2.

Programm
der
Realschule I. Ordnung
im
Waisenhause zu Halle
für
das Schuljahr 1870—1871

vom

Director Dr. Schrader,
Inspector der Realschule.

2.

Inhalt:

Halle,
Buchdruckerei des Waisenhauses.
1871.

Theorie der endlichen summirbaren Reihen.

Die Lehrbücher der Arithmetik behandeln von den endlichen summirbaren Reihen in der Regel nur die arithmetischen Reihen erster Ordnung und die geometrische Reihe; gehen sie weiter, als es gewöhnlich der Fall ist, so nehmen sie noch die figurirten Zahlen, die arithmetischen Reihen höherer Ordnungen und die zusammengesetzte Reihe auf, indem man unter dieser Bezeichnung eine geometrische Reihe versteht, deren einzelnen Gliedern Coefficienten beigegeben sind, welche für sich wieder eine arithmetische Reihe bilden. Jede dieser Reihen wird nach einer ihrer besonderen Natur angemessenen Methode summirt. Es giebt aber eine Methode, welche nicht nur alle genannten Reihen in derselben Weise summiren lehrt, sondern auch den Blick auf alle endlichen summirbaren Reihen eröffnet. Diese Methode ist nicht neu, doch begegnet man ihr sehr selten in den mathematischen Werken. Eine auf diese Methode gegründete Theorie würde außer der reichen Anwendbarkeit ihrer Resultate für den Unterricht den Vortheil bieten, nicht sowohl den Schüler im Gebrauch des Summirungssymbols zu üben, als auch den Blick desselben von einzelnen Beispielen auf ein allgemeines Gebiet zu erweiten. Die nachfolgenden Blätter sollen eine solche Theorie enthalten, über welche dem Verfasser nicht bekannt geworden ist, daß sie sonst schon in diesem Umfange aufgestellt ist.

1. Das Bildungsgesetz der endlichen summirbaren Reihen.

§. 1. Die Reihe. Unter einer Reihe versteht man in der Arithmetik eine geordnete Zusammenstellung von Zahlen, welche nach einem gemeinschaftlichen Gesetz gebildet sind. Jede dieser Zahlen heißt ein Glied der Reihe, und die Zahl, welche die Stellung eines Gliedes in der Reihe angiebt, heißt der Index des Gliedes. Das allgemeine Glied der Reihe oder das Gesetz der Reihe ist der arithmetische Ausdruck, welcher angiebt, wie der Werth jedes Gliedes aus seinem Index gefunden werden kann. Ist die Anzahl der aufeinanderfolgenden Glieder eine endliche, so heißt die Reihe selbst eine endliche Reihe, im anderen Falle eine unendliche Reihe. Läßt sich die Summe einer endlichen Reihe in der Art angeben, daß die Abhängigkeit dieser Summe von der Anzahl der Glieder in einem arithmetischen Ausdruck erscheint, so heißt die Reihe eine summirbare Reihe. Ist eine endliche Reihe summirbar und wird ihre Summe bei unendlicher Fortsetzung der Reihe nicht selbst unendlich, so läßt sich auch die Summe der unendlichen Reihe angeben, denn die unendliche Reihe ist nur ein besonderer Fall der endlichen Reihe. Aus diesem Grunde kann man nicht erwarten, daß eine Reihe, deren Summe angebbar ist, wenn sie unendlich lang genommen wird, auch als endliche Reihe summirbar sein wird.

§. 2. Die Funktion. Unter Funktion einer unbestimmten Zahl x versteht man einen arithmetischen Ausdruck, in welchem das unbestimmte Zahlzeichen x vorkommt und dessen Werth bedingt wird durch den besonderen Werth, welchen man dem Zeichen x beilegt. Dergleichen Funktionen pflegt man durch die Symbole f_x, F_x, φ_x, ψ_x u. dergl. zu bezeichnen. Ist f_x irgend eine gegebene Funktion, so bezeichnen die Formen f_{x-1}, f_n, f_0 diejenigen Werthe dieser Funktion, die man erhält, wenn man $x-1$ oder n oder 0 an die Stelle von x in der gegebenen Funktion setzt. Die Zahl x heißt das Argument der Funktion. Die Funktion selbst heißt eine ganze, gebrochene oder irrationale, je nachdem das Argument nur mit positiven ganzen Exponenten oder im Nenner von Brüchen oder unter einem Wurzelzeichen vorkommt. Kommt das Argument im Potenzexponenten vor oder in logarithmischen oder goniometrischen Ausdrücken, so heißt die Funktion transcendent.

§. 3. Das Summirungssymbol. Mit einem der beiden Zeichen

$$\sum \left(f_x\right)_{\substack{x\\1 \div n}} \quad \text{oder} \quad \sum_{x=1}^{x=n} \left(f_x\right)$$

wird die Summe derjenigen n Glieder einer Reihe bezeichnet, die man erhält, wenn man in der Funktion f_x an die Stelle des Arguments x der Reihe nach die natürlichen Zahlen von 1 bis n setzt. Im Allgemeinen werde unter der Voraussetzung $m < n$ durch

$$\sum \left(f_x\right)_{\substack{x\\m \div n}} \quad \text{oder} \quad \sum_{x=m}^{x=n} \left(f_x\right)$$

die Summe der Reihe bezeichnet, die man erhält, wenn man in f_x statt x der Reihe nach die natürlichen Zahlen von m bis n setzt.

§. 4. Rechnung mit dem Summirungssymbol. Aus der Bedeutung des Summirungssymbols ergeben sich sofort folgende Umformungsformeln:

$$1)\ \sum \left(f_x \pm \varphi_x\right)_{\substack{x\\1 \div n}} = \sum \left(f_x\right)_{\substack{x\\1 \div n}} \pm \sum \left(\varphi_x\right)_{\substack{x\\1 \div n}}$$

$$2)\ \sum \left(af_x\right)_{\substack{x\\1 \div n}} = a \sum \left(f_x\right)_{\substack{x\\1 \div n}}$$

$$3)\ \sum \left(f_x\right)_{\substack{x\\1 \div n}} = \sum \left(f_x\right)_{\substack{x\\1 \div (m-1)}} + \sum \left(f_x\right)_{\substack{x\\m \div n}}, \text{ wenn } m < n.$$

Diese drei Gleichungen drücken in symbolischer Form nichts weiter aus, als die einfachen Sätze: 1) daß in einer mehrgliedrigen Summe die Glieder beliebig geordnet werden können; 2) daß eine Summe von Produkten, welche einen gemeinschaftlichen Factor haben, gleich dem Produkte des gemeinschaftlichen Factors mit der Summe der nicht gemeinschaftlichen Factoren ist; und 3) daß jede Reihe in zwei Reihen zerfällt, wenn man zunächst die Anfangsglieder bis zu einem bestimmten Gliede zusammen nimmt und sodann die übrigen Glieder. In einem besonderen Falle nimmt die dritte Gleichung die Form:

$$4)\ \sum\left(f_x\right)_{\frac{x}{1 \div n}} = \sum\left(f_x\right)_{\frac{x}{1 \div (n-1)}} + f_n \text{ an.}$$

§. 5. Das Bildungsgesetz der endlichen summirbaren Reihen.

1) Es ist ganz allgemein: $\sum\left(f_x - f_{x-1}\right)_{\frac{x}{1 \div n}} = f_n - f_0.$

Beweis. Die Richtigkeit dieser eigentlich nur tautologischen Gleichung erhellt sofort, wenn man die linke Seite ihrer symbolischen Form entkleidet. Dieselbe erscheint dann in folgender Gestalt:

$$(f_1 - f_0) + (f_2 - f_1) + (f_3 - f_2) \cdots + (f_{n-1} - f_{n-2}) + (f_n - f_{n-1}).$$

Da jeder Subtrahendus eines späteren Gliedes sich mit dem Minuendus des vorhergehenden aufhebt, so ergiebt sich als Summe der ganzen Reihe der Werth $f_n - f_0$.

Will man die Entwickelung der obigen Formel nachweisen, so beachte man, daß die allgemeine Funktion f_n nur dann die Summe einer Reihe von n Gliedern darstellen kann, wenn ihr Werth für $n = 0$ verschwindet, denn die Summe einer Reihe von 0 Gliedern muß selbst gleich Null sein. Hat nun f_n diese Eigenschaft nicht, so findet sich diese Eigenschaft doch bei $f_n - f_0$, folglich kann jeder Ausdruck von dieser Form die Summe einer n-gliedrigen Reihe sein. Bezeichnen wir mit φ_x das allgemeine Glied dieser Reihe, so ist

$$\sum\left(\varphi_x\right)_{\frac{x}{1 \div n}} = f_n - f_0.$$

Nehmen wir diese Reihe nur vom ersten bis (n—1)ten Gliede, so haben wir

$$\sum\left(\varphi_x\right)_{\frac{x}{1 \div (n-1)}} = f_{n-1} - f_0.$$

Subtrahiren wir beide Gleichungen, so folgt:

$$\varphi_n = f_n - f_{n-1}$$

oder, wenn x an die Stelle von n gesetzt wird:

$$\varphi_x = f_x - f_{x-1}.$$

Die Substitution dieses Werthes in die obige Gleichung giebt:

$$\sum\left(f_x - f_{x-1}\right)_{\substack{x\\1\div n}} = f_n - f_0 .$$

2) In ähnlicher Art kann man beweisen, daß

$$\sum\left(f_{x+1} - f_x\right)_{\substack{x\\1\div n}} = f_{n+1} - f_1 .$$

und

$$\sum\left(f_{x+1} - f_{x-1}\right)_{\substack{x\\1\div n}} = f_{n+1} + f_n - f_1 - f_0 .$$

3) Ganz allgemein erhält man, wenn auch r eine positive ganze Zahl ist:

$$\sum\left(f_{x+r-1} - f_{x-1}\right) = f_{n+r-1} + f_{n+r-2} \cdots + f_n - (f_{r-1} + f_{r-2} + \cdots f_0).$$

§. 6. Folgerung. Aus der Allgemeinheit der in §. 5 aufgestellten Gleichung folgt nun sofort:

In jeder endlichen summirbaren Reihe muß sich das allgemeine Glied als die Differenz zweier 'gleichartigen Funktionen, deren allgemeine Argumente um die Einheit oder sonst um eine ganze Zahl unterschieden sind, darstellen lassen.

Ist das allgemeine Glied φ_x gegeben, so ist die Reihe summirbar und die Summe sofort angebbar, wenn man φ_x in die Form $f_x - f_{x-1}$ oder $f_{x+r} - f_x$ umformen kann. Diese Umformung ist nicht immer möglich, und wo sie möglich ist, meist schwer aufzufinden, so daß die Summirung in dieser Weise meist auf ein Probiren hinausliefe. Geht man aber von der Funktion f_x aus, so ergiebt sich das allgemeine Glied φ_x der dann stets summirbaren Reihe sehr leicht, aus welcher sich mit Hülfe der Regeln in §. 4 oft andere Reihen ableiten lassen. Führt man für f_x der Reihe nach die verschiedenen Funktionen ein, so erhält man daraus die entsprechenden summirbaren Reihen.

2. Summirung der Werthe ganzer Funktionen.

§. 7. Potenzreihen. Um abzukürzen, wollen wir das Zeichen $\sum\left(f_x\right)_{\substack{x\\1\div n}}$ unter der Voraussetzung, daß die Summirung für die Werthe von 1 bis n vorgenommen wird, künftig $\Sigma\,(f_x)$ schreiben. Hiernach schreibt sich die Gleichung des §. 5 in folgender Weise:

$$\Sigma\,(f_x - f_{x-1}) = f_n - f_0 .$$

Diese Gleichung liegt den folgenden Entwickelungen zu Grunde.

1) Der einfachste Fall ist $f_x = x$, dann ist $f_x - f_{x-1} = x - (x-1) = 1$, und es folgt dann nach §. 5, 1

$$\Sigma(1) = n.$$

$\Sigma(1)$ bezeichnet eine Reihe von n Gliedern, von denen ein jedes gleich 1 ist, ihre Summe ist also n.

Setzt man $f_x = ax$, so folgt $\Sigma(a) = na$.

2) Ist $f_x = x^2$, so ist $f_x - f_{x-1} = x^2 - (x-1)^2 = 2x - 1$, folglich ist:

$$\Sigma(2x-1) = n^2.$$

Behandeln wir die linke Seite der Gleichung nach §. 4, 1, 2, so ist

$$2\Sigma(x) - \Sigma(1) = n^2, \text{ oder}$$

$$\Sigma(x) = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$ Es ist also:

$$1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3) Ist $f_x = x^3$, so ist $f_x - f_{x-1} = 3x^2 - 3x + 1$ also:

$$\Sigma(3x^2 - 3x + 1) = n^3,$$ oder nach §. 4, 1. 2 ist

$$3\Sigma(x^2) - 3\Sigma(x) + \Sigma(1) = n^3.$$

Substituirt man für $\Sigma(1)$ und $\Sigma(x)$ die gefundenen Werthe, so folgt

$$3\Sigma(x^2) = n^3 + 3.\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{2n^3+3n^2+n}{2},$$ also:

$$\Sigma(x^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3}.$$ Es ist also:

$$1+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3}.$$

4) Ist $f_x = x^4$, so ist $f_x - f_{x-1} = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$, also:

$$\Sigma(4x^3 - 6x^2 + 4x - 1) = n^4,$$ oder

$$4\Sigma(x^3) - 6\Sigma(x^2) + 4\Sigma(x) - \Sigma(1) = n^4.$$

Da $\Sigma(1)$, $\Sigma(x)$, $\Sigma(x^2)$ bekannte Werthe sind, so ergiebt sich nach einiger Umformung:

$$\Sigma(x^3) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$ Es ist also:

$$1+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

5) So kann man die Summen der höheren Potenzreihen finden, nachdem man zuvor die Summen der niedrigeren Potenzreihen gefunden hat. Es läßt sich aber für dieses recurrirende Verfahren auch ein allgemeiner Ausdruck aufstellen. Es sei $f_x = x^m$,

so ist $f_x - f_{x-1} = x^m - (x-1)^m$. Entwickelt man nach der binomischen Reihe und bezeichnet man mit $\mathfrak{B}_r^m$ den $r$ten Binominalcoefficienten der $m$ten Potenz, so folgt

$$\Sigma[\mathfrak{B}_1^m x^{m-1} - \mathfrak{B}_2^m x^{m-2} + \mathfrak{B}_3^m x^{m-3} \ldots - (-1)^r \mathfrak{B}_r^m x^{m-r} \ldots] = n^m,$$

folglich ist

$$\Sigma(x^{m-1}) = [n^m + \mathfrak{B}_2^m \Sigma(x^{m-2}) - \mathfrak{B}_3^m \Sigma(x^{m-3}) \cdots + (-1)^r \mathfrak{B}_r^m \Sigma(x^{m-r}) \cdots] : \mathfrak{B}_1^m.$$

Setzt man hier beispielsweise $m = 5$, so folgt:

$$\Sigma(x^4) = [n^5 + 10\Sigma(x^3) - 10\Sigma(x^2) + 5\Sigma(x) - \Sigma(1)] : 5,$$

oder nach ausgeführter Substitution:

$$\Sigma(x^4) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{2.\ 3.\ 5}.$$ Es ist also:

$$1 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{2.\ 3.\ 5.}$$

6) Eine noch brauchbarere allgemeine Formel erhält man, wenn man die Gleichung

$$\Sigma(f_{x+1} - f_{x-1}) = f_{n+1} + f_n - f_1 - f_0$$

zu Grunde legt. Setzt man $f_x = x^m$ und entwickelt $(x+1)^m - (x-1)^m$ nach dem binomischen Lehrsatze, so folgt

$$2\Sigma[\mathfrak{B}_1^m x^{m-1} + \mathfrak{B}_3^m x^{m-3} + \mathfrak{B}_5^m x^{m-5} \ldots] = (n+1)^m + n^m - 1,$$

folglich ist

$$\Sigma(x^{m-1}) = [(n+1)^m + n^m - 1 - 2\mathfrak{B}_3^m \Sigma(x^{m-3}) - 2\mathfrak{B}_5^m \Sigma(x^{m-5}) - \cdots] : 2\mathfrak{B}_1^m.$$

Diese Formel giebt für $n = 5$ die Rechnung

$$\Sigma(x^4) = [(n+1)^5 + n^5 - 1 - 20\Sigma(x^2) - 2\Sigma(1)] : 10.$$

Die weitere Ausführung führt zu dem schon oben angegebenen Resultat.

7) Man kann auf die Summirung der allgemeinen Potenzreihe noch ein allgemeineres Verfahren anwenden. Entwickelt man in dem vorhin für $(n+1)^m + n^m - 1$ aufgestellten Ausdruck die Potenz $(n+1)^m$ nach der Binominalreihe, so ist:

$$2\mathfrak{B}_1^m \Sigma(x^{m-1}) + 2\mathfrak{B}_3^m \Sigma(x^{m-3}) + 2\mathfrak{B}_5^m \Sigma(x^{m-5}) + \cdots =$$

$$2n^m + \mathfrak{B}_1^m n^{m-1} + \mathfrak{B}_2^m n^{m-2} + \mathfrak{B}_3^m n^{m-3} + \mathfrak{B}_4^m n^{m-4} + \mathfrak{B}_5^m n^{m-5} \ldots + \mathfrak{B}_{m-1}^m n.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung, wenn sie entwickelt ist, mit der rechten Seite identisch werden muß, so folgt, daß $2n^m$ das erste Glied der Entwickelung von $2\mathfrak{B}_1^m \Sigma(x^{m-1})$ sein muß, und da das erste Glied der Entwickelung von $2\mathfrak{B}_2^m \Sigma(x^{m-3})$ nicht höher als n^{m-2} sein kann, so ist $\mathfrak{B}_1^m n^{m-1}$, das zweite Glied unserer rechten Seite, das zweite Glied der Entwickelung von $2\mathfrak{B}_1^m \Sigma(x^{m-1})$; da nun $\mathfrak{B}_1^m = m$ ist, so folgt für die ersten zwei Glieder der Entwickelung von $\Sigma(x^{m-1})$:

$$\Sigma(x^{m-1}) = \frac{n^m}{m} + \frac{1}{2}\, n^{m-1} + \cdots\cdot$$

die späteren Glieder vom dritten ab sind zur Zeit noch unbestimmt. Hieraus folgt nun weiter:

$$\Sigma(x^{m-3}) = \frac{n^{m-2}}{m-2} + \frac{1}{2}\, n^{m-3} + \cdots$$

$$\Sigma(x^{m-5}) = \frac{n^{m-4}}{m-4} + \frac{1}{2}\, n^{m-5} + \cdots\cdot \text{ u. s. f.}$$

Das zweite Glied der Entwickelung von $2\mathfrak{B}_3^m \Sigma(x^{m-3})$ ist demnach $2\mathfrak{B}_3^m \cdot \frac{1}{2}\, n^{m-3} = \mathfrak{B}_3^m n^{m-3}$ und hebt sich mit dem 4. Gliede der rechten Seite; da nun auf der rechten Seite die Potenz n^{m-3} nicht weiter vorkommt, so kann sie auch der linken Seite nicht weiter vorkommen, d. h. in der Entwickelung von $\Sigma(x^{m-1})$ fehlt die Potenz n^{m-3}. Ebenso fehlt auch in der Entwickelung von $\Sigma(x^{m-3})$ die Potenz n^{m-5}. Das zweite Glied der Entwickelung von $2\mathfrak{B}_5^m \Sigma(x^{m-5})$ ist $2\mathfrak{B}_5^m \cdot \frac{1}{2}\, n^{m-5} = \mathfrak{B}_5^m\, n^{m-5}$ und hebt sich mit dem sechsten Gliede der rechten Seite, und da sonst hier das Glied n^{m-5} sich nicht vorfindet, so kann es sich auch nicht in der Entwickelung von $\Sigma(x^{m-1})$ vorfinden. In dieser Art folgert man weiter, daß in dieser Entwickelung auch die Glieder n^{m-7}, n^{m-9} ... nicht vorkommen können.

Diese Entwickelung hat also die Form:

$$\Sigma(x^{m-1}) = \frac{n^m}{m} + \frac{1}{2}\, n^{m-1} + a_{m-2}\, n^{n-2} + a_{m-4}\, n^{m-4} + a_{m-6}\, n^{m-6} \cdots\cdot$$

Diese Reihe schließt ab mit $a_2 n^2$ oder $a_1 n$, jenachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist. Die Coefficienten a_{m-2}, a_{m-4} $\cdots$ sind zur Zeit noch unbestimmt.

Wir legen nun diese Form zu Grunde und setzen allgemein

$$f_x = a_m x^m + a_{m-1}\, x^{m-1} + a_{m-2}\, x^{m-2} + a_{m-3}\, x^{m-3} + a_{m-4}\, x^{m-4} + \cdots$$

Entwickeln wir nun mit Hülfe der Binominalreihe den Ausdruck $f_x - f_{x-1}$, so folgt aus unserer allgemeinen Summirungsformel:

$$\begin{aligned}\Sigma[\mathfrak{B}_1^m a_m x^{m-1} &- (\mathfrak{B}_2^m a_m - \mathfrak{B}_1^{m-1} a_{m-1}) x^{m-2} + (\mathfrak{B}_3^m a_m - \mathfrak{B}_2^{m-1} a_{m-1} + \mathfrak{B}_1^{m-2} a_{m-2}) x^{m-3} \\ &- (\mathfrak{B}_4^m a_m - \mathfrak{B}_3^{m-1} a_{m-1} + \mathfrak{B}_2^{m-2} a_{m-2} - \mathfrak{B}_1^{m-3} a_{m-3})\, x^{m-4} + \cdots] \\ &= a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + a_{m-2} n^{m-2} + a_{m-3} n^{m-3} + \cdots + a_1 n.\end{aligned}$$

Setzt man den Ausdruck unter dem Summenzeichen auf der linken Seite gleich x^{m-1}, so folgen zur Bestimmung der Coefficienten a_m, $a_{m-1} \ldots a_1$ gerade so viel Gleichungen, als Unbekannte da sind. Die erste Gleichung ist $\mathfrak{B}_1^m a_m = 1$, die übrigen Gleichungen erhält man, wenn man den Inhalt jeder runden Klammer der Null gleich setzt. Da wir aber schon wissen, daß für $\Sigma(x^{m-1})$ die Coefficienten a_{m-3}, a_{m-5}, $a_{m-7} \ldots$ verschwinden, so kann man sie aus diesen Bestimmungsgleichungen weglassen und man hebt dann aus diesen Gleichungen nur so viele heraus, als nöthig sind, und zwar nimmt man dazu die einfachsten. Diese Bestimmungsgleichungen sind demnach:

$$\mathfrak{B}_1^m a_m = 1$$
$$\mathfrak{B}_2^m a_m - \mathfrak{B}_1^{m-1} a_{m-1} = 0$$
$$\mathfrak{B}_3^m a_m - \mathfrak{B}_2^{m-1} a_{m-1} + \mathfrak{B}_1^{m-2} a_{m-2} = 0$$
$$\mathfrak{B}_5^m a_m - \mathfrak{B}_4^{m-1} a_{m-1} + \mathfrak{B}_3^{m-2} a_{m-2} + \mathfrak{B}_1^{m-4} a_{m-4} = 0$$
$$\mathfrak{B}_7^m a_m - \mathfrak{B}_6^{m-1} a_{m-1} + \mathfrak{B}_5^{m-2} a_{m-2} + \mathfrak{B}_3^{m-4} a_{m-4} + \mathfrak{B}_1^{m-6} a_{m-6} = 0.$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Die allgemeine Form dieser Gleichungen von der dritten ab ist:

$$\mathfrak{B}_{2r+1}^m a_m - \mathfrak{B}_{2r}^{m-1} a_{m-1} + \mathfrak{B}_{2r-1}^{m-2} a_{m-2} + \mathfrak{B}_{2r-3}^{m-4} a_{m-4} + \cdots \mathfrak{B}_1^{m-2r} a_{m-2r} = 0.$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe vom dritten ab ist:

$$\mathfrak{B}_{2r-2s+1}^{m-2s} a_{m-2s}.$$

Der Coefficient des letzten Gliedes $\mathfrak{B}_1^{m-2r} = m-2r$ ist Factor aller vorhergehenden Coefficienten; theilt man die ganze Gleichung durch ihn, so erhält man:

$$\frac{\mathfrak{B}_{2r}^m a_m}{2r+1} - \frac{\mathfrak{B}_{2r-1}^{m-1} a_{m-1}}{2r} + \frac{\mathfrak{B}_{2r-2}^{m-2} a_{m-2}}{2r-1} + \frac{\mathfrak{B}_{2r-3}^{m-4} a_{m-4}}{2r-3} + \cdots$$
$$+ \frac{\mathfrak{B}_{2r-2s}^{m-2s} a_{m-2s}}{2r-2s+1} + \cdots + a_{m-2r} = 0.$$

Nun folgt aus der Theorie der Binominalcoefficienten:

$$\mathfrak{B}_{2r-2s}^{m-2s} \cdot \mathfrak{B}_{2s}^m = \mathfrak{B}_{2r}^m \cdot \mathfrak{B}_{2s}^{2r}.$$

Substituirt man hieraus den Werth

$$\mathfrak{B}_{2r-2s}^{m-2s} = \frac{\mathfrak{B}_{2r}^m \cdot \mathfrak{B}_{2s}^{2r}}{\mathfrak{B}_{2s}^m}$$

in das allgemeine Glied der letzten Reihe, so geht dieses über in

$$\frac{\mathfrak{B}_{2r}^{m}\,\mathfrak{B}_{2s}^{2r}}{2r-2s+1}\cdot\frac{a_{m-2s}}{\mathfrak{B}_{2s}^{m}},$$

und da $\dfrac{\mathfrak{B}_{2s}^{2r}}{2r-2s+1}=\dfrac{\mathfrak{B}_{2s-1}^{2r}}{2s}$ ist, so läßt sich dieses allgemeine Glied auch in dieser Form schreiben:

$$\frac{\mathfrak{B}_{2r}^{m}\,\mathfrak{B}_{2s-1}^{2r}}{2s}\cdot\frac{a_{m-2s}}{\mathfrak{B}_{2s}^{m}}.$$

In gleicher Weise ergiebt sich, daß $\dfrac{\mathfrak{B}_{2r-1}^{m-1}}{2r}=\dfrac{\mathfrak{B}_{2r}^{m}}{\mathfrak{B}_{1}^{m}}$. Macht man von diesen Umformungen Gebrauch, so geht die allgemeine Form der Bestimmungsgleichungen von der dritten ab über in:

$$\frac{\mathfrak{B}_{2r}^{m}\,a_m}{2r+1}-\frac{\mathfrak{B}_{2r}^{m}\,a_{m-1}}{\mathfrak{B}_{1}^{m}}+\frac{\mathfrak{B}_{2r}^{m}\,\mathfrak{B}_{1}^{2r}}{2}\cdot\frac{a_{m-2}}{\mathfrak{B}_{2}^{m}}+\frac{\mathfrak{B}_{2r}^{m}\,\mathfrak{B}_{3}^{2r}}{4}\cdot\frac{a_{m-4}}{\mathfrak{B}_{4}^{m}}+\cdots$$

$$+\frac{\mathfrak{B}_{2r}^{m}\cdot\mathfrak{B}_{2s-1}^{2r}}{2s}\cdot\frac{a_{m-2s}}{\mathfrak{B}_{2s}^{m}}+\cdots+a_{m-2r}=0.$$

Alle Glieder der Reihe mit Ausnahme des letzten haben den Faktor $\mathfrak{B}_{2r}^{m}$ gemein, dividiren wir die Gleichung durch denselben, so finden wir zur recurrirenden Bestimmung des Quotienten $\dfrac{a_{m-2r}}{\mathfrak{B}_{2r}^{m}}$ die Gleichung:

$$\frac{a_{m-2r}}{\mathfrak{B}_{2r}^{m}}=-\frac{a_m}{2r-1}+\frac{a_{m-1}}{\mathfrak{B}_{1}^{m}}-\frac{\mathfrak{B}_{1}^{2r}}{2}\cdot\frac{a_{m-2}}{\mathfrak{B}_{2}^{m}}-\frac{\mathfrak{B}_{3}^{2r}}{4}\cdot\frac{a_{m-4}}{\mathfrak{B}_{4}^{m}}-\cdots$$

$$-\frac{\mathfrak{B}_{2r}^{2s-1}}{2s}\cdot\frac{a_{m-2s}}{\mathfrak{B}_{2s}^{m}}-\cdots-\frac{\mathfrak{B}_{2r-3}^{2r}}{2(r-1)}\cdot\frac{a_{m-2r+2}}{\mathfrak{B}_{2r-2}^{m}}.$$

Die ersten beiden Bestimmungsgleichungen liefern für a_m und a_{m-1} die bekannten Werthe:

$$a_m=\frac{1}{m},\quad a_{m-1}=\frac{1}{2}.$$

Setzen wir diese Werthe ein, ziehen die ersten beiden Glieder der rechten Seite zusammen und multipliciren dann die ganze Gleichung mit m, so folgt:

$$\frac{m\,a_{m-2r}}{\mathfrak{B}^{m}_{2r}} = \frac{2r-1}{2(2r+1)} - \frac{\mathfrak{B}^{2r}_{1}}{2} \cdot \left(\frac{m\,a_{m-2}}{\mathfrak{B}^{m}_{2}}\right) - \frac{\mathfrak{B}^{2r}_{3}}{4} \cdot \left(\frac{m\,a_{m-4}}{\mathfrak{B}^{m}_{4}}\right) \cdots$$

$$- \frac{\mathfrak{B}^{2r}_{2s-1}}{2s} \cdot \left(\frac{m\,a_{m-2s}}{\mathfrak{B}^{m}_{2s}}\right) - \cdots - \frac{\mathfrak{B}^{2r}_{2r-3}}{2(r-1)} \cdot \left(\frac{m\,a_{m-2r+2}}{\mathfrak{B}^{m}_{2r-2}}\right)$$

Die Quotienten $\frac{m\,a_{m-2}}{\mathfrak{B}^{m}_{2}}, \frac{m\,a_{m-4}}{\mathfrak{B}^{m}_{4}}, \frac{m\,a_{m-6}}{\mathfrak{B}^{m}_{6}}, \cdots \frac{m\,a_{m-2r}}{\mathfrak{B}^{m}_{2r}}$ sind unter dem Namen der Bernoullischen Zahlen bekannt, bezeichnen wir sie der Kürze wegen mit $B_1, B_2, B_3 \ldots B_r$, so hat sich uns also zur recurrirenden Bestimmung der Bernoullischen Zahlen folgende Gleichung ergeben:

$$B_r = \frac{2r-1}{2(2r+1)} - \frac{\mathfrak{B}^{2r}_{1}}{2} \cdot B_1 - \frac{\mathfrak{B}^{2r}_{3}}{4} B_2 - \frac{\mathfrak{B}^{2r}_{5}}{6} B_3 \cdots - \frac{\mathfrak{B}^{2r}_{2r-3}}{2(r+1)} \cdot B_{r-1}.$$

Setzt man für r der Reihe nach die Werthe 1, 2, 3, 4 ... ein, so erhält man nach einander:

$$B_1 = \frac{1}{6}$$

$$B_2 = \frac{3}{2.5} - \frac{4}{2} B_1 = -\frac{1}{30}$$

$$B_3 = \frac{5}{2.7} - \frac{6}{2} B_1 - \frac{20}{4} B_2 = \frac{5}{14} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{42}$$

$$B_4 = \frac{7}{2.9} - \frac{8}{2} B_1 - \frac{56}{4} B_2 - \frac{56}{6} B_3 = \frac{7}{18} - \frac{2}{3} + \frac{7}{15} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{30}$$

$$B_5 = \frac{9}{2.11} - \frac{10}{2} B_1 - \frac{120}{4} B_2 - \frac{252}{6} B_3 - \frac{120}{8} B_4 = \frac{9}{22} - \frac{5}{6} + 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{66}.$$

Sind die Bernoullischen Zahlen gefunden, so folgen die Coefficienten für die Summe der allgemeinen Potenzreihe sofort; es ist

$$a_{m-2} = \frac{\mathfrak{B}^{m}_{2}}{m} B. = \frac{\mathfrak{B}^{m-1}_{1}}{2} B_1$$

$$a_{m-4} = \frac{\mathfrak{B}^{m}_{4} B_1}{m} = \frac{\mathfrak{B}^{m-1}_{3}}{4} B_2$$

$$a_{m-6} = \frac{\mathfrak{B}^m_6 B_3}{m}, \cdot = \frac{\mathfrak{B}^{m-1}_5}{6} B_3$$

$$a_{m-2r} = \frac{\mathfrak{B}^m_{2r} . B_r}{m} \cdot = \frac{\mathfrak{B}^{m-1}_{2r-1}}{2r} B_r$$

$$\Sigma(x^{m-1}) = \frac{n^m}{m} + \frac{n^{m-1}}{2} + \frac{\mathfrak{B}^m_2}{m} B_1 n^{m-2} + \frac{\mathfrak{B}^m_4}{m} B_2 n^{m-4} \ldots\ldots \frac{\mathfrak{B}^m_{2r}}{m} B_r n^{m-2r} \ldots$$

$$= \frac{n^m}{m} + \frac{n^{m-1}}{2} + \frac{\mathfrak{B}^{m-1}_1}{2} B_1 n^{m-2} + \frac{\mathfrak{B}^{m-1}_3}{4} B_2 n^{m-4} \ldots \frac{\mathfrak{B}^{m-1}_{2r-1}}{2r} B_r n^{m-2r} \ldots$$

Die Reihe schließt entweder mit n^2 oder n.*)

Setzt man hier nach einander für m die Werthe 6, 7, 8 .., so folgt:

$$\Sigma(x^5) = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{5n^2}{60} = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{3.\ 4.}$$

$$\Sigma(x^6) = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{6.\ 7.}$$

$$\Sigma(x^7) = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7}{12} n^6 - \frac{7}{24} n^4 + \frac{1}{12} n^2 = \frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{2.\ 3.\ 4.}$$

8) Handelt es sich nicht um Summirung einfacher Potenzreihen, sondern ist das allgemeine Glied eine beliebige ganze Funktion des Index, so kann man diese entweder in ihre Potenzglieder auflösen und dann gliedweise summiren, oder man wendet die in voriger Nummer gebrauchte Methode der unbestimmten Coefficienten an und beachtet dabei die bei den Potenzreihen gemachte Erfahrung, daß der Grad des Summenausdrucks um eine Einheit höher ist, als der Grad des allgemeinen Gliedes. Soll z. B. $\Sigma[(2x-1)(3x-2)(4x-3)]$ gefunden werden, so kann man in folgender Art rechnen:

$$\Sigma[(2x-1)(3x-2)(4x-3)] = \Sigma(24x^3 - 46x^2 + 29x - 6) = 24\,\Sigma(x^3) - 46\,\Sigma(x^2)$$

*) Schon Bernoulli zeigte, daß aus dieser Reihe, nachdem ihre Form feststeht, eine Formel zur recurrirenden Bestimmung der Bernoullischen Zahlen abgeleitet werden kann. Setzt man nämlich $n = 1$, so erhält man

$$1 = \frac{1}{m} + \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{B}^{m-1}_1}{2} B_1 + \frac{\mathfrak{B}^{m-1}_3}{4} B_2 + \frac{\mathfrak{B}^{m-1}_5}{6} B_3 + \ldots$$

Hier muß man entweder für m eine ungerade Zahl nehmen, oder im anderen Falle das letzte Glied, das der Potenz n^0 entsprechen würde, weglassen. Setzt man $m = 2r + 1$, so geht diese Gleichung in die oben selbständig abgeleitete über.

$+29\,\Sigma(x) - 6\,\Sigma(1)$. Für die Potenzsummen setze man dann die bekannten Werthe ein. Die andere Rechnungsart geht von der Reflexion aus, daß im gegebenen Falle der Summenausdruck vom 4. Grade ist. Setzt man

$$f_x = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x,$$

so folgt:

$$\Sigma(f_x - f_{x-1}) = \Sigma[4a_4 x^3 - (6a_4 - 3a_3)x^2 + (4a_4 - 3a_3 + 2a_2)x - (a_4 - a_3 + a_2 - a_1)]$$
$$= a_4 n^4 + a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n.$$

Vergleichen wir hier den Ausdruck unter dem Summenzeichen mit dem gegebenen allgemeinen Gliede der zu summirenden Reihe, so erhält man zur Bestimmung der unbestimmten Coefficienten die Gleichungen:

$$4a_4 = 24$$
$$6a_4 - 3a_3 = 46$$
$$4a_4 - 3a_3 + 2a_2 = 29$$
$$a_4 - a_3 + a_2 - a_1 = 6.$$

Hieraus folgt: $a_4 = 6$, $a_3 = -\frac{10}{3}$, $a_2 = -\frac{5}{2}$, $a_1 = \frac{5}{6}$; also ist

$$\Sigma[(2x-1)(3x-2)(4x-3)] = 6n^4 - \frac{10}{3}n^3 - \frac{5}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$$
$$= \frac{n(36\,n^3 - 20\,n^2 - 15\,n + 5)}{6}.$$

9) Die Potenzreihen, unendlich lang gedacht, geben eine unendlich große Summe, aber das Verhältniß der Summe einer Potenzreihe zu der um eins höheren Potenz des letzten Index geht einem sehr einfachen Grenzwerthe entgegen, wenn n ohne Ende wächst. Dividirt man den vorhin für $\Sigma_1^n(x^{m-1})$ gefundenen Werth durch n^m und läßt dann n bis ∞ wachsen, so verschwinden zuletzt die späteren Glieder des Summenwerthes, da sie n im Nenner enthalten, und es bleibt

$$\left[\frac{\Sigma_1^n(x^{m-1})}{n^m}\right]_{n=\infty} = \frac{1}{m}.$$

Hiernach ist für ein unendlich großes n:

$$\frac{\Sigma(x)}{n^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\Sigma(x^2)}{n^3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\Sigma(x^3)}{n^4} = \frac{1}{4} \text{ u. s. f.}$$

§. 8. Arithmetische Reihen. 1) Wir wollen das Produkt der k aufeinanderfolgenden Zahlen $x, x+1, x+2, \cdots x+k-1$ der Kürze wegen mit $x^{k|1}$ bezeichnen und das Produkt der Zahlen $1, 2, 3, \cdot\cdot k$ mit $k!$ In Uebereinstimmung damit würde $x^{k|-1}$ das Produkt der k Zahlen $x, x-1, x-2, \cdots x-k+1$ bezeichnen; allgemein wollen wir mit $a^{k|b}$ das Produkt der k Faktoren $a, a+b, a+2b, a+3b, \cdot\cdot a+(k-1)b$ bezeichnen, von denen a der erste, jeder folgende aber um b größer als der vorhergehende ist. Setzen wir nun $f_x = \frac{x^{k|1}}{k!}$, so ist $f_{x-1} = \frac{(x-1)^{k|1}}{k!}$ und $f_x - f_{x-1} = \frac{x^{k-1|1}}{(k-1)!}$. Es folgt also nach §. 5, 1 sofort:

$$\Sigma\left(\frac{x^{k-1|1}}{(k-1)!}\right) = \frac{x^{k|1}}{k!}.$$

Setzen wir der Reihe nach für k die Werthe $1, 2, 3, \cdot\cdot$ und lösen dabei die Abkürzungssymbole wieder auf, so folgt:

$$\sum(x) = \frac{n^{2|1}}{2!} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum\left[\frac{x(x+1)}{2}\right] = 1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^{3|1}}{3!} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2.\ 3}.$$

$$\sum\left[\frac{x(x+1)(x+2)}{2.\ 3}\right] = 1+4+10+20+\cdots \frac{n(n+1)(n+2)}{2.\ 3} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.\ 3.\ 4.}.$$

$$\sum\left[\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{2.\ 3.\ 3}\right] = 1+5+15+35+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.\ 3.\ 4}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.}.$$

2) Setzt man $f_x = \frac{x^{k|-1}}{k!}$, so ist $f_x - f_{x-1} = \frac{x^{k|-1}-(x-1)^{k|-1}}{k!} = \frac{(x-1)^{k|-1}}{(k-1)!}$, also ist:

$$\sum\left[\frac{(x-1)^{k-1|-1}}{(k-1)!}\right] = \frac{n^{k|-1}}{k!}.$$ Setzt man für k die Werthe 1, 2, 3, 4, so folgt

$$\sum(x-1) = 0+1+2+3+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$\sum\frac{(x-1)(x-2)}{2} = 0+0+1+3+6\cdots\frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ 3}.$$

$$\sum\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!} = 0+0+0+1+4+\cdots\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3.\ 4.}.$$

3) Eine arithmetische Reihe erster Ordnung ist eine Reihe, bei welcher die Differenzen aufeinanderfolgender Glieder gleich sind; eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung ist eine Reihe, bei welcher die Differenzen aufeinanderfolgender Glieder eine Reihe erster Ordnung bilden. Ueberhaupt ist eine arithmetische Reihe k ter Ordnung eine Reihe, bei welcher die Differenzen aufeinanderfolgender Glieder eine arithmetische Reihe $(k-1)$ ter Ordnung bilden. Diese Reihe heißt die erste Differenzreihe jener und bildet man von ihr wieder die Differenzreihe, so heißt diese die zweite, u. s. f. Die Differenzreihe einer arithmetischen Reihe erster Ordnung besteht aus gleichen Zahlen. Das Anfangsglied der Reihe und die Anfangsglieder aller Differenzreihen sind die Elemente der Reihe. Aus dieser Definition folgt nun, daß das x te Glied einer arithmetischen Reihe k ter Ordnung gleich ist seinem Anfangsgliede a_0 vermehrt um die Summe der $(x-1)$ ersten Glieder der Differenzreihe. Es setzt also die Bildung des allgemeinen Gliedes einer Reihe k ter Ordnung die Summirung der Reihe $(k-1)$ ter Ordnung voraus. Ist a_0 das Anfangsglied einer Reihe erster Ordnung und a_1 das constante Differenzglied, so liefern $(x-1)$ Glieder der Differenzreihe die Summe $(x-1)a_1$, also ist das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe erster Ordnung:

$$a_0 + (x-1)a_1.$$

Für die Summe der ersten n Glieder dieser Reihe erhalten wir sofort:

$$\Sigma(a_0) + a_1\,\Sigma(x-1) = na_0 + \frac{n(n-1)}{2}\,a_1$$

Ist a_0 jetzt das Anfangsglied einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung, sind a_1 und a_2 die Elemente d. h. Anfangsglied und Differenz der Differenzreihe, so ist die Summe der $(x-1)$ ersten Glieder dieser Reihe nach der so eben gefundenen Summenformel $(x-1)a_1 + \frac{(x-1)(x-2)}{2}a_2$; folglich ist das allgemeine Glied dieser Reihe zweiter Ordnung:

$$a_0 + (x-1)a_1 + \frac{(x-1)(x-2)}{2}\,a_2.$$

Für die Summe der ersten n Glieder dieser Reihe ergiebt sich nach den Summenformeln des vorigen Abschnitts sofort:

$$a_0\,\Sigma(1) + a_1\,\Sigma(x-1) + a_2 = \Sigma\,\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$= na_0 + \frac{n(n-1)}{2}\,a_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.\;3}\,a_2.$$

Ist a_0 das Anfangsglied einer Reihe 3. Ordnung, sind a_1, a_2, a_3 die Elemente der Differenzreihe, d. h. die Anfangsglieder der 3 Differenzreihen, so erhält man in ähnlicher Weise für das allgemeine Glied:

$$a_0 + (x-1)a_1 + \frac{(x-1)(x-2)}{2.\;3}\,a_2 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{2.\;3}\,a_3$$

und für die Summe der ersten n Glieder:

$$na_0 + \frac{n(n-1)}{2}\,a_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.\;3}\,a_2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\;3.\;4}\,a_3.$$

4) Das Bildungsgesetz dieser Ausdrücke ist leicht ersichtlich. Ist a_0 das Anfangsglied einer arithmetischen Reihe kter Ordnung, und sind a_1, a_2, $\cdots$ a_k die Anfangsglieder der 1., 2. $\cdots$ k. Differenzreihe, so ist das allgemeine Glied dieser Reihe

$$a_0 + (x-1)a_1 + \frac{(x-1)^{2|-1}}{2!}\,a_2 + \frac{(x-1)^{3|-1}}{3!}\,a_3 + \cdots\cdots \frac{(x-1)^{k|-1}}{k!}\,a_k$$

und die Summe der n ersten Glieder ist:

$$na_0 + \frac{n^{2|-1}}{2!}\,a_1 + \frac{n^{3|-1}}{3!}\,a_2 + \frac{n^{4|-1}}{4!}\,a_3 + \cdots\cdots \frac{n^{k+1|-1}}{(k+1)!}\,a_k.$$

5) Jede Reihe, deren allgemeines Glied durch eine ganze Funktion seines Index dargestellt wird, ist eine arithmetische Reihe, und die vorstehende Entwickelung zeigt, daß die Ordnungszahl der Reihe mit der Gradzahl der Funktion übereinstimmt. Um die Summe der Reihe zu finden, muß man die Elemente derselben kennen; um diese bei einer Reihe k. Ordnung zu finden, muß man die $(k+1)$ ersten Glieder bilden.

So bilden z. B. die Glieder der oben gefundenen Summe $\Sigma(2x-1)(3x-2)(4x-3)$ eine arithmetische Reihe dritter Ordnung. Die ersten vier Glieder sind:

1, 60, 315, 910.

Hieraus ergeben sich die ersten Glieder der Differenzreihen

$$\begin{array}{ccccc} 59 & & 255 & & 595 \\ & 196 & & 340 & \\ & & 144. & & \end{array}$$

Es ist also $a_0 = 1$, $a_1 = 59$, $a_2 = 196$, $a_3 = 144$, und die allgemeine Summenformel der arithmetischen Reihen dritter Ordnung giebt nun:

$$\Sigma(2x-1)(3n-2)(4x-3)$$

$$= n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 59 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.\ 3} \cdot 196 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\ 3.\ 4} \cdot 144$$

$$= 6n^4 - \frac{10}{3} n^3 - \frac{5}{2} n^2 + \frac{5}{6} n,$$

wie auch oben gefunden wurde.

6) Es giebt noch einige Arten von Productenreihen, die sich leicht summiren lassen. Man setze

$$f_x = (a+bx)^{k|b}, \text{ so ist}$$

$$f_x - f_{x-1} = (a+bx)^{k|b} - [a+b(x-1)]^{k|b} = bk(a+bx)^{k-1|b}.$$

Hieraus folgt:

$$\Sigma(a+bx)^{k-1|b} = \frac{1}{bk}\,[a+bx)^{k|b} - a^{k|b}].$$

Beispiele:

$$(a+b)(a+2b) + (a+2b)(a+3b) \cdots\cdots + (a+nb)(a+b+nb)$$
$$= \frac{1}{3b}\,[(a+nb)^{3|b} - a^{3|b}].$$

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots (2n-1)(2n+1) = \frac{1}{6}\,[(2n-1)^{3|2} + 3].$$

$$1 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 10 + \cdots (3n-2)(3n+1) = \frac{1}{9}\,[(3n-2)^{3|3} + 8].$$

$$(a+b)(2a+b)(3a+b) + (2a+b)(3a+b)(4a+b) + \cdots + (na+b)^{3|a}$$
$$= \frac{1}{4a}\,[(an+b)^{4|a} - b^{4|a}].$$

$$1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots + (2n-1)^{3|2} = \frac{1}{8}\,[(2n-1)^{4|2} + 15].$$

5) Ist $f_x = (a+bx)^{k|2b}$, so wende man die Summirungsformel aus §. 5, 2 an. Es ist nun:

$$f_{x+1} - f_{x-1} = [a+b(x+1)]^{k|2b} - [a+b(x-1)]^{k|2b} = 2bk[a+b(x+1)]^{k-1|2b}.$$

Also folgt nun:

$$\Sigma[a+b(x+1)]^{k-1|2b} = \frac{1}{2bk}[a+b(n+1)]^{k|2b} + (a+bk)^{k|2b} - (a+b)^{k|2b} - a^{k|2b}$$

Setzt man $a = -1$ und $b = 1$, so folgt:

$$\Sigma(x)^{k-1|2} = \frac{1}{2k}[n^{k|2} + (n-1)^{k|2} + 1^{k-1|2}].$$

Beispiele:

$$1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + 4\cdot 6 \cdots + n(n+2) = \frac{1}{6}[n^{3|2} + (n-1)^{3|2} + 3].$$

$$1\cdot 3\cdot 5 + 2\cdot 4\cdot 6 + 3\cdot 5\cdot 7 + \cdots n(n+2)(n+4) = \frac{1}{8}[n^{4|2} + (n-1)^{4|2} + 15].$$

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot 7 + 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8 + 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9 \cdots + n(n+2)(n+4)(n+6)$$
$$= \frac{1}{10}[n^{5|2} + (n-1)^{5|2} + 105].$$

6) Will man diesen letzten Fall verallgemeinern, so setze man $f_x = (a+bx)^{k|rb}$ und wende die Summirungsformel aus §. 5, 3 an. Nun ist

$$[a+b(x+r-1)]^{k|rb} = [a+b(x+r-1)]^{k-1|rb}[a+b(x+kr-1)]$$
$$[a+b(x-1)]^{k|rb} = [a+b(x+r-1)]^{k-1|rb}[a+b(x-1)], \text{ also ist}$$
$$f_{x+r-1} - f_{x-1} = bkr[a+b(x+r-1)]^{k-1|rb}.$$

Die Summirungsformel aus §. 5, 3 giebt nun:

$$\Sigma[a+b(x+r-1)]^{k-1|rb} = \frac{1}{bkr}[a+b(n+r-1)]^{k|rb} + [a+b(n+r-2)]^{k|rb} + \cdots$$
$$+ (a+bn)^{k|rb} - [a+b(r-1)^{k|rb} - [a+b(r-2)]^{k|rb} \cdots - a^{k|rb}].$$

Setzt man hier $b = 1$ und $a = 1 - r$, so folgt leicht:

$$\Sigma x^{k-1|r} = \frac{1}{kr}[n^{k|r} + (n-1)^{k|r} + (n-2)^{k|r} \cdots + (n-r+1)^{k|r} + (r-1)^{k-1|r}$$
$$+ 2(r-2)^{k-1|r} + \cdots + (r-1)1^{k-1|r}].$$

Beispiele:

$$\Sigma(x^{2|3}) = 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 + \cdots + n(n+3) = \frac{1}{9}\left[n^{3|3} + (n-1)^{3|3} + (n-2)^{3|3}\right] + 2.$$

$$\Sigma(x^{3|3}) = 1\cdot 4\cdot 7 + 2\cdot 5\cdot 8 + \cdots n^{3|3} = \frac{1}{12}\left[n^{4|3} + (n-1)^{4|3} + (n-2)^{4|3}\right] + \frac{34}{3}.$$

Alle diese Reihen lassen sich auch summiren, indem man sie nach Angabe des allgemeinen Gliedes in Potenzreihen auflöst, oder indem man die allgemeine Summenformel der arithmetischen Reihen höherer Ordnung anwendet. Zum Theil werden die Summen dann einfacher ausfallen, als bei dem zuletzt angewandten Verfahren. Dieses hat aber das Interesse für sich, daß die Reihe ohne weitere Zwischenrechnung summirt werden konnte.

§. 9. **Polygonalzahlen.** Polygonalzahlen sind Zahlen, deren Einheiten, als Punkte gedacht, sich über die Fläche eines regelmäßigen Vielecks gleichmäßig vertheilen lassen. Man schreitet von einer Polygonalzahl zu der nächsten gleichartigen fort, indem man die Punktreihen zweier zusammenstoßenden Seiten um je einen Punkt verlängert und dann die übrigen Seiten mit der angemessenen Zahl von Punkten ausfüllt. Sind F_x und F_{x-1} zwei m-seitige Polygonalzahlen mit bezüglich x und $x-1$ Einheiten in der Seite und man zählt die Punkte, die nur in F_x, aber nicht in F_{x-1} vorkommen, so findet man zunächst $m-1$ Eckpunkte und dann in jeder der $m-2$ nicht gemeinschaftlichen Seiten noch $x-2$ Punkte zwischen den Ecken. Es ist demnach

$$F_x - F_{x-1} = m - 1 + (m-2)(x-2) = -m + 3 + (m-2)x.$$

Summirt man zwischen 1 und x, so findet man

$$F_x = -(m-3)x + (m-2)\frac{x(x+1)}{2} = \frac{x[(m-2)x-(m-4)]}{2}.$$

Setzt man hier für m bezüglich 3, 4, 5, $\cdots$ so erhält man die speciellen Polygonalzahlen.

Dreieckszahlen	1, 3, 6, 10, 15, 21 $\cdots\cdots$	$\frac{x(x+1)}{2}$.
Vierecksahlen	1, 4, 9, 16, 25, 36 $\cdots\cdots$	x^2.
Fünfeckszahlen	1, 5, 12, 22, 35, 51 $\cdots\cdots$	$\frac{x(3x-1)}{2}$.
Sechseckszahlen	1, 6, 15, 28, 45, 66 $\cdots\cdots$	$x(2x-1)$.
. . . . .	. . . .	
m-eckszahlen	1, m, $3(m-1)$, $2(3m-4)$, $5(2m-3)$, $3(5m-8)$ $\cdots\cdots$	$\frac{x[(m-2)x-(m-4)]}{2}$.

Die Polygonalzahlen bilden arithmetische Reihen zweiter Ordnung.

§. 10. Körperzahlen. 1) Körperzahlen sind Zahlen, deren Einheiten, als Punkte gedacht, sich gleichmäßig über den Raum eines gesetzmäßigen Körpers vertheilen lassen. Gewöhnlich handelt man nur von den Pyramidalzahlen und von den Würfelzahlen. Die Pyramidalzahlen erhält man durch Summirung der Polygonalzahlen. Ist P_x die $x$te $m$seitige Pyramidalzahl und behält F_x den Sinn des vorigen Paragraphen, so ist

$$P_x = \Sigma(F_x)_{1 \div x}^{\;x} .$$

Es ist also, wenn wir die Summirung zwischen diesen Grenzen nach §. 8, 1 ausführen:

$$P_x = \Sigma\left[-(m-3)\,x + (m-2)\,\frac{x(n+1)}{2}\right]$$

$$= -(m-3)\frac{x(x+1)}{2} + (m-2)\frac{x(x+1)(x+2)}{2.\ 3} = \frac{x(x+1)[(m-2)\,x-(m-5)]}{2.\ 3}.$$

Für $m=3,\ 4,\ 5\ \cdots\ m$ erhält man folgende Specialisirung:

Dreiseitige P. Z. $1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35\ \cdots\ \frac{x(x+1)(x+2)}{2.\ 3}$.

Vierseitige P. Z. $1,\ 5,\ 14,\ 30,\ 55\ \cdots\ \frac{x(x+1)(2x+1)}{2.\ 3}$.

Fünfseitige P. Z. $1,\ 6,\ 18,\ 40,\ 75\ \cdots\ \frac{x^2(x+1)}{2}$.

. . . .

m-seitige P. Z.

$1\ m+1,\ 2(2m-1),\ 10(m-1),\ 5(4m-5)\ \cdots\ \frac{x(x+1)\,[(m-2)\,x-(m-5)]}{2.\ 3}$.

2) Um die Körperzahlen, welche anderen gesetzmäßigen Körperformen entsprechen, zu finden, beachte man, daß man von einer solchen Körperzahl zur nächstfolgenden gleichartigen gelangt, indem man die den Flächen, welche an einer Ecke zusammenstoßen, entsprechenden Punktgruppen um die Punkte vermehrt, welche der Verlängerung der Kante um eine Einheit entsprechen, und dann die den übrigen Flächen entsprechenden Punktgruppen hinzufügt. Wir beschränken uns hier darauf, einen allgemeinen gemeinschaftlichen Ausdruck für die Körperzahlen aufzustellen, welche den regelmäßigen Körperformen entsprechen. Der Körper werde von lauter m-seitigen Flächen begränzt, und jede Ecke sei p-kantig; er habe f Flächen, k Kanten und e Ecken. Ist K_x die $x$te Körperzahl dieser Form und K_{x-1} die vorhergehende, so bestimmen wir zunächst die Differenz $K_x - K_{x-1}$. Zählen wir die Punkte, welche in K_x mehr enthalten sind als in K_{x-1}, so gehören dahin $e-1$ Punkte an den den

beiden Körpern nicht gemeinschaftlichen Ecken, auf jeder der $k-p$ nicht gemeinschaftlichen Kanten $x-2$ zwischen den Ecken liegende Punkte, also $(x-2)(k-p)$ Kantenpunkte, und dann noch auf $f-p$ nicht gemeinschaftlichen Flächen die inneren Punkte. Die m-seitige Polygonalzahl ist oben bestimmt zu

$$-(m-3)\,x+(m-2)\,\frac{x(n+1)}{2},$$

auf dem Umfange dieses Polygons liegen $m(x-1)$ Punkte, also bleiben auf jeder Fläche

$$m-(2m-3)\,x+(m-2)\,\frac{x(n+1)}{2}$$

innere Punkte übrig. Hiernach ist

$$K_x-K_{x-1}=e-1+(k-p)\,(x-2)+(f-p)\left[m-(2m-3)\,x+(m-2)\frac{x(x+1)}{2}\right]$$

$$=e-1-2\,(k-p)+m\,(f-p)+[k-p-(2m-3)(f-p)]\,x+(m-2)(f-p)\frac{x(x+1)}{2}.$$

Nun folgt aus der Natur der regulären Polyeder, daß $k=\frac{mf}{2}$ ist, und mit Hülfe des Euler'schen Satzes über die Polyeder kann man auch f und e durch m und p ausdrücken; es ist nämlich $f=\frac{4p}{2m+2p-mp}$ und $e=\frac{4m}{2m+2p-mp}$. Setzt man diese Werthe ein, so folgt:

$$K_x-K_{x-1}=\frac{2m-p\,(m-2)\,[3-(m-2)\,(p-2)]}{2m+2p-mp}-\frac{2p\,(m-2)[(m-2)(p-2)-1]}{2m+2p-mp}\,x$$

$$+\frac{p\,(p-2)\,(m-2)^2}{2p+2m-mp}\cdot\frac{x\,(x+1)}{2}.$$

Setzt man hier für x nach der Reihe die Werthe 1, 2, 3 bis x und summirt die einzelnen Werthe, so erhält man nach §. 5 und §. 8, 1

$$K_x=\frac{2m-p(m-2)\,[3-(m-2)(p-2)]}{2m+2p-mp}\,x$$

$$-\frac{2p\,(m-2)[(m-2)\,(p-2)-1]}{2m+2p-mp}\cdot\frac{x\,(x+1)}{2}+\frac{p\,(p-2)\,(m-2)^2}{2m+2p-mp}\cdot\frac{x(x+1)(x+2)}{2.\ 3}.$$

Dies ist der allgemeinste Ausdruck für alle regelmäßige Körperzahlen. Setzt man $m=3$ und $p=3$, so erhält man die Tetraederzahl

$$T_x=\frac{x\,(x+1)\,(x+2)}{2.\ 3}.$$

Setzt man m = 4, p = 3, so erhält man die Hexaederzahl:

$$H_x = x - 6 \cdot \frac{x(x+1)}{2} + 6 . \frac{x(x+1)(x+2)}{2 . \quad 3} = x^3.$$

Setzt man m = 3 und p = 4, so erhält man die Octaederzahl:

$$O_x = x - 4 \cdot \frac{x(x+1)}{2} + 4 . \frac{x(x+1)(x+2)}{2 . \quad 3} = \frac{x(2x^2+1)}{3}.$$

Setzt man m = 5 und p = 3, so erhält man die Dodekaederzahl:

$$D_x = 10x - 36 \cdot \frac{x(x+1)}{2} + 27 \cdot \frac{x(x+1)(x+2)}{2 . \quad 3} = \frac{x(9x^2 - 9x + 2)}{2}.$$

Setzt man endlich m = 3 und p = 5, so erhält man die Ikosaederzahl:

$$I_x = 6x - 20 \cdot \frac{x(x+1)}{2} + 15 \cdot \frac{x(x+1)(x+2)}{2 . \quad 3} = \frac{x(5x^2 - 5x + 2)}{2}.$$

Es war zu erwarten, daß die Tetraederzahlen mit den dreiseitigen Pyramidalzahlen und die Hexaederzahlen mit den Kubikzahlen zusammenfallen würden. Die übrigen Körperzahlen regelmäßiger Körperformen specialisiren sich in folgender Art:

Octaederzahlen: 1, 6, 19, 44, 85, 146 . . .
Dodekaederzahlen: 1, 20, 84, 220, 455, 816 . . .
Ikosaederzahlen: 1, 12, 48, 124, 255, 456 . . .

3) Man kann auch die Körperzahlen, die anderen gesetzmäßigen Körperformen entsprechen, aufstellen, auch wäre es ausführbar, die verwandten Körperformen gemeinschaftliche Zahlform aufzustellen, wie es oben für die regelmäßigen Körperformen geschehen ist. Wir gehen darauf hier nicht näher ein und beschränken uns nur auf einen speciellen Fall.

Werden die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders so abgeschnitten, daß die Schnittflächen gleichseitige Dreiecke und die Restflächen gleichseitige Sechsecke werden, so entsteht ein von 4 Dreiecken und 4 Sechsecken begrenzter Körper mit 12 Ecken und 18 Kanten, an jeder Ecke stoßen zwei Sechsecke und ein Dreieck zusammen. Es sollen die dieser Körperform entsprechenden Körperzahlen bestimmt werden.

Haben jetzt K_x und K_{x-1} analoge Bedeutungen wie oben, so setzt sich die in $K_x - K_{x-1}$ enthaltene Anzahl von Punkten zusammen 1) aus 11 nicht gemeinsamen Eckpunkten, 2) aus den (x — 2) auf jeder der 15 nicht gemeinsamen Kanten liegenden inneren Punkten und 3) aus den inneren Punkten der nicht gemeinsamen 3 Dreiecke und 2 Sechsecke. Die Zahl der inneren Punkte des Dreiecks ist

$\frac{x(x+1)}{2} - 3(x-1) = \frac{(x-2)(x-3)}{2}$, die des Sechseck ist

$x(2x-1) - 6(x-1) = (x-2)(2x-3)$. Demnach ist

$$K_x - K_{x-1} = 11 + 15(x-2) + 3.\frac{(x-2)(x-3)}{2} + 2(x-2)(2x-3)$$

$$= 2 - \frac{13}{2}x + \frac{11}{2}x^2.$$

Durch Summirung zwischen 1 und x folgt nach Anwendung oben entwickelter Formeln

$$K_x = 2x - \frac{13 \cdot x(n+1)}{4} + \frac{11 \cdot x(n+1(2n+1)}{12} = \frac{x(11x^2 - 3x - 2)}{6}.$$

Die Zahlen dieser Körperform sind also:

1, 12, 44, 108, 215, 376 . . .

Alle Körperzahlen bilden Reihen dritter Ordnung.

3. Summirung der Werthe von Exponentialfunktionen.

§. 11. Geometrische Reihen.

1) Setzt man $f_x = e^x$, so ist $f_x - f_{n-1} = e^x - e^{x-1} = e^{x-1}(e-1)$ und $f_0 = 1$, und unsere Hauptformel aus §. 5, 1 giebt sofort

$$\Sigma\,[e^{x-1}(e-1)] = e^n - 1, \text{ oder}$$

$$\Sigma\,(e^{x-1}) = \frac{e^n - 1}{e - 1}.$$

Ist a ein constanter Factor, so ist:

$$\Sigma\,(ae^{x-1}) = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1} = \frac{a(1 - e^n)}{1 - e}.$$

Eine Reihe, deren Gesetz ae^{x-1} ist, heißt eine geometrische Reihe im engeren Sinne; es sind in ihr die Quotienten aufeinander folgender Glieder einander gleich. Wird das Gesetz dieser Reihe mit einer Function des Index als Factor verbunden, die für sich allein wieder eine arithmetische Reihe irgend welcher Ordnung bezeichnen würde, so erhält man eine geometrische Reihe im weiteren Sinne oder eine zusammengesetzte Reihe. Auch diese Reihen lassen sich leicht summiren.

2) Ist $f_x = xe^x$, so ist $f_x - f_{x-1} = xe^x - (x-1)\,e^{x-1} = xe^{x-1}\,(e-1) + e^{x-1}$. Es folgt also

$$(e-1)\,\Sigma\,(xe^{x-1}) + \Sigma\,(e^{x-1}) = ne^n, \text{ oder}$$

$$\Sigma\,(xe^{x-1}) = \frac{ne^n}{e-1} - \frac{e^{n-1}}{(e-1)^2} = \frac{ne^{n+1} - (n+1)\,e^{n+1}}{(e-1)^2}.$$

3) Sind a_0 und a_1 die Elemente einer arithmetischen Reihe erster Ordnung, und werden die Glieder dieser Reihe einzeln mit den gleichnamigen Gliedern der geometrischen Reihe, deren allgemeines Glied e^{x-1} ist, multiplicirt, so entsteht eine Reihe, decen allgemeines Glied $[a_0 + (x-1)\,a_1]\,e^{x-1}$ ist. Die Summe dieser Reihe ergiebt sich durch folgende Entwicklung:

$$\Sigma\,[a_0 + a_1\,(x-1)]\,e^{x-1} = (a_0 - a_1)\,\Sigma\,e^{x-1} + a_1\,\Sigma\,(xe^{x-1})$$

$$= \frac{[a_0 + (n-1)\,a_0]\,e^n - (a_0 - a_1)}{e-1} + \frac{a_1\,(e^n - 1)}{(e-1)^2}$$

$$= \frac{[a_0 + (n-1)\,a_1]\,e^{n+1} - (a_0 + na_1)\,e^n - (a_0 - a_1)\,e + a_0}{(e-1)^2}.$$

Nach dieser allgemeineren Summenformel, welche die vorige als besonderen Fall in sich schließt, summiren sich folgende Reihen:

$$1 + 2.\ 2 + 3.\ 2^2 + 4.\ 2^3 + 5.\ 2^4 \cdots + n.\ 2^{n-1} = (n-1)\,2^n + 1.$$

$$1 + 2.\ 3 + 3.\ 3^2 + 4.\ 3^3 + 5.\ 3^4 \cdots + n.\ 3^{n-1} = \frac{(2n-1)\,3^n + 1}{4}.$$

$$1 + 2.\ 5 + 3.\ 5^2 + 4.\ 5^3 + 5.\ 5^4 \cdots + n.\ 5^{n-1} = \frac{(4n-1)\,5^n + 1}{16}.$$

$$1 + 3.\ 2 + 5.\ 2^2 + 7.\ 2^3 + 9.\ 2^4 \cdots + (2n-1)\ 2^{n-1} = (2n-3)\,2^n + 3.$$

$$1 + 4.\ 3 + 7.\ 3^2 + 10.\ 3^3 + 13.\ 3^4 \cdots + (3n-2)\ 3^{n-1} = \frac{(6n-7)\,3^n + 7}{4}.$$

$$1 + 5.\ 4 + 9.\ 4^2 + 13.\ 4^3 + 17.\ 4^4 \cdots + (4n-3)\ 4^{n-1} = \frac{(12n-13)\,4^n + 13}{9}.$$

4) Wird unter die geometrische Reihe von n Gliedern, deren allgemeines Glied e^{x-1} ist, die arithmetische Reihe erster Ordnung von n Gliedern, deren Elemente wieder a_0 und a_1 sind, geschrieben, die letztere aber in umgekehrter Ordnung, und werden dann die übereinander stehenden Glieder mit einander multiplicirt, so erhält man

eine Reihe, deren n-tes Glied $[a_0 + (n-x)\, a_1]\, e^{x-1}$ ist. Die Summe der so entstandenen Reihe ist:

$$\Sigma\, [a_0 + (n-x)\, a_1]\, e^{n-1} = (a_0 + na_1)\, \Sigma\, (e^{n-1}) - a_1\, \Sigma\, (xe^{n-1})$$

$$= \frac{a_0\, e^n - (a_0 + na_1)}{e-1} + \frac{a_1\, (e^n - 1)}{(e-1)^2}$$

$$= \frac{a_0\, e^{n+1} - (a_0 - a_1)\, e^n - (a_0 + na_1)\, e + a_0 + (n-1)\, a_1}{(e-1)^2}.$$

Dasselbe Resultat erhält man auch, wenn man in der vorigen Formel $a_0 + (n-1)\, a_1$ an die Stelle von a^0 und $-a_1$ an die Stelle von a_1 setzt, oder indem man $\frac{1}{e}$ an die Stelle von e setzt und das Ganze mit e^{n-1} multiplicirt.

Nach dieser Summenformel summiren sich folgende Reihen:

$$n + (n-1).\ 2 + (n-2).\ 2^2 + (n-3).\ 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = 2^{n+1} - (n+2).$$

$$(2n-1) + (2n-3).\ 2 + (2n-5).\ 2^2 + (2n-7).\ 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = 3.\ 2^n - (2n+3).$$

$$(4n-3) + (4n-7).\ 4 + (4n-11).\ 4^2 + (4n-15).\ 4^3 + \cdots 4^{n-1} = 7.\ 4^n - (12n+7).$$

5) Es sei $f_x = x^2\, e^x$, so ist $f_{x-1} = (x-1)^2\, e^{x-1}$ und $f_x - f_{x-1} = x^2\, e^{x-1}(e-1) + 2xe^{x-1} - e^{x-1}$, folglich ist:

$$(e-1)\, \Sigma (x^2\, e^{x-1}) + 2\, \Sigma xe^{x-1} - \Sigma\, (e^{n-1}) = n^2\, e^n.$$

Nun ist $2\, \Sigma\, (xe^{n-1}) = \frac{2n\, e^n}{e-1} - \frac{2\, (e^n - 1)}{(e-1)^2}$ und

$\Sigma\, (e^{n-1}) = \frac{e^n - 1}{e-1}$, also folgt:

$$\Sigma\, (x^2\, e^{n-1}) = \frac{n^2\, e^n}{e-1} - \frac{(2n-1)\, e^n + 1}{(e-1)^2} + \frac{2\, (e^n - 1)}{(e-1)^3}$$

$$= \frac{n^2\, e^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1)\, e^{n+1} + (n+1)^2\, e^n - (e+1)}{(e-1)^3}.$$

Hiernach summiren sich die nachfolgenden Reihen:

$$1 + 4.\ 2 + 9.\ 2^2 + 16.\ 2^3 + 25.\ 2^4 \cdots + n^2\, 2^{n-1} = (n^2 - 2n + 3)\, 2^n - 3.$$

$$1 + 4.\ 3 + 9.\ 3^2 + 16.\ 3^3 + 25.\ 3^4 \cdots + n^2\, 3^{n-1} = \frac{(n^2 - n + 1)\, 3^n - 1}{2}.$$

$$1 + \frac{4}{3} + \frac{9}{3^2} + \frac{16}{3^3} + \frac{25}{3^4} \cdots + \frac{n^2}{3^{n-1}} = \frac{3^{n+1} - (n^2 + 3n + 3)}{2.\ 3^{n-1}}.$$

6) Durch ganz analoge Rechnung findet man:

$$\Sigma(x^3 e^{x-1}) = \frac{n^3 e^{n+3} - (3n^3 + 3n^2 - 3n + 1) e^{n+2}}{(e-1)^4}$$

$$+ \frac{(3n^3 + 6n^2 - 4) e^{n+1} - (n+1)^3 e^n + e^2 + 4e + 1}{(e-1)^4}.$$

Zum Beispiel:

$$1 + 8.\ 2 + 27.\ 2^2 + 64.\ 2^3 + \cdots + n^3 2^{n-1} = [(n-1)^3 + 6(n-2)] 2^n + 13.$$

$$1 + \frac{8}{2} + \frac{27}{2^2} + \frac{64}{2^3} + \cdots + \frac{n^3}{2^{n-1}} = \frac{13.\ 2^{n+1} - (n+2)^3 - 6(n+3)}{2^{n-1}}.$$

7) Etwas einfacher werden die Summenformeln, wenn der den Exponentialgrößen vorgesetzte Factor nicht die Form einer einfachen Potenz, sondern eines Binominalcoefficienten hat.

Setzen wir $f_x = \frac{x(x+1)}{2} e^x$, so ist

$$f_x - f_{x-1} = \frac{x(x+1)}{2} e^x - \frac{(x-1)x}{2} e^{x-1} = \frac{x(x+1)}{2} e^{x-1}(e-1) + x e^{x-1}.$$

Es ist demnach

$$\sum\left(\frac{x(x+1)}{2} e^{x-1}\right) = \frac{\frac{n(n+1)}{2} e^n}{e-1} - \frac{\Sigma(x e^{x-1})}{e-1} \text{ oder}$$

$$\sum\left(\frac{x(x+1)}{2} e^{x-1}\right) = \frac{\frac{n(n+1)}{2} e^{n+2} - n(n+2) e^{n+1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} e^n - 1}{(e-1)^3}$$

$$= \left[\frac{n(n+1)(n+2) e^n}{2}\left(\frac{e^2}{n+2} - \frac{2e}{n+1} + \frac{1}{n}\right) - 1\right] : (e-1)^3.$$

Ganz analog findet man

$$\sum\left(\frac{x(x+1)(x+2)}{2.\ 3} e^{x-1}\right) = \left[\frac{n(n+1)(n+2)}{2.\ 3} e^{n+3} - \frac{n(n+1)(n+3)}{2} e^{n+2}\right.$$

$$\left. + \frac{n(n+2)(n+3)}{2} e^{n+1} - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.\ 3} e^n + 1\right] : (e-1)^4$$

$$= \left[\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.\ 3} - e^n\left(\frac{e^3}{n+3} - \frac{3e^2}{n+2} + \frac{3e}{n+1} - \frac{1}{n}\right) + 1\right] : (e-1)^4.$$

Das Bildungsgesetz dieser beiden Summenformeln ist leicht erkennbar, nach ihm kann man sofort ohne weitere Rechnung schreiben:

$$\sum\left(\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{2.\quad 3.\quad 4}e^{x-1}\right)=$$

$$\left[\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.\quad 3.\quad 4}e^n\left(\frac{e^4}{n+4}-\frac{4e^3}{n+3}+\frac{6n^2}{n+2}-\frac{4n}{n+1}+\frac{1}{n}\right)-1\right]:(e-1)^5.$$

Die wirklich ausgeführte Rechnung wird die Richtigkeit dieser Analogie bestätigen.

Beispiele zu diesen Summirungen sind folgende:

$$1+3.\ 2+6.\ 2^2+10.\ 2^3+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}2^{n-1}=2^{n-1}(n^2-n+2)-1.$$

$$1+\frac{3}{3}+\frac{6}{3^2}+\frac{10}{3^3}+\cdot\cdot+\frac{n(n-1)}{2.\ 3^{n-1}}=\frac{3^{n+2}-2(n+2)^2-1}{8.\ 3^{n-1}}.$$

$$1+4.3+10.3^2+20.3^3+\cdot\cdot+\frac{n(n+1)(n+2)}{2.\quad 3.}3^{n-1}=\frac{[(2n+1)^3+10n-7]3^{n-1}+2}{32}.$$

8) Für die eben behandelten Summen läßt sich noch ein einfacher recurrirender Ausdruck finden. Setzt man

$$f_x=\frac{x^{k|1}}{k!}e^x,\text{ so ist } f_x-f_{x-1}=\frac{x^{k|1}}{k!}(e^n-e^{n-1})+\frac{x^{k-1|1}}{(k-1)!}e^{x-1}.$$

Hieraus folgt nun:

$$(e-1)\sum\frac{x^{k|1}}{k!}e^{x-1}+\sum\frac{x^{k-1|1}}{(k-1)!}e^{x-1}=\frac{n^{k|1}}{k!}e^n,\text{ also ist}$$

$$\sum\frac{x^{k|1}}{k!}e^{x-1}=\frac{n^{k|1}e^n}{k!\ e-1}-\frac{1}{e-1}\sum\frac{x^{k-1|1}}{(k-1)!}e^{n-1}.$$

Bedenkt man, daß $\Sigma(e^{x-1})=\frac{e^{n-1}}{e-1}$ und setzt man nach und nach für k die Werthe 1, 2, 3 $\cdots$ k, so erhält man schließlich:

$$\sum\frac{x^{k|1}}{k!}e^{x-1}$$

$$=\frac{n^{k|1}}{k!}\cdot\frac{e^n}{e-1}-\frac{n^{k-1|1}}{(k-1)!}\frac{e^n}{(e-1)^2}+\frac{n^{k-2|1}}{(k-2)!}\frac{e^n}{(e-1)^3}\cdots\cdots\pm\frac{e^n-1}{(e-1)^{k+1}},$$

von dem Doppelzeichen des letzten Gliedes gilt das obere, wenn k gerade, das untere, wenn k ungerade ist. Für $k=4$ folgt:

$$\sum \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{2.\quad 3.\quad 4} e^{x-1}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.\quad 3.\quad 4} \cdot \frac{e^n}{e-1} - \frac{n(n+1)(n+2)}{2.\quad 3} \cdot \frac{e^n}{(e-1)^2}$$

$$+ \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{e^n}{(e-1)^3} - \frac{n}{1} \cdot \frac{e^n}{(e-1)^4} + \frac{e^n - 1}{(e-1)^5}.$$

§. 11. Unendliche geometrische Reihen. Die betrachteten geometrischen Reihen lassen auch als unendliche Reihen eine Summirung zu, wenn der Exponent e kleiner als Eins ist. Ist $e < 1$, m eine endliche Zahl, aber $n = \infty$, so sind alle Glieder von der Form $n^m e^n$ verschwindend klein. Denn setzt man $e = \frac{1}{1+z}$, entwickelt in $\frac{n^m}{(1+z)^n}$ den Nenner nach der binomischen Reihe und theilt alle Glieder dieser Entwickelung durch n^m, so sind für $n = \infty$ die ersten m Glieder derselben verschwindend klein, das mte Glied ist endlich und alle späteren Glieder dieses Nenners sind unendlich groß. Der Bruch selbst hat also einen verschwindenden Werth. Man erhält also sofort die Summenwerthe der unendlichen geometrischen Reihen, indem man in den oben entwickelten Summenformeln die Glieder wegläßt, welche die Potenzen e^n, e^{n+1}, $e^{n+2}\ldots$ als Factoren enthalten.

Demnach ist unter der Voraussetzung $e < 1$, wenn wir statt $\sum_{x=1}^{x=\infty}$ kürzer $\sum_1^\infty$ schreiben:

$$\sum_1^\infty \left(e^{x-1}\right) = \frac{1}{1-e}.$$

$$\sum_1^\infty \left(x\, e^{x-1}\right) = \frac{1}{(1-e)^2}.$$

$$\sum_1^\infty \left(a_0 + a_1(x-1)\right) e^{x-1} = \frac{a_0 - (a_0 - a_1)\, e}{(1-e)^2}.$$

$$\sum_1^\infty \left(x^2 e^{x-1}\right) = \frac{1+e}{(1-e)^3}.$$

$$\sum_1^\infty \left(x^3 e^{x-1}\right) = \frac{1+4\,e+e^2}{(1-e)^4}.$$

$$\sum_1^{\infty}\left(\frac{x(x+1)}{2}\,e^{x-1}\right)=\frac{1}{(1-e)^3}$$

$$\sum_1^{\infty}\left(\frac{x(x+1)(x+2)}{2.\quad 3}\,e^{x-1}\right)=\frac{1}{(1-e)^4}.$$

$$\sum_1^{\infty}\left(\frac{x(x+1)\,(x+2)\,(x+3)}{2.\quad 3.\quad 4}\,e^{x-1}\right)=\frac{1}{(1-e)^5}.$$

Beispiele:

$$1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots \text{ in inf.} = 3.$$

$$1+\frac{2}{3}+\frac{3}{9}+\frac{4}{27}+\frac{5}{3^4}+\cdots\frac{x}{3^{x-1}}+\cdots \text{ in inf.} = 2\,\frac{1}{4}.$$

$$1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\cdots\frac{2x-1}{2^{x-1}}+\cdots \text{ in inf.} = 6.$$

$$1+\frac{4}{5}+\frac{9}{25}+\frac{16}{5^3}\cdots\frac{x^2}{5^{x-1}}+\cdots \text{ in inf.} = 3\,\frac{29}{32}.$$

$$1+\frac{8}{3}+\frac{27}{9}+\frac{64}{27}+\cdots+\frac{x^3}{3^{x-1}}+\cdots \text{ in inf.} = 12\,\frac{3}{8}.$$

$$1+\frac{3}{4}+\frac{6}{16}+\frac{10}{64}+\cdots+\frac{x(x+1)}{2.\ 4^{x-1}}+\cdots \text{ in inf.} = 2\,\frac{10}{27}.$$

$$1+\frac{4}{2}+\frac{10}{4}+\frac{20}{8}+\frac{35}{16}+\cdots+\frac{x(x+1)(x+2)}{2.\ 3.\ 2^{x-1}}+\cdots \text{ in inf.} = 16.$$

$$1+\frac{5}{3}+\frac{15}{3^2}+\frac{35}{3^3}+\frac{70}{3^4}+\cdots\frac{x(x+1)\,(x+2)\,(x+3)}{2.\quad 3.\quad 4.\qquad 3^{x-1}}+\cdots \text{ in inf.} = 7\,\frac{19}{32}.$$

§. 12. Reihen mit abwechselnden Vorzeichen.

1) Ein besonderer Fall tritt ein, wenn $e=-1$ gesetzt wird; die bisherigen zusammengesetzten Reihen werden dann arithmetische Reihen, deren aufeinanderfolgende Glieder aber abwechselnde Vorzeichen haben. Führen wir die Substitution aus, so erhalten wir folgende Summen:

$$\sum\left(x\,(-1)^{x-1}\right)=1-2+3-4+\cdots\mp n=\frac{1\mp(2n+1)}{4}.$$

$$\sum\Big[a_0+a_1(x-1)\Big](-1)^{x-1}=\frac{2a_0-a_1\mp[2a_0+(2n-1)a_1]}{4}.$$

Zum Beispiel:

$$1-4+7-10+13-\cdots\mp(3n-2)=\frac{-1\mp(6n-1)}{4}.$$

$$\sum\Big(x^2(-1)^{x-1}\Big)=1-4+9-16+\cdots\mp n^2=\mp\frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\sum\Big(x^3(-1)^{x-1}\Big)=1-8+27-64\cdots\mp n^3=\frac{-1\mp[2n^2(2n+3)-1]}{8}.$$

$$\sum\Big(\frac{x(x+1)}{2}(-1)^{x-1}\Big)=1-3+6-10+\cdots\mp\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{1\mp(2n^2+4n+1)}{8}.$$

$$\sum\Big(\frac{x(x+1)(x+2)}{2.\quad 3}(-1)^{x-1}\Big)=1-4+10-20+\cdots\mp\frac{n(n+1)(n+2)}{2.\quad 3}$$

$$=\frac{3\mp(2n+3)(2n^2+6n+1}{48}.$$

In den vorstehenden Gleichungen gilt bei dem Doppelzeichen das obere Zeichen, wenn n eine gerade, das untere aber, wenn n eine ungerade Zahl ist.

2) Nimmt man in den vorstehenden Reihen erst die positiven Glieder für sich und dann die negativen, so erhält man summirbare Reihen, die Differenz der beiden Summen ist die Summe der gemischten Reihen. Soll z. B. $\Sigma(x^2(-1)^{x-1})$ gefunden werden, so bilden die positiven Glieder die Reihe:

1, 9, 25, 49 .... und die negativen die Reihe:
4, 16, 36, 64 ....

Beide Reihen sind Reihen zweiter Ordnung; die Elemente der ersten Reihe sind 1, 8, 8, die der zweiten 4, 12, 8. Ist nun n eine gerade Zahl, so hat jede Reihe $\left(\frac{n}{2}\right)$ Glieder; die erste Reihe liefert also nach §. 8, 3 die Summe

$$\frac{n}{2}\cdot 1+\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2}8+\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)}{2.\quad 3}8$$

$$=\frac{n}{2}+n(n-2)+\frac{n(n-2)(n-4)}{6}=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

Die zweite Reihe hat dagegen die Summe

$$\frac{n}{2}\cdot 4+\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2}12+\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)}{2.\quad 3}8$$

$$=2n+\frac{3}{2}n(n-2)+\frac{n(n-2)(n-4)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Demnach folgt, wenn n eine gerade Zahl ist:

$$\Sigma(x^2(-1)^{x-1})=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}-\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=-\frac{n(n+1)}{2}.$$

Ist hingegen n eine ungerade Zahl, so hat die erste Reihe $\frac{n+1}{2}$ Glieder und die zweite deren $\frac{n-1}{2}$, die beiden Summen sind dann beziehungsweise:

$$\frac{n+1}{2}\cdot 1+\frac{\frac{n+1}{2}\left(\frac{n+1}{2}-1\right)}{2}\cdot 8+\frac{\frac{n+1}{2}\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\left(\frac{n+1}{2}-2\right)}{2.\quad 3}\cdot 8$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

$$\frac{n-1}{2}\cdot 4+\frac{\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-1\right)}{2}\cdot 12+\frac{\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\left(\frac{n-1}{2}-2\right)}{2.\quad 3}\cdot 8$$

$$=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

Folglich ist, wenn n eine ungerade Zahl ist:

$$\Sigma\left(x^2(-1)^{x-1}\right)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}-\frac{(n-1)n(n+1)}{6}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

4. Summirung der Werthe gebrochener Funktionen.

§. 13. 1) Es sei $f_x=\frac{x}{a+bx}$, so ist

$$f_x-f_{x-1}=\frac{x}{a+bx}-\frac{x-1}{a+b(x-1)}=\frac{a}{[a+b(x-1)][a+bx]},$$ folglich ist

$$\sum \frac{1}{[a+b(x-1)]\,[a+bx]} = \frac{n}{a(a+bn)}.$$

Beispiele:

$$\frac{1}{1.\ 2}+\frac{1}{2.\ 3}+\frac{1}{3.\ 4}\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

$$\frac{1}{1.\ 3}+\frac{1}{3.\ 5}+\frac{1}{5.\ 7}\cdots+\frac{1}{(2n-1)\ (2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

$$\frac{1}{1.\ (m+1)}+\frac{1}{(m+1)\ (2m+1)}+\frac{1}{(2m+1)\,(3m+1)}\cdots+\frac{1}{[(n-1)\,m+1]\ [nm+1]}$$

$$=\frac{n}{mn+1}.$$

Da die einfachste gebrochene Funktion von n, als Summenformel genommen, auf eine Reihe führt, deren Glieder im Nenner zwei Factoren haben, so läßt sich erwarten, daß, wenn die Glieder der Reihe nach der Form $\frac{1}{a+bx}$ gebildet sind, die Reihe **keine** endliche summirbare Reihe sein wird.

2) Setzt man $f_x = \frac{x(x+1)}{(a+bx)\,(a+b(x+1))}$, oder in abgekürzter Schreibweise

$f_x = \frac{x^{2|1}}{(a+bx)^{2|b}}$, so folgt:

$$f_x - f_{x-1} = \frac{2ax}{[a+b\,(x-1)]^{3|b}} \quad \text{und}$$

$$\sum \frac{x}{[a+(x-1)\,b]^{3|b}} = \frac{1}{2a}\cdot\frac{n^{2|1}}{(a+bn)^{2|b}}.$$

Beispiele:

$$\frac{1}{2.\,3.\,4}+\frac{2}{3.\,4.\,5}+\frac{3}{4.\,5.\,6}+\cdots+\frac{n}{(n+1)\ (n+2)\ (n+3)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{n(n+1)}{(n+2)\ (n+3)}.$$

$$\frac{1}{3.\,4.\,5}+\frac{2}{4.\,5.\,6}+\frac{3}{5.\,6.\,7}+\cdots+\frac{n}{(n+2)\ (n+3)\ (n+4)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{n(n+1)}{(n+3)\ (n+4)}.$$

$$\frac{1}{2.\,5.\,8}+\frac{2}{5.\,8.\,11}+\frac{3}{8.\,11.\,14}+\cdots+\frac{n}{(3n-1)\ (3n+2)\ (3n+5)}=\frac{1}{4}\ \frac{n\,(n+1)}{(3n+2)\,(3n+5)}.$$

3) Es ist nun

$$\frac{1}{[a+(x-1)b]^{2|b}} = \frac{a+(x+1)b}{[a+(x-1)b]^{3|b}} = \frac{a+b}{[a+(x-1)b]^{3|b}} + \frac{xb}{[a+(x-1)b]^{3|b}}.$$

Hieraus folgt nach der Summirung auf beiden Seiten zwischen $x=1$ und $x=n$

$$(a+b)\sum\frac{1}{[a+(x-1)b]^{3|b}} = \sum\frac{1}{[a+(x-1)b]^{2|b}} - b\sum\frac{x}{[a+(x-1)b]^{3|b}}$$

$$= \frac{1}{a}\,\frac{n}{(a+nb)} - \frac{b}{2a}\,\frac{n(n+1)}{(a+bn)\,(a+(n+1)\,b)} = \frac{n\,[2a+b+nb]}{2a\,(a+bn)^{2|b}},\text{ also:}$$

$$\sum\frac{1}{[a+(x-1)b]^{3|b}} = \frac{n\,[2a+b+nb]}{2a\,(a+b)\,(a+bn)^{2|b}}.$$

Beispiele:

$$\frac{1}{1.\,2.\,3} + \frac{1}{2.\,3.\,4} + \frac{1}{3.\,4.\,5} + \frac{1}{4.\,5.\,6} + \cdots + \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)} = \frac{n\,(n+3)}{4\,(n+1)\,(n+2)}.$$

$$\frac{1}{1.\,3.\,5} + \frac{1}{3.\,5.\,7} + \frac{1}{5.\,7.\,9} + \frac{1}{7.\,9.\,11} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\,(2n+1)\,(2n+3)}$$

$$= \frac{n\,(n+2)}{3.\;(2n+1)\,(2n+3)}.$$

$$\frac{1}{2.\,5.\,8} + \frac{1}{5.\,8.\,11} + \frac{1}{8.\,11.\,14} + \cdots + \frac{1}{(3n-1)\,(3n+2)\,(3n+5)}$$

$$= \frac{n\,(3n+7)}{4.\,5\,(3n+2)\,(3n+5)}.$$

4) Es ist

$$\frac{1}{[a+(x-1)\,b)^{2|2b}} = \frac{a+xb}{[a+(x-1)\,b]^{3|b}} = \frac{a}{[a+(x-1)\,b]^{3|b}} + \frac{bx}{[a+(x-1)\,b]^{3|b}}.$$

Also ist

$$\sum\frac{1}{[a+(x-1)\,b]^{2|2b}} = a\sum\frac{1}{[a+(x-1)\,b]^{3|b}} + b\sum\frac{x}{[a+(x-1)\,b^{3|b}}$$

$$\frac{n\,[2a+b+nb]}{2\,(a+b)\,(a+bn)^{2|b}} + \frac{b}{2a}\,\frac{n\,(n+1)}{(a+bn)^{2|b}}$$

$$= \frac{n\,[2a^2+2ab+b^2+nb\,(2a+b)]}{2a\,(a+b)\,(a+nb)^{2|b}}.$$

Beispiele:

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{5.7}\cdots+\frac{1}{n(n+2)}=\frac{n(3n+5)}{4.(n+1)(n+2)}.$$

$$\frac{1}{1.5}+\frac{1}{3.7}+\frac{1}{5.9}+\frac{1}{7.11}+\cdots\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}=\frac{n(4n+5)}{3(2n+1)(2n+3)}.$$

5) Die drei letzten Summenformeln lassen sich als besondere Fälle einer allgemeineren Summirungsaufgabe auffassen.

Setzt man $f_x = \frac{x(p+qx)}{(a+bx)^{2|b}}$, so ist

$$f_x - f_{x-1} = \frac{[q(2a+b)-bp]x+(a+b)(p-q)}{[a+b(x-1)]^{3|b}}.$$

Setzt man nun $(a+b)(p-q)=c$ und $q(2a+b)-bp=d$, so folgt

$$p=\frac{a(2c+d)+b(c+d)}{2a(a+b)} \text{ und } q=\frac{ad+b(c+d)}{2a(a+b)}.$$

Demnach ist

$$\sum\frac{c+dx}{[a+(x-1)b]^{3|b}}=\frac{n[a(2c+d)+b(c+d)+n(ad+b(c+d)]}{2a(a+b)[a+nb]^{2|b}}.$$

Setzt man hierin $c=0$ und $d=1$ oder $c=1$ und $d=0$ oder $c=a$ und $d=b$, so erhält man der Reihe nach die letzten drei Formeln 2) bis 4).

Beispiele:

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{3}{2.3.4}+\frac{5}{3.4.5}+\frac{7}{4.5.6}+\cdots+\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(3n+1)}{4(n+1)(n+2)}.$$

$$\frac{1}{1.3.5}+\frac{4}{3.5.7}+\frac{7}{5.7.9}+\cdots+\frac{3n-2}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(5n+1)}{6(2n+1)(2n+3)}.$$

6) Man erkennt leicht, wie sich die Gestalt dieser Reihen noch erweitern läßt. Setzt man $f=\frac{x^{3|1}}{[a+xb)^{3|b}}$ und wendet dann das in den vorigen Abschnitten gezeigte Verfahren an, so erhält man leicht:

$$\sum\frac{x^{2|1}}{[a+(x-1)b]^{4|b}}=\frac{1}{3a}\cdot\frac{n^{3|1}}{(a+nb)^{3|b}}.$$

$$\sum \frac{x}{[a+(x-1)b]^{4|b}} = \frac{1}{6a(a+b)} \cdot \frac{n^{2|1}(3a+2b+nb)}{(a+nb)^{3|b}}.$$

$$\sum \frac{1}{[a+(x-1)b]^{4|6}} = \frac{1}{3a(a+b)(a+2b)} \cdot \frac{n[3a^2+6ab+2b^2+3b(a+b)n+b^2n^2]}{(a+nb)^{3|6}}.$$

Beispiele:

$$\frac{1}{3.\,4.\,5.\,6} + \frac{3}{4.\,5.\,6.\,7} + \frac{6}{5.\,6.\,7.\,8} \cdots \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{(n+3)^{4|1}} = \frac{n^{3|1}}{18.\,(n+3)^{3|1}}.$$

$$\frac{1}{2.\,3.\,4.\,5} + \frac{2}{3.\,4.\,5.\,6} + \frac{3}{4.\,5.\,6.\,7} \cdots + \frac{n}{(n+1)^{4|1}} = \frac{n(n+1)(n+8)}{36(n+2)^{3|1}}.$$

$$\frac{1}{1.\,2.\,3.\,4} + \frac{1}{2.\,3.\,4.\,5} + \frac{1}{3.\,4.\,5.\,6} \cdots + \frac{1}{n^{4|1}} = \frac{n(n^2+6n+11)}{18.\,(n+1)^{3|1}}.$$

Nach einigen Zwischenrechnungen summirt man auch leicht folgende Reihen:

$$\frac{1}{2.\,3.\,4.\,5} + \frac{4}{3.\,4.\,5.\,6} + \frac{9}{4.\,5.\,6.\,7} + \cdots + \frac{n^2}{(n+1)^{4|1}} = \frac{n(n+1)(5n+4)}{36.\,(n+2)^{3|1}}.$$

$$\frac{1}{1.\,4} + \frac{1}{2.\,5} + \frac{1}{3.\,6} \cdots + \frac{1}{n(n+3)} = \frac{n(11n^2+48n+49)}{18.\,(n+1)^{3|1}}.$$

7) Man kann die Formen dieser Reihen noch mehr verallgemeinern. Setzt man

$$f_x = \frac{x^{k|1}}{(a+bx)^{k|b}}, \text{ so ist } f_x - f_{x-1} = \frac{x^{k|1}}{(a+bx)^{k|b}} - \frac{(x-1)^{k|1}}{[a+(x-1)b]^{k|b}}$$

$$= \frac{x^{k-1|1}}{(a+bx)^{k-1|1}} \left[\frac{x+k-1}{a+(x+k-1)b} - \frac{x-1}{a+(x-1)b}\right] = \frac{ka\,x^{k-1|1}}{[a+b(x-1)]^{k+1|b}}.$$

Folglich ist

$$\sum \frac{x^{k-1|1}}{[a+b(x-1)]^{k+1|b}} = \frac{1}{ka} \cdot \frac{x^{k|1}}{(a+bx)^{k|1}}.$$

Zum Beispiel:

$$\frac{1.\,2.\,3}{4.\,5.\,6.\,7.\,8} + \frac{2.\,3.\,4}{5.\,6.\,7.\,8.\,9} + \cdots \frac{n^{3|1}}{(n+3)^{5|1}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{n^{4|1}}{(n+4)^{4|1}}.$$

$$\frac{1.\,2.\,3}{1.\,3.\,5.\,7.\,9} + \frac{2.\,3.\,4}{3.\,5.\,7.\,9.\,11} + \cdots \frac{n^{3|1}}{(2n-1)^{5|}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{n^{4|1}}{(2n+1)^{4|2}}.$$

8) Setzt man $f_x = \frac{1}{(a+bx)^{k|b}}$, so erhält man $f_x - f_{x-1} = \frac{-bk}{(a-b+bx)^{k+1|b}}$; also ist:

$$\sum \frac{1}{(a-b+bk)^{k+1|b}} = \frac{1}{bk}\left[\frac{1}{a^{k|b}} - \frac{1}{(a+bn)^{k|b}}\right].$$

Zum Beispiel:

$$\frac{1}{1.\,2.\,3.\,4} + \frac{1}{2.\,3.\,4.\,5} + \cdots + \frac{n}{n^{4|1}} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)^{3|1}}\right] = \frac{1}{18}\left[\frac{(n+1)^{3|1}-6}{(n+1)^{3|1}}\right].$$

9) Noch allgemeiner wird die Summirung, wenn wir $f_x = \frac{(c+dx)^{k|d}}{(a+bx)^{k|b}}$ setzen; es folgt dann:

$$\sum \frac{(c+dx)^{k-1|d}}{[a+b\,(x-1)]^{k+1|b}} = \frac{1}{k\,(ad-bc)}\left[\frac{(c+dn)^{k|d}}{(a+bn)^{k|b}} - \frac{c^{k|d}}{a^{k|b}}\right].$$

Setzt man hierin $k=2$, so folgt

$$\sum \frac{c+dx}{(a+b\,(x-1)]^{3|b}} = \frac{1}{2\,(ad-bc)}\left[\frac{(c+dn)^{2|d}}{(a+bn)^{2|b}} - \frac{c^{2|d}}{a^{2|b}}\right].$$

Diese Reihe ist schon oben unter 5) summirt; eine geringe Umformung des jetzt gefundenen Werthes wird seine Identität mit dem früher gefundenen darthun.

Beispiele:

$$\frac{1.\,3}{1.\,2.\,3.\,4} + \frac{3.\,5}{2.\,3.\,4.\,5} + \frac{5.\,7}{3.\,4.\,5.\,6} + \cdots \frac{4n^2-1}{n^{4|1}} = \frac{1}{9}\left[\frac{(2n-1)^{3|2}}{(n+1)^{3|1}} + \frac{1}{2}\right].$$

$$\frac{1.\,3.\,5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} + \frac{3.\,5.\,7}{2.\,3.\,4.\,5.\,6} + \cdots \frac{(2n-1)^{3|2}}{n^{5|1}} = \frac{1}{12}\left[\frac{(2n-1)^{4|2}}{(n+1)^{4|1}} + \frac{5}{8}\right].$$

10) Bezeichnet l eine positive ganze Zahl, die kleiner als k ist, so ist:

$$\frac{(c+dx)^{k-l|d}}{(a+bx)^{k+1|b}} = \frac{(c+dx)\,[c+d\,(x+1)]^{k-l-1|d}}{(a+bx)^{k+1|b}}.$$

Da nun $c+dx = \frac{bc-ad}{b} + \frac{d}{b}(a+bx)$, so folgt leicht:

$$\sum \frac{(c+dx)^{k-l|d}}{(a+bx)^{k+1|b}} = \frac{bc-ad}{b} \sum \frac{[c+d\,(x+1)]^{k-l-1|d}}{(a+bx)^{k+1|b}} + \frac{d}{b} \sum \frac{[c+d\,(x+1)]^{k+l-1|d}}{[a+b\,(x+1)]^{k|d}}.$$

Lassen sich zwei dieser drei Summen nach früheren Formeln ausführen, so ist es auch mit der dritten der Fall. So folgt für $l = k - 1$:

$$\sum \frac{c + dx}{(a + bx)^{k+1|b}} + \frac{bc - ad}{b} \sum \frac{1}{(a + bx)^{k+1|b}} + \frac{d}{b} \sum \frac{1}{(a + b + bx)^{k|b}}.$$

Ebenso folgt für $l = 1$:

$$\sum \frac{(c + d + dx)^{k-2|d}}{(a + bx)^{k+1|b}} = \frac{b}{bc - ad} \sum \frac{(c + dx)^{k-1|d}}{(a + bx)^{k+1|b}} - \frac{d}{bc - ad} \sum \frac{(c + d + dx)^{k-2|d}}{(a + b + bx)^{k|b}}.$$

Beispiele:

$$\frac{1}{1.\,2.\,3.\,4} + \frac{3}{2.\,3.\,4.\,5} + \frac{5}{3.\,4.\,5.\,6} \cdots + \frac{2n - 1}{n^{4|1}} = \frac{1}{9} - \frac{3n + 2}{3(n + 1)^{3|1}}.$$

$$\frac{1.\,3}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} + \frac{3.\,5}{2.\,3.\,4.\,5.\,6} + \frac{5.\,7}{3.\,4.\,5.\,6.\,7} \cdots + \frac{4n^2 - 1}{n^{5|1}}$$

$$= \frac{17}{1440} + \frac{2}{45} \frac{(2n - 1)^{3|2}}{(n + 2)^{3|1}} - \frac{1}{60} \frac{(2n - 3)^{4|2}}{(n + 1)^{4|1}}.$$

11) Eine neue Gruppe summirbarer endlicher Reihen erhält man, wenn man die Summenformel aus §. 5, 2) und 3) anwendet; wir beschränken uns jedoch hier nur auf die einfacheren Fälle.

Es sei $f_x = \frac{x}{a + bx}$, dann ist $f_{x+r-1} - f_{x-1}$

$$= \frac{x + r - 1}{a + b(x + r - 1)} - \frac{x - 1}{a + b(x - 1)} = \frac{ar}{(a - b + bx)^{2|br}}.$$

Folglich ist nach §. 5, 3)

$$\sum \frac{1}{(a - b + bx)^{2|br}} = \frac{1}{ar} \left[\frac{n + r - 1}{a + b(n + r - 1)} + \frac{n + r - 2}{a + b(n + r - 2)} \cdots + \frac{n}{a + bn} \right.$$

$$\left. - \frac{r - 1}{a + b(r - 1)} - \frac{r - 2}{a + b(r - 2)} - \cdots - \frac{1}{a + b} \right] = \frac{n}{r} \left[\frac{1}{(a + br - b)^{2|nb}} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a + br - 2b)^{2|nb}} + \cdots + \frac{1}{a^{2|nb}} \right].$$

Setzt man $a = b = 1$, so erhält man:

$$\Sigma\left(\frac{1}{x^{2|r}}\right) = \frac{n}{r}\left[\frac{1}{r(r+n)} + \frac{1}{(r-1)(r+n-1)} + \frac{1}{(r-2)(r+n-2)} \cdots \frac{1}{1(n+1)}\right].$$

Beispiele:

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} \cdots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n}{2}\left[\frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{n+1}\right] = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}.$$

$$\frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.6} \cdots + \frac{1}{n(n+3)} = \frac{n}{3}\left[\frac{1}{3(n+3)} + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{n+1}\right]$$

$$= \frac{n(11n^2+48n+49)}{18(n+1)(n+2)(n+3)}.\text{*)}$$

$$\frac{1}{1.5} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{5.9} \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} = \frac{n}{2}\left[\frac{1}{3(2n+3)} + \frac{1}{2n+1}\right]$$

$$= \frac{n(4n+5)}{3(2n-1)(2n+3)}.$$

$$\frac{1}{1.7} + \frac{1}{3.9} + \frac{1}{5.11} \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+5)} = \frac{n}{3}\left[\frac{1}{5(2n+5)} + \frac{1}{3(2n+3)} + \frac{1}{2n+1}\right]$$

$$= \frac{n(92n^2+324n+259)}{45(2n+1)(2n+3)(2n+5)}.$$

12) Setzt man ähnlich wie oben in 9) $f_x = \frac{(c+dx)^{k|rd}}{(a+bx)^{k|rd}}$, so ist $f_{x+r-1} - f_{x-1}$

$$= \frac{[c+d(x+r-1)]^{k|rd}}{[a+b(x+r-1)]^{k|rb}} - \frac{[c+d(x-1)]^{k|rd}}{[a+b(x-1)]^{k|rb}} = \frac{kr(ad-bc)[c+d(x+r-1)]^{k-1|rd}}{[a+b(x-1)]^{k+1|rb}}.$$

Die Anwendung der Formel aus §. 5, 3 giebt nun:

$$\Sigma\frac{[c+d(x+r-1)]^{k-1|rd}}{[a+b(x-1)]^{k+1|rb}} = \frac{1}{kr(ad-bc)}\left[\frac{[c+d(n+r-1)]^{k|rd}}{[a+b(n+r-1)]^{k|rb}}\right.$$

$$+ \frac{[c+d(n+r-2)]^{k|rd}}{[a+b(n+r-2)]^{k|rb}} \cdots + \frac{(c+dn)^{k|rd}}{(a+bn)^{k|rb}} - \frac{[c+d(r-1)]^{k|rd}}{[a+b(r-1)]^{k|rb}}$$

$$\left. - \frac{[c+d(r-2)]^{k|rd}}{[a+b(r-2)]^{k|rb}} \cdots - \frac{c^{k|rd}}{a^{k|rb}}\right].$$

---

*) Diese beiden Reihen sind schon oben auf umständlicherem Wege summirt.

Setzt man hier $r=2$, so folgt:

$$\sum \frac{[c+d(x+1)]^{k-1|2d}}{[a+b(x-1)]^{k+1|2b}} = \frac{1}{2k(ad-bc)}\left[\frac{[c+d(n+1)]^{k|2d}}{[a+b(n+1)]^{k|2b}} + \frac{(c+dn)^{k|2d}}{(a+bn)^{k|2b}}\right.$$

$$\left. - \frac{(c+d)^{k|2d}}{(a+b)^{k|2b}} - \frac{c^{k|2d}}{a^{k|2b}}\right].$$

Setzt man in den beiden letzten Summenformeln $d=1$ und $c=-r+1$, so erhält man:

$$\sum \frac{x^{k-1|r}}{[a+b(x-1)]^{k+1|rb}} = \frac{1}{kr[a+b(r-1)]}\left[\frac{n^{k|r}}{[a+b(n+r-1)]^{k|rb}}\right.$$

$$+ \frac{(n-1)^{k|r}}{[a+b(n+r-2)]^{k|rb}} \cdots + \frac{(n-r+1)^{k|r}}{(a+bn)^{k|rb}} + \frac{(r-1)^{k-1|r}}{[a+b(r-2)]^{k|rb}}$$

$$\left. + \frac{2(r-2)^{k-1|r}}{[a+b(r-3)]^{k|rb}} \cdots + \frac{(r-1)1^{k-1|r}}{a^{k|rb}}\right].$$

$$\sum \frac{x^{k-1|2}}{[a+b(x-1)]^{k+1|2b}} = \frac{1}{2k(a+b)}\left[\frac{n^{k|2}}{[a+b(n+1)]^{k|2b}} + \frac{(n-1)^{k|2}}{(a+bn)^{k|2b}} + \frac{1^{k-1|2}}{a^{k|2b}}\right].$$

Beispiele:

$$\frac{1}{2.4.6} + \frac{2}{3.5.7} + \frac{3}{4.6.8} \cdots + \frac{n}{(n+1)(n+3)(n+5)} = \frac{1}{12}\left[\frac{n(n+2)}{(n+3)(n+5)}\right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)(n+1)}{(n+2)(n+4)} + \frac{1}{2.4}\right].$$

$$\frac{1}{1.5.9.} + \frac{2}{3.7.11} + \frac{3}{5.9.13} \cdots + \frac{n}{(2n-1)(2n+3)(2n+7)} = \frac{1}{12}\left[\frac{n(n+2)}{(2n+3)(2n+7)}\right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)(n+1)}{(2n+1)(2n+5)} + \frac{1}{5}\right].$$

$$\frac{1.3}{2.4.6.8} + \frac{2.4}{3.5.7.9} + \cdots \frac{n(n+2)}{(n+1)^{4|2}} = \frac{1}{18}\left[\frac{n^{3|2}}{(n+3)^{3|2}} + \frac{(n-1)^{3|2}}{(n+2)^{3|2}} + \frac{1.3}{2.4.6}\right].$$

13) Setzt man in der Hauptformel des vorigen Abschnitts $c=1$ und $d=0$, so erhält man:

$$\sum\frac{1}{(a-b+bx)^{k+1|rb}}=\frac{1}{krb}\left[\frac{1}{a^{k|rb}}+\frac{1}{(a+b)^{k|rb}}+\cdots+\frac{1}{[a+(r-1)b]^{k|rb}}-\frac{1}{(a+nb)^{k|rb}}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{[a+(n+1)b]^{k|rb}}-\cdots\frac{1}{[a+(n+r-1)b]^{k|rb}}\right].$$

Für $a=b=1$ folgt:

$$\sum\frac{1}{x^{k+1|r}}=\frac{1}{kr}\left[\frac{1}{1^{k|r}}+\frac{1}{2^{k|r}}+\frac{1}{3^{k|r}}\cdots+\frac{1}{r^{k|r}}-\frac{1}{(n+1)^{k|r}}-\frac{1}{(n+2)^{k|r}}\right.$$
$$\left.-\cdots-\frac{1}{(n+r)^{k|r}}\right].$$

Beispiele:

$$\frac{1}{1.\,3.\,5}+\frac{1}{2.\,4.\,6}+\cdots\frac{1}{n^{3|2}}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1.\,3}+\frac{1}{2.\,4}-\frac{1}{(n+1)(n+3)}-\frac{1}{(n+2)(n+4)}\right].$$

$$\frac{1}{1.\,3.\,5.\,7}+\frac{1}{2.\,4.\,6.\,8}+\cdots\frac{1}{n^{4|2}}=\frac{1}{6}\left[\frac{7}{80}-\frac{1}{(n+1)^{3|2}}-\frac{1}{(n+2)^{3|2}}\right].$$

$$\frac{1}{1.\,5.\,9}+\frac{1}{3.\,7.\,11}+\cdots\frac{1}{(2n-1)^{3|4}}=\frac{1}{8}\left[\frac{26}{105}-\frac{1}{(2n+1)^{2|4}}-\frac{1}{(2n+3)^{2|4}}\right].$$

14) Nimmt man mit dem Ausdruck $\frac{(c+dx)^{k-l|rd}}{(a+bx)^{k+1|rb}}$, in welchem l eine positive ganze Zahl kleiner als k bedeutet, eine ähnliche Umformung vor, wie sie oben in 10) gezeigt ist, so erhält man:

$$\sum\frac{(c+dx)^{k-l|rd}}{(a+bx)^{k+1|rb}}=\frac{bc-ad}{b}\sum\frac{[c+d(x+r)]^{k-l-1|dr}}{(a+bx)^{k+1|br}}+\frac{d}{b}\sum\frac{[c+d(x+r)]^{k+1-l|dr}}{[a+b(n+r)]^{k|rb}}.$$

Sind von diesen drei Summen zwei zu entwickeln, so ist es auch die dritte.

Beispiel:

$$\frac{1}{2.\,4.\,6.\,8}+\frac{2}{3.\,5.\,7.\,9}\cdots+\frac{n}{(n+1)^{4|2}}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{4^{2|2}}+\frac{1}{5^{2|2}}-\frac{1}{(n+4)^{2|2}}-\frac{1}{(n+5)^{2|2}}\right]$$
$$-\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2^{3|2}}+\frac{1}{3^{3|2}}-\frac{1}{(n+2)^{3|2}}-\frac{1}{(n+3)^{3|2}}\right].$$

15) Man sieht hieraus, daß die Anzahl der verschiedenen Formen gebrochener Reihen, welche als endliche Reihen summirbar sind, unendlich groß ist. Bisher waren

die in den Gliedern vorkommenden Factoren vom ersten Grade, es ist aber auch möglich, Reihen zu bilden, in denen diese Factoren vom zweiten, überhaupt von einem höheren Grade sind. In allen betrachteten Fällen war aber im allgemeinen Gliede der Reihe der Grad des Zählers mindestens um zwei kleiner als der Grad des Nenners, woraus wir erwarten können, daß da, wo diese Differenz nur eins beträgt, die Reihe sich der Summirung in endlicher Gestalt entzieht.

§. 14. Unendliche Reihen mit gebrochenen Gliedern. Sämmtliche im vorigen Paragraph betrachtete Reihen geben noch endliche Summen, wenn die Anzahl der Glieder unendlich groß genommen wird, denn der Grad, in welchem die Zahl n in der Summenformel vorkommt, ist derselbe im Zähler wie im Nenner. Dividirt man nun so wohl den Zähler als den Nenner durch die höchste in ihnen vorkommende Potenz von n und läßt nach der Division n ohne Grenze wachsen, so erhält man den Summenwerth der unendlichen Reihe. In dieser Weise findet man:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{(a-b+bx)^{2|b}} = \frac{1}{ab}.$$

$$\sum_1^\infty \frac{x}{(a-b+bx)^{3|b}} = \frac{1}{2ab^2}.$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{(a-b+bx)^{3|b}} = \frac{1}{2ab(a+b)}.$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{(a-b+bx)^{2|2b}} = \frac{2a+b}{2ab(a+b)}.$$

$$\sum_1^\infty \frac{c+dx}{(a-b+bx)^{3|b}} = \frac{ad+bc+bd}{2ab^2(a+b)}.$$

$$\sum_1^\infty \frac{x^{2|1}}{(a-b+bx)^{4|b}} = \frac{1}{3ab^3}.$$

$$\sum_1^\infty \frac{x}{(a-b+bx)^{4|b}} = \frac{1}{6a(a+b)b^2}.$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{(a-b+bx)^{4|b}} = \frac{1}{3ab(a+b)(a+2b)}.$$

$$\sum_1^\infty \frac{x^{k-1|1}}{(a-b+bx)^{k+1|b}} = \frac{1}{kab^k}.$$

$$\sum_1^\infty \frac{(c+dx)^{k-1|d}}{(a-b+bx)^{k+1|b}} = \frac{1}{k\,(ad-bc)}\left(\frac{d^k}{b^k} - \frac{c^{k|d}}{a^{k|b}}\right).$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{(a-b+bx)^{k+1|b}} = \frac{1}{bk\,.\,a^{k|b}}.$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{(a-b+bx)^{2|rb}} = \frac{1}{br}\left[\frac{1}{a+b\,(r-1)} + \frac{1}{a+b\,(r-2)} + \cdots + \frac{1}{a}\right].$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{x^{2|r}} = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r-1} + \frac{1}{r-2} \cdots + \frac{1}{2} + 1\right].$$

$$\sum_1^\infty \frac{[c+d(x+r-1)]^{k-1|rd}}{(a+b\,(x-1)]^{k+1|rb}} = \frac{1}{kr\,(ad-bc)}\left[r\,\frac{d^k}{b^k} - \frac{[c+d\,(r-1)]^{k|rd}}{[a+b\,(r-1)]^{k|rb}}\right.$$

$$\left. - \frac{[c+d\,(r-2)]^{k|rd}}{[a+b\,(r-2)]^{k|rb}} - \cdots - \frac{c^{k|rd}}{a^{k|rb}}\right].$$

Beispiele:

$$\frac{1}{1.\,2.} + \frac{1}{2.\,3} + \frac{1}{3.\,4} + \cdots \text{ in inf.} = 1.$$

$$\frac{1}{2.\;3.\;4} + \frac{2}{3.\;4.\;5} + \frac{3}{4.\;5.\;6} + \cdots \text{ in inf.} = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{1}{1.\;2.\;3} + \frac{1}{2.\;3.\;4} + \frac{1}{3.\;4.\;5} + \cdots \text{ in inf.} = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{1}{1.\,3} + \frac{1}{2.\,4} + \frac{1}{3.\,5} + \cdots \text{ in inf.} = \frac{3}{4}.$$

$$\frac{1.\,2}{3.\,4.\,5.\,6} + \frac{2.\,3}{4.\,5.\,6.\,7} + \frac{3.\,4}{5.\,6.\,7.\,8} + \cdots \text{ in inf.} = \frac{1}{9}.$$

$$\frac{1}{2.\,3.\,4.\,5} + \frac{2}{3.\,4.\,5.\,6} + \frac{3}{4.\,5.\,6.\,7} + \cdots \text{ in inf.} = \frac{1}{24}.$$

$$\frac{1}{1.\,2.\,3.\,4} + \frac{1}{2.\,3.\,4.\,5} + \frac{1}{3.\,4.\,5.\,6} + \cdots \text{ in inf.} = \frac{1}{18}.$$

$$\frac{1}{1.\,3} + \frac{1}{2.\,4} + \frac{1}{3.\,5} + \cdots \text{ in inf.} = \frac{3}{4}.$$

$$\frac{1}{1.\,4} + \frac{1}{2.\,5} + \frac{1}{3.\,6} + \cdots \text{ in inf.} = \frac{11}{18}.$$

$$\frac{1}{1.\,5}+\frac{1}{3.\,7}+\frac{1}{5.\,9}+\cdots \text{ in inf. }=\frac{1}{3}.$$

$$\frac{1}{1.\,7}+\frac{1}{3.\,9}+\frac{1}{5.\,11}+\cdots \text{ in inf. }=\frac{23}{90}.$$

$$\frac{1}{2.\,4.\,6}+\frac{2}{3.\,5.\,7}+\frac{3}{4.\,6.\,8}+\cdots \text{ in inf. }=\frac{17}{96}.$$

$$\frac{1}{1.\,5.\,9}+\frac{2}{3.\,7.\,11}+\frac{3}{5.\,9.\,13}+\cdots \text{ in inf. }=\frac{7}{120}.$$

$$\frac{1.\,3}{2.\,4.\,6.\,8}+\frac{2.\,4}{3.\,5.\,7.\,9}+\cdots \text{ in inf. }=\frac{11}{96}.$$

$$\frac{1}{1.\,3.\,5}+\frac{1}{2.\,4.\,6}+\frac{1}{3.\,5.\,7}+\cdots \text{ in inf. }=\frac{11}{96}.$$

$$\frac{1}{1.\,3.\,5.\,7}+\frac{1}{2.\,4.\,6.\,8}+\cdots \text{ in inf. }=\frac{7}{480}.$$

$$\frac{1}{1.\,5.\,9}+\frac{1}{3.\,7.\,11}+\cdots \text{ in inf. }=\frac{13}{420}.$$

$$\frac{1}{2.\,4.\,6.\,8}+\frac{2}{3.\,5.\,7.\,9}+\cdots \text{ in inf. }=\frac{19}{840}.$$

§. 15. 1. Die Glieder der bisher summirten gebrochenen Reihen hatten in den Zählern und Nennern bezüglich gleich viel Factoren. Es lassen sich aber auch gewisse Reihen mit gebrochenen Gliedern summiren, in denen die Anzahl der Factoren mit dem Index wächst.

Setzt man $f_x = \frac{a^{x|b}}{c^{x|b}}$, so ist $f_o = 1$ und $f_x - f_{x-1}$

$$= \frac{a^{x|b}}{c^{x|b}} - \frac{a^{x-1|b}}{c^{x-1|b}} = (a-c)\frac{a^{x-1|b}}{c^{x|b}};\ \text{also ist}\ \sum\frac{a^{x-1|b}}{c^{x|b}} = \frac{1}{a-c}\left(\frac{a^{n|b}}{c^{n|b}} - 1\right).$$

Setzt man allgemeiner $f_x = \frac{a^{x+p|b}}{c^{x+m|b}}$, so folgt in gleicher Weise

$$\sum\frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m|b}} = \frac{1}{a+(p-m)b-c}\left(\frac{a^{n+p|b}}{c^{n+m|b}} - \frac{a^{p|b}}{c^{m|b}}\right).$$

Hier können m und p jede ganzen, positiven oder negativen Zahlen bedeuten; setzt man $-m$ an die Stelle von $+m$, $p=0$ und bedenkt, daß $c^{-m|b} = \frac{1}{(c-b)^{m|-b}}$ ist, so erhält man:

$$\sum \frac{a^{x-1|b}}{c^{x-m|b}} = \frac{1}{a+mb-c}\left(\frac{a^{n|b}}{c^{n-m|b}} - (c-b)^{m|-b}\right).$$

Beispiele:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.\,4} + \frac{1.\,3}{2.\,4.\,6} + \frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6.\,8} + \cdots + \frac{1^{n-1|2}}{2^{n|2}} = 1 - \frac{1^{n|2}}{2^{n|2}}.$$

$$1 + \frac{2}{1.\,3} + \frac{2.\,4}{1.\,3.\,5} + \frac{2.\,4.\,6}{1.\,3.\,5.\,7} + \cdots + \frac{2^{n-1|2}}{1^{n|2}} = \frac{2^{n|2}}{1^{n|2}} - 1.$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1.\,3}{2.\,4} + \frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6} + \cdots + \frac{1^{n-1|2}}{2^{n-1|2}} = \frac{1^{n|2}}{2^{n-1|2}}.$$

$$1 + 2 + \frac{2.\,4}{1.\,3} + \frac{2.\,4.\,6}{1.\,3.\,5} + \cdots + \frac{2^{n-1|2}}{1^{n-1|2}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2^{n|2}}{1^{n-1|2}} + 1\right).$$

$$1 + \frac{1.\,3}{2} + \frac{1.\,3.\,5}{2.\,4} + \frac{1.\,3.\,5.\,7}{2.\,4.\,6} + \cdots + \frac{1^{n|2}}{2^{n-1|2}} = \frac{1}{3}\,\frac{1^{n+1|2}}{2^{n-1|2}}.$$

$$2 + \frac{2.\,4}{1} + \frac{2.\,4.\,6}{1.\,3} + \frac{2.\,4.\,6.\,8}{1.\,3.\,5} + \cdots + \frac{2^{n|2}}{1^{n-1|2}} = \frac{1}{5}\left(\frac{2^{n+1|2}}{1^{n-1|2}} + 2\right).$$

2. Ist der Unterschied von a und c ein Vielfaches von b, so erhalten die späteren Glieder der Reihe im Zähler und Nenner gemeinschaftliche Factoren, nach deren Hebung die Reihe eine Gestalt gewinnt, die schon oben behandelt ist. Der Einfachheit wegen wollen wir bei diesem Nachweis $p=0$ und $m=0$ setzen. Ist nun $a = c + rb$, so ist

$$\frac{a^{x-1|b}}{c^{x|b}} = \frac{(c+rb)^{x-1|b}}{c^{x|b}} = \frac{(c+rb)^{x-1|b}}{c^{r|b}(c+rb)^{x-r|b}} = \frac{(c+xb)^{r-1|b}}{c^{r|b}}.$$

Hiernach ist nun, wenn nach der Substitution dieses Werthes mit $c^{r|b}$ multiplicirt wird:

$\Sigma(c+xb)^{r-1|b} = \frac{1}{rb}\left[(c+nb)^{r|b} - c^{r|b}\right]$, ein Resultat, welches mit dem im §. 8, 4 gefundenen übereinstimmt.

Ist hingegen $c = a + rb$, so folgt:

$$\frac{a^{x-1|b}}{c^{x|b}} = \frac{a^{x-1|b}}{(a+rb)^{x|b}} = \frac{a^{r|b}.(a+rb)^{x-r-1|b}}{(a+rb)^{x|b}} = \frac{a^{r|b}}{(a-b+bx)^{r+1|b}}.$$

Substituirt man diesen Werth, so folgt nach Division mit $a^{r|b}$:

$$\sum \frac{1}{(a-b+bx)^{r+1|b}} = \frac{1}{rb}\left(\frac{1}{a^{r|b}} - \frac{1}{(a+bn)^{r|b}}\right).$$

Dieses Resultat stimmt mit dem im §. 13, 8 gefundenen überein.

Setzt man in unserer allgemeinen Formel $b = 0$ so ist, da die Factoriellen jetzt Potenzen werden:

$$\sum\left(\frac{a^{x+p-1}}{c^{x+m}}\right) = \frac{1}{a-c}\left(\frac{a^{n+p}}{c^{n+m}} - \frac{a^p}{c^m}\right).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{c^{m+1}}{a^p}$ und setzt $\frac{a}{c} = e$, so geht sie über in $\Sigma(e^{x-1}) = \frac{e^x - 1}{e-1}$; dieses ist aber die bekannte Summengleichung der geometrischen Reihe.

3) Setzt man $f_x = x\frac{a^{x+p|b}}{c^{x+m|b}}$, so folgt:

$$f_x - f_{x-1} = [a+(p-m)b-c]\,x\frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m|b}} + \frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m-1|b}}.$$

Es ist also:

$$\sum\left[x \cdot \frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m|b}}\right] = \frac{1}{a+(p-m)b-c}\,n\,\frac{a^{n+p|b}}{a^{n+m|b}} - \frac{1}{a+(p-m)b-c}\sum\frac{a^{x+p-1|b}}{c^{n+m-1|b}}.$$

Da nun nach dem Obigen sich leicht ergiebt, daß

$$\sum\frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m-1|b}} = \frac{1}{a+(p-m+1)b-c}\left(\frac{a^{n+p|b}}{c^{n+m-1|b}} - \frac{a^{p|b}}{c^{m-1|b}}\right),$$

so folgt nach einiger Zwischenrechnung:

$$\sum\left[x\frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m|b}}\right]$$

$$= \frac{1}{[a+(p-m)b-c]^{2|b}}\left[\Big(\big([a+(p-m)b-c]n - (c+(m-1)b\Big)\frac{a^{n+p|b}}{c^{n+m|b}} + \frac{a^{p|b}}{c^{m-1|b}}\right].$$

Beispiele:

$$\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2.\,4}+3\cdot\frac{1.\,3}{2.\,4.\,6}+\cdots+n\cdot\frac{1^{n-1|2}}{2^{n|2}}=n\cdot\frac{1^{n|2}}{2^{n|2}}.$$

$$1+2\cdot\frac{2}{1.\,3}+3\cdot\frac{2.\,4}{1.\,3.\,5}+\cdots+n\cdot\frac{2^{n-1|2}}{1^{n|2}}=\frac{n+1}{3}\cdot\frac{2^{n|2}}{1^{n|2}}-\frac{1}{3}.$$

$$1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1.\,3}{2.\,4}+4\cdot\frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6}+\cdots+n\cdot\frac{1^{n-1|2}}{2^{n-1|2}}=\frac{n+2}{3}\cdot\frac{1^{n|2}}{2^{n-1|2}}.$$

$$1+2\cdot\frac{2}{1}+3\cdot\frac{2.\,4}{1.\,3}+4\cdot\frac{2.\,4.\,6}{1.\,3.\,5}+\cdots+n\cdot\frac{2^{n-1|2}}{1^{n-1|2}}=\frac{1}{5}\left[(n+1)\cdot\frac{2^{n|2}}{1^{n-1|2}}+1\right].$$

$$1+2\cdot\frac{1.\,3}{2}+3\cdot\frac{1.\,3.\,5}{2.\,4}+\cdots+n\cdot\frac{2^{n|2}}{2^{n-1|2}}=\frac{3n+2}{15}\cdot\frac{1^{n+1|2}}{2^{n-1|2}}.$$

$$2+2\cdot\frac{2.\,4}{1}+3\cdot\frac{2.\,4.\,6}{1.\,3}+\cdots+n\cdot\frac{2^{n|2}}{1^{n-1|2}}=\frac{1}{5.\,7}\left[(5n+3)\cdot\frac{2^{n+1|2}}{1^{n-1|2}}+6\right].$$

4) Setzt man allgemein $f_x=\frac{x^{k|1}}{k!}\cdot\frac{a^{x+p|b}}{c^{\;+m|b}}$, so ist

$$f_x-f_{x-1}=[a+(p-m)b-c]\cdot\frac{x^{k|1}}{k!}\cdot\frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m|b}}+\frac{x^{k-1|1}}{(k-1)!}\cdot\frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m-1|b}},\text{ also:}$$

$$\sum\left(\frac{x^{k|1}}{k!}\cdot\frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m|b}}\right)=\frac{1}{a+(p-m)b-c}\frac{n^{k|1}}{k!}\cdot\frac{a^{n+p|b}}{c^{n-m|b}}$$

$$-\frac{1}{a+(p-m)b-c}\sum\frac{x^{k-1|1}}{(k-1)!}\frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m-1|b}}.$$

Beispiele:

$$\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2.\,4}+6\cdot\frac{1.\,3}{2.\,4.\,6}+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1^{n-1|2}}{2^{n|2}}=\frac{n(n+5)}{6}\cdot\frac{1^{n|2}}{2^{n|2}}.$$

$$\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1.\,3}{2.\,4}+6\cdot\frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6}+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1^{n|2}}{2^{n|2}}=\frac{n(3n+7)}{30}\cdot\frac{1^{n+1|2}}{2^{n|2}}.$$

$$1+3\cdot\frac{1.\,3}{2}+6\cdot\frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.}+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1^{n|2}}{2^{n-1|2}}=\frac{15n^2+39n+16}{210}\cdot\frac{1^{n+1|2}}{2^{n-1|2}}.$$

$$\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2.\,4}+10\cdot\frac{1.\,3}{2.\,4.\,6}+\cdots+\frac{n^{3|1}}{3!}\cdot\frac{1^{n-1|2}}{2^{n|2}}=\frac{n(n^2+7n+22)}{30}\cdot\frac{1^{n|2}}{2^{n|2}}.$$

$$\frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1.\,3}{2.\,4} + 10 \cdot \frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6} + \cdots + \frac{n^{3|1}}{3!} \cdot \frac{1^{n|2}}{2^{n|2}} = \frac{n(5n^2 + 27n + 38)}{210} \cdot \frac{1^{n+1|2}}{2^{n|2}}.$$

$$1 + 4 \cdot \frac{1.\,3}{2} + 10 \cdot \frac{1.\,3.\,5}{2.\,4} + \cdots + \frac{n^{3|1}}{3!} \cdot \frac{1^{n|2}}{2^{n-1|2}}$$

$$= \frac{35n^3 + 195n^2 + 304n + 96}{2.\,3.\,5.\,7.\,9} \cdot \frac{1^{n+1|2}}{2^{n-1|2}}.$$

Beachtet man, daß $n^2 = n^{2|1} - n$ und $n^3 = n^{3|1} - 3n^{2|1} + n$ u. s. f., so kann man die vorstehenden Reihen auch für den Fall leicht summiren, wenn die Coefficienten der einzelnen Glieder nach Potenzen der natürlichen Zahlen fortschreiten.

Beispiele:

$$\frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1.\,3}{2.\,4} + 9 \cdot \frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6} + \cdots + n^2 \cdot \frac{1^{n|2}}{2^{n|2}} = \frac{n(3n+2)}{15} \cdot \frac{1^{n+1|2}}{2^{n|2}}.$$

$$\frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1.\,3}{2.\,4} + 27 \cdot \frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6} + \cdots + n^3 \cdot \frac{1^{n|2}}{2^{n|2}} = \frac{n(15n^2 + 18n + 2)}{105} \cdot \frac{1^{n+1|2}}{2^{n|2}}.$$

§. 16. Unendliche Reihen.

1) Es entsteht nun die Frage, ob Reihen von der im vorigen Paragraphen betrachteten Form unter gewissen Umständen auch als unendliche Reihen summirbar sind. Diese Frage hängt mit der andern zusammen, welchen Werth der Quotient $\frac{a^{n|b}}{c^{n|b}}$ für $n = \infty$ annimmt. Ist $a = c$, so ist offenbar der Werth dieses Quotienten der Einheit gleich; ist aber $a > c$, so ist dieser Werth unendlich groß. Setzt man $a = c + d$, so wird

$$\frac{a^{n|b}}{c^{n|b}} = \left(1 + \frac{d}{c}\right)\left(1 + \frac{d}{c+b}\right)\left(1 + \frac{d}{c+2b}\right) \cdots \left(1 + \frac{d}{c+(n-1)b}\right).$$

Wird die Multiplication auf der rechten Seite ausgeführt, so folgt:

$$1 + d\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c+b} + \frac{1}{c+2b} + \cdots + \frac{1}{c+(n-1)b}\right) + d^2(\cdots)\cdots$$

Da aber die im zweiten Gliede dieser Entwicklung enthaltene harmonische Reihe

$$\frac{1}{c},\ \frac{1}{c+b},\ \frac{1}{c+2b},\ \cdots\ \frac{1}{c+(n-1)b}$$

für $n = \infty$ einen unendlich großen Werth hat, für welche Behauptung der bekannte Beweis hier übergangen werden kann, so ist auch der Quotient $\frac{a^{n|b}}{c^{n|b}}$ für $a > c$ und $n = \infty$ unendlich groß. Sofort folgt nun, daß dieser Quotient für $a < c$ und $n = \infty$ verschwindend klein wird.

2) Nun ist $\frac{a^{n+p|b}}{c^{n+m|b}} = \frac{a^{p|b}.(a+pb)^{n|b}}{c^{m|b}.(c+mb)^{n|b}}$. Wenden wir hierauf die eben gewonnenen Resultate an, so folgt daß für $n = \infty$

1. der Quotient $\frac{a^{n+p|b}}{c^{n+m|b}}$ endlich und zwar gleich $\frac{a^{p|b}}{c^{m|b}}$ ist,
   wenn $a + pb = c + mb$ oder $a = c + (m - p)b$ ist;
2. er ist unendlich groß, wenn $a > c + (m - p)b$ ist;
3. er ist unendlich klein, wenn $a < c + (m - p)b$ ist.

3) Es ist $n^{k|1}.\frac{a^{n+p|b}}{c^{n+m|b}} = \frac{a^{p|b}.(a+pb)^{n|b}.}{c^{m-k|b}.[c+(m-k)b]^{n|b}}.\frac{n^{k|1}}{[c+(m+n-k)b]^{k|b}}$.

Der Quotient $\frac{n^{k|1}}{[c+(m+n-k)b]^{k|b}}$ nimmt für $n = \infty$ den Werth $\frac{1}{b^k}$ an, folglich ist der Quotient $n^{k|1}.\frac{a^{n+p|b}}{c^{n+m|b}}$ für $n = \infty$ und für $a = c + (m - p - k)b$ gleich $\frac{a^{p|b}}{b^k.c^{m-k|b}}$; er ist unendlich groß, wenn $a > c + (m - p - k)b$ ist, und er ist unendlich klein, wenn $a < c + (m - p - k)b$ ist.

Hiernach können nun die oben aufgestellten allgemeinen Summenformeln untersucht werden. Sollen die Reihen auch als unendliche summirbar sein, so muß in der Summenformel das den Buchstaben n enthaltende Glied für $n = \infty$ entweder endlich oder unendlich klein werden. Da der erste Fall nur eintreten kann, wenn die Differenz von a und c ein Vielfaches von b ist, so gehören die betreffenden Reihen früheren einfacheren Formen an und können hier übergangen werden; es bleibt also nur der Fall zu untersuchen, wenn diese Glieder der Summenformel verschwinden.

4) Wenden wir nun das gefundene Merkmal des Verschwindens von $n^{k|1}.\frac{a^{n+p|b}}{c^{n+m|b}}$ für $n = \infty$ auf die im vorigen Paragraph gefundenen Summenformeln an, so erhält man folgende Summen:

$$\sum_1^\infty \frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m|b}} = \frac{1}{c+(m-p)\,b-a} \cdot \frac{a^{p|b}}{c^{m|b}}, \text{ wenn } a < c+(m-p)\,b.$$

$$\sum_1^\infty x \cdot \frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m|b}} = \frac{1}{[c+(m-p-1)\,b-a]^{2|b}} \cdot \frac{a^{p|b}}{c^{m-1|b}}, \text{ wenn } a < c+(m-p-1)\,b.$$

$$\sum_1^\infty \frac{x^{k|1}}{k!} \cdot \frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m|b}} = \frac{1}{c+(m-p)\,b-a} \sum_1^\infty \frac{x^{k-1|1}}{(k-1)!} \cdot \frac{a^{x+p-1|b}}{c^{x+m-1|b}},$$

wenn $a < c+(m-p-k)\,b$.

Durch fortgesetzte Anwendung dieser Formel erhält man:

$$\sum_1^\infty \frac{x^{k|1}}{k!} \cdot \frac{a^{n+p-1|b}}{c^{x+m|b}} = \frac{1}{[c+(m-p-k)\,b-a]^{k+1|b}} \cdot \frac{a^{p|b}}{c^{m-k|b}}, \text{ wenn } a < c+(m-p-k)\,b.$$

Beispiele:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.\,4} + \frac{1.\,3}{2.\,4.\,6} + \frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6.\,8} + \cdots \text{ in inf.} = 1.$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1.\,3}{4.\,6} + \frac{1.\,3.\,5}{4.\,6.\,8} + \frac{1.\,3.\,5.\,7}{4.\,6.\,8.\,10} + \cdots \text{ in inf.} = 1.$$

$$1 + \frac{1.\,3}{6} + \frac{1.\,3.\,5}{6.\,8} + \frac{1.\,3.\,5.\,7}{6.\,8.\,10} + \cdots \text{ in inf.} = 4.$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1.\,2}{n(n+1)} + \frac{1.\,2.\,3}{n(n+1)(n+2)} + \frac{1.\,2.\,3.\,4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \text{ in inf.}$$

$$= \frac{1}{n-2}, \text{ wenn } n > 2.$$

$$\frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{1.\,2}{n(n+1)} + 3 \cdot \frac{1.\,2.\,3}{n(n+1)(n+2)} + 4 \cdot \frac{1.\,2.\,3.\,4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \text{ in inf.}$$

$$= \frac{n-1}{(n-2)(n-3)}, \text{ wenn } n > 3.$$

5. Summirung der Werthe goniometrischer Funktionen.

§. 17. Einfache goniometrische Reihen.

1) Setzt man $f_x = \sin.(\alpha + x\beta)$, so ist

$$f_x - f_{x-1} = \sin.(\alpha + x\beta) - \sin.(\alpha + (x-1)\beta) = 2\sin.\frac{\beta}{2}\cos.\left[\alpha + \left(x - \frac{1}{2}\right)\beta\right].$$

Ebenso ist

$$f_n - f_o = \sin.(\alpha + n\beta) - \sin.\alpha = 2\sin.\frac{n}{2}\beta\cos.\left(\alpha + \frac{n\beta}{2}\right).$$

Demnach ist

$$\sum\left[\cos.\left(\alpha + \left(x - \frac{1}{2}\right)\beta\right)\right] = \frac{\sin.\frac{n}{2}\beta\cos.\left(\alpha + \frac{n\beta}{2}\right)}{\sin.\frac{\beta}{2}}.$$

Setzt man hier $\alpha - \frac{1}{2}\beta$ an die Stelle von α, so folgt

$$\sum[\cos.(\alpha + (x-1)\beta)] = \frac{\sin.\frac{n}{2}\beta\cos.\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right)}{\sin.\frac{\beta}{2}}.$$

2) In ganz gleicher Weise findet man, wenn man von der Gleichung $f_x = \cos.(\alpha + x\beta)$ ausgeht,

$$\sum[\sin.(\alpha + (x-1)\beta)] = \frac{\sin.\frac{n}{2}\beta \cdot \sin.\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right)}{\sin.\frac{\beta}{2}}.$$

Beispiele:

$$\sin.\alpha + \sin.2\alpha + \sin.3\alpha + \cdots + \sin.n\alpha = \frac{\sin.\frac{n}{2}\alpha \cdot \sin.\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin.\frac{\alpha}{2}}.$$

$$\sin.\alpha + \sin.3\alpha + \sin.5\alpha + \cdots + \sin.(2n-1)\alpha = \frac{(\sin.n\alpha)^2}{\sin.\alpha}.$$

$$\cos.\alpha + \cos.2\alpha + \cos.3\alpha + \cdots + \cos.n\alpha = \frac{\sin.\frac{n}{2}\alpha \cdot \cos.\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin.\frac{\alpha}{2}}.$$

$$\cos.\alpha + \cos.3\alpha + \cos.5\alpha + \cdots + \cos.(2n-1)\alpha = \frac{\sin.n\alpha \cdot \cos.n\alpha}{\sin.\alpha} = \frac{\sin.2n\alpha}{2\sin.\alpha}.$$

$$\sin.\frac{\pi}{n}+\sin.\frac{2\pi}{n}+\sin.\frac{3\pi}{n}+\cdots+\frac{n\pi}{n}=\operatorname{cotg}.\frac{\pi}{2n}.$$

$$\sin.\ \frac{\pi}{n}+\sin.\ \frac{3\pi}{n}+\sin.\ \frac{5\pi}{n}+\cdots+\sin.\ \frac{(2n-1)\pi}{n}=0.$$

$$\cos.\frac{\pi}{2n}+\cos.\frac{2\pi}{2n}+\cos.\frac{3\pi}{2n}+\cdots+\cos.\frac{n\pi}{2n}=\frac{\operatorname{cotg}.\frac{\pi}{4n}-1}{2}.$$

§. 18. Zusammengesetzte goniometrische Reihen.

1. Es sei $f_x = x\sin.(a+x\beta)$, dann ist

$$f_x - f_{x-1} = x\sin.(a+x\beta)-(x-1)\sin.(a+(x-1)\beta)$$

$$=2x\sin.\ \frac{\beta}{2}\cos.\left[\alpha+\left(x-\frac{1}{2}\right)\beta\right]+\sin.[a+(x-1)\beta],$$ also ist

$$\sum x\cos.\left[a+\left(x-\frac{1}{2}\right)\beta\right]=\frac{n\sin.(\alpha+n\beta)}{2\sin.\frac{\beta}{2}}-\frac{\sin.\ \frac{n}{2}\beta\sin.\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)}{2\sin.\frac{\beta^2}{2}},$$

oder

$$\sum x\cos.[a+(x-1)\beta]=\frac{n\sin.\left(\alpha+\left(n-\frac{1}{2}\right)\beta\right)}{2\sin.\frac{\beta}{2}}-\frac{\sin.\ \frac{n}{2}\beta\sin.\left(\alpha+\left(\frac{n}{2}-1\right)\beta\right)}{2\sin.\frac{\beta^2}{2}}.$$

Geht man von der Gleichung $f_x = x\cos.(\alpha+x\beta)$ aus, so kommt man in gleicher Weise auf:

$$\sum x(\sin.\alpha+(x-1)\beta)=-\frac{n\cos.\left(\alpha+\left(n-\frac{1}{2}\right)\beta\right)}{2\sin.\frac{\beta}{2}}+\frac{\sin.\ \frac{n}{2}\beta\cos.\left(\alpha+\left(\frac{n}{2}-1\right)\beta\right)}{2\sin.\frac{\beta^2}{2}}.$$

Beispiele:

$$\sin.\ \alpha+2\sin.\ 2\ \alpha+3\sin.\ 3\ \alpha+\cdots+n\sin.\ n\ \alpha=\frac{\sin.\ n\alpha}{4\sin.\frac{\alpha^2}{2}}-\frac{n\cos.\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin.\frac{\alpha}{2}}.$$

$$\sin.\frac{\pi}{2n}+2\sin.\frac{2\pi}{2n}+3\sin.\frac{3}{2n}+\cdots+n\sin.\frac{n\pi}{2n}=\frac{1}{4\sin.\frac{\pi^2}{4n}}+\frac{n}{2}.$$

$$\cos.\alpha+2\cos.2\alpha+3\cos.3\alpha+\cdots+n\cos.n\alpha=\frac{n\sin.\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin.\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sin.\frac{n}{2}\alpha^2}{2\sin.\frac{\alpha^2}{2}}.$$

$$\cos.\frac{\pi}{2n}+2\cos.\frac{2\pi}{2n}+3\cos.\frac{3\pi}{2n}+\cdots+n\cos.\frac{n\pi}{2n}=\frac{n}{2}\operatorname{cotg.}\frac{\pi}{4n}-\frac{1}{4\sin.\frac{\pi^2}{4n}}.$$

2. Setzt man $f_x=\frac{x^{k|1}}{k!}\sin.(\alpha+x\beta)$, so folgt:

$$f_x-f_{x-1}=2\frac{x^{k|1}}{k!}\sin.\frac{\beta}{2}\cos.\left[\alpha+\left(x-\frac{1}{2}\right)\beta\right]+\frac{x^{k-1|1}}{(k-1)!}\sin.[\alpha+(x-1)\beta].$$

Setzt man aber $f_x=\frac{x^{k|1}}{k!}\cos.(\alpha+x\beta)$, so erhält man:

$$f_x-f_{x-1}=-2\frac{x^{k|1}}{k!}\sin.\frac{\beta}{2}\sin.\left[\alpha+\left(x-\frac{1}{2}\right)\beta\right]+\frac{x^{k-1|1}}{(k-1)!}\cos.[\alpha+(n-1)\beta].$$

Hieraus folgt dann weiter:

$$\sum\frac{x^{k|1}}{k!}\sin.[\alpha+(x-1)\beta]$$

$$=\frac{n^{k|1}}{k!}\cdot\frac{\cos.\left[\alpha+\left(n-\frac{1}{2}\right)\beta\right]}{2\sin.\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{2\sin.\frac{\beta}{2}}\sum\frac{x^{k-1|1}}{(k-1)!}\cos.\left[\alpha-\frac{1}{2}\beta+(x-1)\beta\right].$$

$$\sum\frac{x^{k|1}}{k!}\cos.[\alpha+(x-1)\beta]$$

$$=\frac{n^{k|1}}{k!}\cdot\frac{\sin.\left[\alpha+\left(n-\frac{1}{2}\right)\beta\right]}{2\sin.\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{2\sin.\frac{\beta}{2}}\sum\frac{x^{k-1|1}}{(k-1)!}\sin.\left[\alpha-\frac{1}{2}\beta+(x-1)\beta\right].$$

Beispiele:

$$\sin.\alpha + 3\sin.2\alpha + 6\sin.3\alpha + \cdots + \frac{n(n+1)}{2}\sin.n\alpha$$

$$= -\frac{n(n+1)\cos.\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{4\sin.\frac{\alpha}{2}} + \frac{n\sin.n\alpha}{4\sin.\frac{\alpha^2}{2}} - \frac{\sin.\frac{n}{2}\alpha\sin.\frac{n-1}{2}\alpha}{4\sin.\frac{\alpha^3}{2}}.$$

$$\sin.\alpha + 4\sin.2\alpha + 10\sin.3\alpha + \cdots + \frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}\sin.n\alpha$$

$$= -\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}\cdot\frac{\cos.\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin.\frac{\alpha}{2}} + \frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{\sin.n\alpha}{4\sin.\frac{\alpha^2}{2}}$$

$$+ n\frac{\cos.\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha}{8\sin.\frac{\alpha^3}{2}} - \frac{\sin.\frac{n}{2}\alpha\cos.\frac{n-2}{2}\alpha}{8\sin.\frac{\alpha^4}{2}}.$$

3. Sollen gleich hohe Potenzen der Sinusse oder Cosinusse von Winkeln, die eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden, summirt werden, so muß man die Potenzen dieser Funktionen auf die ersten Potenzen der Funktionen des mehrfachen Winkels nach den bekannten goniometrischen Formeln reduciren und dann erst die Summirung vornehmen; dieselbe ist auch für den Fall möglich, wenn die einzelnen Glieder noch Coefficienten haben, die für sich eine arithmetische Reihe bilden. Es mag genügen, hier nur einzelne Fälle heraus zu heben.

Da $\sin.\varphi^2 = \frac{1-\cos.2\varphi}{2}$ ist, so ist:

$$\sum\sin.[\alpha+(x-1)\beta]^2 = \sum\frac{1-\cos.[2\alpha+2(x-1)\beta]}{2}$$

$$= \frac{n}{2} - \frac{\sin.n\beta\cos.(2\alpha+(n-1)\beta)}{2\sin.\beta}.$$

Ebenso folgt:

$$\sum x\sin.[\alpha+(x-1)\beta]^2 = \frac{1}{2}\sum(x) - \frac{1}{2}\sum x\cos.[2\alpha+2(x-1)\beta]$$

$$= \frac{n(n+1)}{4} - \frac{n\sin.[2\alpha+(2n-1)\beta]}{4\sin.\beta} + \frac{\sin.n\beta\sin.[2\alpha+(n-2)\beta]}{4\sin.\beta^2}.$$

Da $\sin.\varphi^3 = \frac{3}{4}\sin.\varphi - \frac{1}{4}\sin.3\varphi$, so ist:

$$\sum \sin.[\alpha+(x-1)\beta]^3 = \frac{3}{4}\sum \sin.[\alpha+(x-1)\beta] - \frac{1}{4}\sum[3\alpha+3(x-1)\beta]$$

$$= \frac{3\sin.\frac{n}{2}\beta\cdot\sin.\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)}{4\sin.\frac{\beta}{2}} - \frac{\sin.\frac{3n\beta}{2}\cdot\sin.\left(3\alpha+\frac{3(n-1)}{2}\beta\right)}{4\sin.\frac{3}{2}\beta}.$$

Da $\sin.\varphi^4 = \frac{3-4\cos.2\varphi+\cos.4\varphi}{8}$, so ist:

$$\sum\left[\sin.[\alpha+(x-1)\beta]\right]^4$$

$$= \frac{3n}{8} - \frac{1}{2}\sum\cos.[2\alpha+2(x-1)\beta] + \frac{1}{8}\sum\cos.[4\alpha+4(x-1)\beta]$$

$$= \frac{3n}{8} - \frac{\sin.n\beta\cos.(2\alpha+(n-1)\beta)}{2\sin.\beta} + \frac{1}{8}\,\frac{\sin.2n\beta\cos.(4\alpha+2(n-1)\beta)}{\sin.2\beta}.$$

Beispiele:

$$\left(\sin.\frac{\pi}{2n}\right)^2 + \left(\sin.\frac{2\pi}{2n}\right)^2 + \left(\sin.\frac{3\pi}{2n}\right)^2 + \cdots + \left(\sin.\frac{n\pi}{2n}\right)^2 = \frac{n+1}{2}.$$

$$\left(\sin.\frac{\pi}{2n}\right)^2 + 2\left(\sin.\frac{2\pi}{2n}\right)^2 + 3\left(\sin.\frac{3\pi}{2n}\right)^2 + \cdots + n\left(\sin.\frac{n\pi}{2n}\right)^2$$

$$= \frac{n(n+2)}{4} + \frac{1}{4\left(\sin.\frac{\pi}{2n}\right)^2}.$$

$$\left(\sin.\frac{\pi}{n}\right)^2 + \left(\sin.\frac{2\pi}{n}\right)^2 + \left(\sin.\frac{3\pi}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\sin.\frac{n\pi}{n}\right)^2 = \frac{n}{2}.$$

$$\left(\sin.\frac{\pi}{n}\right)^2 + 2\left(\sin.\frac{2\pi}{n}\right)^2 + 3\left(\sin.\frac{3\pi}{n}\right)^2 + \cdots + n\left(\sin.\frac{n\pi}{n}\right)^2 = \frac{n^2}{4}.$$

(Diese beiden letzten Summenwerthe gelten nur für die Werthe von n, welche größer als 1 sind.)

$$\left(\sin.\frac{\pi}{2n}\right)^3+\left(\sin.\frac{2\pi}{2n}\right)^3+\left(\sin.\frac{3\pi}{2n}\right)^3+\cdots+\left(\sin.\frac{n\pi}{2n}\right)^3$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\cot.\frac{\pi}{4n}-\frac{1}{8}\cot.\frac{3\pi}{4n}.$$

$$\left(\sin.\frac{\pi}{n}\right)^3+\left(\sin.\frac{2\pi}{n}\right)^3+\left(\sin.\frac{3\pi}{n}\right)^3+\cdots+\left(\sin.\frac{n\pi}{n}\right)^3$$
$$=\frac{3}{4}\cot.\frac{\pi}{2n}-\frac{1}{4}\cot.\frac{3\pi}{2n}.$$

$$\left(\sin.\frac{\pi}{2n}\right)^4+\left(\sin.\frac{2\pi}{2n}\right)^4+\left(\sin.\frac{3\pi}{2n}\right)^4+\cdots+\left(\sin.\frac{n\pi}{2n}\right)^4=\frac{3}{8}n+\frac{1}{2}$$

(Auch dieser Summenwerth gilt nur, wenn $n>1$ ist.)

4. Setzt man $f_x=e^x\sin.(\alpha+x\beta)$, so folgt:

$$f_x-f_{x-1}=e^x\sin.(\alpha+x\beta)-e^{x-1}\sin.(\alpha+(x-1)\beta)$$
$$=(e-1)e^{x-1}\sin.[\alpha+(x-1)\beta]+2e^x\sin.\frac{\beta}{2}\cos.\left[\alpha+\left(x-\frac{1}{2}\right)\beta\right].$$

Diese Umformung ergiebt sich, wenn man dem Ausdruck den Nullwerth

$$e^x\sin.[\alpha+(x-1)\beta]-e^x\sin.[\alpha+(x-1)\beta]$$

zufügt.

Nun ist $\cos.\left[\alpha+\left(x-\frac{1}{2}\beta\right)\right]$

$$=\cos.[\alpha+(x-1)\beta]\cos.\frac{\beta}{2}-\sin.[\alpha+(x-1)\beta]\sin.\frac{\beta}{2}.$$

Substituirt man diesen Werth und beachtet, daß

$$\left(e-1-2e\sin.\frac{\beta^2}{2}\right)=e\cos.\beta-1,$$ so erhält man:

$$f_x-f_{x-1}=(e\cos.\beta-1)\,e^{x-1}\sin.[\alpha+(x-1)\beta]+e\sin.\beta\,e^{x-1}\cdot\cos.[\alpha+(x-1)\beta].$$

Also ist:

$$(e\cos.\beta-1)\Sigma e^{x-1}\sin.[\alpha+(x-1)\beta]+e\sin.\beta\,\Sigma e^{x-1}\cos.[\alpha+(x-1)\beta]$$
$$=e^n\sin.(\alpha+n\beta)-\sin.\alpha.$$

Geht man von $f_x=e^x\cos.(\alpha+n\beta)$ aus, so kommt man in gleicher Weise auf ie zweite Gleichung:

$$(e\cos.\beta-1)\Sigma e^{x-1}\cos.[\alpha+(x-1)\beta]-e\sin.\beta\,\Sigma e^{x-1}\sin.[\alpha+(x-1)\beta]$$
$$=e^n\cos.(\alpha+n\beta)-\cos.\alpha.$$

Entwickelt man aus diesen beiden letzten Gleichungen die einzelnen Summen, so erhält man:

$$\Sigma e^{x-1} \sin.[\alpha + (x-1)\beta]$$
$$= \frac{e^{n+1}\sin.[\alpha+(n-1)\beta] - e^n \sin.(\alpha+n\beta) - e \sin.(\alpha-\beta) + \sin.\alpha}{1 - 2e\cos.\beta + e^2}.$$

$$\Sigma e^{x-1} \cos.[\alpha + (x-1)\beta]$$
$$= \frac{e^{n+1}\cos.[\alpha+(n-1)\beta] - e^n \cos.(\alpha+n\beta) - e \cos.(\alpha-\beta) + \cos.\alpha}{1 - 2e\cos.\beta + e^2}.$$

Beispiele:

$$\sin.\alpha + e\sin.2\alpha + e^2\sin.3\alpha \cdots + e^{n-1}\sin.n\alpha$$
$$= \frac{e^{n+1}\sin.n\alpha - e^n\sin.(n+1)\alpha + \sin.\alpha}{1 - 2e\cos.\alpha + e^2}.$$

$$\cos.\alpha + e\cos.2\alpha + e^2\cos.3\alpha \cdots + e^{n-1}\cos.n\alpha$$
$$= \frac{e^{n+1}\cos.n\alpha - e^n\cos.(n+1)\alpha - e\cos.\alpha}{1 - 2e\cos.\alpha + e^2}.$$

$$\sin.\frac{\pi}{2n} + e\sin.\frac{2\pi}{2n} + e^2\sin.\frac{3\pi}{2n} \cdots + e^{n-1}\sin.\frac{n\pi}{2n} = \frac{e^{n+1} - e^n\cos.\frac{\pi}{2n} + \sin.\frac{\pi}{2n}}{1 - 2e\cos.\frac{\pi}{2n} + e^2}.$$

$$\cos.\frac{\pi}{2n} + e\cos.\frac{2\pi}{2n} + e^2\cos.\frac{3\pi}{2n} \cdots + e^{n-1}\cos.\frac{n\pi}{2n} = \frac{e^n\sin.\frac{\pi}{2n} - e + \cos.\frac{\pi}{2n}}{1 - 2e\cos.\frac{\pi}{2n} + e^2}.$$

5) Setzt man $f_x = \frac{x^{k|1}}{k!} e^x \sin.(\alpha + x\beta)$, so erhält man:

$$f_x - f_{x-1} = \frac{x^{k|1}}{k!}\left[e^x\sin.(\alpha+x\beta) - e^{x-1}\sin.(\alpha+(n-1)\beta)\right]$$
$$+ \frac{x^{k-1|1}}{(k-1)!} e^{x-1}\sin.(\alpha + (x-1)\beta).$$

Setzt man für den Inhalt der ersten großen Klammer den vorhin entwickelten Werth und summirt dann, so erhält man:

$$(e\cos.\beta-1)\sum\frac{x^{k|1}}{k!}e^{x-1}\sin.[\alpha+(x-1)\beta]+e\sin.\beta\sum\frac{x^{k|1}}{k!}e^{x-1}\cos.[\alpha+(x-1)\beta]$$

$$=\frac{n^{k|1}}{k!}e^{n}\sin.(\alpha+n\beta)-\sum\frac{x^{k-1|1}}{(k-1)!}e^{x-1}\sin.[\alpha+(x-1)\beta].$$

In gleicher Weise erhält man, wenn man von der Gleichung

$f_x=\frac{x^{k|1}}{k!}e^{x}\cos.(\alpha+x\beta)$ ausgeht:

$$(e\cos.\beta-1)\sum\frac{x^{k|1}}{k!}e^{x-1}\cos.[\alpha+(x-1)\beta]-e\sin.\beta\sum\frac{x^{k|1}}{k!}e^{x-1}\sin.[\alpha+(x-1)\beta]$$

$$=\frac{n^{k|1}}{k!}e^{n}\cos.(\alpha+n\beta)-\sum\frac{x^{k-1|1}}{(k-1)!}e^{n-1}\cos.[\alpha+(n-1)\beta].$$

Entwickelt man aus diesen beiden Gleichungen die auf der linken Seite stehenden Summenwerthe, so erhält man:

$$\begin{aligned}\sum\frac{x^{k|1}}{k!}e^{x-1}\sin.[\alpha+(x-1)\beta]=\Big\{&\frac{n^{k|1}}{k!}e^{n}[e\sin.(\alpha+(n-1)\beta)-\sin.(\alpha+n\beta)]\\&-(e\cos.\beta-1)\sum\frac{x^{k-1|1}}{k!}e^{x-1}\sin.[\alpha+(x-1)\beta]\\&+e\sin.\beta\sum\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}e^{x-1}\cos.[\alpha+(x-1)\beta]\Big\}:(1-2e\cos.\beta+e^{2}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum\frac{x^{k|1}}{k!}e^{x-1}\cos.[\alpha+(x-1)\beta]=\Big\{&\frac{n^{k|1}}{k!}e^{n}[e\cos.[\alpha+(n-1)\beta]-\cos.(\alpha+n\beta)]\\&-e\sin.\beta\sum\frac{x^{k-1|1}}{k!}e^{x-1}\sin.[\alpha+(x-1)\beta]\\&-(e\cos.\beta-1)\sum\frac{x^{k-1|1}}{(k-1)!}e^{x-1}\cos.[\alpha+(x-1)\beta]\Big\}:(1-2e\cos.\beta+e^{2}).\end{aligned}$$

Diese Gleichungen genügen in Verbindung mit den in dem letzten Abschnitt gefundenen zur recurrirenden Bestimmung der Summen.

§. 19. **Unendliche goniometrische Reihen.** Die im §. 18, 4) und 5) behandelten Reihen sind für den Fall $e<1$ auch summirbar, wenn sie unendlich lang sind. Man hat nur nöthig, in dem Summenausdruck e^n für $n=\infty$ verschwinden zu lassen. Es ist alsdann:

$$\sum_1^\infty e^{x-1} \sin.[\alpha+(x-1)\beta] = \frac{\sin.\alpha - e\sin.(\alpha-\beta)}{1-2e\cos.\beta+e^2}.$$

$$\sum_1^\infty e^{x-1} \cos.[\alpha+(x-1)\beta] = \frac{\cos.\alpha - e\cos.(\alpha-\beta)}{1-2e\cos.\beta+e^2}.$$

$$\sum_1^\infty xe^{x-1} \sin.[\alpha+(n-1)\beta] = \Big[(1-e\cos.\beta)\sum_1^\infty e^{x-1}\sin.[\alpha+(x-1)\beta]$$

$$+ e\sin.\beta\sum_1^\infty e^{x-1}\cos.[\alpha+(x-1)\beta]\Big] : (1-2e\cos.\beta+e^2)$$

$$= \frac{\sin.\alpha - 2e\sin.(\alpha-\beta) + e^2\sin.(\alpha-2\beta)}{(1-2e\cos.\beta+e^2)^2}.$$

$$\sum_1^\infty xe^{x-1} \cos.[\alpha+(x-1)\beta] = \Big[(1-e\cos.\beta)\sum_1^\infty e^{n-1}\cos.[\alpha+(x-1)\beta]$$

$$- e\sin.\beta\sum_1^\infty e^{x-1}\sin.[\alpha+(x-1)\beta]\Big] : (1-2e\cos.\beta+e^2)$$

$$= \frac{\cos.\alpha - 2e\cos.(\alpha-\beta) + e^2\cos.(\alpha-2\beta)}{(1-2e\cos.\beta+e^2)^2}.$$

Beispiele: $e<1$, $a>1$.

$$\sin.\alpha + \frac{\sin.2\alpha}{a} + \frac{\sin.3\alpha}{a^2} + \frac{\sin.4\alpha}{a^3} + \cdots \text{ in inf.} = \frac{a^2\sin.\alpha}{1-2a\cos.\alpha+a^2}.$$

$$\sin.30^0 + \frac{1}{2}\sin.60^0 + \frac{1}{4}\sin.90^0 + \frac{1}{8}\sin.120^0 + \cdots \text{ in inf.} = \frac{2(5+2\sqrt{3})}{13}.$$

$$\cos.\alpha + e\cos.2\alpha + e^2\cos.3\alpha + \cdots \text{ in inf.} = \frac{\cos.\alpha - e}{1-2e\cos.\alpha+e^2}.$$

$$\cos.\alpha + \cos.\alpha\cdot\cos.2\alpha + \cos.\alpha^2\cos.3\alpha + \cos.\alpha^3\cos.4\alpha + \cdots \text{ in inf.} = 0.$$

$$\sin.\alpha + 2e\sin.2\alpha + 3e^2\sin.3\alpha + 4e^3\sin.4\alpha + \cdots \text{ in inf.} = \frac{(1-e^2)\sin.\alpha}{(1-2e\cos.\alpha+e^2)^2}.$$

$$\sin.\frac{\pi}{4}+\frac{2}{2}\sin.\frac{2\pi}{4}+\frac{3}{4}\sin.\frac{3\pi}{4}+\frac{4}{8}\sin.\frac{4\pi}{8}+\cdots \text{in inf.}=\frac{6(40+33\sqrt{2})}{289}.$$

$$\cos.\alpha+2e\cos.2\alpha+3e^2\cos.3\alpha+4e^3\cos.4\alpha+\cdots \text{in inf.}=\frac{(1+e^2)\cos.\alpha-2e}{(1-2e\cos.\alpha+e^2)^2}.$$

$$\cos.\frac{\pi}{4}+\frac{2}{2}\cos.\frac{2\pi}{4}+\frac{3}{4}\cos.\frac{3\pi}{4}+\frac{4}{8}\cos.\frac{4\pi}{4}+\cdots \text{in inf.}=\frac{2(5\sqrt{2}-64)}{289}.$$

II.

Schulnachrichten.

I. Historisch-statistische Nachrichten.

Der Bestand des Lehrercollegiums ist im abgelaufenen Schuljahre nicht unverändert geblieben. Zu Michaelis 1870 verließ der dritte Oberlehrer der Schule, Herr Hahnemann, die Anstalt, um die Stelle des Mathematikus an der hiesigen lateinischen Hauptschule zu übernehmen. Er hat mit Einschluß längerer, durch Krankheit verursachter Unterbrechungen fast 13 Jahre an der Realschule unterrichtet. Sein gewissenhaftes Streben zum Wohl der Schule, sein erfolgreicher Unterricht und die aufrichtige Zuverlässigkeit seines Wesens sichern ihm bei Lehrern und Schülern ein achtungsvolles Andenken. In Folge dieses Abganges fand bei den acht folgenden Lehrerstellen ein Aufrücken statt; Herr Dr. Tschischwitz rückte in die fünfte Oberlehrerstelle ein, und die frei werdende Stelle des sechsten ordentlichen Lehrers erhielt Herr Flade*), welcher bisher am Königlichen Pädagogium unterrichtet hatte. Gleichzeitig verließ Herr Dr. Jahn die Realschule, um eine ordentliche Lehrerstelle

*) Karl Friedrich Gottlieb Flade, geboren den 4. Juli 1835 zu Maßnitz bei Zeitz, erhielt seine wissenschaftliche Vorbildung auf dem Stiftsgymnasium zu Zeitz, studirte von 1858—1861 in Halle Mathematik und Naturwissenschaften, unterrichtete von Michaelis 1862 bis dahin 1867 als Hülfslehrer an der Realschule und später an dem Königlichen Pädagogium. Nachdem er im Anfange des Jahres 1869 die Prüfung pro facultate docendi abgelegt, wurde er Ostern 1869 als Mathematikus am Königlichen Pädagogium angestellt.

am hiesigen Stadtgymnasium zu übernehmen. Er war an unserer Schule seit Johannis 1864, meist als Hülfslehrer, thätig gewesen. Die Liebe seiner Schüler und die Achtung seiner Collegen sind ihm in seinen neuen Wirkungskreis gefolgt. In die von ihm verwaltete Lehrstelle trat provisorisch Herr Candidat Dr. Männel*) ein.

Der Gesundheitszustand des Lehrercollegiums war im abgelaufenen Jahre verhältnißmäßig günstiger als in den früheren Jahren, doch machten eine abermalige Erkrankung des Collegen Herrn Dr. Grotjan und ein Augenleiden des Herrn Dr. Tschischwitz mehrwöchentliche Vertretungen nöthig. Auch der Krieg mit Frankreich hat in die Lehrthätigkeit der Schule nur im geringen Maße störend eingegriffen. Erst am Ende des Jahres 1870 wurde ein College, Herr Flade, zum Bataillon einberufen, und wird die Schule wohl bis zum Schluß des Semesters seine Lehrthätigkeit entbehren müssen.

Der Geburtstag Sr. Majestät des Königs wurde in herkömmlicher Weise durch Chorgesang und Rede gefeiert. Die Festrede hielt Herr Dr. Sommer. Er lenkte die Blicke hin auf unsere klassischen Zeiten patriotischer Begeisterung und Dankbarkeit, auf die Zeit der Freiheitskriege. Damit an den warmen und wahren Gefühlen der patriotischen Sänger der Freiheitskriege für Wohl und Wehe, Glück und Unglück, Herrlichkeit und Niedrigkeit des Vaterlandes, an deren dankbaren Empfindungen für die, welche das Vaterland frei und groß machten, auch in der Gegenwart die Herzen erwarmen und aufschlagen zu nachhaltiger wahrer Begeisterung und Dankbarkeit, führte Redner Ernst Moritz Arndt in seinem Werden und Wandern, seinem Singen und Sagen als den Vater des deutschen Volkes, als seinen Liebling, seinen Stolz, seinen Wohlthäter, seinen Lehrer und Mahner vor.

Den Schluß der Rede bildete die Fürbitte für den greisen Heldenkönig, daß Gott ihm gelingen lasse, sechzigjähriges Sehnen und Wünschen deutscher Völker nach innerer Einheit, nach äußerer Kraft und Stärke zur Erfüllung zu bringen.

Am 3. August feierten Lehrer und Schüler das heilige Abendmahl.

Am 22. April und am 11. October fand die Eröffnung der beiden Semester in allgemeiner Schulversammlung statt.

---

*) Dr. Johann Albert Rudolf Männel, geboren den 13. August 1846 zu Weißenfels a. d. S., erhielt seine wissenschaftliche Vorbildung auf der lateinischen Hauptschule zu Halle, studirte daselbst von Michaelis 1865 bis dahin 1869, legte 1870 die Prüfung pro facultate docendi ab und promovirte im März 1871 auf Grund einer Abhandlung: De parodo Eumenidum Aeschyli.

Die Statistik der Schul-Frequenz zeigt folgende Uebersicht:

	I.	IIA.	IIB.	IIIA¹.	IIIA².	IIIB.	IVA.	IVB.	VA.	VB.	VI.	Sma.
Bestand im Winter-Semester 1869/70	24	21	56	45	49	48	59	63	54	59	47	525
Aufnahme im Laufe des Semest.					1			1			1	3
Abgang im Laufe und am Schluß des Semesters	8	4	17	7	4	7	12	13	13	5	—	90
Restbestand vor der Versetzung	16	17	39	38	46	41	47	51	41	54	48	438
Versetzung		6	9	20	30	27	32	38	24	30	34	(250)
Bestand nach der Versetzung	22	20	50	48	43	46	53	37	47	58	14	438
Aufnahme	2					3	6	7	10	6	51	85
Bestand im Sommer-Semester	24	20	50	48	43	49	59	44	57	64	65	523
Abgang im Laufe und am Ende des Sommer-Semesters	7	1	12	4	4	5	6	1	—	2	—	42
Restbestand vor der Versetzung	17	19	38	44	39	44	53	43	57	62	65	481
Versetzung		6	11	24	24	29	36	36	43	45	36	(289)
Bestand nach der Versetzung	23	24	51	44	44	51	53	50	59	52	30	481
Aufnahme	—	—			1		1	10	1	11	21	(45)
Bestand im Anfang des Winter-Semesters	23	24	51	44	45	51	54	60	60	63	51	526

Einen Schüler, den Oberquartaner Giebener, hat die Schule durch den Tod verloren.

Die 8 Primaner, welche zu Ostern 1870 die Schule verließen, haben die Abgangsprüfung abgelegt und bestanden. Die mündliche Prüfung wurde am 24. März unter dem Vorsitz des Herrn Geheimen Regierungs- und Schulraths Dr. Trinkler abgehalten.

Die Examinanden waren:

1. Otto Günther aus Ortrand, evangelischer Confession, 19 Jahr alt. Er war $5\frac{1}{2}$ Jahr auf der Schule, 2 Jahr in Prima, wurde auf Grund seiner schriftlichen Arbeiten und bisherigen Leistungen von der mündlichen Prüfung dispensirt, erhielt die Censur „Gut bestanden“ und wollte sich dem Baufach widmen.

2. Adolf Liebe aus Artern, evangelischer Confession, 18 Jahr alt. Er war 6 Jahr auf der Schule, 2 Jahr in Prima, wurde von der mündlichen Prüfung dispensirt, erhielt die Censur „Gut bestanden“ und wollte Kaufmann werden.

3. Oscar Zetzsch aus Prettin, evangelischer Confession $18\frac{1}{2}$ Jahr alt. Er war 7 Jahr auf der Schule, 2 Jahr in Prima, wurde von der mündlichen Prüfung dispensirt, erhielt die Censur „Gut bestanden“ und wollte Soldat werden.

4. Hermann Jmroth aus Calbe a/S., evangelischer Confession, $18\frac{1}{2}$ Jahr alt. Er war 6 Jahr auf der Schule, 2 Jahr in Prima, erhielt die Censur „Genügend bestanden" und wollte sich dem Baufach widmen.

5. Otto Lorenz aus Merseburg, evangelischer Confession, $19\frac{1}{2}$ Jahr alt. Er war 7 Jahr auf der Schule, 2 Jahr in Prima, erhielt die Censur „Genügend bestanden" und wollte Forstmann werden.

6. Friedrich Schröter aus Preußlitz, evangelischer Confession, $19\frac{1}{2}$ Jahr alt. Er war $8\frac{1}{2}$ Jahr auf der Schule, 2 Jahr in Prima, erhielt die Censur „Genügend bestanden" und wollte sich dem Telegraphendienst widmen.

7. Ferdinand Fleischer aus Delitzsch, evangelischer Confession, $16\frac{1}{2}$ Jahr alt. Er war 2 Jahr auf der Schule und in Prima, erhielt die Censur „Genügend bestanden" und wollte das Postfach ergreifen.

8. Bruno Stephany aus Halle, evangelischer Confession, 19 Jahr alt. Er war $5\frac{1}{2}$ Jahr auf der Schule, 2 Jahr in Prima, erhielt die Censur „Genügend bestanden" und wollte sich dem Baufach widmen.

Zu der Michaelisprüfung hatten sich sechs Oberprimaner gemeldet. Nachdem sie die vorschriftsmäßigen schriftlichen Arbeiten angefertigt hatten, erschien das Ministerial-Rescript vom 19. Juli 1870, durch welches für diejenigen Abiturienten, welche in Folge der angeordneten Mobilmachung der Armee in dieselbe eintreten wollten oder mußten, ein abgekürztes Prüfungsverfahren angeordnet wurde. Von den sechs Abiturienten waren drei militärpflichtig, die drei übrigen erklärten als Freiwillige in die Armee eintreten zu wollen und brachten den Erlaubnißschein ihrer Angehörigen bei. Deshalb wurde mit ihnen bereits am 25. Juli die mündliche Prüfung unter dem Vorsitz des Herrn Director Dr. Kramer abgehalten; die Abiturienten erhielten sämmtlich das Zeugniß der Reife mit der Censur „Genügend bestanden." Am 26. Juli wurden sie in einer Versammlung der oberen Klassen entlassen. Es waren:

1. Hugo Schirmer aus Neuhaus bei Delitzsch, evangelischer Confession, 21 Jahr alt. Er war $8\frac{1}{2}$ Jahr auf der Schule, 3 Jahr in Prima und wollte sich dem Baufach widmen.

2. Theodor Oehmgen aus Gr. Steinberg bei Grimma, evangelischer Confession, $20\frac{1}{2}$ Jahr alt. Er war 11 Jahr auf der Schule, $2\frac{1}{2}$ Jahr in Prima und wollte Soldat werden.

3. Alwin Oemisch aus Reideburg, 21 Jahr alt. Er war 9 Jahr auf der Schule, $2\frac{1}{2}$ Jahr in Prima und wollte sich dem Telegraphendienst widmen.

4. Hans Liebe aus Calbe a. d. S., evangelischer Confession, $19^{1}/_{2}$ Jahr alt. Er war 7 Jahr auf der Schule, $2^{1}/_{2}$ Jahr in Prima und wollte Forstmann werden.

5. Carl Weber aus Huy-Neinstedt, evangelischer Confession, $18^{1}/_{2}$ Jahr alt. Er war $5^{1}/_{2}$ Jahr auf der Schule, 2 Jahr in Prima und wollte sich dem Maschinenbaufach widmen.

6. Oscar Hoffmann aus Gröbers, evangelischer Confession, $18^{1}/_{2}$ Jahr alt. Er war 8 Jahr auf der Schule, 2 Jahr in Prima und wollte sich ebenfalls dem Maschinenbaufach widmen.

Durch Ministerial-Rescript vom 25. Juli 1870 war es in Hinblick auf die außerordentlichen Zeitumstände gestattet, daß auch mit denjenigen Ober-Primanern aus dem dritten Semester, welche entweder das militärpflichtige Alter erreicht hatten, oder sich ganz der militärischen Laufbahn widmen oder damals mit Genehmigung ihrer Eltern in die Armee eintreten wollten, eine Abgangsprüfung zu veranstalten. Hierzu meldete sich ein Schüler. Nachdem er die vorschriftsmäßigen schriftlichen Arbeiten in der Zeit vom 4.—10. August angefertigt hatte, wurde mit ihm am 15. August unter dem Vorsitz des Herrn Director Dr. Kramer die mündliche Prüfung abgehalten. Es war:

Friedrich Ferdinand Zschintzsch aus Friedersdorf bei Bitterfeld, evangelischer Confession, 19 Jahr alt. Er war $6^{1}/_{2}$ Jahr auf der Realschule, $1^{1}/_{2}$ Jahr in Prima, erhielt die Censur „Gut bestanden" und wollte Forstmann werden.

Derselbe wurde sofort nach der Prüfung entlassen.

Ueber die Ziemann-Stiftung konnte im letzten Schulprogramm berichtet werden, daß das Vermögen der Stiftung am 1. Juli 1869 betragen hat 564 Thlr. 6 Sgr. 10 Pf. Von den Zinsen dieses Capitals erhielt am 4. Mai 1870 der Primaner Carl Weber aus Huy-Neinstedt ein Stipendium von 25 Thlrn. ausgezahlt. Das Capital selbst aber vermehrte sich durch eine unter den Schülern aufgebrachte Sammlung von 47 Thlr. 27 Sgr. 8 Pf. sowie durch einen Coursgewinn beim Ankauf eines Staatspapiers auf nominell 615 Thlr. 4 Sgr. 4 Pf., so daß eine abermalige Steigerung der Stipendiumssumme in Aussicht steht.

Das abgelaufene Schuljahr hat in der Stellung der Realschulen I. Ordnung eine nicht unwesentliche Entwickelung gebracht. Durch Rescript vom 7. December 1870 hat der Herr Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medicinalangelegenheiten angeordnet, daß hinfort die Realschulen erster Ordnung berechtigt sein sollen, ihre Schüler, welche ordnungsmäßig ein Zeugniß der Reife erlangt haben, auch zur Universität zu entlassen, und daß ein solches Zeugniß in Beziehung auf die Immatriculation und auf die demnächstige Inscription bei der philosophischen Facultät dieselbe Gültigkeit haben soll, wie ein Gymnasialzeugniß der Reife. Diese Realschulabiturienten sollen ferner, wenn sie ein akademisches Triennium absolvirt haben, zum Examen pro facultate docendi in den Fächern der Mathematik, der Naturwissenschaften und der neueren Sprachen, jedoch mit der Beschränkung der Anstellungsfähigkeit auf Real- und höhere Bürgerschulen, ohne vorgängige besondere Genehmigung zugelassen werden. Außerdem ist angeordnet, daß bei der Anstellung von Lehrern der neueren Sprachen auch an Real- und höheren Bürgerschulen diejenigen den Vorzug haben sollen, welche eine Gymnasialvorbildung besitzen. Diese beiden Beschränkungen können die Folge haben, daß im Kreise der wissenschaftlichen Schulmänner eine Rangverschiedenheit sich entwickelt zwischen denen mit Gymnasialvorbildung und allgemeiner Befugniß und denen mit Realschulvorbildung und beschränkter Befugniß; dagegen läßt sich erwarten, daß man in Zukunft thatsächlich mehr Gewicht auf die wirklich erlangte Gesammtbildung des Einzelnen und auf seine Fachtüchtigkeit legen wird, als auf die Weise, in der er seine Vorbildung gewonnen hat. Wir wollen damit nicht die Art dieser Vorbildung für gleichgültig erklären, wollen auch zugestehen, daß für solche Schüler, welche von vornherein für die wissenschaftliche Laufbahn bestimmt sind, der Gymnasialweg der angezeigtere ist; aber es wäre ein Verkennen der thatsächlichen Verhältnisse, unter welchen in den Realschulen gearbeitet wird, wenn man den Gymnasialweg als den einzigen bezeichnen wollte, der zu einer ausreichenden Reife für die Universitätsstudien führt. Die angeführte Ministerialverordnung hat einem wirklichen Bedürfniß Abhülfe gebracht; sie hat denjenigen Realschülern, in denen ein Bedürfniß nach weiter gehender wissenschaftlicher Ausbildung erwacht ist, dieselbe erleichtert, indem sie ihnen die doch nur zeitraubende Pflicht abnimmt, nach Ablegung des Maturitätsexamens der Realschule noch die Differenz auszugleichen, welche sie in der Kenntniß der alten Sprachen von den Gymnasialabiturienten trennt. In den Realschulen aber wird diese Verordnung das Bestreben erwecken, mehr noch als bisher die formale Seite ihrer Unterrichtsfächer hervorzukehren, und das weiter gesteckte Ziel wird auch in den begabteren Realschülern den Wetteifer und die Freudigkeit des Strebens steigern. Gelingt es nun den Realschulen, trotz der vielen inneren Hindernisse den Wettkampf mit den Gymnasien zu bestehen, so kann es nicht fehlen, daß sich ihnen die Pforten der Universität noch weiter aufthun und daß namentlich die vollberechtigte Zulassung zum medicinischen Studium den Realschulabiturienten auch gewährt wird.

II. Die Lehrer und ihre Lehrstunden. (Winter-Semester).*)

№	Namen.	Ordinat.	I A. B.	II A.	II B.	III A.	III B¹.	III B².	IV A.	IV B.	V A.	V B.	VI.
1.	Director Dr. Schrader, Inspector, 12 St.	I A. B.	Religion 2 Mathematik 5 Rechnen 1	Mathematik 4									
2.	Oberlehrer Dr. Geist, 20 St.	II A.	Latein 3 Geschichte 2	Latein 4 Deutsch 3 Geschichte 2	Latein 4 Geschichte 2								
3.	Oberlehrer Dr. Trotha, 20 St.	II B.	Geographie 1	Geographie 1 Religion 2	Religion 2 Geographie 1 Deutsch 3	Geographie 2	Geographie 2			Latein 6			
4.	Oberlehrer Hölzke, 20 St.	—	Französisch 4 Englisch 3	Französisch 4 Englisch 3	Englisch 3						Geographie 2 Geschichte 1		
5.	Oberlehrer Geist, 20 St.	—	Chemie 2 Laborator. 3	Chemie 2 Naturgesch. 2	Chemie 1 Naturgesch. 2				Naturgesch. 2	Naturgesch. 2	Naturgesch. 2	Naturgesch. 2	
6.	Oberl. Dr. Tschischwitz, 20 St.	III B¹.				Englisch 4	Französisch 4 Englisch 4	Französisch 4 Englisch 4					
7.	College Dr. Sommer, 22 St.	—	Deutsch 3 Physik 3	Physik 2 Rechnen 1	Mathematik 5 Physik 2 Rechnen 1	Mathematik 5							
8.	College Dr. Siebeck, 21 St.	III A.				Latein 5 Deutsch 3	Latein 5 Deutsch 3	Latein 5					
9.	College Harang, 21 St.	V A.			Französisch 4	Französisch 4				Deutsch 3	Französisch 5	Französisch 5	
10.	College Dr. Grotjan, 20 St.	IV A.							Religion 2 Deutsch 3 Französisch 5	Religion 2 Französisch 5	Religion 3		
11.	College Dr. Günther, 22 St.	IV B.					Rechnen 1	Rechnen 1	Rechnen 2	Rechnen 4 Geschichte 2 Geographie 2	Rechnen 4 Deutsch 4	Rechnen 4	
12.	College Flade, 21 St.	III B².				Physik 2 Rechnen 1	Mathematik 5 Physik 2	Mathematik 5 Physik 2	Mathematik 4				
13.	College Dr. Knauth, 21 St.	V B.										Deutsch 4 Lateinisch 7 Geographie 1	Lateinisch 9
14.	College Dr. Asmus, 22 St.	—				Religion 2 Geschichte 2	Religion 2 Geschichte 2	Religion 2 Geschichte 2 Deutsch 3				Religion 3	Religion 3 Geschichte 1
15.	Cand. prob. Dr. Männel, 21 St.	—						Geographie 2	Geographie 2 Geschichte 2 Latein 6		Latein 7	Geschichte 2	
16.	Lehrer Weber, 11 St.	—								Mathematik 4	Singen 1	Singen 1	Geographie 2 Naturgesch. 2 Singen 1
17.	Lehrer Hennig, 20 St.	VI.							Schreiben 2	Schreiben 2	Schreiben 2	Schreiben 2	Deutsch 4 Rechnen 5 Schreiben 3
18.	Zeichenlehrer Steuer, 21 St.	—	Zeichnen 3	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2	Zeichnen 2
19.	Musikdirector Greger, 4 St.	—	Zwei Abtheilungen, 2 St.						Singen 1	Singen 1			
20.	Turnlehrer Höpfner, 4 St.	—	Drei Abtheilungen à 10 Riegen und 1 St.; Vorturner 1 St.										

*) Die Lehrer und die Vertheilung der Lectionen im Sommer-Semester blieben dieselben wie im Wi[illegible]Semester 1869/70.

III. Allgemeine Lehrverfassung.

Der Unterrichtscursus in der Tertia soll in der Regel zweijährig sein, doch soll es fleißigen und begabten Schülern möglich bleiben, den Cursus in kürzerer Zeit zu absolviren. Unsere Realschule hat drei besondere Stufenklassen in der Tertia unterschieden, die bisher mit III A¹, III A², III B bezeichnet waren. Alle drei Stufen hatten in den letzten Jahren halbjährige Curse, so daß gleichmäßig fleißige Schüler die Tertia in $1\frac{1}{2}$ Jahren zurücklegen konnten; nur wer auf einer dieser Stufen eine Versetzung versäumte, mußte 2 Jahre in der Tertia sitzen. Auf Grund höherer Anordnung ist nunmehr die Einrichtung getroffen, daß auf der oberen Tertia-Stufe (III A) der Cursus einjährig ist und auf jeder der beiden andern Stufen (jetzt III B¹ und III B²) halbjährig. Dennoch soll es talentvollen und fleißigen Schülern möglich erhalten bleiben, die Ober-Tertia in einem halben Jahre zu erledigen, es muß aber in jedem einzelnen Falle die Würdigkeit für diese Auszeichnung durch besondern Conferenzbeschluß festgestellt werden.

Sexta.

Religion. Auswahl von Geschichten aus dem A. T., in Gruppen zusammengestellt, in der Bibel gelesen und erklärt und nach Preuß mit den nöthigen Denk- und Kernsprüchen gelernt. 3 St. Coll. Dr. Asmus.

Deutsch. Lesen mit Rücksicht auf correcte Aussprache und Interpunction, so wie verbunden mit orthographischen Uebungen. Unterscheidung der Wörterklassen; Ableitung und Zusammensetzung der Wörter; Decliniren und Conjugiren; Kenntniß des nackten Satzes anknüpfend an ein Lesestück, das von den Schülern zu Hause durchgelesen ist. Gleichzeitig Benutzung desselben theils zu häuslichen Aufsätzen, theils zu mündlichen Nacherzählungen. Schriftliche Stilübungen. 4 St. Lehrer Hennig.

Lateinisch. Declinationen des Substantivs, Adjectivs und Pronomens, Sum und die vier Conjugationen im Activ und Passiv. Satzbildung und Unterscheidung der Satztheile. Uebersetzung im Ellendt bis Nr. 20. Viele Vocabeln; bei letztern Beachtung ihrer Wandelungen und Zusammenfügungen zu Sätzen. Die übersetzten Sätze wurden verändert und es wurden neue aus ihnen gebildet. Die Exercitien wurden mit Hülfe der erlernten Vocabeln streng nach denen aus dem Lesebuche gebildet. 9 St. Coll. Dr. Knauth.

Geschichte. Die bekanntesten griechischen Sagen in faßlicher Darstellung. 1 St. Coll. Dr. Asmus.

Geographie. Die Erde nach ihrer Gestalt und Bewegung. Verständniß eines Globus, eines Planes und einer Landkarte. Die Provinz Sachsen mit ihren Bewohnern, wichtigsten Industriezweigen und Producten. Halle. 2 St. Lehrer Weber.

Rechnen. Kopf- und Tafelrechnen. Befestigung der vier Species in unbenannten und benannten Zahlen. Resolution und Reduction benannter ganzen Zahlen. Vorübungen zu den Brüchen. Resolution benannter Brüche. 5 St. Lehrer Hennig.

Naturkunde. Erfahrungsunterricht (Erkennung, Beobachtung und Darstellung) über nahe liegende Gegenstände aus allen drei Naturreichen. 2 St. Lehrer Weber.

Zeichnen. Zeichnen gerader Linien und der leichtesten Verbindungen verschiedener Winkel; einfache geradlinige Figuren; Uebung des Augenmaßes in Abschätzung der Längen- und Winkelgrößen. Uebergang zum einfachen geradlinigen Ornament. Geradlinige Tapeten- und Webemuster. Körperkanten mit Andeutung des Schattens durch Verdickung. 2 St. Lehrer Steuer.

Schönschreiben. Nach Vorschriften von Heinrigs. Erstrebung der Schönheit in der Form, Deutlichkeit und Leichtigkeit der Buchstaben, Sylben, Wörter und Zeilen. 3 St. Lehrer Hennig.

Unter-Quinta.

Religion. Leben, Thaten und Gleichnisse Jesu nach den Evangelien, bis zu seinem Einzuge in Jerusalem, mit Sprüchen und Erklärungen. 3 St. Coll. Dr. Asmus.

Deutsch. Lesen mit Ausdruck. Orthographisch-grammatische Uebungen nach bestimmt gefaßten Regeln und Einübung der Präpositionen. Das Lesebuch bildete die Grundlage zur Einübung der gegebenen Regeln. Nach dem erlangten Verständniß des Gelesenen in grammatischer und sachlicher Hinsicht möglichst genaue mündliche oder schriftliche Reproductionen. Mündliche Erzählungen aus den Bibliotheksbüchern, oft mit Angabe der Unterscheidungszeichen. 4 St. Coll. Dr. Knauth.

Latein. Wiederholung des Pensums von VI. Numeralia. Deponentia. Verba anomala et defectiva. Einübung der Verba mit unregelmäßigen Stammformen nach Schulz §. 53—56. Mündliche und schriftliche Uebersetzung aus Ellendts Lesebuch bis §. 47, welches die Grundlage zur Einübung und Wiederholung des Gelernten bildete und den Schülern Material zur Bildung neuer Sätze gab. 7 St. Coll. Dr. Knauth.

Französisch. Uebungen in und nach Plötz I. Curs. Lect. 1—40. Besondere Beachtung einer richtigen Aussprache. Extemporalien. 5 St. Coll. Harang.

Geschichte. Biographieen großer Männer aus der griechischen und römischen Geschichte bis auf die Zeit des Kaiser Augustus. 2 St. Lehrer Dr. Männel.

Geographie. Topische Geographie von den fünf Erdtheilen mit ihren Meeren, Inseln, Halbinseln, Meer- und Landengen und Gebirgen. 1 St. Coll. Dr. Knauth.

Rechnen. Addition, Subtraction unbenannter und benannter Brüche, Multiplication und Division unbenannter Brüche, im Kopfe und auf der Tafel geübt. 4 St. Coll. Dr. Günther.

Naturkunde. Im Sommer Botanik: Pflanzen aus den wichtigsten einheimischen Familien. Im Winter Zoologie: Der menschliche Organismus; Form und Lage seiner Theile und Andeutung ihrer Verrichtung. Die Rückgratthiere nach Gruppen in ihren wichtigsten Vertretern behandelt. Einführung in die Betrachtung der Gliederthiere und Bauchthiere. 2 St. Oberl. Geist II.

Zeichnen. Zeichnen gerader Linien nach ihrem Auftreten in der Natur. — Zeichnen nach Dupuis'scher Methode. Die Drahtkörper werden erst in geometrischer Ansicht gezeichnet, dann von jedem Schüler nicht wie sie in Wirklichkeit sind, sondern wie sie ihm erscheinen. Material: Bleistifte. 2 St. Lehrer Steuer.

Schönschreiben. Weitere Uebung von Buchstaben- und Zahlenformen. Ableitung der einzelnen Buchstaben von den Grundformen und von einander. 2 St. Lehrer Hennig.

Ober-Quinta.

Religion. Leben, Thaten und Gleichnisse Jesu von seinem Einzuge in Jerusalem an, besonders die Leidensgeschichte. Inhalt der Apostelgeschichte. 3 St. Coll. Dr. Grotjan.

Deutsch. Schönlesen. Mündliches Erzählen aus der Privatlectüre. Grammatische Uebungen, an das Lesebuch geknüpft. Stilistische Uebungen in Form von kleinen Briefen. Zergliederung, Umstellung, Zusammenziehung und Erweiterung der Sätze; dabei Interpunktion und Orthographie stets betont. 4 St. Coll. Dr. Günther.

Latein. Präpositionen, Conjunctionen und Adverbien. Außer dem Pensum wurden die in der frühern Klasse gelesenen Sätze im Ellendt wiederholt und im Anschluß daran für die Befestigung der Formenlehre und die Bereicherung der Vokabelkenntniß Sorge getragen. Die schriftlichen und mündlichen Uebungen im Uebersetzen erstreckten sich (mit Auswahl) über Gröbel §. 18—29, 36—38, 54—56. Exercitien und Extemporalien. 7 St. Lehrer Dr. Männel.

Französisch. Uebungen in und nach Plötz I. Curs. Lect. 41—73. Versionen, Retroversionen, Extemporalien, Memorirübungen; besondere Beachtung fand die Aussprache und Bereicherung des Vokabelschatzes. 5 St. Coll. Harang.

Geschichte. Sagen aus der alten deutschen Welt. Biographieen aus der mittlern und neuern Zeit; z. B. hervorragende Kaiser, Huß, Luther, A. H. Francke. 2 St. Oberlehrer Hölzke.

Geographie. Topische Geographie. Die fünf Welttheile mit ihren Flüssen, Bewohnern, Regierungsformen. Das Sonnensystem. 1 St. Oberlehrer Hölzke.

Naturkunde. Wie in Unter-Quinta.

Rechnen. Verbindung des Früheren mit Erlernung der Multiplication und Division benannter Brüche; Reduction benannter Brüche. Zeitrechnung. 4 St. Coll. Dr. Günther.

Zeichnen. Zeichnen gerader Linien nach innerer Anschauung. Gezeichnet wurden Liniengebilde und Combinationen nach Aufgaben, die in Worten gegeben waren, zunächst ganz bestimmt, später nur andeutend. Verschiedene Mäanderformen u. s. w. 2 St. Lehrer Steuer.

Schönschreiben. Wie in Unter-Quinta. Erzielung von Geläufigkeit, ohne Eintrag der correcten Form und Eleganz. 2 St. Lehrer Hennig.

Unter-Quarta.

Religion. Lernen und Worterklärung des Lutherischen Katechismus; 1. und 2. Hauptstück. Lesen des 1. Buch Mose mit Auswahl und eines Theiles des 2. Buch Mose. Wiederholung und Ergänzung der früher (Sexta) erlernten Erzählungen aus dem A. T. 2 St. Coll. Dr. Grotjan.

Deutsch. Lesen, mit Nachweisung und Einführung in das Verständniß der Interpunction. Begriff, Arten und Bestandtheile des Satzes im Allgemeinen. Schönlesen theils prosaischer, theils poetischer Stücke. Die Aufsätze lehnten sich an das Lesestück an. 3 St. Coll. Harang.

Latein. Repetition der bisherigen Pensen, besonders Erstrebung der Sicherheit und Gewandtheit in der Formenlehre, namentlich Wiederholung der §. 53—56. Hauptregeln über den Acc. c. Inf. Mündliche und schriftliche Uebersetzungen aus Gröbel. Ellendts Lesebuch 3. Abschnitt. Nr. 42—100. Viel Vocabellernen. 6 St. Oberlehrer Dr. Trotha.

Französisch. Plötz I. Cursus Lect. 74—91. Unregelmäßige Verben. Repetition der Vocabeln von Lect. 1—74. Extemporalien, Uebersetzen und Memoriren der Lesestücke. 5 St. Coll. Dr. Grotjan.

Geschichte. Griechische Geschichte bis Alexander dem Großen in ethnographischer Weise. 2 St. Coll. Dr. Günther.

Geographie. Topische und politische Geographie der europäischen Länder und Staaten außer Deutschland. Coll. Dr. Günther.

Planimetrie. Elemente. Von den Grundsätzen, Linien, ebenen Figuren, im Besondern von den Dreiecken und Parallelogrammen. 4 St. Lehrer Weber.

Rechnen. Einfache Regeldetri, auf der Tafel und im Kopfe. 2 St. Coll. Dr. Günther.

Naturkunde. Im Sommer: Botanik: Unterscheidung und Bezeichnung der Formen der einzelnen Pflanzentheile. Anleitung zum selbständigen Beschreiben von Pflanzen. Kenntniß der wichtigsten wildwachsenden und Kultur-Pflanzen. Gruppirung zu natürlichen Familien. Botanische Excursionen und Anlage von Herbarien; Ordnung der Pflanzen nach dem Linnéschen System. Anfänge selbständiger Pflanzenbestimmungen. Im Winter: Mineralogie: Kennzeichenlehre. Behandlung der häufigst vorkommenden Mineralien nach Handstücken der Mineraliensammlung. Anfänge der Mineralbestimmung. Geologie: Behandlung krystallinischer und sedimentärer Gesteine nach Handstücken der Gesteinssammlung. Formationslehre besonders mit Bezug auf Umgebung; Einschlüsse organischer Reste; geologische Karten. 2 St. Oberl. Geist II.

Zeichnen. Zeichnen von krummen Liniengebilden, von Kreisbogen und ganzen Kreisen, Ellipsen und Schlangenlinien. Combinationen von geraden und krummen Linien an größeren Formen. Bildung der Hand und des Augenmaßes. — Dupuis'sche Methode im Zeichnen krummer Drahtgebilde. — Zeichnen krummliniger Formen nach innerer Anschauung. 2 St. Lehrer Steuer.

Schönschreiben. Außer der Fortsetzung der frühern Uebungen, Versuche in der Landkartenschrift. Malerei und Kunstschrift unterblieb. 2 St. Lehrer Hennig.

Ober-Quarta.

Religion. Lernen und Worterklärung des 3., 4. und 5. Hauptstücks aus Luther's Katechismus. Lesen und Erklärung des Evangeliums Matthäi und der dem Lucas eigenthümlichen Parabeln (Kap. 10. 15. 16. 18.), verbunden mit Wiederholung und Ergänzungen aus Quinta. 2 St. Coll. Dr. Grotjan.

Deutsch. Lesen und Analyse leichterer Balladen, besonders von Uhland, Bürger, auch Schiller. An das Lesen wurden die Grundzüge der Satz- und Interpunctionslehre, an die letztere die Erklärung und der Gebrauch der Conjunctionen geknüpft. Die stilistischen Uebungen in Form von Beschreibungen, Schilderungen lehnten sich der Lectüre an. 3 St. Coll. Dr. Grotjan.

Latein. Nach der Repetition des vorigen Pensums wurden Anfangs im Anschluß an die Lektüre und dann im Zusammenhange die wichtigsten Regeln der Casuslehre durchgenommen und zu den entsprechenden schriftlichen und mündlichen Uebungen im Uebersetzen der Gröbel benutzt. Im Cornel wurden gelesen: Iphicrates, Chabrias, Timoleon, Epaminondas, Pelopidas; — Lysander, Alcibiades, De regibus, Hamilcar, Hannibal. Einzelne Partien wurden memorirt. Exercitien und Extemporalien. 6 St. Lehrer Dr. Männel.

Französisch. Plötz II. Curs. Lect. 1—23. Bemerkungen zu den regelmäßigen Verben. Schriftliche und mündliche Uebungen in den unregelmäßigen Verben. Lectüre im Trögel: Histoire grecque. Retroversion und Memorirübungen. Extemporalien. 5 St. Coll. Dr. Grotjan.

Geschichte. Römische Geschichte bis Marc Aurel. Verbreitung des Christenthums. Kämpfe mit den Deutschen. 2 St. Lehrer Dr. Männel.

Geographie. Topische und politische Geographie von Deutschland. Repetition der außereuropäischen Welttheile. 2 St. Lehrer Dr. Männel.

Planimetrie. Gleichheit der Flächeninhalte. Pythagoräischer Lehrsatz. Erster Theil der Lehre vom Kreise. Anweisung zur selbstständigen Lösung von leichten Aufgaben in der Klasse. 4 St. Coll. Flade.

Rechnen. Zusammengesetzte Regeldetri und Zinsrechnung, theils im Kopfe, theils auf der Tafel. 2 St. Coll. Dr. Günther.

Naturkunde. Wie in Unterquarta. 2 St. Oberl. Geist II.

Zeichnen. Zeichnen organischer Formen: Blätter, Zweige, Blumen, Früchte. Anwendung dieser Formen in der organischen Ornamentik. Erörterung der natürlichen und ästhetischen Gesetzmäßigkeit dieser Formen. — Zeichnen derselben nach Gyps und nach der Natur. Uebung durch Combination organischer Formen. 2 St. Lehrer Steuer.

Schönschreiben. Neben fortgesetzter Uebung im Schönschreiben auch Uebung im Schnellschönschreiben. 2 St. Lehrer Hennig.

Unter-Tertia 2.

Religion. Eingehende Begriffs- und Sinnes-Erklärung des Lutherischen Katechismus. Die zehn Gebote und der erste Artikel; dazu die nöthigen Bibelsprüche. 2 St. Coll. Dr. Asmus.

Deutsch. Gedichte, besonders von Schiller. Stilistische Uebungen in Form von Beschreibungen und Schilderungen, mit besonderer Beachtung der Anordnung der Gedanken. Reproducirende Vorträge mit Rücksicht auf obige Stilgattung. Die Elemente der Metrik. 3 St. Coll. Dr. Asmus.

Latein. Wiederholung des Pensums von Oberquarta. Casuslehre. Uebersetzungen aus Gröbel. Gelesen wurde Corn. Nep. XIX.—XXV incl. (54 Kap.) Exercitien und Extemporalien. 5 St. Coll. Dr. Siebeck.

Französisch. Anwendung von avoir und être bei der Conjugation. Verbes pronom. et impers. Noms déclinables. Adverbes. Nombres. Prépositions. Lectüre im Trögel: Histoire naturelle mit verschiedener Wahl der Stücke. Das Gelesene wurde retrovertirt und theilweise memorirt. Extemporalien. 4 St. Oberl. Dr. Tschischwitz.

Englisch. Die ganze Formenlehre nach Fölsing 1. Theil. Vielfache Uebung der Correctheit in der Aussprache und Orthographie. Zu den Regeln zahlreiche Beispiele mündlich und schriftlich. 4 St. Oberlehrer Dr. Tschischwitz.

Geschichte. Deutsche Geschichte bis 1618. Anlage von chronologischen Tabellen. 2 St. Coll. Dr. Asmus.

Geographie. Kosmographie. Physische und politische Geographie von Asien 2 St. Lehrer Dr. Männel.

Mathematik. Figuren in und um den Kreis. — Von den Summen und Unterschieden, Producten und Quotienten. Rechnung mit leichtern Aggregaten. 5 St. Im Sommer: Coll. Dr. Sommer; im Winter: Coll. Flade.

Rechnen. Decimalbrüche und deren practische Anwendung. 1 St. Coll. Dr. Günther.

Physik. Betrachtungen über die allgemeinen Eigenschaften an festen, flüssigen und luftförmigen Körpern. Capillarität. Von der Schwere. Oberfläche des Flüssigen in einem offenen Gefäße. Statik der flüssigen und luftförmigen Körper. 2 St. Coll. Flade.

Zeichnen. Geometrisches Zeichnen. Uebungen im Gebrauch des Cirkels, des Lineals und der Reißfeder; — Zeichnen der Hyperbel, Parabel, Spirale, Cycloide u. s. w. — Construction gothischer Profile und Maßwerksformen. — Verständniß von einfachen Auf- und Grundrissen. — Combination grad- und krummliniger Figuren. 2 St. Lehrer Steuer.

Unter-Tertia 1.

Religion. Behandlung des 2. und 3. Artikels, wie in Untertertia. 2 St. Coll. Dr. Asmus.

Deutsch. Gedichte der klassischen Literatur-Periode. Herders Cid in Auswahl. Das Nothwendigste aus der Metrik. Memoriren prosaischer Stücke. Aufsätze. Stilistische Uebungen. Anleitung zum Disponiren. 3 St. Coll. Dr. Siebeck.

Latein. Wiederholung und Fortsetzung der Casuslehre. Participialconstructionen, Gerundium und Gerundivum. Uebersetzen aus Gröbel. Exercitien und Extemporalien. Caes. d. bell. Gall. III, 19 ff. VI. VII, 1—20. 5 St. Coll. Dr. Siebeck.

Französisch. Grammat. Lect. 39—49 incl. Repetition der Verbes. Wortstellung. Die Moden und Zeiten mit Extemporalien. Lectüre im Trögel: La jeunesse d'Alexandre. La fuite de Darius. Alexandre à Babylone. La mort d'Alexandre. Retroversionen und Memorirübungen. 4 St. Oberl. Dr. Tschischwitz.

Englisch. Syntactische Regeln. Repetition der unregelmäßigen Verba und der Hülfsverben. Die Grammatik bis inclus. Fürwörter gelernt. Es wurde Vieles an die Tafel geschrieben und corrigirt, Anderes in Form von Extemporalien geübt. Mehrere zusammenhängende Erzählungen und Briefe wurden aus dem Deutschen ins Englische übersetzt und umgekehrt. Von Gedichten wurden auswendig gelernt: Those evening bells. Knight Toggenburg. The Erlking. John Barleycorn. God save the King. Childe Harolds adieu to England. The battle of Ivry. 4 St. Oberlehrer Dr. Tschischwitz.

Geschichte. Preußisch-brandenburgische Geschichte von 1618—1763 mit Berücksichtigung der deutschen Geschichte. 2 St. Coll. Asmus.

Geographie. Physische Geographie von Amerika, Afrika, Australien und Europa. 2 St. Oberlehrer Dr. Trotha.

Mathematik. Aggregate. Potenz- und Wurzellehre. Proportionslehre. Lösung von geometrischen Aufgaben. Wiederholungen aus den frühern Pensen. 5 St. Im Sommer: Lehrer Dr. Sommer; im Winter: Coll. Flade.

Rechnen. Gesellschafts- und Tararechnung. Abhilfe bemerkter Schwächen. 1 St. Coll. Dr. Günther.

Physik. Lehre vom Licht. Optische Instrumente. Akustik. 2 St. Coll. Flade.

Zeichnen. Linien Perspective. Hauptgesetze der elementaren Perspective, erörtert und practisch geübt. Lehre von den Horizont=, Augen=, Distance= und anderen Verschwindungspunkten. — Perspectivische Constructionen von Gegenständen von nicht zu einfacher körperlicher Composition. — Die Zeichnungen wurden theils in Bleistift, theils in Tuschmanier mit Andeutung der Hauptschatten ausgeführt. 2 St. Lehrer Steuer.

Ober=Tertia.

Religion. Das 3. 4. und 5. Hauptstück. 2 St. Coll. Dr. Asmus.

Deutsch. Stilistische Uebungen. Anleitung zum Disponiren. Aufsätze. Theorie des Hexameters. Memoriren prosaischer Stücke. Lectüre: Voß, Homers Odyssee in Auswahl. 3 St. Coll. Dr. Siebeck.

Latein. Repetition der Casuslehre nach Schulz. Moduslehre. Elemente der Prosodie. Extemporalien und Exercitien. Caes. de bell. Gall. II. VII, 20—70. 5 St. Coll. Dr. Siebeck.

Französisch. Grammatik: Gebrauch der Zeiten und Moden mit Extemporalien nach Plötz. Thl. II. Im Sommer: Lectüre im Trögel: les Baskirs, Diner chinois, l'Ile des Fantômes, Les ours de Berne. Im Winter: Lectüre im Charles XII von Voltaire: 1. Buch. Das Gelesene wurde vertirt, retrovertirt, zum Theil memorirt und zu grammatischen Erläuterungen benutzt; auch gab es den Stoff zu französischen Sprechübungen. Versuchsweise wurde der Unterricht in französischer Sprache ertheilt. 4 St. Coll. Harang.

Englisch. Grammatik: Artikel, Hauptwort, Adjectiv, Zahlwort und Fürwort. Zusammenhängende Stücke wurden aus dem Deutschen ins Englische übersetzt. Cursorisch und mit theilweiser Retroversion wurde gelesen ein längerer Abschnitt aus: The Tales of a grand father von Sir Walter Scott. Die Orthographie in zahlreichen Dictaten geübt und das Wissen der Schüler in der elementaren Grammatik durch Extemporalien und gelegentliche Wiederholungen befestigt. 4 St. Oberl. Dr. Tschischwitz.

Geschichte. Preußisch=brandenburgische Geschichte von 1756—1840 mit Berücksichtigung der deutschen Geschichte. 2 St. Coll. Dr. Asmus.

Geographie. Physische Geographie von Deutschland. Erweiterung zur politischen Geographie von der Schweiz, von Dänemark und von den Niederlanden. 2 St. Oberlehrer Dr. Trotha.

Mathematik. Ausmessung geradliniger Figuren; Aehnlichkeit der Figuren. Von den Proportionen beim Kreise und der Rectification und Quadratur desselben.

Geometrische Oerter. Lösung von geometrischen Aufgaben. Wiederholungen aus der Arithmetik. 5 St. Im Sommer: Der Inspector; im Winter: Dr. Sommer.

Rechnen. Decimalbrüche. Abgekürztes Multiplications- und Divisionsverfahren. Mischungsrechnung. Repetition durch vermischte Aufgaben auf der Tafel und im Kopfe. Abhilfe bemerkter Schwächen. 1 St. Coll. Flade.

Physik. Magnetismus. Reibungs- und Influenzelectricität. Galvanische Säulen und Batterien. Chemische Wirkung der Kette. Inductionsapparat. Telegraph. Elektromagnet. Im Sommer: Dr. Sommer; im Winter: Coll. Flade.

Zeichnen. Landschaftszeichnen. Vorzugsweise Conturenzeichnen. Schattirungen in Linienmanier mit der Feder, dann mit Kreide und Pinsel. Zeichnen von kahlen Bäumen und Baumschlag, wobei die Arten der Bäume erläutert werden, dann Zeichnen von Berg- und Wolkenformen, ruhigem und bewegtem Wasser. Später Copiren vollständiger Landschaftsbilder. Zeichnen von Landschaftselementen nach der Natur. Composition einfacher Landschaftsmotive nach gegebenen Andeutungen. 2 St. Lehrer Steuer.

Unter-Secunda.

Religion. Allgemeine Bemerkungen über die Heilige Schrift. Zeittafeln für die biblischen Begebenheiten. Sachliche und paränetische Besprechung einzelner Theile der wichtigsten Schriften A. und N. T. Eingehendere Behandlung der wichtigsten Schriften des A. T., namentlich der Psalmen. Mehrere derselben wurden gelernt. Erklärung der wichtigeren Perikopen. 2 St. Oberlehrer Dr. Trotha.

Deutsch. Außer lyrischen und didaktischen Dichtungen Schillers und Göthes wurde auch des Letzteren Hermann und Dorothea gelesen, erklärt, und nebst Biographien und mittelalterlichen Sagen zu freien Vorträgen benutzt. Berücksichtigung der Mythologie und Metrik. Uebungen im Disponiren verschiedener Stoffe, namentlich Charakterschilderungen. Erklärung von Synonymen. Themata zu den dreiwöchentlichen schriftlichen Arbeiten: 1) Ein Besuch auf dem Lande an einem schönen Frühlingstage. 2) Wiege und Sarg. 3) Weshalb ist die Feier des Sonntags von so großer Wichtigkeit? 4) Schön ist der Friede, aber auch der Krieg hat seine Ehre. 5) Welche Eigenschaften zeigt uns der Pfarrer in Hermann und Dorothea (Classenarbeit). 6) Die Heimkehr verwundeter Krieger. 7) Meer und Wüste. Wie füllt man am Besten seine Mußestunden aus? 9) Eine Weihnachtsfeier im Feldlager. 10. Characteristik der Mutter in Hermann und Dorothea (Classenarbeit). 3 Stunden. Oberlehrer Dr. Trotha.

Latein. Repetition der Modi mit Berücksichtigung der Conjunctionen und der Consecutio temporum. Lectüre von Caes. bell. gall. lib. I, II.; Ovid. Metam. gegen 600 Verse. Aus beiden wurde Einiges memorirt. Exercitia und Extemporalia. 4 St. Oberlehrer Dr. Geist I.

Französisch. Syntax des Artikels, des Nomens, des Adverbs und des Pronomens nach Plötz II. Lect. 58—76. Lectüre im Manuel von Plötz: Bruchstücke aus Montesquieu und Voltaire. Das Gelesene wurde frei wiedererzählt und theilweise memorirt. Die Unterrichtssprache meist französisch. Extemporalien. 4 St. Coll. Harang.

Englisch. Syntax des einfachen Satzes. Fölsing Th. II. §. 211—308. Repetition des ersten Theiles der Grammatik bis zu den Präpositionen. Die wichtigsten Regeln wurden englisch übersetzt, gelernt und an vielen Beispielen geübt. Schriftliche Uebersetzungen theils nach Fölsing, theils nach der Lectüre. Letztere aus Walter Scott: Tales of a grand-father Cap. VI—XI. Das Gelesene wurde zu Sprachübungen benutzt. Unterricht meist in englischer Sprache. 3 St. Oberlehrer Hölzke.

Geschichte. Griechische und römische Geschichte bis Alexander und Marc Aurel. 2 St. Oberlehrer Dr. Geist I.

Geographie. Politische Geographie von Deutschland. Ergänzungen des Preußischen Staates. Theilweise Repetition der physischen Geographie. 1 St. Oberlehrer Dr. Trotha.

Mathematik. Potenzen mit gebrochenen und negativen Exponenten. Die Lehre vom Imaginären. Logarithmen. Algebraische Gleichungen des ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Algebraische Gleichungen des zweiten Grades mit einer und zwei Unbekannten. Einübung durch zahlreiche Beispiele. Lösung von Dreiecks- und Vierecksaufgaben und Aufgaben über Sätze der neuern Geometrie. Geometrische Repetitionen. 5 St. Im Sommer: Oberlehrer Hahnemann; im Winter: Dr. Sommer.

Rechnen. Repetition der einfachen Zinsrechnung; die Zinseszinsrechnung Disconto- und Münzrechnung. 1 St. Im Sommer: Oberlehrer Hahnemann; im Winter: Dr. Sommer.

Physik. Experimenteller Unterricht. Lehre von den electrischen und magnetischen Erscheinungen. Die Gesetze der Akustik, Optik und Mechanik, aus Versuchen abgeleitet und durch Rechnung begründet. 2 St. Im Sommer: Oberlehrer Hahnemann; im Winter Dr. Sommer.

Chemie. Einführung in die Chemie und deren Terminologie durch Experimente mit Metallen, Sauerstoff, Wasserstoff, Stickstoff, Kohlenstoff, Chlor, Schwefel, Phosphor und deren einfachen Verbindungen; Anfangsgründe der Stöchiometrie. 1 St. Oberlehrer Geist II.

Naturkunde. Im Sommer: Systematische Botanik. Das natürliche System. Geographische Verbreitung der wichtigsten Pflanzenfamilien. Anleitung zur Pflanzenbestimmung. Excursionen. Im Winter: Anthropologie. Systematische Zoologie. 2 St. Oberlehrer Geist II.

Zeichnen. Figurenzeichnen. — Umrisse. — Theile von Thier- und Menschenkörpern. Erläuterung der ästhetischen Verhältnisse. Eintheilung des menschlichen Körpers. Knochenlehre. Menschengruppen im Umrisse. Schattirungen mit Blei und Kreide auf weißem und farbigem Papier. Zeichnen von Thier- und Menschenformen nach Gyps. — Dann Figurenornamente (Arabesken). Composition derselben. 2 St. Lehrer Steuer.

Ober-Secunda.

Religion. Geschichte der Gründung des Reiches Gottes nach dem N. T. Sachliche und paränetische Erklärungen der wichtigsten Schriften desselben. Wichtigere Stellen wurden memorirt. 2 St. Oberlehrer Dr. Trotha.

Deutsch. Kleinere prosaische Aufsätze von Schiller, sowie einzelne seiner und Goethe's lyrischen Gedichte, die Braut von Messina und Jungfrau von Orleans gelesen und erklärt, und daran Erörterungen aus dem Gebiet der Poetik (Technik des Drama, Tropen und Figuren) geknüpft. Themata: 1) „Das eben ist der Fluch der bösen That, daß sie fortzeugend Böses muß gebären" mit Bezug auf die „Braut von Messina." 2) Vergleich des Monologs der Beatrice mit dem der Johanna. 3) Ungleich vertheilt sind des Lebens Güter unter der Menschen flücht'gem Geschlecht; doch die Natur, sie ist ewig gerecht. 4) Welche Empfindungen erweckt Isabella in ihren Söhnen, um sie zur Versöhnung geneigt zu machen? 5) Gang der dramatischen Entwickelung im 1. Akt der Braut von Messina (Klassenarbeit). 6) Disposition des Schiller'schen Aufsatzes: Uebersicht über die Zustände Europas zur Zeit der Kreuzzüge. 7) Die Momente der dramatischen Entwickelung im 1. Akt von Maria Stuart. 8) Gründe des Verfalls der Kaisermacht unter den Hohenstaufen. 9) Uebersicht über die Baustile von den Griechen bis zur Jetztzeit. 10) Inwiefern erfüllte sich in Maria Stuart das tragische Gesetz, daß das, was als Ausweg zur Rettung erscheint, gerade eine Quelle vernichtenden Unglücks wird? (Klassenarbeit). 3 St. Oberl. Dr. Geist I.

Latein. Cicero in Catil. I., p. Arch. p., Lael., Caesar b. Gall. VIII. Ovid. Metam. mit Auswahl. Repetition der schwierigen Capitel aus der Grammatik. Exercitien und Extemporalien. 4 St. Oberlehrer Dr. Geist I.

Französisch. Grammatik und Extemporalien nach Plötz über Régime des Verbes, Infinitif, Conjonctions, les Modes, les Participes et les Pronoms. Lectüre aus Plötz: Manuel etc. Die Abschnitte von Toepfer, Girardin, Barante, Voltaire, Rousseau, Buffon. Das Gelesene wurde französisch interpretirt und in der nächsten Stunde zu Sprechübungen benutzt. Thèmes zu freien Arbeiten: 1) Deuxième croisade prêchée par St. Bernard. 2) Meurtre du duc de Bourgogne. 3) Bataille de Grossbeeren. 4) Bataille de Rocroi. 5) Pourquoi était-il impossible à Louis XIV de conquérir la Hollande? 6) Johnson au collège et à l'université. Die übrigen Arbeiten waren Extemporalien. 4 St. Oberlehrer Hölzke.

Englisch. Lectüre aus Macaulay biographical essays: Goldsmith, Bunyan Johnson. Das Gelesene wurde englisch erklärt und zu Sprechübungen benutzt. — Syntax des zusammengesetzten Satzes. Fölsing Th. II. §. 309—48. Zu stilistischen Uebungen wurden theils schriftliche Uebersetzungen aus dem Deutschen, theils freie Auszüge aus dem Gelesenen benutzt. Unterricht in englischer Sprache. 3 St. Oberlehrer Hölzke.

Geschichte. Geschichte des Mittelalters, das Wesentlichste aus der Geschichte der Baukunst. Oberlehrer Dr. Geist I.

Geographie. Politische und physische Geographie von Europa, außer Deutschland. 1 St. Oberlehrer Dr. Trotha.

Mathematik. Ebene Trigonometrie. Lösung von trigonometrischen Aufgaben. Erster Theil der Stereometrie. Lösung von algebraisch-geometrischen, rein geometrischen und stereometrischen Aufgaben. 4 St. Im Sommer: Oberlehrer Hahnemann; im Winter: Der Inspector.

Rechnen. Wechselrechnung. 1 St. Im Sommer: Oberlehrer Hahnemann; im Winter: Dr. Sommer.

Physik. Optik. Lehre von der Wärme. Galvanismus; Thermoelectricität; Inductionselectricität; Magnetelectricität. 2 St. Im Sommer: Oberlehrer Hahnemann; im Winter: Dr. Sommer.

Chemie. Im Sommer: Die Metalloide und deren wichtigste Verbindungen, Wiederholung des Pensums von Unter-Secunda. Im Winter: Die leichten Metalle und deren wichtigste Verbindungen. Die technische Gewinnung und Anwendung der behandelten Körper. Experimente. Stöchiometrische Uebungen. 2 St. Oberl. Geist II.

Naturkunde. Mineralogie. Kennzeichenlehre und systematische specielle Mineralogie, nach Handstücken der Mineraliensammlung und Krystallmodellen. Anleitung zur Mineralbestimmung. Wiederholungen aus dem Gebiete der Zoologie und Botanik. — Geologie. Beschreibung krystallinischer und sedimentärer Gesteine nach Handstücken; Formationslehre der Gesteine, besonders mit Bezug auf hiesige Umgegend; Einschlüsse organischer Reste. Vulcanische Erscheinungen der Jetztzeit; Gletscherbildungen. Excursionen. 2 St. Oberlehrer Geist II.

Zeichnen. Architektonisches Zeichnen. Aesthetische Seite desselben. Z. B.: Façaden, innere und äußere Ansichten u. s. w. Höheres Ornamentzeichnen, theils nach Gyps, theils nach Vorlagen. Zeichnen von architektonischen Gegenständen nach der Natur, nach vorhergenommenem Maße. Einfache Entwürfe. Verzierung verschiedener Gegenstände. Besondere Beachtung schöner Formen. Erläuterungen derselben. 2 St. Lehrer Steuer.

Ober- und Unter-Prima, comb.

Religion. Die Glaubenslehre nach dem Lutherischen Katechismus, mit Beziehung auf die Geschichte der Kirche. Erklärung des Briefes an die Römer. 2 St. Der Inspector.

Deutsch. Ueberblick über die Hauptmomente der Entwicklung der deutschen Litteratur von den ältesten Zeiten bis Herder incl. Gelesen wurde: Mehrere Abenteuer vom Nibelungenliede im Urtext; Gudrun (priv.); einige Oden von Klopstock; Einiges aus dessen Messias; der Oberon von Wieland; Lessings Laocoon; Minna v. Barnhelm (priv.); Emilia Galotti (priv.); einige Abschnitte aus der Hamburgischen Dramaturgie; das erste kritische Wäldchen v. Herder. An geeigneten Stellen der Lectüre wurden die Elemente einer kurzen Poetik gegeben. 1 Stunde wöchentlich wurde auf Dispositionsübungen und auf freie Vorträge verwandt. Die controlirte Privatlectüre bezog sich auf geeignete Schriften über die deutsche, französische und englische Poesie.

Die Themata für den deutschen Aufsatz waren:

1) a. Der Charakter von Göthes Iphigenie. b. Lust und Liebe sind die Fittige zu großen Thaten. 2) Die Handlungen im Nibelungenliede entspringen nothwendig aus den Charakteren und aus den Verhältnissen. 3) Hagens Charakter (Klassenarbeit). 4) Kriemhild und Gudrun, zwei ächt deutsche Ahnfrauen. 5) Was ist von dem Worte: „Leben und Leben lassen" zu halten? (Abituriententhema). 6) Die Licht- und Schattenseiten des sinkenden Mittelalters (Abituriententhema). 7) Lerne

schweigen, o Freund! dem Silber wohl gleichet die Rede, aber zur rechten Zeit schweigen ist lauteres Gold. (Herder.) 8) Warum ist unser Urtheil über Klopstocks Dichtungsweise so verschieden von dem seiner Zeitgenossen? 9) a. Das unterscheidende Merkmal poetischer Darstellung. — Gedanken und Empfindungen in concrete Beispiele, Bilder und Symbole auszuprägen, statt der Urtheile und Betrachtungen Handlungen und Geschichten zu geben — an Shakespeare nachzuweisen. b. Nicht der ist auf der Welt verwaist, — dem Vater und Mutter gestorben; — Sondern der für Herz und Geist — Keine Lieb und kein Wissen erworben. (Rückert.) 10) Wodurch ist Minna von Barnhelm und Emilia Galotti reformatorisch fürs deutsche Drama geworden. (Klassenaufsatz.) 11) Herders Stellung im 1sten krit. Wäldchen zu den Principien des Lessingschen Laocoon. 3 St. Dr. Sommer.

Lateinisch. Liv. lib. XXII, Sall. de conj. Catil., Verg. Aen. lib. VI. Exercitien und Extemporalien. 3 St. Oberlehrer Dr. Geist I.

Französisch. Lectüre: Corneille: Cid, außerdem aus Plötz Manuel etc. die Abschnitte von Molière, Racine, Bossuet, Fléchier, Thiers, Remusat, Courier, G. Sand und Dumas. Das Gelesene wurde französisch interpretirt und in der nächsten Stunde zu Sprechübungen benutzt. Repetition der schwierigeren Kapitel der Grammatik, namentlich der Modi, in französischer Sprache. Disputirübungen, angeschlossen an freie Vorträge, die von älteren Schülern über geschichtliche Themata gehalten wurden. Freie Arbeiten über folgende Themata: 1) a. Causes de la décadence de la Pologne. b. Situation de la Prusse en 1813. 2) Invasions des Hongrois en Allemagne. 3) a. Division de l'Empire romain par Théodose et ses conséquences. b. les Ostrogoths en Italie. 4) Klassenarbeit: Guerre du nord jusqu' à la bataille de Pultava. 5) Abiturientenarbeit: Qu'est-ce que les électeurs de la maison de Hohenzoller ont fait pour le Brandebourg? 6) Zweite Abiturientenarbeit: Guerres de Louis XIV. 7) a. Quelle influence les croisades ont-elles eu sur le développement des états de l'Europe? b. Troisième croisade. 8) a. C'est Richelieu qui a préparé le chemin à Louis XIV. b. Guerres des Thébains contre Sparte. 9) Klassenarbeit: Louis XI. 10) a. Pourquoi Don Rodrigue a-t-il bien fait de venger l'affront de son père? b. Qu'est-ce qui a facilité à Alexandre la conquête du royaume de Perse? 11) a. Grandeur de Rome même dans les temps les plus malheureux pour l'état. b. Quelle part la Prusse a-t-elle prise à la guerre de la succession d'Espagne? 12) Abiturientenarbeit: Extemporale über die schwierigeren Regeln der französischen Grammatik. 4 St. Oberlehrer Hölzke.

Englisch. Lectüre: Macaulay, history of England II bock IV and V. Das Gelesene wurde englisch interpretirt und in der nächsten Stunde von den Schülern frei nacherzählt. Repetition der Grammatik in englischer Sprache. Freie Vorträge der älteren Schüler. Themata zu den freien Arbeiten: 1) The Peloponnesian War. 2) Why were the kings of the house of Stuart obliged to seek for the friendship of France? 3) a. Clovis, the founder of the power of the Franks. b. The part of the Visigoths in the great migration. 4) Insurrection of the Dutch against Philip the Second. 5) Klassenarbeit: Essex, the favourite of Queen Elisabeth. 6) 2 Abiturientenarbeiten: Extemporalien über die schwierigeren Regeln der englischen Grammatik. 7) a. The Maid of Orleans, how she appears in Schiller and how in history. b. The German nations that settled in Italy. 8) a. What influence had the conversion of Clovis on the state of France? b. A fine winter day in the country: letter to a friend. 9) Klassenarbeit: a. English refugees in the Netherland in the beginning of the reign of James II. b. However brilliant the reign of Lewis XIV. may have been, yet it was not really useful to France. 10) a. England under the first two Kings of the house of Stuart. b. Argyle's attempt on Scotland. 11) Quarrels of Frederic II, Emperor of Germany with the popes and Lombardian towns. 12) Abiturientenarbeit: The weakness of Germany during the reign of Lewis XIV in France. 3 St. Oberlehrer Hölzke.

Geschichte. Geschichte der neuern Zeit. 2 St. Oberlehrer Dr. Geist I.

Geographie. Die außereuropäischen Erdtheile. Von Europa: Die nordischen Reiche mit England. 1 St. Oberlehrer Dr. Trotha.

Mathematik. Die höheren Gleichungen: Der Zusammenhang der Wurzeln mit den Coefficienten und den Vorzeichen der Glieder; Erkennbarkeit der complexen Wurzeln einer unvollständigen Gleichung; Bestimmung der Wurzelgrenzen. Auffindung der rationalen, irrationalen und complexen Wurzeln; Cardanis Regel, Decartes' und Eulers Methoden zur Behandlung der Gleichungen 4. Grades. — Diophantische Gleichungen des ersten und zweiten Grades. — Kettenbrüche und ihre Anwendung. — Elementare Theorie der Maxima und Minima und Anwendung derselben auf geometrische Aufgaben. — Analytische Geometrie: Die gerade Linie, der Kreis, die einzelnen Kegelschnitte, die allgemeine Gleichung zweiten Grades. — Für die schriftlichen Arbeiten wurden jedesmal 4 Aufgaben aus verschiedenen mathematischen Disciplinen gestellt. Abiturientenaufgaben: A. Erste Michaelisprüfung. 1) Wie groß ist die Summe der n ersten Glieder der Reihe, deren allgemeines Glied $(3x - 2)^2$ ist? 2) Es sind zwei Punkte und eine gerade Linie gegeben;

man soll auf der Geraden den Punkt suchen, für welchen die Quadratsumme der Abstände von den festen Punkten ein Minimum ist. 3) Die Lage der 3 Punkte A, B, C einer Horizontalebene ist gegeben durch die Entfernungen AB = 3470', BC = 4338' und durch den Winkel ABC = 115° 8'. An einem vierten Punkte sind die Winkel ADB = 48° 7' und BDC = 37° 36' gemessen: wie groß ist BD? 4) Um einen Punkt an der Axe eines geraden Kegels, dessen Basisradius r und Höhe h ist, ist eine Kugel beschrieben, deren Oberfläche durch die Spitze des Kegels geht und die Grundfläche desselben berührt; wie wird die Kugel durch den Kegel und wie der Kegel durch die Kugel getheilt?

B. Zweite Michaelisprüfung. 1) Es soll $\sqrt{22}$ in einen Kettenbruch verwandelt werden, dessen 7 erste Näherungswerthe anzugeben sind. 2) Zwei Punkte und ein Kreis sind gegeben; man soll auf der Peripherie des Kreises die zwei Punkte angeben, für welche die Quadratsumme ihre Abstände von den festen Punkten beziehungsweise ein Maximum und ein Minimum ist. 3) Die Summe zweier Dreiecksseiten sei s = 135', die dritte Seite sei c = 83' und die Differenz der an ihr liegenden Winkel sei 20° 18'. Wie groß sind die Seiten und Winkel des Dreiecks? 4) In einem Kugelabschnitt sei der Ueberschuß der krummen Fläche über die ebene f und das Volumen v; wie groß ist der Kugelradius und die Höhe des Segments?

C. Osterprüfung. 1) Die Gleichung $x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0$ hat vier complexe Wurzeln, die sich in endlicher Form ausdrücken lassen. Welches sind diese Wurzeln? 2) Es sind 3 Punkte durch die rechtwinkligen Coordinaten $x_1\ y_1$, $x_2\ y_2$, $x_3\ y_3$ gegeben; man soll den geometrischen Ort des Punktes bestimmen, für welchen die Quadratsumme seiner Abstände von den drei gegebenen Punkten den constanten Werth q^2 hat. 3) Die Lage der drei Punkte A, B, C in einer Horizontalebene ist gegeben durch AB = 1080^m, BC = 870^m und $\angle$ ABC = 101° 18'. An einem vierten Punkte D, welcher in der Oeffnung des Winkels ABC liegt, sind die Winkel ADB = 31° 20' 40" und BDC = 20° 4' 10" gemessen. Wie groß ist BD? 4) In ein regelmäßiges Octaeder, dessen Seitenkante a, ist eine Kugel so eingeschrieben, daß alle Seitenkanten berührt werden; man soll berechnen: 1) den Radius dieser Kugel, 2) das Volumen eines der Kugelsegmente, die außerhalb des Octaeders liegen, 3) das Volumen einer der Octaederspitzen, die außerhalb der Kugel liegen, 4) die Fläche eines der dreieckigen Kugelflächenstücke, die im Inneren des Octaeders liegen. 5 St. Der Inspector.

Rechnen. Mathematische Theorie der Decimalbrüche. Sparkassen- und Rentenrechnung. 1 St. Im Sommer: Oberl. Hahnemann; im Winter: Der Inspector.

Physik. Mathematische Behandlung der Wärmelehre und der Optik. Lösung vieler Aufgaben. 3 St. Im Sommer: Oberlehrer Hahnemann; im Winter: Dr. Sommer.

Chemie. Organische Chemie. Im Sommer: Kohlenhydrate, Proteinstoffe, Leimgebende Stoffe. Zusammensetzung thierischer und pflanzlicher Nahrungsmittel und deren Ueberführung in den menschlichen Organismus. Im Winter: Organische Säuren, Alkohole, Fette, flüchtige Oele, Harze, Farbstoffe, Alkaloide. — Chemische Technik der behandelten Körper. Stöchiometrische Uebungen. Wiederholungen aus der anorganischen Chemie. 2 St. Synthetische und analytische Arbeiten im Laboratorium. 3 St. Oberlehrer Geist.

Zeichnen. Cursus der geometrischen und perspectivischen Projectionen; erstere bis zur Durchdringung krummflächiger Körper, letztere bis zur Darstellung der inneren Ansicht von Gewölben. — Figuren- und Landschaftszeichnen wurde fortgesetzt. Ebenso das höhere Ornamentzeichnen. Zeichnen nach Gypsen, mit Verständniß der Gesetze des Verfahrens. — Zeichnen und Beachtung schöner Muster. Federzeichnungen. Kreide-, Tusch- und Aquarellausführungen. 3 St. Lehrer Steuer.

IV. Unterrichtsmittel.

A. Durch Verwendung der disponibelen Fonds erwarb die Schule:

a. für das physikalisch-chemische Cabinet: Einen Voltameter nach Faraday, einen Apparat zur Ermittelung der Temperatur des Wassers bei seiner größten Dichte, eine Sirene mit Zählwerk, einen Rotations-Apparat für Geißler'sche Röhren, ein Salonmikroskop, einen Funkeninductor und ein Chromsäureelement, einen Schwefelwasserstoffapparat, eine pneumatische Wanne von Glas mit Brücke, 12 Stück Bunsen'sche Brenner, ein Eudiometer mit Hahn, verschiedene Flachbrenner, so wie diverse kleinere Apparate aus Holz, Eisen, Glas und Porcellan;

b. für den Zeichenunterricht: Dreizehn Ornamente von Gyps, Herdle's 68 Vorlagen: Blätter, Blumen, Ornamente;

c. für den Singunterricht: Stein's Auswahl von Gesängen, 11 Exemplare, Sängerrunde;

d. für die Lehrerbibliothek: Fortsetzungen der Zeitschriften für Unterrichtswesen von Stiehl, für Litteratur von Zarncke, für neuere Sprachen von Herrig, Mathematik von Grunert, Physik von Poggendorf, Chemie von Erdmann und Werther, des Naturforschers von Sklarek, des Landbuchs von Pommern von Berghaus, der Encyclopädie der Pädagogik von Schmid, Mittheilungen über Jugendschriften, Lübker, Gesammelte Schriften für Philologie und Pädagogik, 2. Sammlung. Klencke, Schuldiätetik; Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik, 1. Theil. Schellen, Spektralanalyse; Helmholtz, Lehre von den Tonempfindungen; Wöhler, Grundriß der organischen Chemie, 7. Aufl. Kramer, Karl Ritters Leben, 2 Bde.

f. für die Schülerbibliothek: Daheim; Körner, Buch der Welt, 2 Bde. Jäger, das Leben im Wasser; Smidt, Halbdeck und Fockmast; Jäger, Punische Kriege, 3 Theile.

g. Die Zahl der Programme ist auf 6419 gestiegen.

B. Durch Geschenke erwarb die Schule:

Vom Königlichen Provinzial-Schulcollegium: Verhandlungen der zweiten Schlesischen Directoren Conferenz. Vom Königl. Ober-Berg-Amt: Uebersicht über die Producte der Bergwerke, Salinen und Hütten im preußischen Staate. Von Verlagshandlungen: Günther, die deutsche Heldensage des Mittelalters. Schockel, Sammlung franz. Lesestücke; Völkel, Lehrbuch der franz. Sprache. Plötz, Syntax der Formenlehre der franz. Sprache. Sonnenburg, Abstract of English Grammar. Franz the English Spelling-Book; B. W. An abridgment of Ohio; Goldsmith, hist. of England. Hoche, lat. Lesebuch. Beck, kleine lat. Grammatik. Butz, Anfangsgründe der darstellenden Geometrie. Koppe, die sphärische Trigonometrie. Schlömilch, fünfstellige logarithm. und trigonomet. Tafeln. Koppe, Anfangsgründe der algebr. Analysis. Adam, Aufgaben zum schriftlichen und mündlichen Rechnen. Schellen, Aufgaben für das theoretische und practische Rechnen. Wolff, Lehrbuch der allgemeinen Geschichte. Theil II und III und Tabellen. Goldschmidt, Geschichtstabellen. Wachsmann, Sammlung deutscher Kriegs- und Volkslieder. 1. Heft, von Cölln 26 ältere und neuere Vaterlandslieder. — Vom Collegen Dr. Siebeck: Zilter, Jahrb. des Vereins für wissenschaftliche Pädagogik. 2. Jahrgang. — Vom Director Dr. Wiegand die neuesten Ausgaben seiner mathematischen Schriften. — Von der Untersecunda: Aus allen Welttheilen. 1. Jahrgang. Klencke, Alexander v. Humboldts Leben. — Von der Obertertia: A. Berlepsch, die Alpen. W. Alexis, die Hosen des Herrn v. Bredow. — Von der Mitteltertia: Bechstein, altdeutsche Märchen, Siegismund Rüstig, Kreuzwald, Esthnische Märchen, Anderson, auserwählte Märchen, Tellkampf, die Franzosen in Deutschland. — Durch Geldbeiträge verschiedener Schüler: Fritz Reuters Werke, 5 Bde. — Von der Untertertia: Wild, die Thalmühle und Bodenbacher, der Dreyecker. — Von der Oberquarta: Ziethen, Lyu-Payo der Wolfssohn. —

Von dem Oberquartaner Reinhold Engel aus Spergau: Wagner, Entdeckungsreisen auf Feld und Flur. — Von dem Unterquartaner Jäger aus Wolfsburg: Fr. Hoffmann, Kleine Versäumnisse. — Von den Unterquintanern Karmrodt aus Halle: Ferd. Schmidt, der Krieg von 1866. Von Haasengier aus Schraplau: von Horn, Scharnhorst; von Fritsche aus Eisdorf: Würdig, des alten Dessauers Leben und Ferd. Schmidt, von Rheinsberg bis Königgrätz; von Zorn aus Deutleben: Ferd. Schmidt, die Befreiung Schleswig-Holsteins; von Seeliger aus Halle: Ferd. Schmidt, seltsame Abenteuer unter Zwergen und Riesen; von Isbary aus Leina: Nieritz, Närsteffen und sein Sohn; von Pfeiffer aus Wormsleben: Ferd. Schmidt, Kriegsruhm und Vaterlandsliebe; von Fischer aus Neustadt-Magdeburg: Franz Hoffmann, ein Negerleben. — Von den Sextanern Götze aus Wesmar und Jäger aus Wolfsburg: Franz Hoffmann, Hüte Dich vor dem ersten Fehltritte und Was Du thust, thust Du Dir selbst. Von dem Obersecundaner Arnold: Goethe und Schiller von Hettner; von den Untersecundanern Kleemann aus Gatterstedt und Oswald aus Mutschau: den 3. Theil der Literaturgeschichte des 18. Jahrhunderts von Hettner; vom Untersecundaner Steckner aus Merseburg: Funfzig Jahre Deutscher Dichtung von Stern.

Für die naturhistorische Sammlung wurde geschenkt von dem frühern Untersecundaner Knopf eine Sammlung von 25 Petrefacten und vom Herrn Bergwerksdirector Nehmiz ein Mammuthszahn aus dem Diluvialkiese bei Bruckdorf und sechs Hayfischzähne aus dem Schwarzsande daselbst.

Vom Herrn Glasermeister Fritsch wurden der Schule zwei große lackirte Tafeln mit bildlichen Darstellungen aus der vergleichenden Geographie geschenkt.

Von den Schülern der Tertia wurde die Summe von 40 Thlr. 12 Sgr. 9 Pf. gesammelt, welche in Verbindung mit disponibeln Mitteln des Etats im laufenden Jahre zur weitern Vervollständigung des physikalischen Kabinets verwendet werden sollen.

Für alle diese Gaben sprechen wir den freundlichen Gebern den Dank der Schule nochmals aus.

Das Sommersemester beginnt am 18. April. Die Aufnahme-Prüfung der bereits angemeldeten Schüler findet am 17. April von 8 Uhr früh ab im Schulgebäude statt.

Halle, den 5. April 1871.

Dr. Schrader.

1.

Programm

der

Realschule I. Ordnung

im

Waisenhause zu Halle

für

das Schuljahr 1869—1870

vom

Director Dr. Schrader,

Inspector der Realschule.

Inhalt:

Halle,

Buchdruckerei des Waisenhauses.

1870.