Rechenbuch des Abû Zakarijâ el-Hassâr

Überreicht vom Verfasser

Sonderabdruck.

3.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN VON GUSTAF ENESTRÖM.

DRITTE FOLGE.

II. BAND. 1. HEFT.

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
IN LEIPZIG.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

DRITTE FOLGE.

Herausgegeben von **G. Eneström** in Stockholm, Brahegatan 43.
Druck und Verlag von **B. G. Teubner** in Leipzig, Poststrafse 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Recensionsexemplare u. s. w.) wolle man richten an den Herausgeber der Bibliotheca Mathematica:

Herrn G. Eneström, Stockholm (Schweden), Brahegatan 43

oder an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststrafse 3, die um schnellste Weiterbeförderung an die Redaktion besorgt ist.

☞ Die Herren Verfasser erhalten — aufser einem Honorar von 20 Mark für den Druckbogen von 16 Seiten — von gröfseren Aufsätzen 20 mit Umschlag versehene, von kleineren Aufsätzen u. s. w. 10 Sonderabdrücke unentgeltlich, eine gröfsere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Bibliotheca Mathematica umfafst gegen 30 Druckbogen in 3 bis 4 Heften und kostet 20 Mark; jährlich soll zunächst etwa ein Band ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

[Fortsetzung auf Seite 3 des Umschlags.

Sonderabdruck aus Bibliotheca Mathematica. III. Folge. II.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Das Rechenbuch des Abû Zakarîjâ el-Ḥaṣṣâr.

Von Heinrich Suter in Zürich.

In der Bibliotheca Mathematica 13₂ (1899), p. 87 mache ich auf die Wahrscheinlichkeit hin aufmerksam, dass das Gothaer Ms. 1489 (Pertsch, Die arab. Handschriften d. herzogl. Bibl. zu Gotha, 3. Bd. 1883, p. 111) eine Abhandlung über die Rechenkunst von Muhammed b. Abdallâh b. Ajjâš Abû Zakarîjâ, genannt el-Ḥaṣṣâr, enthält, identisch mit der vielmehr das arabische Original sei von Moses b. Tibbon gemachten hebräischen Übersetzung eines Rechenbuches des Muh. b. Abdallâh el-Ḥaṣṣâr, sein könnte, welche Übersetzung noch im Vatican (Nr. 396) und in Oxford (Uri Catal. Cod. Hebr. Nr. 439) vorhanden ist und zuerst von M. Steinschneider¹) beschrieben worden ist; der nach ihrer Vermutung ausgesprochen habe, dass es derselbe sei, den Ibn Chaldûn in seinen Prolegomena erwähnte. El-Ḥaṣṣâr sein, auf diesen doch über der Verfolg des Ibn el-Bannâ bestehen soll. Ich füge daher die Bemerkung hinzu, dass für die endgültige Erledigung dieser Frage eine genauere Prüfung des Gothaer Ms. sehr zu wünschen wäre. Da diese Angelegenheit nicht länger in Schwebe zu lassen, habe ich es selbst übernommen, die genaue Prüfung vorzunehmen. Für die Erlaubnis der Benutzung des Ms. für längere Zeit auf der Kantonsbibliothek Zürich spreche ich hiermit der Verwaltung der herzogl. Bibliothek in Gotha meinen verbindlichsten Dank aus.

Das Rechenbuch des Ḥaṣṣâr umfasst 126 Blätter (19,5 × 13,5 cm), die Seite zu 15 Zeilen, in deutlichem Neskhi geschrieben; aber nicht ganz sorgfältig, denn es kommen bisweilen Auslassungen oder auch Wiederholungen vor; auch besteht, wie sich die Anordnung der Kapitel, das Buch nicht nach einer Unterabteilungen in einer Abschnitt ganz deutlich ist, sondern wie sie im Original gewesen ist, ich bin der Ansicht, dass hie und da Verschiebungen stattgefunden haben. Einen Titel hat das Buch nicht, der Anfang (fol. 1ᵛ) lautet:

1) Abhandl. zur Gesch. der Mathem. 3, 1880, p. 104—110.

Sonderabdruck aus Bibliotheca Mathematica. III. Folge. II.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Das Rechenbuch des Abû Zakarîjâ el-Ḥaṣṣâr.

Von HEINRICH SUTER in Zürich.

In der Biblioth. Mathem. $\mathbf{13}_2$ (1899), p. 87 habe ich auf die Wahrscheinlichkeit hingewiesen, dafs das Gothaer Ms. 1489 (PERTSCH, *Die arab. Handschriften d. herzogl. Bibl. zu Gotha*, 3. Bd., 1881, p. 114), das eine Abhandlung über die Rechenkunst von MUḤAMMED B. ʿABDALLÂH B. ʿAIJÂŠ ABÛ ZAKARÎJÂ, genannt EL-ḤAṢṢÂR, enthält, identisch mit oder vielmehr das arabische Original einer von MOSES B. TIBBON gemachten hebräischen Übersetzung eines Rechenbuches des MUḤ. B. ʿABDALLÂH ABÛ BEKR, genannt EL-ḤAṢṢÂR, sein könnte, welche Übersetzung noch im Vatican (Nr. 396) und in Oxford (Christ Church Coll. Nr. 189) vorhanden ist, und zuerst von M. STEINSCHNEIDER beschrieben worden ist[1]), der auch zuerst die Vermutung ausgesprochen hat, der Autor möchte der von IBN CHALDÛN in seinen Prolegomena erwähnte EL-ḤAṢṢÂR sein, auf dessen Rechenbuch der *Talchîṣ* des IBN EL-BENNÂ basieren soll. Ich habe dabei die Bemerkung hinzugefügt, für die endgültige Erledigung dieser Frage wäre eine genauere Prüfung des Gothaer Ms. sehr zu wünschen. Um diese Angelegenheit nicht länger in Schwebe zu lassen, habe ich nun selbst diese genaue Prüfung unternommen. Für die Erlaubnis der Benutzung des Ms. für längere Zeit auf der Kantonsbibliothek in Zürich spreche ich hiermit der Verwaltung der herzogl. Bibliothek in Gotha meinen verbindlichsten Dank aus.

Das Rechenbuch des ḤAṢṢÂR umfafst 128 Blätter (18, 5 $\times$ 13, 5 cm), die Seite zu 15 Zeilen, in deutlichem Neschî geschrieben, aber nicht ganz sorgfältig, denn es kommen bisweilen Auslassungen oder auch Wiederholungen vor; auch bezweifle ich, dafs die Anordnung der Kapitel, besonders aber ihrer Unterabteilungen in dieser Abschrift ganz dieselbe sei, wie sie im Original gewesen ist, ich bin der Ansicht, dafs hie und da Verschiebungen stattgefunden haben. Einen Titel hat das Buch nicht, der Anfang (fol. 1^{b}) lautet:

1) Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **3**, 1880, p. 109—110.

„Im Namen Gottes des Barmherzigen und Gnädigen, mein Herr, erleichtere (meine Aufgabe), oh du Gütiger! Es spricht der Meister Abû Zakarîjâ Muḥammed b. ʿAbdallâh, bekannt unter dem Namen el-Ḥaṣṣâr[1]); Lob sei Gott etc. .... Möge Gott uns das Richtige eingeben und uns bewahren vor dem Zweifel (der Unsicherheit)! Nachdem ich die Erfahrung gemacht habe (wörtl. „gesehen habe"), daſs die Wissenschaften und die (schöne) Litteratur zur Grundlage die Wissenschaft der Zahl haben, (natürlich) nach Gott und den göttlichen Dingen, so habe ich über die Zahl ein Werk verfaſst, und habe darin auf jede subtile Frage meine Achtsamkeit gerichtet, damit es den Anfängern Einsicht verschaffe und den Geübten zur Erinnerung (Auffrischung) diene. Und alles, was ich in diesem Buche zusammengestellt, beschrieben und erklärt habe, das stammt aus den Darlegungen der älteren Gelehrten, und ich habe es entnommen aus den Büchern der Vorfahren, habe es gesammelt, kommentiert, und habe es mit ihren sicheren Schlüssen (Beweisverfahren) gefunden und abgeleitet. Und zu Gott flehe ich um Bewahrung vor Irrtum, und ihn bitte ich um Beistand für die Richtigkeit des Ausdruckes und der Ausführung (der Operationen): es giebt keinen Meister auſser ihm, und kein Gutes auſser dem Guten von ihm!"

Der Verfasser des Gothaer Handschriftenkatalogs, W. Pertsch, sagt in seiner Beschreibung unserer Handschrift (l. c. p. 115), die Abhandlung breche auf fol. 128[b] ab, ohne beendet zu sein, und am Schlusse der Beschreibung bemerkt er, die Handschrift sei nicht datiert. Beides ist unrichtig; die Abhandlung el-Ḥaṣṣârs schlieſst auf fol. 128[a] mit den Worten: „Beendigt ist das gesegnete Buch mit dem Lobe Gottes, seiner Hilfe und seiner Gunst (Auszeichnung) etc. .... Schluſs (der Abschrift) am Dienstag den 13. Muḥarrem des Jahres 836" (9. Sept. 1432). — Was auf fol. 128[b] steht, gehört nicht mehr zur Abhandlung el-Ḥaṣṣârs, es ist eine in das Gebiet der Rechtswissenschaft gehörende Aufgabe über den gesetzlichen Almosenzehnten (*el-zakât*); sie ist allerdings von der gleichen Hand geschrieben wie das vorhergehende, was den Verfasser des Katalogs zu dem erwähnten Irrtum geführt haben wird.

Es folgen dann nach einem leeren Blatt zehn Blätter (130—139) mit Bruchstücken aus einer ebenfalls arithmetischen Abhandlung, mit ostarabischen Ziffern und von verschiedenen Händen geschrieben; vielleicht sind es Teile aus der Sachâwîschen Abhandlung, d. h. aus dem Rechen-

1) Der Schluſsbuchstabe ist zerstört, aber es ist zweifellos, daſs derselbe ein *r* war; auf fol. 1[a] steht auch mit roter Tinte geschrieben: *el-ḥaṣṣâr fî'l-ḥisâb* (el-Ḥaṣṣâr über die Rechenkunst); was die Bedeutung von el-Ḥaṣṣâr (= der Schilfmattenflechter) anbetrifft, so vergleiche, was ich darüber in der Biblioth. Mathem. l. c. gesagt habe.

buch des ʿAbdelqâdir b. ʿAlî el-Sachâwî[1]), da auf fol. 1ª unterhalb der rot geschriebenen Worte „*el-ḥaṣṣâr fî'l-ḥisâb*" noch die schwarz geschriebenen „*el-sachâwîje fîʿilm el-ḥisâb*" (die Sachâwîsche Abhandlung über die Rechenkunst) stehen.

Eine vollständige Wiedergabe dieser umfassendsten Abhandlung über arabische Rechenkunst, die auf uns gekommen ist, hätte zu groſsen Zeitaufwand erfordert; ich gebe daher im folgenden nur eine Übersicht über den Inhalt derselben, werde aber immerhin gewisse Kapitel und Stellen, die für die Geschichte der arabischen Rechenkunst von Bedeutung und Interesse sind, dem Leser in wortgetreuer Übersetzung vorführen. Nach der oben gegebenen Einleitung fährt der Verfasser fort:

„Ich habe dieses Buch in Kapitel eingeteilt: das erste Kapitel handelt über die Operationen mit ganzen Zahlen, das zweite über die Operationen mit Brüchen. Was das erste Kapitel betrifft, das über die Operationen mit ganzen Zahlen handelt, so ist dasselbe wieder in zehn Teile[2]) geteilt: der erste handelt über die Stufen (Ordnungen) der Zahlen und ihre Namen; der zweite über die Ġobârzeichen und ihre Wertänderung nach den Stufen der Zahlen; der dritte über die Addition (*ǧamʿ*) der Zahlen; der vierte über die Subtraktion (*ṭarḥ*); der fünfte über die Multiplikation (*ḍarb*); der sechste über die Benennung (*tasmije*)[3]); der siebente über die Division (*qisme*); der achte über die Halbierung (*tanṣîf*); der neunte über die Verdoppelung (*taḍʿîf*); der zehnte über die Radizierung (*taǧḏîr*).

[fol. 2ª] *Erstes Kapitel.* Erster Teil: „Über die Stufen der Zahlen[4]) und ihre Namen und ihren Ursprung. Wisse, das es zwölf Zahlennamen[5]) giebt; der erste ist das Eins, welches der Ursprung und der Anfang der Zahl ist; füge hierauf zu dem Eins wieder Eins hinzu, so entsteht das Zwei, dieses ist die erste Zahl, denn das Eins ist keine Zahl, das Zwei ist die erste Zusammensetzung (also die erste Zahl); hierauf füge zu dem Zwei wieder Eins hinzu, so wird diese Zahl Drei genannt"... So geht es fort bis zu Neun, dann heiſst es weiter: „Und diese neun Zahlen heiſsen die Einer, diese bilden die erste Stufe; alsdann füge zu dem Neun Eins hinzu, so heiſst das Resultat Zehn, und dieses ist der

---

1) Vgl. Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*, p. 193.

2) Der Verfasser braucht hier für diese Unterabteilungen das Wort *aqsâm* (= Teile), im Text sind aber nachher alle diese Abteilungen wieder mit *bâb* (= Kapitel) überschrieben, was die Übersichtlichkeit stört.

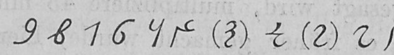
3) „Dénomination" in der Übersetzung des *Talchîṣ* durch A. Marre.

4) Hier steht im Text der Singular.

5) Nämlich die Namen der Zahlen von 1 bis 9, dann die Namen für 10, 100 und 1000, aus diesen zwölf Namen werden alle Zahlennamen gebildet.

erste Rang (*manzile*) der Zehner, sie nimmt unter den Zehnern dieselbe Stellung ein, wie das Eins unter den Einern; hierauf füge zu dem Zehn ein zweites Zehn hinzu, so erhältst du Zwanzig, dies ist ein Name, der entnommen (zusammengesetzt) ist aus (den Namen) Zwei und Zehn", etc. . . . So geht es fort durch alle Zehner, dann durch die Hunderter und Tausender[1]) (hier nicht mehr vollständig durchgeführt) bis fol. 4ᵃ, Zeile 5 v. o., hier folgt ein kleiner Abschnitt (*faṣl*), welcher beginnt: „Und da die Einer die erste Stufe bilden, so sagt man, ihr Index[2]) (*ass* oder *uss* = Grundlage, Spur) sei Eins, ebenso der Index der Zehner sei Zwei, derjenige der Hunderter Drei etc. . . . „Und die Männer der Rechenkunst nennen dieses Kapitel der Zahlenstufen auch das Kapitel des *Ass*."

[fol. 4ᵃ] Zweiter Teil: „Über die Ġobârzeichen und ihre Wertänderung nach den Stufen der Zahlen. Wisse, dafs die Männer der Rechenkunst neun Ġobârzeichen verwenden, welche folgende verschiedene Formen haben[3]):



Nun folgt fol. 4ᵇ—6ᵇ eine weitere Ausführung über die Darstellung mehrstelliger Zahlen mit Hinzuziehung der Null (0 = *ṣifr*), welche wir, da sie nichts Bemerkenswertes bietet, übergehen.

[fol. 6ᵇ] Dritter Teil: „Über die Addition der Zahlen." Hierzu ist nur zu bemerken, dafs die Summe, wie allgemein bei den Arabern *über* die Summanden geschrieben wird, und dafs el-Ḥaṣṣâr die Addition mit der niedersten Stelle beginnt.

[fol. 8ᵇ] Vierter Teil: „Über die Subtraktion der Zahlen." Diese Operation wird mit der höchsten Stelle begonnen im Gegensatz zur Addition, und was sehr interessant ist, auch im Gegensatz zu el-Qalaṣâdî. El-Ḥaṣṣâr folgt also in Bezug auf die Subtraktion noch der älteren Methode der Ostaraber, wie des Muhammed b. Mûsâ el-Chowârezmî, während er bei der Addition schon den bequemern Weg eingeschlagen hat. Ibn el-Bennâ[4]) erwähnt beide Wege, fügt aber bei der Addition hinzu, man be-

1) Aus dieser Ausführlichkeit der Darstellung kann man wohl den Schlufs ziehen, dafs dieses Buch in erster Linie ein für Anfänger im Rechnen, für Schüler bestimmtes Lehrbuch war.

2) Ich brauche hier absichtlich nicht das Wort „Exponent", das Andere dafür gesetzt haben, weil es sich nicht mit diesem Begriffe deckt, allerdings braucht el-Qalaṣâdî auch für den Exponenten einer Potenz das Wort *ass*.

3) Ich gebe diese Ziffern wieder, da sie etwas abweichen von den Ġobârziffern, die uns M. Cantor im 1. Bd. seiner *Vorlesungen* vorgeführt hat; die Zeichen für 2 und 3 nähern sich im Verlaufe der Darstellung mehr den Formen in den Klammern, also den heutigen.

4) Vergl. *Le Talkhys d'*Ibn Albannâ, *publ. et trad. par* Ar. Marre. Extrait des Atti dell' Accad. pontif. de' nuovi Lincei, T. XVII, Rome 1865, p. 3 und 8.

ginne am meisten mit der niedersten Stelle, bei der Subtraktion aber, man beginne am meisten mit der höchsten im Gegensatz zur Addition, er hat sich also noch nicht ganz von EL-ḤAṢṢÂR emanzipiert; dagegen steht EL-QALAṢÂDÎ schon auf dem modernen Boden, er beginnt bei beiden Operationen mit der niedersten Stelle.

[fol. 10ᵃ] Fünfter Teil: „Über die Multiplikation.“ Dieser Teil zerfällt in 10 Unterabteilungen, welche ebenfalls wieder wie die Hauptkapitel und die Teile Kapitel (*bâb*) genannt werden. In diesen werden zuerst einstellige Zahlen miteinander multipliziert, d. h. das Einmaleins wird vollständig in Worten durchgeführt, die Tafel, die sich bei IBN EL-BENNÂ (l. c. p. 17) befindet, fehlt hier; dann folgen Multiplikationen von zweistelligen mit einstelligen Zahlen, von zweistelligen mit zweistelligen, u. s. f. Ich gebe im folgenden eine Stelle aus der 10. Unterabteilung in Übersetzung wieder:

„Wenn zu dir gesagt wird, multipliziere 43 mit 76[1]), so setze das 43 in eine Zeile, wie es früher gemacht wurde, hierauf das 76 in eine andere Zeile darunter, und zwar so, daſs die erste (niederste) Stelle der untern Zeile unter die letzte (höchste) Stelle der obern Zeile zu stehen kommt, und die zweite Stelle der untern Zahl zur Linken der ersten, nach folgender Weise (Figur): $\begin{array}{l}\;\;43\\ 76\end{array}$, hierauf multipliziere die letzte Stelle der obern Zahl mit der letzten der untern, d. h. 4 mit 7, dies giebt 28, und setze das 8 genau über das 7 in die Zeile über dem 43, und das zwei links von dem 8; dann multipliziere dasselbe 4 mit dem 6 unter ihm, dies giebt 24, setze das 4 über das 4 der obern Zeile und das 2 addiere zu dem 8, das über dem 7 steht, dies giebt 10, lösche also das 8 aus und setze an seine Stelle eine Null, und füge zu dem 2, das zuvorderst ist, 1 hinzu, dies giebt 3, lösche das 2 aus und setze an seine Stelle das 3; hierauf verschiebe die untere Zahl um eine Stelle nach rechts, so daſs das 6 unter das 3 und das 7 unter das 4 zu stehen kommt; hierauf multipliziere das 3 der obern Zahl mit dem 7 der untern, dies giebt 21, füge dazu das 4, das über dem 4 der obern Zeile steht, dies giebt 25, dann lösche das 4 aus und setze an seine Stelle das 5, das 2 setze an die Stelle der Null, die vor dem 4 stand; hierauf multipliziere das 3 mit dem 6 unter ihm, dies giebt 18, setze das 8 über das 3 der obern Zeile[2]), und füge das 1 zu dem 5 hinzu, dies giebt 6, lösche das 5 aus, und setze an seine Stelle das 6, so ist das Resultat der Multiplikation 3268.“

Da das Auslöschen der Ziffern im Druck nicht leicht zu bewerk-

---

1) Alle Zahlen sind mit Worten ausgeschrieben, nur der ursprüngliche Ansatz der beiden Faktoren und das Schluſsresultat sind in Ġobârziffern hingeschrieben.

2) Der Text hat hier unrichtig „lösche das 3 aus und setze an seine Stelle das 8“.

stelligen ist, so lasse ich die Darstellung dieses Multiplikationsbeispiels in Ziffern weg, es kann sich diese Jeder leicht selbst konstruieren. Ich will hier nur darauf aufmerksam machen, dafs dieses Multiplikationsverfahren mit dem von EL-QALAṢÂDÎ[1]) zuerst beschriebenen im wesentlichen übereinstimmt, doch kennt dieser kein Auslöschen der Ziffern mehr, sondern setzt die einzelnen Teilprodukte über einander und erhält durch Addition derselben das Schlufsresultat. EL-ḤAṢṢÂR hat also wohl noch mit der Staubtafel gerechnet, wo das Auslöschen der Ziffern leicht auszuführen war, EL-QALAṢÂDÎ wahrscheinlich nicht mehr, sondern nur auf Papier. Eigentümlich ist es auch, dafs EL-ḤAṢṢÂR in diesem so ausführlichen Rechenbuch die Netzmethode der Multiplikation nicht erwähnt, vielleicht ist sie blofs durch die Abschreiber weggelassen worden.

[fol. 14ᵃ] Sechster Teil: „Über die Benennung, d. i. die Teilung des Kleineren durch das Gröfsere.[2]) Wisse, dafs diesem Kapitel eine Einleitung vorhergehen mufs, deren Kenntnis für den Studierenden notwendig ist; dieses Kapitel ist von grofsem Nutzen in allen Rechnungsoperationen, mit seiner Hülfe wird bei jeder ausgeführten Multiplikation die Richtigkeit derselben gefunden, ferner erkannt, ob eine Zahl zusammengesetzt oder nicht zusammengesetzt sei; eine zusammengesetzte Zahl ist nämlich eine solche, welche aus der Multiplikation einer zusammengesetzten Zahl mit einer zusammengesetzten oder nicht zusammengesetzten entstanden ist[3]); die nicht zusammengesetzte Zahl ist eine solche, die keinen Teiler aufser Eins besitzt. — Einleitung in die Benennung[4]): Ihr Studium (wörtl. „Verehrung") ist von Nutzen für den Studierenden. Wisse, dafs jede Zahl, die keine Einer hat, durch 10 teilbar ist (wörtl. „einen Zehntel besitzt"); ferner, dafs die Zahlen in gerade und ungerade eingeteilt werden. Was die gerade Zahl anbetrifft, so wird sie entweder durch wiederholte Subtraktion von 9 erschöpft (*inṭaraha* = weggeworfen), dann ist sie durch 9 teilbar, oder sie wird nicht erschöpft und der Rest ist 3 oder 6, dann ist sie durch 6 teilbar; bleibt aber ein anderer Rest, so subtrahiere von der Zahl wiederholt 8, wird sie erschöpft, so ist sie durch 8 teilbar, wenn nicht und der Rest ist 4, so ist sie durch 4 teilbar; bleibt [fol. 14ᵇ] aber ein anderer Rest, so subtrahiere von der Zahl wiederholt 7, wird sie

1) *Traduction du traité d'arithmétique d'*ABOÛL HASAN ALÎ B. MOHAMMED ALKALÇADÎ, *par* F. WOEPCKE; Extrait des Atti dell' Accad. pontif. de' nuovi Lincei, T. XII, Rome 1859, p. 9 und 10.

2) In einem neueren Rechenbuch, verfafst von BUṬRUS EL-BISTÂNÎ, Beirût 1859 (p. 165), finde ich folgende Bemerkung: „Diese (Art der) Teilung nennen die Magrebiner (Westaraber) „die Benennung", die Perser aber „das Verhältnis" (*el-nisbe*).

3) Es ist dies nicht korrekt ausgedrückt, der Text scheint hier verdorben zu sein.

4) Im Text steht hier wohl unrichtig „Multiplikation".

erschöpft, so ist sie durch 7 teilbar, wenn nicht, so ist sie nur durch 2 teilbar. — Was die ungerade Zahl anbetrifft, so wird sie entweder durch wiederholte Subtraktion von 9 erschöpft, dann ist sie durch 9 teilbar, oder sie wird nicht erschöpft und der Rest ist 3 oder 6, dann ist sie durch 3 teilbar; bleibt aber ein anderer Rest, so subtrahiere von der Zahl wiederholt 7, wird sie erschöpft, so ist sie durch 7 teilbar, wenn nicht, so versuche es mit den stummen Teilen[1]), du findest es, so Gott will; merke dir aber noch, daſs jede Zahl, die am Ende ein 5 hat, durch 5 teilbar ist. — Kapitel der Neunersubtraktion: Wisse, daſs bei (wiederholter) Subtraktion von 9 von jedem Zehner 1, von jedem Hunderter 1, von jedem Tausender 1 übrig bleibt; deshalb nimmst du jede Zahl (d. h. Ziffer) nach ihrem Namen (ohne Stellenwert)[2]), wie es gemacht wurde bei der Multiplikation.[3]) — Kapitel der Achtersubtraktion: Wisse, daſs bei (wiederholter) Subtraktion von 8 von jedem Zehner 2, von jedem Hunderter 4 übrig bleibt, daſs die geraden Hunderter durch 8 teilbar sind, also auch die Tausender und was nach ihnen kommt.[4]) — Kapitel der Siebnersubtraktion: Wisse, daſs bei (wiederholter) Subtraktion von 7 von jedem Zehner 3, von jedem Hunderter 2, von jedem Tausender 6, von jedem Zehntausender 4, von jedem Hunderttausender 5, von jedem Millioner 1, von jedem Zehnmillioner [fol. 15a] wieder 3 übrig bleibt, d. h. es kehren nach je zwei *Tekrâr*[5]) die gleichen Reste wieder; wisse also, daſs bei jedem Tausender, dessen Wiederholungszahl (*tekrâr*) ungerade ist, der Rest 6 beträgt, dagegen bei jedem Tausender, dessen Wiederholungszahl gerade ist, der Rest 1 ist, daſs ferner bei jedem Zehntausender mit ungerader Wiederholungszahl der Rest 4, bei jedem Zehntausender mit gerader Wiederholungszahl 3 beträgt", etc. — Der Schluſs dieser Einleitung lautet: „Wisse ferner, daſs eine Zahl, die nicht durch 2 teilbar ist, es auch nicht durch 4 und 8 sein kann; daſs eine Zahl, die nicht durch 3 teilbar ist, es auch nicht durch 6 und 9 sein kann, und daſs jede Zahl, die nicht durch 5 teilbar ist, es auch nicht durch 10 sein kann."

---

1) So muſs es heiſsen nach EL-QALAṢÂDÎ, d. h. „versuche, ob 11, 13 etc. Teiler der betr. Zahl seien", und nicht *fî'l-uchrâ* (= mit der andern), wie es im Text EL-ḤAṢṢÂRS steht.

2) Vgl. IBN EL-BENNÂ (l. c. p. 9), wo es heiſst: „tu prends la valeur des sièges, comme s'ils étaient des unités."

3) d. h. bei der Anwendung der Neunerprobe in der Multiplikation.

4) Hier und bei der Siebnersubtraktion fehlt die Anwendung dieser Restregeln auf die Bestimmung des Restes einer mehrstelligen Zahl, es fehlt auch am Schlusse dieser Einleitung die Anwendung des Gesagten auf die verschiedenen Proben.

5) d. h. „Wiederholung"; so heiſst jede Gruppe von je 3 Stellen einer Zahl; M. CANTOR hat „*takarrur*", was auch „Wiederholung" bedeutet, allein sowohl IBN EL-BENNÂ als auch EL-ḤAṢṢÂR haben *tekrâr*.

„Nach dieser Einleitung kehren wir zum Kapitel der Benennung zurück, d. h. zur Bildung des Verhältnisses einer kleineren Zahl zu einer gröſseren, (zur Untersuchung) ob jene ein Teil oder mehrere von dieser sei. Wenn z. B. zu dir gesagt wird, benenne eins nach fünfzehn, so hast du nun gelernt, daſs fünfzehn eine zusammengesetzte [fol. 15ᵇ] Zahl ist, und zwar entstanden aus der Multiplikation von drei mit fünf, also ist drei ein Fünftel von ihr, und fünf ein Drittel von ihr, und eins ist ein Drittel von drei, also ist eins der Drittel des Fünftels von fünfzehn. Es ist notwendig, daſs hier noch einleitend etwas hinzugefügt werde; ich sage also: das Verhältnis von 1 zu 2 heiſst ein Zweitel, dasjenige von 1 zu 3 ein Drittel, das von 2 zu 3 zwei Drittel, das von 1 zu 4 ein Viertel, das von 2 zu 4 zwei Viertel oder ein Zweitel“, etc. .... So geht es fort bis zu neun Zehntel, womit diese Einleitung beendigt ist. Dann folgt: „Ich sage also, daſs eins ein Drittel des Fünftels von fünfzehn ist, wenn du nun diese Benennung durch Ġobârzeichen (wörtl. „durch den *Ġobâr*“) darstellen willst, so schreibe dies so: $\frac{\quad 1}{5\ 3}$.[1]) Willst du nun eine andere Zahl nach 15 benennen, so setze sie über das 3 (den einen Faktor von 15), dann suche eine Zahl, die mit 3 multipliziert entweder die gegebene Zahl ergiebt, oder ein Produkt, das von jener Zahl subtrahiert einen Rest kleiner als 3 läſst. Soll z. B. 7 nach 15 benannt werden, so setze das 7 über das 3, hierauf suche eine Zahl, die mit drei multipliziert entweder 7 ergiebt, oder eine Zahl, die um weniger als 3 kleiner ist als 7, du findest diese Zahl gleich 2, nun setze dieses 2 über das 5, multipliziere 2 mit 3, dies giebt 6, subtrahiert von 7 bleibt 1, dieses setze nach dem 2 über das 3, so daſs du nun 2 über 5 und 1 über 3 hast; ziehe also eine Linie, schreibe unter sie das 5 und das 3, und zwar das 5 rechts vom 3, dann über das 5 das 2 und über das 3 das 1, so wird dies ausgesprochen: zwei Fünftel und ein Drittel eines Fünftels; du benennst also immer das, was über dem gröſsern Faktor des Nenners steht, nach diesem, und hierauf das, was über dem kleinern Faktor steht, nach diesem und dem gröſsern, der ihm vorangeht; geschrieben wird es:

$$\frac{2\quad 1}{5\quad 3}\,{}^{2})$$

---

1) Diese Form ist im Text weggelassen (wahrscheinlich durch die Abschreiber), an ihrer Stelle steht eine überflüssige Darstellung, welche klar machen soll, daſs man die Zerlegung von 15 in 5 mal 3 in der Tafel des Einmaleins (die aber bei el-Ḥaṣṣâr fehlt) finden könne.

2) Ich gebe diese Brüche und alle folgenden in unserer Schreibweise; nach arabischer, wo von rechts nach links gelesen wird, ist also der obige Bruch geschrieben $\frac{1\quad 2}{3\quad 5}$; bekanntlich kann dies auch in Form eines aufsteigenden Kettenbruches geschrieben werden, nämlich $\frac{2+\frac{1}{3}}{5}$ (vgl. Cantor, *Vorlesungen* I, 764—765, 2. Aufl.).

Hierauf wird 11 nach 15 benannt, oder $\frac{11}{15}$ zerlegt in $\frac{3}{5} + \frac{2}{5 \cdot 3}$, geschrieben $\frac{3\ 2}{5\ 3}$; dann wird 1 nach 96 benannt, oder $\frac{1}{96}$ dargestellt als die Hälfte eines Sechstels eines Achtels geschrieben $\frac{\quad 1}{8\ 6\ 2}$ [1]); u. s. w.

[fol. 18ᵃ] Siebenter Teil: „Über die Division der Zahlen.“ Dieses Kapitel wird sehr rasch abgethan, es ist nur wenig umfangreicher als im *Talchîṣ*, allerdings enthält der letztere unter dem Kapitel der Division auch die Benennung und die Zerlegung der Zahlen in Faktoren, welche hier in einem besondern Teil behandelt werden. El-Ḥaṣṣâr unterscheidet zuerst zwei Fälle der Division, diejenige von ganzen Zahlen durch ganze Zahlen, und diejenige von ganzen Zahlen durch Brüche oder umgekehrt; bei beiden sagt er, handelt es sich darum, zu finden, was es auf die Einheit trifft. Hier wird nun bloſs die Division von ganzen Zahlen durch ganze Zahlen behandelt, der andere Teil gehört in das Kapitel über die Brüche. Zuerst kommt das Beispiel: „Es soll zwanzig durch vierzig geteilt werden; benenne eins nach vierzig, dies ist ein Vierzigstel (ein Viertel eines Zehntels), dann nimm einen Vierzigstel von Zwanzig, das ist ein Zweitel, und dies trifft es auf die Einheit (wörtl. „auf jedes Eins, oder jeden Einzelnen, von den Vierzig“)“.[2])

Nun folgen einfache Divisionen, zweistellige Zahlen durch ein- und zweistellige, dreistellige durch einstellige, z. B. 854 durch 3 gleich $284\frac{2}{3}$; hierzu folgt eine Siebnerprobe, die darin besteht, daſs gezeigt wird, daſs sowohl Dividend als Quotient durch 7 teilbar sind. — Dann wird 98746 durch 36 geteilt, indem 36 in $4 \cdot 9$ zerlegt wird, das Resultat wird geschrieben: $2742\frac{8\ 2}{9\ 4} = 2742 + \frac{8}{9} + \frac{2}{36}$ [3]); auch hier [fol. 20ᵇ] folgt die Siebnerprobe: Der Dividend giebt den Rest vier; beim Quotienten wird so verfahren: die ganze Zahl giebt den Rest 5, multipliziere dieses mit dem Rest, der sich aus (der Division von) 9 ergiebt und welcher 2 ist, dies giebt 10, von diesem ist der Rest 3, zu diesem füge hinzu den Rest, der sich aus (der Division von) 8 ergiebt, also 1, dies giebt 4, multipliziere

---

1) Eigentlich sollte sowohl über dem 6 als über dem 8 eine Null stehen, wie dies auch bei gewissen Bruchformen später der Fall ist, also: $\frac{0\ 0\ 1}{8\ 6\ 2} = \frac{0}{8} + \frac{0}{8 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 6 \cdot 2}$.

2) Eigentümlicherweise tritt hier in der Division noch ein Beispiel der Benennung auf; wir denken uns, el-Ḥaṣṣâr habe sich diesen Fall so vorgestellt, es sollen z. B. zwanzig Dinare unter vierzig Personen verteilt werden, so trifft es auf jede Person einen halben Dinar; einen solchen Fall rechnete el-Ḥaṣṣâr zur Division und nicht zur Benennung. Gelegentlich sei hier noch bemerkt, daſs wir heutzutage statt „Benennung“ vielleicht sagen würden „Bruchbildung“ oder „Entstehung des Bruches“.

3) Es wird nicht oder nur sehr selten abgekürzt, der Bruch $\frac{8\ 2}{9\ 4}$ könnte nämlich abgekürzt geschrieben werden $\frac{8\ 1}{9\ 2}$, dann aber könnte die Siebnerprobe nicht in der Weise ausgeführt werden, wie es unmittelbar nachher geschieht.

dieses mit dem zweiten Faktor 4 des Nenners, dies ergiebt 16, von diesem ist der Rest 2, dazu füge das 2 über dem 4, giebt 4, also denselben Rest wie beim Dividenden, also ist die Division richtig.[1]) — Weitere Divisionen mit mehrstelligem Divisor folgen nicht.

[fol. 21ᵇ] Achter Teil: „Über die Halbierung." Hier wird z. B. 8764 durch 2 geteilt, genau so wie durch irgend eine andere einstellige Zahl, und wir begreifen heute nicht mehr, wie man diese Halbierung, die wahrscheinlich ägyptischen Ursprungs ist, so lange als besondere Operation beibehalten konnte; hier lehnt sich EL-ḤAṢṢÂR in der That noch eng an die Alten an, und zwar nach unserer Kenntnis der älteren Werke, an MUḤAMMED B. MÛSÂ[2]) und EL-NASAWÎ, EL-KARCHÎ hat Halbierung und Verdoppelung nicht mehr berücksichtigt; auch der Epitomator EL-ḤAṢṢÂRS, IBN EL-BENNÂ, und EL-QALAṢÂDÎ haben diese Operationen nicht mehr aufgenommen.[3])

[fol. 22ᵇ] Neunter Teil: „Über die Verdoppelung." Von dieser ist das gleiche zu sagen wie von der Halbierung, sie wird etwas kürzer abgethan, immerhin mit einem Beispiel.

Zehnter Teil: „Über die (Quadrat-)Wurzelausziehung aus Zahlen. Wisse, daſs die zu radizierenden Zahlen die Quadratzahlen sind[4]), und deren Ursprünge (Grundlagen) sind die Wurzeln. Wisse auch, daſs die Zahlstufen teils Wurzeln besitzen, teils keine solchen; so hat es unter den Einern solche, die Wurzeln haben, z. B. 1, 4 etc., unter den Zehnern hat es keine, die Wurzeln besitzen, unter den Hunderten hat es wieder solche, so z. B. ist die Wurzel aus 100 gleich 10, u. s. f. Wenn du nun wissen willst, wie man aus einer Quadratzahl die Wurzel ziehe, so fange bei den Einern an und sage: diese haben Wurzeln, die Zehner nicht, die Hunderter haben solche, u. s. w.; wenn nun die letzte Stelle eine solche ist, die eine Wurzel hat, so fange bei ihr an, wenn nicht, so kehre um eine Stelle zurück, d. h. nimm die rechts von ihr liegende dazu und suche nun eine Zahl, die mit sich selbst multipliziert die beiden zusammen genommenen Zahlen verschwinden macht, oder aber noch einen Rest übrig läſst[5]);

---

1) Diese Restbestimmung des Quotienten ergiebt sich aus folgender Schreibweise desselben: $\frac{(2742 \cdot 9 + 8)\, 4 + 2}{36}$.

2) EL-ḤAṢṢÂR zeigt immerhin, wie wir dies auch bei der Addition gesehen haben, einen Fortschritt gegenüber MUḤ. B. MÛSÂ, als er die Halbierung mit der höchsten Stelle beginnt statt mit der niedersten.

3) Bekanntlich sind sie auch ins latein. Mittelalter übergegangen, was wohl den groſsen Einfluſs der Schriften des MUḤ. B. MÛSÂ und JOH. HISPALENSIS beweist.

4) Es handelt sich in diesem Teil nur um rationale Wurzeln, die andern kommen später.

5) Diese Eventualität ist im Texte weggelassen, der leider in dieser allgemeinen Darstellung des Verfahrens etwas fehler- und lückenhaft ist.

hierauf verdoppele die Zahl, die du mit sich selbst multipliziert hast, und stelle das Resultat um eine Stelle weiter nach rechts, dann suche eine Zahl, die du zur Rechten der vorigen setzest, und die, wenn du sie mit der verdoppelten Zahl multiplizierst und ebenso mit sich selbst, alles verschwinden macht, was von der ursprünglichen Zahl übrig geblieben, dann [fol. 23b] ist das Verfahren zu Ende. Willst du z. B. die Wurzel aus 625 haben, so bestimme zuerst die oberste Stelle, welche eine Wurzel hat, diese ist 6, suche dann eine Zahl, die mit sich selbst multipliziert, das 6 verschwinden macht, oder einen Rest übrig läſst, der kleiner ist als sie (?), du findest diese Zahl gleich 2, multipliziere dieses mit sich selbst, giebt 4, subtrahiere dieses von 6, bleibt 2, setze dieses an die Stelle des 6; hierauf verdoppele das 2, das du mit sich selbst multipliziert hast, dies giebt 4, und setze es um eine Stelle weiter nach rechts unter das (zweite) 2; dann suche eine Zahl, die du unter das 5 setzest, und die mit dem 4 multipliziert und ebenso mit sich selbst multipliziert, die noch vorhandene Zahl verschwinden macht, du findest diese Zahl gleich 5, multipliziere sie also mit 4, giebt 20, dies von 22 subtrahiert bleibt 2, dann multipliziere 5 mit sich selbst, giebt 25, subtrahiere dieses von den 25, welche über ihm stehen, so verschwinden diese; nun halbiere die vorher verdoppelte Zahl wieder und lasse die Hälfte an derselben Stelle stehen, so hast du als Wurzel 25."

Da hier noch Ziffern durchgewischt werden, so ist die Darstellung des Verfahrens durch Ziffern etwas verschieden von der des QALAṢÂDÎ (l. c. p. 38), nämlich folgendermaſsen: Zuerst steht die Zahl 625 da, nachdem das Quadrat von 2[1]) von 6 abgezogen ist und der Rest 2 an Stelle des 6 gesetzt ist, hat man die Zahl 225 auf der Tafel; das 2 wird verdoppelt und das 4 unter das zweite 2 gesetzt, also: $\begin{array}{ccc}2&2&5\\&4&\end{array}$, 4 in 22 geteilt giebt 5, dieses wird hinter das 4 gesetzt, also: $\begin{array}{ccc}2&2&5\\&4&5\end{array}$, nun 5 mal 45 von 225 abgezogen, bleibt Null, dann zuletzt das 4 halbiert, und an seine Stelle die Hälfte 2 gesetzt, so hat man die Wurzel 25.

[fol. 24a] Die nächste Wurzelausziehung ist diejenige aus 583696, die Darstellung des Verfahrens durch Ziffern ist nach der Beschreibung folgende: zuerst steht die Zahl 583696 da, nachdem das Quadrat von 7 von 58 abgezogen ist und der Rest 9 an Stelle von 58 gesetzt ist, steht die Zahl 93696 da; hierauf verdoppelt man das 7, giebt 14, und setzt dieses unter das 93, also: $\begin{array}{ccccc}9&3&6&9&6\\1&4&&&\end{array}$, dann dividiere man 93 durch 14, giebt 6, und

1) Das irgendwohin, vielleicht über das 6, geschrieben wird, EL-ḤAṢṢÂR sagt nichts davon; das Hinschreiben desselben ist aber auch keineswegs notwendig, wie man am Schlusse der Darstellung sieht.

setze dieses hinter das 14, also: $\begin{array}{c}93696\\146\end{array}$, multipliziere 146 mit 6, und ziehe das Resultat von 936 ab, bleibt 60, welches an die Stelle von 936 gesetzt wird, also hat man jetzt $\begin{array}{c}6096\\146\end{array}$; dann verdoppele man das 6 (von 146), giebt 12, füge den Zehner 1 von diesem zu 4 hinzu, giebt 5, also hat man jetzt 152, dieses setze man unter das 146, indem man es um eine Stelle nach rechts verschiebt, so hat man nun auf der Tafel: $\begin{array}{r}6096\\146\;\\152\end{array}$ [1]);
hierauf suche man, wie oft 152 in 609 enthalten ist, es ist dies 4 mal, setze das 4 hinter das 2, also: $\begin{array}{r}6096\\146\;\;\\1524\end{array}$ multipliziere nun 1524 mit 4, und subtrahiere das Ergebnis [fol. 25ᵃ] von 6096, der Rest ist Null; hierauf halbiere man alles, was man verdoppelt hat, d. i. 152, und setze die Hälfte 76 an seine Stelle, so hat man, wenn man das 4 dahinter dazu nimmt, die Wurzel 764.

Wie man sieht, kann dieses Verfahren auf der Staubtafel rasch und mit wenig Ziffern durchgeführt werden; es zeigt auch einige Ähnlichkeit mit dem heutigen insofern, als das jeweilige Divisionsergebnis hinter den Divisor gesetzt wird.

Nun folgt eine kurze Auseinandersetzung des Verfahrens der Wurzelausziehung aus Zahlen, die Nullen am Ende haben und als Beispiel ist die Wurzel aus 10000 gewählt. Am Schlusse dieses Kapitels heifst es dann: „Nun sind wir am Ende unserer zehn Kapitel (über die ganzen Zahlen) angelangt, und beginnen nun mit der Multiplikation[2]) [fol. 25ᵇ] der Brüche in Ġobârbezeichnung; dieses Kapitel haben wir in 72 (Unter-) Kapitel[3]) geteilt."

1. Teil: „Über die Multiplikation der Brüche." Dieser erste Teil bildet gleichsam eine Einleitung in das Kapitel über die Brüche, und sollte daher einen andern Titel tragen, etwa: „Über die verschiedenen Arten von Brüchen und ihre Schreibweise". Zuerst folgen nun die einfachen Brüche, die ersten neun Stammbrüche, ihre Namen und ihre Schreibweise, also $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{10}$; dann sagt der Verfasser: „Willst du nun zwei Drittel darstellen, so schreibe (in dem Bruche $\frac{1}{2}$) an die Stelle des

1) Dieses Zahlenbild steht nicht mehr im Text, ich habe es aus letzterem rekonstruiert, vielleicht wurde auch das 146 durchgewischt, und das 152 unmittelbar unter das 609 gesetzt.

2) Eigentümlicherweise kommt zuerst die Multiplikation und erst nachher die Addition und Subtraktion der Brüche; wir können nicht entscheiden, ob dies auch die Anordnung des Originals war.

3) Ich werde diese in der Folge auch wieder „Teile" nennen.

1 ein 2 und an diejenige des 2 ein 3, also $\frac{2}{3}$“, u. s. f. „Zu den einfachen Brüchen gehören auch die stummen[1]) Brüche (d. h. solche, deren Nenner eine der Primzahlen von 11 an ist), z. B. $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{5}{17}$ etc., arabisch ausgedrückt: „ein Teil von elf[2]), ein Teil von dreizehn, zwei Teile von elf“ etc.

Nun kommt er zu den Brüchen, deren Nenner zusammengesetzte Zahlen sind, und nimmt als erstes Beispiel einen Zwölftel, dies schreibt er: $\frac{\ \ 1}{6\ 2}$ und liest es „ein Zweitel eines (des) Sechstels“; er fügt hierauf hinzu [fol. 26^a]: „das ist die Darstellung (Figur) eines Bruchbruches (*kesru kesrin*); wenn du aber einen Bruch mit (und) Bruchbruch darzustellen hast, so schreibe die Nenner unter einen (horizontalen) Strich und über jeden einzelnen derselben die ihm zukommenden Teile (wörtl. „seinen erwähnten Teil“), z. B. wenn zu dir gesagt wird, stelle drei Fünftel und einen Drittel eines Fünftels dar, so schreibe dies so: $\frac{3\ 1}{5\ 3}$.“ Als zweites Beispiel folgt: $\frac{4\ \ \ 3}{13\ 11}$ = vier Dreizehntel und drei Elftel eines Dreizehntels ($=\frac{47}{143}$).

Nun folgen 71 Teile (Kapitel), in denen Multiplikationen von je zwei Faktoren ausgeführt werden, die alle möglichen Kombinationen aus den vier Bestandteilen: ganze Zahlen, einfache Brüche, Bruchbrüche und Brüche mit Bruchbrüchen enthalten. Es ist dies die umfangreichste[3]) aller bisher bekannten Darstellungen der Bruchrechnung (insbesondere der Multiplikation) in arabischen Rechenbüchern, so weitschweifend, daſs sie ermüdend wirkt, so unhandlich und verwirrend für den Praktiker, daſs eine kürzere Bearbeitung des hier Gebotenen eine absolute Notwendigkeit war. Es würde sich kaum der Mühe lohnen, wenn ich alle diese Fälle zur Darstellung bringen wollte, aber einige typische Beispiele muſs ich doch herausheben, um den Leser mit den mühsamen und nach unseren Begriffen komplizierten Bruchrechnungen aus der Zeit EL-ḤAṢṢÂRS bekannt zu machen.

[fol. 27^b] 2. Teil: „Über die Multiplikation eines[4]) Bruches mit einer[4]) ganzen Zahl.“ Wenn $\frac{5}{6}$ mit 10 multipliziert werden soll, so wird dies so angeschrieben: $\begin{matrix}\frac{5}{6}\\10\end{matrix}$; dann wird gesagt, man multipliziere 5 mit 10, giebt 50, und teile dies durch 6, giebt $8\frac{2}{6}$ (wird nicht abgekürzt); hierzu folgt die Siebnerprobe.

1) Im Text steht hier nur *el-aǧzâ'* (= die Teile); vgl. auch den *Talchîṣ*, l. c. p. 20.

2) Zu ergänzen: „Teilen eines Ganzen“ (oder der Einheit).

3) Die Multiplikation umfaſst 46 Blätter, dann folgen noch auf 42 Blättern, allerdings mit Algebraischem und Reihensummierung vermischt, die Addition, Subtraktion und Division der Brüche.

4) Der Verfasser braucht immer den bestimmten Artikel.

3. Teil: „Über die Multiplikation eines Bruches samt Bruchbruch mit einer ganzen Zahl.“ Wenn $\frac{1}{5}$ und die Hälfte von $\frac{1}{5}$ mit 12 multipliziert werden soll, so [fol. 28a] schreibe man dies so: $\begin{array}{c}\frac{1\;\;1}{5\;\;2}\\ 12\end{array}$; dann wird gesagt: „Beginne in der obern Linie und multipliziere das 1 über dem 5 mit dem 2 unter dem Strich und addiere zum Produkt das 1 über dem 2, dies giebt 3, dies multipliziere mit 12, giebt 36, und dividiere dies durch das Produkt der Nenner[1]), d. h. durch 10, dies giebt $3\frac{3}{5}$. [2])“ Folgt Siebnerprobe.

4. Teil: „Über die Multiplikation eines Bruchbruches mit einer ganzen Zahl.“ Wenn der Drittel eines Siebentels mit 25 multipliziert werden soll, so schreibe man dies so: [fol. 28b] $\begin{array}{c}\frac{\;\;1}{7\;\;3}\\ 25\end{array}$; dann beginne man in der obern Zeile und multipliziere das 1 mit 25, und dividiere das Resultat durch 21 (durch 7 und 3), dies giebt: $1\frac{1\;\;1}{7\;\;3}$ $(= 1\frac{4}{21})$. Folgt Siebnerprobe.

5. Teil: „Über die Multiplikation zweier verschiedener (einfacher) Brüche mit einer ganzen Zahl.“ Wenn $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$ mit 15 multipliziert werden soll, so schreibe man dies so: $\begin{array}{c}\frac{3}{4}\,\frac{4}{5}\\ 15\end{array}$ [3]), dann beginne man in der obern Zeile und multipliziere das 3 mit 5 und das 4 mit 4, und addiere die beiden Produkte, dies giebt 31, dies multipliziere man mit 15, giebt 465, und teile dieses durch 4 und durch 5, dies giebt: $23\frac{1\;\;1}{5\;\;4}$ $(= 23\frac{5}{20})$. [4])

Ich habe diese vier unmittelbar aufeinander folgenden Teile wiedergegeben, um die Regellosigkeit der Anordnung zu zeigen, die das ganze Werk charakterisiert; jedermann würde hier den vierten Teil vor dem dritten erwarten und vielleicht auch den fünften vor dem dritten; auch wäre für die Ausführung der Rechnung des fünften Teils das Vorausgehen der Addition der Brüche notwendig.

[fol. 30a] 9. Teil: „Über die Multiplikation zweier verschiedener (einfacher) Brüche mit einer ganzen Zahl und einem Bruche.“

Beispiel: $\begin{array}{c}\frac{3}{4}\,\frac{4}{5}\\ 5\frac{5}{6}\end{array}$.

Gang der Ausrechnung:

$$\frac{(3\cdot 5+4\cdot 4)\;(5\cdot 6+5)}{6\cdot 5\cdot 4} = \frac{1085}{6\cdot 5\cdot 4} = 9\frac{0\;\;1\;\;1}{6\;\;5\;\;4}\;\left(= 9 + \frac{0}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{120} = 9\frac{5}{120}\right).$$

Hier folgt zum ersten Mal in diesem Kapitel die allgemeine Rech-

1) Der Text hat einfach „durch die Nenner“, d. h. nacheinander durch 5 und durch 2.

2) Im Text steht: $3\frac{3\;\;0}{5\;\;2}$, d. h. $3 + \frac{3}{5} + \frac{0}{2\cdot 5}$.

3) Das bloſse Nebeneinanderstellen zweier Brüche bedeutet ihre Addition.

4) Die Abkürzung $23\frac{1}{4}$ ist nicht angegeben.

nungsregel für diesen Fall, was sich noch öfters wiederholt, immerhin aber in der Mehrzahl der Fälle fehlt.

[fol. 32a] 13. Teil: „Über die Multiplikation eines Bruches samt Bruchbruch mit einer ganzen Zahl und einem Bruche samt Bruchbruch."

Beispiel: $\begin{array}{c} \frac{5\ 1}{6\ 2} \cdot \\ 8\frac{5\ 1}{7\ 5} \end{array}$

Gang der Ausrechnung:

$$\frac{(5\cdot 2+1)\ [(8\cdot 7+5)\,5+1]}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 2} = \frac{3366}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 2} = 8\frac{3}{7\ 6\ 5\ 2}\ ^{1)}\ \left(= 8 + \frac{0}{7} + \frac{0}{42} + \frac{3}{210} + \frac{0}{420} = 8\frac{3}{210}\right).$$

[fol. 41a] 28. Teil: „Über die Multiplikation eines (einfachen) Bruches mit einem (einfachen) Bruche."[2]) Es sei $\frac{7}{8}$ mit $\frac{9}{10}$ zu multiplizieren, man schreibe dies so: $\begin{array}{c}\frac{7}{8};\\ \frac{9}{10}\end{array}$ man multipliziere nun das 7 mit dem 9, dies giebt 63, und teile dies durch 8 und 10, dies giebt: $\frac{7\ 7}{10\ 8}\ (=\frac{63}{80})$. Hier folgt, wo man es am ehesten erwarten würde, keine allgemeine Rechnungsregel für diesen Fall.

[fol. 47b] 41. Teil: „Über die Multiplikation eines Bruches von einer ganzen Zahl und einem Bruche mit einem ähnlichen Ausdruck.[3]) Soll z. B. $\frac{2}{3}$ von $5\frac{5}{6}$ mit $\frac{6}{7}$ von $8\frac{4}{9}$ multipliziert werden, so schreibe man dies so:

$$\begin{array}{c} \frac{2}{3}\ 5\frac{5}{6} \\ \frac{6}{7}\ 8\frac{4}{9}\ ^{4)}. \end{array}$$

Das Resultat der Multiplikation ist: $28\frac{1\ 2\ 2\ 0}{9\ 7\ 6\ 3}\ (=28\frac{56}{378})$. Diese Aufgabe und eine ganze Reihe der noch folgenden können, wie der Verfasser selbst angiebt, auf zwei und mehr verschiedene Arten aufgefaſst werden; als solche Beispiele gebe ich die beiden folgenden:

[fol. 55b] 55. Teil: „Über die Multiplikation einer ganzen Zahl und eines Bruches und einer ganzen Zahl und eines Bruches mit einem ähnlichen Ausdruck."

Beispiel: $\begin{array}{c} 3\frac{1}{2}\ 5\frac{1}{3} \cdot \\ 4\frac{3}{4}\ 6\frac{4}{5} \end{array}$

Nach dem Wortlaut des Titels dieses Teils ist allerdings nur folgende Auffassung zulässig: $(3\frac{1}{2} + 5\frac{1}{3})\ (4\frac{3}{4} + 6\frac{4}{5})$ und nach dieser ist das Ergebnis: $102\frac{0\ 0\ 3}{6\ 5\ 4}\ (= 102\frac{3}{120})$; nach der arabischen Schreibweise des Zahlen-

---

1) So geschrieben, damit alle Nenner, die in der Aufgabe vorkommen, auch im Schluſsresultat figurieren; es könnte einfacher geschrieben werden: $8\frac{1}{7\ 5\ 2}\ (= 8\frac{1}{70})$; auch sollten von rechtswegen über 7, 6 und 2 Nullen stehen, bisweilen aber sind diese weggelassen.

2) Auch diesen Fall würde man wohl früher erwarten.

3) Der Text hat „mit dem gleichen".

4) Wenn ein Bruch vor einer ganzen oder gemischten Zahl steht, so bedeutet dieses die Multiplikation beider, also nach unserer Schreibweise: $(\frac{2}{3}\cdot 5\frac{5}{6})\ (\frac{6}{7}\cdot 8\frac{4}{9})$

beispiels aber kann die Aufgabe auch so aufgefaſst werden: $(3 + \frac{1}{2} \cdot 5\frac{1}{3})$ $(4 + \frac{3}{4} \cdot 6\frac{4}{5})$; dann wäre das Resultat $= 51\frac{3}{6}\frac{2}{5}\ (= 51\frac{17}{30})$.

[fol. 59^{a}] 58. Teil: „Über die Multiplikation eines Bruches und einer ganzen Zahl und zweier einfacher Brüche und einer ganzen Zahl und eines Bruches mit einem ähnlichen Ausdruck."

Beispiel:
$$\begin{array}{l} \frac{3}{4}\,5\,\frac{1}{2}\,\frac{5}{6}\,3\,\frac{2}{5}\,. \\ \frac{2}{3}\,4\,\frac{1}{7}\,\frac{3}{8}\,2\,\frac{3}{11} \end{array}$$

Nach dem Wortlaut des Titels könnte diese Aufgabe nur so aufgefaſst werden: $(\frac{3}{4} + 5 + \frac{1}{2} + \frac{5}{6} + 3 + \frac{2}{5})\ (\frac{2}{3} + 4 + \frac{1}{7} + \frac{3}{8} + 2 + \frac{3}{11})$; der Verfasser bemerkt aber, man könne die Aufgabe auf verschiedene Arten auffassen, je nachdem man die beiden Faktoren in 2, 3, 4 oder 5 Summanden zerlege, z. B.

in 2 Summanden:
$$\begin{array}{l} (\frac{3}{4} \cdot 5\frac{1}{2}) + (\frac{5}{6} \cdot 3\frac{2}{5}) \\ (\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{7}) + (\frac{3}{8} \cdot 2\frac{3}{11}) \end{array}$$ [1])

in 3 Summanden:
$$\begin{array}{l} (\frac{3}{4} \cdot 5) + (\frac{1}{2} + \frac{5}{6})\,3 + (\frac{2}{5}) \\ (\frac{2}{3} \cdot 4) + (\frac{1}{7} + \frac{3}{8})\,2 + (\frac{3}{11}) \end{array}$$

oder anders:
$$\begin{array}{l} (\frac{3}{4} \cdot 5\frac{1}{2}) + (\frac{5}{6}) + (3\frac{2}{5}) \\ (\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{7}) + (\frac{3}{8}) + (2\frac{3}{11}) \end{array}$$

in 4 Summanden:
$$\begin{array}{l} (\frac{3}{4} \cdot 5) + (\frac{1}{2}) + (\frac{5}{6}) + (3\frac{2}{5}) \\ (\frac{2}{3} \cdot 4) + (\frac{1}{7}) + (\frac{3}{8}) + (2\frac{3}{11}) \text{ etc.} \end{array}$$

Man sieht aus diesen beiden Beispielen, wie das Fehlen von Additions- und Multiplikationszeichen die Rechnungsaufgaben mehrdeutig machen muſste; um so befremdender ist es, daſs man nicht zur Einführung solcher Zeichen gekommen ist. Das komplizierteste Beispiel solcher Bruchrechnungen enthält der

[fol. 61^{b}] 59. Teil: nämlich $\frac{5}{6}\frac{1}{2}\,3\,\frac{3}{4}\,\frac{4}{5}\,2\,\frac{3}{8}\,4\,\frac{3}{9}\frac{2}{3}$ zu multiplizieren mit einem ähnlichen Ausdruck. Diese Aufgabe läſst natürlich noch viel mehr Auffassungen zu, auf deren Wiedergabe ich aber verzichte.

[fol. 62^{a}] Vom 60. Teil an tritt noch eine weitere Bruchform auf, die el-Ḥaṣṣâr „den Bruch mit Weglassung des »und«" oder „den Bruch genommen von einem Bruch" nennt.[2]) Er schreibt diese Form ganz gleich wie den Bruch samt Bruchbruch, es bedeutet nun aber z. B. $\frac{3}{7}\frac{3}{5}$ nicht mehr $\frac{3}{7}$ und $\frac{3}{5 \cdot 7}$, sondern $\frac{3}{7}$ von $\frac{3}{5}$, d. h. $\frac{3}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{35}$. El-Qalaṣâdî unterscheidet diese Bruchform von der erstern (Bruch samt Bruchbruch)

---

1) Ich setze die beiden Faktoren nach arabischer Schreibweise untereinander.

2) Bei Ibn el-Bennâ (l. c. p. 20) heiſsen diese Brüche „des fractions subdivisées", bei el-Qalaṣâdî (l. c. p. 29) „des fractions divisées en partie"; die Weglassung des „und" ist am letztern Orte ebenfalls erwähnt.

dadurch, daſs er nach Woepcke[1]) vertikale Striche zwischen die einzelnen Brüche setzt, also: $\frac{3}{7}\big|\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}\big|\frac{4}{5}\big|\frac{3}{4}$ etc.[2]) Wir nehmen an, es habe auch el-Ḥaṣṣâr auf irgend eine Weise die beiden Formen unterschieden, diese Unterscheidung aber sei von den Abschreibern nicht berücksichtigt worden. Ich bediene mich im folgenden Beispiel der Schreibweise el-Qalaṣâdîs.

[fol. 67ᵃ] 67. Teil: „Über die Multiplikation einer ganzen Zahl und eines Bruches mit Weglassung des »und« und eines einfachen Bruches mit einem ähnlichen Ausdruck.“

Beispiel: $2\frac{3}{7}\big|\frac{3}{5}\ \frac{2}{3}$.
$3\frac{3}{4}\big|\frac{5}{6}\ \frac{1}{2}$

d. h. in unserer Schreibweise: $(2\frac{9}{35}+\frac{2}{3})\ (3\frac{15}{24}+\frac{1}{2})$.

Resultat: $12\frac{0\ \ 3\ \ 2\ \ 0\ \ 0}{8\ \ 7\ \ 5\ \ 9\ \ 2}$ [3]) $(=12+\frac{0}{8}+\frac{3}{56}+\frac{2}{280}=12\frac{17}{280})$.

[fol. 69ᵃ] 70. Teil: Dieser enthält die Aufgabe folgendes Produkt zu berechnen: $1\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{3}\cdot 1\frac{1}{4}\cdot 1\frac{1}{5}\cdot 1\frac{1}{6}\cdot 1\frac{1}{7}\cdot 1\frac{1}{8}\cdot 1\frac{1}{9}\cdot 1\frac{1}{10}$.

Resultat $=5\frac{1}{2}$.

Die beiden letzten Teile (71. und 72.) dieses Kapitels handeln über die Multiplikation von Brüchen mit Ausschlieſsung[4]) (*istiṯnâ'*). Wir geben das Beispiel des

[fol. 70ᵃ] 71. Teils: $\frac{3}{4}$ *illâ* $\frac{1}{6}$
$\frac{4}{5}$ *illâ* $\frac{1}{3}$.

d. h. in unserer Schreibweise: $(\frac{3}{4}-\frac{1}{6})\ (\frac{4}{5}-\frac{1}{3})$.

Resultat $=\frac{2\ \ 3\ \ 3}{9\ \ 8\ \ 5}$ $(=\frac{2}{9}+\frac{3}{72}+\frac{3}{360}=\frac{98}{360})$.

El-Ḥaṣṣâr faſst aber die Aufgabe noch anders auf, nämlich:

$$(\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{6}\text{ von }\tfrac{3}{4})\ (\tfrac{4}{5}-\tfrac{1}{3}\text{ von }\tfrac{4}{5})=(\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{8})\ (\tfrac{4}{5}-\tfrac{4}{15})=\tfrac{1}{3}.$$

[fol. 72ᵃ] Am Schlusse dieses Kapitels sagt der Verfasser: „Was wir nun über die Multiplikation der Brüche gesagt haben, sollte für den, der es aufmerksam studiert, genügen; wir haben weggelassen, was jeder schon wissen muſs (wörtl. „dessen Nichtwissen für Keinen möglich ist“), und haben die Weitläufigkeit vermieden (!), was wir erwähnt haben, findet in dem was nachher kommt, jeweilen sein Analoges, etc.“

Drittes[5]) *Kapitel*: „Über die Verwandlung (*ṣarf*) der Brüche.“[6])

---

1) El-Qalaṣâdî, l. c. p. 29.

2) In der Feser Ausgabe des Qalaṣâdᵓ (v. J. 1315, 1897/98) sind diese Brüche geschrieben: $\frac{7}{8}\ominus\frac{4}{5}\ominus\frac{3}{4}$.

3) Könnte einfacher $12\frac{0\ 3\ 2}{8\ 7\ 5}$ geschrieben werden.

4) Bei Ibn el-Bennâ (l. c. p. 20) „des fractions séparées en deux par un moins“.

5) Dieses Wort fehlt im Text; überhaupt hört von hier an jede Zählung von Kapiteln auf.

6) Vgl. den *Talchîṣ*, l. c. p. 22 („sur la conversion“) und el-Qalaṣâdî, l. c. p. 36 („de la transformation“).

Hier handelt es sich darum, einen Bruch in einen andern mit gröſserem oder kleinerem Nenner zu verwandeln; es wird bemerkt, daſs das erstere das bessere (wohl nützlichere) sei, was an seiner Stelle, nämlich bei der Addition und Subtraktion der Brüche, sich zeigen werde. Dieses Kapitel zerfällt in fünf Unterkapitel oder Teile, ich gebe davon die zwei ersten:

[fol. 72ᵇ] 1. Teil: Es sei $\frac{5}{6}$ in Siebentel zu verwandeln, man schreibe dies so: $\begin{array}{c}\frac{5}{6}\\ \hline 7\end{array}$. Dann multipliziere man das 5 mit dem 7, dies giebt 35, und teile dies durch die beiden Nenner (d. h. zuerst durch 6 und nachher durch 7), dies giebt $\frac{5\ 5}{7\ 6}$ $(=\frac{5}{7}+\frac{5}{42}=\frac{35}{42})$. Es folgt die allgemeine Regel für diesen Fall.

2. Teil: Es sei $\frac{5\ 1}{6\ 2}$ in Zehntel zu verwandeln, man schreibe dies so: $\begin{array}{c}\frac{5\ 1}{6\ 2}\\ \hline 10\end{array}$. Dann bestimme man wie früher den Zähler von $\frac{5\ 1}{6\ 2}$, er ist 11, multipliziere ihn mit 10, giebt 110, und teile dies (nach einander) durch die Nenner 2, 6 und 10, dies giebt: $\frac{9\ \ 1\ 0}{10\ 6\ 2}$ $(=\frac{9}{10}+\frac{1}{60}=\frac{55}{60})$.

[fol. 75ᵃ] *Viertes Kapitel*: „Über die Addition der Brüche." Dasselbe zerfällt in 22 Teile, deren Inhalt aber ein ziemlich bunter ist; neben Additionen von Brüchen treten hier auch algebraische Aufgaben auf, die auf Gleichungen ersten und zweiten Grades führen, ebenso Summationen von Reihen, die man wohl eher im Kapitel über die ganzen Zahlen erwartet hätte. Aus der Addition von Brüchen gebe ich folgende zwei Beispiele:

[fol. 76ᵃ] 3. Teil: „Addition eines Bruches samt Bruchbruch zu zwei einfachen Brüchen."

Beispiel: $\begin{array}{cc}\frac{5}{6} & \frac{1}{2}\\ \frac{7}{8} & \frac{8}{9}\end{array}$.

Resultat: $2\frac{6\ 1}{9\ 8}$ $(=2+\frac{6}{9}+\frac{1}{72}=2\frac{49}{72})$.

[fol. 78ᵃ] 8. Teil: „Addition eines Bruches von einer ganzen Zahl zu einem ähnlichen Ausdruck."

Beispiel: $\begin{array}{l}\frac{2}{3}\,7\\ \frac{7}{8}\,9,\end{array}$

d. h. in unserer Schreibweise: $\frac{2}{3}\cdot 7+\frac{7}{8}\cdot 9$.

Gang der Ausrechnung: $\frac{2\cdot 7\cdot 8+7\cdot 9\cdot 3}{3\cdot 8}=12\frac{4\ 1}{8\ 3}$ $(=12+\frac{4}{8}+\frac{1}{24}=12\frac{13}{24})$.

[fol. 79ᵇ] „Anderer Teil (Kap.) aus der Addition der Brüche: über die Addition der Vermögen. Wenn zu dir gesagt wird, es giebt ein gewisses Vermögen (*mâl*), addiere seinen dritten Teil zu seinem vierten, so erhältst du 21 Dirhem. Die Auflösung ist folgende: 3 und 4 sind in 12 enthalten, du nimmst nun $\frac{1}{3}$ von 12 und $\frac{1}{4}$ von 12 und addierst dies, so hast du 7; nun ist das Verhältnis von diesem 7 zu 12 dasselbe wie das Verhältnis von 21 zu dem gesuchten Vermögen; multipliziere also 12 mit 21 und dividiere das Produkt durch 7, so hast du 36 und dies ist das Vermögen. — Wenn du willst, kannst du die Aufgabe auch mit (Hilfe) der Algebra lösen: Setze das Vermögen gleich einer unbekannten Zahl (*šai' = Ding*), dann nimmst du einen Drittel und einen Viertel davon, dies ist drei Sechstel und die Hälfte eines Sechstels[1]) der unbekannten Zahl, und dies ist gleich 21; nun frägst du, mit wieviel mufs ich drei Sechstel und die Hälfte eines Sechstels der unbekannten Zahl wiederherstellen[2]), damit die unbekannte Zahl selbst herauskommt? Du findest, dafs du mit $1\frac{5}{7}$ multiplizieren mufst, wie wir dies im Kapitel über die Wiederherstellung der Brüche beweisen werden; multipliziere also auch 21 mit $1\frac{5}{7}$, dies giebt 36, und dies ist das (gesuchte) Vermögen. — Wenn du willst, kannst du die Aufgabe auch mit Hilfe der Wagschalen (*el-kiffât*) lösen. Dies Verfahren besteht darin, dafs du für eine der Wagschalen irgend eine beliebige Zahl wählst, also z. B. die Zahl 3; nimm nun ihren Drittel und ihren Viertel, dies macht zusammen $1\frac{3}{4}$, vergleichst du dieses mit 21, so findest du, dafs in der Wagschale der Drei $19\frac{1}{4}$ fehlen; behalte nun diesen Fehler im Gedächtnis, und wähle nun für die zweite Wagschale irgend eine Zahl, z. B. 4, nimm ihren Drittel und ihren Viertel, dies macht zusammen $2\frac{1}{3}$; vergleichst du dieses mit 21, so findest du, dafs in der Wagschale der Vier $18\frac{2}{3}$ fehlen; nun multipliziere den Fehler der ersten Wagschale, also $19\frac{1}{4}$, mit der Zahl der zweiten Wagschale, also mit 4, dies giebt 77, dann multipliziere den Fehler der zweiten Wagschale, also $18\frac{2}{3}$, mit der Zahl der ersten Wagschale, also mit 3, dies giebt 56, subtrahiere dieses Ergebnis vom ersten, der Rest ist 21, subtrahiere auch den kleinern Fehler vom gröfsern, der Rest ist drei Sechstel und die Hälfte eines Sechstels, dann teile 21 durch dieses, das Resultat ist 36, und dies ist das Vermögen. Ich werde diese Lösung beweisen an ihrem Orte, so Gott will.“

Wir sehen in der Behandlung dieser Aufgabe[3]) die drei Hauptlösungsarten derselben vereinigt, wie sie teilweise schon die Ägypter und Indier kannten: die Methode des falschen Ansatzes oder das Verfahren mit der angenommenen Zahl, die Methode der Algebra und die Regel der beiden Fehler oder die Methode der Wagschalen. Die

1) Also $= \frac{3}{6}\frac{1}{2} = \frac{7}{12}$, was aber nicht im Text steht, alle Zahlen sind mit Worten ausgeschrieben.

2) *Ǧabara*, d. i. das Verbum, dessen nom. act. *el-ǧabr* oder *el-ǧebr* (= Algebra = Wiederherstellung) ist; vgl. unten p. 36 den Teil „über die Wiederherstellung“.

3) Dieselbe Aufgabe findet sich auch bei EL-QALAṢÂDÎ (l. c. p. 50), aber er nimmt für die beiden Wagschalen nicht 3 und 4, sondern 12 und 24, und vermeidet damit Brüche.

erstere Methode ist im *Talchîṣ* sowohl als bei el-Qalaṣâdî das „Proportionsverfahren“ genannt, bei el-Ḥaṣṣâr trägt sie keinen besondern Namen.

Es folgen nun eine Reihe anderer Aufgaben, die auf Gleichungen ersten Grades führen, die komplizierteste ist folgende:

[fol. 83a] „Es ist ein Vermögen gegeben; du addierst seinen dritten und fünften Teil, und nimmst hiervon einen Viertel und dazu die Hälfte des Restes (der übrig bleibt, wenn du das vorhergehende vom Vermögen abgezogen hast)[1]), so erhältst du 11.“

Die algebraische Lösung führt auf die Gleichung:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x\right) + \frac{x - \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x\right)}{2} = 11; \quad x = 30.$$

[fol. 84a] Nun folgt auch eine unbestimmte Aufgabe: „Es sind zwei verschiedene Zahlen gegeben; du addierst den dritten Teil der einen zum vierten Teil der andern, dies giebt 6. Diese Aufgabe läſst viele Antworten zu, eine davon ist: Nimm von dem 6 was du willst, und setze es gleich dem Drittel der einen Zahl, dann ist das was von 6 übrigbleibt gleich einem Viertel der andern Zahl, oder du setzest das zuerst von 6 genommene gleich einem Viertel der einen Zahl, dann ist der Rest gleich dem Drittel der andern; z. B. nimm 2 von 6 und setze es gleich einem Drittel der einen Zahl, dann ist der Rest 4 gleich einem Viertel der zweiten Zahl, also ist die erste Zahl 6 und die zweite 16; es kann aber auch die erste Zahl 9 und die zweite 12, oder die erste 3 und die zweite 20 sein etc.“

Es folgen nun Summationen von Reihen.

[fol. 84b] Ein anderer Teil (Kap.) der Addition: „Über die Addition der Zahlen.[2]) Wenn gesagt wird: addiere von 1 bis 10 nach der (natürlichen) Reihenfolge der Zahlen, so addiere 1 zu 10, dies ist 11, und multipliziere dieses mit der Hälfte von 10, d. i. 5, so erhältst du 55, und dies ist die gesuchte Summe.“ Es folgt die allgemeine Regel für diesen Fall.

„Ein anderer Teil (Kap.): Addiere von 1 bis zu einer unbekannten Zahl nach der Reihenfolge der Zahlen, die Summe ergiebt 55, welches ist die unbekannte Zahl? [fol. 85a] Auflösung: Multipliziere 55 mit 2, dies giebt 110, behalte dies im Sinn; hierauf nimm die Hälfte des 1, mit dem du angefangen hast, und multipliziere es mit sich selbst, dies giebt $\frac{1}{4}$, addiere dies zu den im Sinn behaltenen 110, dies giebt $110\frac{1}{4}$, ziehe hieraus

1) Das Eingeklammerte fehlt im Text.
2) Hier fehlt: „nach ihrer natürlichen Reihenfolge“.

die Quadratwurzel, wie wir im Kapitel über die Wurzelausziehung zeigen werden, so Gott will, dies giebt $10\frac{1}{2}$, von diesem subtrahiere das $\frac{1}{2}$, das du mit sich selbst multipliziert hast, so hast du 10, und dies ist die gesuchte Zahl. — Willst du diese Aufgabe auf dem Wege der Algebra lösen, so setze die unbekannte Zahl $= x$ (*šai'*), addiere zu ihr 1, giebt $x + 1$, multipliziere dies mit der Hälfte der unbekannten Zahl, dies giebt $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$ [1]), dies mufs gleich 55 sein; nun stellst du das vollständige Quadrat[2]) her, indem du es mit 2 multiplizierst, und ebenso das ihm gleichgesetzte, d. i. das 55, mit 2 multiplizierst, dies giebt $x^2 + x = 110$; so ist die Aufgabe auf den vierten Fall[3]) der Algebra gebracht worden, mit dem du verfährst, wie wir es an seiner Stelle zeigen werden, so Gott will."[4])

[fol. 85^b] Nun folgen Summationen von Reihen der geraden und ungeraden Zahlen, alle ohne Angabe der allgemeinen Regel, dann die Aufgabe: Man summiere von 1 bis zu einer unbekannten Zahl nach der Reihenfolge der ungeraden Zahlen und erhalte 36, welches ist die unbekannte Zahl? — Erste Lösung: Ziehe die Wurzel aus 36, diese ist 6, verdoppele dieses, giebt 12, davon 1 abgezogen, giebt 11, dies ist die unbekannte Zahl. — Zweite (algebraische) Lösung: Setze die unbekannte Zahl $= x$, addiere dazu 1, nimm die Hälfte von der Summe, giebt $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, quadriere dies, giebt $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, dies ist gleich 36; hieraus erhält man die Gleichung $x^2 + 2x = 143$, die nach dem vierten Fall gelöst $x = 11$ ergiebt. — Hierzu bemerkt er noch, man könne auch so verfahren: man multipliziere das 36 mit 4, dies giebt 144, ziehe daraus die Wurzel, diese ist 12, und subtrahiere davon 1, dies giebt 11. — Am Schlusse sagt er, wenn man algebraisch gerechnet habe und die Wurzel nicht rational werde, dann liege in der Aufgabe ein Fehler vor.

Es folgen die Summationen der Quadrat- und Kubikzahlen; da nirgends allgemeine Regeln ausgesprochen sind, so gebe ich nur kurz in moderner Schreibweise die Aufgabe, den Gang der Lösung und das Resultat an, falls dies letztere im Text steht.

---

1) Es ist wohl unnütz zu bemerken, dafs nirgends im Text Gleichungen mit algebraischen Zeichen vorkommen, alles ist in Worten ausgeschrieben, obiger Ausdruck lautet also: *niṣf mâl we niṣf šai'* (= Hälfte eines Quadrates und Hälfte eines Dinges).

2) Fehlt: „und das vollständige Ding".

3) Vgl. Muḥ. b. Mûsâ, edid. Fr. Rosen, p. 38.

4) Dies zeigt er aber nirgends in diesem Buche; er hat vielleicht später noch ein Kapitel über Algebra hinzugefügt, das im Laufe der Zeit verloren gegangen ist; dies letztere ist deshalb nicht unwahrscheinlich, weil der *Talchîṣ* und sein Kommentar am Ende ein besonderes Kapitel über Algebra enthalten.

[fol. 86[b]] $(1^2 + \cdots + 10^2) = (1 + \cdots + 10)\ (\frac{2}{3} \cdot 10 + \frac{1}{3})\ ^{1)}) = 55 \cdot 7 = 385.$

$(5^2 + \cdots + 12^2) = (1^2 + \cdots + 12^2) - (1^2 + \cdots + 4^2).$

[fol. 87[a]] $\underset{\text{(nur die gerad. Z.)}}{(2^2 + \cdots + 10^2)} = \underset{\text{(gerade Z.)}}{(2 + \cdots + 10)}\ (\frac{2}{3} \cdot 10 + \frac{2}{3})\ ^{2)}) = 30 \cdot 7\frac{1}{3} = 220.$

$\underset{\text{(nur die ungerad. Z.)}}{(1^2 + \cdots + 9^2)} = (9 + 2)\ (\frac{9+1}{2})\ (\frac{9}{3})\ ^{3)}) = 165.$

[fol. 87[b]] $(1^3 + \cdots + 10^3) = [(1 + \cdots + 10)]^2 = 55^2 = 3025.\ ^{4)}$

$(4^3 + \cdots + 10^3) = (1^3 + \cdots + 10^3) - (1^3 + 2^3 + 3^3).$

[fol. 88[a]] $\underset{\text{(nur die unger. Z.)}}{(1^3 + \cdots + 9^3)} = \underset{\text{(unger. Z.)}}{(1 + \cdots + 9)}\ [2\underset{\text{(unger. Z.)}}{(1 + \cdots + 9)} - 1]\ ^{5)} =$

$= 25\,(2 \cdot 25 - 1) = 1225.$

$\underset{\text{(nur die ungerad. Z.)}}{(7^3 + \cdots + 11^3)} = \underset{\text{(unger. Z.)}}{(1^3 + \cdots + 11^3)} - \underset{\text{(unger. Z.)}}{(1^3 + \cdots + 5^3)}.$

[fol. 88[b]] $(1^3 + \cdots + x^3) = 1225$; wie grofs ist x?

Algebraische Lösung: $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \left\{ 2\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - 1 \right\} = 1225.$

Diese Gleichung wird nicht gelöst, es heifst nur, es ergebe sich hieraus $x = 9$: allein vorher steht folgende Lösung (in Worten): $\sqrt{\frac{1225}{2} + (\frac{1}{4})^2} = 24\frac{3}{4}$; dann $\sqrt{(24\frac{3}{4} + \frac{1}{4})\,4} - 1 = 9$; dieselbe entspricht der Auflösung der obigen Gleichung, wenn dieselbe als quadratische in Bezug auf $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$ als Unbekannte betrachtet wird. Dann wird weiter bemerkt: „Wenn du willst, kannst du auch die mit ihrem Doppelten multiplizierte Zahl $\left(\text{d. h } \left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right)$ als Unbekannte annehmen $(= z)$, multipliziere sie dann mit ihrem Doppelten weniger 1, dies giebt $2z^2 - z$, und dies setzest du gleich 1225, hieraus ergiebt sich $z = 25$; nun ist dies, wie wenn du sagst: summiere von 1 bis

1) Allgemein: $\frac{n\,(n+1)}{2}\left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$. Vgl. EL-KARCHÎ bei CANTOR, *Vorl.* I, 724 (2. Aufl.).

2) Allgemein: $\frac{2n\,(n+1)\,(2n+1)}{3}$, wo $2n$ die letzte gerade Zahl der Reihe ist.

3) Allgemein: $\frac{(2n+1)\,(2n+2)\,(2n+3)}{6}$, wo $2n+1$ die letzte ungerade Zahl der Reihe ist.

4) Allgemein: $\frac{n^2\,(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$.

5) Allgemein: $(n+1)^2 \{ 2\,(n+1)^2 - 1 \}$, wenn $2n+1$ die letzte ungerade Zahl der Reihe ist.

zu einer unbekannten Zahl nach der Reihe der ungeraden Zahlen, die Summe sei 25, so findest du hieraus wie früher die unbekannte Zahl = 9."

[fol. 89ᵃ] $\underset{\text{(nur gerade Z.)}}{(2^3 + \cdots + 10^3)} = \underset{\text{(gerade Z.)}}{(2 + \cdots + 10)} \cdot 2 \underset{\text{(gerade Z.)}}{(2 + \cdots + 10)}$ [1] $= 30 \cdot 60 = 1800.$

$$(2^3 + \cdots + x^3) = 1800; \text{ wie groſs ist } x?$$

Auflösung: $\sqrt{\frac{1800}{2}} = 30$; „nun ist dies, wie wenn du sagst: summiere von 2 bis zu einer unbekannten Zahl nach der Reihe der geraden Zahlen, die Summe sei 30, so findest du hieraus die unbekannte Zahl wie früher = 10."

[fol. 89ᵇ] Es folgt die Aufgabe über die Verdoppelung der Häuser (Felder) des Schachbrettes. Die Summation wird ausgeführt wie bei IBN EL-BENNÂ (l. c. p. 4) [2]) und die Summe richtig angegeben.

[fol. 90ᵃ] *Fünftes Kapitel*: Über die Subtraktion der Brüche.[3]) Diese wird ziemlich rasch abgethan, indem im Anfang gesagt wird: „Wisse, daſs alle Fälle, die im Kapitel der Addition vorgekommen sind, sich bei der Subtraktion wiederholen."

Von den 12 Beispielen, die bis zu den Aufgaben, die auf Gleichungen führen, behandelt werden, gebe ich nur zwei wieder, bei den meisten sind die Resultate gar nicht angegeben.

1) Es sei $\frac{1}{4}$ von $\frac{5}{6}$ zu subtrahieren, man schreibe dies so:

$$\left.\begin{matrix}\frac{1}{4}\\ \frac{5}{6}\end{matrix}\right\}^{4)} = \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{5\cdot 4 - 1\cdot 6}{4\cdot 6} = \frac{3}{6}\,\frac{1}{2} \left(= \frac{7}{12}\right).$$

[fol. 90ᵇ] 2) Es sei $\frac{4}{5}$ und die Hälfte von $\frac{1}{5}$ von $\frac{10}{11}$ zu subtrahieren, man schreibe dies so:

$$\left.\begin{matrix}\frac{4}{5}\,\frac{1}{2}\\ \frac{10}{11}\end{matrix}\right\} = \frac{10}{11} - \frac{4}{5}\,\frac{1}{2} = \frac{10\cdot 10 - (2\cdot 4 + 1)\,11}{10\cdot 11} = \frac{1}{11}\,\frac{}{10} \left(= \frac{1}{110}\right).$$

[fol. 93ᵇ] Anderer Teil (Kap.): „Über die Subtraktion der Vermögen." Hier folgen ähnliche Aufgaben wie in dem Teil „über die Addition der Vermögen"; ich gebe die folgenden wieder:

„Es sei ein Vermögen gegeben, du subtrahierst (von ihm) seinen dritten und seinen vierten Teil, es bleibt 10 übrig, wie groſs ist das Vermögen?"

---

1) Allgemein: $2\,[n\,(n+1)]^2$, wenn $2n$ die letzte gerade Zahl der Reihe ist.

2) Durch wiederholte Anwendung der Formel:

$$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

3) Im Text steht nur „Kapitel der Subtraktion".

4) Eigentümlicherweise wird der Subtrahend über den Minuend gestellt.

Es folgen nun wieder die drei verschiedenen Auflösungsarten wie bei der analogen Aufgabe im Kapitel der Addition (p. 29—30). Nach der Auflösung mit Hilfe der Wagschalen folgt die allgemeine Darstellung (kein Beweis!) dieser Regel mit Unterscheidung der beiden Fälle, da die beiden Fehler gleiches oder ungleiches Zeichen haben.

[fol. 96ᵃ] „Aufgabe (Kap.) von den Schilfrohren (*qaṣab*). Von einem Schilfrohr steht im Boden (wörtl. „Schlamm") ein Drittel seiner Länge, im Wasser ein Viertel, und über dem Wasser 10 Spannen (*ašbâr*), wie lang ist es?"

Algebraische Lösung: $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x = 10 \qquad (x = 24).$

Es folgt noch eine Aufgabe über das Schilfrohr, die auf die Gleichung führt:

$$x - (\tfrac{1}{3}x + 2) - (\tfrac{1}{4}x + 3) = 10 \qquad (x = 36).$$

Dann kommt die Aufgabe: „Bei einem Fisch nimmt der Kopf einen Drittel seines Gewichtes, der Schwanz einen Viertel [fol. 96ᵇ] desselben in Anspruch, das Mittelstück wiegt 10 Pfund (*arṭâl*, pl. v. *riṭl* oder *roṭl*), wie schwer ist der Fisch?"

Sechstes Kapitel: „Über die Division der Brüche.[1]) Dieses Kapitel zerfällt in zwei Hauptteile, in die Benennung, d. h. Division von Kleinerem durch Gröſseres, und die eigentliche Division, d. h. Division von Gröſserem durch Kleineres. Der Teil über die Benennung zerfällt in 23 Unterkapitel mit den verschiedensten Kombinationen von Ganzen, Brüchen, Brüchen von Brüchen, etc., ich gebe hier folgende zwei Beispiele:

Es soll $\frac{1}{3}$ durch 4 geteilt werden, dies wird geschrieben:

$$\left.\begin{matrix}\frac{1}{3}\\ 4\end{matrix}\right\} = \frac{\quad 1}{6\;\;2}\,{}^{2)} = \frac{1}{12}.$$

Nach diesem Beispiel folgt [fol. 97ᵃ] die allgemeine Regel, wie ein Bruch durch eine ganze Zahl geteilt wird.

[fol. 98ᵇ] Es soll $\frac{3}{5} + \frac{7}{8}$ durch 6 geteilt werden, dies wird geschrieben:

$$\left.\begin{matrix}\frac{3}{5}\;\frac{7}{8}\\ 6\end{matrix}\right\} = \frac{3\cdot 8 + 7\cdot 5}{5\cdot 6\cdot 8} = \frac{2\;\;3\;\;2}{10\;\;8\;\;3}\left(= \frac{59}{240}\right).$$

Der Teil über die eigentliche Division zerfällt in 25 Unterkapitel, ebenfalls mit den verschiedensten Kombinationen, ich gebe daraus die folgenden Beispiele:

1) Im Text steht nur „Kapitel der Division".

2) Man beachte, daſs $\frac{1}{12}$ in diesem Falle nicht etwa geschrieben ist $\frac{\quad 1}{4\;\;3}$, sondern wie immer $\frac{\quad 1}{6\;\;2}$ (= die Hälfte eines Sechstels).

[fol. 107b] Es soll 10 durch $\frac{1}{5}$ geteilt werden, dies wird geschrieben:

$$\left.\begin{matrix}10\\ \frac{1}{5}\end{matrix}\right\}=10\cdot 5=50.$$

Es folgt nun die allgemeine Regel für die Division einer ganzen Zahl durch einen Bruch, und es werden zwei Fälle unterschieden, je nachdem der Bruch den Zähler 1 oder einen andern Zähler hat. Erstes Beispiel für den letzteren Fall:

$$\left.\begin{matrix}9\\ \frac{3}{8}\end{matrix}\right\}=\frac{9\cdot 8}{3}=24.$$

[fol. 108b] Es soll 10 durch einen Drittel eines Fünftels geteilt werden, dies wird geschrieben:

$$\left.\begin{matrix}10\\ \frac{\ \ 1}{5\ 3}\end{matrix}\right\}=10\cdot 5\cdot 3=150.$$

[fol. 117a] Es soll $\frac{3}{4}$ von 5 durch $\frac{2}{5}$ von 3 geteilt werden, dies wird geschrieben:

$$\left.\begin{matrix}\frac{3}{4}\,5\\ \frac{2}{5}\,3\end{matrix}\right\}=(3\cdot 5\cdot 5):(2\cdot 3\cdot 4)=3\tfrac{1}{8}.$$

[fol. 118b] „Anderer Teil (Kap.) der Division: Über die Wiederherstellung (*el-ǧebr*)[1]) der Brüche. Dieses Kapitel ist von groſsem Nutzen in den gesamten Rechnungsoperationen und vor allem in der Algebra. Wenn z. B. gesagt wird, mit was muſst du $\frac{1}{3}$ wiederherstellen, damit du 1 erhältst, so ist dies dasselbe, wie wenn gesagt wird, mit welcher Zahl muſst du $\frac{1}{3}$ multiplizieren, um 1 zu erhalten. Das Verfahren ist das, daſs du 1 durch $\frac{1}{3}$ teilst, dies giebt 3, und dies ist die Zahl, mit welcher $\frac{1}{3}$ multipliziert 1 ergiebt."

[fol. 119a] Zweites Beispiel dieser Art: „Mit wieviel muſst du $\frac{3}{4}$ wiederherstellen, damit du 1 erhältst? Teile 1 durch $\frac{3}{4}$, dies giebt $1\frac{1}{3}$, und dies ist das Gesuchte."

Es folgen weitere Beispiele, auch solche, wo nicht die Einheit erhalten werden soll, z. B.: „Mit wieviel muſst du $2\frac{1}{2}$ wiederherstellen, um 6 zu erhalten? Teile 6 durch $2\frac{1}{2}$, dies giebt $2\frac{2}{5}$, dies ist das Gesuchte."

[fol. 120a] „Teil (Kap.) des Erniedrigens[2]) (*el-ḥaṭṭ*) der Brüche. Wisse, daſs das Erniedrigen das Gegenteil des Wiederherstellens ist; wenn z. B. gesagt wird, mit welcher Zahl muſst du 1 erniedrigen, damit du $\frac{1}{2}$ erhältst, so teile (benenne) $\frac{1}{2}$ durch 1, dies giebt $\frac{1}{2}$ und dies ist das Gesuchte."

---

1) Vgl. den *Talchîṣ*, l. c. p. 22 („sur la réintégration"), und el-Qalaṣâdî, l. c. p. 35 („de la restauration"), und oben p. 30.

2) Vgl. ibid. („sur l'abaissement des fractions").

Anderes Beispiel: „Mit wieviel mufst du $2\frac{1}{2}$ erniedrigen, um 1 zu erhalten? Teile (benenne) 1 durch $2\frac{1}{2}$, dies giebt $\frac{2}{5}$ und dies ist das Gesuchte.“ Es folgen noch weitere Beispiele.

[fol. 120ᵇ] *Siebentes Kapitel*: „Über die Ausziehung der Wurzeln aus ganzen Zahlen und Brüchen. Die Beschreibung des Verfahrens, wie man aus ganzen Quadratzahlen die Wurzel zieht, ist schon vorausgegangen; in diesem Kapitel wollen wir jetzt die Wurzelausziehung aus Brüchen, die Quadratzahlen sind, und aus ganzen Zahlen und Brüchen, die keine Quadratzahlen sind, erklären.“

[fol. 121ᵃ] Erstes Beispiel[1]):

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \tfrac{1}{2};$$

dann folgen:

$$\sqrt{\tfrac{1}{9}} = \tfrac{1}{3} \text{ und } \sqrt{\tfrac{4}{9}} = \tfrac{2}{3};$$

hierauf:

$$\sqrt{\tfrac{4}{8}\,\tfrac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2\cdot 4+1}}{\sqrt{8\cdot 2}} = \tfrac{3}{4};$$

[fol. 122ᵃ] weiter:

$$\sqrt{\tfrac{7}{9}\,\tfrac{4}{8}\,\tfrac{1}{2}} = \frac{\sqrt{(8\cdot 7+4)\,2+1}}{\sqrt{9\cdot 8\cdot 2}} = \tfrac{11}{12} = \tfrac{5}{6}\,\tfrac{1}{2};$$

[fol. 124ᵇ]

$$\sqrt{2\tfrac{1}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \tfrac{3}{2} = 1\tfrac{1}{2};$$

[fol. 125ᵃ]

$$\sqrt{4\tfrac{4}{8}\,\tfrac{1}{8}} = \frac{\sqrt{(4\cdot 8+4)\,8+1}}{\sqrt{8\cdot 8}} = \tfrac{17}{8} = 2\tfrac{1}{8}; \text{ etc.}$$

[fol. 125ᵇ] „Teil (Kap.) der Ausziehung der irrationalen (*el-ṣumm*) Wurzeln durch Annäherung. Wenn gesagt wird: welches ist die Quadratwurzel aus 5, so nimm die nächste Quadratzahl an 5, diese ist gleich 4, subtrahiere sie von 5, der Rest ist 1, benenne dieses nach 4, dies giebt $\frac{1}{4}$, und addiere dieses zu der Wurzel aus 4, die gleich 2 ist, dies giebt $2\frac{1}{4}$, und dies ist die angenäherte Wurzel aus 5; multiplizierst du nämlich $2\frac{1}{4}$ mit sich selbst, so erhältst du $5\frac{1}{16}$, der Fehler ist $\frac{1}{16}$ Überschufs.“[2])

[fol. 126ᵃ] „Willst du aber eine gröfsere Annäherung haben, so verdoppele $2\frac{1}{4}$, dies giebt $4\frac{1}{2}$, benenne nach diesem $\frac{1}{16}$ (d. h. teile $\frac{1}{16}$ durch

1) Ich mache darauf aufmerksam, dafs sich nirgends bei el-Ḥaṣṣâr ein Zeichen für die Wurzelausziehung findet.

2) Es ist dies die bekannte Annäherung $\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a}$; der Fall, wo $r > a$, und $\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a+1}$ oder $= a + \frac{r+1}{2a+2}$ gesetzt wird, wie im *Talchîṣ*, bez. bei el-Qalaṣâdî, findet sich bei el-Ḥaṣṣâr nicht in dieser Weise behandelt, sondern er nimmt in diesem Falle die nächst höhere Quadratzahl (vgl. unten die Ausziehung der Wurzeln aus 15 und 20) und subtrahiert von deren Wurzel den Quotien-

$4\frac{1}{2}$, dies giebt $\frac{1}{72}$ (ein Achtel eines Neuntels), subtrahiere dieses von $2\frac{1}{4}$, so bleibt $2\frac{2\;1}{9\;8}$ $(= 2\frac{17}{72})$; multiplizierst du dieses mit sich selbst, so erhältst du $5\frac{\qquad\quad 1}{8\;8\;9\;9}$ $(= 5\frac{1}{5184})$ und dies ist näher (an 5) als $5\frac{1}{16}$.[1]) — Wenn du noch eine gröſsere Annäherung willst, so verdoppele $2\frac{17}{72}$, „benenne nach dem Resultat $(\frac{1}{72})^2$ und was du so erhältst, subtrahiere von $2\frac{17}{72}$, so ist das Ergebnis noch angenäherter als die erste und zweite Wurzel; so kannst du fortfahren, soweit du willst.“

„Um die Wurzel aus 10 zu erhalten, nimmst du die nächste Quadratzahl an 10, also 9, subtrahierst diese von 10, bleibt 1, benennst dieses nach der doppelten Wurzel aus 9, also nach 6, dies giebt $\frac{1}{6}$, dies addierst du zu der Wurzel aus 9, so erhältst du $3\frac{1}{6}$; dieses mit sich selbst multipliziert giebt $10\frac{1}{36}$.“

Nun folgt ein anderes Annäherungsverfahren als das vorhergehende:

[fol. 126b] „Willst du eine gröſsere Annäherung haben, so multipliziere 10 mit irgend einer Quadratzahl, z. B. mit 100, dies giebt 1000, ziehe hieraus die Wurzel nach dem eben beschriebenen Verfahren, sie ist $31\frac{19\;1}{31\;2}$ $(= 31\frac{39}{62})$, und teile dieses durch die Wurzel aus 100, also durch 10, so erhältst du $3\frac{5\;\;0\;\;1}{31\;10\;2}$ $(3\frac{101}{620})$, und dies ist näher als $3\frac{1}{6}$.“

„Um die Wurzel aus 15 zu erhalten, nimmst du die nächste Quadratzahl an 15, also 16, subtrahierst davon 15, bleibt 1, benennst dieses nach der doppelten Wurzel aus 16, d. h. nach 8, und subtrahierst das Ergebnis $(\frac{1}{8})$ von der Wurzel aus 16, dies giebt $3\frac{7}{8}$, und dies ist die angenäherte Wurzel aus 15.“

Es folgt Wurzel aus 20, zu der er bemerkt, man könne als nächste Quadratzahl entweder 16 oder 25 nehmen, in beiden Fälle erhalte man dasselbe, nämlich $4\frac{1}{2}$.

[fol. 127a] Für die Ausziehung der Wurzel aus $2\frac{1}{2}$ giebt er zwei Wege an; der eine besteht darin, daſs man es in einen Bruch verwandelt, dessen Nenner eine Quadratzahl ist, also z. B. in $\frac{10}{4}$, dann die Wurzel aus 10 zieht und das Resultat $(3\frac{1}{6})$ durch die Wurzel aus 4, also 2, teilt, dies giebt $1\frac{3\;1}{6\;2}$ $(= 1\frac{7}{12})$; der andere ist derselbe, wie der oben bei der Wurzel-

---

ten aus dem Rest $((a+1)^2 - (a^2+r))$ durch das Doppelte der Wurzel, was auf dasselbe herauskommt wie das Verfahren EL-QALAṢÂDÎs, denn es ist in der That:

$$(a+1) - \frac{2a+1-r}{2(a+1)} = a + \frac{r+1}{2a+2}.$$

1) Es ist dies die zweite Annäherung bei EL-QALAṢÂDÎ (l. c. p. 41):

$$\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a} - \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a+\frac{r}{2a}\right)}$$

(vgl. auch CANTOR, *Vorl.* I, 765 (2. Aufl.)).

ausziehung aus 10 angewandte, d. h. es wird $2\frac{1}{2}$ mit irgend einer geraden Quadratzahl, also z. B. mit 36, multipliziert, dies giebt 90, hieraus die Wurzel angenähert gezogen, giebt $9\frac{1}{2}$, und dieses durch die Wurzel aus 36, also 6, dividiert, giebt $1\frac{7}{12}$.

[fol. 127[b]] Um die Wurzel aus $\frac{1}{3}$ zu erhalten, multipliziert er $\frac{1}{3}$ mit 36, giebt 12, nimmt die angenäherte Wurzel hieraus, welche $3\frac{1}{2}$ ist, und teilt dieses durch die Wurzel aus 36, also 6, giebt $\frac{7}{12}$.

Er erwähnt aber auch, daſs man nach dem gewöhnlichen Verfahren dasselbe erhalte, d. h. man nehme den nächsten Bruch an $\frac{1}{3}$, welcher ein Quadrat ist, also $\frac{1}{4}$, subtrahiere diesen von $\frac{1}{3}$ und benenne den Rest $\frac{1}{12}$ nach dem Doppelten der Wurzel aus $\frac{1}{4}$, also nach 1, und addiere das Ergebnis zu $\frac{1}{2}$, giebt $\frac{7}{12}$.

Als letztes Beispiel folgt die Wurzel aus $\frac{3}{7}$; man multipliziere $\frac{3}{7}$ mit einer durch 7 teilbaren Quadratzahl, also z. B. 49, giebt 21, ziehe hieraus die Wurzel, giebt $4\frac{3}{5}$, teile dies durch die Wurzel aus 49, also durch 7, giebt $\frac{23}{35}$.

Hierauf folgt der oben (p. 13) schon angeführte Schluſs.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, daſs dieses Werk dasjenige sei, das Moses ben Tibbon ins Hebräische übersetzt hat (immerhin wäre noch eine Kollation mit dem Ms. des Vaticans zu wünschen, die mir leider unmöglich war); ebenso können wir die Angabe Ibn Chaldûns, daſs dieses Buch die Grundlage für den *Talchîṣ* des Ibn el-Bennâ gebildet habe, als richtig annehmen, man wird beim Studium beider Schriften Vergleichungspunkte in hinreichender Zahl finden, auf die wesentlichsten habe ich jeweilen den Leser aufmerksam gemacht; der Stoff, die Darstellungsweise und die Verfahrungsarten bei den verschiedenen Operationen sind also im Groſsen und Ganzen dieselben, nur die Anordnung des Stoffes ist eine andere, und diese Änderung war sehr geboten, denn das Buch el-Ḥaṣṣârs zeichnet sich, wie ich oben schon angedeutet habe und wie auch jeder Leser es finden wird, durch groſse Inkonsequenz in der Anordnung aus. Es ist übrigens möglich und keineswegs unwahrscheinlich, daſs el-Ḥaṣṣâr selbst eine Umarbeitung und Verkürzung seines Werkes vorgenommen hat, und daſs dieser Auszug aus seiner gröſsern Arbeit vielleicht „das kleine Buch des Ḥaṣṣâr" (*kitâb el- ḥaṣṣâr el- ṣaġîr*, wie es bei Ibn Chaldûn heiſst) genannt worden ist; aus diesem Auszug (oder dieser Umarbeitung) hätte dann Ibn el-Bennâ einen weitern, seinen *Talchîṣ* gemacht; hierbei ist er aber zu kurz und zu gelehrt verfahren (bekanntlich giebt er keine Zahlenbeispiele, sondern nur Regeln), so daſs für praktische Zwecke ein Kommentar zu diesem *Talchîṣ* notwendig wurde; diesen hat dann el-Qalaṣâdî verfaſst, und hat sich darin, einige Vorteile und Neuerungen bei den Operationen und Änderungen in der Anordnung abgerechnet, wieder in deutlich erkennbarer Weise dem Originale genähert.

Wir haben gesagt, daſs der Stoff, den el-Ḥaṣṣârs Werk, der *Talchîṣ* und sein Kommentar behandeln, im Groſsen und Ganzen derselbe sei; es ist dies richtig bis auf die letzten arithmetischen Kapitel des *Talchîṣ*, nämlich diejenigen über die vier Operationen mit Wurzeln, und den Abschnitt über die Algebra, die bei el-Ḥaṣṣâr fehlen. Was die Algebra anbetrifft, so vergleiche man, was ich darüber oben p. 32 Note 4) gesagt habe; auch der Abschnitt über die Operationen mit Wurzeln mag im Originalwerk el-Ḥaṣṣârs gestanden haben, im Laufe der Zeit aber durch Verschulden der Abschreiber verloren gegangen sein; es wäre aber auch möglich, daſs Ibn el-Bennâ zum Werke seines Vorgängers eigene Zusätze gemacht hätte.

Was die Lebenszeit el-Ḥaṣṣârs anbetrifft, so können wir leider nur eine untere Grenze angeben, es ist dies die Blütezeit seines Übersetzers Moses ben Tibbon, d. h. die Jahre 1240—1275; wir glauben aber nicht, daſs seine Lebenszeit viel weiter zurückreiche, wahrscheinlich war er ein Gelehrter des 12. Jahrhunderts. Alle meine Nachforschungen in westarabischen Quellenwerken über diesen Mathematiker waren bis jetzt erfolglos.