben eliminieren, so ist das Resultat eine gleich Null gesetzte Determinante, in welcher $(n-1)$ Spalten durch die Koeffizienten der eliminierten Unbekannten, die n. Spalte aber durch die beiden übrigen Glieder der n Gleichungen gebildet werden. Da der Wert der Determinante Null ist, so kommt es auf die Reihenfolge der Spalten nicht an.

Will man aus den in Nr. 22 aufgestellten vier algebraischen Gleichungen die drei Unbekannten x_1, x_3, x_4 eliminieren, so ist das Ergebnis der Elimination:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 x_2 - a_5 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 x_2 - b_5 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 x_2 - c_5 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 x_2 - d_5 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

24. Wir schließen hier mit einem speziellen Satze, der zwar noch eine reiche Verallgemeinerung zuläßt, den wir aber für das Folgende nur in dieser Beschränkung gebrauchen werden. — Bildet man aus den Elementen einer Determinante dritten Grades eine Determinante zweiten Grades, deren Elemente die Unterdeterminanten zu den Eckelementen jener ersten Determinante sind, so ist die letzte gleich der ersten multipliziert mit ihrem mittelsten Elemente. — Löst man die zusammengesetzte Determinante auf, so erhält man acht Glieder, von welchen sich zwei wegheben, die übrigen haben jenes mittelste Element zum gemeinschaftlichen Faktor, nach dessen Aussonderung die ursprüngliche Determinante übrigbleibt.

Es ist:
$$\begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Es braucht wohl nicht versichert zu werden, daß die hier aufgestellten Sätze nicht sofort in dieser Allgemeinheit an die Schüler gebracht werden, sondern daß die in ihnen zum Ausdruck gebrachten Thatsachen zuerst an einfachen Beispielen zur Anschauung und Erkenntnis gebracht werden, bis sich die allgemeine Fassung ergiebt. Dennoch ist der Gegenstand einfach und in seiner Folgerichtigkeit so leicht eingehend, daß man den oben gegebenen Abriß der Elemente in einer Prima eines Realgymnasiums in etwa 6 Unterrichtsstunden bis zu ausreichender Fertigkeit absolvieren kann.

II. Anwendung der Determinanten auf Gegenstände der analytischen Geometrie.

1. Wir wollen unter dem Punkt (k) denjenigen Punkt verstehen, dessen — meist rechtwinklig zu denkende — Koordinaten x_k und y_k sind. Der doppelte Inhalt (2 J) des Dreiecks, dessen Ecken die drei Punkte (1) (2) (3) sind, läßt sich in Determinantenform schreiben:

$$2J = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{vmatrix}.$$

2. Der Inhalt des Vierecks, dessen Ecken die Punkte (1) bis (4) sind, bestimmt sich durch die Addition der Inhaltswerte der beiden Dreiecke (1) (2) (3) und (1) (3) (4). Es ist:

$$2J = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 \\ x_4 & y_4 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Liegt der veränderliche Punkt $x\,y$ in gerader Linie mit den beiden festen Punkten (1) (2), so ist der Inhalt des durch diese Punkte bestimmten Dreiecks gleich Null, und wir erhalten aus Nr. 1 sofort die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ als Gleichung der gedachten Geraden.}$$

Aber auch abgesehen von dieser Ableitung erkennt man unmittelbar aus dieser Gleichung ihre Bedeutung. Sie ist nach x und y vom ersten Grade, bezeichnet also eine gerade Linie; diese geht durch die Punkte (1) und (2), weil die Gleichung nach I 7 erfüllt wird, wenn $x\,y$ in $x_1\,y_1$ oder in $x_2\,y_2$ übergehen.

4. Diese Schlußweise eröffnet eine weite Perspektive. Kennt man die allgemeine Gestalt der Gleichung einer Linie und ist eine ausreichende Anzahl von Punkten gegeben, durch welche die Linie gehen soll, so kann man sofort die Gleichung der Linie in Determinantenform schreiben. Die Glieder der in ihrer allgemeinen Gestalt bekannten Gleichung bilden ohne die zur Zeit unbekannten Koeffizienten die Elemente der ersten Zeile. Ist m die Anzahl dieser Elemente, so besitzt die Gleichung (m — 1) selbständige Koeffizienten, und es sind ebenso viele Punkte nötig, um die Lage der Linie zu bestimmen. Setzt man die Koordinaten dieser Punkte an die Stelle der veränderlichen Koordinaten der ersten Zeile, so erhält man die übrigen (m — 1) Zeilen, welche mit der ersten Zeile eine Determinante des m. Grades bilden, welche gleich Null gesetzt die Gleichung der Linie giebt. So hat z. B. die Gleichung 2. Grades in x und y sechs Glieder mit 5 unabhängigen Koeffizienten; es genügen also 5 Punkte, durch welche der Kegelschnitt gehen soll, zu seiner Bestimmung. Die Koordinaten dieser fünf Punkte lassen sofort eine Determinante 6. Grades entstehen, welche die Gleichung des Kegelschnitts liefert. Die Koeffizienten der einzelnen Gleichungsglieder erscheinen als die Unterdeterminanten, welche zu den Elementen der ersten Zeile gehören. Kennt man nun die geometrische Bedeutung dieser Koeffizienten, so lassen sich manche Eigentümlichkeiten der Kurve unmittelbar aus der Determinantengleichung ablesen. Beispiele werden folgen. Vergl. Nr. 16, 19, 21, 24.

5. Unter der Geraden (k) wollen wir diejenige Gerade verstehen, welche durch die Gleichung $A_k x + B_k y + C_k = 0$ dargestellt wird. Bezeichnet man die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden

(1) und (2) mit x_0 und y_0, so findet man die Werte derselben durch algebraische Auflösung der beiden Gleichungen für (1) und (2) und man erhält sofort nach I 22:

$$x_0 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad y_0 = - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

6. Will man den Inhalt (J) des Dreiecks finden, welches von den drei Geraden (1) (2) (3) eingeschlossen wird, so bestimme man nach Nr. 5 die Koordinaten der drei Schnittpunkte und setze ihre Werte in den Wert der Nr. 1 ein. Man findet nach einer nahe liegenden Umformung zunächst:

$$2\,J = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} B_2 & C_2 \\ B_3 & C_3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} B_3 & C_3 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} A_3 & C_3 \\ A_1 & C_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}.$$

Nun ist offenbar nach I 20 die zusammengesetzte Determinante des Dividendus die konjugierte Determinante zu:

$$\begin{vmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

ist also nach I 21 gleich dem Quadrat derselben; da aber hier die erste Zeile nach I 6 an die dritte Stelle gesetzt werden kann, so folgt:

$$2\,J = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}^2 : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}.$$

Schneiden sich die drei Geraden in einem Punkte, so verschwindet der Inhalt des von ihnen begrenzten Dreiecks, und man erhält als Bedingsgleichung

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieselbe Gleichung erhält man unmittelbar, wenn man aus den drei Gleichungen für die Geraden die jetzt übereinstimmenden Werte für x und y nach I 23 eliminiert.

7. Die Gleichung einer der Winkelhalbierenden, welche die von den Geraden (1) und (2) gebildeten Winkel halbieren, ist:

$$\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2}}} = \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2}}} \text{ oder:}$$

$$x \begin{vmatrix} A_1 & \sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2}} \\ A_2 & \sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2}} \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} B_1 & \sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2}} \\ B_2 & \sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_1 & \sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2}} \\ C_2 & \sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2}} \end{vmatrix} = 0.$$

Bestimmt man ebenso die Gleichung einer Winkelhalbierenden der Geraden (2) und (3) und bestimmt durch algebraische Auflösung beider Gleichungen die Koordinaten $x_0\,y_0$ des Schnittpunktes derselben, so erhält man zunächst für x_0 nach I 22 einen Quotienten zweier Determinanten zweiten Grades, deren Elemente wiederum Determinanten zweiten Grades sind; beide lassen sich aber nach I 24 in Determinanten dritten Grades mit einfachen Elementen verwandeln. Man erhält:

$$x_0 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 & \sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2}} \\ B_2 & C_2 & \sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2}} \\ B_3 & C_3 & \sqrt{A_3^{\,2} + B_3^{\,2}} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2}} \\ A_2 & B_2 & \sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2}} \\ A_3 & B_3 & \sqrt{A_3^{\,2} + B_3^{\,2}} \end{vmatrix}$$

Den Wert für y_0 findet man ohne besondere Rechnung einfach durch Vertauschung der A-Werte mit den B-Werten. Es folgt:

$$y_0 = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 & \sqrt{A_1^2+B_1^2} \\ A_2 & C_2 & \sqrt{A_1^2+B_2^2} \\ A_3 & C_3 & \sqrt{A_3^2+B_3^2} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \sqrt{A_1^2+B_1^2} \\ A_2 & B_2 & \sqrt{A_2^2+B_2^2} \\ A_3 & B_3 & \sqrt{A_3^2+B_3^2} \end{vmatrix}.$$

Die Symmetrie dieser Ausdrücke zeigt, daß durch diesen Schnittpunkt auch die eine der Halbierenden des dritten Winkels der drei Geraden gehen muß.

8. Will man den Radius r des Berührungskreises finden, der den Punkt $x_0\, y_0$ zum Mittelpunkt hat, so findet man bekanntlich:

$$r = \frac{A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}.$$

Setzt man hier für x_0 und y_0 die oben gefundenen Werte, bringt das C-Glied auf denselben Nenner, den die beiden vorhergehenden Glieder haben, so nimmt der Dividendus nach I 12 folgende Gestalt an:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & 0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & \sqrt{A_1^2+B_1^2} \\ A_2 & B_2 & C_2 & \sqrt{A_2^2+B_2^2} \\ A_3 & B_3 & C_3 & \sqrt{A_3^2+B_3^2} \end{vmatrix}.$$

Denken wir an die Stelle 0 der ersten Zeile das Element $\sqrt{A_1^2+B_1^2}$ eingesetzt, so hätte die Determinante nach I 7 den Wert Null, woraus folgt, daß sie in der vorliegenden Gestalt den Wert

$$\sqrt{A_1^2+B_1^2}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

hat. Dasselbe Resultat ergiebt sich auch, wenn man nach I 17 die Elemente der ersten Zeile von denen der zweiten abzieht und dann nach I 10 verfährt. — Es folgt also:

$$r = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \sqrt{A_1^2+B_1^2} \\ A_2 & B_2 & \sqrt{A_2^2+B_2^2} \\ A_3 & B_3 & \sqrt{A_3^2+B_3^2} \end{vmatrix}$$

Nun giebt es für die Winkelhalbierenden eines Dreiecks vier Punkte, in denen sich je drei Winkelhalbierende schneiden, und ebenso vier Berührungskreise. Man findet für die drei übrigen Fälle die entsprechenden Werte, wenn man in den oben aufgestellten Ausdrücken je eine der drei Quadratwurzeln mit dem negativen Vorzeichen nimmt.

9. In dem Dreieck, dessen Ecken die drei Punkte (1) (2) (3) sind, ist die Gleichung für das von der Ecke (1) ausgehende Höhenperpendikel

$$x(x_2-x_3) + y(y_2-y_3) - x_1(x_2-x_3) - y_1(y_2-y_3) = 0.$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung und aus der ähnlichen für das von der Ecke (2) ausgehende Lot nach I 22 durch algebraische Auflösung die Koordinaten $(x_0\, y_0)$ des Schnittpunktes, so erhält man zunächst:

$$x_0 = -\begin{vmatrix} y_2-y_3 & x_1(x_2-x_3)+y_1(y_2-y_3) \\ y_3-y_1 & x_2(x_3-x_1)+y_2(y_3-y_1) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_2-x_3 & y_2-y_3 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$$

Formt man diese Determinanten nach I 11, 17, 14, 6 um, so nimmt zunächst die Determinante des Dividendus folgende Formen an:

$$\begin{vmatrix} y_3 & -x_1x_2-y_1y_2 & 1 \\ y_2-y_3 & x_1(x_2-x_3)+y_1(y_2-y_3) & 0 \\ y_3-y_1 & x_2(x_3-x_1)+y_2(y_3-y_1) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_3 & -x_1x_2-y_1y_2 & 1 \\ y_2 & -x_1x_3-y_1y_3 & 1 \\ -y_1 & x_2x_3+y_2y_3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_3 & x_1x_2+y_1y_2 & 1 \\ y_2 & x_1x_3+y_1y_3 & 1 \\ y_1 & x_2x_3+y_2y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & x_2x_3+y_2y_3 & 1 \\ y_2 & x_1x_3+y_1y_3 & 1 \\ y_3 & x_1x_2+y_1y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ebenso folgt für die Determinante des Divisors

$$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ -x_1 & -y_1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Deshalb ist:

$$x_0 = \begin{vmatrix} y_1 & x_2x_3+y_2y_3 & 1 \\ y_2 & x_1x_3+y_1y_3 & 1 \\ y_3 & x_1x_2+y_1y_2 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Durch Vertauschung der Buchstaben findet man:

$$y_0 = -\begin{vmatrix} x_1 & x_2x_3+y_2y_3 & 1 \\ x_2 & x_1x_3+y_1y_3 & 1 \\ x_4 & x_1x_2+y_1y_2 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Die Symmetrie dieser Ausdrücke zeigt, daß auch die dritte Dreieckshöhe durch denselben Punkt geht.

10. Behandelt man zwei Mittelsenkrechte dieses Dreiecks, so erhält man in ähnlicher Weise für die Koordinaten $x_0\, y_0$ ihres Schnittpunktes die Werte:

$$x_0 = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad y_0 = -\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

11. Ebenso erhalten wir für den Durchschnittspunkt der Mittellinien des Dreiecks:

$$x_0 = -\tfrac{1}{3}\begin{vmatrix} x_1-x_2 & x_1y_2-x_2y_1 & 1 \\ x_2-x_3 & x_2y_3-x_3y_2 & 1 \\ x_3-x_1 & x_3y_1-x_1y_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad y_0 = -\tfrac{1}{3}\begin{vmatrix} y_1-y_2 & x_1y_2-x_2y_1 & 1 \\ y_2-y_3 & x_2y_3-x_3y_2 & 1 \\ y_3-y_1 & x_3y_1-x_1y_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Nun ist aber $x_0 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ und $y_0 = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$; es müssen sich also die eben gefundenen Werte noch weiter umformen lassen. Die Determinante im Dividendus für x_0 nimmt nun nach I 16, 6, 16 nach und nach folgende Formen an:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1y_2-x_2y_1 & 1 \\ x_2 & x_2y_3-x_3y_2 & 1 \\ x_3 & x_3y_1-x_1y_3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & x_1y_2-x_2y_1 & 1 \\ x_3 & x_2y_3-x_3y_2 & 1 \\ x_1 & x_3y_1-x_1y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_1y_2-x_2y_1 & 1 \\ x_2 & x_2y_3-x_3y_2 & 1 \\ x_3 & x_3y_1-x_1y_3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3y_1-x_1y_3 \\ x_2 & x_1y_2-x_2y_1 \\ x_3 & x_2y_3-x_3y_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1(y_2+y_3)-y_1(x_2+x_3) & 1 \\ x_2 & x_2(y_3+y_1)-y_2(x_3+x_1) & 1 \\ x_3 & x_3(y_1+y_2)-y_3(y_1+y_2) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_1(y_1+y_2+y_3)-y_1(x_1+x_2+x_3) & 1 \\ x_2 & x_2(y_1+y_2+y_3)-y_2(x_1+x_2+x_3) & 1 \\ x_3 & x_2(y_1+y_2+y_3)-y_3(x_1+x_2+x_3) & 1 \end{vmatrix} = -(x_1+x_2+x_3)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Daraus ergiebt sich für x_0 der erwartete Wert. Ebenso ist der Ausdruck für y_0 zu behandeln.

12. Unter dem Kreis (a, b, r) wollen wir den Kreis verstehen, dessen Mittelpunkt die Koordinaten a, b hat und dessen Radius r ist, zugleich setzen wir $a^2 + b^2 - r^2 = c$. Die allgemeine Gleichung des Kreises ist nun: $\quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$

So oft nun eine Bestimmung eines Kreises auf eine Gleichung führt, in welcher die Koeffizienten a, b, c im ersten Grade vorkommen, so oft läßt sich diese Gleichung zur Determinantenbildung benutzen. Das ist zunächst der Fall, wenn der Kreis durch einen gegebenen Punkt gehen soll. Sind $x_1\, y_1$ die Koordinaten dieses Punktes, so hat man die Gleichung

$$x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 - 2by_1 + c = 0,$$

in welcher a, b und c nur im ersten Grade vorkommen.

Soll ferner der gesuchte Kreis den gegebenen Kreis $(a_1\, b_1\, r_1)$ rechtwinklig schneiden, so ist die Zentrale beider Kreise die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die beiden Radien sind. Es ist also $\quad (a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 = r^2 + r_1^2$ oder

$$a_1^2 + b_1^2 - r_1^2 - 2aa_1 - 2bb_1 + c = 0, \text{ denn es ist } a^2 + b^2 - r^2 = c.$$

Diese Gleichung enthält die Koeffizienten a, b, c nur im ersten Grade.

Soll der gesuchte Kreis den gegebenen Kreis $(a_1\, b_1\, r_1)$ halbierend schneiden, so ist der Radius des ersten Kreises die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem die Zentrale beider Kreise und der Radius des zweiten Katheten sind. Es ist alsdann:

$$(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 + r_1{}^2 = r^2 \quad \text{oder}$$
$$a_1{}^2 + b_1{}^2 + r_1{}^2 - 2\,a\,a_1 - 2\,b\,b_1 + c = 0.$$

Soll der Mittelpunkt des gesuchten Kreises auf der Geraden

$$A\,x + B\,y + C = 0$$

liegen, so ist $\quad A\,a + B\,b + C = 0,$

wofür man auch die Form $\quad -2\,C - 2\,a\,A - 2\,b\,B = 0\;$ wählen kann.

Ein Kreis ist durch drei Bestimmungsstücke bestimmt. Werden diese in der oben bezeichneten Art gewählt, so läßt sich die Aufgabe so lösen, daß sich die Gleichung des gesuchten Kreises sofort ohne weitere Rechnung niederschreiben läßt. Von den vier oben angegebenen Bestimmungsarten kann jede der drei ersten ein bis dreimal gewählt werden, die vierte aber nur ein oder zwei mal, da der Kreismittelpunkt nicht zugleich auf drei beliebigen Geraden liegen kann. Hieraus ergeben sich 19 verschiedene Aufgaben, die in der angegebenen Art behandelt werden können. Es möge hier nur eine derselben herausgehoben werden.

Soll ein Kreis bestimmt werden, der durch den Punkt (1) geht, den Kreis $(a_1\, b_1\, r_1)$ rechtwinklig und einen zweiten Kreis $(a_2\, b_2\, r_2)$ halbierend schneidet, so ergiebt sich als Gleichung des Kreises:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1{}^2 + y_1{}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ a_1{}^2 + b_1{}^2 - r_1{}^2 & a_1 & b_1 & 1 \\ a_2{}^2 + b_2{}^2 + r_2{}^2 & a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Will man für diesen Kreis die Lage des Mittelpunktes d. h. die Koordinaten a, b seines Mittelpunktes finden, so findet man aus dieser Determinante sofort:

$$a = \begin{vmatrix} x_1{}^2 + y_1{}^2 & y_1 & 1 \\ a_1{}^2 + b_1{}^2 - r_1{}^2 & b_1 & 1 \\ a_2{}^2 + b_2{}^2 + r_2{}^2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} : 2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{und}$$

$$b = -\begin{vmatrix} x_1{}^2 + y_1{}^2 & x_1 & 1 \\ a_1{}^2 + b_1{}^2 - r_1{}^2 & a_1 & 1 \\ a_2{}^2 + b_2{}^2 + r_2{}^2 & a_2 & 1 \end{vmatrix} : 2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Da man ebenfalls c angeben kann, es ist:

$$c = -\begin{vmatrix} x_1{}^2 + y_1{}^2 & x_1 & y_1 \\ a_1{}^2 + b_1{}^2 - r_1{}^2 & a_1 & b_1 \\ a_2{}^2 + b_2{}^2 + r_2{}^2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix},$$

so findet man auch den Radius aus: $r^2 = a^2 + b^2 - c.$

13. Ist $x_1\, y_1$ ein Punkt auf der Peripherie des Kreises

$$x^2 + y^2 - 2\,a\,x - 2\,b\,y + c = 0,$$

so ist die Gleichung für die Tangente dieses Punktes:

$$x_1\, x + y_1\, y - a\,(x + x_1) - b\,(y + y_1) + c = 0 \quad \text{oder}$$
$$x\,(x_1 - a) + y\,(y_1 - b) - a\,x_1 - b\,y_1 + c = 0.$$

Ist nun die Tangente gegeben durch die Gleichung:

$$A\,(x - x_1) + B\,(y - y_1) = 0,$$

welcher Gleichung auch die Form: $\;A\,x + B\,y - A\,x_1 - B\,y_1 = 0,$

gegeben werden kann, so folgt aus der Identifizierung beider Gleichungen die Doppelgleichung:

$$\frac{x_1 - a}{A} = \frac{y_1 - b}{B} = \frac{a\,x_1 + b\,y_1 - c}{A\,x_1 + B\,y_1}.$$

Je nachdem man den ersten dieser drei Quotienten gleich dem zweiten oder gleich dem dritten oder den zweiten gleich dem dritten setzt, so folgen folgende drei geordnete Gleichungen:

$$x_1 B - y_1 A - aB + bA = 0$$
$$x_1 (Ax_1 + By_1) - a(2Ax_1 + By_1) - Aby_1 + Ac = 0$$
$$y_1 (Ax_1 + By_1) - aBx_1 - b(Ax_1 + 2By_1) + Bc = 0.$$

Nimmt man dazu noch die Gleichung für den Punkt $x_1 y_1$:

$$x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 - 2by_1 + c = 0,$$

so hat man für die angegebene Bestimmung des Kreises vier Gleichungen, von denen allerdings nur zwei von einander unabhängig sind. Zwei beliebige von ihnen kann man zur Determinantenbildung benutzen; man wird am besten dazu die beiden einfachsten, also die erste und vierte benutzen.

Soll man die Gleichung eines Kreises angeben, welcher die Gerade

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

in dem Punkte $x_1 y_1$ berührt und dessen Mittelpunkt auf der Geraden

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

liegt, so erhält man dafür nach dem vorigen sofort die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ 2(x_1 B - y_1 A) & B & -A & 0 \\ -2C_1 & A_1 & B_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

14. Ist von den drei Koeffizientenwerten der allgemeinen Gleichung einer bereits in der Aufgabe gegeben und sind die beiden anderen Bestimmungen zur Determinantenbildung brauchbar, so erhält man für die Gleichung des Kreises eine Determinante dritten Grades.

So ist die Gleichung eines Kreises, für welchen der Anfangspunkt der Koordinaten die Potenz c hat, und welcher durch die Punkte (1) und (2) geht, folgende:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + c & x & y \\ x_1^2 + y_1^2 + c & x_1 & x_1 \\ x_2^2 + y_2^2 + c & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ebenso findet man als Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt die Abscisse a hat und der die beiden Kreise $(a_1 b_1 r_1)$ und $(a_2 b_2 r_2)$ rechtwinklig schneidet:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 - 2ax & y & 1 \\ a_1^2 + b_1^2 - r_1^2 - 2aa_1 & b_1 & 1 \\ a_2^2 + b_1^2 - r_2^2 - 2aa_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

15. Bestimmungsstücke des Kreises, welche auf eine Gleichung zwischen a, b und c führen, die nicht vom ersten Grade ist, schließen die Determinantenbildung aus. Soll der Kreis z. B. die Gerade $Ax + By + C = 0$ berühren, so ist zunächst:

$$r = \frac{Aa + Bb + c^2}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ oder}$$

$$a^2B^2 - 2ab\,AB + b^2A^2 - 2a\,AC - 2b\,BC - (A^2 + B^2)c - C^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist aber nach a, b und c nicht vom ersten Grade.

Soll der Kreis $(a_1 b_1 r_1)$ berührt werden, so ist

$$(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 = (r \pm r_1)^2 \text{ oder}$$

$$a_1^2 + b_1^2 - r_1^2 - 2aa_1 - 2bb_1 + c = \pm 2r_1 \sqrt{a^2 + b^2 - c},$$

eine Gleichung, welche ebenfalls zur Determinantenbildung nicht zu verwenden ist.

16. Die Gleichung einer Parabel, deren Achse mit der Abscissenachse parallel läuft, hat die Form:
$$y^2 - 2dx - 2ey + f = 0.$$
Giebt man dieser Gleichung die Form:
$$(y-e)^2 = 2d\left(x - \frac{f-e^2}{2d}\right),$$
so sieht man, daß der Scheitel der Parabel die Koordinaten $\frac{f-e^2}{2d}$ und e hat, und daß der Parameter $2d$ ist.

Eine solche Parabel ist durch drei Peripheriepunkte bestimmt. Sind dieselben in den Punkten (1) (2) (3) gegeben, so ist die Gleichung der Parabel:
$$\begin{vmatrix} y^2 & x & y & 1 \\ y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$
Der Parameter der Parabel ist also nach oben:
$$2d = \begin{vmatrix} y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & y_2 & 1 \\ y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$
Die Ordinate des Scheitels ist:
$$e = -\begin{vmatrix} y_1^2 & x_1 & 1 \\ y_2^2 & x_2 & 1 \\ y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} : 2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$
Die Abscisse des Scheitels findet man nach dem Ausdruck $\frac{f-e^2}{2d}$, wenn man
$$f = -\begin{vmatrix} y_1^2 & x_1 & y_1 \\ y_2^2 & x_2 & y_2 \\ y_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$
setzt.

17. Liegt der Punkt (1) auf der oben angegebenen Parabel, so ist die Gleichung seiner Tangente:
$$y_1 y - d(x + x_1) - e(y + y_1) + f = 0$$
oder
$$xd + y(e - y_1) + dx_1 + ey_1 - f = 0.$$
Ist diese Tangente durch die Gleichung
$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$
gegeben, so findet man analog dem Verfahren in Nr. 13:
$$\frac{d}{A} = \frac{e - y_1}{B} \text{ oder}$$
$$Ay_1 + Bd - Ae = 0.$$
Hiernach läßt sich sofort die Gleichung einer Parabel niederschreiben, deren Achse mit der Abscissenachse parallel läuft, und welche die Gerade $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ in dem Punkte $x_1\, y_1$ berührt und durch den Punkt $x_2\, y_2$ geht. Dieselbe ist:
$$\begin{vmatrix} y^2 & x & y & 1 \\ y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ 2Ay_1 & -B & A & 0 \\ y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

18. Denkt man sich außer der oben in Nr. 16 gedachten Parabel noch eine zweite durch dieselben drei Punkte gelegt, deren Achse aber mit der Ordinatenachse parallel läuft, so ist die Gleichung derselben:

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ x_1{}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2{}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3{}^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Beide Parabeln schneiden sich noch in einem vierten Punkte. Daß dieser vierte Punkt mit den drei gegebenen auf einer Kreisperipherie liegt, folgt sofort, wenn man die Gleichungen beider Parabeln addiert. Man erhält nämlich nach I 16:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1{}^2 + y_1{}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2{}^2 + y_2{}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3{}^2 + y_3{}^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist aber nach Nr. 12 die Gleichung eines Kreises. Deshalb schneiden sich zwei Parabeln, deren Achsen auf einander senkrecht stehen, in vier Punkten eines Kreises.

Die Koordinaten des vierten Schnittpunktes lassen sich aus den Koordinaten der drei gegebenen Punkte leicht ableiten. Löst man die beiden Parabelgleichungen nach I 9 in Bezug auf die Elemente der ersten Zeilen auf, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$A y^2 + B x + C y + D = 0 \text{ und}$$
$$A x^2 + B' x + C' y + D' = 0,$$

in welchen die sieben Koeffizienten die leicht abzulesenden Unterdeterminanten der entsprechenden Elemente sind. Eliminiert man hieraus y, so erhält man für x eine Gleichung vierten Grades, von welcher nur die ersten zwei Glieder gebraucht werden; es ist:

$$x^4 + \frac{2B'}{A} x^3 + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot = 0.$$

Die vier Werte von x sind die Abscissen der vier Schnittpunkte, von denen drei Werte schon bekannt sind. Ihre negativ genommene Summe ist gleich $\frac{2B'}{A}$; da nun

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ und } B' = - \begin{vmatrix} x_1{}^2 & y_1 & 1 \\ x_2{}^2 & y_2 & 1 \\ x_3{}^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

so folgt für den vierten Schnittpunkt:

$$x_4 = 2 \begin{vmatrix} x_1{}^2 & y_1 & 1 \\ x_2{}^2 & y_2 & 1 \\ x_3{}^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - (x_1 + x_2 + x_3) = \begin{vmatrix} x_1(x_1 - x_2 - x_3) & y_1 & 1 \\ x_2(x_2 - x_1 - x_3) & y_2 & 1 \\ x_3(x_3 - x_1 - x_2) & y_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ebenso findet man:

$$y_4 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1(y_1 - y_2 - y_3) & 1 \\ x_2 & y_2(y_2 - y_1 - y_3) & 1 \\ x_3 & y_3(y_3 - y_1 - y_2) & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

19. Hat die Parabel eine allgemeine Lage, und ist a der Winkelkoeffizient ihrer Achsenrichtung, so hat die Gleichung der Parabel die Form:

$$(y - ax)^2 - 2 d x - 2 e y + f = 0.$$

Ist nun a bekannt und soll außerdem die Parabel durch die drei Punkte gehen (1) (2) (3), so ist die Gleichung der Parabel:

$$\begin{vmatrix} (y - ax)^2 & x & y & 1 \\ (y_1 - ax_1)^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ (y_2 - ax_2)^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ (y_3 - ax_3)^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Soll aber diese Parabel die Gerade

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$$

in dem Punkte (1) berühren und außerdem durch den Punkt (2) gehen, so findet man analog nach Nr. 13 und 17 die Parabelgleichung:

$$\begin{vmatrix} (y-ax)^2 & x & y & 1 \\ (y_1-ax_1)^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ 2(A+aB)(y_1-ax_1) & -B & A & 0 \\ (y_2-ax_2)^2 & x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

20. Ist hingegen die Achsenrichtung unbekannt, sind aber vier Peripheriepunkte gegeben, so muß man darauf verzichten, die Gleichung der Parabel durch eine Determinante fünften Grades auszudrücken, wohl aber kann man die Achsenrichtung a aus der Determinantengleichung:

$$\begin{vmatrix} (y_1-ax_1)^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ (y_2-ax_2)^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ (y_3-ax_3)^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ (y_4-ax_4)^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}=0$$

entwickeln.

Löst man nach I 16 diese Determinante nach den Gliedern der Elemente in der ersten Spalte auf, so findet man zur Bestimmung von a die quadratische Gleichung:

$$a^2\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} - 2a\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4y_4 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Es kann nun nicht schwer sein, diese beiden letzten Gleichungen für den Fall niederzuschreiben, daß die Parabel, anstatt durch den Punkt (4) zu gehen, in dem Punkte (1) die Gerade

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$$

berührt.

Soll aber die Parabel die Geraden

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0 \text{ und}$$
$$A'(x-x_2)+B'(y-y_2)=0$$

beziehungsweise in den Punkten (1) und (2) berühren, so erhält man:

$$\begin{vmatrix} (y_1-ax_1) & x_1 & y_1 & 1 \\ (y_2-ax_2) & x_2 & y_2 & 1 \\ 2(A+aB)(y_1-ax_1) & -B & A & 0 \\ 2(A'+aB')(y_2-ax_2) & -B' & A' & 0 \end{vmatrix}=0$$

und

$$a^2\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ -2Bx_1 & -B & A & 0 \\ -2B'x_2 & -B' & A' & 0 \end{vmatrix} - 2a\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ Ax_1-By_1 & -B & A & 0 \\ A'x_2-B'y_2 & -B' & A & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ 2Ay_1 & -B & A & 0 \\ 2A'y_2 & -B' & A & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Von den beiden Parabeln, welche im allgemeinen für diese Aufgaben möglich sind, geht in diesem letzten Falle die eine in zwei zusammenfallende gerade Linien über, für welche a den Wert $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ haben muß, da diese Doppelgerade durch die beiden Berührungspunkte geht. Daß aber der eine von den beiden Werten, die zu a gehören, gleich $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ist, giebt sich auch darin zu erkennen, daß dieser Wert der vorletzten Gleichung genügt. Substituiert man ihn in die vorletzte Determinante, so geht diese über in:

$$\frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{(x_2 - x_1)^2}\begin{vmatrix} y_1 x_2 - y_2 x_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ y_1 x_2 - y_2 x_1 & x_2 & y_2 & 1 \\ 2[A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1)] & -B & A & 0 \\ 2[A'(x_2 - x_1) + B'(y_2 - y_1)] & -B' & A' & 0 \end{vmatrix}$$

Multipliziert man die Elemente der zweiten Spalte mit $2(y_2 - y_1)$, die der dritten mit $2(x_2 - x_1)$, addiert die ersten Produkte zu den Elementen der ersten Spalte, subtrahiert aber die zweiten Produkte davon, so geht diese Determinante über in:

$$-\left(\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}\right)^2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 1 \\ 0 & -B & A & 0 \\ 0 & -B' & A' & 0 \end{vmatrix}.$$

Diese aber hat nach I 7 den Wert Null.

Für den anderen Wurzelwert von a findet man nun nach einer bekannten Eigenschaft quadratischer Gleichungen:

$$a = (x_2 - x_1)\begin{vmatrix} y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ 2A\,y_1 & -B & A & 0 \\ -2A'\,y_2 & -B' & A' & 0 \end{vmatrix} : (y_2 - y_1)\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ -2B\,x_1 & -B & A & 0 \\ -2B'\,x_2 & -B' & A' & 0 \end{vmatrix}.$$

Das ist also der Winkelkoeffizient für die Achsenrichtung der einen Parabel, welche die Gerade $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ in $x_1\, y_1$ und die Gerade $A'(x - x_2) + B'(y - y_2) = 0$ in $x_2\, y_2$ berührt.

21. Die Gleichung einer Ellipse oder Hyperbel, deren Achsen mit den Koordinatenachsen parallel laufen, ist:

$$ax^2 + cy^2 - 2dx - 2ey + f = 0.$$

Bringt man diese Gleichung auf die Form:

$$a\left(x - \frac{d}{a}\right)^2 + c\left(y - \frac{e}{c}\right)^2 + f - \frac{d^2}{a} - \frac{e^2}{c} = 0,$$

so sieht man, daß die Koordinaten des Mittelpunktes $\frac{d}{a}$ und $\frac{e}{c}$ und die Halbachsen

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{cd^2 + ae^2 - acf}{c}} \text{ und } \frac{1}{c}\sqrt{\frac{cd^2 + ae^2 - acf}{a}}$$

sind.

Da die Gleichung vier unabhängige Veränderliche besitzt, so ist die Kurve durch vier Bestimmungsstücke bestimmt. Sind dieses die vier Punkte (1) bis (4), die auf der Peripherie liegen sollen, so erhält man als Gleichung des Kegelschnitts:

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Tangente in dem Punkte (1) wird ausgedrückt durch die Gleichung:

$$ax_1 x + cy_1 y - d(x + x_1) - e(y + y_1) + f = 0.$$

Soll diese Tangente gegeben sein durch die Gleichung:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0,$$

so führt die Identifikation beider Gleichungen auf die ausreichende Gleichung:

$$aBx_1 - cAy_1 - Bd + Ae = 0.$$

Soll also unser Kegelschnitt die Gerade $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ in dem Punkte (1) und die Gerade $A'(x - x_2) + B'(y - y_2) = 0$ in dem Punkte (2) berühren, so schreibt sich die Gleichung desselben in folgender Form:

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & x & y & 1 \\ x_1{}^2 & y_1{}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2{}^2 & y_2{}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ Bx_1 & -Ay_1 & -B & A & 0 \\ B'x_2 & -A'y_2 & -B' & A' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Bestimmt man nun aus diesen beiden Determinanten-Gleichungen die Werte für a, c, d, e, f durch die entsprechenden Unterdeterminanten, so kann man sofort die Koordinaten des Mittelpunkts und die Länge der Halbachsen angeben.

22. Liegt der Mittelpunkt eines Kegelschnitts im Anfangspunkt der Koordinaten, so hat bei allgemeiner Lage der Achsen die Gleichung desselben die Form:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + f = 0.$$

Dieser Kegelschnitt ist durch drei Bestimmungsstücke bestimmt. Wir übergehen jetzt die Aufstellung der Gleichungen für Kegelschnitte dieser Art, wenn sie durch Peripheriepunkte oder durch Tangenten mit dem Berührungspunkte bestimmt sind, da Fälle dieser Art schon oben vorgekommen sind und einer noch vorkommen wird, sondern wir fragen sogleich, wie man die Lage der Achsen direkt finden kann. Ist a der Winkelkoeffizient für die eine Achsenrichtung, also $-\frac{1}{a}$ für die andere, so kann man die Gleichung der Ellipse auch in folgender Form schreiben:

$$(y - ax)^2 + c(ay + x)^2 + f = 0.$$

Ist a bekannt, so sind zur Bestimmung des Kegelschnitts nur noch zwei Bestimmungsstücke nötig, diese können sein entweder zwei Peripheriepunkte oder eine Tangente mit dem Berührungspunkte. Für die Gleichung erhalten wir in beiden Fällen Determinanten dritten Grades. Ist aber a unbekannt, so sind drei Bestimmungsstücke nötig. Sind z. B. die drei Peripheriepunkte (1) (2) (3) gegeben, so erhält man zur Bestimmung von a die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} (y_1 - ax_1)^2 & (ay_1 + x_1)^2 & 1 \\ (y_2 - ax_2)^2 & (ay_2 + x_2)^2 & 1 \\ (y_3 - ax_3)^2 & (ay_3 + x_3)^2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante läßt sich nach I 16 in die Summe von neun einfachen Determinanten auflösen; drei von diesen sind Null nach I 15, von den sechs übrigen lassen sich je zwei durch Aussonderung der Faktoren und Umstellung der Reihen gleichartig machen und addieren; es folgt:

$$(a^4 - 1)\begin{vmatrix} x_1{}^2 & y_1{}^2 & 1 \\ x_2{}^2 & y_2{}^2 & 1 \\ x_3{}^2 & y_3{}^2 & 1 \end{vmatrix} + 2a(a^2 + 1)\begin{vmatrix} x_1{}^2 & x_1y_1 & 1 \\ x_2{}^2 & x_2y_2 & 1 \\ x_3{}^2 & x_3y_3 & 1 \end{vmatrix} + 2a(a^2 + 1)\begin{vmatrix} y_1{}^2 & x_1y_1 & 1 \\ y_2{}^2 & x_2y_2 & 1 \\ y_3{}^2 & x_3y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dividiert man diese Gleichung durch $a^2 + 1$ und addiert die letzten zwei Glieder, so erhält man:

$$(a^2 - 1)\begin{vmatrix} x_1{}^2 & y_1{}^2 & 1 \\ x_2{}^2 & y_2{}^2 & 1 \\ x_3{}^2 & y_3{}^2 & 1 \end{vmatrix} + 2a\begin{vmatrix} x_1{}^2 + y_1{}^2 & x_1y_1 & 1 \\ x_2{}^2 + y_2{}^2 & x_2y_2 & 1 \\ x_3{}^2 + y_3{}^2 & x_3y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die beiden Werte, welche man für a aus dieser Gleichung findet, sind die Winkelkoeffizienten für die beiden Achsen der einen Ellipse, welche möglich ist.

23. Ist die Lage des Kegelschnitts, dessen Mittelpunkt im Koordinatenanfang liegen soll, bestimmt durch den Peripheriepunkt $x_1\ y_1$, durch die Gleichung der Tangente dieses Punktes $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$, sowie durch den zweiten Peripheriepunkt $x_2\ y_2$, so beachte man, daß in dem Kegelschnitt:

$$(y-ax)^2 + c(ay + x)^2 + f = 0$$

die Gleichung der Tangente des Punktes $x_1\ y_1$ folgende Form hat:

$$(y-ax)(y_1 - ax_1) + c(ay + x)(ay_1 + x_1) + f = 0.$$

Die Identifikation dieser Gleichung mit der gegebenen Tangentengleichung führt auf die Gleichung:

$$[c(ay_1 + x_1) - a(y_1 - ax_1)] : [ac(ay_1 + x_1) + (y_1 - ax_1)] = A : B$$

oder

$$(A + Ba)(y_1 - ax_1) + c(Aa - B)(ay_1 + x_1) = 0.$$

Hiernach ergiebt sich zur Bestimmung von a zunächst folgende Gleichung:

$$\begin{vmatrix} (y_1 - ax_1)^2 & (ay_1 + x_1)^2 & 1 \\ (y_2 - ax_2)^2 & (ay_2 + x_2)^2 & 1 \\ (A + B_2)(y_1 - ax_1) & (Aa - B)(ay_1 + x_1) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nun kann man diese Determinante ähnlich wie die entsprechende der vorigen Nummer behandeln, und man findet zuletzt zur Bestimmung von a die Gleichung:

$$(a^2 - 1)\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & 1 \\ -Bx_1 & Ay_1 & 1 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & 2x_1 y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & 2x_2 y_2 & 1 \\ Ay_1 + Bx_1 & By_1 - Ax_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

24. Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts ist die allgemeine Gleichung zweiten Grades mit zwei Veränderlichen. Sie hat die Form:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Hieraus erkennt man, daß der Kegelschnitt durch fünf Peripheriepunkte bestimmt ist. Sind dieses die Punkte (1) bis (5), so schreibt sich die Gleichung des Kegelschnitts sofort in der Form einer Determinante sechsten Grades:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

25. Die Gleichung der Tangente dieses Kegelschnitts in dem Punkte $x_1\ y_1$ ist:

$$ax_1 x + b(x_1 y + y_1 x) + cy_1 y + d(x + x_1) + e(y + y_1) + f = 0 \quad \text{oder:}$$

$$x(ax_1 + by_1 + d) + y(bx_1 + cy_1 + e) + dx_1 + ey_1 + f = 0.$$

Ist diese Gleichung aber in der Gestalt:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

gegeben, so ergiebt sich aus der Identifikation der beiden letzten Gleichungen die zur Determinanten-Bildung brauchbare Gleichung:

$$aBx_1 - b(Ax_1 - By_1) - cAy_1 + dB - eA = 0.$$

Nimmt man nun als fünftes Bestimmungsstück nicht den fünften Peripheriepunkt, sondern die Tangente des Punktes (1), so ergiebt sich jetzt als Gleichung des Kegelschnitts:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ 2Bx_1 & By_1 - Ax_1 & -2Ay_1 & B & -A & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

In ganz ähnlicher Weise bestimmt man die Gleichung des Kegelschnitts, wenn man den vierten Peripheriepunkt auch fortläßt und dafür die Tangente des Punktes (2) setzt. Man braucht zu dem Zweck nur die fünfte Zeile der letzten Determinante durch eine nach der Gestalt der sechsten Zeile gebildeten zu ersetzen.

26. Auch in diesem allgemeinen Falle kann man die Bestimmung der Achsenrichtung vor der Bildung der Kurvengleichung vornehmen. Sind a und $-\frac{1}{a}$ die Winkelkoeffizienten der beiden Achsen, so hat die Gleichung des Kegelschnitts folgende Form:

$$(y - ax)^2 + c\,(ay + x)^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Sind nun die fünf Peripheriepunkte (1) bis (5) gegeben, so erhält man sofort zur Bestimmung von a folgende Gleichung:

$$\begin{vmatrix} (y_1 - ax_1)^2 & (ay_1 + x_1)^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ (y_2 - ax_2)^2 & (ay_2 + x_2)^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ (y_3 - ax_3)^2 & (ay_3 + x_3)^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ (y_4 - ax_4)^2 & (ay_4 + x_4)^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ (y_5 - ax_5)^2 & (ay_5 + x_5)^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Behandelt man diese Determinante so, wie in Nr. 22 angegeben ist, so erhält man zur Bestimmung von a folgende Gleichung:

$$(a^2-1)\begin{vmatrix} x_1{}^2 & y_1{}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2{}^2 & y_2{}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3{}^2 & y_3{}^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4{}^2 & y_4{}^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5{}^2 & y_5{}^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} + 2a \begin{vmatrix} x_1{}^2 + y_1{}^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2{}^2 + y_2{}^2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3{}^2 + y_3{}^2 & x_3y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4{}^2 + y_4{}^2 & x_4y_4 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5{}^2 + y_5{}^2 & x_5y_5 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

27. Hält man die in der vorigen Nummer aufgestellte Gleichung des Kegelschnitts fest, so ist die Gleichung für die Tangente des Punktes (1):

$$(y_1 - ax_1)(y - ax) + c\,(ay_1 + x_1)(ay + x) + d\,(x_1 + x) + e\,(y_1 + y) + f = 0, \text{ oder:}$$

$$x\,[c\,(ay_1 + x_1) - a\,(y_1 - ax_1) + d] + y\,[ac\,(ay_1 + x_1) + (y_1 - ax_1) + e] + dx_1 + ey_1 + f = 0.$$

Aus der Identifikation dieser Gleichung mit der gegebenen Tangentengleichung:

$$A\,(x - x_1) + B\,(y - y_1) = 0$$

folgt:

$$(A + Ba)(y_1 - ax_1) + c\,(Aa - B)(ay_1 + x_1) - Bd + Ae = 0.$$

Hiernach ist nun die erste Form der Gleichung zur Bestimmung der Achsenrichtung des Kegelschnitts, der durch die vier Punkte (1) bis (4) geht, und für welchen die Tangente des Punktes (1) gegeben ist, folgende:

$$\begin{vmatrix} (y_1 - ax_1)^2 & (ay_1 + x_1)^2 & x^1 & y_1 & 1 \\ (y_2 - ax_2)^2 & (ay_2 + x_2)^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ (y_3 - ax_3)^2 & (ay_3 + x_3)^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ (y_4 - ax_4)^2 & (ay_4 + x_4)^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ 2(A + Ba)(y_1 - ax_1) & 2(Aa - B)(ay_1 + x_1) & -B & A & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

woraus sich nach dem in Nr. 22 angegebenen Verfahren folgende Schlußgleichung ableitet:

$$(a^2-1)\begin{vmatrix} x_1{}^2 & y_1{}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2{}^2 & y_2{}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3{}^2 & y_3{}^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4{}^2 & y_4{}^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ -2Bx_1 & 2Ay_1 & -B & A & 0 \end{vmatrix} + 2a \begin{vmatrix} x_1{}^2 + y_1{}^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2{}^2 + y_2{}^2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3{}^2 + y_3{}^2 & x_3y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4{}^2 + y_4{}^2 & x_4y_4 & x_4 & y_4 & 1 \\ 2(Ay_1 - Bx_1) & Ax_1 - By_1 & -B & A & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

In ähnlicher Weise wird die Aufgabe gelöst, wenn statt des vierten Peripheriepunktes die Tangente des zweiten Punktes gegeben ist.

28. Zum Schluß möge eine Aufgabe in bestimmten Zahlenwerten stehen.

Es soll der Kegelschnitt näher bestimmt werden, welcher die durch die Gleichung $x - y = 0$ gegebene Gerade in dem Punkte 1, 1 und die andere durch die Gleichung $x - 4 = 0$ gegebene Gerade in dem Punkte 4, 1 berührt und außerdem durch den Punkt 3,0 geht. Die Koordinaten seien rechtwinklige.

Bezeichnen wir wie bisher die gegebenen Bestimmungsstücke durch allgemeine Zeichen, so wird die Gleichung des gesuchten Kegelschnitts nach Nr. 25 in folgender Art zu schreiben sein:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ 2B_1 x_1 & B_1 y_1 - A_1 x_1 & -2A_1 y_1 & B_1 & -A_1 & 0 \\ 2B_2 x_2 & B_2 y_1 - A_2 x_2 & -2A_2 y_2 & B_2 & -A_2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Nun ist $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $A_1 = 1$, $B_1 = -1$, $x_2 = 4$, $y_2 = 1$, $A_2 = 1$, $B_2 = 0$, $x_3 = 3$, $y_3 = 0$.

Setzt man diese Werte ein, so erhält man als Gleichung des Kegelschnitts:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Formt man diese Determinante nach I 17 um, wobei man zugleich gemeinschaftliche Faktoren aus sämtlichen Gliedern einer Zeile fortlassen kann, da die Determinante den Nullwert hat, so erhält man nach und nach:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Löst man die letzte Determinante nach I 9 in Bezug auf die Elemente der ersten Zeile auf und wertet dann die einfachen Unterdeterminanten aus, so erhält man die Gleichung des Kegelschnitts:

$$x^2 - xy + 3y^2 - 4x - 2y + 3 = 0.$$

Hieraus erkennt man leicht, daß unser Kegelschnitt eine Ellipse ist. Die bekannten Mittel der analytischen Geometrie bestimmen die Koordinaten des Mittelpunktes zu $2\frac{4}{11}$ und $\frac{8}{11}$, die Winkelkoeffizienten der Achsen zu $-2 \pm \sqrt{5}$, sowie die Längen der Halbachsen zu $\frac{3}{11}\sqrt{24 \pm 6\sqrt{5}}$.

Die Winkelkoeffizienten der beiden Achsen kann man aber auch direkt aus den gegebenen Bestimmungsstücken ableiten.

Ist a der eine dieser Winkelkoeffizienten, so findet man nach Analogie von Nr. 27 zu seiner Bestimmung die Gleichung:

$$(a^2-1)\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ -2B_1 x_1 & 2A_1 y_1 & -B_1 & A_1 & 0 \\ -2B_2 x_2 & 2A_2 y_2 & -B_2 & A_2 & 0 \end{vmatrix} + 2a \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ 2(A_1 y_1 - B_1 x_1) & A_1 x_1 - B_1 y_1 & -B_1 & A_1 & 0 \\ 2(A_2 y_2 - B_2 x_2) & A_2 x_2 - B_2 y_2 & -B_2 & A_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Setzt man hier die oben angegebenen bestimmten Werte ein, so erhält man zunächst:

$$(a^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 2a\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 17 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung vereinfacht sich nach und nach in folgender Art:

$$(a^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 2a\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(a^2-1)\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2a\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(a^2-1)\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2a\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(a^2-1)\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2a\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(a^2-1) + 4a = 0.$$

Diese Gleichung führt auf die oben schon angegebenen Werte

$$a = -2 \pm \sqrt{5}.$$

Programm

des

Realgymnasiums

in

den Franckeschen Stiftungen zu Halle

für

das Schuljahr 1883—1884

vom

Direktor Dr. Schrader,
Inspektor des Realgymnasiums.

II. Teil:

Schulnachrichten.

Halle a. S.,
Druck der Buchdruckerei des Waisenhauses.
1884.

1884. Progr. Nr. 239.

Schulnachrichten.

I. Historisch-statistische Nachrichten.

Auch in diesem Jahre hat der Tod dem Lehrer-Kollegium schmerzliche Verluste bereitet: der Zeichenlehrer Herr Steuer starb unerwartet am 23. März 1883 am Gelenkrheumatismus und der Oberlehrer Herr Geist nach längerem Leiden am 11. September 1883.

Herr Wilhelm Steuer war am 2. Januar 1836 in Halle a. d. S. geboren und hatte seine Schulerziehung in dem Privatinstitut eines Landpredigers erhalten. Von Michaelis 1855 ab besuchte er die Königliche Kunstakademie in Dresden, in welcher er sich vorzugsweise zum Landschaftsmaler ausbildete. Seine Neigung zum Lehrfach gab sich schon darin zu erkennen, daß er im Jahre 1861 „Landschaftliche Studien" in drei Heften herausgab. Nachdem er schon früher in Dresden am Richter'schen Privatinstitut unterrichtet hatte, trat er an der hiesigen Realschule zuerst Ostern 1864 als Hilfslehrer ein und wurde Ostern 1865 Zeichenlehrer derselben. Nachdem ihn schon vor Jahren ein Gelenkrheumatismus einige Zeit von der Schule fern gehalten hatte, hat er sich nie vollständig wieder erholt, er hat aber unverdrossen, auch im Leiden seine amtlichen Pflichten zu erfüllen gestrebt. Treue und Bescheidenheit waren der Grundzug seines Wesens und werden ihm ein ehrendes Andenken bei seinen Kollegen bewahren. Als ihn vor Ostern 1883 das alte Leiden mit neuer Kraft auf das Krankenlager warf, glaubte man nicht fürchten zu müssen, daß er sich nicht wieder von demselben erheben sollte.

Herr Rudolf Geist war am 11. Juni 1834 zu Rawitsch in der Provinz Posen geboren. Seine wissenschaftliche Vorbildung erhielt er auf dem Gymnasium zu polnisch Lissa bis Ostern 1854, worauf er bis Ostern 1860 an der Universität Halle Naturwissenschaften studierte. Nachdem er kurze Zeit am Realgymnasium zu Bielefeld als Hilfslehrer thätig gewesen, wurde er Michaelis 1860 als vierter ordentlicher Lehrer angestellt. Im Jahre 1868 wurde er zum Oberlehrer befördert und rückte Ostern 1879 in die zweite Oberlehrerstelle ein. Sein schwächlicher Gesundheitszustand war seither wiederholt Veranlassung zu zeitweiliger Beurlaubung gewesen, aber wiederholt war auch aus oft sehr bedenklicher Lage eine relative Genesung gefolgt, so daß der Kranke in diesem Jahre wohl glauben konnte, eine Reise in die Hochluftregion der Schweiz werde ihn so kräftigen können, daß das vorjährige Winterleiden nicht wiederkehren werde. Die Reise brachte die entgegengesetzte Wirkung hervor, und seiner Rückkehr in die Heimat folgte bald der Tod. Seine amtliche Aufgabe, den naturgeschichtlichen und chemischen Unterricht am Realgymnasium, hat er mit Treue und Sorgfalt verwaltet, doch ging sein Interesse noch über die Grenzen des Schulunterrichts hinaus. Besonders hat er sich in den letzten Jahren der Stenographie gewidmet und hat darin einen Kreis von Schülern uneigennützig und mit gutem Erfolg unterrichtet. Sein freundliches, liebenswürdiges Wesen wird bei allen in anerkennender Erinnerung bleiben.

Der durch den Tod des Herrn Steuer verwaiste Zeichenunterricht wurde während des Sommersemesters durch den Maler Herrn Wilhelm Boltze von hier kommissarisch mit vieler Hingebung verwaltet. In die Zeichenlehrerstelle selbst wurde zum 1. Oktober Herr Adalbert Lehmann[1] vom Realprogymnasium in Münden berufen.

---

1) Herr Adalbert Lehmann ist am 29. April 1849 zu Lugau im Regierungsbezirk Frankfurt a. d. O. geboren. Auf dem Königl. Seminar zu Elsterwerda wurde er zum Elementarlehrer vorgebildet und ist als solcher vom 1. Oktober 1869

Die Stelle des Oberlehrers Herrn Geist ist zur Zeit nicht besetzt.

Zu Ostern 1883 verließ der ordentliche Lehrer Herr Dr. Mansfeld die Schule, um eine Stelle an dem Realgymnasium zu Goslar anzunehmen. Ebenso ging zu Michaelis 1883 der ordentliche Lehrer Herr Dr. Perle ab, um an das Realgymnasium zu Oldenburg zu gehen. Gleichzeitig rückte der bisherige wissenschaftliche Hilfslehrer Herr Rühlemann in die letzte ordentliche Lehrerstelle ein, und wissenschaftlicher Hilfslehrer wurde Herr Dr. Müllensiefen aus Berlin.[1] Die siebente ordentliche Lehrerstelle blieb in Aussicht auf die fortschreitende Reduktion der Schule unbesetzt.

Der Geburtstag Sr. Majestät des Kaisers konnte, da er auf den Gründonnerstag fiel, nicht durch einen Schulakt begangen werden.

Am 2. September feierte die Schule den Gedächtnistag der Schlacht von Sedan durch Festrede und Chorgesang. Die Festrede hielt Direktor Dr. Schrader und führte in derselben den Schülern ein Bild jener welthistorischen Schlacht vor.

Der 400jährige Gedenktag der Geburt Luthers wurde am 10. November durch Festrede und Chorgesang gefeiert. Die Festrede hielt Herr Professor Dr. Richter über Luthers Verdienste um die Schule. Erinnerungsgaben wurden an alle Schüler verteilt.

Am 29. August feierten Lehrer und Schüler in der hiesigen St. Georgenkirche das heilige Abendmahl.

Am 6. April und am 15. Oktober fand die Eröffnung der beiden Schulsemester in allgemeiner Schulversammlung statt.

Die Statistik der Schulfrequenz ergiebt sich aus folgender Übersicht:

	IA	IB	IIA	IIB	IIIA	IIIBO	IIIBM	IVO	IVM	VO	VM	VIO	VIM	Sa.
Bestand im Anfange des Winter-Semesters 1882/83	20	32	23	45	47	33	34	57	46	37	52	52	42	520
Zugang	—	—	—	1	—	—	1	—	—	—	1	—	—	
Abgang	8	2	5	8	3	13	1	11	10	4	11	7	5	
Bestand vor der Versetzung	12	30	18	38	44	20	34	46	36	33	42	45	37	436
Versetzung	—	13	5	10	19	12	—	38	—	27	—	32	—	
Aufnahme zu Ostern	—	3	—	—	1	3	1	2	2	4	1	26	3	
Bestand im Anfange des S.-S.	25	25	23	47	38	41	43	29	46	36	49	26	53	481
Zugang	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	1	5	2	
Abgang	10	4	7	21	3	7	1	1	6	6	3	1	1	
Bestand vor der Versetzung	15	21	16	26	35	34	42	28	40	34	47	30	54	
Versetzung	—	10	6	5	17	—	27	—	24	—	27	—	39	
Aufnahme zu Michaelis	—	—	1	—	1	1	—	2	3	5	4	—	—	
Bestand im Anf. d. W.-S. 1883/84	25	17	16	38	46	50	24	46	30	59	43	45	—	439

Da die Doppelklassen nicht mehr wie früher Stufenklassen, sondern Wechselcöten bilden, so machte sich jetzt die Verschiebung der Zahlen anders als früher. Zu jedem Versetzungstermine hat von Untertertia abwärts von den beiden gleichnamigen Klassen nur die eine Versetzung, die andere behält ihre

---

bis dahin 1878 in Querfurt thätig gewesen. Von Michaelis 1878 bis Ostern 1880 hat er die mit der Königlichen Akademie der Künste verbundene Kunstschule besucht und daselbst auch die Prüfung als Zeichenlehrer abgelegt. Von Ostern 1880 bis Michaelis 1883 war er als Zeichenlehrer an dem Realprogymnasium in Münden angestellt.

1) Herr Dr. Paul Müllensiefen ist am 14. November 1857 in Berlin geboren, erhielt bis Ostern 1876 seine Vorbildung auf dem Joachimsthal'schen Gymnasium daselbst, studierte Philologie auf der kaiserlichen Wilhelms-Universität zu Straßburg, promovierte im Jahre 1881 und legte das Examen pro facultate docendi im Februar 1882 ab. Nachdem er sein Probejahr an dem Gymnasium zu Eberswalde von Ostern 1882 bis dahin 1883 abgelegt hatte, wurde er Ostern 1883 zunächst als aushelfender Lehrer an unserer Schule beschäftigt.

Schüler, nimmt aber dazu die in der anderen Klasse nicht versetzten Schüler auf, um diesen die Möglichkeit zu gewähren, nach einem halben Jahre die Versetzung in die höhere Klasse nachzuholen. So z. B. hatte die Oster-Quarta zu Michaelis d. J. keine Versetzung, behielt also die 28 restierenden Schüler, nahm dazu die in der Michaelis-Quarta nicht versetzten 16 Schüler und außerdem 2 Novizen auf, hatte also am Anfang des Winter-Semesters 46 Schüler.

Die Gesamtfrequenz der Schule ist in diesem Jahre von 520 auf 439, also um 81 zurückgegangen. Zu einem kleinen Teile fällt dieser Rückgang zusammen mit der fast allgemein beobachteten Frequenzminderung der Realgymnasien, welche sich aus der geringen Aussicht erklärt, welche zur Zeit die den Realschulabiturienten offenstehenden Universitätsstudien gewähren. Vielleicht drängt auch die neue Unterrichtsordnung, indem sie den Unterschied zwischen Gymnasien und Realgymnasien mindert und die realistischen Unterrichtsfächer bei den letzteren beschränkt, manche Schüler den alten Gymnasien zu. Hauptsächlich hat aber an unserer Anstalt der Rückgang der Frequenz seinen Grund in der Anordnung, daß im Laufe von vier Jahren die vier unteren Doppelklassen eingezogen werden sollen. Um die Einziehung der zweiten Sexta zu Michaelis 1883 zu ermöglichen, mußte die Aufnahme in die Sexta schon zu Ostern beschränkt werden. Es sind damals über dreißig Anmeldungen für Sexta abgelehnt worden. Zu Michaelis betrug früher die Aufnahme 50 bis 60 neue Schüler, in diesem Jahre mußte diese Aufnahme bis auf einzelne Schüler für obere und mittlere Klassen ganz wegfallen. Jetzt liegt für die Osteraufnahme die Notwendigkeit vor, in die Quinten gar keine neuen Schüler von anderen Schulen aufzunehmen, um die Einziehung der zweiten Quinta zu Michaelis 1884 ausführbar zu machen.

Mit der Abiturientenprüfung zu Ostern trat die neue Prüfungsordnung in Kraft. Nach derselben ist das bisher bestandene Recht der zur Prüfungs-Kommission gehörenden Lehrer, durch einstimmigen Beschluß einen für unreif erkannten Abiturienten von der Prüfung zurückzuweisen, aufgehoben und auf die Berechtigung beschränkt, dem Abiturienten oder seinen Angehörigen in einem solchen Falle den Rat zu erteilen, die Ablegung der Prüfung noch aufzuschieben.

Von den schriftlichen Prüfungsarbeiten ist die Arbeit in der Chemie weggefallen, dagegen eine schriftliche Übersetzung aus dem Lateinischen ins Deutsche neu eingetreten. Wenn früher in den beiden neueren Sprachen abwechselnd in der einen Sprache ein Aufsatz und in der anderen ein Extemporale geschrieben wurde, so wird jetzt jedesmal ein französischer Aufsatz und daneben ein französisches und ein englisches Extemporale verlangt. Der Umfang der mündlichen Prüfung ist unverändert geblieben. Das Prüfungszeugnis erklärt am Schluß nur einfach die Reife unter Wegfall der früher üblichen Zensurstufen.

Zu Ostern 1883 verließen acht Ober-Primaner die Schule mit dem Zeugnis der Reife. Die mündliche Prüfung wurde am 26. Februar unter dem Vorsitz des Provinzial-Schulrates Herrn Dr. Todt abgehalten.

Die Abiturienten waren:

1) Louis Bäßler aus Eilenburg, 18½ Jahr alt, evangelischer Konfession. Er hatte die unteren Klassen auf dem Realprogymnasium zu Eilenburg absolviert, war hier 2 Jahr in Prima und wollte Mathematik und Physik studieren.

2) Otto Ehrhardt aus Reichenwalde bei Storkow, 19 Jahr alt, evangelischer Konfession. Er hatte die unteren Klassen auf der Realschule in Dessau absolviert, war hier 3 Jahre auf der Schule, davon 2 Jahr in Prima und wollte Maschinen-Ingenieur werden.

3) Richard Kirchhoff aus Stolberg, 20 Jahr alt, evangelischer Konfession. Er war 8 Jahr auf der Schule, 2 Jahr in Prima, wurde von der mündlichen Prüfung dispensiert und wollte Naturwissenschaften studieren.

4. Konrad Laue aus Delitzsch, $19^1/_2$ Jahr alt, evangelischer Konfession. Er hatte die unteren Klassen auf dem Realprogymnasium zu Delitzsch absolviert, war hier 2 Jahr in Prima und wollte sich dem Forstfach widmen.

5. Waldemar Scheithauer aus Gaumitz bei Zeitz, 19 Jahr alt, evangelischer Konfession. Er hatte die unteren Klassen auf dem Realprogymnasium zu Naumburg absolviert, war hier 2 Jahr in Prima und wollte die Naturwissenschaften studieren.

6. Reinhold Schönbrodt aus Halle, $18^1/_2$ Jahr alt, evangelischer Konfession. Er war 9 Jahr auf der Schule, 2 Jahr in Prima und wollte sich dem Baufach widmen.

7. Karl Schulze aus Schafstedt, $20^1/_2$ Jahr alt, evangelischer Konfession. Er war $9^1/_2$ Jahr auf der Schule, 2 Jahr in Prima und wollte Steuerbeamter werden.

8. Richard Spindler aus Altenburg, 21 Jahr alt, evangelischer Konfession. Er hatte die unteren Klassen auf dem Realprogymnasium zu Altenburg absolviert, war hier 2 Jahr in Prima und wollte sich weiter zum theologischen Studium vorbereiten.

Zu Michaelis verließen 7 Ober-Primaner die Schule mit dem Zeugnis der Reife. Die mündliche Prüfung wurde am 19. September unter dem Vorsitz des Herrn Direktor Dr. Frick abgehalten.

Die Abiturienten waren:

1. Otto Beeck aus Halle, 19 Jahr alt, evangelischer Konfession. Er war $6^1/_2$ Jahr auf der Schule, 2 Jahr in Prima und wollte Kaufmann werden.

2. Hermann Bieler aus Frankleben, 20 Jahr alt, evangelischer Konfession. Er war $7^1/_2$ Jahr auf der Schule, 2 Jahr in Prima, wurde von der mündlichen Prüfung dispensiert und wollte Soldat werden.

3. Paul Ernert aus Dresden, 21 Jahr alt, evangelischer Konfession. Er war 7 Jahr auf der Schule, 2 Jahr in Prima, wurde von der mündlichen Prüfung dispensiert und wollte im Auslande Medizin studieren.

4. Adolf Förster aus Halle, 19 Jahr alt, evangelischer Konfession. Er war 9 Jahr auf der Schule, $2^1/_2$ Jahr in Prima, wurde von der mündlichen Prüfung dispensiert und wollte Chemie studieren.

5. Karl Hampke aus Brandenburg, 20 Jahr alt, evangelischer Konfession. Er war 5 Jahr auf der Schule, 2 Jahr in Prima und wollte Chemie studieren.

6. Gustav Heinrich aus Schotterey bei Halle, $21^1/_2$ Jahr alt, evangelischer Konfession. Er war $9^1/_2$ Jahr auf der Schule, 2 Jahr in Prima und wollte Postbeamter werden.

7. Paul Hochheim aus Schafstedt, 19 Jahr alt, evangelischer Konfession. Er war $9^1/_2$ Jahr auf der Schule, 2 Jahr in Prima und wollte Landwirt werden.

Aus den Zinsen der Ziemann-Stiftung erhielten am 5. Mai die Ober-Primaner Otto Martin aus Halle und Ernst Schneider aus Artern Stipendien von je 70 Mark.

Das städtische Francke-Stipendium erhielt am 21. März der frühere Abiturient Hermann Schwarz.

II. A. Die Lehrer und ihre Lehrstunden. (Sommer-Semester.)

№	Namen.	Ordinat.	IA.	IB.	IIA.	IIB.		IIIA.	IIIB^{m}.	IIIB^{o}.	IV^{m}.	IV^{o}.	V^{m}.	V^{o}.	VI^{m}.	VI^{o}.
1.	Direktor Dr. Schrader, Inspektor, 12 St.	IA.	Mathematik 5	Mathematik 5 Mechanik 2												
2.	Oberlehrer Professor Hölzke, 18 St.	IB.	Französisch 4 Englisch 3	Französisch 4 Englisch 3	Französisch 4											
3.	Oberlehrer Geist, 20 St.	—	Chemie 2	Chemie 2	Chemie 2	Naturgesch. 2		Naturgesch. 2		Naturgesch. 2	Naturgesch. 2	Naturgesch. 2	Naturgesch. 2	Naturgesch. 2		
4.	Oberlehrer Professor Dr. Richter, 19 St.	IIA.	Religion 2 Deutsch 3	Religion 2 Deutsch 3	Religion 2 Deutsch 3	Religion 2				Religion 2						
5.	Oberlehrer Dr. Sommer, 20 St.	—	Physik 3	Physik 1	Mathematik 5 Physik 3	Physik 3						Geometrie 4 Rechnen 1				
6.	Oberlehrer Dr. Lehmann, 22 St.	—	Geschichte 2 Geographie 1	Geschichte 2 Geographie 1	Geographie 1	Geographie 1		Geographie 2		Geographie 2		Geographie 2	Geographie 2	Geographie 2	Geographie 2	Geographie 2
7.	Oberlehrer Dr. Maennel, 20 St.	IIB.	Latein 5	Latein 5	Latein 5	Latein 5										
8.	Ordentlicher Lehrer Dr. Günther, 20 St.	IV^{o}.							Rechnen 1	Rechnen 1	Deutsch 3 Rechnen 1	Deutsch 3 Latein 7	Rechnen 4			
9.	Ordentl. Lehrer Flade, 21 St.	—				Mathematik 5				Mathematik 4	Geometrie 4			Rechnen 4	Naturgesch. 2	Naturgesch. 2
10.	Ordentl. Lehrer Lambert, 22 St.	IIIB^{o}.			Geschichte 2	Geschichte 2 Deutsch 3		Geschichte 2		Latein 6 Französisch 4 Deutsch 3						
11.	Ordentl. Lehrer Dr. Mahrenholtz, 22 St.	IIIB^{m}.			Englisch 3			Englisch 4	Latein 6	Englisch 4	Geschichte 2		Deutsch 3			
12.	Ordentl. Lehrer Dr. Schröder, 22 St.	IIIA.						Religion 2 Mathematik 5 Deutsch 3	Religion 2 Naturgesch. 2 Mathematik 4		Religion 2		Religion 2			
13.	Ordentl. Lehrer Lange, 21 St.	V^{m}.							Deutsch 3		Latein 7	Religion 2	Latein 7	Religion 2		
14.	Ordentl. Lehrer Dr. Perle, 22 St.	IV^{m}.				Französisch 4		Französisch 4			Französisch 5		Französisch 5	Deutsch 3	Geschichte 1	
15.	Wissenschaftl. Hilfsl. Rühlemann, 20 St.	V^{o}.				Englisch 3			Geschichte 2	Geschichte 2		Französisch 5 Geschichte 2	Geschichte 1	Französisch 5		
16.	Lehrer Hennig, 25 St.	VI.											Schreiben 2	Schreiben 2 Geschichte 1	Schreiben 2 Rechnen 5 Deutsch 3	Schreiben 2 Rechnen 5 Deutsch 3
17.	Zeichenlehrer Boltze, 26 St.	—	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2		Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2
18.	Hilfslehrer Dr. Müllensiefen, 20 St.	VI^{m}.						Latein 6							Latein 8 Religion 3	Religion 3
19.	Hilfslehrer Lic. Bestmann, 7 St.	—												Latein 7		
20.	Hilfslehrer Dr. Herrmann, 2 St.	—									Geographie 2					
21.	Cand. prob. Dr. Schmidt, 4 St.	—							Französisch 4							
22.	Cand. prob. Dr. Schwarz, 7 St.	—							Englisch 4 Geographie 2							Geschichte 1
23.	Kandidat Dr. Wehrmann, 8 St.	—														Latein 8
24.	Gesanglehrer Zehler, 8 St.	—	Männergesang 1 St. Singen in 2 Chören; je 1 St.								Singen 1	Singen 1	Singen 1	Singen 1	Singen 1	
25.	Turnlehrer Höpfner	—			Turnen in 10 Riegen 2 St.			Turnen der Vorturner 1 St.								

II. B. Die Lehrer und ihre Lehrstunden. (Winter-Semester.)

№	Namen.	Ordinat.	I A.	I B.	II A.	II B.		III A.	III B°.	III Bᵐ.	IV°.	IVᵐ.	V°.	Vᵐ.	VI.
1.	Direktor Dr. Schrader, Inspektor, 13 St.	I A.	Mathematik 5	Mathematik 5 Mechanik 3											
2.	Oberlehrer Professor Hölzke, 18 St.	I B.	Französisch 4 Englisch 3	Französisch 4 Englisch 3	Französisch 4										
3.	Oberlehrer Professor Dr. Richter, 19 St.	II A.	Religion 2 Deutsch 3	Religion 2 Deutsch 3	Religion 2 Deutsch 3	Religion 2		Religion 2							
4.	Oberlehrer Dr. Sommer, 19 St.	—	Physik 3		Mathematik 5 Physik 3	Physik 3					Geometrie 4 Rechnen 1				
5.	Oberlehrer Dr. Lehmann, 22 St.	—	Geschichte 2 Geographie 1	Geschichte 2 Geographie 1	Geographie 1	Geographie 1		Geographie 2		Geographie 2	Geographie 2	Geographie 2	Geographie 2	Geographie 2	Geographie 2
6.	Oberlehrer Dr. Maennel, 22 St.	II B.	Latein 5	Latein 5	Latein 5	Latein 5		Geschichte 2							
7.	Ordentlicher Lehrer Dr. Günther, 20 St.	IV°.							Rechnen 1	Rechnen 1	Latein 7 Deutsch 3	Rechnen 1 Deutsch 3		Rechnen 4	
8.	Ordentlicher Lehrer Flade, 21 St.	—				Mathematik 5			Mathematik 4	Mathematik 4		(Geometrie 4)	Naturgesch. 2		Naturgesch. 2
9.	Ordentlicher Lehrer Lambert, 22 St.	III B°.			Geschichte 2	Geschichte 2 Deutsch 3			Deutsch 3 Französisch 4 Latein 6 Geographie 2						
10.	Ordentlicher Lehrer Dr. Mahrenholtz, 22 St.	III Bᵐ.			Englisch 3			Englisch 4		Französisch 4 Englisch 4			Latein 7		
11.	Ordentlicher Lehrer Dr. Schröder, 23 St.	III A.			Chemie 2	Naturgesch. 2		Mathematik 5 Naturgesch. 2	Religion 2	Religion 2 Naturgesch. 2	(Naturgesch. 2)	(Naturgesch. 2)		(Naturgesch. 2)	
12.	Ordentlicher Lehrer Lange, 23 St.	Vᵐ.						Deutsch 3			Religion 2	Latein 7	Religion 2	Religion 2 Latein 7	
13.	Ordentlicher Lehrer Rühlemann, 22 St.	V°.				Englisch 3			Geschichte 2	Geschichte 2	Französisch 5 Geschichte 2	Geschichte 2	Französisch 5	Geschichte 1	
14.	Wissenschaftl. Hilfsl. Dr. Müllensiefen, 22 St.	VI.						Latein 6		Deutsch 3		Religion 2			Religion 3 Latein 8
15.	Wissenschaftl. Hilfslehrer Dr. Schwarz, 22 St.	IVᵐ.				Französisch 4		Französisch 4	Englisch 4			Französisch 5		Französisch 5	
16.	Lehrer Hennig, 26 St.	—											Rechnen 4 Schreiben 2 Deutsch 3 Geschichte 1	Schreiben 2 Deutsch 3	Schreiben 2 Rechnen 5 Deutsch 3 Geschichte 1
17.	Zeichenlehrer Lehmann, 24 St.	—	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2		Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2
18.	Probandus Dr. Hammerschmidt, 8 St.	—	Chemie 2	Chemie 2					Naturgesch. 2		Naturgesch. 2				
19.	Probandus Weise, 8 St.	—										Geometrie 4 Naturgesch. 2		Naturgesch. 2	
20.	Probandus Dr. Wehrmann, 6 St.	—								Latein 6					
21.	Gesanglehrer Zehler, 8 St.	—	Männergesang 1 St. Singen in 2 Chören; je 1 St.							Singen 1	Singen 1	Singen 1	Singen 1	Singen 1	
22.	Turnlehrer Höpfner	—	Turnen in 10 Riegen 2 St.				Turnen der Vorturner 1 St.								

III. Allgemeine Lehrverfassung.

In den Parallelklassen mit Wechselversetzung geht der Unterricht an der Osterklasse von Ostern bis Ostern, in der Michaelisklasse von Michaelis bis Michaelis.

Sexta. Zwei Klassen seit Ostern, von Michaelis ab nur eine Klasse.

Ordinarius des Cötus A.: Dr. Müllensiefen, im Sommer des Cötus B.: Lehrer Hennig.

Religion. Auswahl von Geschichten aus dem A. T. nach Preuß mit den nötigen Denk- und Kernsprüchen gelernt; 1. und 3. Hauptstück, 6 Kirchenlieder. 3 St. Wissenschaftl. Hilfslehrer Dr. Müllensiefen.

Deutsch. Lesen mit Rücksicht auf korrekte Aussprache und Interpunktion, sowie verbunden mit orthographischen und mündlichen Übungen. Unterscheidungen der Wörterklassen; eingehende Lehre vom Haupt- und Eigenschaftsworte; Deklinieren und Konjugieren; Kenntnis des einfachen und erweiterten Satzes, anknüpfend an Lesestücke, die von den Schülern zu Hause gelesen sind. Vierzehntägige orthographische Diktate und häusliche schriftliche Übungen. — 3 St. Lehrer Hennig.

Latein. Einübung der regelmäßigen Deklination der Substantiva und Adjektiva, der Komparation, des Hilfsverbums Sum und seiner Komposita, der Konjugationen im Aktiv und Passiv (mit Ausnahme der Deponentia), der Numeralia, Pronomina und Adverbia. Satzbildung und Unterscheidung der Satzteile, Verwandlung ins Passivum. Übersetzung und Vokabeln nach Hennings Elementarbuch für VI. Wöchentliche Scripta. 8 St. Wissenschaftl. Hilfslehrer Dr. Müllensiefen, im Sommer im Oster-Cötus: Dr. Wehrmann.

Geschichte. Die bekanntesten griechischen Sagen. Im Sommer: Im Michaelis-Cötus: Dr. Perle, im Oster-Cötus: Cand. prob. Dr. Schwarz.

Geographie. Geographische Vorbegriffe, sowie das Wichtigste aus der Globuslehre. Australien und Polynesien, Afrika und Amerika. 2 St. Oberlehrer Dr. Lehmann.

Rechnen. Kopf- und Tafelrechnen. Befestigung der vier Species in unbenannten und benannten Zahlen. Resolution und Reduktion benannter ganzer Zahlen. Vorübung zu den Brüchen, Resolution benannter Brüche. Addition und Subtraktion der Brüche. 5 St. Lehrer Hennig.

Naturkunde. Ordnung und Erweiterung der Vorstellungen, welche die Schüler aus dem gesamten Naturgebiete schon vor der Schule gewonnen haben. 2 St. Ordentl. Lehrer Flade.

Zeichnen. Linien im allgemeinen. Gerade Linien nach ihrer Richtung. Mehrere Gerade nach ihrer Lage zu einander. Winkel. Geradlinige Flächenfiguren. Vierecke. Das Quadrat und Formen innerhalb desselben. Hierbei kommen zur Einübung: Zwei-, Vier-, Acht-, Drei-, Sechs- u. s. w. Teilung. Das regelmäßige Achteck. Das Drei- und Sechseck. Krumme Linien: Kreislinie. Dreiviertel-, Halb- und Viertelkreise. Ellipse. Im Sommer: Maler Boltze, im Winter: Zeichenlehrer Lehmann.

Schönschreiben. Nach Henzes deutscher Preis-National-Handschrift. 2 St. Lehrer Hennig.

Quinta. Zwei Klassen.

Ordinarius der Oster-Quinta: Wissenschaftl. Hilfslehrer Rühlemann.

Ordinarius der Michaelis-Quinta: Ordentl. Lehrer Lange.

Religion. Leben, Thaten und Gleichnisse Jesu nach den Evangelien, mit Sprüchen und Erklärungen. Inhalt der Apostelgeschichte. 2 St. Im Sommer: Ordentl. Lehrer Dr. Schröder, im Winter: Ordentl. Lehrer Lange.

Deutsch. Fortgesetzte Übungen im Lesen. Lektüre ausgewählter prosaischer und poetischer Stücke aus Hopf und Paulsiek. Auswendiglernen einzelner Gedichte. — Die Lehre vom Fürwort, von der Rektion der Präpositionen. Der einfache und zusammengesetzte Satz, Interpunktionslehre. — Orthographische Diktate, die Aufsatzübungen lehnen sich an das besprochene Lesestück an. 3 St. In beiden Klassen: Hennig.

Latein. Wiederholung des Pensums der Sexta: Deponentia, Unregelmäßigkeiten der Deklination und Konjugation, der Zahlen und Pronomina. Mündliche Übungen aus Hennings, Teil II, Kap. I—XI. Extemporalien. 7 St. In VO im Sommer: Lic. Bestmann, im Winter: Dr. Mahrenholtz; im VM Ordentl. Lehrer Lange.

Französisch. Plötz, Elementarbuch, Lekt. 1—60. Besondere Beachtung der Aussprache, Sprechübungen. Alle 14 Tage eine Klassenarbeit. 5 St. In VM: Im Sommer: Ordentl. Lehrer Dr. Perle; im Winter: Wissenschaftl. Hilfslehrer Dr. Schwarz. In VO: Ordentl. Lehrer Rühlemann.

Geschichte. Sagen aus der alten deutschen Welt. Biographieen aus der älteren deutschen Geschichte. 1 St. Im Sommer in beiden Klassen: Rühlemann; im Winter in VM: Rühlemann, in VO Hennig.

Geographie. Asien und Europa, besonders Deutschland. 2 St. In beiden Klassen: Oberlehrer Dr. Lehmann.

Naturbeschreibung. Im Sommer Botanik: Die Unterscheidung und Bezeichnung der Formen: Wurzel, Stengel, Blatt, Blüte, Frucht; Blätter-Herbarium, Zeichnungen. Beschreibung einzelner Pflanzen aus den wichtigsten einheimischen Familien. — Im Winter Zoologie: Beschreibung einzelner Vertreter der zoologischen Hauptgruppen. 2 St. Im Sommer in beiden Klassen: Oberlehrer Geist, im Winter in VO: Ordentl. Lehrer Flade, in VM: Cand. prob. Weise.

Rechnen. Die vier Species der gemeinen Brüche und der Decimalbrüche. Eine Stunde des zweiten Semesters wurde zum geometrischen Anschauungsunterricht verwendet. 4 St. In VO: im Sommer Ordentlicher Lehrer Flade, im Winter Hennig, in VM: Ordentlicher Lehrer Dr. Günther.

Zeichnen. Vervollständigung des Sexta-Pensums. Die Formenelemente wurden in ihrer Stellung im Ornamente gezeigt. Neu tritt hinzu die Fünf-, Sieben- u. s. w. Teilung. Mit den krummlinigen Figuren beginnen Übungen im Tuschen. Gezeichnet werden Blattformen innerhalb des Kreises, die Spirale, Blütenformen, Schnecke, Blattformen, denen unregelmäßige geradlinige Figuren zu Grunde liegen, Pflanzenteile mit frei geschwungenen Linien. Eisenornamente. Anweisung zum Auffinden der Idealformen von Pflanzenblättern. Im Winter in beiden Klassen: Zeichenlehrer Lehmann.

Schönschreiben. Wie in Sexta.

Quarta. Zwei Klassen.

Ordinarius der Oster-Quarta: Ordentl. Lehrer Dr. Günther.

Ordinarius der Michaelis-Quarta: Im Sommer: Ordentl. Lehrer Dr. Perle; im Winter: Wissenschaftl. Hilfslehrer Dr. Schwarz.

Religion. Lernen und Worterklärung der 5 Hauptstücke aus dem Lutherischen Katechismus. Lesen ausgewählter Stücke des A. T. Wiederholung der in Sexta gelernten Erzählungen aus dem A. T. Lesen und Erklärung des Evangeliums Matthäi und der dem Lukas eigentümlichen Parabeln (Kap. 10. 15. 16. 18) verbunden mit Wiederholungen der in Quinta gelernten Erzählungen aus dem N. T. 6 Kirchenlieder. 2 St. In IVO: Ordentl. Lehrer Lange, in IVM: im Sommer Dr. Schröder, im Winter Dr. Müllensiefen.

Deutsch. Ausdrucksvolles Lesen, Eingehen auf Inhalt und Form des Gelesenen an entsprechenden Lesestücken. Das Adjektivum, die Präpositionen und das Verbum. Alle 14 Tage ein Aufsatz, der sich an ein Lesestück anschließt. 3 St. Ordentl. Lehrer Dr. Günther.

Latein. Repetition der früheren Pensen, besonders Erstrebung der Sicherheit und Gewandtheit in der Formenlehre. Acc. und Nom. c. Inf., Ablat. absol., Städtenamen. Übersetzt sind aus Hennings T. II, 42—54 die meisten Fabeln, aus der Geschichte 1—30. — Syntax: die Hauptlehren der Syntaxis convenientiae und der Kasuslehre § 129—186 der Ellendt-Seyffertschen Grammatik. Im Cornel wurden übersetzt: Miltiades, Cimon, Aristides, Themistocles und Alcibiades. Extemporalien. 7 St. In IVO: Ordentl. Lehrer Dr. Günther, in IVM: Ordentl. Lehrer Lange.

Französisch. Plötz, Elementarbuch, Lekt. 60—85. Repetition der früheren Pensen. 14tägige Klassenarbeiten. 5 St. In IVO Ordentl. Lehrer Rühlemann, in IVM im Sommer: Ordentl. Lehrer Dr. Perle, im Winter: Wissenschaftl. Hilfslehrer Dr. Schwarz.

Geschichte. Griechische Geschichte bis auf Alexander d. Gr. — Römische Geschichte bis zu den Bürgerkriegen. 2 St. Im Sommer: in IVM Ordentl. Lehrer Dr. Mahrenholtz, in IVO Ordentl. Lehrer Rühlemann, im Winter: in beiden Klassen: Ordentl. Lehrer Rühlemann.

Geographie. Vorläufiges aus der allgemeinen Erdkunde (Kirchhoff S. 35—40). Außereuropäische Erdteile (Kirchhoff S. 41—94). 2 St. In IVO: Oberlehrer Dr. Lehmann. In IVM im Sommer: Wissenschaftl. Hilfslehrer Dr. Hermann, im Winter: Oberlehrer Dr. Lehmann.

Geometrie. Elementarischer Anschauungsunterricht. Von den Grundsätzen, Linien, Winkeln, ebenen Figuren, im besondern von den Dreiecken und den auf den Kongruenzsätzen basierenden Aufgaben. Von den Vierecken und Vielecken. Gleichheit der Flächeninhalte. Pythagoräischer Lehrsatz. Anweisung zur selbständigen Lösung von entsprechenden Aufgaben in der Klasse. 4 St. In IVO: Oberlehrer Dr. Sommer, in IVM im Sommer: Ordentlicher Lehrer Flade, im Winter: Cand. prob. Weise.

Rechnen. Einfache und zusammengesetzte Regeldetri. Zinsrechnung. 1 St. In IVO Oberlehrer Dr. Sommer, in IVM: Ordentl. Lehrer Dr. Günther.

Naturbeschreibung. Im Sommer: Botanik. Wiederholung des Pensums von V. — Linneisches System. Anleitung zum selbständigen Beschreiben von Pflanzen. Botanische Exkursionen und Anlage von Pflanzen-Herbarien. Im Winter: Zoologie. Die Rückgrattiere nach Gruppen in ihren wichtigsten Vertretern behandelt. 2 St. Im Sommer in beiden Klassen: Oberlehrer Geist, im Winter in IVM: Cand. prob. Dr. Hammerschmidt, in IVO: Cand. prob. Weise.

Zeichnen. Körperzeichnen (Drahtmodelle und Vollkörper). Zur Einübung kommen die für das Körperzeichnen unbedingt nötigen perspektivischen Gesetze. Sie finden ihre Begründung in der Anschauung. Schattieren ist ausgeschlossen. Geometrisches Zeichnen. Anweisung über den rechten Gebrauch der Reißschiene und des Dreiecks. Geradlinige geometrische Ornamente. Von Farben kommen zur Einübung: Schwarz, Grau, Weiß; primäre und sekundäre Farben; Gold. Freihandzeichnen. Die bisher gelernten Formen werden zu abgeschlossenen Mustern zusammengesetzt. 2 St. Im Winter: Zeichenlehrer Lehmann.

Unter-Tertia. Zwei Klassen.

Ordinarius der IIIBO: Ordentl. Lehrer Lambert.

Ordinarius der IIIBM: Ordentl. Lehrer Dr. Mahrenholtz.

Religion. Eingehende Erklärung des Lutherischen Katechismus nach Kurtz: Christliche Religionslehre. Das erste Hauptstück, der erste und zweite Artikel des zweiten Hauptstückes. Dazu die nötigen Bibelsprüche und Lieder. 2 St. Im Sommer: Ordentl. Lehrer Lange, im Winter: Ordentl. Lehrer Dr. Schröder.

Deutsch. Lesen und Erklären poetischer und prosaischer Stücke aus Hopf und Paulsiek. Memorierübungen. Aufsätze. 3 St. In IIIBO: Ordentl. Lehrer Lambert. Im Sommer in IIIBM: Ordentl. Lehrer Lange, im Winter: Wissenschaftl. Hilfslehrer Dr. Müllensiefen.

Latein. Repetition der Formenlehre. Wiederholung und weitere Ausführung der Kasuslehre, Ellendt-Seyffert § 129—186. Mündliches Übersetzen aus Hennings III. 14 tägige Extemporalien. Gelesen: In IIIBM im Winter: Caes. b. g. I. 1. VI. 13—20. II. 1—33. Caesar de bello gallico I. 1—29 und IV. 6 St. Im Winter in IIIBO: Ordentl. Lehrer Lambert, in IIIBM im Sommer: Dr. Mahrenholtz, im Winter: Cand. prob. Dr. Wehrmann.

Französisch. Plötz, Schulgrammatik, Lekt. 1—23. Unregelmäßige Verba. Eingehende Repetition der vorhergehenden Pensen. Lektüre aus Plötz, Lectures choisies. 14 tägige Extemporalien. 4 St. In IIIBO: Ordentl. Lehrer Lambert. In IIIBM im Sommer: Cand. prob. Schmidt, im Winter: Ordentl. Lehrer Dr. Mahrenholtz.

Englisch. Regelmäßige Formenlehre, Übersetzung der englischen und der meisten deutschen Übungsstücke aus Gesenius I (erste und zweite Reihe). Regeln der Aussprache nach Gesenius. Unregelmäßige Formenlehre. 14 tägige Extemporalien. 4 St. In IIIBO im Sommer: Ordentl. Lehrer Dr. Mahrenholtz, im Winter: Wissenschaftl. Hilfslehrer Dr. Schwarz. In IIIBM im Sommer: Cand. prob. Dr. Schwarz, im Winter: Ordentl. Lehrer Dr. Mahrenholtz.

Geschichte. Deutsche Geschichte bis zur Reformation. In IIIBO im Sommer: Ordentl. Lehrer Lambert. Im Winter: Ordentl. Lehrer Rühlemann, in IIIBM: Ordentl. Lehrer Rühlemann.

Geographie. Europa außer Deutschland (Kirchhoff S. 96—145). 2 St. In IIIBO im Sommer: Oberlehrer Dr. Lehmann, im Winter: Ordentl. Lehrer Lambert; in IIIBM im Sommer: Cand. prob. Dr. Schwarz, im Winter: Oberlehrer Dr. Lehmann.

Mathematik. Repetition der früheren Pensen der Planimetrie. Lehre vom Kreise. Geometrische Örter. Lösung geometrischer Aufgaben. — Die vier Species der Algebra. Potenzlehre. Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten. 4 St. In IIIBO: Ordentl. Lehrer Flade, in IIIBM im Winter: Ordentl. Lehrer Dr. Schröder.

Rechnen. Gesellschafts- und Tara-Rechnung. Zins- und Mischungsrechnung. 1 St. Ordentl. Lehrer Dr. Günther.

Naturbeschreibung. Im Sommer Botanik. Diagrammatik. Die leichteren Familien des natürlichen Systems aus den Gruppen der Dicotylen und Monocotylen. Im Winter Zoologie. Tunicaten. Mollusken. Brachiopoden. Arthropoden. Echinodermen. Im Sommer: Oberlehrer Geist und ordentl. Lehrer Dr. Schröder, im Winter: Ordentl. Lehrer Dr. Schröder und Cand. prob. Dr. Hammerschmidt.

Zeichnen. Körperzeichnen. Ebenflächige Vollkörper. Beleuchtung und Schattierung. Geometrisches Zeichnen. Zirkelzeichnen. Zur Einübung kommen krummlinige geometrische Verzierungen. Der Farbenkreis wird durch tertiäre Farben erweitert. Freihandzeichnen. Palmetten und maurische Muster. 2 St. Im Winter: Zeichenlehrer Lehmann.

Ober-Tertia.

Ordinarius: Ordentl. Lehrer Dr. Schröder.

Religion. Eingehende Erklärung des 3. Artikels, des 3., 4. und 5. Hauptstücks nach Kurtz, Christl. Religionslehre. 2 St. Im Sommer: Ordentl. Lehrer Dr. Schröder, im Winter: Prof. Dr. Richter.

Deutsch. Gelesen und erklärt wurden außer den bedeutendsten Balladen von Schiller einzelne Gedichte des Lesebuchs. Übungen im Disponieren im Anschluß an die Lektüre. Aufsätze. 3 St. Im Sommer: Ordentl. Lehrer Dr. Schröder, im Winter: Ordentl. Lehrer Lange.

Latein. Wiederholungen aus der Formenlehre. Erweiterung der bisher erworbenen syntaktischen Kenntnisse. Die Lehre vom Gebrauche der Tempora, des Indikativs, des unabhängigen Konjunktivs und der geläufigsten Konjunktionen. Die einschlägigen Beispiele aus Meirings Übungsbuche wurden übersetzt. Extemporalien. Lektüre: Caesar d. b. G., V, 1—52; I, 1; VII mit Auswahl. Im Anschluß an die Lektüre das Hauptsächlichste von der or. obl. 6 St. Wissenschaftl. Hilfslehrer Dr. Müllensiefen.

Französisch. Plötz, Schulgramm. Lektion 36—55. Lehre von den Präpositionen, der Wortstellung, von den Zeiten, den Moden, Artikel. 14tägige Klassenarbeiten. Gelesen: Im Sommer: Voltaire, Charles XII. ed. Goebel, im Winter: Ploetz, Manuel: Toepffer, Le Lac des Gers; Erckmann-Chatrian: Le Blocus. Lafontaine, Fables. Sprechübungen im Anschluß an die Lektüre. 4 St. Im Sommer: Ordentl. Lehrer Dr. Perle, im Winter: Wissenschaftl. Hilfslehrer Dr. Schwarz.

Englisch. Lehre vom Artikel und Hauptwort, das Wichtigste aus der Kasuslehre. Gelesen wurde Hume, hist. of England im Auszug I u. II. Extemporalien teils aus der Lektüre, teils über das grammat. Pensum. Zeitweilige Repetition des in IIIb¹ und IIIb² Erlernten. 4 St. Ordentl. Lehrer Dr. Mahrenholtz.

Geschichte. Deutsche Geschichte unter besonderer Berücksichtigung der brandenburgisch-preußischen von der Reformation bis zur Gegenwart. Repetitionen. 2 St. Ordentl. Lehrer Lambert, im Winter: Oberlehrer Dr. Maennel.

Geographie. Deutschland. (Kirchhoff S. 149—217). 2 St. Oberlehrer Dr. Lehmann.

Mathematik. Die Proportionslehre. Die einfachen Verhältnisse bei geradlinigen Figuren. Die einfachen Verhältnisse beim Kreise. Geometrische Örter. Lösung von geometrischen Aufgaben mit besonderer Betonung ihrer Analysis. Wiederholung der früheren Pensen. Wiederholungen aus der Arithmetik mit besonderer Betonung der Quotienten-, Potenz- und Wurzellehre. Alle 14 Tage ein Extemporale. 5 St. Ordentl. Lehrer Dr. Schröder.

Naturbeschreibung. Im Sommer: Botanik: Die schwierigeren Familien des natürlichen Systems aus den Gruppen der Dicotylen und Monocotylen. Coniferen. Cycadeen: Im Winter: Zoologie: Vermes. Coelenterata. Protozoa. — Anatomie und Physiologie des menschlichen Körpers. 2 St. Dr. Schröder.

Zeichnen. Körperzeichnen. Krummflächige Vollkörper. Geometrisches Zeichnen. Verschiedene geometrische Konstruktionen, gotisches Maßwerk, geometrische Ansichten von Vasen. Freihandzeichnen. Übungsbeispiele aus einzelnen Stilarten, besonders den griechischen. Farben finden Berücksichtigung. 2 St. Im Winter: Zeichenlehrer Lehmann.

Unter-Sekunda.

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Maennel.

Religion. Heilige Geschichte des alten Bundes auf Grund eingehender Bibellektüre — Erklärung und Erlernung von Psalmen. 2 St. Prof. Dr. Richter.

Deutsch. Gelesen und erklärt wurden Goethes: Hermann und Dorothea, Schillers: Wilhelm Tell, Kleists: Prinz Friedrich von Homburg, ausgewählte Gedichte und ausgewählte historische Aufsätze. Freie Vorträge in Verbindung mit Privatlektüre. Übungen im Disponieren verschiedener Stoffe. Folgende Themata wurden bearbeitet: Im Sommersemester: 1) Der belebende Hauch des Frühlings in der Natur und im Menschenleben. 2) Lob des Landmanns resp. des Kaufmanns nach Goethes Hermann und Dorothea. 3) Inhaltsangabe von Goethes Hermann und Dorothea. 4) Freies Thema. Im Wintersemester: 1) Die Lutherfeier in Halle a/S. 2) „O, eine edle Himmelsgabe ist das Licht des Auges!" 3) Die Mordthat Tells verglichen mit derjenigen des Johannes Parricida. 4) Freies Thema. 3 St. Ordentl. Lehrer Lambert.

Latein. Repetition und Erweiterung früherer Pensen, insbesondere der Kasus- und Tempuslehre. Die Lehre von den Konjunktionen, vom Infinitiv, dem Acc. cum inf., der indirekten Rede, vom Gerund. und Supinum. Die Beispiele dazu aus Meirings Übungsbuch wurden übersetzt. Gelesen wurden: Caesar d. b. civ. I, 1—37 und von Ovids Metamorphosen Abschnitte aus dem III. Buche. Im Anschluß daran wurden die Elemente der Prosodie und das Notwendigste über den Bau des daktylischen Hexameters mitgeteilt. Auch wurde eine Anzahl Verse auswendig gelernt. Exercitien und Extemporalien. 5 St. Oberlehrer Dr. Maennel.

Französisch. Plötz, Schulgrammatik Lektion 56—69. Lehre von dem Artikel, dem Adjektiv und dem Adverb, sowie eingehende Repetition des Pensums von Obertertia. 14tägige Klassenarbeiten. Gelesen wurde im Sommer: Fénélon: Aventures de Télémaque, im Winter: Histoire de mon temps von Friedrich dem Großen I, ed. Knörich. Sprechübungen im Anschluß an die Lektüre. 4 St. Im Sommer: Ordentl. Lehrer Dr. Perle, im Winter: Wissenschaftl. Hilfslehrer Dr. Schwarz.

Englisch. 3 St. I. Lektüre: Hume: History of England. Im Sommer im Anschluß daran Retrovertier- und Sprechübungen. Extemporalien im Anschluß an die Lektüre. II. Grammatik. Lehre vom Adjektiv, Adverb und den Kasus [in engl. Sprache]. 3 St. Ordentl. Lehrer Rühlemann.

Geschichte. Im Sommer: Griechische Geschichte bis auf Alex. d. Gr.; im Winter: Römische Geschichte bis zum Beginn der Kaiserzeit. 2 St. Ordentl. Lehrer Lambert.

Geographie. Mathematische und physikalische Geographie. (Kirchhoff S. 223—252). 1 St. Oberlehrer Dr. Lehmann.

Mathematik. Potenzen mit gebrochenen und negativen Exponenten. Die Lehre vom Imaginären. Die Logarithmen. Algebraische Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten. Algebraische Gleichungen des zweiten Grades mit einer und zwei Unbekannten. Einübung durch zahlreiche Beispiele. Lösung von Wortaufgaben. Lösung solcher Gleichungen höherer Grade, deren auf Null reduzierter Ausdruck sich leicht erkennbar in Faktoren zerlegen läßt. Die harmonische Teilung, die Potenzialität und Ähnlichkeit der Kreise. Geometrische Örter. Bezügliche geometrische Aufgaben. Goniometrie. Repetition des ganzen Ober-Tertia-Pensums. Alle 2 Wochen ein Extemporale. 5 St. Ord. Lehrer Flade.

Physik. Die mechanischen Erscheinungen besonders der tropfbar flüssigen und luftförmigen Körper. Lösung leichter Aufgaben. Akustik. Magnetismus. Alle 6 Wochen je 2 Repetitions-Klassenscripta. 3 St. Oberlehrer Dr. Sommer.

Naturkunde. Im Sommer: Die wichtigsten Gruppen der Kryptogamen. Daran anschließend die Elemente der Anatomie und Physiologie der Pflanzen. Pflanzengeographie. — Im Winter: Die Elemente der Geologie, Paläontologie und Mineralogie. 2 St. Im Sommer: Oberlehrer Geist, im Winter: Ordentl. Lehrer Dr. Schröder.

Zeichnen. Zeichnen nach Gipsmodellen, die charakteristischen Ornamentformen verschiedener Stile. Elemente der Projektionslehre. Freihandzeichnen wie in Ober-Tertia. 2 St. Im Winter: Zeichenlehrer Lehmann.

Ober-Sekunda.

Ordinarius: Prof. Dr. Richter.

Religion. Geschichte der Gründung des Reiches Gottes nach dem N. T. Sachliche und paränetische Erklärungen der Evangelien und der Apostelgeschichte. 2 St. Prof. Dr. Richter.

Deutsch. Lessings „Minna von Barnhelm“ und Goethes „Egmont“, sowie einige Schillersche Balladen wurden im Sommersemester — Schillers „Wallenstein“ und Goethes „Götz von Berlichingen“ im Wintersemester gelesen, erklärt und zu Vorträgen benutzt. Referate aus der Privatlektüre. Die Themata für die Aufsätze waren im Sommer: 1) Die Volksscenen in Goethes Egmont, ihr Zweck und ihre Bedeutung. 2) In welchen Punkten und aus welchen Gründen weicht Goethe in seinem Egmont von der Geschichte ab? 3) Was giebt einem Volke weltgeschichtliche Bedeutung? 4) Examenarbeit: Der Wald, seine Natur, seine Schönheit und sein Nutzen. Deutsche Aufsatzthemata im Wintersemester: 1) Ritter und Mönch, Götz und Bruder Martin an der Scheide des Mittelalters und der Neuzeit. 2) Industrie im Gebirge und Flachland. 3) Fünf Themata aus Götz von Berlichingen zur Auswahl. 4) Ein Besuch in Wallensteins Lager. 3 St. Professor Dr. Richter.

Latein. Die grammatischen Kenntnisse wurden zumeist im Anschluß an Übersetzungen aus Meirings Übungsbuch befestigt und gelegentlich erweitert. Die Lehre vom Infinitiv und Participium, vom Gerund. und Sup. Exercitien und Extemporalien. Lektüre: Caesar d. b. civ. II. und Ovid. Metam. VIII. Einige Verse wurden memoriert. 5 St. Oberlehrer Dr. Maennel.

Französisch. Grammatik und Extemporalien nach Plötz über Pronoms, Régime des Verbes, Infinitiv, Conjonctions, les Modes et les Participes: daneben im Sommer Wiederholung der Regeln über den Artikel und die Adjektiva. Lektüre aus Plötz: Manuel, Corneille: Cid; Racine: Britannicus, Guizot und Thiers; Scribe: la Czarine. Das Gelesene wurde französisch interpretiert und in der nächsten Stunde zu Sprechübungen benutzt. Extemporalien und Exercitien über das grammatische Pensum und gelegentlich Auszüge aus der Lektüre. 4 St. Professor Hölzke.

Englisch. 3 St. I. Lektüre. Macaulay, biogr. Essays. Bertrand Barère und Frederic the Great. Im Anschluß daran Retrovertier- und Sprechübungen. II. Grammatik. Lehre vom Fürwort und Zeitwort in engl. Sprache nach Gesenius II. Extemporalien aus der Lektüre. Dr. Mahrenholtz.

Geschichte. Geschichte des Mittelalters vom ersten Auftreten der Deutschen ab. Übersicht über die Geschichte der römischen Kaiserzeit. Repetitionen. 2 St. Ordentl. Lehrer Lambert.

Geographie. Außereuropäische Erdteile. (Kirchhoff S. 41—94). 1 St. Oberl. Dr. Lehmann.

Mathematik. II. Teil der Trigonometrie und die Elemente der Tetragoniometrie. Planimetrische Berechnungen. Anwendung der Algebra auf die Planimetrie. — I. Teil der Stereometrie (bis an die Berechnung der Körper). Schwierigere Gleichungen 2. Grades mit einer und mehreren Unbekannten und Gleichungen höherer Grade, die sich auf Gleichungen vom 2. Gr. zurückführen lassen. Die arithmetische und geometrische Reihe. Im ersten Vierteljahre jedes Semesters 3 Terminarbeiten, im zweiten Vierteljahre alle acht Tage ein Repetitions-Klassenscriptum über das Gesamt-Pensum von Unter- und Ober-Sekunda. 5 St. Oberlehrer Dr. Sommer.

Physik. Optik; Spannungselektricität; Galvanismus; Thermoelektricität; Induktionselektricität; Magnetelektricität. Alle sechs Wochen je zwei Repetitions-Klassenscripta. 3 St. Oberl. Dr. Sommer.

Chemie. Im Sommer: Die leichten Metalle und deren wichtigste Verbindungen. Im Winter: Die wichtigsten Metalloide und deren wichtigste Verbindungen. — Experimente. Stöchiometrische Übungen. 2 St. Im Sommer: Oberlehrer Geist, im Winter: Ordentl. Lehrer Dr. Schröder.

Zeichnen. Zeichnen nach Gipsmodellen, schwierigere Ornamentformen. Projektionslehre. Schattenkonstruktion. Tuschen mit abgesetzten Tönen. Freihandzeichnen. Akanthusblätter, umfangreichere Flachornamente. Farbenharmonie. 2 St. Im Winter: Zeichenlehrer Lehmann.

Unter-Prima.

Ordinarius: Oberlehrer Professor Hölzke.

Religion. Christliche Kirchengeschichte in Lebensbildern mit Hervorhebung des Zeitalters der Apostel und der Reformation. 2 St. Professor Dr. Richter.

Deutsch. Im Sommer: Einführung in die Litteratur des Mittelalters, verbunden mit Lektüre aus dem Nibelungenliede, der Gudrun und den Gedichten Walters von der Vogelweide. Im Winter: Einführung in die Dichtungen Klopstocks und die Werke Lessings, verbunden mit Lektüre Klopstockscher Oden und ausgewählter Abschnitte aus Lessings Laokoon und der Hamburgischen Dramaturgie. S. u. W. Freie Vorträge in Verbindung mit der Privatlektüre, Dispositionsübungen. Die Themata für den deutschen Aufsatz waren a) im Sommersemester: 1) Welche Person steht im Mittelpunkt der Handlungen im Nibelungenliede? 2) Paulus ein Apostel Christi. 3) Die Mannigfaltigkeit des Interesses an der Natur. 4) Inwiefern vereinigen sich in Luthers Persönlichkeit das echt deutsche Wesen und das tiefste Christentum? b) im Wintersemester: 1) Tellheim und Riccaut de la Marlinière. 2) Bedeutung der Kreuzzüge. 3) Bildliche und dichterische Darstellung des Laokoon. 4) Inwiefern bereitet die Reformation des Hus die von Luther vor? 5) Die Rede des Brutus und des Antonius an der Leiche Cäsars, dargestellt nach Shakespeares Julius Cäsar. 3 St. Prof. Dr. Richter.

Latein. Gelesen wurden aus Vergils Aeneis das IV. und Teile des II. Buches, sowie der größte Teil des II. Buches des Livius. Gelegentliche grammat. Repetitionen. Lateinisch-deutsche Extemporalien. 5 St. Oberlehrer Dr. Maennel.

Französisch. Repetition der Grammatik in französischer Sprache. 1 St. Durchnahme der Aufsätze und Extemporalien, 1 St. Lektüre: Scribe: les contes de la reine de Navarre und aus Plötz Manuel die Abschnitte Racine: Phèdre und die prosaischen Stücke von Bossuet, Fléchier, Massillon, Guizot, Toepffer, Sand und Planche. Themata zu den freien Arbeiten: 1) Mort de César. 2) Mort de Léonidas. 3) Marguerite, soeur de François I, à Madrid. 4) Les femmes de Weinsberg. 5) Napoléon et sa mère. 6) Le brave homme, d'après Bueger. 7) L'oeuf de Colomb. 8) Deuxième Croisade. 9) Les Romains en Allemagne. 4 St. Prof. Hölzke.

Englisch. Repetition des 2. Teils der englischen Grammatik von Gesenius, in englischer Sprache. Lektüre: Macaulay, ausgewählte Abschnitte aus b III und b I angefangen. Exercitien und Extemporalien über das grammatische Pensum. 3 St. Prof. Hölzke.

Geschichte. Neuere Geschichte von 1492 bis 1700. Repetitionen. 2 St. Oberl. Dr. Lehmann.

Geographie. Europa außer Deutschland (Kirchhoff S. 96—145). 1 St. Oberl. Dr. Lehmann.

Mathematik. Die Determinanten. Die Rechnung mit Richtungszahlen. Kombinationslehre. Die Lehre von den Faktorellen, Fakultäten und Binomialkoëffizienten. Binomischer Lehrsatz mit positiven und negativen, ganzen und gebrochenen Exponenten. Grenzwerte. Die Exponentialreihe, die logarithmische und die trigonometrischen Reihen. Beschreibende Geometrie: Die verschiedenen Projektionsmethoden. Die Grundzüge der schiefen, axonometrischen und Polarprojektion. Die orthographische Projektionsmethode. Konstruktive Auflösung der dreiseitigen Ecke. Zweiter Teil der Stereometrie. Übungen im Auflösen algebraischer, planimetrischer und trigonometrischer Aufgaben. 5 St. Dr. Schrader.

Physik. Im Sommer: Statik fester Körper. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte. Statische Momente in Bezug auf ein Zentrum und in Bezug auf eine Ebene. Die einfachen Maschinen: Hebel, Rolle, Wellenrad, schiefe Ebene, Keil und Schraube. Zusammengesetzte Maschinen: Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit. Gewicht und Schwerpunkt. Reibung. Lehre von der Festigkeit. Im Winter: Einfache Bewegung: gleichförmige, gleichförmig beschleunigte, ungleichförmig beschleunigte Bewegung. Zusammengesetzte Bewegung: Wurfbewegung, Zentralbewegung, Beweis der Ellipticität der Planetenbahnen. Kraft und Beschleunigung. Das Pendel. Trägheitsmomente. Zentrifugalität. Arbeit, lebendige Kraft, Arbeitskraft. Prinzip der lebendigen Kräfte. Lehre vom Stoß. 3 St. Dr. Schrader.

Chemie. Die Metalle (ausgenommen die der Alkalien und alkalischen Erden) und ihre Verbindungen, sowie deren natürliches Vorkommen. Mineralogie der Erze. Chemische Technik der behandelten Körper. Stöchiometrische Rechnungen. 2 St. Cand. prob. Dr. Hammerschmidt.

Zeichnen. Zeichnen nach Gipsmodellen. Ausführung in Kreide und Tuschmanier in abgesetzten Tönen. Zentralprojektion. 2 St. Im Winter: Zeichenlehrer Lehmann.

Ober-Prima.

Ordinarius: Direktor Dr. Schrader.

Religion. Im Sommer: Repetition der Glaubenslehre, verbunden mit Lektüre und Erklärung des Augsburgischen Bekenntnisses. Im Winter: Lektüre und Erklärung des Galaterbriefs. S. und W. Repetitionen der früheren Pensa. 2 St. Professor Dr. Richter.

Deutsch. Im Sommer: Gelesen und erklärt wurden von Schiller schwierigere Gedichte, Wallenstein und ausgewählte Abschnitte aus den philosophischen Schriften. Im Winter: Gelesen und erklärt wurden von Goethe: schwierigere Gedichte, Iphigenie und Tasso. S. und W. Freie Vorträge in Verbindung mit Privatlektüre, Dispositionsübungen. Die Themata für die deutschen Aufsätze waren: I. Im Sommersemester: 1) Wie und durch welche Gründe wird Wallenstein in der Tragödie zum entscheidenden Entschlusse des Abfalls bestimmt? 2) Die kulturhistorische Bedeutung der Kolonieen. 3) Die Saale in Geschichte, Lied und Sage. 4) Welche Segnungen hat Luther dem deutschen Volke gebracht? (Abit.-Aufs.) II. Im Wintersemester: 5) Welche Umstände begünstigten die Entwickelung des jungen Goethe? 6) Die Inschrift: „Fremdling, was Du erblickt, hat Glaube und Liebe vollendet. Ehre des Stiftenden Geist, glaubend und liebend wie er" soll durch die Geschichte der Franckeschen Stiftungen und des Stifters erläutert werden. 7) Wodurch hat sich der Mensch zum Herrn der Natur gemacht? 8) Dürfen wir mit Paskal sagen: „Wir sind die Alten, nicht die Griechen und Römer." 9) Das Mittelmeer. Seine Natur und seine Bedeutung in der alten Geschichte. (Abit.-Aufs.) 3 St. Professor Dr. Richter.

Latein. Gelesen wurden: aus Livius das Ende des XXIV. und das XXI. Buch und einige Oden des Horaz. Abschnitte der Dichterlektüre in IB wurden repetiert. Grammatische Repetitionen. Lateinisch-deutsche Extemporalien. 5 St. Oberl. Dr. Maennel.

Französisch. Repetition der schwierigeren Kapitel der französischen Grammatik in französischer Sprache; freie Vorträge über geschichtliche Themata und daran geknüpfte Besprechungen. Lektüre: Ponsard: l'honneur et l'argent. Sandeau: Madem. de la Seiglière und die prosaischen Abschnitte über die Geschichte der Litteratur und Barante, Thierry, Mignet und Remusat. Themata zu den freien Arbeiten: 1) Le règne de Henri I, roi d'Allemagne. 2) La part que les Visigoths ont prise à la migration des peuples. 3) La guerre du nord jusqu' à la bataille de Pultava. 4) La quatrième croisade. 5) Abiturientenarbeit: Les deux derniers rois de la maison de Stuart. 6) Conrad III, Empereur d'Allemagne. 7) La deuxième guerre de Louis XIV. 8) Invasion des Saxons dans la Grande-Bretagne. 9) Napoléon en Egypte. 10) Philippe de Souabe et Othon IV. 11) Abiturientenarbeit: La restauration des Stuarts par le général Monk. 4 St. Professor Hölzke.

Englisch. Repetition der Grammatik in englischer Sprache. Lektüre: Macaulay, history of England b. I, und II angefangen. Extemporalien über das grammatische Pensum und Auszüge aus der Lektüre. 3 St. Professor Hölzke.

Geschichte. Geschichte der Neuzeit von 1700 bis zur Gegenwart. Repetitionen. 2 St. Oberl. Dr. Lehmann.

Geographie. Deutschland (Kirchhoff S. 149—217). 1 St. Oberl. Dr. Lehmann.

Mathematik. Die höheren Gleichungen: Der Zusammenhang der Wurzeln mit den Koëffizienten der geordneten Gleichung. Erkennbarkeit komplexer Wurzeln in mehreren speciellen Fällen. Bestimmung der Grenzen der Wurzeln. Sturms Lehrsatz. Bestimmung der reellen irrationellen Wurzeln nach Horners Methode. Cardanis Regel. Repetition der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie. —

Analytische Geometrie: Die Parallel- und Polarkoordinaten. Transformationsformeln. Die gerade Linie. Der Kreis. Die einzelnen Kegelschnitte. Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades. Anwendung der Determinanten auf Gegenstände der analytischen Geometrie. Repetition früherer Pensen. Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf mathematische Geometrie. Sphärische Astronomie. Berechnung des heliakischen Aufgangs eines Sterns. Sphärische Beziehungen an der Erdkugel. Refraktion, Dämmerung, Parallaxe, Aberration der Fixsterne. Die mittlere Planetenbewegung. Berechnung der rückläufigen Bewegung der Planeten. Wahrer und mittlerer Sonnentag. Berechnung der elliptischen Planetenbewegung. Abiturienten-Aufgaben. A. Zu Michaelis. 1) Welches ist die Gleichung des Kreises, wo liegt sein Mittelpunkt und wie groß ist sein Radius, wenn derselbe durch den Punkt 2, 2 gehen, den Kreis 4, 2, 2 rechtwinklig schneiden und den Kreis 1, 1, 1 halbierend schneiden soll? Die Koordinaten sind rechtwinklige. 2) Berechnung von $\sqrt{11}$ auf 8 Decimalstellen mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes. 3) Welcher gerade Kegel, dessen Achsendreieck den Umfang 2u hat, hat das größte Volumen? 4) An welchem Orte des Meridians von Halle geht die Sonne auf um 8 Uhr 30 Minuten Berliner Zeit, wenn die Deklination der Sonne $+ 21^{0}$ beträgt? Die Länge von Berlin ist $31^{0}\ 3'$ und die von Halle $29^{0}\ 38'$. B. Zu Ostern. 1) Bestimmung der positiven Wurzel der Gleichung $x^5 - 3x^3 - 5x - 1 = 0$ auf 5 Decimalstellen. 2) Durch die drei in rechtwinkligen Koordinaten gegebenen Punkte $x_1 = 4$, $y_1 = 3$, $x_2 = 6$, $y_2 = 2$, $x_3 = 8$, $y_3 = 7$ soll eine Parabel gelegt werden, deren Achse mit der Abscissenachse parallel ist. Welches ist die Gleichung der Parabel, wo liegt ihr Scheitel und wie groß ist ihr Parameter? Wie groß ist ferner das Segment, das von ihr durch die Gerade $5x + 2y - 26 = 0$ abgeschnitten wird? 3) Auf die Seiten eines Würfels zur Seitenkante a sind gleiche regelmäßige vierseitige Pyramiden aufgesetzt, deren Grundflächen mit den Würfelseiten zusammenfallen. Das Gesamtvolum des Körpers sei gleich dem doppelten Würfelvolum; wie groß ist die Oberfläche des Körpers im Vergleich mit der Oberfläche des Würfels? 4) Wie groß ist die Deklination und der Stundenwinkel eines Sterns, wenn der Beobachtungsort eine nördliche geographische Breite von 51^{0} hat, und die Höhe des Sterns $65^{0}\ 40'$ und sein Azimuth $23^{0}\ 17'$ beträgt? 5 St. Dr. Schrader.

Physik. Mathematische Optik: mathematische Wärmelehre. Ergänzung der experimentellen Optik und Wärmelehre. Lösung zahlreicher Aufgaben. Repetition aller physikalischen Disciplinen. Klassenscripta. 3 St. Abiturienten-Aufgaben: A. Zu Michaelis 1883: I. Von der in ihrer Bahn fortschreitenden Erde aus gesehen bildet die scheinbare Richtung des von einem Stern kommenden Lichtstrahls mit seiner wahren den Aberrationswinkel α. Wenn nun die absolute Geschwindigkeit des Lichts = C, die der Erde = c, und der Winkel zwischen der Bewegungsrichtung der Erde und der wahren Bewegungsrichtung des Lichts = φ ist, 1) wie groß ist dann $\hat{\alpha}$? 2) wann wird $\hat{\alpha}$ ein Maximum, wie groß ist dasselbe und unter welcher Richtung der scheinbaren Lichtbewegung tritt es ein? 3) wie findet man mittels des Maximalaberrationswinkels die Lichtgeschwindigkeit C? — II. Ein Geschoß werde unter dem Winkel α zur Horizontalen und mit der Geschwindigkeit c geworfen. Wann erlangt dasselbe die n-fache lebendige Kraft von derjenigen im höchsten Bahnpunkte? Welchen Horizontalabstand hat dann dasselbe vom Ausgangspunkte? B. Zu Ostern 1884: I. Es ist darzulegen: Entstehungsweise, Richtung und Größe der Zentrifugal-, Zentripetal- und Tangentialkraft einer beliebigen Zentralbewegung und der Kreisbewegung insbesondere. Wie groß ist demnach die Festigkeit eines 1 m langen Fadens, der reißt, wenn die an dem einen Endpunkte befestigte 500 g schwere Bleikugel um den andern Endpunkt 70 Schleuderumdrehungen in der Minute macht? — II. Wenn bei einem anzufertigenden Gregoryschen Reflektor die beiden Hohlspiegel 2 m Entfernung, welche der Krümmungsmittelpunkt des größern gerade halbiert, haben dürfen; wenn ferner eine Linse von 2 mm Brennweite durch Auszug um 10 cm vom größern Spiegel entfernt werden muß, damit ein 300 m entfernter Gegenstand ein deutliches Bild (natürl. Sehweite = 25 cm) gebe; wie groß ist dann der Krümmungsradius des kleinern Spiegels zu wählen? Wie oft mal vergrößert dieser Reflektor? Oberl. Dr. Sommer.

Chemie. Die Metalle der Blei-, Silber-, Zinn- und Goldgruppe. Fortsetzung der anschließenden Betrachtung der wichtigsten Mineralien, besonders der Erze. Im Laboratorium wie in Unterprima. 2 St. Cand. prob. Dr. Hammerschmidt.

Zeichnen. Wie in Unterprima. 2 St. Im Winter: Zeichenlehrer Lehmann.

IV. Unterrichtsmittel.

A. Durch Verwendung der disponiblen Fonds erwarb die Schule:

a. Für das physikalische Kabinett: Eine sich selbst erregende Influenzmaschine. Apparat für Newtonsche Farbenringe. Ein Crookscher Apparat mit Aluminiumkreuz für die Darstellung der strahlenden Materie. Ein Crookscher Apparat für Fluorescenz von Schwefelcalcium. Eine kleine elektrische Eisenbahn bestehend aus einem elektro-magnetischen Wagen mit in sich zurücklaufendem Schienenpaar.

b. Für das chemische Laboratorium: Eine Wasserluftpumpe in Verbindung mit der Wasserleitung. Zwei Gasentbindungsapparate nach Kipp. Eine Luftpumpe für das Laboratorium mit Glocke. Eine Tafelwage mit Gewichten. Einen Verbrennungsofen. Einen Blasetisch und Gebläselampe. Einen Kühler. Einen Gasometer von Zink. Daneben kleinere Apparate: Filtrierflaschen, Trichter, Säureflaschen, Krystallisierschalen, ein Daniellscher Hahn, Pinzetten, Quetschhähne, Probierglashalter, Gummiröhren.

c. Für die naturhistorischen Sammlungen: Behrens, botanische mikroskopische Präparate, 2 Serien; 34 künstliche Krystalle verschiedener chemischer Stoffe. Darstellungen aus dem Leben der Biene. Eine Insekten- und Insektenmetamorphosensammlung. Dasypus sexcinctus. Schädel von Phoca vitulina. Sepia officinalis. Salpa zonaria. Pyrosoma gigantea. Amphioxus lanceolatus. Rhizotoma Cuvieri. — Ein zoologisches Besteck. Leuckart und Nutsch: Zoologische Wandtafeln, 1—20.

d. Für den geographischen Unterricht: Vogel-Delitzsch, Wandkarte von Europa und Wandkarte von Mittel-Europa, beide auf blauem Wachstuch mit Stäben. Stielers großer Handatlas. Wandkarte von Alt-Italien. Klöden, Oro-hydrographische Karte von Deutschland. Kiepert, Schulwandatlas, Lief. 5, 6, 8. Bamberg, Karte von Asien und Karte von Afrika.

e. Für den Gesangunterricht: Löwe, Johann Huß, Oratorium, 3 St. Klavierauszüge und 67 Stimmen. Eine Motette von Haydn und eine von Schnabel.

f. Für den Zeichenunterricht: Eine größere Zahl von Eisendrahtmodellen und Vollkörpern.

g. Für die Lehrerbibliothek: Goldfuß, Petrefacta Germaniae. Spruner, historisch-geographischer Atlas I u. III. Dictionaire de la langue française p. Littré. Elektro-technische Bibliothek, Hartlebens Verlag, Band 1—21. Treitschke, Deutsche Geschichte des 19. Jahrhunderts. L. v. Ranke, Deutsche Geschichte im Zeitalter der Reformation. Kramer, August Hermann Francke. Schmidt, Pharmaceutische Chemie. Dedekind, Zahlentheorie. Willmann, Vorträge. Dazu die Fortsetzung der Zeitschriften: Centralblatt der gesamten Unterrichtsverwaltung; Herrig, Archiv; Hoffmann, Zeitschrift für den mathematischen ꝛc. Unterricht; Strack, Centralorgan für das Realschulwesen; Poggendorff, Annalen der Physik und Chemie mit den Beiblättern; Sklareck, der Naturforscher. Fortsetzung der Lieferungswerke: Onken, allgemeine Geschichte; Encyclopädie der gesamten Naturwissenschaften; Bronns Klassen und Ordnungen des Tierreichs.

h. Für die Schülerbibliothek: Wallheim, die Fahrt der Vega; Kallsen, Friedrich Barbarossa; Stein, Kardinal Albrecht, Händel I u. II, Königin Luise; Bauer, Arndts Leben.

B. Durch Geschenke erwarb die Schule:

Vom Königl. Kultus-Ministerium: Die preußische Expedition nach Ost-Asien, nach amtlichen Quellen. Vom Herrn Professor Dr. Kirchhoff: Rassenbilder, 2 Lief. Martini und Chemnitz, Konchilien-

Kabinett von Herrn Dr. Schröder. Schrader, Thüringer Flora, 200 Exemplare, vom Verfasser. Ein allseitig offenes Metallbarometer unter Glasglocke und ein Modell der Stellvorrichtung eines Metallbarometers vom Untersekundaner Unbekannt. Von den Obersekundanern Schoch u. Schelle zusammen 6 Mk. als Beitrag zu einem guten Thermometrographen. Zippel und Bollmann, Ausländische Kulturpflanzen in farbigen Wandtafeln mit Text II. Abt., von den Obersekundanern Möllmann, Rudolphi und Tornau und von dem Untersekundaner Plettner. A. Ravenstein, Plastischer Schulatlas für die erste Stufe des Unterrichts in der Erdkunde, vom Untersekundaner Günther. Hoffmann, Der weiße Häuptling, vom Quartaner Schultze. Würdig, Germanien und R. König, Meister Schott und seine Familie, vom Untersekundaner Schrödel. John Albot, Geschichte des Bürgerkrieges in Amerika, vom Untersekundaner Schmidt. Schwartze, Die Elektrizität, vom Untersekundaner Unbekannt. Vom Herrn Maurermeister Hensel und durch dessen Vermittlung: eine ansehnliche Sammlung von Baugliedern: Kehl-, An-, Ablaufsteine, Gesimsstücke, Akroterien, Konsolen, Friesteile, Rosetten, Balustren, Pfeiler- und Säulenkapitäler, farbige Platten zu Fußböden. Vergrößert wurde diese Sammlung noch durch entsprechende Geschenke des Herrn Architekten Henkel.

Die Ausschmückung der Korridore durch die aus Schülerbeiträgen beschafften Langl'schen Bilder wurden fortgesetzt.

Allen Gebern sagen wir unsern herzlichen Dank.

V. Die häusliche Beschäftigung der Schüler.

Die Schule ist darauf bedacht, durch die den Schülern aufgegebene häusliche Beschäftigung den Erfolg des Unterrichts zu sichern und die Schüler zu selbständiger Thätigkeit anzuleiten, aber nicht einen der körperlichen und geistigen Entwickelung nachteiligen Anspruch an die Zeitdauer der häuslichen Arbeit der Schüler zu machen. In beiden Hinsichten hat die Schule auf die Unterstützung des elterlichen Hauses zu rechnen. Es ist die Pflicht der Eltern und deren Stellvertreter, auf den regelmäßigen häuslichen Fleiß und die verständige Zeiteinteilung ihrer Kinder selbst zu halten, aber es ist ebenso sehr ihre Pflicht, wenn die Forderungen der Schule das zuträgliche Maß der häuslichen Arbeitszeit ihnen zu überschreiten scheinen, davon Kenntnis zu geben. Die Eltern oder deren Stellvertreter werden ausdrücklich ersucht, in solchen Fällen dem Direktor oder dem Klassen-Ordinarius persönlich oder schriftlich Mitteilung zu machen und wollen überzeugt sein, daß eine solche Mitteilung dem betreffenden Schüler in keiner Weise zum Nachteil gereicht, sondern nur zu eingehender und unbefangener Untersuchung der Sache führt. Anonyme Zuschriften, die in solchen Fällen gelegentlich vorkommen, erschweren die genaue Prüfung des Sachverhalts und machen, wie sie der Ausdruck mangelnden Vertrauens sind, die für die Schule unerläßliche Verständigung mit dem elterlichen Hause unmöglich.

Halle, den 14. März 1884.

Dr. Schrader.

1

Programm

des

lgymnasiums

in

den Franckeschen Stiftungen zu Halle

für

s Schuljahr 1882—1883

vom

Direktor Dr. Schrader,

Inspektor des Realgymnasiums.

I. Teil:

Lockes Ansicht von der Sprache.

Beitrag zur Beurteilung seiner Erkenntnistheorie. Von Dr. Perle.

Halle,

Druck der Buchdruckerei des Waisenhauses.

1883.